A Lázaro

Prefacio

Este libro es el resultado de una serie de notas que fui elaborando a lo largo de los años para los cursos de Análisis Matemático I y II, que impartí en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Dichos cursos están dirigidos a estudiantes del 5° y 6° semestres de las carreras de matemáticas, actuaría y física, quienes ya han llevado cuatro cursos semestrales de cálculo diferencial e integral y uno o dos cursos de álgebra lineal. Están, pues, bien familiarizados con las nociones de límite, continuidad y diferenciabilidad para funciones de una y varias variables en espacios euclidianos, con la teoría y propiedades básicas de la integral de Riemann, y con las nociones de espacio vectorial y transformación lineal. Pero, sobre todo, tienen ya la madurez necesaria para acceder a un nivel mayor de abstracción.

El material de este libro se divide en tres partes que se pueden cubrir en dos cursos semestrales de 16 semanas cada uno: las dos primeras partes durante el primer semestre, y la tercera durante el segundo.

El desarrollo de la primera parte está motivado por un problema concreto: dados un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y dos puntos $p, q \in X$, ¿existe una trayectoria de p a q en X de longitud mínima? La búsqueda de una respuesta a esta pregunta nos conduce a introducir los conceptos básicos del análisis: espacios métricos, continuidad, compacidad y completitud. Aquí el énfasis está puesto en el estudio de estos conceptos en espacios de funciones.

Dos resultados centrales de esta primera parte son el teorema de punto fijo de Banach y el teorema de Arzelà-Ascoli. Aplicando el primero obtenemos resultados de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales e integrales. El segundo nos permite dar una respuesta al problema de existencia de trayectorias de longitud mínima, que fue nuestro punto de partida. Concluimos esta parte con el teorema de aproximación de Stone-Weierstrass.

La segunda parte del libro está dedicada al estudio de la diferenciabilidad en espacios de Banach. La noción de derivada y sus propiedades, en este contexto, son generalizaciones inmediatas de las del cálculo en $\mathbb{R}^n$ que los estudiantes ya conocen. Sin embargo, presentarlas en esta generalidad tiene varias ventajas. Permite poner de relieve algunos aspectos que quedan ocultos cuando consideramos funciones entre espacios euclidianos, como el papel que juega la continuidad de la derivada. Permite así mismo introducir algunos conceptos de manera sencilla, como las derivadas de orden superior. Además, hay aplicaciones importantes que requieren este nivel de generalidad. Por ejemplo, las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales, que modelan problemas importantes de la física, la ingeniería, la biología y otras disciplinas, resultan ser puntos críticos de una función diferenciable definida en un espacio de funciones.

El resultado central de esta segunda parte es el teorema de la función implícita, que nos permite introducir la noción de variedad y estudiar problemas de minimización en variedades.

Finalmente, la tercera parte del libro está dedicada a la integral de Lebesgue. La construimos a partir de la integral de Riemann de funciones reales continuas en un intervalo cerrado, con la que los estudiantes están bien familiarizados. Este enfoque permite acceder de manera sencilla al cálculo y estimación de integrales. Demostramos los teoremas fundamentales de la teoría de integración: el teorema de Fubini, los teoremas de convergencia monótona y convergencia dominada, y la fórmula de cambio de variable.

Por último, introducimos dos clases de espacios fundamentales en análisis y sus aplicaciones: los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ y los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Demostramos sus propiedades más importantes y algunos resultados fundamentales, como las desigualdades de Sobolev y el teorema de compacidad de Rellich-Kondrashov. Usamos los espacios de Sobolev para dar una formulación variacional de algunos problemas elípticos con condición de frontera y así probar la existencia de soluciones para dichos problemas.

Cada capítulo incluye un número amplio de ejercicios. Incluimos además retratos y algunos datos biográficos de los creadores de los conceptos y resultados que aparecen en este libro[1].

Mucho del material que compone este libro lo fui tomando prestado a lo largo de los años de los diferentes libros de texto que usé para preparar mis cursos. Cito en la bibliografía algunos de mis favoritos. Un par de demostraciones me las regaló Pablo Amster, especialista en lindos hallazgos, a quien agradezco su generosidad y su amistad.

De manera muy especial, quiero expresar mi agradecimiento a Nils Ackermann, quien impartió varias veces los cursos de análisis usando mis notas. Sus valiosos comentarios enriquecieron el contenido de este libro y me permitieron corregir un buen número de erratas que, irremediablemente, se me colaron por allí. Del mismo modo, agradezco a Judith Campos y a Juan Carlos Fernández la revisión cuidadosa que hicieron de mis notas, especialmente de las secciones de ejercicios, cuando colaboraron conmigo como ayudantes de los cursos que impartí. Muchas erratas fueron detectadas por mis estudiantes, especialmente por Paco Ruiz Montañez, a quien agradezco su ayuda.

[1] Una fuente excelente para conocer más a estos extraordinarios personajes es el sitio The MacTutor History of Mathematics Archive http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

Escribí este texto para mis alumnos. Son ellos su razón de ser y sus provocadores. Sus preguntas, sus comentarios o, simplemente, sus miradas de asombro o de duda, me motivaron a procurar mayor claridad, a intentar mejores maneras de contar las cosas, a buscar ejemplos, a inventar ejercicios, a corregir errores. Su alegría y su entusiasmo por aprender hacen de mi labor docente una actividad gozosa y plena de sentido.

Finalmente, agradezco a Laura Ortiz y a Nils Ackermann el buen empujón que me dieron para transformar mis notas en libro, y su acogida en la colección *papirhos*. Gracias también a Pablo Rosell por su cuidadosa labor de formación de texto y por rehacer y mejorar mis rudimentarias figuras.

Ciudad Universitaria, a 1 de junio de 2015.

Durante la elaboración de este texto su autora contó con el apoyo de los proyectos CONACYT 129847 y PAPIIT-DGAPA-UNAM IN106612.

Índice general

Parte I

Continuidad, compacidad y completitud

1

Motivación

El siguiente problema guiará el desarrollo de la primera parte de este texto.

Problema 1.1. *Dados un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y dos puntos $p, q \in X$, ¿existe una trayectoria de p a q en X de longitud mínima?*

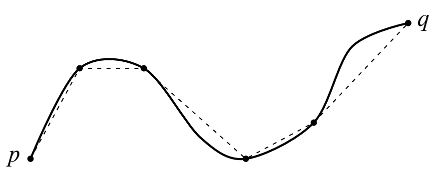
Precisemos esta pregunta. Una *trayectoria* de p a q en X es una función continua $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sigma(0) = p, \quad \sigma(1) = q \qquad \text{y} \qquad \sigma(t) \in X \quad \forall t \in [0,1].$$

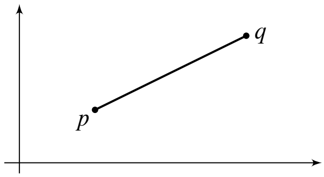
Su *longitud* se define como

$$\mathfrak{L}(\sigma) := \sup\left\{ \sum_{k=1}^{m} \|\sigma(t_{k-1}) - \sigma(t_k)\| : 0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = 1,\ m \in \mathbb{N} \right\}, \tag{1.1}$$

donde $\|x - y\| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ denota la distancia de x a y. Observa que $\mathfrak{L}(\sigma) \geq \|p - q\|$.



Una trayectoria de p a q en X es *de longitud mínima* si su longitud es menor o igual a la de todas las demás. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^n$, la trayectoria $\sigma(t) = (1-t)p + tq$ cumple que $\mathfrak{L}(\sigma) = \|p - q\|$. De modo que σ es una trayectoria de longitud mínima de p a q en $\mathbb{R}^n$.



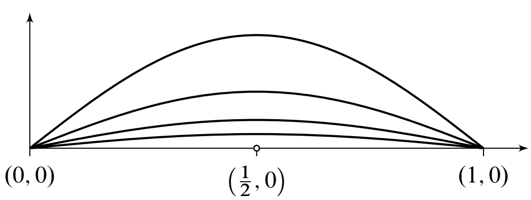
Sin embargo, si $X \neq \mathbb{R}^n$ no siempre existe una trayectoria de longitud mínima, como lo muestra el siguiente ejemplo. Recuerda que, si σ es continuamente diferenciable, entonces la longitud de σ está dada por la integral[1]

$$\mathfrak{L}(\sigma) = \int_0^1 \left\| \sigma'(t) \right\| dt.$$

Ejemplo 1.2. *No existe una trayectoria de longitud mínima de* $p = (0,0)$ *a* $q = (1,0)$ *en* $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq \left(\frac{1}{2},0\right)\right\}$.

Demostración. Considera las trayectorias $\sigma_k(t) = \left(t, \frac{1}{k} \operatorname{sen} \pi t\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Su longitud satisface

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\sigma_k) &= \int_0^1 \left\| \sigma_k' \right\| = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 \cos^2 \pi t}\; dt \\ &< \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{k} \left|\cos \pi t\right|\right) dt = 1 + \frac{2}{k}.\end{aligned}$$



Por tanto, $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{L}(\sigma_k) = 1$. De modo que, si existiera una trayectoria de longitud mínima de p a q en X, ésta debería tener longitud 1. Pero cualquier trayectoria de p a q en $\mathbb{R}^2$ de longitud 1 pasa por el punto $(\frac{1}{2}, 0)$, que no pertenece a X. □

Este ejemplo muestra que el Problema 1.1 no es un problema trivial. Para intentar resolverlo, empezaremos expresándolo como un problema de minimización.

[1] Consulta, por ejemplo, [MT98].

Denotemos por $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ al conjunto de todas las trayectorias de p a q en X. Podemos entonces considerar a la longitud como una función definida en dicho conjunto, es decir,

$$\mathfrak{L}\colon \mathcal{T}_{p,q}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \mathfrak{L}(\sigma) := \text{longitud de } \sigma.$$

Diremos que la función $\mathfrak{L}$ *alcanza su mínimo en* $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ si existe una trayectoria $\sigma_0 \in \mathcal{T}_{p,q}(X)$ tal que

$$\mathfrak{L}(\sigma_0) \leq \mathfrak{L}(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{T}_{p,q}(X).$$

En estos términos el Problema 1.1 se expresa como sigue.

Problema 1.3. *¿Alcanza $\mathfrak{L}$ su mínimo en $\mathcal{T}_{p,q}(X)$?*

En los cursos de cálculo diferencial e integral tratamos un problema parecido y vimos el siguiente resultado[2].

Teorema 1.4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua y K es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces f alcanza su mínimo en K, es decir, existe $x_0 \in K$ tal que*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in K.$$

Ahora bien, como $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ es un conjunto de funciones y no de puntos en $\mathbb{R}^n$, no tiene sentido aplicar este teorema al problema que nos interesa. Pero sí podemos inspirarnos en él. El gran matemático francés Henri Poincaré afirmó lo siguiente[3]:

“La matemática es el arte de nombrar de la misma manera cosas distintas.”

Entonces, ¿será posible pensar a las trayectorias como si fuesen puntos? ¿El Teorema 1.4 tendrá algún sentido para la función longitud? ¿Qué querría decir que la función $\mathfrak{L}\colon \mathcal{T}_{p,q}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es continua o que un subconjunto de $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ es compacto?

El análisis matemático da respuesta a este tipo de preguntas. Profundiza en los conceptos y los resultados que aprendimos en cálculo, captura su esencia, y los extiende a otros espacios distintos del euclidiano. Muy especialmente, a espacios de funciones, como el conjunto de trayectorias $\mathcal{T}_{p,q}(X)$. Y a funciones como $\mathfrak{L}$, cuyo dominio no es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sino un conjunto de funciones.

Los espacios de funciones aparecen de manera natural en muchos problemas de las matemáticas y de sus aplicaciones. Por ejemplo, las soluciones de una ecuación diferencial son funciones. Veremos que el análisis matemático nos permite demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

[2] Consulta, por ejemplo, [CJ74].
[3] Consulta [Bel37].

En la primera parte de estas notas introduciremos y estudiaremos los conceptos de *continuidad*, *compacidad* y *completitud* en espacios muy generales. Estas nociones se definen a partir de un concepto muy sencillo: el concepto de distancia. Los conjuntos provistos de una distancia se llaman *espacios métricos* y son el objeto del siguiente capítulo. Veremos aplicaciones interesantes de esos conceptos y daremos una respuesta al Problema 1.1.

2

Espacios métricos

Algunos conceptos fundamentales, como el paso al límite o la continuidad de funciones en espacios euclidianos, se definen exclusivamente en términos de la distancia. Otras propiedades de los espacios euclidianos, como su estructura de espacio vectorial, no intervienen en la definición de estos conceptos.

Empezaremos pues considerando conjuntos dotados de una *distancia*, a los que se denomina *espacios métricos*. El matemático francés Maurice Fréchet[1] introdujo esta noción, que juega un papel fundamental en las matemáticas modernas.

Maurice Fréchet

Daremos en este capítulo ejemplos interesantes de espacios métricos que aparecen de manera natural en muchas aplicaciones, algunas de las cuales se verán más adelante.

[1] Maurice René Fréchet (1878-1973) nació en Maligni, Francia. En la escuela secundaria fue alumno de Jacques Hadamard, quien reconoció su potencial y decidió asesorarlo de manera personal. Estudió matemáticas en la École Normale Supérieure de París. Introdujo la noción de espacio métrico en 1906, en su tesis de doctorado.

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1. *Sea X un conjunto. Una* ***métrica*** *(o* ***distancia****) en X es una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes tres propiedades:*

(M1) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.

(M3) $d\,(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in X$. *A esta desigualdad se le llama la* ***desigualdad del triángulo****.*

Un ***espacio métrico*** *es un conjunto X provisto de una métrica d. Lo denotaremos por (X, d), o simplemente por X cuando no haga falta especificar quién es su métrica.*

Veamos que la distancia entre dos puntos nunca es negativa.

Proposición 2.2. $d(x, y) \geq 0$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.

Demostración. De las propiedades (M1), (M3) y (M2) respectivamente se sigue que

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

En consecuencia, $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$. □

Los siguientes dos ejemplos de espacios métricos son bien conocidos.

Ejemplo 2.3. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la distancia usual*

$$d(x, y) := |x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y, \\ y - x & \text{si } x \leq y, \end{cases}$$

es un espacio métrico.

Ejemplo 2.4. *El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual*

$$d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, es un espacio métrico.

La demostración de estas afirmaciones se propone como ejercicio [Ejercicio 2.33]. Podemos darle a $\mathbb{R}^n$ otras métricas interesantes, por ejemplo las siguientes dos.

Ejemplo 2.5. *La función*

$$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *es una métrica para el espacio euclidiano* $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Las propiedades (M1) y (M2) son inmediatas y la propiedad (M3) se sigue de la desigualdad del triángulo en $\mathbb{R}$ que afirma que, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Sumando ambos lados de estas desigualdades para $i = 1, \ldots, n$ obtenemos

$$d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z).$$

En consecuencia, d_1 es una métrica. □

Ejemplo 2.6. *La función*

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\},$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *es una métrica para el espacio euclidiano* $\mathbb{R}^n$.

La demostración es sencilla y se propone como ejercicio [Ejercicio 2.34].

Introduciremos ahora métricas análogas en espacios de sucesiones (x_k) de números reales.

Ejemplo 2.7. *Sea ℓ_∞ el conjunto de todas las sucesiones acotadas de números reales, es decir, de las sucesiones $\overline{x} = (x_k)$ para las cuales existe $c \in \mathbb{R}$ (que depende de $\overline{x}$) tal que $|x_k| < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$d_\infty(\overline{x}, \overline{y}) := \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k|, \qquad \overline{x} = (x_k),\ \overline{y} = (y_k) \in \ell_\infty.$$

Entonces d_∞ toma valores en $\mathbb{R}$ y es una métrica en ℓ_∞.

Demostración. Sean $\overline{x} = (x_k)$, $\overline{y} = (y_k)$ sucesiones acotadas, y sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|x_k| < c_1$ y $|y_k| < c_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De la desigualdad del triángulo para números reales se sigue que

$$|x_k - y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq c_1 + c_2 \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión $(x_k - y_k)$ está acotada y, por tanto,

$$d_\infty(\overline{x}, \overline{y}) = \sup_{k\geq 1} |x_k - y_k| \in \mathbb{R}.$$

Es inmediato comprobar que d_∞ satisface las propiedades (M1) y (M2). Aplicando nuevamente desigualdad del triángulo para números reales obtenemos que, si $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \ell_\infty$, entonces

$$|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \leq d_\infty(\overline{x}, \overline{z}) + d_\infty(\overline{z}, \overline{y}) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$d_\infty(\overline{x}, \overline{y}) \leq d_\infty(\overline{x}, \overline{z}) + d_\infty(\overline{z}, \overline{y}) \qquad \forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \ell_\infty,$$

es decir, d_∞ satisface (M3). □

En los siguientes ejemplos requeriremos la noción de convergencia de una serie. Recordemos que una serie de números reales

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

converge, si la sucesión (s_n) de sumas finitas

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$$

converge. En tal caso, se denota

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Si $x_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (s_n) es creciente. En ese caso, la serie converge si y sólo si la sucesión (s_n) está acotada y, si eso ocurre, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\geq 1} s_n.$$

Ejemplo 2.8. *Sea ℓ_1 el conjunto de las sucesiones (x_k) de números reales tales que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

converge, y sea

$$d_1(\overline{x}, \overline{y}) := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|, \qquad \overline{x} = (x_k),\ \overline{y} = (y_k) \in \ell_1.$$

Entonces d_1 *toma valores en* $\mathbb{R}$ *y es una métrica en* ℓ_1.

Demostración. De la desigualdad del triángulo para números reales,

$$|x_k - y_k| \leq |x_k| + |y_k|,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|.\end{aligned}$$

Por consiguiente, si $(x_k), (y_k) \in \ell_1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|$ converge y se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|. \tag{2.1}$$

Es fácil comprobar que d_1 satisface (M1) y (M2). La propiedad (M3) se sigue de la desigualdad (2.1) reemplazando x_k por $x_k - z_k$ y y_k por $y_k - z_k$, es decir,

$$d_1(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - y_k| = d_1(\overline{x}, \overline{z}) + d_1(\overline{z}, \overline{y}),$$

para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \ell_1$. □

2.2. Espacios normados

Nota que todos los ejemplos anteriores, además de la estructura geométrica dada por la distancia, poseen una estructura algebraica: la de espacio vectorial. Las métricas más interesantes en un espacio vectorial son las inducidas por una norma.

Definición 2.9. *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$. *Una* ***norma*** *en* V *es una función* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *que tiene las siguientes propiedades:*

(N1) $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$, (N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ *para cualesquiera* $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para cualesquiera* $v, w \in V$.

Un ***espacio normado*** *es un espacio vectorial* V *provisto de una norma* $\|\cdot\|$. *Lo denotaremos por* $(V, \|\cdot\|)$, *o simplemente por* V *cuando no haga falta especificar quién es su norma.*

Proposición 2.10. *Todo espacio normado* $(V, \|\cdot\|)$ *es un espacio métrico con la métrica dada por*

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

Esta métrica se llama la ***métrica inducida*** *por la norma* $\|\cdot\|$.

La demostración es sencilla y se propone como ejercicio [Ejercicio 2.37].

Todas las métricas consideradas en los ejemplos anteriores están inducidas por una norma. Veamos otros ejemplos.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } p \in [1, \infty), \\ \|x\|_\infty &:= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

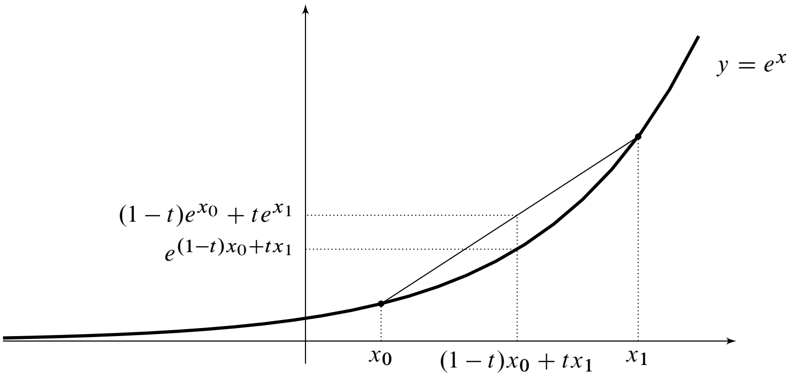
Es sencillo comprobar que $\|\cdot\|_p$ cumple las propiedades (N1) y (N2). Para probar que cumple la propiedad (N3) requerimos unas desigualdades que demostraremos a continuación.

Lema 2.11 (Desigualdad de Young)**.** *Sean* $p, q \in (1, \infty)$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces, para cualquier par de números reales* $a, b \geq 0$ *se cumple que*

$$ab \leq \tfrac{1}{p} a^p + \tfrac{1}{q} b^q.$$

Demostración. Si $a = 0$ o $b = 0$ la desigualdad es obvia, de modo que podemos suponer que $ab > 0$. La función exponencial es una función convexa, es decir, para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$ se cumple que

$$(1 - t)e^{x_0} + t e^{x_1} \geq e^{[(1-t)x_0 + t x_1]}.$$

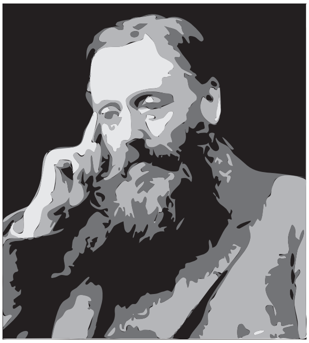


Tomando $x_0 = \ln a^p$, $x_1 = \ln b^q$ y $t = \frac{1}{q}$ obtenemos

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq e^{(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q)} = ab.$$

Esta es la desigualdad deseada. $\square$

Aplicaremos la desigualdad de Young[2] para demostrar la desigualdad de Hölder[3].



William Henry Young

Otto Hölder

[2] William Henry Young (1863-1942) nació en Londres, Inglaterra. Estudió matemáticas en Cambridge y fue profesor en diversas universidades europeas. Publicó esta desigualdad en 1912.

[3] Otto Ludwig Hölder (1859-1937) nació en Stuttgart, Alemania. Estudió en las universidades de Stuttgart y Berlín, donde fue estudiante de Kronecker, Weierstrass y Kummer. Obtuvo el doctorado en la Universidad de Tübingen en 1882. Descubrió la desigualdad que lleva su nombre en 1884, cuando trabajaba en la convergencia de series de Fourier.

Proposición 2.12 (Desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$). *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para cualesquiera $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

donde $xy := (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$.

Demostración. La afirmación es trivial si $x = 0$ o si $y = 0$. Supongamos pues que ambos son distintos de cero. Aplicando la desigualdad de Young a

$$a_k := \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \qquad \text{y} \qquad b_k := \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$$

obtenemos

$$\frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{|x_k|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q \|y\|_q^q}.$$

Sumando todas estas desigualdades para $k = 1, \ldots, n$, concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|\right) &\leq \frac{1}{p \|x\|_p^p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right) + \frac{1}{q \|y\|_q^q} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $\|x\|_p \|y\|_q$ obtenemos la desigualdad deseada. □

Estamos listos para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.13. *Para cada $p \in [1, \infty]$, la función $\|\cdot\|_p$ definida en* (2.2) *es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Es sencillo ver que $\|\cdot\|_p$ cumple las propiedades (N1) y (N2). Demostremos la propiedad (N3), es decir, que para todo $p \in [1, \infty]$ se cumple que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Para $p = \infty$ esta desigualdad es consequencia inmediata de la desigualdad del triángulo para números reales [Ejercicio 2.34]. El caso $p = 1$ se probó en el Ejemplo 2.5.

Tomemos ahora $p \in (1, \infty)$. La afirmación es trivial si $x = 0$. Supongamos pues que $x \neq 0$ y apliquemos la desigualdad de Hölder a x y $((|x_1| + |y_1|)^{p-1}, \dots, (|x_n| + |y_n|)^{p-1})$. Definiendo $q := \frac{p}{p-1}$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \, (|x_k| + |y_k|)^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}},$$

Análogamente,

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| \, (|x_k| + |y_k|)^{p-1} \leq \|y\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sumando las dos desigualdades anteriores obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dividiendo ambos lados de esta desigualdad entre

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

y usando la desigualdad del triángulo para números reales $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$, concluimos que

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \, .$$

Ésta es la desigualdad deseada. □

Notación 2.14. *Con el fin de distinguir cuál de todas estas normas estamos considerando, usaremos la notación*

$$\mathbb{R}^n_p := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p), \qquad p \in [1, \infty], \tag{2.4}$$

para designar al espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$. Escribiremos simplemente $\mathbb{R}^n$ en vez de $\mathbb{R}^n_2$ para designar a $\mathbb{R}^n$ con la norma usual, a la que denotaremos simplemente por

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{2.5}$$

Nota que las métricas d_1, d_2 y d_∞ consideradas en los Ejemplos 2.4 al 2.6 son las inducidas por las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$, respectivamente.

Consideremos ahora espacios de sucesiones. Las sucesiones de números reales se pueden sumar y multiplicar por escalares término a término, es decir, si $\overline{x} = (x_k)$ y $\overline{y} = (y_k)$ son sucesiones de números reales y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen

$$\overline{x} + \overline{y} := (x_k + y_k) \qquad \text{y} \qquad \lambda\overline{x} := (\lambda x_k).$$

Con estas operaciones el conjunto de todas las sucesiones de números reales es un espacio vectorial. Para espacios de sucesiones adecuados podemos definir normas análogas a las definidas para $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.15. *(a) Si $p \in [1, \infty)$, el conjunto ℓ_p de todas las sucesiones de números reales (x_k) tales que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

converge es un espacio vectorial y

$$\|(x_k)\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.6}$$

es una norma en ℓ_p.

(b) El conjunto ℓ_∞ de todas las sucesiones acotadas de números reales es un espacio vectorial y

$$\|(x_k)\|_\infty := \sup_{k \geq 1} |x_k| \tag{2.7}$$

es una norma en ℓ_∞.

Demostración. Es sencillo ver que $\lambda\overline{x} \in \ell_p$ para cualesquiera $\overline{x} \in \ell_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y que $\|\cdot\|_p$ cumple las propiedades (N1) y (N2) [Ejercicio 2.41]. Probaremos a continuación que $\overline{x} + \overline{y} \in \ell_p$ si $\overline{x}, \overline{y} \in \ell_p$ y que $\|\cdot\|_p$ cumple la propiedad (N3).

(a): Si $p \in [1, \infty)$ y $(x_k), (y_k) \in \ell_p$, como la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^n$ satisface la propiedad (N3), se tiene que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|(x_k)\|_p + \|(y_k)\|_p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p$ converge y se cumple que

$$\|(x_k + y_k)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|(x_k)\|_p + \|(y_k)\|_p .$$

(b): El caso $p = \infty$ se probó en el Ejemplo 2.7. □

Si $p \in [1, \infty)$ la desigualdad (N3) en ℓ_p se llama la **desigualdad de Minkowski para series**. Nota que las métricas d_1 y d_∞ consideradas en los Ejemplos 2.8 y 2.7 son las inducidas por las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ que acabamos de definir.

No cualquier métrica en un espacio vectorial está inducida por una norma. De hecho, a cualquier conjunto le podemos dar la métrica siguiente.

Ejemplo 2.16. *Sea X un conjunto arbitrario. La función*

$$d_{\mathrm{disc}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

*es una métrica en X, llamada la **métrica discreta**. El espacio $X_{\mathrm{disc}} := (X, d_{\mathrm{disc}})$ se llama un **espacio discreto**.*

Es sencillo comprobar que en un espacio vectorial no trivial ninguna norma induce la métrica discreta [Ejercicio 2.40].

2.3. Espacios de funciones

Denotemos por $\mathcal{C}^0[a, b]$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La suma de funciones y el producto de una función por un escalar, definidos como

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \qquad f, g \in \mathcal{C}^0[a, b],\ \lambda \in \mathbb{R},$$

le dan a $\mathcal{C}^0[a, b]$ la estructura de espacio vectorial. Dada $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$ definimos

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } p \in [1, \infty), \\ \|f\|_\infty &:= \text{máx}\,\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Demostraremos a continuación que éstas son normas en $\mathcal{C}^0[a, b]$. Empecemos observando lo siguiente.

Lema 2.17. *Sean $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ y $p \in [1,\infty]$. Entonces, $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$.*

Demostración. Para $p = \infty$ esta afirmación es consecuencia inmediata de la definición (2.8). Si $p \in [1,\infty)$, como $|f(x)|^p$ es una función continua y no negativa, se tiene que

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p \, dx = 0 \quad \iff \quad |f(x)|^p = 0 \ \forall x \in [a,b].$$

En consecuencia, $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$. □

Probaremos ahora la desigualdad de Hölder para integrales. Su demostración es análoga a la correspondiente para $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.18 (Desigualdad de Hölder para integrales)**.** *Sean $p, q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para cualquier par de funciones continuas $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Demostración. La afirmación es trivial si $f = 0$ o si $g = 0$. Supongamos pues que ambas funciones son distintas de cero. Para cada $x \in [a,b]$, definimos

$$a_x := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \qquad \text{y} \qquad b_x := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}.$$

Aplicando la desigualdad de Young (Lema 2.11) a estos números obtenemos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \, \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \, \|g\|_q^q},$$

e integrando ambos lados de esta desigualdad concluimos que

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|^p \, dx}{p \, \|f\|_p^p} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q \, dx}{q \, \|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por $\|f\|_p \, \|g\|_q$ obtenemos la desigualdad deseada. □

Es fácil ver que también vale la desigualdad de Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$$

[Ejercicio 2.47]. A partir de la desigualdad de Hölder se obtiene la desigualdad de Minkowski[4].

Hermann Minkowski

Proposición 2.19 (Desigualdad de Minkowski para integrales)**.** *Sea* $p \in [1, \infty]$. *Entonces,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{C}^0[a, b].$$

Demostración. Los casos $p = 1, \infty$ se proponen como ejercicio [Ejercicio 2.46].

Sea $p \in (1, \infty)$. Si $f = 0$ la afirmación es evidente. Supongamos pues que $f \neq 0$. Sea $h(x) = (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$. Aplicando la desigualdad de Hölder para integrales (Proposición 2.18) a las funciones f, h, y g, h respectivamente, obtenemos

$$\int_a^b |f(x)| \, (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1} dx \leq \|f\|_p \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$
$$\int_a^b |g(x)| \, (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1} dx \leq \|g\|_p \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

y sumando estas desigualdades concluimos que

$$\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

[4] Hermann Minkowski (1864-1909) nació en Lituania, entonces parte del Imperio Ruso. Obtuvo el doctorado en 1885 en la Universidad Albertina de Königsberg. Fue profesor en la ETH de Zürich y en la Universidad de Göttingen, ciudad en la que murió.

Dividiendo ambos lados de esta desigualdad entre

$$\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

y usando la desigualdad del triángulo para números reales $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ y la monotonía de la integral obtenemos

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, , \end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

Ahora podemos concluir lo siguiente.

Proposición 2.20. *Para cada* $p \in [1, \infty]$ *la función* $\|\cdot\|_p$ *definida en* (2.8) *es una norma en* $\mathcal{C}^0[a,b]$.

Demostración. Las propiedades (N1) y (N3) se probaron en el Lema 2.17 y la Proposición 2.19 respectivamente. La propiedad (N2) es consecuencia inmediata de la linealidad de la integral. □

Notación 2.21. *Con el fin de distinguir cuál de todas estas normas estamos considerando, usaremos la notación*

$$\mathcal{C}_p^0[a,b] := (\mathcal{C}^0[a,b], \|\cdot\|_p), \qquad p \in [1, \infty],$$

para designar al espacio de las funciones continuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *con la norma* $\|\cdot\|_p$. *Como veremos más adelante, la norma más adecuada en el espacio de funciones continuas* $\mathcal{C}^0[a,b]$ *es la norma* $\|\cdot\|_\infty$. *Por ello, escribiremos simplemente*

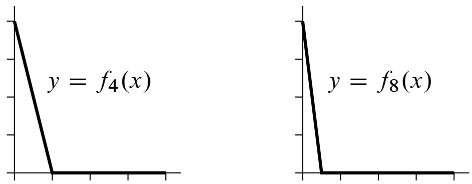
$$\mathcal{C}^0[a,b] := (\mathcal{C}^0[a,b], \|\cdot\|_\infty).$$

Observa que la distancia $\|f - g\|_\infty$ entre dos funciones continuas f y g es pequeña si sus gráficas están cerca la una de la otra, mientras que la distancia $\|f - g\|_1$ es pequeña si el área de la región delimitada por sus gráficas es pequeña. Así, dos funciones continuas pueden estar muy cerca según la norma $\|\cdot\|_1$ y a distancia arbitrariamente grande según la norma $\|\cdot\|_\infty$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.22. *Sean $R > 0$ y $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f_k(x) = \begin{cases} R(1-kx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\|f_k\|_\infty = R$ para toda $k \in \mathbb{N}$, mientras que $\|f_k\|_1 = \frac{R}{2k}$.



Es decir, según la norma $\|\cdot\|_\infty$ todas las funciones f_k distan exactamente R de la función constante igual a 0, mientras que, según la norma $\|\cdot\|_1$, dichas funciones se acercan cada vez más a la función 0 conforme k crece.

Las normas definidas en esta sección satisfacen las siguientes relaciones.

Proposición 2.23. *Para toda $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ se cumple que*

$$\|f\|_s \leq (b-a)^{\frac{r-s}{rs}} \|f\|_r \qquad \forall 1 \leq s < r < \infty,$$
$$\|f\|_s \leq (b-a)^{\frac{1}{s}} \|f\|_\infty \qquad \forall 1 \leq s < \infty.$$

Demostración. Si $1 \leq s < r < \infty$, aplicando la desigualdad de Hölder (Proposición 2.18) con $p = \frac{r}{r-s}$ y $q = \frac{r}{s}$ a la función constante con valor 1 y a la función $|f|^s$ obtenemos que

$$\int_a^b |f(x)|^s \, dx \leq \left(\int_a^b dx \right)^{\frac{r-s}{r}} \left(\int_a^b |f(x)|^r \, dx \right)^{\frac{s}{r}}$$
$$= (b-a)^{\frac{r-s}{r}} \left(\int_a^b |f(x)|^r \, dx \right)^{\frac{s}{r}}.$$

Por otra parte, de la monotonía y la linealidad de la integral se sigue que

$$\int_a^b |f(x)|^s \, dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty^s \, dx = (b-a) \|f\|_\infty^s.$$

Elevando a la potencia $\frac{1}{s}$ cada una de las desigualdades anteriores obtenemos las desigualdades deseadas. □

2.4. El espacio de funciones acotadas

El siguiente espacio juega un papel importante en muchas aplicaciones, algunas de las cuales se estudiarán más adelante.

Sean S un conjunto no vacío y $X = (X, d)$ un espacio métrico.

Definición 2.24. *Una función $f : S \to X$ es **acotada** si existen $c \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$ tales que*

$$d(f(z), x_0) \leq c \qquad \forall z \in S.$$

Denotamos por

$$\mathcal{B}(S, X) := \{f : S \to X : f \text{ es acotada}\}$$

y definimos

$$d_\infty(f, g) := \sup_{z \in S} d(f(z), g(z)).$$

Proposición 2.25. *d_∞ es una métrica en $\mathcal{B}(S, X)$. Esta métrica se llama la **métrica uniforme**.*

Demostración. Veamos primero que, si $f, g \in \mathcal{B}(S, X)$, entonces $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}$. Sean $x_0, x_1 \in X$ y $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$d(f(z), x_0) \leq c_0 \qquad \text{y} \qquad d(g(z), x_1) \leq c_1 \qquad \forall z \in S.$$

Como d satisface (M3) se tiene que para toda $z \in S$

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), x_0) + d(x_0, x_1) + d(x_1, g(z)) \leq c_0 + d(x_0, x_1) + c_1.$$

En consecuencia, $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}$. Probemos ahora que d_∞ es una métrica para $\mathcal{B}(S, X)$. Como d satisface (M1) se tiene que

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad d(f(z), g(z)) = 0 \quad \forall z \in S \\ &\Leftrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in S, \end{aligned}$$

es decir, d_∞ satisface (M1). La propiedad (M2) para d_∞ se sigue inmediatamente de la misma propiedad para d. Sean $f, g, h \in \mathcal{B}(S, X)$. La propiedad (M3) de d implica que

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), h(z)) + d(h(z), g(z)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \qquad \forall z \in S.$$

En consecuencia,

$$d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g),$$

es decir, d_∞ satisface (M3). □

Si V es un espacio vectorial, entonces el conjunto de todas las funciones de S a V es un espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z), \qquad (\lambda f)(z) := \lambda f(z).$$

Si V es un espacio normado con norma $\|\cdot\|$ entonces $\mathcal{B}(S,V)$ es un espacio vectorial y

$$\|f\|_\infty := \sup_{z\in S} \|f(z)\|$$

es una norma en $\mathcal{B}(S,V)$. La demostración de estas afirmaciones es un ejercicio sencillo [Ejercicio 2.52]. Esta norma se llama la **norma uniforme**.

2.5. Subespacios métricos e isometrías

Los subconjuntos de un espacio métrico heredan su métrica.

Definición 2.26. *Si $X = (X,d)$ es un espacio métrico y A es un subconjunto de X definimos*

$$d_A(x,y) := d(x,y) \qquad \forall x,y \in A.$$

*Esta es claramente una métrica en A, que se llama la **métrica inducida** por d. Al conjunto A con esta métrica se le llama un **subespacio métrico** de X.*

Nota que toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es acotada. En particular, $\mathcal{C}^0[a,b] \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. La norma definida en (2.8) coincide con la norma inducida en $\mathcal{C}^0[a,b]$ por la norma uniforme de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$.

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 2.27. *Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $p,q \in X$, el conjunto $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ de todas las trayectorias de p a q en X, definido en el* Capítulo 1*, es un subconjunto de $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}^n)$. Así que $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ resulta ser un espacio métrico con la métrica inducida por la métrica uniforme de $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}^n)$.*

A un subconjunto de un espacio métrico se le pueden dar otras métricas, distintas de la inducida. Una métrica muy natural sobre la esfera es la siguiente.

Ejemplo 2.28. *Sean $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $x,y \in \mathbb{S}^{n-1}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{T}_{x,y}(\mathbb{S}^{n-1})$ de todas las trayectorias de x a y en $\mathbb{S}^{n-1}$. Definimos*

$$d(x,y) := \inf\left\{\mathfrak{L}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(\mathbb{S}^{n-1})\right\},$$

donde $\mathfrak{L}(\sigma)$ es la longitud de la trayectoria σ definida en (1.1)*. Ésta es una métrica en $\mathbb{S}^{n-1}$, distinta de la métrica inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.*

La demostración de estas afirmaciones se propone como ejercicio [Ejercicio 2.57].

Definición 2.29. *Sean $X = (X, d_X)$ y $Y = (Y, d_Y)$ dos espacios métricos. Una función $\phi\colon X \to Y$ es una **isometría** si*

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Por ejemplo, si a un subconjunto A de un espacio métrico de X le damos la métrica inducida, entonces la inclusión $\iota\colon A \hookrightarrow X$ es una isometría. Por otra parte, observemos que toda isometría es inyectiva. En efecto, si $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ entonces $d_X(x_1, x_2) = d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = 0$ y, en consecuencia, $x_1 = x_2$.

Desde el punto de vista geométrico dos espacios métricos se consideran iguales si existe una biyección entre ellos que es una isometría. Así pues, una isometría $\phi\colon X \to Y$ nos permite identificar a X con el subespacio métrico $\phi(X) := \{\phi(x) : x \in X\}$ de Y. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.30. *Para cada $p \in [1, \infty]$, la función*

$$\iota\colon \mathbb{R}^n_p \to \ell_p, \qquad \iota(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

es una isometría. Es decir, podemos identificar a $\mathbb{R}^n_p$ con el subespacio de ℓ_p que consiste de las sucesiones (x_k) tales que $x_k = 0$ para $k > n$.

Ejemplo 2.31. *La identidad*

$$\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \to \mathcal{C}^0_1[0,1], \qquad \mathrm{id}(f) = f,$$

no es una isometría. En efecto, la función f_k del Ejemplo 2.22 *satisface*

$$\frac{R}{2k} = \|f_k\|_1 \neq \|f_k\|_\infty = R,$$

es decir, la distancia de f_k a la función constante 0 según la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_1$ es $\frac{R}{2k}$, mientras que su distancia según la métrica inducida por $\|\cdot\|_\infty$ es R.

2.6. Ejercicios

Ejercicio 2.32. *Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Prueba que, para cualesquiera $w, x, y, z \in X$, se cumple que*

$$|d(w, x) - d(y, z)| \leq d(w, y) + d(x, z).$$

Ejercicio 2.33. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) La distancia usual en $\mathbb{R}$, definida en el Ejemplo 2.3*, es una métrica.*

(b) La distancia usual en $\mathbb{R}^n$, definida en el Ejemplo 2.4*, es una métrica.*

Ejercicio 2.34. *Prueba que* $\|x\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ *donde* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, es una norma en* $\mathbb{R}^n$*.*

Ejercicio 2.35. *¿Es la función* $\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, dada por* $\mu(x) = \text{mín}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$*, una norma en* $\mathbb{R}^n$*? Justifica tu afirmación.*

Ejercicio 2.36. *Muestra que la desigualdad* (2.3) *en* $\mathbb{R}^n$ *no se cumple si* $p = \frac{1}{2}$*.*

Ejercicio 2.37. *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Prueba que la función* $d(v, w) := \|v - w\|$ *es una métrica en* V*.*

Ejercicio 2.38. *Describe los conjuntos* $\bar{B}_p(0, 1) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\right\}$ *para* $p = 1, 2, \infty$*. Haz un dibujo de cada uno de ellos.*

Ejercicio 2.39. *Describe los conjuntos*

$$\begin{aligned} \bar{B}_{\text{disc}}(0, 1) &:= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : d_{\text{disc}}(x, 0) \leq 1\right\}, \\ B_{\text{disc}}(0, 1) &:= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : d_{\text{disc}}(x, 0) < 1\right\}, \end{aligned}$$

donde d_{disc} *es la métrica discreta en* $\mathbb{R}^2$*.*

Ejercicio 2.40. *Sea* V *un espacio vectorial distinto de* $\{0\}$*. Prueba que no existe ninguna norma en* V *que induzca la métrica discreta, es decir, no existe ninguna norma en* V *tal que*

$$\|v - w\| = \begin{cases} 0 & \text{si } v = w, \\ 1 & \text{si } v \neq w. \end{cases}$$

Ejercicio 2.41. *Prueba que, para cada* $p \in [1, \infty]$*, la función* $\|\cdot\|_p$ *definida en* (2.6) *y* (2.7) *satisface*

(N1) $\|x\|_p = 0$ *si y sólo si* $x = 0$ *en* ℓ_p*.*

(N2) *Si* $(x_k) \in \ell_p$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces* $(\lambda x_k) \in \ell_p$ *y* $\|(\lambda x_k)\|_p = |\lambda| \, \|(x_k)\|_p$*.*

Ejercicio 2.42. *Prueba que, para toda* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

(a) $\|x\|_r \leq \|x\|_s \qquad \text{si } 1 \leq s \leq r \leq \infty,$

(b) $\|x\|_s \leq n^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_r$ *si* $1 \leq s \leq r < \infty$*,*

(c) $\|x\|_s \leq n^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty$ *si* $1 \leq s < \infty$*.*

(Sugerencia: Para probar la segunda desigualdad aplica la desigualdad de Hölder a los vectores $(1, \ldots, 1)$ y $(|x_1|^s, \ldots, |x_n|^s)$ con $p = \frac{r}{r-s}$ y $q = \frac{r}{s}$).

Ejercicio 2.43 (Desigualdad de Hölder para series)**.** *Prueba que, si* $p, q \in (1, \infty)$*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* $(x_k) \in \ell_p$ *y* $(y_k) \in \ell_q$*, entonces* $(x_k y_k) \in \ell_1$ *y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

es decir,

$$\|(x_k y_k)\|_1 \leq \|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q .$$

Ejercicio 2.44. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) Si $1 \leq s < r \leq \infty$*, entonces*

$$\ell_s \subset \ell_r, \qquad \ell_s \neq \ell_r \qquad y \qquad \|(x_k)\|_r \leq \|(x_k)\|_s \quad \forall (x_k) \in \ell_s.$$

(b) Si $(x_k) \in \ell_p$ *para alguna* $1 \leq p < \infty$*, entonces*

$$\|(x_k)\|_\infty = \lim_{r \to \infty} \|(x_k)\|_r .$$

Ejercicio 2.45. *Sea* S *el conjunto de todas las sucesiones de números reales. Para* $\overline{x} = (x_i)$*,* $\overline{y} = (y_i) \in S$ *definimos*

$$d(\overline{x}, \overline{y}) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i (1 + |x_i - y_i|)}.$$

(a) Prueba que ésta es una métrica en S*.*

(b) Sean $\overline{x}^k = (x_i^k)$*,* $\overline{x} = (x_i) \in S$*. Prueba que*

$$\lim_{k \to \infty} d(\overline{x}^k, \overline{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} x_i^k = x_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 2.46. *Prueba que cualquier par de funciones continuas* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisface las siguientes desigualdades:*

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx,$$
$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)|\,.$$

Ejercicio 2.47. *Prueba que las desigualdades de Hölder para sumas, para series y para integrales siguen siendo válidas si* $p = 1$ *y* $q = \infty$*, es decir:*

(a) *Si* $(x_1,\ldots,x_n), (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ *entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)\left(\max_{1\leq k\leq n} |y_k|\right).$$

(b) *Si* $(x_k) \in \ell_1$, $(y_k) \in \ell_\infty$ *entonces* $(x_k y_k) \in \ell_1$ *y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\right)\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k|\right).$$

(c) *Si* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas, entonces*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)\left(\max_{a\leq x\leq b} |g(x)|\right).$$

Ejercicio 2.48. *Da un ejemplo de una sucesión de funciones continuas* $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *tales que* $\|f_k\|_1 = 1$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$, *y* $\|f_k\|_\infty \to \infty$*. Concluye que no existe ninguna constante* $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_1 \qquad \forall f \in \mathcal{C}^0[0,1].$$

¿Es posible construir una sucesión de funciones continuas $g_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *tales que* $\|g_k\|_\infty = 1$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$, *y* $\|g_k\|_1 \to \infty$*? Justifica tu respuesta.*

Ejercicio 2.49. *Sea* $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*, la función*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Para cada $p \in [1, \infty)$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *calcula*

$$\|f_k\|_p := \left(\int_0^1 |f_k(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Ejercicio 2.50. *Demuestra si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si* $p, r \in [1, \infty]$ *y* $p < r$*, entonces existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$\|f\|_p \leq c \, \|f\|_r \qquad \forall f \in \mathcal{C}^0[0,1].$$

(b) *Si* $p, r \in [1, \infty]$ *y* $p > r$*, entonces existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$\|f\|_p \leq c \, \|f\|_r \qquad \forall f \in \mathcal{C}^0[0,1].$$

Ejercicio 2.51. *Sea* $\mathcal{C}^r[a,b]$ *el conjunto de las funciones* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *que son* r*-veces continuamente diferenciables en* $[a,b]$*, es decir, tales que todas sus derivadas* $f', f'', \ldots, f^{(r)}$ *hasta la de orden* r *existen en* (a,b) *y son continuas en* $[a,b]$*. Para cada* $p \in [1, \infty]$ *definimos*

$$\left\|f\right\|_{r,p} := \left\|f\right\|_p + \left\|f'\right\|_p + \cdots + \left\|f^{(r)}\right\|_p.$$

Prueba que $\mathcal{C}^r_p[a,b] = (\mathcal{C}^r[a,b], \|\cdot\|_{r,p})$ *es un espacio normado.*

Ejercicio 2.52. *Sean* S *un conjunto y* $V = (V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Prueba que* $\mathcal{B}(S,V)$ *es un espacio vectorial con las operaciones dadas por*

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z), \qquad (\lambda f)(z) := \lambda f(z),$$

$z \in S$*,* $f, g \in \mathcal{B}(S,V)$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, y que*

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in S} \|f(z)\|$$

es una norma en $\mathcal{B}(S,V)$*.*

Ejercicio 2.53. *Sean* $X = (X, d_X)$ *y* $Y = (Y, d_Y)$ *espacios métricos. Considera el producto cartesiano*

$$X \times Y := \{(x,y) : x \in X, \; y \in Y\}.$$

Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, *definimos*

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := (d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p)^{1/p} \qquad \text{si } p \in [1, \infty),$$
$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

(a) *Prueba que* d_p *es una métrica en* $X \times Y$ *para todo* $p \in [1, \infty]$.

(b) *Prueba que, para cualquiera de estas métricas y para cualquier* $y_0 \in Y$, *la inclusión*
$$\iota\colon X \to X \times Y, \qquad \iota(x) = (x, y_0),$$
es una isometría.

(c) *¿Es la proyección*
$$\pi\colon X \times Y \to X, \qquad \pi(x, y) = x,$$
una isometría?

Ejercicio 2.54. *Prueba que, si* $\phi\colon X \to Y$ *es una isometría y es biyectiva, entonces su inversa* $\phi^{-1}\colon Y \to X$ *es una isometría.*

Ejercicio 2.55. *¿Cuáles de las siguientes funciones son isometrías y cuáles no? Justifica tu afirmación.*

(a) *La identidad* $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^2_p \to \mathbb{R}^2_r$, $\mathrm{id}(x) = x$, *con* $p \neq r$.

(b) *La identidad* $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_p[0,1] \to \mathcal{C}^0_r[0,1]$, $\mathrm{id}(f) = f$, *con* $p \neq r$.

(c) *La inclusión* $\iota\colon \mathcal{C}^1_2[0,1] \hookrightarrow \mathcal{C}^0_2[0,1]$, $\iota(f) = f$.

(d) *La inclusión* $\iota\colon \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \hookrightarrow \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$, $\iota(f) = f$.

(e) *La función* $\phi\colon \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \ell_\infty$, $\phi(f) = (f(k))$.

Ejercicio 2.56. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita y sea* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *una base de* V. *Expresamos a cada* $v \in V$ *como* $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ *con* $x_i \in \mathbb{R}$, *y definimos*

$$\|v\|_* := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) $\|\cdot\|_*$ *es una norma en* V.

(b) Si a V le damos la norma $\|\cdot\|_*$, entonces la función $\phi\colon \mathbb{R}^n \to V$ dada por

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

es una isometría.

Ejercicio 2.57. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $x, y \in X$ y $\mathcal{T}_{x,y}(X)$ el conjunto de todas las trayectorias de x a y en X. Definimos*

$$d(x, y) := \text{ínf}\left\{\mathfrak{L}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)\right\},$$

donde $\mathfrak{L}(\sigma)$ es la longitud de la trayectoria σ, definida en (1.1).

(a) Prueba que, si para cada $x, y \in X$ existe $\sigma_{x,y} \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ con $\mathfrak{L}(\sigma_{x,y}) < \infty$, entonces d es una métrica en X.

(b) ¿En cuáles de los siguientes ejemplos coincide esta métrica con la inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^n$? Justifica tu afirmación.

(b.1) $X = \mathbb{R}^n$,

(b.2) $X = \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$,

(b.3) $X = \{x \in \mathbb{B}^n : x \neq 0\}$, $n \geq 2$,

(b.4) $X = \{x \in \mathbb{B}^n : x \notin D\}$, *donde* $n \geq 2$ *y*

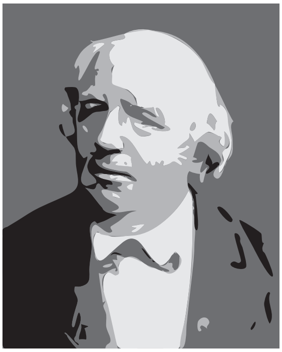
$$D := \left\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq \tfrac{1}{2}\right\},$$

(b.5) $X = \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, $n \geq 2$.

3

Continuidad

A principios del siglo XIX Augustin Louis Cauchy y Bernard Bolzano dieron, de manera independiente, una definición de continuidad. Llamaron *continua* a una función que tomaba valores arbitrariamente cercanos para valores suficientemente cercanos de la variable. Esta definición es exacta pero imprecisa. La definición usual hoy en día, en términos de ε's y δ's, fue introducida por Karl Weierstrass[1] a finales del siglo XIX.



Karl Weierstrass

La noción de continuidad de una función entre espacios métricos es formalmente idéntica a la de continuidad de una función entre espacios euclidianos que ya conocemos. En este capítulo estudiaremos este concepto y daremos varias caracterizaciones de la continuidad.

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) nació en Ostenfelde, Westfalia (actualmente Alemania). Estudió matemáticas en la Universidad de Münster. Fue profesor en la Universidad de Berlín y tuvo entre sus discípulos a Georg Cantor, Ferdinand Georg Frobenius y Sofia Kovalévskaya. Llamado el *padre del análisis moderno*, Weierstrass dio las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función, que continúan vigentes hoy en día.

3.1. Definiciones y ejemplos

Sean $X = (X, d_X)$ y $Y = (Y, d_Y)$ espacios métricos.

Definición 3.1. *Una función $\phi\colon X \to Y$ es* ***continua en el punto*** *$x_0 \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de x_0 y de ε) tal que*

$$d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) < \varepsilon \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$

Decimos que ϕ es ***continua*** *si lo es en todo punto de X.*

La continuidad de ϕ depende de las métricas que estamos considerando en X y Y. Para hacer énfasis en ello usaremos en ocasiones la notación

$$\phi\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

en vez de $\phi\colon X \to Y$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2. *La identidad* $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ *es una función continua para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$.*

Demostración. Observa que $\left(\max\{a_1^r, \dots, a_n^r\}\right)^{1/r} = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ si $r \in [1, \infty)$ y $a_1, \dots, a_n \geq 0$. En consecuencia, para cualesquiera $p, r \in [1, \infty)$ y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/r} \leq \left(n \max_{i=1,\dots,n} |x_i|^r\right)^{1/r} = n^{1/r} \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = n^{1/r} \|x\|_\infty\,,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = \left(\max_{i=1,\dots,n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p\,.$$

Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$\|x\|_r \leq n^{1/r} \|x\|_p\,, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_p\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ p \in [1, \infty], \ \ r \in [1, \infty). \tag{3.1}$$

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ definimos $\delta := n^{-1/r}\varepsilon$ si $r \in [1, \infty)$ y $\delta := \varepsilon$ si $r = \infty$. De las desigualdades (3.1) se sigue que

$$\|x - x_0\|_r < \varepsilon \qquad \text{si } \ \|x - x_0\|_p < \delta.$$

Esto prueba que $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es continua. $\square$

Ejemplo 3.3. *La identidad* $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \to \mathcal{C}^0_1[0,1]$ *es continua, mientras que la identidad* $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_1[0,1] \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ *no lo es.*

Demostración. La Proposición 2.23 asegura que

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in \mathcal{C}^0[0,1].$$

En consecuencia, dadas $f_0 \in \mathcal{C}^0[0,1]$ y $\varepsilon > 0$, para $\delta = \varepsilon$ se cumple que

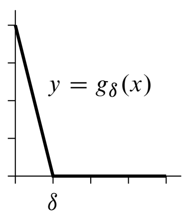
$$\|f - f_0\|_1 < \varepsilon \qquad \text{si } \|f - f_0\|_\infty < \delta.$$

Esto prueba que $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \to \mathcal{C}^0_1[0,1]$ es continua.

Denotemos por 0 a la función constante con valor 0 en $[0,1]$. Probaremos que $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_1[0,1] \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ no es continua en 0 (de hecho no lo es en ningún punto de $\mathcal{C}^0[0,1]$). Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Afirmamos que para cualquier $\delta \in (0,1)$ existe $g_\delta \in \mathcal{C}^0[0,1]$ tal que $\|g_\delta\|_1 < \delta$ y $\|g_\delta\|_\infty = 1 > \varepsilon$. En efecto, la función

$$g_\delta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\delta}x & \text{si } 0 \leq x \leq \delta, \\ 0 & \text{si } \delta \leq x \leq 1, \end{cases}$$

tiene estas propiedades.



Por tanto, la identidad $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_1[0,1] \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ no es continua en 0. □

Definición 3.4. *Una función* $\phi\colon X \to Y$ *es un* ***homeomorfismo*** *si* ϕ *es continua y biyectiva y su inversa* $\phi^{-1}\colon Y \to X$ *es continua. Se dice que* X *y* Y *son* ***homeomorfos*** *si existe un homeomorfismo entre ellos.*

Los ejemplos anteriores afirman que $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es un homeomorfismo para cualesquiera $p, r \in [1,\infty]$, mientras que $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_\infty[a,b] \to \mathcal{C}^0_1[a,b]$ no lo es.

Proposición 3.5. *Sean* $\phi\colon X \to Y$ *y* $\psi\colon Y \to Z$ *funciones entre espacios métricos.*

(a) Si ϕ *y* ψ *son continuas entonces la composición* $\psi \circ \phi\colon X \to Z$ *es continua.*

(b) Si ϕ es un homeomorfismo, entonces ψ es continua si y sólo si $\psi \circ \phi$ es continua.

(c) Si ψ es un homeomorfismo, entonces ϕ es continua si y sólo si $\psi \circ \phi$ es continua.

Demostración. (a): Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como ψ es continua en $y_0 := \phi(x_0)$, existe $\gamma > 0$ tal que
$$d_Z(\psi(y), \psi(y_0)) < \varepsilon \qquad \text{si } \ d_Y(y, y_0) < \gamma.$$
Y, como ϕ es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que
$$d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) < \gamma \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$
En consecuencia,
$$d_Z(\psi(\phi(x)), \psi(\phi(x_0))) < \varepsilon \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$
Es decir, $\psi \circ \phi \colon X \to Z$ es continua.

(b): Si ϕ es un homeomorfismo, de la afirmación *(a)* se sigue que $\psi \circ \phi$ es continua si y sólo si $(\psi \circ \phi) \circ \phi^{-1} = \psi$ lo es.

(c): Análogamente, si ψ es un homeomorfismo, entonces $\psi \circ \phi$ es continua si y sólo si $\psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi) = \phi$ lo es. □

La proposición anterior nos permite concluir que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $f : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_r$ es continua para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$ [Ejercicio 3.38].

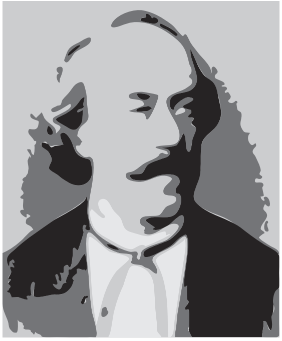
Algunas propiedades importantes de los espacios métricos, como la completitud (que estudiaremos más adelante), no se preservan bajo homeomorfismos. Por ello conviene introducir los siguientes conceptos.

Definición 3.6. *Una función $\phi \colon X \to Y$ es* ***Lipschitz continua****, si existe $c > 0$ tal que*
$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq c\, d_X(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$
La constante c se llama una ***constante de Lipschitz***[2] *para ϕ.*

La función ϕ es una ***equivalencia*** *si ϕ es Lipschitz continua y biyectiva y su inversa $\phi^{-1} \colon Y \to X$ es Lipschitz continua.*

---

[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) nació en Königsberg (entonces parte de Alemania). Se doctoró en Berlín bajo la supervisión de Lejeune Dirichlet. Fue profesor en la Universidad de Bonn.



Rudolf Lipschitz

Esta noción es más fuerte que la de continuidad, es decir, se cumple lo siguiente.

Proposición 3.7. *Si ϕ es Lipschitz continua entonces ϕ es continua.*

Demostración. Sea $c > 0$ una constante de Lipschitz para ϕ. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, para $\delta := \frac{\varepsilon}{c} > 0$ se cumple que

$$d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) < \varepsilon \qquad \text{si } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Por tanto, ϕ es continua. □

Nota que en este caso δ no depende del punto $x_0 \in X$. El inverso no es cierto en general, es decir, no toda función continua es Lipschitz continua [Ejercicio 3.45].

Definición 3.8. *Dos métricas d_1 y d_2 en un conjunto X son **equivalentes** si la identidad $\mathrm{id}\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$ es una equivalencia, es decir, si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que*

$$c_1\, d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq c_2\, d_2(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

*Análogamente, dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial V son **equivalentes** si las métricas inducidas son equivalentes, es decir, si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que*

$$c_1\ \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c_2\ \|v\|_2 \qquad \forall v \in V.$$

Las desigualdades (3.1) muestran que $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_r$ son normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$ para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$, mientras que el Ejemplo 3.3 muestra que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son normas equivalentes en $\mathcal{C}^0[0, 1]$. De hecho, $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_r$ no son normas equivalentes en $\mathcal{C}^0[a, b]$ para ningún par de números $1 \leq p < r \leq \infty$ [Ejercicio 3.47].

La siguiente noción nos permite visualizar el concepto de continuidad.

Definición 3.9. *Sean $X = (X, d_X)$ un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. La **bola abierta** en X con centro en x_0 y radio ε es el conjunto*

$$B_X(x_0, \varepsilon) := \{x \in X : d_X(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

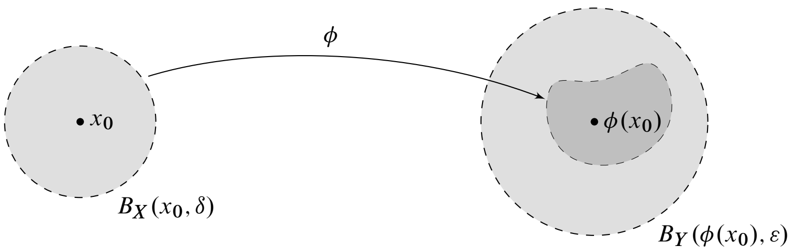
Dados un subconjunto A de X y una función $\phi\colon X \to Y$, denotamos por

$$\phi(A) := \{\phi(x) \in Y : x \in A\}$$

a la **imagen de A bajo ϕ**. Con estos conceptos podemos reformular la definición de continuidad como sigue:

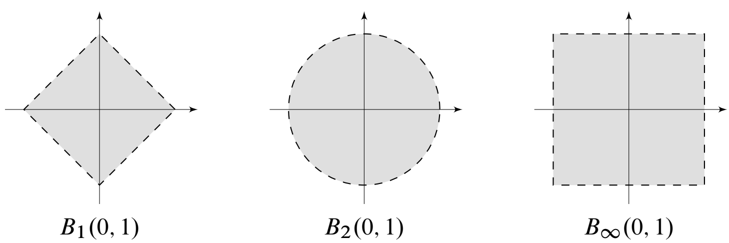
$\phi\colon X \to Y$ *es* **continua en el punto** x_0 *de X si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\phi(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(\phi(x_0), \varepsilon). \tag{3.2}$$



Revisemos algunos de los ejemplos anteriores bajo esta nueva óptica.

Ejemplo 3.10. *Denotemos por $B_p(x_0, \varepsilon)$ a la bola abierta en $\mathbb{R}^n_p$ con centro en x_0 y radio ε.*



De las desigualdades (3.1) *se sigue que existe $c > 0$ (que depende de n y r) tal que*

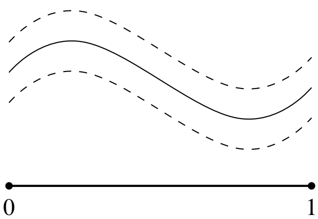
$$B_p(x_0, c\varepsilon) \subset B_r(x_0, \varepsilon) \qquad \forall p, r \in [1, \infty], \ \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

La caracterización (3.2) *de la continuidad asegura entonces que* $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ *es un homeomorfismo.*

Ejemplo 3.11. *Denotemos por* $B_p(f_0, \varepsilon)$ *a la bola abierta en* $\mathcal{C}^0_p[0,1]$ *con centro en la función continua* $f_0\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *y radio* ε. *Si* $p = \infty$,

$$B_\infty(f_0, \varepsilon) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0[0,1] : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1] \right\},$$

es decir, $B_\infty(f_0, \varepsilon)$ *es el conjunto de las funciones continuas cuya gráfica está contenida en la franja* $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ |y - f_0(x)| < \varepsilon\right\}$.

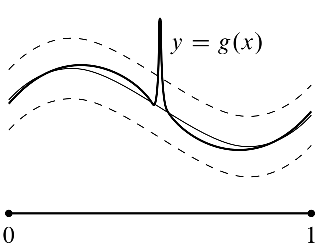


Por otra parte, si $p = 1$,

$$B_1(f_0, \varepsilon) = \left\{ g \in \mathcal{C}^0[0,1] : \int_0^1 |g(x) - f_0(x)|\, dx < \varepsilon \right\}$$

es el conjunto de las funciones continuas g *tales que el área de la región comprendida entre las gráficas de* g *y* f_0 *es menor que* ε.

Resulta claro entonces que $B_\infty(f_0, \varepsilon) \subset B_1(f_0, \varepsilon)$. *Y también que, para cada* $\varepsilon > 0$ *y cada* $\delta > 0$, *podemos encontrar una función continua* g *tal que* $g \in B_1(f_0, \delta)$ *pero* $g \notin B_\infty(f_0, \varepsilon)$:



De la caracterización (3.2) *de la continuidad se sigue que* $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \to \mathcal{C}^0_1[0,1]$ *es continua y que* $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^0_1[0,1] \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ *no lo es.*

3.2. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico y sea A un subconjunto de X.

Definición 3.12. *Un punto $x \in X$ se llama un* ***punto interior de*** *A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \subset A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el* ***interior de*** *A* ***en*** *X y se denota* $\mathrm{int}_X(A)$, *o simplemente* $\mathrm{int}(A)$. *Decimos que A es* ***abierto en*** *X si $A = \mathrm{int}(A)$.*

Observa que $\mathrm{int}_X(A) \subset A$. Veamos que la bola abierta es un abierto en este sentido.

Proposición 3.13. *En cualquier espacio métrico $X = (X, d)$, la bola abierta*

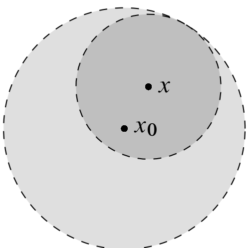
$$B_X(x_0, \varepsilon) := \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

con centro en x_0 y radio ε es un subconjunto abierto de X.

Demostración. Sea $x \in B_X(x_0, \varepsilon)$. Tomemos $\delta := \varepsilon - d(x, x_0) > 0$. Para todo $z \in B_X(x, \delta)$, se cumple que

$$d(z, x_0) \leq d(z, x) + d(x, x_0) < \delta + d(x, x_0) = \varepsilon,$$

es decir, $z \in B_X(x_0, \varepsilon)$. Por tanto, $B_X(x, \delta) \subset B_X(x_0, \varepsilon)$.



Esto muestra que $x \in \mathrm{int}(B_X(x_0, \varepsilon))$ para todo $x \in B_X(x_0, \varepsilon)$. En consecuencia $B_X(x_0, \varepsilon) = \mathrm{int}(B_X(x_0, \varepsilon))$. □

Corolario 3.14. *El interior* $\mathrm{int}(A)$ *de cualquier subconjunto A de X es abierto en X.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{int}(A)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \subset A$. Probaremos ahora que $B_X(x, \varepsilon) \subset \mathrm{int}\, A$. En efecto, por la Proposición 3.13, para cada $z \in B_X(x, \varepsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_X(z, \delta) \subset B_X(x, \varepsilon) \subset A$. Por tanto, $z \in \mathrm{int}\, A$. □

Es fácil ver que $\mathrm{int}(A)$ es el mayor subconjunto abierto de X contenido en A [Ejercicio 3.65].

El que un subconjunto A de X sea abierto en X o no lo sea depende de la métrica que le demos a X. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.15. *El conjunto*

$$A := \left\{ f \in \mathcal{C}^0[0,1] : |f(x)| < \tfrac{1}{2} \ \ \forall x \in [0,1] \right\}$$

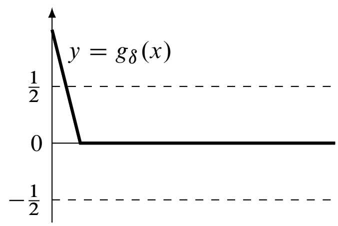
es abierto en $\mathcal{C}^0_\infty[0,1]$*, pero no es abierto en* $\mathcal{C}^0_1[0,1]$.

Demostración. Observa que $A = B_{\mathcal{C}^0_\infty[0,1]}(0, \frac{1}{2})$. La Proposición 3.13 asegura que A es abierto en $\mathcal{C}^0_\infty[0,1]$.

Probaremos ahora que A no es abierto en $\mathcal{C}^0_1[0,1]$. Para cada $0 < \delta < 1$ consideremos la función

$$g_\delta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\delta}x & \text{si } 0 \leq x \leq \delta, \\ 0 & \text{si } \delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\|g_\delta\|_1 = \frac{\delta}{2}$ y $\|g_\delta\|_\infty = 1$. Por tanto, $g_\delta \in B_{\mathcal{C}^0_1[0,1]}(0,\delta)$, pero $g_\delta \notin A$.



Es decir, $B_{\mathcal{C}^0_1[0,1]}(0,\delta)$ no está contenida en A para ningún $\delta > 0$. En consecuencia, la función 0 no es un punto interior de A en $\mathcal{C}^0_1[0,1]$. □

De hecho, el conjunto A del ejemplo anterior tiene interior vacío en $\mathcal{C}^0_1[0,1]$ [Ejercicio 3.59].

Definición 3.16. *Un punto $x \in X$ se llama un **punto de contacto de** A si $B_X(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para toda $\varepsilon > 0$. El conjunto de todos los puntos de contacto de A se llama la **cerradura de** A **en** X y se denota* $\mathrm{cerr}_X(A)$*, o simplemente $\overline{A}$. Decimos que A es **cerrado en** X si $A = \overline{A}$.*

Nota que todo punto de A es punto de contacto de A, es decir, $A \subset \overline{A}$.

Definición 3.17. *La* ***bola cerrada*** *en X con centro en x_0 y radio ε es el conjunto*

$$\bar{B}_X(x_0,\varepsilon) := \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Proposición 3.18. *$\bar{B}_X(x_0,\varepsilon)$ es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. Sea $x \in \overline{\bar{B}_X(x_0,\varepsilon)}$. Entonces, para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in B_X(x,\delta) \cap \bar{B}_X(x_0,\varepsilon)$. De la desigualdad del triángulo se sigue que

$$d(x,x_0) \leq d(x,x_\delta) + d(x_\delta,x_0) < \delta + \varepsilon \qquad \forall \delta > 0.$$

En consecuencia $d(x,x_0) \leq \varepsilon$, es decir, $x \in \bar{B}_X(x_0,\varepsilon)$. $\square$

Denotaremos por $X \smallsetminus A$ al **complemento de** A **en** X, es decir,

$$X \smallsetminus A := \{x \in X : x \notin A\}.$$

Los abiertos y los cerrados son duales en el siguiente sentido.

Proposición 3.19. *Para cualquier subconjunto A de un espacio métrico X se cumple que*

$$X \smallsetminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \smallsetminus A).$$

En consecuencia, A es cerrado en X si y sólo si $X \smallsetminus A$ es abierto en X.

Demostración. La primera afirmación es inmediata. En efecto, $x \in \operatorname{int}(X \smallsetminus A)$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, es decir, si y sólo si $x \in X \smallsetminus \overline{A}$.

En consecuencia, si A es cerrado, entonces $X \smallsetminus A = X \smallsetminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \smallsetminus A)$, es decir, $X \smallsetminus A$ es abierto. E inversamente, si $X \smallsetminus A$ es abierto, entonces $X \smallsetminus A = \operatorname{int}(X \smallsetminus A) = X \smallsetminus \overline{A}$ y, en consecuencia, $A = \overline{A}$, es decir, A es cerrado. $\square$

Corolario 3.20. *La cerradura $\overline{A}$ de cualquier subconjunto A de X es cerrada en X.*

Demostración. Por el Corolario 3.14 sabemos que $\operatorname{int}(X \smallsetminus A)$ es abierto en X. En consecuencia, por la Proposición 3.19, se tiene que $\overline{A} = X \smallsetminus \operatorname{int}(X \smallsetminus A)$ es cerrado en X. $\square$

Es sencillo comprobar que $\overline{A}$ es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a A [Ejercicio 3.66].

Existen subconjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, el intervalo $[a,b)$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$. Más aún, un subconjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.21. *Todo subconjunto de un espacio métrico discreto X_{disc} es abierto en X_{disc}. En consecuencia, todo subconjunto de X_{disc} es cerrado en X_{disc}.*

Demostración. Observemos que, para cada punto $x \in X$,

$$B_{\text{disc}}(x,1) := \{y \in X : d_{\text{disc}}(y,x) < 1\} = \{x\}.$$

Para cualquier subconjunto A de X se tiene entonces que $B_{\text{disc}}(x,1) \subset A$ para todo $x \in A$. Por tanto, A es abierto en X_{disc}. De la Proposición 3.19 se sigue que A también es cerrado en X_{disc}. □

En general no es cierto que la cerradura de una bola abierta sea la correspondiente bola cerrada. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.22. *Si X_{disc} es un espacio métrico discreto con al menos dos puntos entonces, puesto que todos los subconjuntos de X_{disc} son cerrados, se tiene que*

$$\overline{B_{\text{disc}}(x,1)} = B_{\text{disc}}(x,1) = \{x\} \qquad \forall x \in X.$$

Por otra parte,

$$\bar{B}_{\text{disc}}(x,1) := \{y \in X : d_{\text{disc}}(y,x) \leq 1\} = X \qquad \forall x \in X.$$

Esto no ocurre en un espacio normado.

Proposición 3.23. *Si $V = (V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la cerradura de la bola abierta $B(v_0,\varepsilon) := \{v \in V : \|v - v_0\| < \varepsilon\}$ es la bola cerrada $\bar{B}(v_0,\varepsilon) := \{v \in V : \|v - v_0\| \leq \varepsilon\}$.*

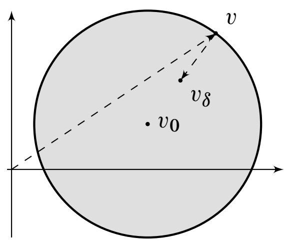
Demostración. Como $\bar{B}(v_0,\varepsilon)$ es cerrado y contiene a $B(v_0,\varepsilon)$ se tiene que $\overline{B(v_0,\varepsilon)} \subset \bar{B}(v_0,\varepsilon)$ [Ejercicio 3.66].

Probaremos ahora que $\bar{B}(v_0,\varepsilon) \subset \overline{B(v_0,\varepsilon)}$. Es decir, probaremos que, para todo $v \in \bar{B}(v_0,\varepsilon)$ y $\delta > 0$, se cumple que $B(v,\delta) \cap B(v_0,\varepsilon) \neq \emptyset$. Sin perder generalidad podemos tomar $\delta < 2\varepsilon$. El punto

$$v_\delta := v + \frac{\delta}{2\varepsilon}(v_0 - v) \in V$$

satisface

$$\begin{aligned}
\|v_\delta - v\| &= \frac{\delta}{2\varepsilon}\|v_0 - v\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ y} \\
\|v_\delta - v_0\| &= \left(1 - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right)\|v - v_0\| \leq \left(1 - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right)\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}$$



Por tanto, $v_\delta \in B(v,\delta) \cap B(v_0,\varepsilon)$. □

Daremos ahora una caracterización de la continuidad en términos de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados. La **imagen inversa** de un subconjunto B de Y bajo la función $\phi\colon X \to Y$ es el conjunto

$$\phi^{-1}(B) := \{x \in X : \phi(x) \in B\}.$$

Proposición 3.24. *Sean X y Y espacios métricos, y sea $\phi\colon X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\phi\colon X \to Y$ *es continua.*

(b) $\phi^{-1}(U)$ *es abierto en X para todo subconjunto abierto U de Y.*

(c) $\phi^{-1}(C)$ *es cerrado en X para todo subconjunto cerrado C de Y.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Sea U un subconjunto abierto de Y. Para cada $x \in \phi^{-1}(U)$ tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(\phi(x),\varepsilon) \subset U$. Como ϕ es continua, existe $\delta > 0$ tal que $\phi(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(\phi(x),\varepsilon)$. Entonces $B_X(x,\delta) \subset \phi^{-1}(U)$. Esto prueba que $\phi^{-1}(U)$ es abierto en X.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B_Y(\phi(x),\varepsilon)$ es abierta en Y, se tiene que $\phi^{-1}(B_Y(\phi(x),\varepsilon))$ es abierto en X. En particular, existe $\delta > 0$ tal que $B_X(x,\delta) \subset \phi^{-1}(B_Y(\phi(x),\varepsilon))$, es decir, $\phi(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(\phi(x),\varepsilon)$. Esto prueba que ϕ es continua en x.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Observa que $X \smallsetminus \phi^{-1}(B) = \phi^{-1}(Y \smallsetminus B)$ para todo subconjunto B de Y. La equivalencia entre *(b)* y *(c)* es consecuencia inmediata de la Proposición 3.19. En efecto, si ϕ satisface *(b)* y C es cerrado en Y, entonces $Y \smallsetminus C$ es abierto en Y. En consecuencia, $\phi^{-1}(Y \smallsetminus C) = X \smallsetminus \phi^{-1}(C)$ es abierto en X y, por tanto $\phi^{-1}(C)$ es cerrado en X. Esto prueba que *(b) $\Rightarrow$ (c)*. La otra implicación se demuestra de manera análoga. □

Ejemplo 3.25. *Cualquier función $\phi\colon X_{\text{disc}} \to Y$ de un espacio métrico discreto a un espacio métrico cualquiera Y es continua, ya que todo subconjunto de X_{disc} es abierto* (ver Ejemplo 3.22).

Para finalizar esta sección veamos algunas propiedades importantes de los abiertos.

Proposición 3.26. *En cualquier espacio métrico $X = (X, d)$ se cumple lo siguiente:*

(a) El conjunto vacío $\emptyset$ es abierto en X.

(b) X es abierto en X.

(c) La unión $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ de cualquier familia $\{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos abiertos de X es abierta en X.

(d) La intersección $U \cap V$ de dos subconjuntos abiertos U y V de X es abierta en X.

Demostración. *(a)* se cumple por vacuidad: todo punto de $\emptyset$ es punto interior de $\emptyset$.

(b): $B_X(x, \varepsilon) \subset X$ para cualquier $x \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$, es decir, cualquier $x \in X$ es punto interior de X.

(c): Si $x \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ entonces $x \in U_{i_0}$ para algún $i_0 \in \mathcal{I}$ y, como U_{i_0} es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Pero entonces $B_X(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$. Esto prueba que $x \in \operatorname{int}\big(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i\big)$.

(d): Si $x \in U \cap V$, como U y V son abiertos, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que $B_X(x, \varepsilon_1) \subset U$ y $B_X(x, \varepsilon_2) \subset V$. Tomando $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ se tiene que $B_X(x, \varepsilon) \subset (U \cap V)$. Esto prueba que $x \in \operatorname{int}(U \cap V)$. $\square$

Dado que los subconjuntos cerrados de X son los complementos de los abiertos, las afirmaciones duales son ciertas para dichos subconjuntos [Ejercicio 3.64].

Las propiedades *(a)*-*(d)* se usan como definición de los *abiertos* de un espacio topológico[3]. Como la continuidad se puede caracterizar en términos de abiertos (ver Proposición 3.24), los espacios topológicos son el ámbito natural para estudiar la continuidad.

3.3. Convergencia de sucesiones

Como ocurre en $\mathbb{R}^n$, es posible dar una caracterización de la continuidad en términos de sucesiones en un espacio métrico.

[3] Consulta, por ejemplo, [Pri03].

Definición 3.27. *Una* ***sucesión*** *en un espacio métrico $X = (X, d)$ es una función $\overline{x}\colon \mathbb{N} \to X$. El valor de dicha función en k se llama el* ***k-ésimo término*** *de la sucesión y se denota por $x_k := \overline{x}(k)$. Una sucesión se suele denotar simplemente por $\overline{x} = (x_k)$.*

Decimos que (x_k) ***converge a*** *un punto $x \in X$ si, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. El punto x se llama el* ***límite*** *de la sucesión (x_k).*

Usaremos la notación

$$x_k \to x \ \text{ en } X, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x,$$

para decir que (x_k) converge a x en X. Observa que

$$x_k \to x \text{ en } X \quad \Longleftrightarrow \quad d(x_k, x) \to 0 \ \text{ en } \mathbb{R}.$$

Definición 3.28. *Una* ***subsucesión*** *de $\overline{x} = (x_k)$ es la composición de $\overline{x}$ con una función estrictamente creciente $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Su j-ésimo término se denota por $x_{k_j} := \overline{x}(k(j))$.*

Proposición 3.29. *Se cumple lo siguiente:*

(a) El límite de una sucesión convergente es único.

(b) Si (x_k) converge a x en X entonces cualquier subsucesión (x_{k_j}) converge a x en X.

Demostración. (a): Si $x_k \to x$ y $x_k \to y$ en X entonces

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_k, x) + d(x_k, y) \ \to 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Por tanto, $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$.

(b): Sean (x_{k_j}) una subsucesión de (x_k) y $\varepsilon > 0$. Como $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, $k_j \geq j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Y, como $x_k \to x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Por tanto, $d(x_{k_j}, x) < \varepsilon$ para todo $j \geq k_0$. □

Definición 3.30. *Una sucesión (x_k) en X está* ***acotada*** *si existen $x \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que $d(x_k, x) \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3.31. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Si $x_k \to x$ en X entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < 1$ para todo $k \geq k_0$. Tomando $c := \max\left\{d(x_1, x), \ldots, d(x_{k_0-1}, x), 1\right\}$ obtenemos que $d(x_k, x) \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Daremos ahora una caracterización de la cerradura de un conjunto en términos de sucesiones en dicho conjunto.

Proposición 3.32. *Sea A un subconjunto de X y sea $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión (x_k) tal que $x_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x_k \to x$ en X.*

Demostración. Si $x \in \overline{A}$ entonces existe $x_k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es decir, $x_k \in A$ y $0 \leq d(x_k, x) \leq \frac{1}{k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x_k \to x$ en X.

Inversamente, sea (x_k) una sucesión de puntos en A tal que $x_k \to x$ en X. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. En particular, $x_{k_0} \in B_X(x, \varepsilon) \cap A$. Por tanto, $x \in \overline{A}$. □

Podemos caracterizar la continuidad de una función en términos de sucesiones como sigue.

Proposición 3.33. *$\phi\colon X \to Y$ es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión (x_k) en X tal que $x_k \to x$ en X se cumple que $\phi(x_k) \to \phi(x)$ en Y.*

Demostración. Supongamos que ϕ es continua en x y que $x_k \to x$ en X. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, como ϕ es continua, existe $\delta > 0$ tal que $\phi(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(\phi(x), \varepsilon)$ y, como $x_k \to x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_X(x, \delta)$ para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto $\phi(x_k) \in B_Y(\phi(x), \varepsilon)$ para todo $k \geq k_0$. Esto prueba que $\phi(x_k) \to \phi(x)$.

Inversamente, supongamos que ϕ no es continua en x. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ con la siguiente propiedad: para cada $k \in \mathbb{N}$ hay un punto $x_k \in B_X(x, \frac{1}{k})$ tal que $\phi(x_k) \notin B_Y(\phi(x), \varepsilon_0)$. En consecuencia, (x_k) converge a x en X pero $(\phi(x_k))$ no converge a $\phi(x)$ en Y. □

Ejemplo 3.34. *Consideremos las funciones continuas $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $f_k \to 0$ en $\mathcal{C}_1^0[0,1]$, pero (f_k) no converge en $\mathcal{C}_\infty^0[0,1]$. Esto demuestra que $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}_1^0[0,1] \to \mathcal{C}_\infty^0[0,1]$ *no es continua en* 0.

Demostración. Se tiene que

$$\|f_k\|_1 = \int_0^1 |f_k(x)|\, dx = \frac{1}{2k} \to 0.$$

Por tanto, $f_k \to 0$ en $\mathcal{C}_1^0[0,1]$.

Supongamos que $f_k \to f$ en $\mathcal{C}_\infty^0[0,1]$. Entonces, como

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \|f_k - f\|_\infty \qquad \text{para cada } x \in [0,1],$$

se tiene que la sucesión de números reales $(f_k(x))$ converge a $f(x)$ en $\mathbb{R}$ para cada $x \in [0,1]$. En consecuencia

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función no es continua en $[0,1]$, lo que contradice nuestra suposición. □

3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.35. *Prueba que en la definición de continuidad se puede reemplazar la desigualdad estricta por la no estricta, es decir, prueba que una función $\phi\colon X \to Y$ es continua en x_0 si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de x_0 y de ε) tal que*

$$d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) \leq \varepsilon \qquad \text{si } \; d_X(x, x_0) < \delta.$$

Ejercicio 3.36. *Sean $V = (V, \|\cdot\|_V)$ y $W = (W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados, y sea $L\colon V \to W$ una transformación lineal. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) L es continua.

(b) L es continua en 0.

(c) Existe $c > 0$ tal que $\|Lv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ para todo $v \in V$.

(d) L es Lipschitz continua.

Ejercicio 3.37. *Sea X un espacio métrico.*

(a) Prueba que, si $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces las funciones $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$(\max\{f,g\})(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad (\min\{f,g\})(x) := \min\{f(x), g(x)\}),$$

son continuas.

(b) ¿Es cierto que, si $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ son Lipschitz continuas, $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son Lipschitz continuas?

Ejercicio 3.38. *Prueba que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $f : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_r$ es continua para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$.*

Ejercicio 3.39. *Sea $g_0 \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Prueba que, para toda $p \in [1,\infty]$, la función $\phi\colon \mathcal{C}^0_p[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\phi(f) := \int_a^b f g_0$$

es Lipschitz continua. (Sugerencia: Usa la desigualdad de Hölder para integrales.)

Ejercicio 3.40. *Prueba que, si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, entonces la inclusión $\iota\colon \ell_p \hookrightarrow \ell_r$ es Lipschitz continua.*

Ejercicio 3.41. *Prueba que, para toda $p \in [1,\infty]$, la k-**ésima proyección***

$$\pi_k : \ell_p \to \mathbb{R}, \qquad \pi_k(x) = x_k,$$

con $x = (x_k) \in \ell_p$, es Lipschitz continua.

Ejercicio 3.42. *Dados dos conjuntos S y S', una función $\phi\colon S' \to S$ y un espacio métrico X, considera la función $\phi^* : \mathcal{B}(S,X) \to \mathcal{B}(S',X)$ dada por la composición*

$$\phi^*(f) := f \circ \phi.$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) ϕ^* está bien definida (es decir, que $f \circ \phi$ es acotada si f lo es) y es Lipschitz continua.

(b) Si ϕ es suprayectiva, entonces ϕ^* es una isometría.

Ejercicio 3.43. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Toda isometría es Lipschitz continua.

(b) Si $\phi\colon X \to Y$ y $\psi\colon Y \to Z$ son Lipschitz continuas entonces la composición $\psi \circ \phi\colon X \to Z$ es Lipschitz continua.

(c) Si $\phi\colon X \to Y$ es una equivalencia, entonces $\psi : Y \to Z$ es Lipschitz continua si y sólo si $\psi \circ \phi\colon X \to Z$ lo es.

(d) Si $\psi : Y \to Z$ es una equivalencia, entonces $\phi\colon X \to Y$ es Lipschitz continua si y sólo si $\psi \circ \phi\colon X \to Z$ lo es.

Ejercicio 3.44. *Sea $\mathcal{I}$ un intervalo en $\mathbb{R}$ (abierto, cerrado, finito o infinito). Prueba que, si $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en $\mathcal{I}$ y existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(t)| \leq C$ para todo $t \in \mathcal{I}$, entonces f es Lipschitz continua.*

Ejercicio 3.45. *¿Cuáles de las siguientes funciones son Lipschitz continuas y cuáles son equivalencias?*

(a) $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = x^2.$

(b) $\phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \sqrt{x}.$

(c) $\phi\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \phi(x) = \arctan x.$

Ejercicio 3.46. *Dada* $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ *definimos*

$$\begin{aligned}
|||f|||_1 &:= \|f'\|_\infty, \\
|||f|||_2 &:= |f(0)| + \|f'\|_\infty, \\
|||f|||_3 &:= \text{máx}\left\{\left|\int_0^1 f(x)dx\right|, \|f'\|_\infty\right\}, \\
|||f|||_4 &:= \left(\|f\|_2 + \|f'\|_2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

(a) ¿Es $|||f|||_i$ *una norma en* $\mathcal{C}^1[0,1]$*? Responde esta pregunta para cada* $i = 1,\ldots,4$.

(b) Si $|||f|||_i$ *es una norma, ¿es* $|||f|||_i$ *equivalente a la norma*

$$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

del Ejercicio 2.51*?*

(c) Considera la función $D\colon \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$ *que a cada* $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ *le asocia su derivada* $f' \in \mathcal{C}^0[0,1]$*. Prueba que*

$$D\colon (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,\infty}) \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$$

es continua.

(d) Para aquellas $|||\cdot|||_i$ *que sí son normas investiga si*

$$D\colon (\mathcal{C}^1[0,1], |||\cdot|||_i) \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$$

es o no una función continua.

Ejercicio 3.47. *Sean* $p, r \in [1,\infty]$.

(a) Investiga en qué casos $\mathrm{id}\colon C^0_p[0,1] \to C^0_r[0,1]$ *es Lipschitz continua y en qué casos no lo es.*

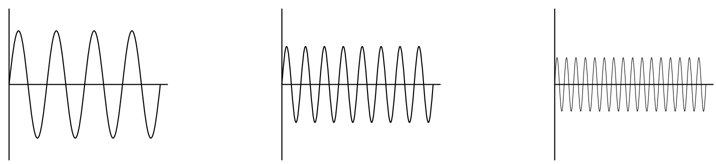
(b) *Investiga en qué casos* $\mathrm{id}\colon C_p^0[0,1] \to C_r^0[0,1]$ *es continua y en qué casos no lo es.*

(c) *¿En qué casos es* $\mathrm{id}\colon C_p^0[0,1] \to C_r^0[0,1]$ *una equivalencia?*

(d) *¿En qué casos es* $\mathrm{id}\colon C_p^0[0,1] \to C_r^0[0,1]$ *un homeomorfismo?*

Ejercicio 3.48. (a) *Considera las trayectorias* $\sigma_k, \sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *dadas por*

$$\sigma_k(x) = \left(x, \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(\pi k x)\right), \qquad \sigma(x) = (x, 0).$$



σ_8 σ_{16} σ_{32}

Prueba que $\sigma_k \to \sigma$ *en* $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R}^2)$.

(b) *Sea* $\mathcal{T}^*_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ *el conjunto de todas las trayectorias de longitud finita de* $(0,0)$ *a* $(1,0)$ *en* $\mathbb{R}^2$ *con la métrica uniforme*

$$d_\infty(\sigma, \tau) = \max_{t\in[0,1]} \|\sigma(t) - \tau(t)\|, \qquad \sigma, \tau \in \mathcal{T}^*_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2),$$

(ver Ejemplo 2.27). *Prueba que la función longitud*

$$\mathfrak{L}\colon \mathcal{T}^*_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R},$$

definida en (1.1)*, no es continua.*

Ejercicio 3.49. *Sean* $X = (X, d_X)$, $Y = (Y, d_Y)$ *y* $Z = (Z, d_Z)$ *espacios métricos.*

(a) *Prueba que todas las métricas del* Ejercicio 2.53 *en el producto cartesiano* $X \times Y := \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$ *son equivalentes. En adelante a* $X \times Y$ *con cualquiera de estas métricas lo llamaremos el* ***producto de los espacios métricos*** X *y* Y.

(b) *Prueba que las proyecciones*

$$\pi_X\colon X \times Y \to X, \qquad \pi_X(x,y) = x,$$

$$\pi_Y : X \times Y \to Y, \qquad \pi_Y(x, y) = y,$$

son Lipschitz continuas.

(c) Prueba que $\phi\colon Z \to X \times Y$ *es continua si y sólo si las composiciones*

$$\pi_X \circ \phi\colon Z \to X \qquad y \qquad \pi_Y \circ \phi\colon Z \to Y$$

son continuas.

(d) Prueba que la distancia $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

Ejercicio 3.50. *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado.*

(a) Demuestra que las siguientes funciones son continuas.

$$\begin{aligned} V \times V \to V, &\qquad (v, w) \mapsto v + w, \\ \mathbb{R} \times V \to V, &\qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v, \\ V \to \mathbb{R}, &\qquad v \mapsto \|v\|. \end{aligned}$$

(b) ¿Cuáles de ellas son Lipschitz continuas?

Ejercicio 3.51. *Sean* V *un espacio vectorial y* d *una métrica en* V*. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si d *satisface*

$$d(v + z, w + z) = d(v, w) \qquad \forall v, w, z \in V, \tag{3.3}$$

entonces la suma $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$, *es continua.*

(b) Si d *satisface* (3.3) *y*

$$d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda|\, d(v, w) \qquad \forall v, w \in V, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

entonces el producto por un escalar $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, *es continuo.*

(c) Si d *satisface* (3.3) *y* (3.4)*, entonces existe una norma* $\|\cdot\|$ *en* V *que induce a la métrica* d*.*

Ejercicio 3.52. *Sean* $X = (X, d)$ *un espacio métrico,* A *un subconjunto no vacío de* X *y* $x \in X$*. Definimos la distancia de* x *a* A *como*

$$\operatorname{dist}(x, A) := \operatorname*{ínf}_{y \in A} d(x, y).$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) *La función* $f: X \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \mathrm{dist}(x, A)$ *es Lipschitz continua.* (Sugerencia: Usa el Ejercicio 2.32).

(b) *Si* A *es un subconjunto cerrado de* X*, entonces* $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ *si y sólo si* $x \in A$.

Ejercicio 3.53. *Sean* A *y* B *subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico* X *tales que* $A \cap B = \emptyset$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *Existe una función continua* $\eta: X \to [0,1]$ *tal que* $\eta^{-1}(0) = A$ *y* $\eta^{-1}(1) = B$, *donde* $\eta^{-1}(a) := \{x \in X : \eta(x) = a\}$. (Sugerencia: Considera la función

$$\eta(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, A)}{\mathrm{dist}(x, A) + \mathrm{dist}(x, B)}.$$

Prueba que está bien definida y que tiene las propiedades deseadas.)

(b) *Existen subconjuntos abiertos* V *y* W *de* X *tales que* $A \subset V$, $B \subset W$ *y* $V \cap W = \emptyset$.

Ejercicio 3.54. *Sean* X *un espacio métrico y* Y *un subespacio métrico de* X. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si* U *es abierto en* X *entonces* $U \cap Y$ *es abierto en* Y.

(b) *Si* A *es cerrado en* X *entonces* $A \cap Y$ *es cerrado en* Y.

Ejercicio 3.55. *Sean* $X = (X, d)$ *un espacio métrico,* $x_0 \in X$ *y* $r > 0$. *Prueba que la esfera*

$$S_X(x_0, r) := \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

es un subconjunto cerrado de X. (Sugerencia: Usa el Ejercicio 3.52 y la Proposición 3.24)

Ejercicio 3.56. *Sea* $p \in [1, \infty]$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) U *es abierto en* $\mathbb{R}^n$ *si y sólo si* U *es abierto en* $\mathbb{R}^n_p$.

(b) C *es cerrado en* $\mathbb{R}^n$ *si y sólo si* C *es cerrado en* $\mathbb{R}^n_p$.

Ejercicio 3.57. *Sea* $X = [-1, 1]$ *con la métrica inducida por la de* $\mathbb{R}$.

(a) *Describe las bolas abiertas* $B_X(1, \varepsilon)$ *y* $B_X(-1, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

(b) *¿Cuál es el interior en X de los siguientes conjuntos?*

$$(0,1], \qquad [0,1], \qquad \left(0,\tfrac{1}{2}\right), \qquad \left[0,\tfrac{1}{2}\right), \qquad [-1,1].$$

Observa que el interior de estos conjuntos en X a veces no coincide con su interior en $\mathbb{R}$.

(c) *¿Cuáles de estos conjuntos son abiertos en X?*

(d) *¿Cuáles de ellos son cerrados en X?*

Ejercicio 3.58. (a) *¿Para cuáles $p \in [1,\infty]$ es*

$$A_1 := \left\{ g \in \mathcal{C}^0[0,1] : \int_0^1 |g(x)|\,dx < 1 \right\}$$

un subconjunto abierto de $\mathcal{C}^0_p[0,1]$?

(b) *¿Para cuáles $p \in [1,\infty]$ es*

$$A_2 := \left\{ g \in \mathcal{C}^0[0,1] : \int_0^1 |g(x)|\,dx \leq 1 \right\}$$

un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}^0_p[0,1]$?
(Sugerencia: Usa la Proposición 3.24.)

Ejercicio 3.59. *Para cada $p \in [1,\infty]$ calcula el interior y la cerradura de los siguientes conjuntos en $\mathcal{C}^0_p[0,1]$.*

(a) $A_3 := \left\{ f \in \mathcal{C}^0[0,1] : |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in [0,1] \right\}$.

(b) $A_4 := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ *donde* $f_k \in \mathcal{C}^0[0,1]$ *es la función*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{si } x \in [0,\frac{1}{k}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{k},1]. \end{cases}$$

Ejercicio 3.60. *Prueba que una sucesión (x_k) en un espacio métrico discreto X_{disc} converge a x en X_{disc} si y sólo si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x$ para todo $k \geq k_0$.*

Ejercicio 3.61. *Sea $c > 0$. Prueba que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c^k}{k!} = 0.$$

Ejercicio 3.62. *Prueba que en cualquier espacio métrico X la intersección de un número finito de subconjuntos abiertos $U_1 \cap \cdots \cap U_m$ es abierta en X.*

Ejercicio 3.63. *Da un ejemplo de una familia numerable de abiertos $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}$ cuya intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ no es abierta en $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 3.64. *Demuestra que en cualquier espacio métrico $X = (X, d)$ se cumple lo siguiente:*

(a) *X es cerrado en X.*

(b) *El conjunto vacío $\emptyset$ es cerrado en X.*

(c) *La intersección $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} C_i$ de cualquier familia $\{C_i : i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos cerrados de X es cerrada en X.*

(d) *La unión $C \cup D$ de dos subconjuntos cerrados C y D de X es cerrada en X.*

(Sugerencia: Aplica las Proposiciones 3.26 y 3.19).

Ejercicio 3.65. *Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) $\operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A)$ *si* $B \subset A$.

(b) $\operatorname{int}(A)$ *es el máximo subconjunto abierto de X contenido en A.*

Ejercicio 3.66. *Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) $\overline{B} \subset \overline{A}$ *si* $B \subset A$.

(b) $\overline{A}$ *es el mínimo subconjunto cerrado de X que contiene a A.*

Ejercicio 3.67. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. La* ***frontera*** *de A en X es el conjunto*
$$\partial A := \overline{A} \smallsetminus \operatorname{int}(A).$$
Prueba que $x \in \partial A$ si y sólo si $B_X(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B_X(x, \varepsilon) \cap (X \smallsetminus A) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

Ejercicio 3.68. *Prueba que la frontera ∂A de cualquier subconjunto A de X es un subconjunto cerrado de X.*

Ejercicio 3.69. *(a) ¿Es cierto que la frontera de la bola abierta $B_V(v_0, r)$ en un espacio normado V es la esfera*

$$S_V(v_0, r) := \{v \in V : \|v - v_0\| = r\}\,?$$

(b) ¿Es cierto que la frontera de la bola abierta $B_X(x_0, r)$ en un espacio métrico arbitrario X es la esfera

$$S_X(x_0, r) := \{x \in X : d_X(x, x_0) = r\}\,?$$

4

Compacidad

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son cerrados y acotados tienen una propiedad fundamental: cualquier sucesión de puntos en ellos contiene una subsucesión convergente. En general, no cualquier subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico tiene esta propiedad. A los subconjuntos que la tienen se les llama *compactos*. Este término fue introducido por Fréchet en 1906.

La compacidad tiene consecuencias muy importantes. Por ejemplo, toda función continua en un espacio métrico compacto alcanza su máximo y su mínimo. Veremos que la compacidad permite concluir la existencia de una solución de una ecuación diferencial tomando el límite de ciertas aproximaciones elementales, como ocurre en el teorema de existencia de Peano que demostraremos más adelante (ver Teorema 7.14).

Existen varias nociones equivalentes de compacidad en espacios métricos. Una de ellas afirma que un subconjunto K de un espacio métrico es compacto si de cualquier familia de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K podemos extraer una familia finita cuya unión también contiene a K. Esta es la definición que usaremos aquí como punto de partida.

4.1. Conjuntos compactos

Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X.

Definición 4.1. *Una **cubierta** de A en X es una familia $\mathfrak{C} = \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos de X tal que*

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i.$$

*Si además X_i es abierto en X para toda $i \in \mathcal{I}$, se dice que $\mathfrak{C}$ es una **cubierta abierta** de A en X. Un subconjunto $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ que a su vez es cubierta de A se llama una **subcubierta** de $\mathfrak{C}$.*

Definición 4.2. *Un subconjunto K de X es **compacto** si cada cubierta abierta $\mathfrak{C} = \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de K en X contiene una subcubierta finita, es decir, si existen $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \in \mathfrak{C}$ tales que*

$$K \subset X_{i_1} \cup \cdots \cup X_{i_m}.$$

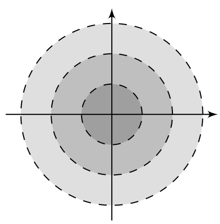
Veamos algunos ejemplos. Denotemos por

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

a la bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro en x_0 y radio r.

Ejemplo 4.3. *$\mathbb{R}^n$ no es compacto.*

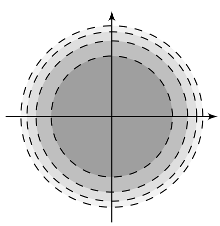
Demostración. $\mathfrak{C} := \{B(0, k) : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}^n$, pero ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es cubierta de $\mathbb{R}^n$.



Por tanto, $\mathbb{R}^n$ no es compacto. $\square$

Ejemplo 4.4. *La bola abierta $B(0, 1)$ en $\mathbb{R}^n$ no es compacta.*

Demostración. $\mathfrak{C} := \left\{B(0, 1 - \frac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta abierta de $B(0, 1)$, pero ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es cubierta de $B(0, 1)$.



Por tanto, $B(0, 1)$ no es compacta. $\square$

A continuación probaremos algunas propiedades importantes de los conjuntos compactos.

Proposición 4.5. *Si K es un subconjunto compacto de X, entonces toda sucesión (x_k) de elementos de K contiene una subsucesión que converge en X a un elemento de K.*

Demostración. Sea (x_k) una sucesión en K. Probaremos primero que existe un punto $y_0 \in K$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, la bola abierta $B_X(y_0, \varepsilon)$ con centro en y_0 y radio ε contiene alguna subsucesión de (x_k).

Argumentando por contradicción, supongamos que para cada $y \in K$ existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $B_X(y, \varepsilon_y)$ no contiene ninguna subsucesión de (x_k). Entonces existe $k_y \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \notin B_X(y, \varepsilon_y) \qquad \forall k \geq k_y.$$

Como K es compacto y $\mathfrak{C} := \left\{ B_X(y, \varepsilon_y) : y \in K \right\}$ es una cubierta abierta de K, existen $y_1, \ldots, y_m \in K$ tales que

$$K \subset B_X(y_1, \varepsilon_{y_1}) \cup \cdots \cup B_X(y_m, \varepsilon_{y_m}).$$

Esto implica que $x_k \notin K$ para todo $k \geq \text{máx} \left\{ k_{y_1}, \ldots, k_{y_m} \right\}$, lo cual es falso.

En consecuencia, existe $y_0 \in K$ tal que toda bola abierta con centro en y_0 contiene a una subsucesión de (x_k). Esto nos permite escoger, inductivamente, para cada $j \in \mathbb{N}$ un punto $x_{k_j} \in B_X(y_0, \frac{1}{j})$ tal que $k_j > k_{j-1}$. La sucesión (x_{k_j}) es una subsucesión de (x_k) que converge a y_0. □

Más adelante veremos que el recíproco también es válido, es decir, que K es un subconjunto compacto de X si y sólo si toda sucesión (x_k) en K contiene una subsucesión convergente en K (ver Teorema 7.4).

Definición 4.6. *Un subconjunto A de un espacio métrico X es **acotado** si existen $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $A \subset B_X(x, \varepsilon)$.*

Proposición 4.7. *Si K es un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de X. Si $x_0 \in \overline{K}$, existe una sucesión (x_k) en K que converge a x_0 en X (ver Proposición 3.32). Por la Proposición 4.5, (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_j}) que converge a un punto $y_0 \in K$. De la Proposición 3.29 se sigue que $x_0 = y_0 \in K$. Esto prueba que K es cerrado.

Probemos ahora que K es acotado. Fijemos un punto $x_0 \in X$. El conjunto $\mathfrak{C} := \{B_X(x_0, k) : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen

$k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subset B_X(x_0, k_1) \cup \cdots \cup B_X(x_0, k_m).$$

Sea $k_0 := \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Entonces $K \subset B_X(x_0, k_0)$, es decir, K es acotado. □

El recíproco no es cierto en general, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.8. *La bola cerrada* $\bar{B}_{\ell_2}(0,1) := \left\{(x_n) \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1\right\}$ *no es compacta en* ℓ_2.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotemos por $\overline{e}_k \in \ell_2$ a la sucesión cuyo k-ésimo término es 1 y todos los demás términos son 0. Claramente $\overline{e}_k \in \bar{B}_{\ell_2}(0,1)$. Observa que

$$\left\|\overline{e}_j - \overline{e}_k\right\|_2 = \sqrt{2} \qquad \forall\, j \neq k.$$

Supongamos que una subsucesión $(\overline{e}_{k_j})$ converge a $\overline{e}$ en ℓ_2. Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\overline{e}_{k_j} - \overline{e}\right\|_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ para todo $j \geq j_0$. En consecuencia,

$$\left\|\overline{e}_{k_j} - \overline{e}_{k_i}\right\|_2 \leq \left\|\overline{e}_{k_j} - \overline{e}\right\|_2 + \left\|\overline{e} - \overline{e}_{k_i}\right\|_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad \forall i, j \geq j_0,$$

lo cual es imposible. Esto prueba que $(\overline{e}_k)$ no contiene ninguna subsucesión convergente. La Proposición 4.5 implica que $\bar{B}_{\ell_2}(0,1)$ no es compacta. □

En general, las bolas cerradas en espacios de dimensión infinita nunca son compactas (ver Ejercicio 5.39). Veremos en la próxima sección que en $\mathbb{R}^n$ sí lo son.

Proposición 4.9. *Sea K un subconjunto compacto de X. Si $C \subset K$ y C es cerrado en X, entonces C es compacto.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de un conjunto compacto K. Si $\mathfrak{C} = \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ es una cubierta abierta de C en X, entonces $\mathfrak{C}' := \{U_i : i \in \mathcal{I}\} \cup \{X \smallsetminus C\}$ es una cubierta abierta de K en X. Como K es compacto, existen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_m} \in \mathfrak{C}$ tales que

$$K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m} \cup (X \smallsetminus C).$$

En consecuencia, $C \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$. Esto prueba que C es compacto. □

La compacidad se preserva bajo funciones continuas, es decir, se cumple lo siguiente.

Proposición 4.10. *Si $\phi \colon X \to Y$ es continua y K es un subconjunto compacto de X, entonces $\phi(K)$ es un subconjunto compacto de Y.*

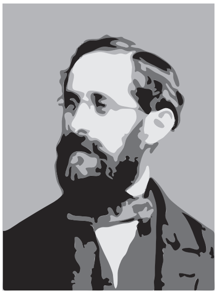
Demostración. Sea $\mathfrak{C} = \{V_i : i \in \mathcal{I}\}$ una cubierta abierta de $\phi(K)$ en Y. Como ϕ es continua, $\phi^{-1}(V_i)$ es abierto en X (ver Proposición 3.24). Por tanto, $\mathfrak{C}' := \{\phi^{-1}(V_i) : i \in \mathcal{I}\}$ es una cubierta abierta de K en X y, como K es compacto, existen $\phi^{-1}(V_{i_1}), \ldots, \phi^{-1}(V_{i_m}) \in \mathfrak{C}'$ tales que $K \subset \phi^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup \phi^{-1}(V_{i_m})$. En consecuencia, $\phi(K) \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_m}$. Esto prueba que $\phi(K)$ es compacto. □

Corolario 4.11. *Si K es un espacio métrico compacto y $\phi\colon K \to X$ es continua, entonces ϕ es una función acotada.*

Demostración. Por la proposición anterior, $\phi(K)$ es un subconjunto compacto de X. La Proposición 4.7 asegura entonces que $\phi(K)$ es acotado, es decir, ϕ es una función acotada (ver Definición 2.24). □

4.2. El teorema de Heine-Borel

Resulta difícil decidir a partir de la definición si un conjunto es compacto o no lo es. A continuación daremos una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Probaremos que son precisamente aquéllos que son cerrados y acotados. A este resultado se le conoce como el teorema de Heine[1]-Borel[2].



Eduard Heine

Émile Borel

[1] Heinrich Eduard Heine (1821-1881) nació en Berlín. Fue alumno de Dirichlet, a quien dedicó su tesis doctoral. Según P. Dugac [Dug89], la historia del teorema de Heine-Borel empieza con la demostración del resultado que afirma que toda función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua. Dirichlet demostró este resultado en 1862, usando de manera implícita la compacidad del intervalo cerrado, en unas notas de clase publicadas 40 años después. Posteriormente, Heine y Weierstrass usaron técnicas análogas.

[2] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) fue un matemático francés y uno de los pioneros de la teoría de la medida y de la probabilidad. Estudió en la École Normale Supérieure y fue profesor en dicha institución. Borel fue el primero en formular y demostrar en 1895 una versión explícita del resultado que ahora conocemos como el teorema de Heine-Borel para cubiertas numerables.

Empezaremos probando la siguiente afirmación.

Proposición 4.12. *El cubo cerrado*

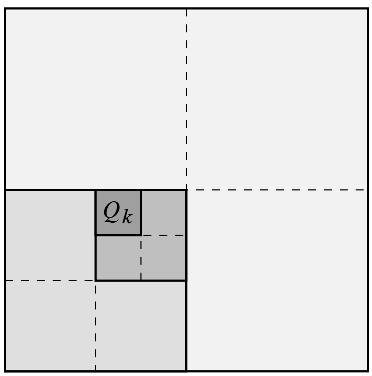
$$Q := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [-r, r],\ i = 1, \dots, n\}, \qquad r > 0,$$

es compacto.

Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que Q no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\mathfrak{C} = \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ de Q en $\mathbb{R}^n$ tal que ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es cubierta de Q. En consecuencia, si subdividimos a Q en 2^n cubos cerrados de lado r, se cumple que al menos uno de ellos, llamémoslo Q_1, no está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$. Subdividamos ahora Q_1 en 2^n cubos cerrados de lado $\frac{r}{2}$ y repitamos este argumento para obtener una sucesión decreciente de cubos cerrados

$$Q \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_k \supset \cdots,$$

tales Q_k es un cubo de lado $\frac{r}{2^{k-1}}$ y Q_k no esta contenido en la unión de ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$.



Denotemos por $\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$ al centro de Q_k. Entonces,

$$\left|\xi_i^k - x_i\right| \leq \frac{r}{2^k} \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in Q_k. \tag{4.1}$$

En particular, como $\xi^j \in Q_k$ para $j \geq k$, se tiene que

$$\left|\xi_i^k - \xi_i^j\right| \leq \frac{r}{2^k} \qquad \forall j \geq k, \ \ \forall i = 1, \dots, n. \tag{4.2}$$

Así pues, para cada $i = 1, \dots, n$, la sucesión (ξ_i^k) es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, existe $\xi_i \in \mathbb{R}$ tal que $\xi_i^k \to \xi_i$ en $\mathbb{R}$. Pasando al límite cuando $j \to \infty$ en la desigualdad (4.2) obtenemos que

$$\left|\xi_i^k - \xi_i\right| \leq \frac{r}{2^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall i = 1, \dots, n. \tag{4.3}$$

Dado que $\xi_i^j \in [-r, r]$, se tiene que $\xi_i \in [-r, r]$. Es decir, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in Q$. Y, puesto que $\mathfrak{C}$ es cubierta de Q, existe $U_* \in \mathfrak{C}$ tal que $\xi \in U_*$.

Ahora bien, como U_* es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\xi, \varepsilon) \subset U_*$. Si $x \in Q_k$, usando las desigualdades (4.1) y (4.3) obtenemos

$$\|x - \xi\| \leq \left\|x - \xi^k\right\| + \left\|\xi^k - \xi\right\| \leq \frac{r\sqrt{n}}{2^k} + \frac{r\sqrt{n}}{2^k} = \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}}$$

y, en consecuencia,

$$Q_k \subset B(\xi, \varepsilon) \subset U_* \qquad \text{si } \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

Esto contradice nuestra suposición de que Q_k no puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$. En consecuencia, Q es compacto. □

El teorema de Heine-Borel da una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.13 (Heine-Borel)**.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Demostración. Por la Proposición 4.7, si K es compacto entonces es cerrado y acotado. Inversamente, supongamos que K es cerrado y acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que K está contenido en el cubo

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [-r, r], i = 1, \dots, n\},$$

que es compacto. La Proposición 4.9 implica que K también lo es. □

Otra consecuencia importante de la Proposición 4.12 es el siguiente resultado, que se conoce como el teorema de Bolzano[3]-Weierstrass.

[3] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) nació en Praga, entonces parte del Imperio Austriaco. Fue uno de los pioneros en proponer un tratamiento riguroso del análisis matemático, pero sus contribuciones sólo fueron conocidas y valoradas muchos años más tarde, ya que fue destituído de su cátedra en la Universidad de Praga por razones políticas y puesto bajo arresto domiciliario con la prohibición de publicar.

Bernhard Bolzano

Teorema 4.14 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ contiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Si (ζ_k) es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces existe $r > 0$ tal que $\zeta_k \in Q$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde Q es el cubo

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [-r, r], i = 1, \dots, n\},$$

que es compacto. Por la Proposición 4.5, la sucesión (ζ_k) contiene una subsucesión convergente. □

4.3. Existencia de máximos y mínimos

Sean X un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ una función.

Definición 4.15. *Decimos que f **alcanza su mínimo en** X si existe $x_0 \in X$ tal que*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in X.$$

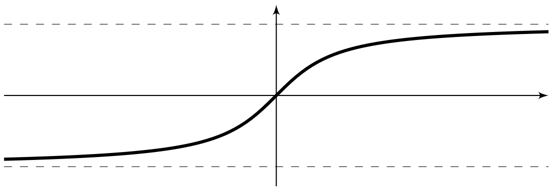
*Decimos que f **alcanza su máximo en** X si existe $x_1 \in X$ tal que*

$$f(x_1) \geq f(x) \qquad \forall x \in X.$$

*El punto x_0 se llama un **mínimo** de f en X y el punto x_1 se llama un **máximo** de f en X.*

Una función continua no alcanza, en general, su mínimo o su máximo. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.16. *La función* arctan: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está acotada inferior y superiormente pero no alcanza ni su mínimo ni su máximo en* $\mathbb{R}$.



Una consecuencia importante de la compacidad es la siguiente.

Teorema 4.17. *Si K es un espacio métrico compacto y no vacío, entonces toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo y su máximo en K.*

Demostración. El Corolario 4.11 asegura que $f(K)$ es un subconjunto acotado en $\mathbb{R}$ y, dado que no es vacío, se tiene que

$$m_0 := \inf_{z \in K} f(z) \in \mathbb{R}.$$

Escojamos $z_k \in K$ tal que

$$m_0 \leq f(z_k) < m_0 + \tfrac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Como K es compacto, la Proposición 4.5 asegura que la sucesión (z_k) contiene una subsucesión (z_{k_j}) que converge a un punto z_0 en K. Dado que f es continua, se tiene entonces que $f(z_{k_j}) \to f(z_0)$ en $\mathbb{R}$. De la desigualdad (4.4) se sigue que

$$m_0 = \lim_{j \to \infty} f(z_{k_j}) = f(z_0).$$

Es decir, z_0 es un mínimo de f.

De manera análoga se prueba que f alcanza su máximo en K [Ejercicio 4.39]. □

En particular, se tiene el siguiente resultado, al que nos referimos en el Capítulo 1.

Corolario 4.18. *Sea $K \neq \emptyset$ un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo en K.*

Demostración. Esta afirmación es consecuencia inmediata de los Teoremas 4.17 y 4.13. □

Una consecuencia importante del Teorema 4.17 es el siguiente resultado.

Teorema 4.19. *Cualesquiera dos normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

Demostración. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V. Dado $v \in V$ lo expresamos como $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{R}$, y definimos

$$\|v\|_* := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

Es sencillo comprobar que $\|\cdot\|_*$ es una norma en V. Denotemos por $V_* := (V, \|\cdot\|_*)$ al espacio V provisto de esta norma. Entonces la función $\phi\colon \mathbb{R}^n \to V_*$ dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

es una isometría (ver Ejercicio 2.56). Como el conjunto $S := \{v \in V : \|v\|_* = 1\}$ es la imagen bajo ϕ de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, que es cerrada y acotada en $\mathbb{R}^n$, el teorema de Heine-Borel y la Proposición 4.10 aseguran que S es compacto en V_*.

Sea $\|\cdot\|$ una norma en V. Para probar la afirmación del teorema, bastará probar que $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes.

Sea $c_1 := \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2}$. Usando la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|$ y la desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$ con $p = q = 2$ (ver Proposición 2.12) obtenemos que

$$\|v\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} \leq c_1 \|v\|_* \qquad \forall v \in V. \tag{4.5}$$

Como consecuencia de esta desigualdad, la función $\|\cdot\| : V_* \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua, ya que

$$\big| \|w\| - \|v\| \big| \leq \|w - v\| \leq c_1 \|w - v\|_* \qquad \forall v, w \in V.$$

Aplicando el Teorema 4.17 concluimos que existe $v_0 \in S$ tal que $\|v_0\| \leq \|v\|$ para todo $v \in S$, es decir,

$$c_2 := \|v_0\| \leq \left\| \frac{v}{\|v\|_*} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|_*} \qquad \forall v \in V,\ v \neq 0.$$

O, equivalentemente,

$$c_2 \|v\|_* \leq \|v\| \qquad \forall v \in V. \tag{4.6}$$

Nota que $c_2 > 0$ porque $v_0 \neq 0$. Las desigualdades (4.5) y (4.6) aseguran que las normas $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes. □

Denotamos por

$$\mathcal{C}^0(X,Y) := \{\phi\colon X \to Y : \phi \text{ es continua}\}. \tag{4.7}$$

El Corolario 4.11 asegura que, si K es un espacio métrico compacto, entonces $\mathcal{C}^0(K,Y)$ está contenido en el espacio de funciones acotadas $\mathcal{B}(K,Y)$ (ver Sección 2.4). Podemos entonces darle a $\mathcal{C}^0(K,Y)$ la métrica uniforme

$$d_\infty(\phi,\psi) = \sup_{x\in K} d_Y(\phi(x),\psi(x)).$$

Observa que, si $\phi,\psi \in \mathcal{C}^0(K,Y)$, la función $f\colon K \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d_Y(\phi(x),\psi(x))$ es continua. Si K es compacto y no vacío, esta función alcanza su máximo en K y, en consecuencia,

$$d_\infty(\phi,\psi) = \max_{x\in K} d_Y(\phi(x),\psi(x)). \tag{4.8}$$

4.4. Semicontinuidad

Volvamos ahora a nuestro problema de partida, el Problema 1.1, que inquiere lo siguiente: ¿Alcanza la función longitud su mínimo en el conjunto de trayectorias $\mathcal{T}_{p,q}(X)$?

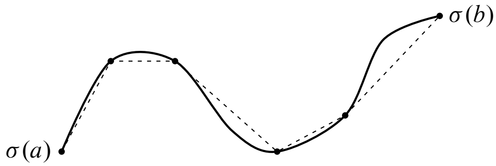
El conjunto $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ es un espacio métrico con la métrica uniforme, pero la función longitud no es continua, así que no podemos aplicar el Teorema 4.17 para obtener una respuesta a esta pregunta.

En cierto sentido las condiciones de compacidad y continuidad son opuestas la una de la otra ya que, mientras más abiertos tenga X, más fácil es que una función $X \to Y$ resulte continua pero más difícil es que X sea compacto. Y viceversa. Esta disyuntiva se presenta con frecuencia en las aplicaciones. Resulta pues conveniente contar con un resultado de existencia de mínimos para funciones que no son continuas.

Empecemos extendiendo el concepto de trayectoria a un espacio métrico arbitrario $X = (X, d_X)$.

Definición 4.20. *Una* ***trayectoria en*** X *es una función continua* $\sigma\colon [a,b] \to X$*. La* ***longitud de*** σ *se define como*

$$\mathfrak{L}(\sigma) := \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} d_X(\sigma(t_{k-1}),\sigma(t_k)) : a = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_m = b,\ m \in \mathbb{N}\right\}.$$

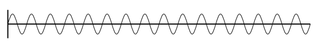


La longitud de una trayectoria no es necesariamente finita [Ejercicio 4.48]. Denotemos por

$$\mathfrak{L} : \mathcal{C}^0([a,b], X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

a la función que a cada trayectoria le asocia su longitud.

Sabemos que esta función no es continua en general (ver Ejercicio 3.48). Esto se debe a que pueden existir trayectorias arbitrariamente largas tan cercanas como queramos a una trayectoria dada.



Sin embargo, no pueden existir trayectorias arbitrariamente cortas tan cercanas como queramos a una trayectoria dada, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 4.21. *Dadas $\sigma \in \mathcal{C}^0([a,b], X)$ y $c < \mathfrak{L}(\sigma)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$c < \mathfrak{L}(\tau) \qquad \textit{si} \;\; d_\infty(\tau, \sigma) < \delta.$$

Demostración. Sean $\sigma : [a,b] \to X$ una trayectoria en X y $c < \mathfrak{L}(\sigma)$. Escojamos $\delta_0 > 0$ tal que $c + \delta_0 < \mathfrak{L}(\sigma)$ y una partición $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b$ tal que

$$c + \delta_0 < \sum_{k=1}^{m} d_X(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)).$$

Sea $\delta := \frac{\delta_0}{2m}$. Si $d_\infty(\sigma, \tau) < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_X(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)) &\leq d_X(\sigma(t_{k-1}), \tau(t_{k-1})) + d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + d_X(\tau(t_k), \sigma(t_k)) \\ &< \delta + d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + \delta = d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + \frac{\delta_0}{m}. \end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades para todo $k = 1, \ldots, m$ obtenemos que

$$c + \delta_0 < \sum_{k=1}^{m} d_X(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)) < \sum_{k=1}^{m} d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + \delta_0 \leq \mathfrak{L}(\tau) + \delta_0.$$

En consecuencia, $c < \mathfrak{L}(\tau)$. $\square$

A continuación estudiaremos a las funciones que tienen esta propiedad.

Definición 4.22. *Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es **semicontinua inferiormente en el punto** $x_0 \in X$ si, dada $c < f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$c < f(x) \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$

*Se dice que f es **semicontinua inferiormente (s.c.i.)** si lo es en todo punto $x_0 \in X$.*

Análogamente, se define el siguiente concepto.

Definición 4.23. *Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es **semicontinua superiormente en el punto** $x_0 \in X$ si, dada $c > f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) < c \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$

*Se dice que f es **semicontinua superiormente (s.c.s.)** si lo es en todo punto $x_0 \in X$.*

Observa que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si f es s.c.i. y s.c.s. [Ejercicio 4.43].

Ejemplo 4.24. *(a) La función $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\lceil t \rceil := n \ \text{ si } \ n - 1 < t \leq n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

es s.c.i. pero no es continua.

(b) La función parte entera $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\lfloor t \rfloor := n \ \text{ si } \ n \leq t < n + 1, \ n \in \mathbb{Z},$$

es s.c.s. pero no es continua.

La demostración es sencilla y se propone como ejercicio [Ejercicio 4.44].

Ejemplo 4.25. *La* Proposición 4.21 *asegura que la función longitud*

$$\mathfrak{L} : \mathcal{C}^0([a, b], X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \sigma \mapsto \mathfrak{L}(\sigma),$$

es s.c.i.

Una caracterización muy útil de la semicontinuidad inferior está dada en términos del siguiente concepto.

Definición 4.26. *Sea (t_k) una sucesión en $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. El* ***límite inferior de*** (t_k) *se define como*

$$\liminf_{k\to\infty} t_k := \sup_{m\geq 1} \inf_{k\geq m} t_k \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\},$$

y el ***límite superior de*** (t_k) *como*

$$\limsup_{k\to\infty} t_k := \inf_{m\geq 1} \sup_{k\geq m} t_k \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Ejemplo 4.27. *Si $t_k := (-1)^k$ entonces la sucesión (t_k) no converge, y se tiene que*

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = -1 \qquad y \qquad \limsup_{k\to\infty} t_k = 1.$$

Es fácil ver [Ejercicio 4.45] que, si una sucesión de números reales (t_k) converge en $\mathbb{R}$, entonces

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} t_k = \limsup_{k\to\infty} t_k, \tag{4.9}$$

Proposición 4.28. *$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es semicontinua inferiormente en x_0 si y sólo si para cualquier sucesión (x_k) en X tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ se cumple que*

$$f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Demostración. $\Rightarrow$): Supongamos que f es semicontinua inferiormente en x_0. Sea (x_k) una sucesión en X tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Entonces, para cada $c < f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$c < f(x) \qquad \text{si } \; d_X(x, x_0) < \delta.$$

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B_X(x_0, \delta) \qquad \forall k \geq k_0.$$

Entonces,

$$c \leq \inf_{k\geq k_0} f(x_k) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Como esta desigualdad se cumple para todo $c < f(x_0)$, concluimos que

$$f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

$\Leftarrow$): Supongamos que f no es semicontinua inferiormente en x_0. Entonces, para algún $c_0 < f(x_0)$ existe una sucesión (x_k) en X tal que

$$x_k \in B_X\left(x_0, \tfrac{1}{k}\right) \qquad \text{y} \qquad c_0 \geq f(x_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que (x_k) converge a x_0 en X y que

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \leq c_0 < f(x_0),$$

lo que demuestra la implicación deseada. □

Dado $a \in \mathbb{R}$, denotamos

$$f^{\leq a} := \{x \in X : f(x) \leq a\}.$$

El siguiente resultado tiene aplicaciones importantes. Por lo pronto, como la función longitud es s.c.i., nos da esperanzas de obtener alguna respuesta al Problema 1.1.

Teorema 4.29. *Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es s.c.i. y si $f^{\leq a}$ es compacto y no vacío para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces f alcanza su mínimo en X.*

Demostración. Sea $m_0 := \inf_{x\in X} f(x)$. Como $f^{\leq a} \neq \emptyset$, se tiene que $-\infty \leq m_0 \leq a$. Sea (x_k) una sucesión en $f^{\leq a}$ tal que $f(x_k) \to m_0$. Como $f^{\leq a}$ es compacto, (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_j}) tal que $x_{k_j} \to x_0$ en X. De la proposición anterior y la observación (4.9) se sigue que

$$m_0 \leq f(x_0) \leq \liminf_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = m_0.$$

Por lo tanto, $f(x_0) = m_0 > -\infty$, es decir, x_0 es un mínimo de f. □

Para aplicar este resultado al Problema 1.1 deberemos investigar si para algún $a \in \mathbb{R}$ el conjunto de trayectorias en $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ de longitud a lo más a es compacto y no vacío. Es sencillo comprobar que no es así [Ejercicio 4.49]. Volveremos al Problema 1.1 en el Capítulo 7.

4.5. Continuidad uniforme

La noción de continuidad de una función es una propiedad local, es decir, una función es continua si lo es en cada punto. A continuación daremos una noción de continuidad, que no depende de cada punto en particular, sino únicamente de la distancia entre los puntos. Esta propiedad es importante, por ejemplo, para garantizar la continuidad de ciertas funciones definidas en espacios de funciones [Ejercicio 4.52].

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos.

Definición 4.30. *Una función $\phi\colon X \to Y$ es* ***uniformemente continua*** *si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende únicamente de ε) tal que, para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$,*

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) < \varepsilon \qquad \textit{si} \;\; d_X(x_1, x_2) < \delta.$$

Claramente toda función uniformemente continua es continua. Pero el recíproco no es cierto en general [Ejercicio 4.51]. El siguiente resultado afirma que, si la función está definida en un espacio compacto, ambas nociones coinciden.

Teorema 4.31. *Sea K un espacio métrico compacto. Entonces toda función continua $\phi\colon K \to Y$ es uniformemente continua.*

Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que K es compacto y que $\phi\colon K \to Y$ es continua pero no es uniformemente continua. Entonces para algún $\varepsilon_0 > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $x_k, \widetilde{x}_k \in K$ tales que

$$d_K(x_k, \widetilde{x}_k) < \tfrac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad d_Y(\phi(x_k), \phi(\widetilde{x}_k)) \geq \varepsilon_0.$$

Como K es compacto, la sucesión (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_j}) tal que $x_{k_j} \to x$ en K (ver Proposición 4.5). De la desigualdad del triángulo

$$d_K(x, \widetilde{x}_{k_j}) \leq d_K(x, x_{k_j}) + d_K(x_{k_j}, \widetilde{x}_{k_j})$$

se sigue que $\widetilde{x}_{k_j} \to x$ en K y, como ϕ es continua, se cumple entonces que $\phi(x_{k_j}) \to \phi(x)$ y $\phi(\widetilde{x}_{k_j}) \to \phi(x)$ en Y (ver Proposición 3.33). En consecuencia,

$$d_Y(\phi(x_{k_j}), \phi(\widetilde{x}_{k_j})) \leq d_Y(\phi(x_{k_j}), \phi(x)) + d_Y(\phi(x), \phi(\widetilde{x}_{k_j})) < \varepsilon_0$$

para j suficientemente grande. Esto contradice nuestra suposición. □

4.6. Ejercicios

Ejercicio 4.32. *Sea V un espacio normado y sea $S_V := \{x \in V : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en V. En cada uno de los siguientes casos investiga si la esfera unitaria es o no compacta.*

(a) $\dim V < \infty$.

(b) $V = \ell_p$ *con* $p \in [1, \infty]$.

(c) $V = \mathcal{C}_p^0[0,1]$ *con* $p \in [1, \infty]$.

Ejercicio 4.33. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si K *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ *y* $p \in [1, \infty]$, *entonces*

$$\widehat{K} := \bigcup_{\xi \in K} \bar{B}_p(\xi, \delta)$$

es compacto, donde $\bar{B}_p(\xi, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\|_p \le \delta\}$.

(b) La afirmación anterior no es válida en general en un espacio métrico arbitrario. (Sugerencia: Toma $K := \{0\}$ en ℓ_2 y usa el Ejemplo 4.8.)

Ejercicio 4.34. *¿Es cierto en general que, si* $\phi\colon X \to Y$ *es continua y* K *es un subconjunto compacto de* Y, *entonces* $\phi^{-1}(K)$ *es un subconjunto compacto de* X*? Justifica tu respuesta.*

Ejercicio 4.35. *Prueba que, si* $\phi\colon X \to Y$ *es un homeomorfismo, entonces* K *es compacto en* X *si y sólo si* $\phi(K)$ *es compacto en* Y.

Ejercicio 4.36. *Sea* X *un espacio discreto. Prueba que* X *es compacto si y sólo si es finito.*

Ejercicio 4.37. *Prueba que, si* $\phi\colon X \to Y$ *es continua y biyectiva y* X *es compacto, entonces* $\phi^{-1}\colon Y \to X$ *es continua (es decir,* ϕ *es un homeomorfismo).*

Ejercicio 4.38. *Sea* $\mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *el círculo unitario en* $\mathbb{R}^2$. *Considera la función*

$$f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1, \qquad f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Prueba que

(a) f *es continua y biyectiva,*

(b) $f^{-1}\colon \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi)$ *no es continua.*

Es decir, la compacidad de X *es esencial en la afirmación del ejercicio anterior.*

Ejercicio 4.39. *Prueba que, si un espacio métrico* X *es compacto y no vacío, entonces toda función continua* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *alcanza su máximo en* X.

Ejercicio 4.40. *Sean A un subconjunto no vacío de un espacio métrico X y $x \in X$. Como en el* Ejercicio 3.52 *definimos la distancia de x a A como*

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} d_X(x, y).$$

(a) Prueba que, si A es compacto, entonces para cada $x \in X$ existe $z \in A$ tal que

$$d_X(x, z) = \operatorname{dist}(x, A).$$

(b) ¿Es cierta la afirmación anterior si A es un subconjunto arbitrario de X?

Ejercicio 4.41. *La distancia entre dos subconjuntos no vacíos A y B de un espacio métrico X se define como*

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d_X(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

(a) Prueba que, si A es compacto, B es cerrado y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

(b) ¿Es cierta la afirmación anterior si B es abierto en vez de cerrado?

(c) ¿Es cierto en general que la distancia entre dos cerrados ajenos es positiva?

Ejercicio 4.42. *Sean V y W espacios normados. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $\dim V = \dim W < \infty$*, entonces existe una equivalencia $\phi \colon V \to W$ que es además un isomorfismo lineal.*

(b) Si $\dim V < \infty$ *y $K \subset V$, entonces K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado en V.*

(c) Si $\dim V < \infty$*, entonces toda transformación lineal $L \colon V \to W$ es Lipschitz continua.* (Sugerencia: Prueba que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|Lv\|_W \leq c$ si $\|v\|_V = 1$, y demuestra que se cumple la afirmación (c) del Ejercicio 3.36.)

Ejercicio 4.43. *Sea $x_0 \in X$. Prueba que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si y sólo si f es s.c.i. y s.c.s. en x_0.*

Ejercicio 4.44. *(a) La función $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\lceil t \rceil := n \quad si \quad n - 1 < t \leq n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

es s.c.i.

(b) *La función parte entera* $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\lfloor t \rfloor := n \quad si \quad n \leq t < n+1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

es s.c.s.

Ejercicio 4.45. *Sea* (t_k) *una sucesión en* $\mathbb{R}$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *Se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\liminf_{k\to\infty} t_k \leq \limsup_{k\to\infty} t_k.$$

(b) *La sucesión* (t_k) *converge en* $\mathbb{R}$ *si y sólo si*

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = \limsup_{k\to\infty} t_k,$$

y, en ese caso,

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} t_k = \limsup_{k\to\infty} t_k.$$

Ejercicio 4.46. *Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) f *es s.c.i.*

(b) $f_{>a} := \{x \in X : f(x) > a\}$ *es abierto para toda* $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{\leq a} := \{x \in X : f(x) \leq a\}$ *es cerrado para toda* $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.47. (a) *Prueba que* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *es s.c.s. si y sólo si* $-f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *es s.c.i.*

(b) *Para una función s.c.s.* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *enuncia y demuestra los resultados correspondientes al* Ejercicio 4.46, *la* Proposición 4.28, *y el* Teorema 4.29.

Ejercicio 4.48. *Da un ejemplo de una trayectoria* $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *de longitud infinita.*

Ejercicio 4.49. *Considera la sucesión de trayectorias* $\sigma_k : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\sigma_k(t) = \begin{cases} 2^k t & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2^k}, \\ 1 & si\ \frac{1}{2^k} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) σ_k *es un mínimo de la función longitud* $\mathfrak{L}\colon \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(b) (σ_k) *no contiene ninguna subsucesión convergente en* $\mathcal{C}^0[0,1]$ (Sugerencia: Prueba que $\left\|\sigma_j - \sigma_k\right\|_\infty \geq \frac{1}{2}\ \forall j \neq k$).

(c) $\mathfrak{L}^{\leq a} := \{\sigma \in \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) : \mathfrak{L}(\sigma) \leq a\}$ *no es un subconjunto compacto de* $\mathcal{C}^0[0,1]$ *para ningún* $a \geq 1$.

(d) $\mathfrak{L}\colon \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *no satisface las hipótesis del* Teorema 4.29.

Ejercicio 4.50. *Sean* $\mathbb{S}^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ *el círculo unitario en* $\mathbb{R}^2$, $p = (1,0)$,

$$\mathcal{T}_{p,p}(\mathbb{S}^1) := \left\{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{S}^1) : \sigma(0) = p = \sigma(1)\right\}$$

y $\mathfrak{L}\colon \mathcal{T}_{p,p}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *la función longitud. ¿Para qué valores de* $a \in \mathbb{R}$ *es*

$$\mathfrak{L}^{\leq a} := \left\{\sigma \in \mathcal{T}_{p,p}(\mathbb{S}^1) : \mathfrak{L}(\sigma) \leq a\right\}$$

un subconjunto compacto de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{S}^1)$*?*

Ejercicio 4.51. *¿Cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas?*

(a) $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t}$.

(b) $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t}, \quad$ *con* $a > 0$.

(c) $f: X \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \operatorname{dist}(x,A), \quad$ *donde* A *es un subconjunto arbitrario del espacio métrico* X.

Ejercicio 4.52. *Sean* $\mathcal{K}\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas. Definimos* $\hat{f}:[a,b] \to \mathbb{R}$ *como*

$$\widehat{f}(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y)f(y)dy.$$

Prueba que $\hat{f}$ *es continua.* (Sugerencia: Usa la continuidad uniforme de $\mathcal{K}$.)

Ejercicio 4.53. *Investiga si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones.*

(a) *Toda función Lipschitz continua es uniformemente continua.*

(b) *Toda función uniformemente continua es Lipschitz continua.*

5

Completitud

Para sucesiones de números reales se tiene un criterio de convergencia que depende únicamente de la sucesión misma: si una sucesión de números reales es de Cauchy entonces converge.

La noción de sucesión de Cauchy se extiende de manera natural a espacios métricos. Sin embargo, no es cierto en general que cualquier sucesión de Cauchy en un espacio métrico converge. A los espacios métricos en los que cualquier sucesión de Cauchy converge se les llama *completos*.

La completitud es una propiedad muy importante. Permite, por ejemplo, obtener soluciones de sistemas de ecuaciones numéricas, de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones integrales mediante un proceso de iteración, como veremos en el siguiente capítulo.

5.1. Espacios métricos completos

Sea $X = (X, d_X)$ un espacio métrico. La definición de sucesión de Cauchy[1] en X es formalmente idéntica a la que conocemos en $\mathbb{R}$.

Definición 5.1. *Una sucesión* (x_k) *en* X *es* ***de Cauchy*** *si, dada* $\varepsilon > 0$, *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d_X(x_k, x_j) < \varepsilon \qquad \forall k, j \geq k_0.$$

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) nació en París. Es uno de los pioneros del análisis matemático. Fue un matemático profundo, que cultivó diversas áreas de las matemáticas y ejerció una fuerte influencia sobre sus contemporáneos y sucesores. Escribió cerca de 800 artículos de investigación.

Augustin Cauchy

Proposición 5.2. *Toda sucesión convergente en X es de Cauchy.*

Demostración. Si $x_k \to x$ en X entonces, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $k \geq k_0$. Por tanto

$$d_X(x_k, x_j) \leq d_X(x_k, x) + d_X(x, x_j) < \varepsilon \qquad \forall k, j \geq k_0.$$

Es decir, (x_k) es de Cauchy. □

No es cierto, en general, que cualquier sucesión de Cauchy converge. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 5.3. *Sea $X := (0,1)$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$. La sucesión $(\frac{1}{k})$ es de Cauchy en X pero no converge en X* [Ejercicio 5.31].

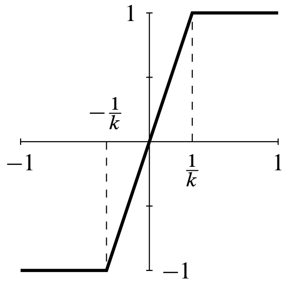
Ejemplo 5.4. *La sucesión de funciones $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & si \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{k}, \\ kx & si \ -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 1 & si \ \frac{1}{k} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

es de Cauchy en $\mathcal{C}_1^0[-1,1]$ pero no converge en $\mathcal{C}_1^0[-1,1]$.

Demostración. Para $j \geq k$ se tiene que

$$\int_{-1}^{1} \left| f_j(x) - f_k(x) \right| dx = 2 \int_0^1 \left(f_j(x) - f_k(x) \right) dx = \frac{1}{k} - \frac{1}{j}.$$



$y = f_k(x)$

En consecuencia, dada $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$\left\| f_j - f_k \right\|_1 < \varepsilon \qquad \forall k, j > \tfrac{2}{\varepsilon}.$$

Así pues, (f_k) es de Cauchy.

Argumentando por contradicción, supongamos que $f_k \to f$ en $\mathcal{C}_1^0[-1,1]$. Sea $a \in (0,1)$. Si $k \geq \frac{1}{a}$, entonces $f_k(x) = 1$ para todo $x \in [a,1]$. En consecuencia,

$$0 \leq \int_a^1 |1 - f(x)|\, dx \leq \int_{-1}^1 |f_k(x) - f(x)|\, dx = \| f_k - f \|_1 \to 0.$$

Por tanto,

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx = 0,$$

lo que implica que $f(x) = 1$ para todo $x \in [a,1]$. Análogamente, $f(x) = -1$ para todo $x \in [-1,-a]$ y, como $a \in (0,1)$ es arbitraria, tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1,0), \\ 1 & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

En consecuencia, f no es continua en $[-1,1]$, lo cual contradice nuestra suposición. $\square$

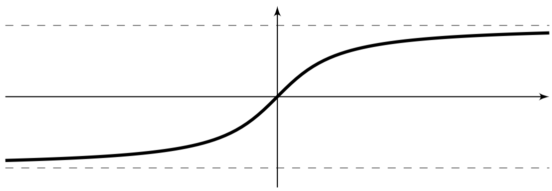
En la siguiente sección probaremos que en $\mathcal{C}_\infty^0[-1,1]$ cualquier sucesión de Cauchy converge. A los espacios métricos que tienen esta propiedad se les llama completos.

Definición 5.5. *Un espacio métrico X es **completo**, si toda sucesión de Cauchy en X converge en X. Un espacio normado que es completo con la métrica inducida por su norma se llama un **espacio de Banach**.*

Los ejemplos anteriores muestran que (a,b) y $\mathcal{C}_1^0[a,b]$ no son completos. De hecho, $\mathcal{C}_p^0[a,b]$ no es un espacio de Banach para ninguna $p \in [1,\infty)$ [Ejercicio 5.32].

La completitud no es invariante bajo homeomorfismos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6. *La función* $\tan\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *es un homeomorfismo.* $\mathbb{R}$ *es un espacio métrico completo, pero* $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ *no lo es.*



$y = \tan^{-1}(x)$

Sin embargo, la completitud sí se preserva bajo equivalencias.

Proposición 5.7. *Si existe una equivalencia* $\phi\colon X \to Y$ *entre dos espacios métricos* X *y* Y*, entonces* X *es completo si y sólo si* Y *lo es.*

Demostración. Supongamos que Y es completo y que $\phi\colon X \to Y$ es Lipschitz continua. Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_Y(\phi(x_j),\phi(x_k)) \le c\, d_X(x_j,x_k) < \varepsilon \qquad \forall j,k \ge k_0.$$

Es decir, la sucesión $(\phi(x_k))$ es de Cauchy en Y y, como Y es completo, se tiene que $\phi(x_k) \to y$ en Y. Ahora bien, como ϕ^{-1} es continua, la Proposición 3.33 garantiza que $x_k = \phi^{-1}(\phi(x_k)) \to \phi^{-1}(y)$ en X. Esto prueba que X es completo. El recíproco se obtiene reemplazando Y por X y ϕ por ϕ^{-1} en el argumento anterior. $\square$

Una consecuencia importante es la siguiente.

Teorema 5.8. *Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.*

Demostración. Como para cualquier espacio normado V de dimensión n existe una equivalencia $\phi\colon \mathbb{R}^n_\infty \to V$ (ver Ejercicio 4.42), en virtud de la Proposición 5.7 bastará probar que $\mathbb{R}^n_\infty$ es completo.

Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n_\infty$, donde $x_k = (x_{k,1},\dots,x_{k,n})$. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|x_{j,i} - x_{k,i}\right| \le \max_{i=1,\dots,n} \left|x_{j,i} - x_{k,i}\right| = \left\|x_j - x_k\right\|_\infty < \varepsilon \quad \forall j,k \ge k_0,\ \forall i = 1,\dots,n.$$

Esto prueba que, para cada $i = 1, \dots, n$, la sucesión $(x_{k,i})$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, $x_{k,i} \to x_i$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| x_{k,i} - x_i \right| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_i, \;\; \forall i = 1, \dots, n,$$

y, en consecuencia,

$$\|x_k - x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left| x_{k,i} - x_i \right| < \varepsilon \qquad \forall k \geq \max\{k_1, \dots, k_n\},$$

donde $x := (x_1, \dots, x_n)$. Es decir, $x_k \to x$ en $\mathbb{R}^n_\infty$. □

No todo subespacio de un espacio métrico completo es un espacio métrico completo. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es completo pero ningún intervalo abierto (a, b) lo es. La siguiente proposición caracteriza a aquéllos que sí lo son.

Proposición 5.9. *Sea X un espacio métrico completo. Un subespacio métrico A de X es completo si y sólo si es cerrado en X.*

Demostración. $\Leftarrow$): Supongamos que A es cerrado en X. Sea (a_k) una sucesión de Cauchy en A. Entonces (a_k) es una sucesión de Cauchy en X y, como X es completo, $a_k \to x$ en X. Por la Proposición 3.32 se tiene que $x \in \overline{A} = A$. Esto prueba que A es completo.

$\Rightarrow$): Supongamos ahora que A es completo. Sea $x \in \overline{A}$. Por la Proposición 3.32, existe una sucesión (a_k) en A tal que $a_k \to x$ en X. La Proposición 5.2 asegura entonces que (a_k) es de Cauchy y, como A es completo, se tiene que $a_k \to a$ en A. De la unicidad del límite (ver Proposición 3.29) se sigue que $x = a \in A$. En consecuencia, A es cerrado. □

5.2. Convergencia uniforme

En esta sección daremos ejemplos importantes de espacios métricos completos. Empezaremos comparando ciertos tipos de convergencia para sucesiones de funciones.

Sean S un conjunto y $X = (X, d_X)$ un espacio métrico.

Definición 5.10. *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge **puntualmente** en S a una función $f : S \to X$ si $f_k(z) \to f(z)$ en X para cada $z \in S$. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $z \in S$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε y de z) tal que*

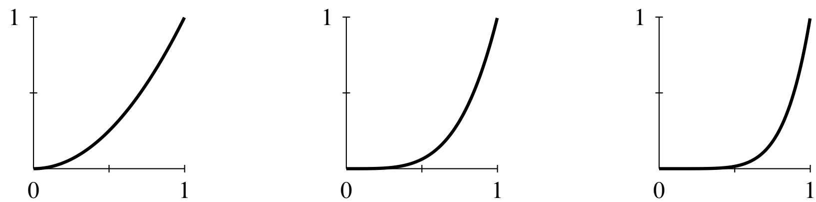
$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

*La función f se llama el **límite puntual** de (f_k).*

El límite puntual de una sucesión de funciones continuas no es, por lo general, una función continua, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.11. *La sucesión de funciones* $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$, *converge puntualmente a*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



$y = x^2$ $\qquad$ $y = x^4$ $\qquad$ $y = x^6$

Daremos a continuación una noción de convergencia según la cual el límite de una sucesión de funciones continuas resultará ser una función continua.

Definición 5.12. *Una sucesión de funciones* $f_k\colon S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, *converge* ***uniformemente*** *en* S *a una función* $f : S \to X$ *si, dada* $\varepsilon > 0$, *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *(que depende de* ε*) tal que*

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \ge k_0,\ \forall z \in S.$$

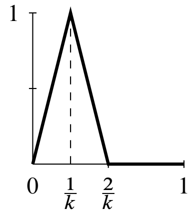
La función f *se llama el* ***límite uniforme*** *de* (f_k).

Nota que esta noción es más fuerte que la de convergencia puntual: si (f_k) converge uniformemente a f, entonces converge puntualmente a f. El recíproco no es cierto pues la sucesión (f_k) del Ejemplo 5.11 no converge uniformemente en $[0,1]$ [Ejercicio 5.41]. El siguiente ejemplo muestra que, aun cuando una sucesión de funciones continuas converge puntualmente a una función continua, no necesariamente converge uniformemente.

Ejemplo 5.13. *Sea* $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *la función dada por*

$$f_k(x) = \text{máx}\left\{1 - k\left|x - \tfrac{1}{k}\right|, 0\right\}.$$

La sucesión (f_k) *converge puntualmente a* 0, *pero no converge uniformemente a* 0



$y = f_k(x)$

ya que, si $\varepsilon \in (0,1)$*, ningún* $k \in \mathbb{N}$ *cumple que* $|f_k(x)| < \varepsilon$ *para todo* $x \in [0,1]$*. En efecto:*

$$\left| f_k\left(\tfrac{1}{k}\right) \right| = 1 > \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La propiedad fundamental de la convergencia uniforme es la siguiente.

Teorema 5.14. *Sean* $Z = (Z, d_Z)$ *y* $X = (X, d_X)$ *espacios métricos. Si* $f_k : Z \to X$ *es continua para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* (f_k) *converge uniformemente a* f *en* Z*, entonces* $f : Z \to X$ *es continua.*

Demostración. Sean $z_0 \in Z$ y $\varepsilon > 0$. Como (f_k) converge uniformemente a f, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall z \in Z, \ \ \forall k \geq k_0.$$

Y, como f_{k_0} es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } \ d_Z(z, z_0) < \delta.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d_X(f(z), f(z_0)) &\leq d_X(f(z), f_{k_0}(z)) + d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) + d_X(f_{k_0}(z_0), f(z_0)) \\ &< \varepsilon \qquad \text{si } \ d_Z(z, z_0) < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba que f es continua. □

Para funciones acotadas la convergencia uniforme es simplemente la convergencia en el espacio métrico $\mathcal{B}(S, X)$, definido en la Sección 2.4, cuya métrica es la métrica uniforme

$$d_\infty(f, g) = \sup_{z \in S} d_X(f(z), g(z)), \qquad f, g \in \mathcal{B}(S, X).$$

Es decir, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.15. *Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{B}(S,X)$. Entonces, (f_k) converge uniformemente a f en S si y sólo si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S,X)$.*

Demostración. $\Leftarrow$): Si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S,X)$ entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_\infty(f_k, f) = \sup_{z\in S} d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

En consecuencia,

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0, \ \ \forall z \in S.$$

Es decir, (f_k) converge uniformemente a f en S.

$\Rightarrow$): Recíprocamente, si $f_k \in \mathcal{B}(S,X)$ y (f_k) converge uniformemente a f en S entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in N$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0, \ \ \forall z \in S. \tag{5.1}$$

Como f_{k_0} es acotada, existen $c > 0$ y $x_0 \in X$ tales que $d_X(f_{k_0}(z), x_0) < c$ para todo $z \in S$. En consecuencia,

$$d_X(f(z), x_0) \leq d_X(f(z), f_{k_0}(z)) + d_X(f_{k_0}(z), x_0) < \varepsilon + c \qquad \forall z \in S.$$

Esto prueba que $f \in \mathcal{B}(S,X)$. De (5.1) se sigue que

$$d_\infty(f_k, f) = \sup_{z\in S} d_X(f_k(z), f(z)) \leq \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

Es decir, (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S,X)$. $\square$

El siguiente espacio jugará un papel importante en las aplicaciones del próximo capítulo.

Definición 5.16. *Sean Z y X espacios métricos. El **espacio de funciones continuas y acotadas** de Z a X es el espacio métrico*

$$\mathcal{C}_b^0(Z,X) := \{f : Z \to X : f \text{ es continua y acotada}\}$$

con la métrica inducida por la de $\mathcal{B}(Z,X)$, es decir,

$$d_\infty(f,g) = \sup_{z\in Z} d_X(f(z), g(z))$$

si $f, g \in \mathcal{C}_b^0(Z,X)$.

Para sucesiones de funciones continuas y acotadas podemos reinterpretar el Teorema 5.14 como sigue.

Corolario 5.17. *Sean Z y X espacios métricos. Entonces $\mathcal{C}_b^0(Z,X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(Z,X)$.*

Demostración. Sea $f \in \overline{\mathcal{C}_b^0(Z,X)}$. Por la Proposición 3.32 existe una sucesión (f_k) en $\mathcal{C}_b^0(Z,X)$ tal que $f_k \to f$ en $\mathcal{B}(Z,X)$. La Proposición 5.15 y el Teorema 5.14 aseguran entonces que $f \in \mathcal{C}_b^0(Z,X)$. Esto prueba que $\mathcal{C}_b^0(Z,X)$ es cerrado en $\mathcal{B}(Z,X)$. $\square$

Concluimos esta sección con otra consecuencia importante de la convergencia uniforme.

Teorema 5.18. *Si $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuamente diferenciables en $[a,b]$ tales que (f_k) converge a f puntualmente en $[a,b]$ y (f_k') converge a g uniformemente en $[a,b]$, entonces f es continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $f' = g$.*

Demostración. Sea $x_0 \in (a,b)$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f_j - f_k$ se tiene que, para cada $x \in (a,b)$, existe $\xi_x \in (a,b)$ tal que

$$f_j(x) - f_k(x) - (f_j(x_0) - f_k(x_0)) = \left(f_j'(\xi_x) - f_k'(\xi_x)\right)(x - x_0).$$

En consecuencia,

$$\left|f_j(x) - f_j(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)\right| \leq \left\|f_j' - f_k'\right\|_\infty |x - x_0| \qquad \forall x \in (a,b).$$

Como (f_k') converge en $\mathcal{C}^0[a,b]$, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|f_j(x) - f_j(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}|x - x_0| \qquad \forall x \in (a,b), \ \ \forall j,k \geq k_0.$$

Tomando el límite cuando $j \to \infty$, concluimos que

$$|f(x) - f(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}|x - x_0| \qquad \forall x \in (a,b), \ \ \forall k \geq k_0. \quad (5.2)$$

Por otra parte, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|f_k'(x_0) - g(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq k_1. \quad (5.3)$$

Sea $k_* := \max\{k_0, k_1\}$, y sea $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f_{k_*}(x) - f_{k_*}(x_0)}{x - x_0} - f_{k_*}'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta. \quad (5.4)$$

De las desigualdades (5.2), (5.3) y (5.4) se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right| &\leq \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f_{k_*}(x)-f_{k_*}(x_0)}{x-x_0}\right| \\ &\quad+\left|\frac{f_{k_*}(x)-f_{k_*}(x_0)}{x-x_0}-f'_{k_*}(x_0)\right|+\left|f'_{k_*}(x_0)-g(x_0)\right| \\ &< \varepsilon \qquad \text{si} \quad |x-x_0|<\delta.\end{aligned}$$

Es decir, f es diferenciable en x_0 y $f'(x_0) = g(x_0)$. Finalmente, como $f'_k \in \mathcal{C}^0[a,b]$, se tiene que $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, es decir, f es continuamente diferenciable en $[a,b]$. □

5.3. Espacios completos de funciones

A continuación daremos un criterio que garantiza la convergencia uniforme de una sucesión de funciones en términos de la sucesión misma.

Sean S un conjunto y $X = (X, d_X)$ un espacio métrico.

Definición 5.19. *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, es **uniformemente de Cauchy** en S si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \varepsilon \qquad \forall j,k \geq k_0,\ \forall z \in S.$$

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

Teorema 5.20 (Criterio de convergencia uniforme de Cauchy)**.** *Sea X un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en S si y sólo si (f_k) es uniformemente de Cauchy en S.*

Demostración. $\Rightarrow$): *Si* (f_k) converge uniformemente a f en S entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0,\ \forall z \in S.$$

En consecuencia,

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) \leq d_X(f_k(z), f(z)) + d_X(f(z), f_j(z)) < \varepsilon \qquad \forall j,k \geq k_0,\ \forall z \in S.$$

Es decir, (f_k) es uniformemente de Cauchy.

$\Leftarrow$): Supongamos ahora que (f_k) es uniformemente de Cauchy en S. Entonces, para cada $z \in S$, la sucesión $(f_k(z))$ es de Cauchy en X y, como X es completo, esta sucesión converge a un punto de X al que denotaremos por $f(z)$. Probaremos ahora que $f_k \to f$ uniformemente en S.

Sea $\varepsilon > 0$. Como (f_k) es uniformemente de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall j, k \geq k_0, \ \forall z \in S.$$

Y como para cada $z \in S$ se tiene que $f_j(z) \to f(z)$ en X, existe $k(z) \in \mathbb{N}$ (que depende de z) tal que

$$d_X(f_j(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall j \geq k(z).$$

Dadas $k \geq k_0$ y $z \in S$, tomemos $j := \text{máx}\{k_0, k(z)\}$. Entonces

$$d_X(f_k(z), f(z)) \leq d_X(f_k(z), f_j(z)) + d_X(f_j(z), f(z)) < \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0, \ \forall z \in S,$$

es decir, (f_k) converge uniformemente a f. □

Recuerda que, si S es un conjunto y $V = (V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces $\mathcal{B}(S, V)$ con la norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in S} \|f(z)\| \tag{5.5}$$

es un espacio vectorial normado (ver Ejercicio 2.52). Si Z es un espacio métrico, $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(Z, V)$.

Una consecuencia importante del teorema anterior es la siguiente.

Teorema 5.21. *Sean S un conjunto y Z un espacio métrico.*

- *Si X es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{B}(S, X)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ son completos.*
- *Si V es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(S, V)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ son espacios de Banach.*

Demostración. Sea (f_k) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(S, X)$. Claramente (f_k) es uniformemente de Cauchy en S y, por la Proposición 5.15 y el Teorema 5.20, (f_k) converge en $\mathcal{B}(S, X)$. Esto prueba que $\mathcal{B}(S, X)$ es completo. Por el Corolario 5.17, $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}(Z, X)$. La Proposición 5.9 asegura entonces que $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ es completo. □

Esta propiedad permite que los espacios $\mathcal{B}(S, X)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ jueguen un papel importante en las aplicaciones, como veremos en el siguiente capítulo.

Recuerda que, si K es un espacio métrico compacto, entonces toda función continua de K en X es acotada (ver Corolario 4.11), es decir,

$$\mathcal{C}^0(K, X) := \{\phi\colon K \to X : \phi \text{ es continua}\} = \mathcal{C}_b^0(K, X).$$

Por tanto, $\mathcal{C}^0(K, X)$ es un espacio completo si K es compacto y X es completo.

5.4. Series en espacios de Banach

Sea $V = (V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea (v_k) una sucesión en V.

Definición 5.22. *Decimos que* ***la serie***

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

converge *en V si la sucesión (w_n) de sumas parciales $w_n := \sum_{k=1}^{n} v_k$ converge en V. Su límite se denota*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Una observación sencilla es la siguiente.

Proposición 5.23. *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge en V, entonces $v_k \to 0$ en V. En particular, (v_k) está acotada.*

Demostración. La sucesión (w_n), donde $w_n := \sum_{k=1}^{n} v_k$, es de Cauchy (ver Proposición 5.2). Por tanto, dada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{n+1}\| = \left\| \sum_{k=1}^{n+1} v_k - \sum_{k=1}^{n} v_k \right\| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Esto prueba que $v_k \to 0$ en V. Por la Proposición 3.31, (v_k) está acotada. $\square$

En espacios de Banach se tiene el siguiente criterio de convergencia para series.

Proposición 5.24 (Criterio de Cauchy para series)**.** *Sea V un espacio de Banach y sea (v_k) una sucesión en V. La serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

converge en V si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| v_{k+1} + \cdots + v_{k+j} \right\| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0, \ \ \forall j \geq 1.$$

Demostración. Como V es completo, la sucesión (w_n) de sumas parciales $w_n := \sum_{k=1}^{n} v_k$ converge en V si y sólo si (w_n) es de Cauchy, es decir, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in N$ tal que

$$\left\| w_{k+j} - w_k \right\| = \left\| v_{k+1} + \cdots + v_{k+j} \right\| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0, \ \ \forall j \geq 1,$$

como afirma el enunciado. □

El siguiente criterio garantiza la convergencia uniforme de una serie de funciones en términos de la convergencia de una serie de números reales.

Teorema 5.25 (Criterio de Weierstrass)**.** *Sea V un espacio de Banach y sea (v_k) una sucesión en V. Si la serie de números reales*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|$$

converge, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

converge en V y se cumple que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| .$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|$ converge en $\mathbb{R}$, la Proposición 5.24 asegura que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{k+1}\| + \cdots + \left\| v_{k+j} \right\| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0, \ \ \forall j \geq 1.$$

Usando la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\left\|v_{k+1}+\cdots+v_{k+j}\right\| \leq \|v_{k+1}\|+\cdots+\left\|v_{k+j}\right\| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0,\ \ \forall j \geq 1.$$

Aplicando nuevamente la Proposición 5.24 concluimos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

converge en V. En consecuencia, usando la continuidad de la norma y la desigualdad del triángulo obtenemos

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} v_k\right\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|v_k\| = \sum_{k=1}^{\infty}\|v_k\|,$$

como afirma el enunciado. □

Sea S un conjunto y sea $f_k : S \to V$ una sucesión de funciones.

Definición 5.26. *Decimos que* ***la serie de funciones***

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

converge uniformemente en S *si la sucesión de funciones* $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ *converge uniformemente en* S *a una función* $S \to V$*, a la que se denota*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Un ejemplo importante de series de funciones son las series de potencias.

Definición 5.27. *Sea* (a_k) *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in \mathbb{R}$*. La serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

de funciones reales de variable real x *se llama una* ***serie de potencias****. Su* ***radio de convergencia*** *se define como*

$$R := \sup\left\{r \in [0,\infty) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ converge en } \mathbb{R}\right\} \in [0,\infty].$$

El siguiente resultado justifica llamar a R el radio de convergencia.

Teorema 5.28. *Sean (a_k) una sucesión en $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(a) Las series de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \qquad y \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

convergen uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$ para todo $r \in (0, R)$, donde R es el radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$.

(b) La función

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

es continuamente diferenciable en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y su derivada está dada por

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}.$$

Demostración. (a): Sea $r \in (0, R)$. Definimos $f_k \in \mathcal{C}^0[x_0 - r, x_0 + r]$ como $f_k(x) := a_k(x-x_0)^k$, $k \geq 0$. Probaremos que la sucesión (f_k) satisface el criterio de Weierstrass. De la definición del radio de convergencia se sigue que existe $\hat{r} \in (r, R] \cap \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \hat{r}^k$ converge en $\mathbb{R}$. Por tanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\left| a_k \hat{r}^k \right| < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (ver Proposición 5.23) y, en consecuencia,

$$|f_k(x)| = |a_k| \, |x-x_0|^k \leq |a_k| \, \hat{r}^k \theta^k \leq c\theta^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r],$$

donde $\theta := \frac{r}{\hat{r}}$. Se tiene entonces que

$$\|f_k\|_\infty = \max_{x \in [x_0 - r, x_0 + r]} |f_k(x)| \leq c\theta^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\theta \in (0,1)$, la serie de números reales $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k$ converge. Por consiguiente, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ converge [Ejercicio 5.45] y el Teorema 5.25 aplicado al espacio $\mathcal{C}^0[x_0 - r, x_0 + r]$ implica que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

converge uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Por otra parte, si definimos $g_k \in \mathcal{C}^0[x_0-r, x_0+r]$, como $g_k(x) := ka_k(x-x_0)^{k-1}$, $k \geq 1$, tenemos que

$$|g_k(x)| = k\,|a_k|\,|x-x_0|^{k-1} \leq \frac{c}{\hat{r}}k\theta^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [x_0-r, x_0+r].$$

Por tanto,

$$\|g_k\|_\infty = \max_{x\in[x_0-r,x_0+r]} |g_k(x)| \leq \frac{c}{\hat{r}}k\theta^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k\theta^{k-1}$converge en $\mathbb{R}$, argumentando como en el caso anterior, concluimos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$$

converge uniformemente en $[x_0-r, x_0+r]$.

(b): Sea $r \in (0, R)$ y denotemos por

$$F_k(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j(x-x_0)^j, \quad f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j, \quad g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} ja_j(x-x_0)^{j-1}.$$

F_k es continuamente diferenciable, y acabamos de probar que (F_k) converge a f y $\left(F_k'\right)$ converge a g uniformemente en $[x_0-r, x_0+r]$. El Teorema 5.18 asegura entonces que f es continuamente diferenciable en $[x_0-r, x_0+r]$ y que $f' = g$. $\square$

Una función $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ que se puede expresar como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

se llama una **función analítica**. Una función analítica tiene derivadas de todos los órdenes [Ejercicio 5.50]. El recíproco no es cierto: una función que tiene derivadas de todos los órdenes no necesariamente es analítica [Ejercicio 5.51].

5.5. Ejercicios

Ejercicio 5.29. *Sea X_{disc} un espacio métrico discreto.*

(a) Describe a las sucesiones de Cauchy en X_{disc}.

(b) ¿Es X_{disc} un espacio métrico completo?

Ejercicio 5.30. *Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) (x_k) está acotada en X.

(b) Si alguna subsucesión de (x_k) converge a x en X, entonces (x_k) converge a x en X.

Ejercicio 5.31. *Sea $X = (0,1)$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $(\frac{1}{k})$ es de Cauchy en X pero no converge en X.*

Ejercicio 5.32. *Considera la sucesión de funciones $f_k\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le x \le -\frac{1}{k}, \\ kx & \text{si } -\frac{1}{k} \le x \le \frac{1}{k}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$

(a) Prueba que (f_k) es de Cauchy en $\mathcal{C}^0_p[-1,1]$ para toda $p \in [1,\infty)$.

(b) Prueba que (f_k) no converge en $\mathcal{C}^0_p[-1,1]$ para ninguna $p \in [1,\infty]$. (Sugerencia: Usa el Ejercicio 3.47 y el Ejemplo 5.4).

(c) ¿Es (f_k) de Cauchy en $\mathcal{C}^0_\infty[-1,1]$?

Ejercicio 5.33. *Prueba que ℓ_p es un espacio de Banach para todo $p \in [1,\infty]$.*

Ejercicio 5.34. *Considera los siguientes subespacios de ℓ_∞ con la norma inducida. ¿Cuáles de ellos son de Banach?*

(a) $\mathfrak{d} := \{(x_n) \in \ell_\infty : x_n \neq 0$ sólo para un número finito de n's$\}$.

(b) $\mathrm{c}_0 := \{(x_n) \in \ell_\infty : x_n \to 0\}$.

(c) $\mathrm{c} := \{(x_n) \in \ell_\infty : (x_n)$ converge en $\mathbb{R}\}$.

Ejercicio 5.35. *Sean X un espacio métrico completo y $x, y \in X$. Prueba que el espacio de trayectorias*

$$\mathcal{T}_{x,y}(X) := \left\{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X) : \sigma(0) = x,\ \sigma(1) = y\right\}$$

con la métrica uniforme es completo.

Ejercicio 5.36. *Prueba que todo espacio métrico compacto es completo.*

Ejercicio 5.37. *Sean X y Y espacios métricos completos. Prueba que $X \times Y$ con cualquiera de las métricas del* Ejercicio 2.53 *es completo.*

Ejercicio 5.38. *Sea V un espacio normado. Prueba que todo subespacio vectorial de dimensión finita de V es cerrado en V.*

Ejercicio 5.39. *Sean $V = (V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S_V := \{v \in V : \|v\| = 1\}$ la esfera unitaria en V. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si W es un subespacio vectorial de V, W es cerrado en V y $W \neq V$ entonces, para cada $\delta \in (0, 1)$, existe $v_\delta \in S_V$ tal que*

$$\|v_\delta - w\| \geq \delta \qquad \forall w \in W.$$

(b) ***Teorema (Riesz)*** *La esfera unitaria $S_V := \{v \in V : \|v\| = 1\}$ es compacta si y sólo si* $\dim V < \infty$. (Sugerencia: Si $\dim V = \infty$, usa el Ejercicio 5.38 y el inciso *(a)* para construir una sucesión en S_V que no contiene ninguna subsucesión convergente.)

(c) *La bola cerrada $\bar{B}_V(0, 1) := \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ es compacta si y sólo si* $\dim V < \infty$.

Ejercicio 5.40. *Sea $\phi\colon X \to Y$ una función uniformemente continua. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si (x_k) es de Cauchy en X, entonces $(\phi(x_k))$ es de Cauchy en Y.*

(b) *Si existe una función continua $\psi\colon Y \to X$ tal que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ y Y es completo, entonces X es completo.*

Ejercicio 5.41. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *La sucesión de funciones $f_k(x) = x^k$ no converge uniformemente en* $[0, 1]$.

(b) *La sucesión de funciones $f_k(x) = x^k$ converge uniformemente en cualquier subintervalo cerrado $[a, b] \subset [0, 1)$.*

Ejercicio 5.42. *¿Cuáles de las siguientes sucesiones de funciones $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergen puntualmente en $\mathbb{R}$? Encuentra todos los intervalos donde la convergencia es uniforme.*

$$(a)\;\; f_k(x) = \frac{kx}{kx^2 + 1}; \qquad (b)\;\; f_k(x) = \frac{kx}{k^2x^2 + 1}; \qquad (c)\;\; f_k(x) = \frac{k^2x}{kx^2 + 1}.$$

Ejercicio 5.43. *¿Cuáles de las siguientes sucesiones de funciones $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$? Encuentra el límite de tales sucesiones.*

(a) $f_k(x) = \begin{cases} |x-k|-1 & \textit{si } x \in [k-1, k+1], \\ 0 & \textit{si } x \notin [k-1, k+1]. \end{cases}$

(b) $f_k(x) = \dfrac{1}{(x/k)^2+1}$.

(c) $f_k(x) = \operatorname{sen}(x/k)$.

(d) $f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}\operatorname{sen} x & \textit{si } x \in [2\pi k, 2\pi(k+1)], \\ 0 & \textit{si } x \notin [2\pi k, 2\pi(k+1)]. \end{cases}$

Ejercicio 5.44. *Sea $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuamente diferenciables en $[a,b]$ que converge puntualmente a una función f en $[a,b]$. Investiga si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones:*

(a) *f es continua en $[a,b]$.*

(b) *(f_k) converge uniformemente a f en $[a,b]$.*

(c) *La sucesión (f_k') converge puntualmente en $[a,b]$.*

(d) *Si f es continuamente diferenciable, entonces (f_k') converge puntualmente en $[a,b]$.*

(e) *Si f es continuamente diferenciable y si $(f_k'(x))$ converge para cada $x \in [a,b]$, entonces (f_k') converge puntualmente a f' en $[a,b]$.*

Ejercicio 5.45. *Prueba que, si $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $0 \le a_n \le b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge en $\mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 5.46. *Considera la sucesión de funciones $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

(a) *Prueba que, para cada $x \in \mathbb{R}$, la serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge.*

(b) *¿Converge la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniformemente en $\mathbb{R}$?*

Ejercicio 5.47. *Considera las funciones $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$f_k(x) = \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{k}}.$$

(a) Prueba que (f_k) *converge uniformemente a* 0 *en* $\mathbb{R}$*.*

(b) Prueba que (f_k') *no converge puntualmente en* $\mathbb{R}$*, donde* f_k' *es la derivada de* f_k*.*

Ejercicio 5.48. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Una función $\varphi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^m$ en $\overline{\Omega}$ si todas las derivadas parciales de orden $\leq m$ de φ,

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}\varphi}{\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\} \ \text{ y } \ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m,$$

existen en Ω y admiten una extensión continua a la cerradura $\overline{\Omega}$, donde

$$\frac{\partial^0\varphi}{\partial x_i^0} := \varphi \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^{\alpha_i}\varphi}{\partial x_i^{\alpha_i}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\cdots\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\alpha_i \text{ veces}} \quad \text{si } \alpha_i \geq 1.$$

Denotamos por

$$\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) := \left\{\varphi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es de clase } \mathcal{C}^m \text{ en } \overline{\Omega}\right\}$$

y definimos

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} := \text{máx}\left\{\left\|\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}\varphi}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_\infty : \alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m\right\}.$$

Prueba que ésta es una norma en $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ *y que* $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ *es un espacio de Banach.* (Sugerencia: Recuerda que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = f_i'(0)$$

donde $f_i(t) := \varphi(x + te_i)$, e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y usa los Teoremas 5.21 y 5.18.)

Ejercicio 5.49. *(a) Dada una sucesión* (c_k) *en* $\mathbb{R}$ *definimos*

$$c := \limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}.$$

Demuestra el ***criterio de la raíz*** *para la convergencia de series de números reales:*

$$\begin{array}{lll} \sum_{k=0}^\infty c_k & \textit{converge} & \textit{si } c < 1, \\ \sum_{k=0}^\infty c_k & \textit{no converge} & \textit{si } c > 1. \end{array}$$

(b) *Prueba que el radio de convergencia R de una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ está dado por*

$$R^{-1} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} .$$

(c) *Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y averigua si convergen o no en los puntos $|x| = R$.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

Ejercicio 5.50. *Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Prueba que la función $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

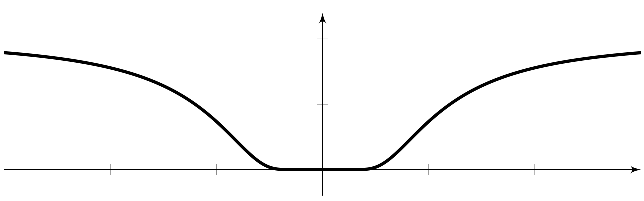
tiene derivadas de todos los órdenes y que la n-ésima derivada $f^{(n)}$ de f está dada por

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x - x_0)^{k-n}, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

En particular se cumple que $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$.

Ejercicio 5.51. *Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



(a) *Prueba que f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = 0$ y que $f^{(n)}(0) = 0$.*

(b) ¿Se puede escribir f como una serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R},$$

convergente en algún intervalo $(-R, R)$, $R > 0$?

Ejercicio 5.52. *Sean $a_{kj} \in \mathbb{R}$ tales que las series de números reales*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{kj}\right| = b_k$$

convergen para cada $k \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ también converge. Prueba que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}.$$

(Sugerencia: Considera el subespacio métrico $X := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}$ y aplica el criterio de Weierstrass a la sucesión de funciones $f_k : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}, \qquad f_k(0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}.$$

Comprueba que esta sucesión satisface todas las hipótesis del Teorema 5.25.)

Ejercicio 5.53. *Calcula el radio de convergencia R de la serie de potencias*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

y demuestra que $f' = f$ en $(-R, R)$. ¿Quién es la función f?

Ejercicio 5.54. *Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las funciones polinomiales $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.*

(a) Prueba que $\mathcal{P}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0[0, 1]$.

(b) ¿Es $\mathcal{P}$ con la norma uniforme

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |p(x)|$$

un espacio de Banach? (Sugerencia: Considera la sucesión de polinomios $p_k(x) = \frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} + \cdots + x + 1$ y utiliza la Proposición 5.9).

Ejercicio 5.55. *Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ 2 - x & \text{si } x \in [1,2], \end{cases}$$

y $\varphi(x+2) = \varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x)$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$. En consecuencia, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x)$$

es continua.

(b) f no es diferenciable en ningún punto $x \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: Para cada $j \in \mathbb{N}$ toma $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \le 4^j x < m+1$, y define $y_j := 4^{-j}m$, $z_j := 4^{-j}(m+1)$. Prueba que

$$\left|\frac{f(z_j) - f(y_j)}{z_j - y_j}\right| \to \infty \qquad \text{cuando } \ j \to \infty.$$

Usa este hecho para concluir que f no es diferenciable en x.)

5.6. Proyecto: Completación de un espacio métrico

5.6.1. Objetivo

Sea X un espacio métrico.

Definición 5.56. *Se dice que un espacio métrico X^* es una* ***completación de*** *X si X^* es completo y existe una isometría $\iota\colon X \to X^*$ tal que $\overline{\iota(X)} = X^*$, donde $\overline{\iota(X)}$ denota a la cerradura de $\iota(X)$ en X^*.*

Por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}$ de los números reales es una completación del espacio $\mathbb{Q}$ de números racionales.

El objetivo de este proyecto es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 5.57. *Cualquier espacio métrico admite una completación y ésta es única salvo isometría.*

5.6.2. Procedimiento

1. Demuestra que, si $X^* = (X^*, d^*)$ y $X^\# = (X^\#, d^\#)$ son completaciones de (X, d), entonces existe una isometría biyectiva $\beta\colon X^* \to X^\#$.

2. Diremos que dos sucesiones de Cauchy (x_k) y (y_k) en X son *equivalentes* si
$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = 0.$$
Demuestra que ésta es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X.

3. Denota por $[x_k]$ a la clase de equivalencia de la sucesión de Cauchy (x_k) y define
$$X^* := \{[x_k] : (x_k) \text{ es de Cauchy en } X\},$$
$$d^*([x_k], [y_k]) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k).$$
Demuestra que

    a) d^* está bien definida, es decir, existe $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$ y no depende de los representantes (x_k) y (y_k) elegidos.

    b) d^* es una métrica en X^*.

4. Si $x \in X$ denotamos por $[x]$ a la clase de equivalencia de la sucesión cuyos términos son todos iguales a x. Demuestra las siguientes afirmaciones:

    a) $X^* = (X^*, d^*)$ es un espacio métrico completo.

    b) La función $\iota\colon X \to X^*$ dada por $\iota(x) := [x]$ es una isometría.

    c) $\overline{\iota(X)} = X^*$.

5.6.3. Observaciones

Es importante saber que todo espacio métrico admite una única completación. Sin embargo, la descripción que hemos dado aquí resulta poco práctica: pensar a los números reales como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales haría muy engorroso operar con ellos. Conviene pues tener representaciones más sencillas.

En el Capítulo 14 introduciremos una completación accesible del espacio $\mathcal{C}_p^0[a,b]$: el espacio de Lebesgue $L^p(a,b)$. Este espacio aparece de manera natural en muchas aplicaciones importantes.

6

El teorema de punto fijo de Banach y aplicaciones

El teorema de punto fijo de Banach, también llamado el *principio de contracción*, garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de ciertas funciones de un espacio métrico completo en sí mismo. A diferencia de otros teoremas de punto fijo, éste da un método constructivo para obtenerlo mediante un proceso de iteración.

El teorema de punto fijo de Banach tiene multitud de aplicaciones a resultados de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones numéricas, ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. Daremos aquí algunos ejemplos.

Una de las aplicaciones más importantes es el teorema de Picard-Lindelöf que asegura la existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que satisface una condición inicial prescrita. A este problema se le conoce como el *problema de Cauchy* y es uno de los problemas fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales.

6.1. El teorema de punto fijo de Banach

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico.

Definición 6.1. *Una función $\phi\colon X \to X$ se llama una* ***contracción*** *si existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que*

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{6.1}$$

Es decir, una contracción es una función de un espacio métrico en sí mismo que es Lipschitz continua con constante de Lipschitz estrictamente menor que 1. Es importante observar que el que $\phi\colon X \to X$ sea o no contracción depende de la métrica que le demos a X [Ejercicio 6.20].

Definición 6.2. *Un punto $x^* \in X$ se llama un **punto fijo** de la función $\phi\colon X \to X$ si $\phi(x^*) = x^*$.*

Denotamos por ϕ^k a la composición

$$\phi^k := \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{k \text{ veces}} \quad \text{si } k \in \mathbb{N}, \qquad\qquad \phi^0 := \mathrm{id}_X,$$

donde $\mathrm{id}_X : X \to X$ es la función identidad. El siguiente resultado sencillo y profundo de Stefan Banach[1] tiene aplicaciones muy importantes.

Stefan Banach

Teorema 6.3 (de punto fijo de Banach)**.** *Sea X un espacio métrico completo, no vacío, y sea $\phi\colon X \to X$ una contracción. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) ϕ tiene un único punto fijo x^*.

(b) Para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión $(\phi^k(x_0))$ converge a x^* en X, y se cumple que

$$d(\phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(\phi(x_0), x_0), \tag{6.2}$$

donde $\alpha \in (0,1)$ satisface (6.1).

Demostración. (a): Sea x_0 un punto cualquiera de X y denotemos por

$$x_k := \phi^k(x_0).$$

[1] Stefan Banach (1892-1945) nació en Cracovia, Polonia. Fue básicamente autodidacta y su genio fue descubierto accidentalmente por el matemático Hugo Steinhaus. Se le considera fundador del análisis funcional moderno. Muchos conceptos y resultados notables llevan su nombre.

Demostraremos primero que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X. Nota que, si ϕ satisface (6.1), entonces

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(\phi^k(x_1), \phi^k(x_0)) \leq \alpha^k d(x_1, x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Además, para cualesquiera $y, z \in X$, se cumple que

$$\begin{aligned} d(y,z) &\leq d(y,\phi(y)) + d(\phi(y),\phi(z)) + d(\phi(z),z) \\ &\leq d(y,\phi(y)) + \alpha d(y,z) + d(\phi(z),z), \end{aligned}$$

es decir,

$$(1-\alpha)d(y,z) \leq d(y,\phi(y)) + d(\phi(z),z).$$

Tomando $y := x_k$ y $z := x_j$ obtenemos

$$d(x_k, x_j) \leq \frac{d(x_{k+1}, x_k) + d(x_{j+1}, x_j)}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \tag{6.3}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\alpha \in (0,1)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0. \tag{6.4}$$

En consecuencia,

$$d(x_k, x_j) < \varepsilon \qquad \forall j, k \geq k_0.$$

Esto demuestra que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X.

Como X es completo, existe $x^* \in X$ tal que $x_k \to x^*$ en X y, como ϕ es continua, se tiene entonces que $x_{k+1} = \phi(x_k) \to \phi(x^*)$ en X. Como el límite de una sucesión es único, concluimos que $\phi(x^*) = x^*$, es decir, x^* es un punto fijo de ϕ.

Veamos ahora que es único. Si x_1^* y x_2^* son puntos fijos de ϕ entonces

$$d(x_1^*, x_2^*) = d(\phi(x_1^*), \phi(x_2^*)) \leq \alpha d(x_1^*, x_2^*).$$

Como $\alpha < 1$, esta desigualdad implica que $d(x_1^*, x_2^*) = 0$, es decir, $x_1^* = x_2^*$.

(b): Por último, haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad (6.3) obtenemos que

$$d(x_k, x^*) = \lim_{j \to \infty} d(x_k, x_j) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto concluye la demostración. □

El teorema anterior no sólo afirma la existencia de un único punto fijo para una contracción $\phi\colon X \to X$. También nos dice cómo encontrarlo, o cómo encontrar una buena aproximación de él: basta tomar cualquier punto $x_0 \in X$ y considerar la sucesión de iteradas $(\phi^k(x_0))$. La desigualdad (6.2) nos da una estimación del error en cada paso de la iteración, es decir, nos dice qué tan cerca está $\phi^k(x_0)$ del punto fijo. A este método se le conoce como el **método de aproximaciones sucesivas.** Veremos algunas aplicaciones en las siguientes secciones.

Los siguientes ejemplos muestran que las condiciones del teorema de punto fijo de Banach son necesarias.

Ejemplo 6.4. *La función $\phi\colon (0,1) \to (0,1)$ dada por $\phi(t) = \frac{1}{2}t$ es una contracción y no tiene ningún punto fijo en* $(0,1)$. *Por tanto, para la validez del* Teorema 6.3 *es necesario que X sea completo.*

Ejemplo 6.5. *La función $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = t + 1$ satisface*

$$|\phi(t) - \phi(s)| = |t - s| \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, no tiene ningún punto fijo. Por tanto, para la validez del Teorema 6.3 *es necesario que el número α de la condición* (6.1) *sea estrictamente menor que* 1.

Esta condición también es necesaria para la unicidad del punto fijo [Ejercicio 6.22].

La siguiente generalización del teorema de punto fijo de Banach tiene aplicaciones importantes (ver Teorema 6.12).

Corolario 6.6. *Sea X un espacio métrico completo y $\phi\colon X \to X$ una función. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^k\colon X \to X$ es una contracción, entonces ϕ tiene un único punto fijo.*

Demostración. El Teorema 6.3 asegura que ϕ^k tiene un único punto fijo $x^* \in X$. Aplicando ϕ a la igualdad $\phi^k(x^*) = x^*$ obtenemos que

$$\phi^k(\phi(x^*)) = \phi\left(\phi^k(x^*)\right) = \phi\left(x^*\right),$$

es decir, $\phi(x^*)$ es también un punto fijo de ϕ^k. Como el punto fijo es único, obtenemos que $\phi(x^*) = x^*$. En consecuencia, x^* es también un punto fijo de ϕ. Y es el único, ya que todo punto fijo de ϕ es también un punto fijo de ϕ^k. □

6.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax - x = b \tag{6.5}$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz real de $n \times n$ y $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Observa que $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución de este sistema si y sólo si x es un punto fijo de la función $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(x) := Ax - b$. De modo que, si ϕ es una contracción, podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas para encontrar una solución. El que ϕ sea una contracción depende de la métrica que le demos a $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si le damos la métrica del Ejemplo 2.5, inducida por la norma $\|\cdot\|_1$, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.7. *Si existe* $\alpha \in (0,1)$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \leq \alpha \qquad \forall j = 1, \ldots, n, \tag{6.6}$$

entonces el sistema (6.5) *tiene solución única para cada* $b \in \mathbb{R}^n$. *La solución* x^* *satisface*

$$\left\| x^* + \sum_{m=0}^{k-1} A^m b \right\|_1 \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|b\|_1 .$$

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \left|x_j\right| \leq \alpha \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right| = \alpha \|x\|_1 .$$

En consecuencia, la función $\phi\colon \mathbb{R}^n_1 \to \mathbb{R}^n_1$ dada por $\phi(x) = Ax - b$ satisface

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_1 = \|Ax - Ay\|_1 = \|A(x-y)\|_1 \leq \alpha \|x - y\|_1 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

es decir, ϕ es una contracción. Por el Teorema 6.3, existe un único $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x^*) = Ax^* - b = x^*$. Más aún, como

$$\phi^k(0) = -\sum_{m=0}^{k-1} A^m b,$$

se tiene que

$$\left\| x^* + \sum_{m=0}^{k-1} A^m b \right\|_1 \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|b\|_1 .$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Si consideramos otras métricas en $\mathbb{R}^n$ obtendremos condiciones, distintas de (6.6), que también garantizan la existencia y unicidad de soluciones del sistema (6.5) para cada b [Ejercicio 6.28].

Sabemos que el sistema (6.5) tiene solución única si y sólo si $\det(A - I) \neq 0$, donde I es la matriz identidad. En consecuencia, la condición (6.5) y las del Ejercicio 6.28 garantizan que $\det(A - I) \neq 0$. En este caso, la matriz $A - I$ es invertible y la solución del sistema está dada por $x := (A - I)^{-1}b$. Sin embargo, en problemas que involucran un número grande de variables, encontrar la inversa de una matriz tiene un costo prohibitivo, incluso con la potencia de las mejores computadoras disponibles. Por ello se utilizan métodos iterativos, como el de Jacobi o el de Gauss-Seidel, para encontrar la solución mediante aproximaciones sucesivas a partir de una estimación inicial. Para ecuaciones no lineales los métodos iterativos son, en general, la única opción.

6.3. Ecuaciones integrales

Aplicaremos el teorema de punto fijo de Banach para probar la existencia y unicidad de soluciones de dos tipos de ecuaciones integrales importantes: la ecuación integral de Fredholm y la ecuación integral de Volterra.

6.3.1. La ecuación integral de Fredholm del segundo tipo

Sean $\mathcal{K}\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, y sea λ un número real. Una ecuación integral de la forma

$$\lambda f(x) - \int_a^b \mathcal{K}(x,y) f(y) dy = g(x), \qquad x \in [a,b], \tag{6.7}$$

se llama una **ecuación integral de Fredholm**[2]. Se dice que es **del primer tipo** si $\lambda = 0$ y **del segundo tipo** si $\lambda \neq 0$.

[2] Erik Ivar Fredholm (1866-1927) nació en Estocolmo, Suecia. Obtuvo el doctorado en la Universidad de Uppsala en 1898, bajo la supervisión de Gösta Mittag-Leffler. Fue profesor de la Universidad de Estocolmo. En 1903 introdujo la teoría moderna de ecuaciones integrales, que se conoce como teoría de Fredholm.

Ivar Fredholm

Una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface (6.7) para todo $x \in [a, b]$ se llama una solución de (6.7). Nos preguntamos, ¿para qué valores λ tiene la ecuación (6.7) una única solución?

Queremos expresar este problema como un problema de punto fijo. Es decir, queremos encontrar una función $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a, b] \to \mathcal{C}^0[a, b]$ cuyos puntos fijos sean las soluciones de la ecuación (6.7). Para ello, procederemos del siguiente modo. A cada $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$ le asociamos la función $\mathfrak{F}f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\mathfrak{F}f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy.$$

En términos de esta función la ecuación (6.7) se escribe como

$$\lambda f(x) - (\mathfrak{F}f)(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a, b],$$

es decir, f es solución de (6.7) si y sólo si satisface la ecuación funcional

$$\lambda f - \mathfrak{F}f = g.$$

Si $\lambda \neq 0$ esta ecuación es equivalente a

$$f = \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{F}f + g).$$

Probaremos que $\mathfrak{F}f \in \mathcal{C}^0[a, b]$ (ver Lema 6.8). Esto nos permite definir una función de $\mathcal{C}^0[a, b]$ en sí mismo como sigue:

$$\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a, b] \to \mathcal{C}^0[a, b], \qquad \phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{F}f + g).$$

Las soluciones de (6.7) son justamente los puntos fijos de ϕ_λ.

Para poder aplicar el teorema de punto fijo de Banach requerimos que $\mathcal{C}^0[a,b]$ sea completo. De acuerdo con el Teorema 5.21 este espacio, dotado de la norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,,$$

es un espacio de Banach. Probaremos que para ciertos valores de λ la función $\phi_\lambda\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ es una contracción. El Teorema 6.3 asegura entonces que ϕ_λ tiene un único punto fijo, es decir, que la ecuación (6.7) tiene una única solución (ver Teorema 6.9). A continuación damos los detalles.

Lema 6.8. *Para cada $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$, la función $\mathfrak{F}f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(\mathfrak{F}f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

es continua.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Si $f = 0$ entonces $\mathfrak{F}f = 0$. Supongamos que $f \neq 0$. Como $[a,b]\times[a,b]$ es compacto, el Teorema 4.31 asegura que $\mathcal{K}$ es uniformemente continua. En consecuencia, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x_1,y_1) - \mathcal{K}(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\|f\|_\infty} \qquad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta \text{ y } |y_1 - y_2| < \delta.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{F}f)(x_1) - (\mathfrak{F}f)(x_2)| &\leq \int_a^b |\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)|\,|f(y)|\,dy \\ &\leq (b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)\|f\|_\infty}\|f\|_\infty = \varepsilon \qquad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathfrak{F}f$ es continua. □

Teorema 6.9. *Si $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$ entonces, para cada $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, la ecuación integral de Fredholm* (6.7) *tiene una única solución.*

Demostración. Dados $\lambda \neq 0$ y $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, definimos $\phi_\lambda\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ como

$$\phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{F}f + g)\,.$$

El lema anterior asegura que ϕ_λ es, efectivamente, una función de $\mathcal{C}^0[a,b]$ en sí mismo. Veamos que, si $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$, entonces ϕ_λ es una contracción. Sean $f_1, f_2 \in$

$\mathcal{C}^0[a,b]$. Entonces, para toda $x \in [a,b]$, se tiene que

$$\begin{aligned}|\phi_\lambda(f_1)(x) - \phi_\lambda(f_2)(x)| &= \frac{1}{|\lambda|}\,|\mathfrak{F} f_1(x) - \mathfrak{F} f_2(x)| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b |\mathcal{K}(x,y)|\,|f_1(y) - f_2(y)|\,dy \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}(b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,\|f_1 - f_2\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|\phi_\lambda(f_1) - \phi_\lambda(f_2)\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|}(b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,\|f_1 - f_2\|_\infty \qquad \forall\, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b].$$

Por hipótesis, $\frac{1}{|\lambda|}(b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty < 1$. En consecuencia, ϕ_λ es una contracción.

Dado que $\mathcal{C}^0[a,b]$ es completo (ver Teorema 5.21), el Teorema 6.3 asegura que existe una única $f^* \in \mathcal{C}^0[a,b]$ tal que

$$f^* = \phi_\lambda(f^*) = \frac{1}{\lambda}\left(\mathfrak{F} f^* + g\right).$$

Es decir, existe una única $f^* \in \mathcal{C}^0[a,b]$ que satisface la ecuación integral de Fredholm

$$\lambda f^* = \mathfrak{F} f^* + g,$$

como afirma el enunciado. $\square$

Es sencillo comprobar que la función $\mathfrak{F}\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$, que a cada f le asocia $\mathfrak{F} f$, es lineal y continua [Ejercicio 6.30]. Si $g = 0$, la ecuación integral de Fredholm se convierte en la **ecuación de valores propios**[3]

$$\mathfrak{F} f = \lambda f$$

para el **operador de Fredholm** $\mathfrak{F}$. Nota que la función $f = 0$ satisface esta ecuación. El teorema anterior asegura que ésta es la única solución si $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty(b-a)$. En consecuencia, los valores propios de $\mathfrak{F}$ están contenidos en el intervalo cerrado $[-\|\mathcal{K}\|_\infty(b-a), \|\mathcal{K}\|_\infty(b-a)]$.

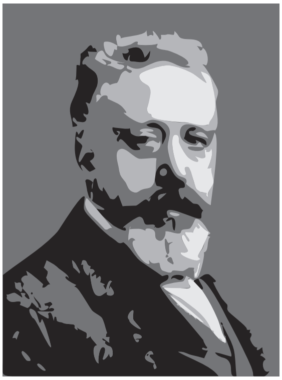
[3] Recuerda que $v \in V$ es un *valor propio* (llamado también *autovalor* o *eigenvalor*) de la función lineal $L\colon V \to V$ si $v \neq 0$ y $Lv = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.3.2. La ecuación integral de Volterra del segundo tipo

Consideremos ahora la ecuación

$$\lambda f(x) - \int_a^x \mathcal{K}(x,y) f(y) dy = g(x) \qquad \forall x \in [a,b], \tag{6.8}$$

donde $\mathcal{K}\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas dadas y λ es un número real. Nota que ahora la variable x aparece también en el extremo superior de la integral. Una ecuación de este tipo se llama una **ecuación integral de Volterra**[4]. Se dice que es **del primer tipo** si $\lambda = 0$ y **del segundo tipo** si $\lambda \neq 0$.



Vito Volterra

Queremos expresar a las soluciones de (6.8) como los puntos fijos de una función $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$. Para ello, a cada función $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ le asociamos la función $\mathfrak{V} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\mathfrak{V} f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y) f(y) dy.$$

En términos de esta función, la ecuación (6.8) se escribe como

$$\lambda f - \mathfrak{V} f = g.$$

[4] Vito Volterra (1860-1940) nació en Ancona, Italia. Estudió en la Universidad de Pisa, bajo la supervisión de Enrico Betti. Fue profesor en las universidades de Turín y Roma.

Probaremos que $\mathfrak{V} f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ (ver Lema 6.10). Si $\lambda \neq 0$, podemos entonces definir una función de $\mathcal{C}^0[a,b]$ en sí mismo como sigue:

$$\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b], \qquad \phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{V} f + g).$$

Sus puntos fijos son las soluciones de la ecuación (6.8). Probaremos que para cada $\lambda \neq 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la función ϕ_λ^k es una contracción (ver Lema 6.11). El Corolario 6.6 asegura entonces que ϕ_λ tiene un único punto fijo, es decir, que la ecuación (6.8) tiene una única solución.

Lema 6.10. *Para cada $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$, la función $\mathfrak{V} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(\mathfrak{V} f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y) f(y)dy$$

es continua.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Si $\mathcal{K} = 0$ o $f = 0$ entonces $\mathfrak{V} f = 0$. Si $\mathcal{K} \neq 0$ y $f \neq 0$, el Teorema 4.31 asegura que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x_1,y_1) - \mathcal{K}(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\|f\|_\infty} \qquad \text{si } \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \delta.$$

En consecuencia, si $|x_1 - x_2| < \text{mín}\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty \|f\|_\infty}\right\}$ y $x_1 \leq x_2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&|(\mathfrak{V} f)(x_1) - (\mathfrak{V} f)(x_2)| \\
&\qquad = \left| \int_a^{x_1} (\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)) f(y)dy - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{K}(x_2,y) f(y)dy \right| \\
&\qquad \leq \int_a^{x_1} |\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)|\,|f(y)|\,dy + \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{K}(x_2,y)|\,|f(y)|\,dy \\
&\qquad < (x_1 - a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)\|f\|_\infty}\|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty \|f\|_\infty}\|\mathcal{K}\|_\infty \|f\|_\infty \\
&\qquad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathfrak{V} f$ es continua. □

Dados $\lambda \neq 0$ y $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, definimos $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ como

$$\phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{V} f + g).$$

El lema anterior asegura que ϕ_λ es, efectivamente, una función de $\mathcal{C}^0[a,b]$ en sí mismo. Probaremos el siguiente resultado.

Lema 6.11. *La función ϕ_λ satisface la desigualdad*

$$\left\|\phi_\lambda^k(f_1)-\phi_\lambda^k(f_2)\right\|_\infty \leq |\lambda|^{-k}\,\|\mathcal{K}\|_\infty^k\,\frac{(b-a)^k}{k!}\,\|f_1-f_2\|_\infty\,,$$

para cualesquiera $f_1,\,f_2\in\mathcal{C}^0[a,b]$, $k\in\mathbb{N}$.

Demostración. Probaremos por inducción que

$$\left|\phi_\lambda^k(f_1)(x)-\phi_\lambda^k(f_2)(x)\right| \leq \frac{\left(|\lambda|^{-1}\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,(x-a)\right)^k}{k!}\,\|f_1-f_2\|_\infty \qquad \forall x\in[a,b]. \tag{6.9}$$

Para $k=1$ se tiene que

$$\begin{aligned}|\phi_\lambda(f_1)(x)-\phi_\lambda(f_2)(x)| &\leq \frac{1}{|\lambda|}\int_a^x |\mathcal{K}(x,y)|\,|f_1(y)-f_2(y)|\,dy\\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,(x-a)\,\|f_1-f_2\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Supongamos que la desigualdad (6.9) vale para $k-1$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\phi_\lambda^k(f_1)(x)-\phi_\lambda^k(f_2)(x)\right| &\leq \frac{1}{|\lambda|}\int_a^x |\mathcal{K}(x,y)|\left|\phi_\lambda^{k-1}(f_1)(y)-\phi_\lambda^{k-1}(f_2)(y)\right|dy\\ &\leq \frac{\|\mathcal{K}\|_\infty}{|\lambda|}\int_a^x \left|\phi_\lambda^{k-1}(f_1)(y)-\phi_\lambda^{k-1}(f_2)(y)\right|dy\\ &\leq \frac{\|\mathcal{K}\|_\infty^k}{|\lambda|^k}\,\|f_1-f_2\|_\infty\int_a^x \frac{(y-a)^{k-1}}{(k-1)!}dy\\ &= \frac{\|\mathcal{K}\|_\infty^k}{|\lambda|^k}\,\|f_1-f_2\|_\infty\,\frac{(x-a)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Esto demuestra la desigualdad (6.9). De ella se sigue que

$$\left|\phi_\lambda^k(f_1)(x)-\phi_\lambda^k(f_2)(x)\right| \leq |\lambda|^{-k}\,\|\mathcal{K}\|_\infty^k\,\frac{(b-a)^k}{k!}\,\|f_1-f_2\|_\infty \qquad \forall x\in[a,b]$$

y, en consecuencia, que

$$\left\|\phi_\lambda^k(f_1) - \phi_\lambda^k(f_2)\right\|_\infty \leq \frac{\left(|\lambda|^{-1}\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,(b-a)\right)^k}{k!}\,\|f_1 - f_2\|_\infty\,, \tag{6.10}$$

como afirma el enunciado. □

Teorema 6.12. *Si $\lambda \neq 0$ entonces, para cada $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, la ecuación integral de Volterra* (6.8) *tiene una única solución.*

Demostración. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\left(|\lambda|^{-1}\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,(b-a)\right)^k}{k!} < 1 \qquad \forall k \geq k_0$$

(ver Ejercicio 3.61). Por el lema anterior, para $k \geq k_0$, la función $\phi_\lambda^k\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ es una contracción. Del Corolario 6.6 se sigue que ϕ_λ tiene un único punto fijo, es decir, la ecuación (6.8) tiene solución única. □

Este resultado asegura en particular que, si $\lambda \neq 0$, la solución trivial es la única solución de la **ecuación de valores propios**

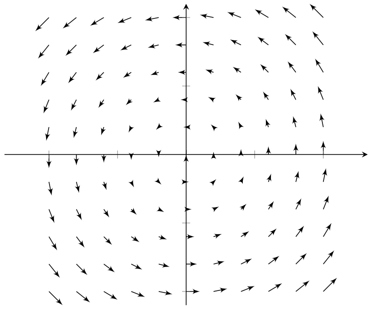
$$\mathfrak{V}f = \lambda f$$

para el **operador de Volterra** $\mathfrak{V}$. Es decir, ningún $\lambda \neq 0$ es un valor propio de $\mathfrak{V}$. La ecuación integral de Volterra del primer tipo, $\mathfrak{V}f = g$, es bastante más complicada y no la estudiaremos aquí.

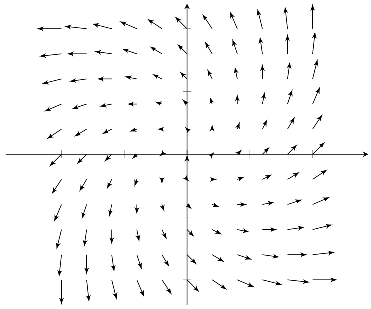
6.4. El problema de Cauchy

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Un campo vectorial en Ω es una función continua de Ω en $\mathbb{R}^n$. Los campos vectoriales se utilizan a menudo en la física para modelar, por ejemplo, la velocidad de un líquido móvil, o la intensidad y la dirección de una cierta fuerza, como la fuerza electromagnética.

Consideraremos campos vectoriales que cambian continuamente con el tiempo, es decir, funciones continuas $\chi\colon (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. El intervalo abierto (a,b) puede ser infinito. Las siguientes figuras ilustran el campo vectorial $\chi(t,x,y) = (tx - y, x + ty)$ para $t = 0$ y $t = 1$.



$\chi(0, x, y) = (-y, x)$



$\chi(1, x, y) = (x - y, x + y)$

Dado un tiempo inicial $t_0 \in (a, b)$ y una posición inicial $x_0 \in \Omega$, nos preguntamos si existe una trayectoria $u(t)$ en Ω tal que $u(t_0) = x_0$ cuya velocidad $u'(t)$ en cada tiempo t sea precisamente $\chi(t, u(t))$.

Definición 6.13. *Una **solución** del **problema de Cauchy***

$$\begin{cases} u' = \chi(t, u), \\ u(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{6.11}$$

es una función continuamente diferenciable $u\colon J \to \Omega$, definida en un subintervalo J de (a, b) que contiene a t_0, que satisface

$$u'(t) = \chi(t, u(t)) \quad \forall t \in J \qquad y \qquad u(t_0) = x_0.$$

*El punto (t_0, x_0) se llama la **condición inicial** del problema* (6.11).

Empezaremos mostrando que el problema (6.11) es equivalente a una ecuación integral. Dada una función continua $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

al vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de f.

Lema 6.14. $u\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \Omega$ *es solución del problema de Cauchy* (6.11) *si y sólo si u es continua y satisface*

$$u(t) = \int_{t_0}^t \chi(s, u(s))ds + x_0 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{6.12}$$

Demostración. Esta afirmación es consecuencia inmediata de los teoremas fundamentales del cálculo, aplicados a cada componente. En efecto, si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$, entonces u_i es continua y satisface

$$u_i(t) = \int_{t_0}^{t} \chi_i(s, u(s))ds + x_{0,i}$$

si y sólo si u_i es continuamente diferenciable y satisface

$$u_i'(t) = \chi_i(t, u(t)), \qquad u_i(t_0) = x_{0,i},$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. □

Queremos expresar la ecuación integral (6.12) como un problema de punto fijo. Para ello requerimos una condición adicional sobre el campo χ. Denotemos por

$$\bar{B}(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

a la bola cerrada de radio δ y centro x_0 en $\mathbb{R}^n$ con la norma usual.

Definición 6.15. *Una función $\chi\colon (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es **localmente Lipschitz continua en la segunda variable** si, para cada $t_0 \in (a,b)$ y $x_0 \in \Omega$, existen $\delta_0 > 0$ y $C > 0$ (que dependen de t_0 y x_0) tales que $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset (a,b)$, $\bar{B}(x_0, \delta_0) \subset \Omega$ y*

$$\|\chi(t, x_1) - \chi(t, x_2)\| \leq C\,\|x_1 - x_2\| \qquad \text{si } |t - t_0| \leq \delta_0 \text{ y } x_1, x_2 \in \bar{B}(x_0, \delta_0).$$

En el resto de esta sección supondremos que $\chi\colon (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz continua en la segunda variable.

Para la condición inicial (t_0, x_0) del problema (6.11) escogemos $\delta_0 > 0$ y $C > 0$ como en la Definición 6.15. Escogemos además $M \geq 1$ tal que

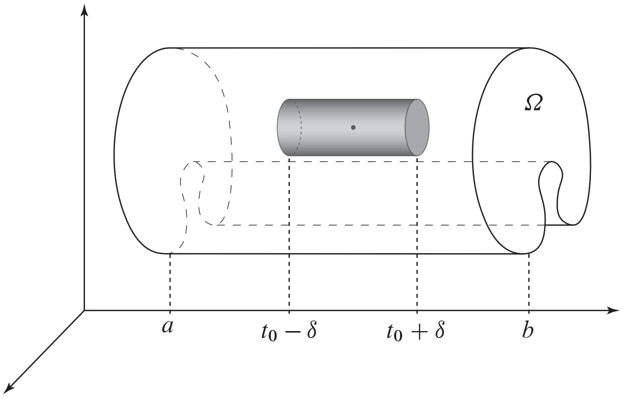
$$\|\chi(t, x)\| \leq M \qquad \forall (t, x) \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}(x_0, \delta_0). \tag{6.13}$$

Tal M existe gracias al Corolario 4.11. Finalmente, escogemos $\delta \in \left(0, \text{mín}\left\{\frac{1}{C}, \frac{\delta_0}{M}\right\}\right)$. Definimos

$$X := \left\{u \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) : \|u - x_0\|_\infty \leq \delta M\right\}$$

donde x_0 es la función constante con valor x_0 y

$$\|u\|_\infty = \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|u(t)\|$$



es la norma uniforme en $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Recuerda que $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach (ver Teorema 5.21). Le damos a X la métrica inducida por esta norma.

Lema 6.16. *(a) X es un espacio métrico completo.*

(b) Si $u \in X$, entonces $u(t) \in \bar{B}(x_0, \delta_0) \subset \Omega$ para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Demostración. (a): Observa que X es la bola cerrada con centro en la función constante x_0 y radio δM en el espacio $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ con la norma uniforme. Por tanto, X es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. De la Proposición 5.9 se sigue que X es un espacio métrico completo.

(b): Si $u \in X$ entonces

$$\|u(t) - x_0\| \leq \delta M < \delta_0 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

En consecuencia, $u(t) \in \bar{B}(x_0, \delta_0) \subset \Omega$ para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. □

Para cada $u \in X$ definimos la función $\phi(u) \colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ como

$$\phi(u)(t) := \int_{t_0}^{t} \chi(s, u(s))ds + x_0.$$

Nota que el integrando está bien definido porque, de acuerdo con el lema anterior, $u(s) \in \Omega$ para todo $s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Requerimos la siguiente desigualdad.

Lema 6.17. *Para cualquier función continua* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *se cumple que*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq |b-a| \, \|f\|_\infty \, .$$

La demostración de esta desigualdad es sencilla y se propone como ejercicio [Ejercicio 6.34].

Probaremos ahora que ϕ es una función de X en sí mismo.

Lema 6.18. $\phi(u) \in X$ *para todo* $u \in X$.

Demostración. Por el teorema fundamental del cálculo, la i-ésima función componente de $\phi(u)$,

$$\phi(u)_i(t) := \int_{t_0}^t \chi_i(s,u(s))ds + x_{0,i},$$

es continuamente diferenciable. En particular, $\phi(u) \in \mathcal{C}^0([t_0-\delta, t_0+\delta], \mathbb{R}^n)$. Usando el Lema 6.17 obtenemos además que

$$\|\phi(u)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \chi(s,u(s))ds \right\| \leq |t-t_0| \, M \leq \delta M.$$

En consecuencia, $\phi(u) \in X$. $\square$

Ernst Lindelöf

Émile Picard

El siguiente teorema es uno de los resultados fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales. Fue publicado por primera vez en 1890 por Lindelöf[5]. Simultáneamente,

[5] Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946) nació en Helsinki, Finlandia. Se doctoró en la Universidad de Helsinki y fue profesor en esa universidad.

Picard[6] desarrolló un método de aproximación sucesiva de soluciones. El método de iteración de Picard es justamente el método iterativo del teorema de punto fijo de Banach para este caso particular.

Teorema 6.19 (Picard-Lindelöf). *Sea* $\chi\colon (a,b)\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ *una función continua y localmente Lipschitz continua en la segunda variable. Entonces, dados* $t_0 \in (a,b)$ *y* $x_0 \in \Omega$*, existe* $\delta > 0$ *tal que el problema de Cauchy* (6.11) *tiene una única solución en el intervalo* $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

Demostración. El lema anterior asegura que ϕ es una función de X en sí mismo. Observa que $u \in X$ satisface la ecuación integral (6.12) si y sólo si

$$\phi(u)(t) := \int_{t_0}^{t} \chi(s,u(s))ds + x_0 = u(t) \qquad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta],$$

es decir, si y sólo si u es un punto fijo de $\phi\colon X \to X$.

Probaremos que ϕ es una contracción. Sean $u, v \in X$. Usando el Lema 6.17 obtenemos que, para toda $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (\chi(s,u(s))-\chi(s,v(s)))ds \right\| \\
&\leq |t-t_0| \max_{|s-t_0|\leq\delta} \|\chi(s,u(s))-\chi(s,v(s))\| \\
&\leq |t-t_0| \max_{|s-t_0|\leq\delta} C\,\|u(s)-v(s)\| \\
&\leq \delta C\,\|u-v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|\phi(u)-\phi(v)\|_\infty \leq \delta C\,\|u-v\|_\infty$$

y, como hemos elegido δ tal que $\delta C < 1$, se tiene que ϕ es una contracción.

Como X es completo, el Teorema 6.3 asegura que ϕ tiene un único punto fijo. Es decir, que existe una única $u^* \in X$ que satisface la ecuación integral (6.12). Del Lema 6.14 se sigue que u^* es la única solución del problema de Cauchy (6.11) en el intervalo $[t_0-\delta, t_0+\delta]$. □

[6] Charles Émile Picard (1856-1941) nació en París. Estudió en la École Normale Supérieure bajo la supervisión de Gaston Darboux. Fue profesor en las universidades de París y Toulouse y de la École Normale.

6.5. Ejercicios

Ejercicio 6.20. *Sea $X = X_{\mathrm{disc}}$ un espacio discreto* (ver Ejemplo 2.16). *Prueba que $\phi\colon X \to X$ es una contracción si y sólo si ϕ es una función constante.*

Ejercicio 6.21. *(a) Prueba que la función $\phi\colon \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_p$ dada por $\phi(x) = \frac{1}{2}x$ es una contracción para todo $p \in [1, \infty)$.*

(b) ¿Es posible darle a $\mathbb{R}^n$ alguna métrica tal que ϕ no sea contracción?

(c) ¿Es posible darle a $\mathbb{R}^n$ alguna norma tal que ϕ no sea contracción?

Ejercicio 6.22. *(a) Usa el teorema del valor intermedio para probar que toda función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ tiene al menos un punto fijo.*

(b) Da un ejemplo de una función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ con una infinidad de puntos fijos.

Ejercicio 6.23. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en $[a, b]$ y tal que $f(a) < 0 < f(b)$ y $f'(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Prueba que existe un único $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$ y que x^* se puede encontrar por el método de aproximaciones sucesivas.* (Sugerencia: Demuestra que existe $\lambda > 0$ tal que $x - \lambda f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ y tal que $\phi_\lambda(x) := x - \lambda f(x)$ es una contracción en $[a, b]$.)

Ejercicio 6.24. *Prueba que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable y $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es una contracción.*

Ejercicio 6.25. *Da un ejemplo de un espacio métrico completo y una función $\phi\colon X \to X$ que satisface*

$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in X \text{ con } x \neq y, \tag{6.14}$$

y que no tiene ningún punto fijo. Es decir, la condición (6.14) *no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo.*

Ejercicio 6.26. *Prueba que, si X es un espacio métrico compacto y $\phi\colon X \to X$ satisface*

$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in X \text{ con } x \neq y,$$

entonces ϕ tiene un único punto fijo.

Ejercicio 6.27. *Sean X un espacio métrico completo y $\phi\colon X \to X$ una función continua.*

(a) Prueba que, si existe $\alpha \in (0,1)$ *tal que*

$$d(\phi^2(x), \phi(x)) \leq \alpha d(\phi(x), x) \qquad \forall x \in X,$$

entonces ϕ *tiene un punto fijo.*

(b) Muestra, mediante un ejemplo, que dicho punto fijo no necesariamente es único.

(c) Si ϕ *no es continua, ¿es válida la afirmación (a)?*

Ejercicio 6.28. *Sea* $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *la función dada por* $\phi(x) = Ax - b$*, donde* $A = (a_{ij})$ *es una matriz de* $n \times n$ *y* $b \in \mathbb{R}^n$*.*

(a) Prueba que, si

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1, \tag{6.15}$$

entonces $\phi \colon \mathbb{R}^n_2 \to \mathbb{R}^n_2$ *es una contracción.*

(b) Prueba que, si

$$\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1, \tag{6.16}$$

entonces $\phi \colon \mathbb{R}^n_\infty \to \mathbb{R}^n_\infty$ *es una contracción.*

(c) Da ejemplos de matrices A *que satisfagan cada una de las condiciones* (6.6), (6.15) *y* (6.16) *pero no las otras dos. Es decir, cada una de estas condiciones es suficiente para que la ecuación*

$$Ax - x = b,$$

tenga solución única, pero ninguna es necesaria.

(d) En cada uno de los incisos (a) y (b) aplica la fórmula (6.2) *para estimar la solución en términos de* A *y* b *exclusivamente.*

(e) Prueba que cada una de las condiciones (6.15) *y* (6.16) *implica que* $\det(A - I) \neq 0$.

(f) Da un ejemplo de una matriz A *tal que* $\det(A - I) \neq 0$ *y que no cumple ninguna de las condiciones* (6.6), (6.15) *y* (6.16).

Ejercicio 6.29. *Sea A una matriz de $n \times n$. Recuerda que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$. Prueba que todo valor propio λ de A satisface*

$$|\lambda| \leq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|.$$

Ejercicio 6.30. *Sea $\mathcal{K}\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua.*

(a) Prueba que el operador de Fredholm $\mathfrak{F}\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ dado por

$$(\mathfrak{F} f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y) f(y) dy$$

es un operador lineal, es decir,

$$\mathfrak{F}(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = \mu_1 \mathfrak{F}(f_1) + \mu_2 \mathfrak{F}(f_2) \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b], \ \ \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) $\mathfrak{F}\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ es Lipschitz continuo.

Ejercicio 6.31. *Sean $\mathcal{K}\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$. Prueba que la solución f^* de la ecuación integral de Fredholm* (6.7) *satisface*

$$\left\| f^* - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\lambda^m} \mathfrak{F}^{m-1} g \right\|_\infty \leq \frac{\alpha^k}{(1-\alpha)\,|\lambda|} \|g\|_\infty,$$

donde $\alpha := \frac{1}{|\lambda|} \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$ y $\mathfrak{F}$ es el operador de Fredholm.

Ejercicio 6.32. *Considera la ecuación no lineal de Fredholm*

$$\lambda f(x) - \int_a^b \mathcal{K}(x,y,f(y)) dy = g(x),$$

donde $\mathcal{K}\colon [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, y $\mathcal{K}$ es Lipschitz continua en la tercera variable, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x,y,z_1) - \mathcal{K}(x,y,z_2)| \leq M\,|z_1 - z_2| \qquad \forall x,y \in [a,b], \ \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Prueba que esta ecuación tiene solución única si

$$|\lambda| > M(b-a).$$

Ejercicio 6.33. *Sea* $\mathcal{K}\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función continua.*

(a) Prueba que el operador de Volterra $\mathfrak{V}\colon \mathcal{C}^0[a,b]\to\mathcal{C}^0[a,b]$ *dado por*

$$(\mathfrak{V}f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

es un operador lineal, es decir,

$$\mathfrak{V}(\mu_1 f_1+\mu_2 f_2) = \mu_1\mathfrak{V}(f_1)+\mu_2\mathfrak{V}(f_2) \qquad \forall f_1, f_2\in\mathcal{C}^0[a,b],\ \ \forall\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}.$$

(b) Prueba que $\mathfrak{V}\colon \mathcal{C}^0[a,b]\to\mathcal{C}^0[a,b]$ *es Lipschitz continuo.*

(c) Prueba que, si λ *es un valor propio de* $\mathfrak{V}$*, entonces* $\lambda=0$.

Ejercicio 6.34. *Dada una función continua* $f=(f_1,\dots,f_n)\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$*, denotamos por*

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt,\dots,\int_a^b f_n(t)dt\right)\in\mathbb{R}^n$$

al vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de f*. Prueba que*

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \le |b-a|\,\|f\|_\infty\,,$$

donde $\|\cdot\|$ *es la norma usual en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\|f\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|$ *es la norma uniforme en* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$. (Sugerencia: Aplica primero la desigualdad de Hölder para probar que

$$\left|\int_a^b f_i\right| \le (b-a)^{1/2}\left(\int_a^b |f_i|^2\right)^{1/2}$$

para $i=1,\dots,n$).

Ejercicio 6.35. *Prueba que, si* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es continuamente diferenciable, entonces es localmente Lipschitz continua, es decir, para cada* $t\in\mathbb{R}$*, existe* $\delta_t>0$ *tal que la restricción de* f *al intervalo* $[t-\delta_t, t+\delta_t]$ *es Lipschitz continua.*

Ejercicio 6.36. *Sea* $\chi\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tal que* $\chi(t,x)=3x^{2/3}$.

(a) Prueba que χ *no es localmente Lipschitz continua en la segunda variable.*

(b) *Prueba que, para cualesquiera* $\alpha < 0 < \beta$, *la función*

$$u_{\alpha,\beta}(t) := \begin{cases} (t-\alpha)^3 & \textit{si } t \leq \alpha, \\ 0 & \textit{si } \alpha \leq t \leq \beta, \\ (t-\beta)^3 & \textit{si } t \geq \beta, \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$ *y es solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, si χ *no es localmente Lipschitz continua en la segunda variable, el problema de Cauchy puede tener una infinidad de soluciones.*

Ejercicio 6.37. *Sea* $\chi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\chi(t,x) = -x^2$.

(a) *Prueba que* χ *es localmente Lipschitz continua en la segunda variable.*

(b) *Para* $\alpha \neq 0$ *considera el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = -u^2, \\ u(0) = -\frac{1}{\alpha}. \end{cases} \tag{6.17}$$

Prueba que

$$u(t) = \frac{1}{t-\alpha}$$

es solución de (6.17) *en algún intervalo que contiene a* 0.

(c) *¿Cuál es el intervalo máximo para el que existe una solución de* (6.17)*?*

7

Compacidad en espacios de funciones

En el Capítulo 4 dimos una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Probamos que son precisamente aquellos que son cerrados y acotados.

El objetivo de este capítulo es dar una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}^0(K, X)$ en un espacio métrico compacto K. Dicha caracterización, debida a Giulio Ascoli y Cesare Arzelà, se basa fundamentalmente en la noción de *equicontinuidad*.

El teorema de Arzelà-Ascoli es un resultado fundamental en análisis y tiene muchas aplicaciones importantes. Una de ellas es el teorema de Peano que afirma la existencia de soluciones al problema de Cauchy para campos vectoriales continuos. Lo demostraremos en este capítulo.

Además aplicaremos el teorema de Arzelà-Ascoli para obtener condiciones que aseguren la existencia de trayectorias de longitud mínima en espacios métricos, dando así respuesta a la pregunta que planteamos en el Capítulo 1.

7.1. Conjuntos totalmente acotados

La demostración del teorema de Heine-Borel se basó en el hecho de que podemos cubrir a un cubo en $\mathbb{R}^n$ (y, en consecuencia, a cualquier subconjunto acotado) con un número finito de bolas de radio ε, para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto no es cierto en un espacio métrico arbitrario, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1. *La bola cerrada* $\bar{B}_{\ell_2}(0,1) := \left\{(x_n) \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1\right\}$ *no puede ser cubierta por un número finito de bolas abiertas de radio* ε *en* ℓ_2*, para ningún* $\varepsilon \in (0, \sqrt{2}/2)$.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotemos por $\overline{e}_k \in \ell_2$ a la sucesión cuyo k-ésimo término es 1 y todos los demás términos son 0. Claramente $\overline{e}_k \in \bar{B}_{\ell_2}(0,1)$. Observa que

$$\left\|\overline{e}_j - \overline{e}_k\right\|_2 = \sqrt{2} \qquad \forall j \neq k.$$

Sea $\varepsilon \in (0, \sqrt{2}/2)$. Si $\bar{B}_{\ell_2}(0,1)$ pudiese ser cubierta por un número finito de bolas de radio ε en ℓ_2, entonces al menos una de ellas tendría que contener a un par de sucesiones $\overline{e}_j, \overline{e}_k$ con $j \neq k$, lo cual es imposible. □

Sea $X = (X, d_X)$ un espacio métrico. Estudiaremos a los subconjuntos de X que tienen la siguiente propiedad.

Definición 7.2. *Un subconjunto A de X es* ***totalmente acotado*** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que*

$$A \subset B_X(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \varepsilon),$$

donde $B_X(a, \varepsilon)$ denota a la bola abierta con centro en a y radio ε en X.

Veamos algunas propiedades sencillas de los conjuntos totalmente acotados.

Proposición 7.3. *Sea A un subconjunto de X.*

(a) Si A es compacto, entonces A es totalmente acotado.

(b) Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado en X.

(c) Si $D \subset A$ y A es totalmente acotado, entonces D es totalmente acotado.

(d) Si A es totalmente acotado, entonces su cerradura $\overline{A}$ en X es totalmente acotada.

Demostración. (a): Si $A \subset X$ es compacto entonces, para toda $\varepsilon > 0$, la cubierta abierta $\{B_X(x, \varepsilon) : x \in A\}$ de A contiene una subcubierta finita. Es decir, existen $x_1, \ldots, x_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_X(x_m, \varepsilon).$$

(b): Si $A \subset X$ es totalmente acotado entonces existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(a_1, 1) \cup \cdots \cup B_X(a_m, 1).$$

En consecuencia, $A \subset B_X(a_1, r+1)$ donde $r := \max\left\{d_X(a_1, a_j) : j = 2, \ldots, m\right\}$, es decir, A es acotado.

(c): Sean A un subconjunto totalmente acotado de X, $D \subset A$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(a_1, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Sea $J := \left\{ j \in \{1, \ldots, m\} : B_X(a_j, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cap D \neq \emptyset \right\}$. Para cada $j \in J$ elegimos un punto $b_j \in B_X(a_j, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cap D$. Entonces se cumple que

$$D \subset \bigcup_{j \in J} B_X(b_j, \varepsilon).$$

Esto prueba que D es totalmente acotado.

(d): Sean A un subconjunto totalmente acotado de X, $\varepsilon > 0$, y $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(a_1, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Como $\bar{B}_X(a_1, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup \bar{B}_X(a_m, \tfrac{\varepsilon}{2})$ es cerrado, se tiene que

$$\overline{A} \subset \bar{B}_X(a_1, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup \bar{B}_X(a_m, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

En consecuencia,

$$\overline{A} \subset B_X(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \varepsilon).$$

Esto prueba que $\overline{A}$ es totalmente acotado. □

El siguiente resultado da caracterizaciones muy útiles de los espacios métricos compactos.

Teorema 7.4. *Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es compacto.

(b) Toda sucesión en X contiene una subsucesión que converge en X.

(c) X es completo y totalmente acotado.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Esta es la afirmación de la Proposición 4.5.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Si X satisface *(b)* entonces (x_k) contiene una subsucesión que converge a un punto $x \in X$. En consecuencia, (x_k) converge a x en X (ver Ejercicio 5.30). Esto prueba que X es completo.

Supongamos ahora que X no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de bolas abiertas de radio ε_0. Por consiguiente, podemos escoger, inductivamente, una sucesión de puntos $x_k \in X$ tales que

$$x_k \notin B_X(x_1, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B_X(x_{k-1}, \varepsilon_0).$$

Por tanto, $d_X(x_j, x_k) \geq \varepsilon_0$ para toda $j \neq k$ y, en consecuencia, ninguna subsucesión de (x_k) es de Cauchy. Esto implica que (x_k) no contiene ninguna subsucesión convergente. Es decir, si X no es totalmente acotado, entonces *(b)* no se cumple.

(c) $\Rightarrow$ *(a)*: Argumentando por contradicción, supongamos que X es completo y totalmente acotado pero no es compacto. Entonces X tiene una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ que no contiene ninguna subcubierta finita. Como X es totalmente acotado, está contenido en la unión de un número finito de bolas abiertas de radio 1. Por tanto, existe un punto $x_0 \in X$ tal que $B_X(x_0, 1)$, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Como $B_X(x_0, 1)$ es totalmente acotado (ver Proposición 7.3), está contenido en la unión de un número finito de bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$ cuyos centros están en $B_X(x_0, 1)$. Por consiguiente, existe $x_1 \in B_X(x_0, 1)$ tal que $B_X(x_1, \frac{1}{2})$, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. De este modo construímos, inductivamente, una sucesión (x_k) tal que $x_k \in B_X(x_{k-1}, \frac{1}{2^{k-1}})$ y $B_X(x_k, \frac{1}{2^k})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Para toda $j \geq k$, se tiene entonces que

$$d_X(x_k, x_j) \leq d_X(x_k, x_{k+1}) + \cdots + d_X(x_{j-1}, x_j) < \tfrac{1}{2^k} + \cdots + \tfrac{1}{2^{j-1}} < \tfrac{1}{2^{k-1}}, \quad (7.1)$$

es decir, la sucesión (x_k) es Cauchy. Como X es completo, esta sucesión converge a un punto x^* en X. Haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad (7.1) obtenemos que

$$d_X(x_k, x^*) \leq \tfrac{1}{2^{k-1}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, como $x^* \in X$, existe $U^* \in \mathcal{U}$ tal que $x^* \in U^*$. Como U^* es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x^*, \varepsilon) \subset U^*$. Sea k tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, para todo $x \in B_X(x_k, \frac{1}{2^k})$, se tiene que

$$d_X(x, x^*) \leq d_X(x, x_k) + d_X(x^*, x_k) < \tfrac{1}{2^k} + \tfrac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

es decir,

$$B_X(x_k, \tfrac{1}{2^k}) \subset B_X(x^*, \varepsilon) \subset U^*.$$

Esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que $B_X(x_k, \frac{1}{2^k})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. □

Observa la similitud de la demostración de la afirmación *(c)* $\Rightarrow$ *(a)* con la de la Proposición 4.12, que constituye la parte medular de la demostración del teorema de Heine-Borel. La caracterización *(c)* es muy útil, como veremos en las siguientes secciones.

Definición 7.5. *Un subconjunto A de X es **relativamente compacto** en X si su cerradura $\overline{A}$ en X es compacta.*

Los subconjuntos relativamente compactos de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los conjuntos acotados.

En un espacio métrico completo se cumple lo siguiente.

Corolario 7.6. *Un subconjunto A de un espacio métrico completo X es relativamente compacto en X si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración. $\Rightarrow$): Sea A relativamente compacto en X. La Proposición 7.3 implica entonces que $\overline{A}$ es totalmente acotado y, en consecuencia, que A también lo es.

$\Leftarrow$): Inversamente, supongamos que A es totalmente acotado. La Proposición 7.3 afirma que $\overline{A}$ es totalmente acotado. Por otra parte, como X es completo y $\overline{A}$ es cerrado en X, se tiene que $\overline{A}$ es completo (ver Proposición 5.9). El Teorema 7.4 asegura entonces que $\overline{A}$ es compacto. $\square$

7.2. El teorema de Arzelà-Ascoli

Sean $K = (K, d_K)$ un espacio métrico compacto y $X = (X, d_X)$ un espacio métrico. Consideremos el espacio de funciones continuas

$$\mathcal{C}^0(K, X) := \{f : K \to X : f \text{ es continua}\}$$

con la métrica uniforme

$$d_\infty(f, g) = \max_{z\in K} d_X(f(z), g(z)),$$

ver (4.8). Usaremos el Corolario 7.6 para obtener una caracterización sencilla de los subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{C}^0(K, X)$. La siguiente noción, introducida por Ascoli en 1884, jugará un papel fundamental.

Definición 7.7. *Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K, X)$ es **equicontinuo** en el punto $z_0 \in K$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de ε y de z_0) tal que, para toda $f \in \mathcal{H}$,*

$$d_X\left(f(z), f(z_0)\right) < \varepsilon \qquad \text{si } \ d_K\left(z, z_0\right) < \delta.$$

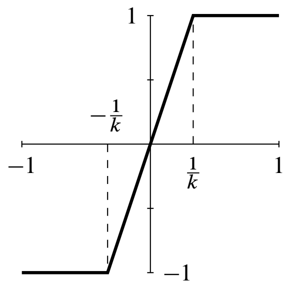
*$\mathcal{H}$ es **equicontinuo** si lo es en todo punto de K.*

El aspecto crucial de esta definición es que la misma $\delta > 0$ nos sirve para todas las funciones que pertenecen a $\mathcal{H}$. Un ejemplo en el que esto no se cumple es el siguiente.

Ejemplo 7.8. *El conjunto* $\mathcal{H} = \left\{ f_k \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) : k \in \mathbb{N} \right\}$, *donde*

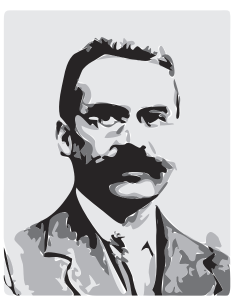
$$f_k(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in \left[-1, -\frac{1}{k}\right], \\ kt & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{k}, 1\right], \end{cases}$$

no es equicontinuo en 0.

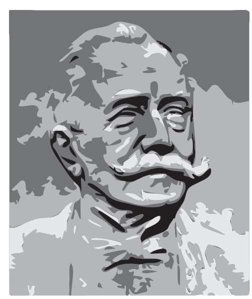


$y = f_k(x)$

La demostración es sencilla [Ejercicio 7.30].
A continuación enunciamos el teorema de Giulio Ascoli[1] y Cesare Arzelà[2].



Giulio Ascoli



Cesare Arzelà

[1] Giulio Ascoli (1843-1896) nació en Trieste, Italia. Estudió en la Scuola Normale di Pisa y fue profesor en el Politecnico di Milano.
[2] Cesare Arzelà (1847-1912) nació en Santo Stefano di Magra, Italia. Estudió en la Scuola Normale Superiore de Pisa, donde fue alumno de Enrico Betti y Ulisse Dini, y fue profesor en la Universidad de Bologna.

Denotaremos por

$$B_\infty(f_0, r) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(K, X) : d_\infty(f, f_0) < r \right\}$$

a la bola abierta en $\mathcal{C}^0(K, X)$ con centro en f_0 y radio r.

Teorema 7.9 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sean K un espacio métrico compacto y X un espacio métrico completo. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K, X)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, X)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y los conjuntos*

$$\mathcal{H}(z) := \{ f(z) : f \in \mathcal{H} \}$$

son relativamente compactos en X para cada $z \in K$.

Demostración. $\Rightarrow$): Supongamos que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, X)$. Entonces $\mathcal{H}$ es totalmente acotado. En consecuencia, dada $\varepsilon > 0$, existen $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{H}$ tales que

$$\mathcal{H} \subset B_\infty(g_1, \tfrac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup B_\infty(g_m, \tfrac{\varepsilon}{3}).$$

Por tanto, $g_i(z) \in \mathcal{H}(z)$ para $i = 1, \ldots, m$, y

$$\mathcal{H}(z) \subset B_X(g_1(z), \tfrac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup B_X(g_m(z), \tfrac{\varepsilon}{3}) \qquad \forall z \in K.$$

Esto prueba que $\mathcal{H}(z)$ es totalmente acotado y, como X es completo, el Corolario 7.6 asegura que $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en X para todo $z \in K$.

Por otra parte, como K es compacto, cada g_i es uniformemente continua. En consecuencia, existe $\delta_i > 0$ tal que, para cualesquiera $y, z \in K$,

$$d_X\left(g_i(y), g_i(z)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } d_K(y, z) < \delta_i. \tag{7.2}$$

Definimos $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Dada $f \in \mathcal{H}$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $d_\infty(f, g_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Usando (7.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} d_X(f(y), f(z)) &\leq d_X(f(y), g_i(y)) + d_X(g_i(y), g_i(z)) + d_X\left(g_i(z), f(z)\right) \\ &< \varepsilon \qquad \text{si } \ d_K(y, z) < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo.

$\Leftarrow$): Supongamos ahora que $\mathcal{H}$ es equicontinuo y que $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en X para todo $z \in K$. Queremos probar que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, X)$. Como X es completo, $\mathcal{C}^0(K, X)$ también lo es (ver Teorema 5.21). Por el Corolario 7.6 basta entonces probar que $\mathcal{H}$ es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $z \in K$ tomemos $\delta_z > 0$ tal que, para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$d_X(f(y), f(z)) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si } d_K(y,z) < \delta_z. \tag{7.3}$$

Como K es compacto, existen $z_1, \ldots, z_m \in K$ tales que

$$K \subset B_K(z_1, \delta_{z_1}) \cup \cdots \cup B_K(z_m, \delta_{z_m}) \tag{7.4}$$

y, como cada $\mathcal{H}(z_i)$ es totalmente acotado, existen $x_1, \ldots, x_k \in X$ tales que

$$\mathcal{H}(z_1) \cup \cdots \cup \mathcal{H}(z_m) \subset B_X(x_1, \tfrac{\varepsilon}{4}) \cup \cdots \cup B_X(x_k, \tfrac{\varepsilon}{4}). \tag{7.5}$$

Denotemos por S al conjunto (finito) de todas las funciones $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, k\}$. Para cada $\sigma \in S$ definimos

$$\mathcal{H}_\sigma := \left\{ f \in \mathcal{H} : f(z_i) \in B_X(x_{\sigma(i)}, \tfrac{\varepsilon}{4}) \ \ \forall i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Se sigue de (7.5) que, para cada $f \in \mathcal{H}$ y cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $\sigma(i) \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(z_i) \in B_X(x_{\sigma(i)}, \frac{\varepsilon}{4})$. En consecuencia,

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{\sigma \in S} \mathcal{H}_\sigma. \tag{7.6}$$

Probaremos ahora que cada $\mathcal{H}_\sigma$ está contenida en una bola de radio ε con centro en $\mathcal{H}$. Sean $f, g \in \mathcal{H}_\sigma$ y sea $z \in K$. Se sigue de (7.4) que existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $d_K(z, z_i) < \delta_{z_i}$ y, en consecuencia, (7.3) implica que $d_X(h(z), h(z_i)) < \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $h \in \mathcal{H}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} d_X(f(z), g(z)) \le\ & d_X(f(z), f(z_i)) + d_X(f(z_i), x_{\sigma(i)}) \\ & + d_X(g(z_i), x_{\sigma(i)}) + d_X(g(z), g(z_i)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando el máximo sobre toda $z \in K$ concluimos que $d_\infty(f, g) < \varepsilon$ para todas $f, g \in \mathcal{H}_\sigma$. En consecuencia, para cualquier elección de $g_\sigma \in \mathcal{H}_\sigma$, se cumple que

$$\mathcal{H}_\sigma \subset B_\infty(g_\sigma, \varepsilon). \tag{7.7}$$

De (7.6) y (7.7) se sigue que

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{\sigma \in S} B_\infty(g_\sigma, \varepsilon).$$

Por tanto, $\mathcal{H}$ es totalmente acotado. $\square$

Recordemos que $\mathcal{H}$ es un subconjunto acotado de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ si existen $f_0 \in \mathcal{H}$ y $C > 0$ tales que

$$\|f - f_0\|_\infty = \max_{z \in K} \|f(z) - f_0(z)\| \leq C \qquad \forall f \in \mathcal{H}$$

(ver Definición 4.6). El teorema de Arzelà-Ascoli permite caracterizar a los subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ como sigue.

Corolario 7.10. *Sea K un espacio métrico compacto. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y acotado en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. $\Rightarrow$): Sea $\mathcal{H}$ un subconjunto relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. Por el Teorema 7.9, $\mathcal{H}$ es equicontinuo y, por la Proposición 4.7, la cerradura de $\mathcal{H}$ es acotada en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. En consecuencia, $\mathcal{H}$ es acotado en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$.

$\Leftarrow$): Inversamente, supongamos que $\mathcal{H}$ es equicontinuo y acotado en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. Entonces existen $f_0 \in \mathcal{H}$ y $C > 0$ tales que

$$\|f - f_0\|_\infty = \max_{z \in K} \|f(z) - f_0(z)\| \leq C \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

En consecuencia, $\mathcal{H}(z)$ está acotado en $\mathbb{R}^n$ para todo $z \in K$ y, por el teorema de Heine-Borel (ver Teorema 4.13), $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}^n$ para todo $z \in K$. El Teorema 7.9 asegura entonces que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Daremos a continuación una primera aplicación interesante de este resultado. Requerimos la siguiente definición.

Definición 7.11. *Una función lineal $T : V \to W$ entre espacios de Banach se llama un **operador compacto** si, para cualquier sucesión acotada (v_k) en V, la sucesión (Tv_k) contiene una subsucesión convergente en W.*

Proposición 7.12. *Sea $\mathcal{K}\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. El operador de Volterra $\mathfrak{V}\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ dado por*

$$(\mathfrak{V} f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y) f(y) dy$$

es un operador compacto.

Demostración. Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{C}^0[a,b]$ tal que $\|f_k\|_\infty \leq c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$|(\mathfrak{V} f_k)(x)| \leq \int_a^x |\mathcal{K}(x,y)|\, |f_k(y)|\, dy \leq (b-a)\, \|\mathcal{K}\|_\infty\, \|f_k\|_\infty \leq (b-a)\, \|\mathcal{K}\|_\infty\, c$$

para todo $x \in [a,b]$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\|\mathfrak{V} f_k\|_\infty \le (b-a)\|\mathcal{K}\|_\infty c$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{H} := \{\mathfrak{V} f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\mathcal{C}^0[a,b]$. Más aún, como $\mathcal{K}$ es uniformemente continua, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x_1,y_1) - \mathcal{K}(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)c} \qquad \text{si } \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta_1.$$

En consecuencia, si $|x_1 - x_2| < \delta := \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty c}\right\}$ y $x_1 \le x_2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&|(\mathfrak{V} f_k)(x_1) - (\mathfrak{V} f_k)(x_2)| \\
&\quad = \left| \int_a^{x_1} (\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)) f_k(y)dy - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{K}(x_2,y) f_k(y)dy \right| \\
&\quad \le \int_a^{x_1} |\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)|\,|f_k(y)|\,dy + \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{K}(x_2,y)|\,|f_k(y)|\,dy \\
&\quad < (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)c}c + \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty c}\|\mathcal{K}\|_\infty c = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. Por el Corolario 7.10, $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0[a,b]$ y, en consecuencia, $(\mathfrak{V} f_k)$ contiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^0[a,b]$. □

En las siguientes secciones daremos otras dos aplicaciones importantes del teorema de Arzelà-Ascoli.

7.3. El problema de Cauchy

Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\chi\colon (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, $t_0 \in (a,b)$ y $x_0 \in \Omega$. En la Sección 6.4 probamos que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = \chi(t,u), \\ u(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene una única solución en un intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ si el campo vectorial χ es localmente Lipschitz continuo en la segunda variable (ver Teorema 6.19). Usaremos el teorema de Arzelà-Ascoli para probar que basta con que el campo vectorial sea continuo para que este problema tenga solución. Sin embargo, la solución no necesariamente es única (ver Ejercicio 6.36).

Fijemos $r > 0$ tal que

$$[t_0 - r, t_0 + r] \subset (a, b) \qquad \text{y} \qquad \bar{B}(x_0, r) \subset \Omega \tag{7.8}$$

y consideremos el conjunto

$$K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq r, \ \ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Sea $M > 0$ tal que

$$M > \max_{(t,x) \in K} \|\chi(t, x)\|,$$

y sea

$$\delta := \min\left\{r, \frac{r}{M}\right\}.$$

Empezaremos demostrando que el problema de Cauchy tiene soluciones aproximadas.

Lema 7.13. *Dada $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ con las siguientes propiedades:*

(a) $u_\varepsilon(t_0) = x_0$.

(b) $\|u_\varepsilon(t) - x_0\| \leq r$ *para todo* $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

(c) $\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| \leq M\,|t - s|$ *si* $s, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

(d) Existe un subconjunto finito F_ε de $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tal que u_ε es continuamente diferenciable en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \smallsetminus F_\varepsilon$, y

$$\left\|u'_\varepsilon(t) - \chi(t, u_\varepsilon(t))\right\| < \varepsilon \qquad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \smallsetminus F_\varepsilon.$$

Demostración. Como χ es uniformemente continua en K, existe $\gamma > 0$ tal que, para cualesquiera $(s, x), (t, y) \in K$,

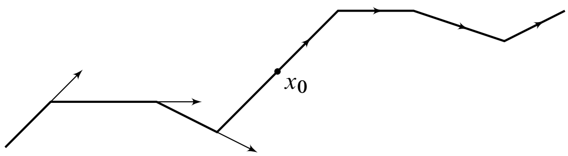
$$\|\chi(s, x) - \chi(t, y)\| \leq \varepsilon \qquad \text{si} \ \ |s - t| \leq \gamma \ \text{ y } \ \|x - y\| \leq \gamma. \tag{7.9}$$

Subdividimos el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ en subintervalos

$$t_0 - \delta =: t_{-m} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_m := t_0 + \delta$$

tales que $|t_{i+1} - t_i| \leq \min\{\gamma, \gamma/M\}$ para toda $i = -m, \ldots, m - 1$, y definimos $u_\varepsilon\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$, empezando con $u_\varepsilon(t_0) := x_0$, recursivamente, del siguiente modo:

$$u_\varepsilon(t) := \begin{cases} u_\varepsilon(t_i) + (t - t_i)\chi(t_i, u_\varepsilon(t_i)) & \text{si } i \geq 0, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ u_\varepsilon(t_i) + (t - t_i)\chi(t_i, u_\varepsilon(t_i)) & \text{si } i \leq 0, t \in [t_{i-1}, t_i] \end{cases}$$



Probaremos primero que u_ε está bien definida, es decir, que $u_\varepsilon(t_i) \in \Omega$ para todo $i = -m, \ldots, m$. Para ello, basta probar que

$$\|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \leq M\,|t_i - t_0| \qquad \forall i = -m, \ldots, m, \tag{7.10}$$

ya que, en ese caso, $\|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \leq M\delta \leq r$ y, en consecuencia, $u_\varepsilon(t_i) \in \Omega$. Demostraremos la desigualdad (7.10) inductivamente. Si $i = 0$, puesto que hemos definido $u_\varepsilon(t_0) := x_0$, la desigualdad se cumple. Supongamos que $\|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \leq M\,|t_i - t_0|$ para algún $|i| < m$ y tomemos $s, t \in [t_i, t_{i+1}]$ si $i \geq 0$, o bien $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ si $i \leq 0$. Como

$$\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| = \|(t - s)\chi(t_i, u_\varepsilon(t_i))\| \leq M\,|t - s|\,,$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t) - x_0\| &\leq \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_i)\| + \|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \\ &\leq M\,|t - t_i| + M\,|t_i - t_0| = M\,|t - t_0|\,. \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t_{i+1}) - x_0\| &\leq M\,|t_{i+1} - t_0| \quad \text{si } i \geq 0, \\ \|u_\varepsilon(t_{i-1}) - x_0\| &\leq M\,|t_{i-1} - t_0| \quad \text{si } i \leq 0. \end{aligned}$$

Esto prueba, inductivamente, la desigualdad (7.10).

Verifiquemos ahora que u_ε tiene las propiedades deseadas. Por definición, u_ε cumple *(a)*. Para $s, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con $t_{j-1} \leq s < t_j < \cdots < t_{j+i} < t \leq t_{j+i+1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\right\| &\leq \left\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_{j+i})\right\| + \cdots + \left\|u_\varepsilon(t_j) - u_\varepsilon(s)\right\| \\ &\leq M(t - t_{j+i}) + \cdots + M(t_j - s) = M\,|t - s|\,. \end{aligned}$$

Es decir, se cumple *(c)*. Tomando $s = t_0$ en la desigualdad anterior obtenemos

$$\|u_\varepsilon(t) - x_0\| \leq M\,|t - t_0| \leq r \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Esta es la afirmación *(b)*. Claramente, u_ε es continuamente diferenciable en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \smallsetminus \{t_i : i = -m+1, \ldots, m-1\}$. Si $t \in (t_i, t_{i+1})$ con $i \geq 0$ o si $t \in (t_{i-1}, t_i)$ con $i \leq 0$, usando *(c)* obtenemos que

$$|t - t_i| \leq \gamma \qquad \text{y} \qquad \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_i)\| \leq \gamma.$$

Se sigue entonces de (7.9) que

$$\left\|\chi(t, u_\varepsilon(t)) - u_\varepsilon'(t)\right\| = \|\chi(t, u_\varepsilon(t)) - \chi(t_i, u_\varepsilon(t_i))\| \leq \varepsilon.$$

Esto prueba la afirmación *(d)*. □

Giuseppe Peano[3] obtuvo el siguiente resultado.

Teorema 7.14 (de existencia de Peano)**.** *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\chi\colon (a,b)\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces, para cada $(t_0, x_0) \in (a,b)\times\Omega$, existe $\delta > 0$ tal que el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \chi(t,u), \\ u(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.11}$$

tiene al menos una solución en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Giuseppe Peano

[3] Giuseppe Peano (1858-1932) nació en Piemonte, Italia. Estudió en la Universidad de Torino, en donde fue profesor. Publicó su teorema de existencia en 1886 con una prueba incorrecta y en 1890 publicó una nueva demostración correcta usando aproximaciones sucesivas.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{H} := \left\{ u_{1/k} \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) : k \in \mathbb{N} \right\},$$

donde $u_{1/k}$ es la función dada por el Lema 7.13. Si denotamos por x_0 a la función constante con valor x_0 definida en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, la función $u_{1/k}$ satisface

$$\left\| u_{1/k} - x_0 \right\|_\infty = \max_{|t - t_0| \leq \delta} \left\| u_{1/k}(t) - x_0 \right\| \leq r.$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ está acotado en $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Por otra parte, dada $\varepsilon > 0$, la propiedad *(c)* del Lema 7.13 asegura que, para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| u_{1/k}(t) - u_{1/k}(s) \right\| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad |t - s| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. El Corolario 7.10 asegura entonces que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Por tanto, existen una subsucesión (u_{1/k_j}) de $(u_{1/k})$ y una función $u^* \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ tales que

$$u_{1/k_j} \to u^* \quad \text{cuando } j \to \infty \qquad \text{en} \quad \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n). \tag{7.12}$$

Probaremos ahora que u^* es una solución del problema (7.11).

Como $u_{1/k_j}(t) \to u^*(t)$ para cada $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, la propiedad *(b)* implica que

$$\|u^*(t) - x_0\| \leq r \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Se sigue de (7.8) que $u^*(t) \in \Omega$ para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Además, la propiedad *(a)* implica que $u^*(t_0) = x_0$. Demostraremos que u^* satisface

$$u^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \chi(s, u^*(s))ds \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{7.13}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como χ es uniformemente continua en K, existe $\eta > 0$ tal que

$$\|\chi(s, x) - \chi(s, y)\| < \frac{\varepsilon}{3\delta} \qquad \text{si} \ (s, x), (s, y) \in K \text{ y } \|x - y\| < \eta.$$

Tomemos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\delta}{k_j} < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $j \geq j_0$ y tal que

$$\left\| u_{1/k_j} - u^* \right\|_\infty < \min\left\{ \eta, \frac{\varepsilon}{3} \right\} \qquad \text{si} \ \ j \geq j_0.$$

Entonces, usando el Lema 6.17, para cada $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\left\| \int_{t_0}^{t} \left[\chi(s, u_{1/k_j}(s)) - \chi(s, u^*(s)) \right] ds \right\| \\ &\qquad\qquad \leq |t - t_0| \max_{|s-t_0| \leq \delta} \left\| \chi(s, u_{1/k_j}(s)) - \chi(s, u^*(s)) \right\| < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } \ j \geq j_0.\end{aligned}$$

Usando además el teorema fundamental del cálculo y la propiedad *(d)* obtenemos

$$\begin{aligned}\left\| u_{1/k_j}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \chi(s, u_{1/k_j}(s)) ds \right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \left[u'_{1/k_j}(s) - \chi(s, u_{1/k_j}(s)) \right] ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| \frac{1}{k_j} \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } \ j \geq j_0.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\left\| u^*(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \chi(s, u^*(s)) ds \right\| &\leq \left\| u^*(t) - u_{1/k_j}(t) \right\| \\ &\qquad + \left\| u_{1/k_j}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \chi(s, u_{1/k_j}(s)) ds \right\| \\ &\qquad + \left\| \int_{t_0}^{t} \left[\chi(s, u_{1/k_j}(s)) - \chi(s, u^*(s)) \right] ds \right\| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

para toda $\varepsilon > 0$. Esto demuestra (7.13). El Lema 6.14 asegura entonces que u^* es solución del problema (7.11). □

7.4. Existencia de trayectorias de longitud mínima

Volvamos a nuestro problema de partida: el Problema 1.1. Podemos ahora plantear esa misma pregunta de manera más general, para trayectorias en espacios métricos y no únicamente en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico y $x, y \in X$. Una **trayectoria de** x **a** y **en** X es una función continua $\sigma \colon [a, b] \to X$ tal que $\sigma(a) = x$ y $\sigma(b) = y$. Recordemos que la longitud de σ se define como

$$\mathfrak{L}(\sigma) := \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} d(\sigma(t_{k-1}),\sigma(t_k)) : a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b,\ m \in \mathbb{N}\right\}$$

(ver Definición 4.20). El objetivo de esta sección es dar una respuesta a la siguiente pregunta.

Problema 7.15. *Dados $x, y \in X$, ¿existe una trayectoria de longitud mínima de x a y en X?*

Para poder expresar este problema como un problema de minimización en un espacio de funciones veremos primero que, reparametrizando a σ, podemos siempre suponer que está definida en el intervalo $[0,1]$.

Si $\rho\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ es una función continua, no decreciente y suprayectiva, y $\sigma \in \mathcal{C}^0([a,b],X)$ es una trayectoria de x a y en X, entonces la trayectoria $\sigma \circ \rho \in \mathcal{C}^0([\alpha,\beta],X)$ es también una trayectoria de x a y en X. Se le llama una **reparametrización de** σ. Las reparametrizaciones preservan la longitud, es decir, se cumple lo siguiente.

Lema 7.16. *Si $\sigma \circ \rho$ es una reparametrización de σ, entonces $\mathfrak{L}(\sigma \circ \rho) = \mathfrak{L}(\sigma)$.*

La demostración es sencilla y se propone como ejercicio [Ejercicio 7.38].

Cualquier trayectoria $\sigma \in \mathcal{C}^0([a,b],X)$ se puede reparamentrizar mediante la función

$$\rho\colon [0,1] \to [a,b], \qquad \rho(t) = (1-t)a + tb.$$

El dominio de la trayectoria $\sigma \circ \rho$ es el intervalo $[0,1]$ y esta trayectoria tiene la misma longitud que σ.

Consideremos entonces el **espacio de trayectorias**

$$\mathcal{T}_{x,y}(X) := \left\{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X) : \sigma(0) = x,\ \sigma(1) = y\right\}$$

con la métrica uniforme

$$d_\infty(\sigma,\tau) = \max_{t\in[0,1]} d(\sigma(t),\tau(t)),$$

y la **función longitud**

$$\mathfrak{L}\colon \mathcal{T}_{x,y}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \sigma \mapsto \mathfrak{L}(\sigma).$$

El Problema 7.15 se puede expresar como sigue.

Problema 7.17. *¿Alcanza $\mathfrak{L}$ su mínimo en $\mathcal{T}_{x,y}(X)$?*

Recordemos que la función $\mathfrak{L}$ es semicontinua inferiormente (ver Proposición 4.21). Sin embargo, vimos un ejemplo en el que no es posible aplicar el Teorema 4.29 para obtener la existencia de una trayectoria de longitud mínima (ver Ejercicio 4.49). El siguiente resultado muestra que, para nuestro problema, las hipótesis de dicho teorema casi nunca se cumplen.

Proposición 7.18. *Sean $x, y \in X$, $x \neq y$, $c \in \mathbb{R}$. Si*

$$\mathfrak{L}^{\leq c} := \left\{\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X) : \mathfrak{L}(\sigma) \leq c\right\} \neq \emptyset,$$

entonces $\mathfrak{L}^{\leq c}$ no es compacto.

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ tal que $\mathfrak{L}(\sigma) \leq c$. Las funciones $\rho_k : [0,1] \to [0,1]$ dadas por

$$\rho_k(t) := \begin{cases} kt & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{k}, 1\right], \end{cases}$$

son continuas, no decrecientes y suprayectivas. Por tanto, $\sigma_k := \sigma \circ \rho_k$ es una reparametrización de σ y, en consecuencia, $\mathfrak{L}(\sigma_k) = \mathfrak{L}(\sigma) \leq c$. Observa que

$$\begin{aligned} \sigma_k(t) &= \sigma(1) = y && \text{si } t \in (0,1] \text{ y } k \geq \tfrac{1}{t}, \\ \sigma_k(0) &= \sigma(0) = x && \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Argumentando por contradicción, supongamos que $\mathfrak{L}^{\leq c}$ es compacto. Entonces (σ_k) contiene una subsucesión tal que $\sigma_{k_j} \to \sigma^*$ en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$. En particular, esta subsucesión converge puntualmente, es decir,

$$\sigma^*(t) = \lim_{j\to\infty} \sigma_{k_j}(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0, \\ y & \text{si } t \in (0,1], \end{cases}$$

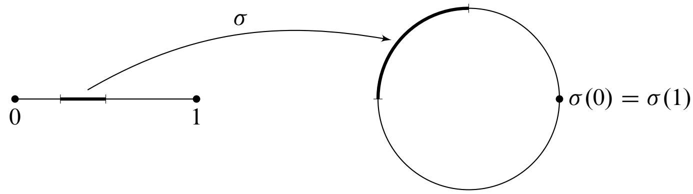
lo que contradice la continuidad de σ^*. Esto prueba que $\mathfrak{L}^{\leq c}$ no es compacto. □

En la proposición anterior la falta de compacidad se deriva de admitir muchas parametrizaciones de una trayectoria. Mostraremos a continuación que es posible seleccionar una parametrización específica para cada trayectoria.

Definición 7.19. *Decimos que una trayectoria $\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1], X)$ de longitud finita está* ***parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco*** *si*

$$\mathfrak{L}(\sigma|_{[0,t]}) = \mathfrak{L}(\sigma)t \qquad \forall t \in [0,1],$$

donde $\sigma|_{[0,t]} : [0,t] \to X$ denota la restricción de σ al intervalo $[0,t]$.



Probaremos a continuación que toda trayectoria de longitud finita se puede reparametrizar de este modo. Para ello requerimos el siguiente lema.

Lema 7.20. *Dada* $\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X)$ *de longitud finita, definimos* $\lambda\colon [0,1] \to [0,\mathfrak{L}(\sigma)]$ *como*

$$\lambda(t) := \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}).$$

Esta función es continua, no decreciente y suprayectiva.

Demostración. Sean $s,t \in [0,1]$ con $s < t$. Usando el Ejercicio 7.39 obtenemos

$$\lambda(t) = \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}) = \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,s]}) + \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[s,t]}) \geq \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,s]}) = \lambda(s),$$

lo que prueba que λ es no decreciente.

Para probar que λ es continua probaremos que es continua por la izquierda y por la derecha.

Probemos primero que es continua por la izquierda. Sean $t_k, t^* \in [0,1]$ tales que $t_k \leq t^*$ y $t_k \to t^*$. Consideremos las reparametrizaciones $\sigma_k, \sigma^* \in \mathcal{C}^0([0,1],X)$ de $\sigma\mid_{[0,t_k]}$ y $\sigma\mid_{[0,t^*]}$ respectivamente, dadas por

$$\sigma_k(t) := \sigma(t_k t), \qquad \sigma^*(t) := \sigma(t^* t).$$

El Lema 7.16 asegura que

$$\mathfrak{L}(\sigma_k) = \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t_k]}) = \lambda(t_k),$$
$$\mathfrak{L}(\sigma^*) = \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t^*]}) = \lambda(t^*).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como σ es uniformemente continua en $[0,1]$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(\sigma(t),\sigma(s)) < \varepsilon \qquad \text{si } |t-s| < \delta,$$

y como $t_k \to t^*$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t_k - t^*| < \delta \qquad \forall k \geq k_0.$$

De aquí que

$$d(\sigma_k(t), \sigma^*(t)) = d(\sigma(t_k t), \sigma(t^* t)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0,\ \forall t \in [0,1].$$

En consecuencia, $\sigma_k \to \sigma^*$ en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$. La Proposición 4.21 asegura que $\mathfrak{L}$ es semicontinua inferiormente así que, usando la Proposición 4.28 y que λ es no decreciente, obtenemos

$$\lambda(t^*) = \mathfrak{L}(\sigma^*) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathfrak{L}(\sigma_k) = \liminf_{k\to\infty} \lambda(t_k) \leq \limsup_{k\to\infty} \lambda(t_k) \leq \lambda(t^*).$$

Por tanto, $\lim_{k\to\infty} \lambda(t_k) = \lambda(t^*)$, lo que demuestra que λ es continua por la izquierda.

Probemos ahora que λ es continua por la derecha. Sean $t_k, t^* \in [0,1]$ tales que $t_k \geq t^*$ y $t_k \to t^*$. Consideremos ahora las reparametrizaciones $\tau_k, \tau^* \in \mathcal{C}^0([0,1], X)$ de $\sigma|_{[t_k,1]}$ y $\sigma|_{[t^*,1]}$ dadas por

$$\tau_k(t) := \sigma(t_k(1-t)+t), \qquad \tau^*(t) := \sigma(t^*(1-t)+t).$$

El Lema 7.16 y el Ejercicio 7.39 aseguran que

$$\mathfrak{L}(\tau_k) = \mathfrak{L}(\sigma|_{[t_k,1]}) = \mathfrak{L}(\sigma) - \lambda(t_k),$$
$$\mathfrak{L}(\tau^*) = \mathfrak{L}(\sigma|_{[t^*,1]}) = \mathfrak{L}(\sigma) - \lambda(t^*).$$

Argumentando como antes concluimos que $\lim_{k\to\infty} \lambda(t_k) = \lambda(t^*)$, lo cual demuestra que λ es continua por la derecha.

Finalmente, como $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(1) = \mathfrak{L}(\sigma)$, el teorema del valor intermedio implica que λ es suprayectiva. □

Denotamos por

$$\hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X) := \left\{\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X) : \mathfrak{L}(\sigma) < \infty, \quad \mathfrak{L}(\sigma|_{[0,t]}) = \mathfrak{L}(\sigma)t \ \ \forall t \in [0,1]\right\}$$

al espacio de las trayectorias de x a y parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco, con la métrica uniforme.

Lema 7.21. *Para cada $\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ de longitud finita existe $\hat{\sigma} \in \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X)$ tal que $\mathfrak{L}(\hat{\sigma}) = \mathfrak{L}(\sigma)$.*

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ de longitud finita y sea $\lambda\colon [0,1] \to [0, \mathfrak{L}(\sigma)]$ como en el Lema 7.20. Observa que, como λ es no decreciente, si $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$ entonces $\sigma(t) = \sigma(t_1)$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. Por tanto, la función $\widetilde{\sigma} : [0, \mathfrak{L}(\sigma)] \to X$, dada por

$$\widetilde{\sigma}(s) := \sigma(t) \qquad \text{con} \quad t \in \lambda^{-1}(s),$$

no depende de la elección de $t \in \lambda^{-1}(s)$. Veamos ahora que $\widetilde{\sigma}$ es continua. Sea Y un subconjunto cerrado de X. Como σ es continua, $\sigma^{-1}(Y)$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$. En consecuencia, $\sigma^{-1}(Y)$ es compacto y, como λ es continua, $\lambda(\sigma^{-1}(Y))$ es compacto. En particular, $\lambda(\sigma^{-1}(Y))$ es un subconjunto cerrado de $[0, \mathfrak{L}(\sigma)]$. Dado que λ es suprayectiva, es sencillo comprobar que

$$\lambda(\sigma^{-1}(Y)) = \widetilde{\sigma}^{-1}(Y).$$

Así pues, $\widetilde{\sigma}^{-1}(Y)$ es un subconjunto cerrado de $[0, \mathfrak{L}(\sigma)]$. Esto demuestra que $\widetilde{\sigma}$ es continua. Nota además que, como $\widetilde{\sigma} \circ \lambda = \sigma$, el Lema 7.16 asegura que

$$\mathfrak{L}(\widetilde{\sigma} \mid_{[0,s]}) = \mathfrak{L}(\sigma \mid_{[0,t]}) = \lambda(t) = s \qquad \forall s \in [0, \mathfrak{L}(\sigma)].$$

Ahora definimos $\hat{\sigma} : [0, 1] \to X$ como

$$\hat{\sigma}(t) := \widetilde{\sigma}(\mathfrak{L}(\sigma)t).$$

Claramente, $\hat{\sigma}$ es continua y satisface

$$\mathfrak{L}(\hat{\sigma} \mid_{[0,t]}) = \mathfrak{L}(\widetilde{\sigma} \mid_{[0,\mathfrak{L}(\sigma)t]}) = \mathfrak{L}(\sigma)t \qquad \forall t \in [0, 1].$$

En particular, $\mathfrak{L}(\hat{\sigma}) = \mathfrak{L}(\sigma) < \infty$. Por tanto, $\hat{\sigma} \in \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X)$. □

El siguiente resultado da una respuesta afirmativa al Problema 7.15 cuando X es compacto.

Teorema 7.22 (Existencia de trayectorias geodésicas)**.** *Sean X un espacio métrico compacto y $x, y \in X$. Si existe una trayectoria de x a y en X, entonces existe una trayectoria de longitud mínima de x a y en X.*

Demostración. Por hipótesis, $\mathcal{T}_{x,y}(X) \neq \emptyset$. Si todas las trayectorias en $\mathcal{T}_{x,y}(X)$ tienen longitud infinita, cualquiera de ellas es un mínimo de $\mathfrak{L}$.

Supongamos pues que existe $\tau \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ tal que $\mathfrak{L}(\tau) =: c < \infty$. Entonces, por el Lema 7.21,

$$\mathcal{H} := \left\{\sigma \in \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X) : \ \mathfrak{L}(\sigma) \leq c\right\} \neq \emptyset.$$

Veamos que este conjunto satisface las hipótesis del teorema de Arzelà-Ascoli. Como X es compacto, cualquier subconjunto de X es relativamente compacto en él. En particular,

$$\mathcal{H}(t) := \{\sigma(t) : \sigma \in \mathcal{H}\}$$

es relativamente compacto en X para todo $t \in [0,1]$. Probemos ahora que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. Sean $t_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Para toda $\sigma \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(\sigma(t), \sigma(t_0)) &\leq \left|\mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}) - \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t_0]})\right| \\ &= \mathfrak{L}(\sigma)\,|t-t_0| \leq c\,|t-t_0| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad |t-t_0| < \tfrac{\varepsilon}{c}. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. El teorema de Arzelà-Ascoli asegura entonces que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$.

Denotemos por $\mathcal{K} := \overline{\mathcal{H}}$ a la cerradura de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$ y consideremos la restricción $\mathfrak{L}\mid_{\mathcal{K}}$ de la función $\mathfrak{L}$ a $\mathcal{K}$. Como $\mathfrak{L}$ es s.c.i. (ver Proposición 4.21), se tiene que $\mathfrak{L}^{\leq c}$ es cerrado en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$ (ver Ejercicio 4.46). En consecuencia, $(\mathfrak{L}\mid_{\mathcal{K}})^{\leq c} = \mathfrak{L}^{\leq c} \cap \mathcal{K}$ es compacto. El Teorema 4.29 asegura entonces que existe $\sigma_0 \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathfrak{L}(\sigma_0) \leq \mathfrak{L}(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{K}.$$

Dado que $\hat{\sigma} \in \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ para todo $\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ con $\mathfrak{L}(\sigma) \leq c$, el Lema 7.21 asegura que

$$\mathfrak{L}(\sigma_0) \leq \mathfrak{L}(\hat{\sigma}) = \mathfrak{L}(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X),$$

es decir, σ_0 es una trayectoria de longitud mínima de x a y en X. □

Vale la pena observar que el conjunto $\mathcal{H}$ no es cerrado en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$ [Ejercicio 7.41].

7.5. Ejercicios

Ejercicio 7.23. *Sea A un subconjunto de X. Investiga si es falsa o verdadera cada una de las siguientes afirmaciones.*

(a) Si A es acotado, entonces A es totalmente acotado.

(b) Si A es totalmente acotado, entonces A es compacto.

(c) Si A es totalmente acotado, entonces A es relativamente compacto en X.

(d) Si A es relativamente compacto en X, entonces A es totalmente acotado.

(e) Si X es compacto, entonces A es relativamente compacto en X.

Ejercicio 7.24. *Prueba que un espacio métrico X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.*

Ejercicio 7.25. *(a) Prueba que, si $\phi\colon X \to Y$ es uniformemente continua y A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\phi(A)$ es un subconjunto totalmente acotado de Y.*

(b) ¿Es cierto que, si $\phi\colon X \to Y$ es continua y A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\phi(A)$ es un subconjunto totalmente acotado de Y? Demuestra tu afirmación.

Ejercicio 7.26. *Prueba que los subconjuntos totalmente acotados de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los conjuntos acotados.*

Ejercicio 7.27. *Sea X un espacio vectorial normado y sea $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en X. En cada uno de los siguientes casos investiga si la esfera unitaria es o no totalmente acotada.*

(a) $X = \ell_2$.

(b) $X = \ell_\infty$.

(c) $X = \mathcal{C}^0[0,1]$.

(d) $X = \mathcal{C}^0_1[0,1]$.

Ejercicio 7.28. *Prueba que, si X y Y son espacios métricos compactos, el producto $X \times Y$ con cualquiera de las métricas del* Ejercicio 2.53 *es compacto.*

Ejercicio 7.29. *El conjunto*

$$\mathcal{Q} := \left\{(x_k) \in \ell_2 : |x_k| \leq \tfrac{1}{2^{k-1}}\right\}$$

se llama el ***cubo de Hilbert.*** *Prueba que*

(a) $\mathcal{Q}$ es cerrado en ℓ_2.

(b) $\mathcal{Q}$ es totalmente acotado. (Sugerencia: Prueba que, para cada $k_0 \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{Q}^{k_0} := \{(x_k) \in \mathcal{Q} : x_k = 0 \ \forall k > k_0\}$ es compacto. Dado $x = (x_k) \in \mathcal{Q}$, define $x^{k_0} := (x_1, \ldots, x_{k_0}, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{Q}^{k_0}$. Prueba que $\left\|x - x^{k_0}\right\|_2 < \frac{1}{2^{k_0-1}}$.)

En consecuencia, el cubo de Hilbert es compacto.

Ejercicio 7.30. *Sea $f_k\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f_k(x) := \begin{cases} -1 & si\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{k}, \\ kx & si\ -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 1 & si\ \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Prueba que el conjunto $\mathcal{H} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ *no es equicontinuo en* 0.

Ejercicio 7.31. *Sean* Z *y* X *espacios métricos y* $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^0_b(Z, X)$. *Prueba que, si existen* $C, \alpha > 0$ *tales que*

$$d_X(f(x), f(y)) \leq C\,(d_Z(x, y))^\alpha \qquad \forall f \in \mathcal{H},$$

entonces $\mathcal{H}$ *es equicontinuo.*

Ejercicio 7.32. *Sean* Z *y* X *espacios métricos. Prueba que la cerradura en* $\mathcal{C}^0_b(Z, X)$ *de cualquier subconjunto equicontinuo es equicontinua.*

Ejercicio 7.33. *Sea* $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $f_k(t) := \operatorname{sen}\sqrt{t + 4\pi^2 k^2}$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *El conjunto* $\mathcal{H} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ *es equicontinuo.*

(b) *El conjunto* $\mathcal{H}(t)$ *es relativamente compacto en* $\mathbb{R}$ *para cada* $t \in [0, \infty)$. (Sugerencia: Prueba que la sucesión (f_k) converge puntualmente a 0 en $[0, \infty)$.)

(c) $\mathcal{H}$ *no es un subconjunto compacto de* $\mathcal{C}^0_b([0, \infty), \mathbb{R})$. (Sugerencia: Prueba que la sucesión (f_k) no converge uniformemente a 0 en $[0, \infty)$.)

Concluye que la compacidad de K *es necesaria en el teorema de Arzelà-Ascoli.*

Ejercicio 7.34. *Sean* $X := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (\frac{1}{2}, 0)\right\}$ *y* $\sigma_k \in \mathcal{C}^0([0, 1], X)$ *la función* $\sigma_k(t) := (t, \frac{1}{k}\operatorname{sen}\pi t)$. *Considera el conjunto* $\mathcal{H} := \{\sigma_k : k \in \mathbb{N}\}$.

(a) *¿Es* $\mathcal{H}$ *equicontinuo?*

(b) *¿Es* $\mathcal{H}$ *acotado en* $\mathcal{C}^0([0, 1], X)$*?*

(c) *¿Es* $\mathcal{H}$ *relativamente compacto en* $\mathcal{C}^0([0, 1], X)$*?*

Compara tus conclusiones con el Corolario 7.10.

Ejercicio 7.35. *Sean* K *un espacio métrico compacto,* X *un espacio métrico completo y* (f_k) *una sucesión en* $\mathcal{C}^0(K, X)$ *que converge puntualmente a una función* $f : K \to X$. *Prueba que, si* $\mathcal{H} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ *es equicontinuo, entonces* f *es continua y* $f_k \to f$ *en* $\mathcal{C}^0(K, X)$.

Ejercicio 7.36. *Prueba que, si* K *y* X *son espacios métricos compactos, entonces un subconjunto* $\mathcal{H}$ *de* $\mathcal{C}^0(K, X)$ *es relativamente compacto en* $\mathcal{C}^0(K, X)$ *si y sólo si es equicontinuo.*

Ejercicio 7.37. *Sea* $\mathcal{K}\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función continua. Prueba que el operador de Fredholm* $\mathfrak{F}\colon \mathcal{C}^0[a,b]\to\mathcal{C}^0[a,b]$ *dado por*

$$(\mathfrak{F}f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

es un operador compacto.

Ejercicio 7.38. *Sea* $\rho\colon [\alpha,\beta]\to[a,b]$ *una función continua, no decreciente y suprayectiva. Prueba que, para toda* $\sigma\in\mathcal{C}^0([a,b],X)$ *se cumple que*

$$\mathfrak{L}(\sigma\circ\rho)=\mathfrak{L}(\sigma).$$

Ejercicio 7.39. *Prueba que, si* $a<b<c$*, entonces para toda* $\sigma\in\mathcal{C}^0([a,c],X)$ *se cumple que*

$$\mathfrak{L}(\sigma)=\mathfrak{L}(\sigma\mid_{[a,b]})+\mathfrak{L}(\sigma\mid_{[b,c]}).$$

Ejercicio 7.40. *Sean* X *un espacio métrico y* $x\in X$*. Prueba que el espacio de trayectorias*

$$\mathcal{T}_x(X) := \left\{\sigma\in\mathcal{C}^0([0,1],X) : \sigma(0)=\sigma(1)=x\right\}$$

de x *a* x *en* X *es relativamente compacto en* $\mathcal{C}^0([0,1],X)$ *si y sólo si la única trayectoria de* x *a* x *en* X *es la trayectoria constante.*

Ejercicio 7.41. *(a) Para cada* $k\in\mathbb{N}$, $k>1$*, da un ejemplo de una trayectoria* $\tau_k\colon[0,\frac{1}{2}]\to\mathbb{R}^2$ *con las siguientes propiedades:*

- $\tau_k(0)=(0,0)$ *y* $\tau_k(\frac{1}{2})=(\frac{1}{k},0)$,
- $\mathfrak{L}(\tau_k)=\frac{k-1}{k}$,
- $\tau_k(t)\in\left[0,\frac{1}{k}\right]\times\left[0,\frac{1}{k}\right]$ *para todo* $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

(b) Define $\sigma_k\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ *como*

$$\sigma_k(t) := \begin{cases}\hat{\tau}_k(t) & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \left(\frac{2-2t}{k}+2t-1,0\right) & \text{si } t\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$$

donde $\hat{\tau}_k\colon[0,\frac{1}{2}]\to\mathbb{R}^2$ *es la parametrización proporcional a la longitud de arco de la trayectoria* τ_k *que construiste en el inciso (a). Prueba que*

(b.1) $\sigma_k\in\hat{\mathcal{T}}_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$,

(b.2) $\sigma_k \to \sigma$ *en* $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}^2)$*, donde*

$$\sigma(t) := \begin{cases} (0,0) & si\ t \in \left[0,\frac{1}{2}\right], \\ (2t-1,0) & si\ t \in \left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

(c) ¿Es $\hat{\mathcal{T}}_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ *un subespacio cerrado de* $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}^2)$*?*

(d) ¿Es $\hat{\mathcal{T}}_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ *con la métrica uniforme un espacio completo?*

7.6. Proyecto: Un espacio completo sin trayectorias de longitud mínima

7.6.1. Objetivo

El objetivo de este proyecto es mostrar que en un espacio métrico completo no necesariamente existen trayectorias de longitud mínima.

7.6.2. Procedimiento

Elige una sucesión creciente de números reales $a_k \in (0,1)$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ y define

$$\begin{aligned} A^+ &:= \left\{ (x_k) \in \ell_2 : (x_1 - \frac{3}{4})^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 x_k^2 < 1 \right\}, \\ A^- &:= \left\{ (x_k) \in \ell_2 : (x_1 + \frac{3}{4})^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 x_k^2 < 1 \right\}, \\ X &:= \ell_2 \smallsetminus \left(A^+ \cap A^- \right). \end{aligned}$$

1. Prueba que A^+ y A^- son subconjuntos abiertos de ℓ_2.

2. Prueba que X con la métrica inducida por la de ℓ_2 es un espacio completo y que $x^+ := (\frac{3}{4}, 0, 0, \dots)$, $x^- := (-\frac{3}{4}, 0, 0, \dots) \in X$.

3. Prueba que cualquier trayectoria de x^+ a x^- en ℓ_2 intersecta al hiperplano

$$\mathfrak{h} := \{(x_k) \in \ell_2 : x_1 = 0\}.$$

(Sugerencia: Usa el teorema del valor intermedio.)

4. Prueba que, si $x \in X \cap \mathfrak{h}$, entonces $\|x\|_{\ell_2} > \frac{\sqrt{7}}{4}$.

5. Prueba que la longitud de cualquier trayectoria de x^+ a x^- en X es estrictamente mayor que 2.

6. Para $m > 1$, define $\sigma_m\colon [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] \to \ell_2$ como

$$(\sigma_m(t))_k := \begin{cases} t & \text{si } \ k = 1, \\ \frac{\sqrt{7}}{3a_m}\left(t + \frac{3}{4}\right) & \text{si } \ k = m \geq 2 \ \text{ y } \ t \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right], \\ \frac{\sqrt{7}}{3a_m}\left(-t + \frac{3}{4}\right) & \text{si } \ k = m \geq 2 \ \text{ y } \ t \in \left[0, \frac{3}{4}\right], \\ 0 & \text{si } \ k \neq 1, m. \end{cases}$$

   a) Prueba que $\sigma_m(t) \in X$ para todo $t \in [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$.

   b) Calcula $\mathfrak{L}(\sigma_k)$ y prueba que $\lim_{m\to\infty} \mathfrak{L}(\sigma_k) = 2$.

7. Prueba que no existe una trayectoria de longitud mínima de x^+ a x^- en X.

8

Teoremas de aproximación

Cuando hacemos cálculos con números reales usamos siempre una aproximación decimal de éstos, es decir, usamos algún número racional suficientemente cercano al número real que nos interesa. Por motivos análogos, es conveniente aproximar funciones por otras más sencillas.

En este capítulo probaremos que toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por una función polinomial. Este resultado se conoce como el teorema de aproximación de Weierstrass y tiene relevancia desde el punto de vista teórico y práctico, ya que los polinomios son funciones sencillas y fáciles de calcular. De hecho, exhibiremos una sucesión explícita de polinomios que converge uniformemente a f en $[a, b]$: los *polinomios de Bernstein*.

La versión original del teorema de aproximación fue formulada por Weierstrass en 1885. En 1937 Stone generalizó considerablemente este resultado, y simplificó su demostración. El resultado de Stone se conoce como el teorema de Stone-Weierstrass, y extiende el resultado original de Weierstrass en dos sentidos: permite reemplazar al intervalo $[a, b]$ por cualquier espacio métrico compacto K, y permite reemplazar a los polinomios por subconjuntos más generales del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$. En este capítulo expondremos también este resultado.

8.1. El teorema de aproximación de Weierstrass

El objetivo de esta sección es demostrar que toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios, es decir, por funciones de la forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Este resultado se conoce como el teorema de aproximación de Weierstrass. Más aún, exhibiremos una sucesión explícita de polinomios que converge uniformemente a la función f en $[a,b]$.

Para $0 \leq k \leq n$ consideremos los polinomios

$$\gamma_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

es el coeficiente binomial. De la conocida fórmula binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

se sigue que

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_{n,k}(t) = 1. \tag{8.1}$$

Multiplicando por t la igualdad (8.1) para $n-1$ en vez de n, obtenemos

$$\begin{aligned} t &= t \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-1,j}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^{j+1}(1-t)^{n-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \tfrac{j+1}{n} \binom{n}{j+1} t^{j+1}(1-t)^{n-(j+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n} \gamma_{n,k}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{n} \gamma_{n,k}(t). \end{aligned}$$

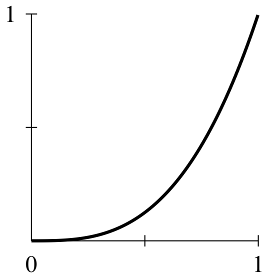
En consecuencia,

$$nt = \sum_{k=0}^{n} k\gamma_{n,k}(t). \tag{8.2}$$

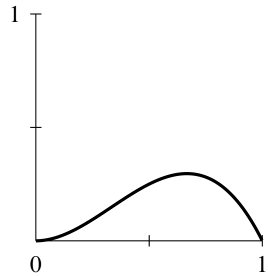
De manera análoga, multiplicando por t^2 la igualdad (8.1) para $n-2$ en vez de n, es sencillo probar que

$$(n^2-n)t^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\gamma_{n,k}(t) \tag{8.3}$$

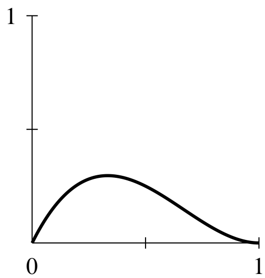
Proponemos la demostración de esta fórmula como ejercicio [Ejercicio 8.12].



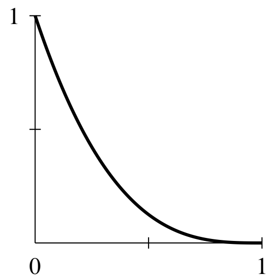
$\gamma_{3,3}(t) = t^3$



$\gamma_{3,2}(t) = 2t^2(1-t)$



$\gamma_{3,1}(t) = 2t(1-t)^2$



$\gamma_{3,0}(t) = (1-t)^3$

Definición 8.1. *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función continua. El* n***-ésimo polinomio de Bernstein***[1] ***de*** f *es el polinomio*

$$\beta_n(t) = \beta_{f,n}(t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\gamma_{n,k}(t).$$

[1] Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) nació en Odessa, entonces parte del Imperio Ruso. Estudió en Göttingen bajo la supervisión de David Hilbert. En su tesis doctoral, presentada en 1904 en la Sorbonne de Paris, resolvió el 19º problema de Hilbert sobre la solución analítica de ecuaciones diferenciales elípticas.

Sergei Bernstein

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8.2 (Bernstein)**.** *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función continua. La sucesión de polinomios de Bernstein* $(\beta_{f,n})$ *converge uniformemente a* f *en* $[0,1]$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s) - f(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si } |s-t| < \delta. \tag{8.4}$$

Fijemos $t \in [0,1]$. Multiplicando la igualdad (8.1) por $f(t)$ obtenemos que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f(t)\gamma_{n,k}(t) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$\left|f(t) - \beta_{f,n}(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)\gamma_{n,k}(t)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t). \tag{8.5}$$

Probaremos que el lado derecho de esta desigualdad es menor que ε si n satisface

$$n \ge \text{máx}\left\{\frac{1}{\delta^4}, \frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}\right\}. \tag{8.6}$$

Para ello consideremos los conjuntos

$$I_1 := \left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 0 \le k \le n,\ \left|\tfrac{k}{n} - t\right| < \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right\},$$
$$I_2 := \left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 0 \le k \le n,\ k \notin I_1\right\},$$

y tomemos una n que cumpla (8.6). Entonces $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \leq \delta$, y se sigue de (8.4) y de (8.1) que

$$\sum_{k\in I_1} \left| f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \gamma_{n,k}(t) < \sum_{k\in I_1} \frac{\varepsilon}{2}\gamma_{n,k}(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\gamma_{n,k}(t) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.7}$$

Por otra parte, si $k \in I_2$ entonces $\left(t - \frac{k}{n}\right)^{-2} \leq \sqrt{n}$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in I_2} \left| f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \gamma_{n,k}(t) &\leq \sum_{k\in I_2} 2\,\|f\|_\infty\,\gamma_{n,k}(t) \\
&= 2\,\|f\|_\infty \sum_{k\in I_2} \frac{\left(t - \frac{k}{n}\right)^2}{\left(t - \frac{k}{n}\right)^2}\gamma_{n,k}(t) \\
&\leq 2\,\|f\|_\infty \sqrt{n} \sum_{k\in I_2} \left(t - \tfrac{k}{n}\right)^2 \gamma_{n,k}(t). \qquad (8.8)
\end{aligned}$$

Probaremos ahora que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(t - \tfrac{k}{n}\right)^2 \gamma_{n,k}(t) \leq \frac{1}{4n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8.9}$$

Multiplicando la igualdad (8.1) por t^2, la igualdad (8.2) por $-\frac{2}{n}t$, y la suma de las igualdades (8.2) y (8.3) por $\frac{1}{n^2}$ obtenemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
t^2 &= \sum_{k=0}^{n} t^2\gamma_{n,k}(t), \\
-2t^2 &= \sum_{k=0}^{n} -2\tfrac{k}{n}t\gamma_{n,k}(t), \\
\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)t^2 + \tfrac{1}{n}t &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{k^2}{n^2}\gamma_{n,k}(t).
\end{aligned}$$

Sumando estas tres igualdades obtenemos

$$\frac{1}{n}(t - t^2) = \sum_{k=0}^{n} \left(t - \tfrac{k}{n}\right)^2 \gamma_{n,k}(t). \tag{8.10}$$

Observa que $\text{máx}_{t\in[0,1]}(t - t^2) = \frac{1}{4}$. En consecuencia, (8.10) implica (8.9).

Si n satisface (8.6) entonces $\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$. Por tanto, (8.8) y (8.9) implican que

$$\sum_{k\in I_2} \left| f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.11}$$

De las desigualdades (8.5), (8.7) y (8.11) obtenemos que, si n satisface (8.6), entonces

$$\begin{aligned}\left|f(t) - \beta_{f,n}(t)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) \\ &= \sum_{k\in I_1} \left| f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) + \sum_{k\in I_2} \left| f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) < \varepsilon\end{aligned}$$

para toda $t \in [0,1]$. Es decir,

$$\left\|f - \beta_{f,n}\right\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{si } n \geq \text{máx}\left\{\frac{1}{\delta^4}, \frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}\right\}. \tag{8.12}$$

Esto concluye la demostración. □

Observa que la fórmula (8.12) nos da una estimación del error, en términos de f, en cada paso de la aproximación.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior.

Teorema 8.3 (de aproximación de Weierstrass)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) que converge uniformemente a f en $[a,b]$.*

Demostración. Este resultado se obtiene del anterior mediante un cambio de variable. Específicamente, sea $\rho\colon [0,1] \to [a,b]$ la función dada por $\rho(t) := (1-t)a + tb$. Aplicando el Teorema 8.2 a la función $g := f \circ \rho$ obtenemos que

$$\beta_{g,n} \to g \qquad \text{en } \mathcal{C}^0[0,1].$$

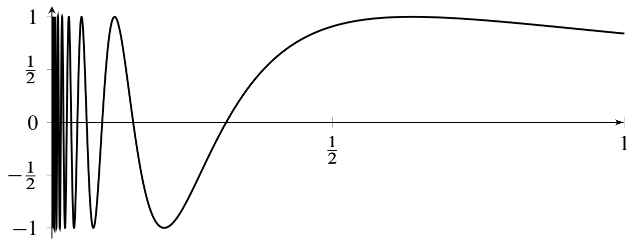
La función $p_n := \beta_{g,n} \circ \rho^{-1}$ es un polinomio y cumple que

$$\|p_n - f\|_\infty = \max_{s\in[a,b]} |p_n(s) - f(s)| = \max_{t\in[0,1]} \left|\beta_{g,n}(t) - g(t)\right| = \left\|\beta_{g,n} - g\right\|_\infty .$$

En consecuencia, $p_n \to f$ en $\mathcal{C}^0[a,b]$. □

La compacidad del dominio de f jugó un papel importante en la demostración del Teorema 8.2 para asegurar la continuidad uniforme de f. El siguiente ejemplo muestra que el Teorema 8.3 no es válido, en general, si el dominio no es compacto.

Ejemplo 8.4. *Sea* $f(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{t}$, $t \in (0, 1]$. *Ninguna sucesión de polinomios converge uniformemente a* f *en* $(0, 1]$.



Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que existe una sucesión de polinomios (p_k) que converge uniformemente a f en $(0, 1]$. Entonces (p_k) converge a f en $\mathcal{B}((0, 1], \mathbb{R})$ (ver Proposición 5.15) y, por tanto, es de Cauchy en $\mathcal{B}((0, 1], \mathbb{R})$. Es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|p_k(t) - p_j(t)\right| < \varepsilon \qquad \forall t \in (0, 1]\,,\ \forall k, j \geq k_0.$$

Como la función $t \mapsto \left|p_k(t) - p_j(t)\right|$ es continua en todo $\mathbb{R}$, la desigualdad anterior implica que

$$\left|p_k(0) - p_j(0)\right| \leq \varepsilon \qquad \forall k, j \geq k_0.$$

Esto demuestra que (p_k) es de Cauchy en $\mathcal{C}^0[0, 1]$. Por tanto, como $\mathcal{C}^0[0, 1]$ es completo (ver Teorema 5.21), existe $g \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ tal que

$$p_k \to g \qquad \text{en } \mathcal{C}^0[0, 1].$$

En particular, se cumple que

$$g(t) = \lim_{k\to\infty} p_k(t) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{t} \qquad \forall t \in (0, 1].$$

Como g es continua en $[0, 1]$, se tiene entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \tfrac{n\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} g\left(\tfrac{2}{n\pi}\right) = g(0),$$

lo cual es una contradicción, ya que la sucesión $\left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right)$ no converge. $\square$

8.2. El teorema de Stone-Weierstrass

Sea X un espacio métrico.

Definición 8.5. *Un subconjunto A de X es* **denso en** *X si $\overline{A} = X$, es decir, si para todo $x \in X$ existe una sucesión (a_k) en A tal que $a_k \to x$ en X.*

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

Denotemos por $\mathbb{R}[t]$ al conjunto de todos los polinomios

$$p\,(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \;\; \alpha_i \in \mathbb{R},$$

con coeficientes reales. El Teorema 8.3 afirma que el conjunto de funciones polinomiales en $[a,b]$,

$$\mathcal{P}\,[a,b] := \left\{ p\,|_{[a.b]} : p \in \mathbb{R}[t] \right\},$$

es denso en $\mathcal{C}^0[a,b]$. En esta sección probaremos una generalización de este resultado, conocido como el teorema de Stone[2]-Weierstrass.

Marshall Stone

Supondremos de aquí en adelante que K es un espacio métrico compacto y, por simplicidad, denotaremos por

$$\mathcal{C}^0(K) := \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$$

al espacio de funciones continuas $f : K \to \mathbb{R}$ con la norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|\,.$$

[2] Marshall Harvey Stone (1903-1989) nació en Nueva York. Estudió en la Universidad de Harvard, donde obtuvo el doctorado bajo la supervisión de George David Birkhoff. Fue profesor en esa universidad.

Observa que $\mathcal{C}^0(K)$ no sólo es un espacio vectorial sino que cuenta además con un producto, definido como sigue:

$$fg\colon K \to \mathbb{R}, \qquad (fg)(x) := f(x)g(x).$$

Este producto le da al espacio vectorial $\mathcal{C}^0(K)$ la estructura de una $\mathbb{R}$-álgebra con unidad [Ejercicio 8.26]. La unidad es la función constante igual a 1, a la que denotamos por 1.

El siguiente resultado da condiciones suficientes para que un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^0(K)$ sea denso en $\mathcal{C}^0(K)$.

Teorema 8.6 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea K un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{C}^0(K)$ con las siguientes propiedades:*

(a) $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{A}$ *para cualesquiera* $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) $\varphi\psi \in \mathcal{A}$ *para cualesquiera* $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$.

(c) $1 \in \mathcal{A}$.

(d) Dados $x_1 \neq x_2$ en K, existe $\varphi \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{C}^0(K)$, es decir, dada una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ existe una sucesión (φ_k) de funciones en $\mathcal{A}$ que converge uniformemente a f en K.

En términos algebraicos, las primeras tres condiciones *(a), (b)* y *(c)* se expresan diciendo que $\mathcal{A}$ *es una $\mathbb{R}$-subálgebra con unidad de la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones continuas* $\mathcal{C}^0(K)$. La propiedad *(d)* suele expresarse diciendo que $\mathcal{A}$ *separa puntos*.

Para demostrar el teorema de Stone-Weierstrass usaremos los siguientes cuatro lemas.

Lema 8.7. *Dados $x_1 \neq x_2$ en K y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existe $\psi \in \mathcal{A}$ tal que $\psi(x_1) = c_1$ y $\psi(x_2) = c_2$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Como el determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi(x_1) & 1 \\ \varphi(x_2) & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda\varphi(x_1) + \mu = c_1 \tag{8.13}$$
$$\lambda\varphi(x_2) + \mu = c_2 \tag{8.14}$$

De las propiedades *(a)* y *(c)* se sigue que la función $\psi := \lambda\varphi + \mu 1 \in \mathcal{A}$. Las igualdades (8.13) y (8.14) afirman que $\psi(x_1) = c_1$ y $\psi(x_2) = c_2$. $\square$

Lema 8.8. *La cerradura $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}^0(K)$ también tiene las propiedades (a), (b) y (c).*

Demostración. Es sencillo comprobar que $\overline{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad *(a)* [Ejercicio 8.27]. La propiedad *(c)* es inmediata. Probemos *(b)*. Dadas $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{A}}$ existen $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{A}$ tales que $\varphi_k \to \varphi$ y $\psi_k \to \psi$ en $\mathcal{C}^0(K)$ (ver Proposición 3.32). Como toda sucesión convergente está acotada, existe $C > 0$ tal que $\|\psi_k\|_\infty \leq C$ para toda k. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\|\varphi\psi - \varphi_k\psi_k\|_\infty &\leq \|\varphi(\psi - \psi_k)\|_\infty + \|(\varphi - \varphi_k)\psi_k\|_\infty \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \|(\psi - \psi_k)\|_\infty + \|(\varphi - \varphi_k)\|_\infty \|\psi_k\|_\infty \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \|(\psi - \psi_k)\|_\infty + C \|(\varphi - \varphi_k)\|_\infty .\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos que $\varphi_k\psi_k \to \varphi\psi$. Dado que $\varphi_k\psi_k \in \mathcal{A}$, concluimos que $\varphi\psi \in \overline{\mathcal{A}}$ (ver Proposición 3.32). □

Lema 8.9. *Si $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$, entonces $|\varphi| \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Como φ es continua y K es compacto, se tiene que $\varphi(K)$ es acotado en $\mathbb{R}$ (ver Corolario 4.11). Por tanto, $\varphi(K)$ está contenido en algún intervalo $[a, b]$. Por el Teorema 8.3 existe una sucesión de polinomios p_k que converge uniformemente a la función valor absoluto $|\cdot|$ en el intervalo $[a, b]$, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_k(t) - |t|| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0 \;\; \forall t \in [a, b].$$

Esta desigualdad se cumple, en particular, para $t = \varphi(x)$ con $x \in K$. Por tanto,

$$\|p_k \circ \varphi - |\varphi|\|_\infty = \max_{x \in K} |p_k(\varphi(x)) - |\varphi(x)|| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0,$$

es decir, $p_k \circ \varphi \to |\varphi|$ en $\mathcal{C}^0(K)$.

Por otra parte, el Lema 8.8 asegura que, para cualquier polinomio $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m$, se cumple que

$$p \circ \varphi = \alpha_0 + \alpha_1\varphi + \cdots + \alpha_m\varphi^m \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Por tanto, $|\varphi| \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Dadas dos funciones $f, g\colon K \to \mathbb{R}$ denotamos por $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} : K \to \mathbb{R}$ a las funciones

$$(\max\{f, g\})(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \qquad (\min\{f, g\})(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Lema 8.10. *Si* $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{A}}$*. entonces* $\text{máx}\{\varphi, \psi\}, \text{mín}\{\varphi, \psi\} \in \overline{\mathcal{A}}$.

Demostración. Basta observar que

$$\text{máx}\{\varphi, \psi\} = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|) \tag{8.15}$$

$$\text{mín}\{\varphi, \psi\} = \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|) \tag{8.16}$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ satisface la propiedad *(a)*, el lema anterior implica que $\text{máx}\{\varphi, \psi\}, \text{mín}\{\varphi, \psi\} \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Demostración del Teorema 8.6. Sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\varepsilon > 0$. El Lema 8.7 asegura que, para cada par de puntos $x, y \in K$, podemos escoger $\varphi_{x,y} \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi_{x,y}(x) = f(x)$ y $\varphi_{x,y}(y) = f(y)$.

Fijemos $x \in K$. Como $\varphi_{x,y} - f$ es continua y $\varphi_{x,y}(y) - f(y) = 0$, existe $\delta_y > 0$ tal que

$$\left|\varphi_{x,y}(z) - f(z)\right| < \varepsilon \qquad \forall z \in B_K(y, \delta_y) \tag{8.17}$$

y, como K es compacto, existen $y_1, \ldots, y_m \in K$ tales que

$$K \subset B_K(y_1, \delta_{y_1}) \cup \cdots \cup B_K(y_m, \delta_{y_m}).$$

Sea $\varphi_x := \text{máx}\left\{\varphi_{x,y_1}, \ldots, \varphi_{x,y_m}\right\}$. El Lema 8.10 asegura que $\varphi_x \in \overline{\mathcal{A}}$. Puesto que cada $z \in K$ pertenece a alguna $B(y_i, \delta_{y_i})$, la desigualdad (8.17) implica que

$$\varphi_x(z) - f(z) > -\varepsilon \qquad \forall z \in K. \tag{8.18}$$

Por otra parte, dado que $\varphi_{x,y}(x) = f(x)$ para todo $y \in K$, se tiene que $\varphi_x(x) = f(x)$ y, como $\varphi_x - f$ es continua, existe $\gamma_x > 0$ tal que

$$|\varphi_x(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \forall z \in B_K(x, \gamma_x). \tag{8.19}$$

De la compacidad de K se sigue que existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset B_K(x_1, \gamma_{x_1}) \cup \cdots \cup B_K(x_n, \gamma_{x_n}).$$

Sea $\varphi := \text{mín}\left\{\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n}\right\}$. El Lema 8.10 asegura que $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$. Puesto que cada $z \in K$ pertenece a alguna $B(x_i, \gamma_{x_i})$, usando la desigualdad (8.19) obtenemos que

$$\varphi(z) - f(z) < \varepsilon \qquad \forall z \in K. \tag{8.20}$$

Y, como la desigualdad (8.18) vale para toda $x \in K$, se tiene además que

$$\varphi(z) - f(z) > -\varepsilon \qquad \forall z \in K. \tag{8.21}$$

Las desigualdades (8.20) y (8.21) implican que $\|\varphi - f\|_\infty < \varepsilon$. Por consiguiente, dado que $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$, concluimos que $f \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Denotemos por $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ al conjunto de polinomios

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{k_{i,1}} \cdots x_n^{k_{i,n}}, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \quad k_{i,j} \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

en n variables con coeficientes reales. Una consecuencia interesante del teorema de Stone-Weierstrass es la siguiente.

Corolario 8.11. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, dada una función continua $f : K \to \mathbb{R}$, existe una sucesión de polinomios (p_k) en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ que converge uniformemente a f en K.*

Demostración. Obviamente el conjunto

$$\mathcal{P}(K) := \{p\,|_K : p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]\}$$

satisface las condiciones *(a), (b)* y *(c)* del Teorema 8.6.

Consideremos los polinomios $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Si $\xi, \eta \in K$ son puntos distintos, entonces al menos una de sus coordenadas es distinta, digamos que $\xi_i \neq \eta_i$. Entonces, $\pi_i(\xi) = \xi_i \neq \eta_i = \pi_i(\eta)$. Esto prueba que $\mathcal{P}(K)$ satisface la condición *(d)*.

El Teorema 8.6 asegura entonces que existe una sucesión de polinomios (p_k) en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ que converge uniformemente a f en K. □

8.3. Ejercicios

Ejercicio 8.12. *Demuestra la igualdad* (8.3).

Ejercicio 8.13. *Sea X un espacio métrico. Prueba que, si $Z \subset Y \subset X$ y Z es denso en X, entonces Y es denso en X.*

Ejercicio 8.14. *Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es continua y suprayectiva y A es denso en X, entonces $\phi(A)$ es denso en Y.*

Ejercicio 8.15. *Prueba que el conjunto*

$$\mathbb{Q}^n := \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n : q_k \in \mathbb{Q} \ \ \forall k = 1, \dots, n\}$$

es denso en $\mathbb{R}^n$*.*

Ejercicio 8.16. *Sea* $\mathbb{Q}^\infty$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(q_1, \dots, q_k, 0, 0, \dots)$ *de números racionales tales que sólo un número finito de sus términos es distinto de cero.*

(a) Prueba que $\mathbb{Q}^\infty$ *es denso en* ℓ_p *para todo* $p \in [1, \infty)$*.*

(b) ¿Es $\mathbb{Q}^\infty$ *denso en* ℓ_∞*?*

Ejercicio 8.17. *Sea* $\mathbb{Q}[t]$ *el conjunto de todos los polinomios*

$$q(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n, \ \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ q_i \in \mathbb{Q},$$

con coeficientes racionales. Prueba que

$$\mathcal{P}_\mathbb{Q}[a, b] := \left\{ q\,|_{[a,b]} : q \in \mathbb{Q}[t] \right\}$$

es denso en $\mathcal{C}^0[a, b]$.

Ejercicio 8.18. *Se dice que un conjunto* A *es* ***a lo más numerable*** *si existe una función inyectiva* $i : A \to \mathbb{N}$*. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) El conjunto $\mathbb{Q}$ *de los números racionales es a lo más numerable.*

(b) El conjunto de todas las sucesiones (b_k) *tales que* $b_k \in \{0, 1\}$ *no es a lo más numerable.*

(c) Prueba que $\mathbb{R}$ *no es a lo más numerable.* (Sugerencia: Usa el hecho de que todo número real tiene una representación binaria.)

Ejercicio 8.19. *Un espacio métrico* X *se llama* ***separable*** *si contiene un subconjunto a lo más numerable que es denso en* X*. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Ningún subconjunto propio de un espacio métrico discreto X_{disc} *es denso en* X_{disc}*.*

(b) Un espacio métrico discreto X_{disc} *es separable si y sólo si* X_{disc} *es a lo más numerable.*

Ejercicio 8.20. *Investiga si los siguientes espacios métricos son o no separables.*

(a) $\mathbb{R}^n_p$ *con* $p \in [1, \infty]$.

(b) ℓ_p *con* $p \in [1, \infty]$.

(c) $\mathcal{C}^0_p[a, b]$ *con* $p \in [1, \infty]$.

(d) $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ejercicio 8.21. *Prueba que todo espacio métrico compacto X es separable.* (Sugerencia: Para cada $k \in \mathbb{N}$, toma un conjunto finito de bolas de radio $\frac{1}{k}$ cuya unión es X. Considera el conjunto de centros de todas esas bolas.)

Ejercicio 8.22. *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ al conjunto de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales de todos los órdenes en Ω y dichas derivadas tienen una extensión continua a la cerradura de Ω. Prueba que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.* (Sugerencia: Usa el Corolario 8.11 y el Ejercicio 8.13.)

Ejercicio 8.23. *Sea $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ tal que*

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prueba que

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0$$

y concluye que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Ejercicio 8.24. *Sea $\mathbb{S}^1 = \left\{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$. Prueba que cualquier función continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es el límite uniforme de funciones de la forma*

$$\varphi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \operatorname{sen}\theta + \cdots + a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejercicio 8.25. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Prueba que cualquier función continua $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es el límite uniforme de funciones de la forma*

$$\varphi(x, y) = f_1(x)g_1(y) + \cdots + f_n(x)g_n(y),$$

con $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^0(X)$, $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{C}^0(Y)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8.26. *Investiga lo que es una $\mathbb{R}$-álgebra con unidad y prueba que, para cualquier espacio métrico X, el espacio $\mathcal{C}^0(X)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra con unidad.*

Ejercicio 8.27. *Sea $\mathcal{A}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0(X)$. Prueba que $\overline{\mathcal{A}}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0(X)$.* (Sugerencia: Usa el Ejercicio 3.50.)

Parte II

Diferenciabilidad

9

Diferenciabilidad

El cálculo diferencial estudia las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que se pueden aproximar localmente por una función lineal. La derivada de f en un punto x_0 de $\mathbb{R}^n$ es la función lineal $f'(x_0) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que mejor aproxima a f en dicho punto, en el sentido de que la distancia entre $f(x_0 + x)$ y $f(x_0) + f'(x_0)x$ tiende a cero más rápidamente que x. Dicho de modo preciso,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|f(x_0 + x) - (f(x_0) + f'(x_0)x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Las funciones que admiten tal aproximación se llaman diferenciables.

La noción de diferenciabilidad se extiende de manera natural a funciones $f : V \to W$ entre espacios de Banach con la siguiente precaución: además de requerir que $f'(x_0) \colon V \to W$ sea una función lineal es necesario pedir que sea continua. Recuerda que las funciones lineales entre espacios de Banach de dimensión infinita no son necesariamente continuas. La continuidad de $f'(x_0)$ juega un papel esencial para la validez de muchas propiedades importantes, como la continuidad de las funciones diferenciables o la regla de la cadena. El papel de la continuidad queda oculto cuando consideramos funciones entre espacios euclidianos: la usamos sin darnos cuenta, pues toda función lineal entre espacios de dimensión finita es automáticamente continua.

En este capítulo introduciremos el concepto de derivada para funciones entre espacios de Banach y estudiaremos sus propiedades fundamentales. Los resultados que presentaremos son generalizaciones inmediatas de los resultados de cálculo que ya conocemos. Sin embargo, presentarlos en esta generalidad tiene varias ventajas. Por una parte, hay aplicaciones importantes que requieren este nivel de generalidad. Por ejemplo, las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales parciales, que modelan problemas importantes de la física, la ingeniería, la biología y otras disciplinas, resultan ser puntos críticos de una función diferenciable definida en un espacio de funciones[1].

Por otra parte, este nivel de generalidad permite definir muchos conceptos de manera sencilla. Un ejemplo de ello son las derivadas de orden superior, cada una de las cuales no es sino la derivada de la precedente. Además, la demostración en esta generalidad de los resultados que ya conocemos ayuda a comprenderlos mejor y a mayor profundidad. Y no perdemos nada, ya que las demostraciones no son ni más largas ni más complicadas que las correspondientes para espacios euclidianos.

9.1. El espacio de funciones lineales y continuas

Empezaremos estudiando al espacio de las funciones lineales y continuas entre dos espacios de Banach $V = (V, \|\cdot\|_V)$ y $W = (W, \|\cdot\|_W)$.

La continuidad de una función lineal entre ellos se caracteriza como sigue.

Proposición 9.1. *Si $T : V \to W$ es una función lineal, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) *T es continua*

(b) *T es continua en* 0.

(c) *Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ para todo $v \in V$.*

(d) *T es Lipschitz continua.*

Demostración. Las implicaciones *(a)⇒(b)* y *(d)⇒(a)* son evidentes.

(b)⇒(c): Si T es continua en 0 existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tv\|_W < 1 \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta.$$

En consecuencia,

$$\|Tv\|_W = \frac{2}{\delta}\,\|v\|_V \left\| T\left(\frac{\delta}{2}\frac{v}{\|v\|_V}\right)\right\|_W < \frac{2}{\delta}\,\|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

(c)⇒(d): Si existe $c > 0$ tal que $\|Tv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ para todo $v \in V$, entonces

$$\|Tv_1 - Tv_2\|_W = \|T(v_1 - v_2)\|_W \leq c\,\|v_1 - v_2\|_V \qquad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Esto prueba que T es Lipschitz continua. □

[1] Consulta, por ejemplo, [Cos07].

Definición 9.2. *Denotamos por*

$$\mathcal{L}(V,W) := \{T : V \to W : T \text{ es lineal y continua}\}$$

y definimos

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \qquad \forall T \in \mathcal{L}(V,W). \tag{9.1}$$

Nota que $\mathcal{L}(V,W)$ es un espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(T+S)v := Tv + Sv, \qquad (\lambda T)v := \lambda Tv,$$

donde $T, S \in \mathcal{L}(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$. La Proposición 9.1 asegura que $\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty$. Es sencillo comprobar que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ es una norma en $\mathcal{L}(V,W)$ [Ejercicio 9.35].

Observa que

$$\|Tv\|_W \leq \|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V \qquad \forall v \in V, \ \ \forall T \in \mathcal{L}(V,W). \tag{9.2}$$

Usaremos con frecuencia esta desigualdad.

Proposición 9.3. $\mathcal{L}(V,W)$ *con la norma definida en* (9.1) *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sean (T_k) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(V,W)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|T_k - T_j\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \varepsilon \qquad \forall j,k \geq k_0.$$

Por tanto,

$$\left\|T_k v - T_j v\right\|_W \leq \varepsilon \left\|v\right\|_V \qquad \forall j,k \geq k_0, \ \ \forall v \in V. \tag{9.3}$$

Esto implica que, para cada $v \in V$, la sucesión $(T_k v)$ es de Cauchy en W y, como W es un espacio de Banach, existe $Tv \in W$ tal que

$$T_k v \to Tv \qquad \text{en } W.$$

Probaremos primero que $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

Si $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} T(\lambda v + \mu w) &= \lim_{k\to\infty} T_k(\lambda v + \mu w) = \lim_{k\to\infty} (\lambda T_k v + \mu T_k w) \\ &= \lambda \lim_{k\to\infty} T_k v + \mu \lim_{k\to\infty} T_k w = \lambda T v + \mu T w. \end{aligned}$$

Esto prueba que T es lineal. Por otra parte, haciendo tender $k \to \infty$ en la desigualdad (9.3) obtenemos

$$\left\|Tv - T_j v\right\|_W \leq \varepsilon \left\|v\right\|_V \qquad \forall j \geq k_0, \quad \forall v \in V. \tag{9.4}$$

De la Proposición 9.1 se sigue que $T - T_{k_0}$ es continua. Por tanto, $T = (T - T_{k_0}) + T_{k_0}$ es continua.

Finalmente, la desigualdad (9.4) implica que

$$\frac{\left\|Tv - T_j v\right\|_W}{\left\|v\right\|_V} \leq \varepsilon \qquad \forall j \geq k_0, \quad \forall v \in V,\ v \neq 0.$$

Por tanto,

$$\left\|T - T_j\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq \varepsilon \qquad \forall j \geq k_0.$$

Esto prueba que $T_j \to T$ en $\mathcal{L}(V, W)$. En consecuencia, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio de Banach. $\square$

Recuerda que, si $\dim V < \infty$, cualquier función lineal $T : V \to W$ es continua (ver Ejercicio 4.42), de modo que $\mathcal{L}(V, W)$ es simplemente el espacio de funciones lineales de V a W. En particular, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$ y cualquier isomorfismo resulta ser un homeomorfismo para cualquier norma [Ejercicio 9.36].

9.2. Diferenciabilidad

Para hablar de diferenciabilidad requerimos la noción de límite.

Definición 9.4. *Sean X, Y espacios métricos, A un subconjunto de X, $f : A \to Y$ una función, $x_0 \in \overline{A}$ y $y_0 \in Y$. Decimos que*

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon \qquad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Nota que f no necesariamente está definida en x_0, pero x_0 debe pertenecer a la cerradura del dominio de f.

Sean V y W espacios de Banach y Ω un subconjunto abierto de V. La noción de derivada de una función entre espacios euclidianos se extiende a funciones entre espacios de Banach como sigue.

Definición 9.5. *Una función $\varphi\colon \Omega \to W$ es* ***(Fréchet-) diferenciable en el punto*** *$u_0 \in \Omega$ si existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0. \tag{9.5}$$

T se llama ***la derivada (de Fréchet) de φ en*** *u_0 y se denota por*

$$\varphi'(u_0) \qquad \textit{o bien por} \qquad D\varphi(u_0).$$

Hacemos énfasis en que $\varphi'(u_0)\colon V \to W$ es una función lineal y continua. Como es usual en el caso de funciones lineales, escribiremos

$$\varphi'(u_0)v$$

en vez de $\varphi'(u_0)\,(v)$ para denotar al valor de la función $\varphi'(u_0)$ en v y, cuando haga falta, usaremos la notación $\varphi'(u_0)[v]$.

La condición (9.5) afirma que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cuaquier $v \in V$ con $\|v\|_V < \delta$ se cumple que

$$u_0 + v \in \Omega \qquad \text{y} \qquad \left\|\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)v\right\|_W \le \varepsilon \|v\|_V .$$

Intuitivamente, esto significa que en una vecindad suficientemente pequeña de 0 la función $v \mapsto \varphi(u_0 + v)$ se parece mucho a la función afín $v \mapsto \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)v$. Tanto así, que la norma de la diferencia entre los valores en v de ambas funciones $\|\varphi(u_0 + v) - (\varphi(u_0) + \varphi'(u_0)v)\|_W$ tiende a 0 más rápidamente que la norma de v.

La siguiente proposición garantiza que la derivada está bien definida.

Proposición 9.6. *Si φ es diferenciable en u_0, la función $T \in \mathcal{L}(V, W)$ que cumple* (9.5) *es única.*

Demostración. Supongamos que $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ cumplen (9.5). Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - T_i v\|_W \le \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_V \qquad \text{si} \;\; \|v\|_V < \delta, \;\; i = 1, 2.$$

Por tanto, si $\|v\|_V < \delta$,

$$\begin{aligned} \|T_1 v - T_2 v\|_W &\le \|T_1 v - \varphi(u_0 + v) + \varphi(u_0)\|_W + \|\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - T_2 v\|_W \\ &\le \varepsilon \|v\|_V . \end{aligned}$$

Si $\|v\|_V \geq \delta$, escogemos $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\|\lambda v\|_V < \delta$. Entonces la desigualdad anterior asegura que

$$\|T_1 v - T_2 v\|_W = \frac{1}{\lambda} \|T_1(\lambda v) - T_2(\lambda v)\|_W \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \|\lambda v\|_V = \varepsilon \|v\|_V .$$

En consecuencia,

$$\|T_1 v - T_2 v\|_W \leq \varepsilon \|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, necesariamente $T_1 v = T_2 v$. □

Definición 9.7. *$\varphi \colon \Omega \to W$ es* ***(Fréchet-) diferenciable en*** *Ω si lo es en cada punto $u \in \Omega$. La función*

$$\varphi' \colon \Omega \to \mathcal{L}(V, W), \qquad u \mapsto \varphi'(u),$$

se llama la ***derivada (de Fréchet) de*** *φ. La denotaremos también por*

$$D\varphi \colon \Omega \to \mathcal{L}(V, W).$$

Usualmente diremos que $\varphi \colon \Omega \to W$ es diferenciable en vez de decir que es Fréchet-diferenciable y hablaremos de su derivada para referirnos a su derivada de Fréchet.

Ejemplo 9.8. *Si $\varphi \colon \Omega \to W$ es constante, entonces es diferenciable en Ω y $\varphi'(u) = 0 \in \mathcal{L}(V, W)$ para todo $u \in \Omega$, ya que*

$$\varphi(u + v) - \varphi(u) = 0 \qquad \forall v \in V \text{ con } u + v \in \Omega.$$

Ejemplo 9.9. *Toda función $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es diferenciable en V y $T'(u) = T$ para todo $u \in V$, ya que*

$$T(u + v) - Tu - Tv = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Ejemplo 9.10. *La función $\varphi \colon \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(\overline{x}) := \|\overline{x}\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ es diferenciable en ℓ_2 y*

$$\varphi'(\overline{x})\overline{y} = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \qquad \forall \overline{x} = (x_k),\ \overline{y} = (y_k) \in \ell_2.$$

Demostración. Observa que

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\ell_2}^2 = \|\overline{x}\|_{\ell_2}^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \|\overline{y}\|_{\ell_2}^2 \qquad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \ell_2.$$

Por tanto,

$$\frac{\left|\varphi(\overline{x}+\overline{y})-\varphi(\overline{x})-2\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k\right|}{\|\overline{y}\|_{\ell_2}}=\|\overline{y}\|_{\ell_2}\to 0 \qquad \text{cuando } \overline{y}\to 0.$$

Fijemos $\overline{x}\in\ell_2$. La función $T:\ell_2\to\mathbb{R}$ dada por

$$T\overline{y}:=2\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k$$

es evidentemente lineal. De la desigualdad de Hölder para series (ver Ejercicio 2.43) se sigue que

$$|T\overline{y}|=2\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k\right|\le 2\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k|\le 2\,\|\overline{x}\|_{\ell_2}\,\|\overline{y}\|_{\ell_2}\,.$$

En consecuencia, $T:\ell_2\to\mathbb{R}$ es continua (ver Proposición 9.1). Esto prueba que φ es diferenciable en $\overline{x}$ y que $\varphi'(\overline{x})=T$. □

Proposición 9.11. *Si φ es diferenciable en u_0, entonces φ es continua en u_0.*

Demostración. Si φ es diferenciable en u_0, existe $\delta_1>0$ tal que

$$\left\|\varphi(u)-\varphi(u_0)-\varphi'(u_0)(u-u_0)\right\|_W\le\|u-u_0\|_V \qquad \text{si} \quad \|u-u_0\|_V<\delta_1.$$

Como $\varphi'(u_0)\in\mathcal{L}(V,W)$, usando la desigualdad (9.2) obtenemos

$$\begin{aligned}\|\varphi(u)-\varphi(u_0)\|_W &\le \left\|\varphi(u)-\varphi(u_0)-\varphi'(u_0)(u-u_0)\right\|_W+\left\|\varphi'(u_0)(u-u_0)\right\|_W\\ &\le \|u-u_0\|_V+\left\|\varphi'(u_0)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}\|u-u_0\|_V\\ &=\left(1+\left\|\varphi'(u_0)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}\right)\|u-u_0\|_V \qquad \text{si} \quad \|u-u_0\|_V<\delta_1.\end{aligned}$$

Dada $\varepsilon>0$, tomemos $\delta:=\min\left\{\delta_1,\varepsilon\left(1+\|\varphi'(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)}\right)^{-1}\right\}$. Entonces,

$$\|\varphi(u)-\varphi(u_0)\|_W<\varepsilon \qquad \text{si} \quad \|u-u_0\|_V<\delta.$$

Esto prueba que φ es continua en u_0. □

Proposición 9.12 (Linealidad de la derivada)**.** *Si $\varphi,\psi:\Omega\to W$ son diferenciables en u_0 y $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, entonces $\lambda\varphi+\mu\psi$ es diferenciable en u_0 y*

$$(\lambda\varphi+\mu\psi)'(u_0)=\lambda\varphi'(u_0)+\mu\psi'(u_0).$$

Demostración. La demostración es un ejercicio sencillo [Ejercicio 9.39]. □

Proposición 9.13 (Regla de la cadena)**.** *Sean $\Omega \subset V$, $\widetilde{\Omega} \subset W$ subconjuntos abiertos. Si $\varphi\colon \Omega \to W$ es diferenciable en u_0, $\varphi(v) \in \widetilde{\Omega}$ para todo $v \in \Omega$ y $\psi\colon \widetilde{\Omega} \to Z$ es diferenciable en $v_0 := \varphi(u_0)$, entonces $\psi \circ \varphi\colon \Omega \to Z$ es diferenciable en u_0 y*

$$(\psi \circ \varphi)'(u_0) = \psi'(v_0) \circ \varphi'(u_0).$$

Demostración. Para $v \in V$ y $w \in W$ tales que $u_0 + v \in \Omega$ y $v_0 + w \in \widetilde{\Omega}$, definimos

$$\begin{aligned} o_1(v) &:= \varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)v, \\ o_2(w) &:= \psi(v_0 + w) - \psi(v_0) - \psi'(v_0)w. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(u_0 + v) &= \psi(\varphi(u_0 + v)) \\ &= \psi(\varphi(u_0) + \varphi'(u_0)v + o_1(v)) \\ &= \psi(v_0) + \psi'(v_0)\left[\varphi'(u_0)v + o_1(v)\right] + o_2(\varphi'(u_0)v + o_1(v)) \\ &= (\psi \circ \varphi)(u_0) + \left[\psi'(v_0) \circ \varphi'(u_0)\right] v + o_3(v), \end{aligned}$$

donde

$$o_3(v) := \psi'(v_0)\left[o_1(v)\right] + o_2(\varphi'(u_0)v + o_1(v)).$$

Probaremos a continuación que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|o_3(v)\|_Z}{\|v\|_V} = 0. \tag{9.6}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Denotemos por

$$\begin{gathered} c_1 := \left\|\varphi'(u_0)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} + 1, \qquad c_2 := \left\|\psi'(v_0)\right\|_{\mathcal{L}(W,Z)} + 1, \\ \varepsilon_1 := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2c_2}, 1\right\}, \qquad \varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2c_1}. \end{gathered}$$

Como φ es diferenciable en u_0 y ψ es diferenciable en v_0, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \|o_1(v)\|_W &\le \varepsilon_1 \|v\|_V \quad \text{si } \|v\|_V < \delta_1, \\ \|o_2(w)\|_Z &\le \varepsilon_2 \|w\|_W \quad \text{si } \|w\|_W < \delta_2. \end{aligned}$$

Sea $\delta_3 := \min\left\{\delta_1, \frac{\delta_2}{c_1}\right\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left\|\varphi'(u_0)v + o_1(v)\right\|_W &\le \left\|\varphi'(u_0)v\right\|_W + \|o_1(v)\|_W \\ &\le \left\|\varphi'(u_0)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V + \varepsilon_1 \|v\|_V \le c_1 \|v\|_V \quad \text{si } \|v\|_V < \delta_1. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\varphi'(u_0)v + o_1(v)\|_W < \delta_2$ si $\|v\|_V < \delta_3$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\left\|o_2(\varphi'(u_0)v + o_1(v))\right\|_Z &\leq \varepsilon_2 \left\|\varphi'(u_0)v + o_1(v)\right\|_W \\ &\leq \varepsilon_2 c_1 \|v\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_3.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\left\|\psi'(v_0)\,[o_1(v)]\right\|_Z &\leq \left\|\psi'(v_0)\right\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|o_1(v)\|_W \\ &\leq c_2\varepsilon_1 \|v\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_1.\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\|o_3(v)\|_Z \leq \varepsilon \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_3.$$

Esto prueba (9.6) y concluye la demostración de la proposición. □

9.3. El teorema del valor medio

Una función lineal $T : \mathbb{R} \to V$ está totalmente determinada por su valor en 1, ya que

$$T[t] = T\,[t1] = tT\,[1] \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La función

$$\iota \colon \mathcal{L}(\mathbb{R}, V) \to V, \qquad \iota(T) := T\,[1]\,, \tag{9.7}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, es una isometría, ya que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},V)} = \sup_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\neq 0}} \frac{\|T\,[t]\|_V}{|t|} = \sup_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\neq 0}} \left\|\frac{tT\,[1]}{t}\right\|_V = \|T\,[1]\|_V \qquad \forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, V).$$

Esta isometría permite identificar a $\mathcal{L}(\mathbb{R}, V)$ con V.

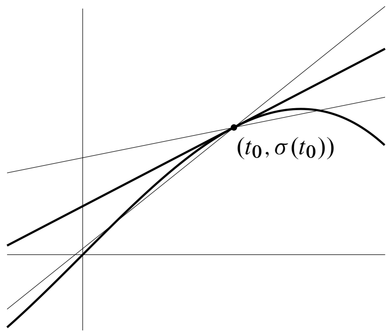
Si $\sigma\colon (a,b) \to V$ es diferenciable en un punto t_0 de (a,b), identificaremos en lo sucesivo a la transformación lineal $\sigma'(t_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, V)$ con su valor en 1, y escribiremos simplemente $\sigma'(t_0)$ en vez de $\sigma'(t_0)\,[1]$. Se tiene entonces que $\sigma'(t_0) \in V$ y

$$\lim_{t\to 0} \left\|\frac{\sigma(t+t_0) - \sigma(t_0)}{t} - \sigma'(t_0)\right\|_V = \lim_{t\to 0} \frac{\|\sigma(t+t_0) - \sigma(t_0) - t\sigma'(t_0)\|_V}{|t|} = 0.$$

Es decir,

$$\sigma'(t_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(t+t_0) - \sigma(t_0)}{t} \in V.$$

Esta identidad permite interpretar a $\sigma'(t_0)$ como la velocidad de la trayectoria $\sigma\colon (a,b) \to V$ en el tiempo t_0, tal y como solemos hacer cuando $V = \mathbb{R}^n$. Si $V = \mathbb{R}$ entonces $\sigma'(t_0) \in \mathbb{R}$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de σ en el punto $(t_0, \sigma(t_0))$.



Si $\sigma\colon (a,b) \to \Omega \subset V$ es diferenciable en $t_0 \in (a,b)$ y $\varphi\colon \Omega \to W$ es diferenciable en $u_0 := \sigma(t_0)$, la regla de la cadena dice que

$$(\varphi \circ \sigma)'(t_0) = \varphi'(u_0)[\sigma'(t_0)], \tag{9.8}$$

es decir, la derivada de la trayectoria $\varphi \circ \sigma$ en t_0 es el valor de la función $\varphi'(u_0) \in \mathcal{L}(V, W)$ en el vector $\sigma'(t_0) \in V$.

Uno de los resultados más útiles en análisis es el teorema del valor medio. Para funciones reales de variable real éste se expresa como una igualdad: si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. El problema con esta formulación clásica es que no existe una igualdad semejante para funciones con valores vectoriales. Por otra parte, esta igualdad esconde el hecho de que en realidad no sabemos quién es c, lo único que sabemos es que se trata de algún punto en (a,b). Para fines prácticos, lo importante es tener una cota para $|f'(c)|$. Es decir, la verdadera naturaleza del teorema del valor medio se obtiene al expresarlo como una desigualdad.

Teorema 9.14 (del valor medio)**.** *Sea $\sigma\colon [a,b] \to V$ una función continua. Si σ es diferenciable en todo punto $t \in (a,b)$ y si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\left\|\sigma'(t)\right\|_V \leq M \qquad \forall t \in (a,b), \tag{9.9}$$

entonces

$$\|\sigma(b) - \sigma(a)\|_V \leq M(b-a).$$

Demostración. Probaremos que, para toda $\varepsilon > 0$, se cumple que

$$\|\sigma(b) - \sigma(a)\|_V \le M(b-a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon. \tag{9.10}$$

Esto implica que $\|\sigma(b) - \sigma(a)\|_V \le M(b-a)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto

$$S := \{t \in [a,b] : \|\sigma(t) - \sigma(a)\|_V \le M(t-a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon\}.$$

Como σ es continua en a existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|\sigma(s) - \sigma(a)\|_V \le \varepsilon \qquad \forall s \in [a, a+\gamma].$$

Por tanto, $a+\gamma \in S$. Sea $c := \sup S$. Observa que $c \in S$ y $a+\gamma \le c \le b$. Probaremos a continuación que $c = b$.

Argumentando por contradicción, supongamos que $c < b$. Entonces σ es diferenciable en c y, en consecuencia, existe $\delta \in (0, \text{mín}\{c-a, b-c\})$ tal que

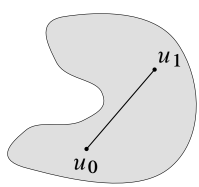
$$\left\|\sigma(s) - \sigma(c) - \sigma'(c)(s-c)\right\|_V \le \varepsilon\,|s-c| \qquad \text{si} \quad |s-c| < \delta.$$

Por tanto, si $s \in (c, c+\delta)$, usando (9.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\sigma(s) - \sigma(a)\|_V &\le \|\sigma(s) - \sigma(c)\|_V + \|\sigma(c) - \sigma(a)\|_V \\
&\le \left\|\sigma(s) - \sigma(c) - \sigma'(c)(s-c)\right\|_V \\
&\qquad + \left\|\sigma'(c)(s-c)\right\|_V + \|\sigma(c) - \sigma(a)\|_V \\
&\le \varepsilon(s-c) + \left\|\sigma'(c)\right\|_V (s-c) + M(c-a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&\le M(s-a) + \varepsilon(s-a) + \varepsilon, \qquad (9.11)
\end{aligned}$$

lo que contradice que $c = \sup S$. En consecuencia, $c = b$. Esto demuestra (9.10). □

A continuación veremos que el teorema anterior permite acotar la diferencia entre dos valores $\varphi(u_0)$ y $\varphi(u_1)$ de una función diferenciable $\varphi\colon \Omega \to W$ cuando su derivada está acotada en el segmento que une a los puntos u_0 y u_1.



Un modo de garantizar esto último es pidiendo que la derivada sea continua en Ω, lo que nos lleva a introducir el siguiente concepto.

Definición 9.15. *Una función $\varphi\colon \Omega \to W$ es* ***de clase*** $\mathcal{C}^1$ *(o* ***continuamente diferenciable****)* ***en*** Ω *si es diferenciable en Ω y su derivada*

$$\varphi'\colon \Omega \to \mathcal{L}(V, W)$$

es continua.

Las funciones de los Ejemplos 9.8 y 9.9 son de clase $\mathcal{C}^1$ ya que en ambos casos la derivada es una función constante. Veamos que la función del Ejemplo 9.10 también es de clase $\mathcal{C}^1$.

Ejemplo 9.16. *La función $\varphi\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(\overline{x}) := \|\overline{x}\|_{\ell_2}^2$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en ℓ_2.*

Demostración. En el Ejemplo 9.10 vimos que φ es diferenciable y que su derivada es la función $\varphi'\colon \ell_2 \to \mathcal{L}(\ell_2, \mathbb{R})$ dada por

$$\varphi'(\overline{x})\overline{y} = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \qquad \forall \overline{x} = (x_k),\ \overline{y} = (y_k) \in \ell_2.$$

Si $\overline{z} = (z_k) \in \ell_2$, aplicando la desigualdad de Hölder para series (ver Ejercicio 2.43) obtenemos

$$\left|\varphi'(\overline{z})\overline{y} - \varphi'(\overline{x})\overline{y}\right| = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - x_k)y_k\right| \leq 2\,\|\overline{z} - \overline{x}\|_{\ell_2}\,\|\overline{y}\|_{\ell_2}.$$

Por tanto,

$$\left\|\varphi'(\overline{z}) - \varphi'(\overline{x})\right\|_{\mathcal{L}(\ell_2,\mathbb{R})} = \sup_{\substack{\overline{y}\in\ell_2\\ \overline{y}\neq 0}} \frac{|\varphi'(\overline{z})\overline{y} - \varphi'(\overline{x})\overline{y}|}{\|\overline{y}\|_{\ell_2}} \leq 2\,\|\overline{z} - \overline{x}\|_{\ell_2} \qquad \forall \overline{x}, \overline{z} \in \ell_2.$$

Esto prueba que φ' es Lipschitz continua. □

Como consecuencia del teorema del valor medio obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 9.17. *Si Ω es abierto en V, $\varphi\colon \Omega \to W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω y $u_0, u_1 \in \Omega$ son tales que $u_t := (1-t)u_0 + tu_1 \in \Omega$ para toda $t \in [0,1]$, entonces*

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty$$

y

$$\|\varphi(u_1) - \varphi(u_0)\|_W \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|u_1 - u_0\|_V.$$

Demostración. Sea $\alpha\colon [0,1] \to \Omega$ la función $\alpha(t) := u_t$. Esta función es diferenciable en $(0,1)$ y su derivada está dada por $\alpha'(t) = u_1 - u_0$. La composición $\sigma := \varphi \circ \alpha\colon [0,1] \to W$ es continua en $[0,1]$. Por la regla de la cadena (ver (9.8)), σ es diferenciable en $(0,1)$ y
$$\sigma'(t) = \varphi'(u_t)\,[u_1 - u_0]\,.$$
Se tiene entonces que
$$\left\|\sigma'(t)\right\|_W \leq \left\|\varphi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|u_1 - u_0\|_V \qquad \forall t \in (0,1). \tag{9.12}$$
Ahora bien, la función que a cada $t \in [0,1]$ le asocia el valor $\|\varphi'(u_t)\|_{\mathcal{L}(V,W)} \in \mathbb{R}$ es una función continua, ya que es la composición de las funciones continuas
$$[0,1] \xrightarrow{\alpha} \Omega \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{L}(V,W) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V,W)}} \mathbb{R}.$$
Como $[0,1]$ es compacto, concluimos que
$$M := \sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty.$$
Por otra parte, de la desigualdad (9.12) se sigue que
$$\sup_{t\in[0,1]} \left\|\sigma'(t)\right\|_W \leq M\,\|u_1 - u_0\|_V \qquad \forall t \in (0,1),$$
y aplicando el Teorema 9.14 obtenemos que
$$\|\varphi(u_1) - \varphi(u_0)\|_W = \|\sigma(1) - \sigma(0)\|_W \leq M\,\|u_1 - u_0\|_V\,,$$
como afirma el enunciado. □

Usaremos a menudo la siguiente consecuencia sencilla del corolario anterior.

Corolario 9.18. *Si Ω es abierto en V, $\varphi\colon \Omega \to W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω y $u_0, u_1 \in \Omega$ son tales que $u_t := (1-t)u_0 + tu_1 \in \Omega$ para toda $t \in [0,1]$ entonces, para todo $u \in \Omega$,*
$$\sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t) - \varphi'(u)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty$$
y se cumple que
$$\left\|\varphi(u_1) - \varphi(u_0) - \varphi'(u)\,[u_1 - u_0]\right\|_W \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t) - \varphi'(u)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|u_1 - u_0\|_V\,.$$

Demostración. Sea $\psi := \varphi - \varphi'(u)$. Entonces $\psi'(v) = \varphi'(v) - \varphi'(u)$ para toda $v \in \Omega$. Aplicando el Corolario 9.17 obtenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(u_1) - \varphi(u_0) - \varphi'(u)\,[u_1 - u_0]\right\|_W &= \|\psi(u_1) - \psi(u_0)\|_W \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|\psi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|u_1 - u_0\|_V \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t) - \varphi'(u)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|u_1 - u_0\|_V \,,\end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

9.4. Un criterio de diferenciabilidad

Si $\varphi\colon \Omega \to W$ es diferenciable en el punto u_0 de Ω y $v \in V$ entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in (-\delta, \delta)$,

$$u_0 + tv \in \Omega \qquad \text{y} \qquad \left\|\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)(tv)\right\|_W \leq \varepsilon \|tv\|_V \,.$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad entre $|t|$ obtenemos que

$$\left\|\frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t} - \varphi'(u_0)v\right\|_W \leq \varepsilon \|v\|_V \qquad \text{si } \ 0 < |t| < \delta.$$

Es decir,

$$\varphi'(u_0)v = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t} \qquad \forall v \in V.$$

De este modo obtenemos una condición necesaria para que φ sea diferenciable en u_0: en primer lugar, para cada $v \in V$ debe existir el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t}. \tag{9.13}$$

Este límite se llama la **derivada direccional de φ en u_0 en la dirección de v**. En segundo lugar, la función $\mathcal{G}\varphi(u_0)\colon V \to W$ dada por

$$\mathcal{G}\varphi(u_0)v := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t} \tag{9.14}$$

debe ser lineal y continua. Esto da lugar al siguiente concepto.

Definición 9.19. *Una función* $\varphi\colon \Omega \to W$ *es* ***Gâteaux-diferenciable en el punto*** $u_0 \in \Omega$ *si, para cada* $v \in V$*, existe la derivada direccional de* φ *en* u_0 *en la dirección de* v *y la función* $\mathcal{G}\varphi(u_0)$ *definida en* (9.14) *pertenece a* $\mathcal{L}(V,W)$.

φ *es* ***Gâteaux-diferenciable en*** Ω *si lo es en todo punto* $u \in \Omega$. *La función*

$$\mathcal{G}\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}(V,W), \qquad u \mapsto \mathcal{G}\varphi(u),$$

se llama la ***derivada de Gâteaux***[2] ***de*** φ.

René Gâteaux

Cabe señalar que la existencia de la derivada direccional de φ en u_0 en la dirección de v para toda $v \in V$ no basta para garantizar que $\mathcal{G}\varphi(u_0) \in \mathcal{L}(V,W)$ [Ejercicio 9.46]. Tampoco basta con que φ sea Gâteaux-diferenciable para que sea diferenciable, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.20. *La función* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es Gâteaux-diferenciable en $\mathbb{R}^2$ *pero no es diferenciable en* $(0,0)$ [Ejercicio 9.47].

Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.21. $\varphi\colon \Omega \to W$ *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *en* Ω *si y sólo si* φ *es Gâteaux-diferenciable en* Ω *y su derivada de Gâteaux* $\mathcal{G}\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}(V,W)$ *es continua. En tal caso,* $\varphi' = \mathcal{G}\varphi$.

[2] René Eugène Gâteaux (1889-1914) nació en la Marne, Francia. Lo mataron en la primera guerra mundial. Parte de su trabajo fue publicado póstumamente por Paul Lévy.

Demostración. $\Rightarrow$): Al inicio de esta sección demostramos que, si φ es diferenciable en u_0, entonces φ es Gâteaux-diferenciable en u_0 y $\mathcal{G}\varphi(u_0) = \varphi'(u_0)$. En consecuencia, si φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, entonces $\mathcal{G}\varphi = \varphi'$ es continua.

$\Leftarrow$): Supongamos ahora que φ es Gâteaux-diferenciable en Ω y que $\mathcal{G}\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}(V, W)$ es continua. Sean $u_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $u_0 + v \in \Omega$ y

$$\|\mathcal{G}\varphi(u_0 + v) - \mathcal{G}\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \varepsilon \qquad \text{si} \quad \|v\|_V < \delta. \tag{9.15}$$

Para cada $v \in V$ con $\|v\|_V < \delta$ definimos $\sigma_v\colon [0, 1] \to W$ como

$$\sigma_v(t) := \varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0) - \mathcal{G}\varphi(u_0)\,[tv]\,.$$

Entonces σ_v es diferenciable en $(0, 1)$ y su derivada es

$$\begin{aligned}
\sigma_v'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sigma_v(t + h) - \sigma_v(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv + hv) - \varphi(u_0 + tv) - \mathcal{G}\varphi(u_0)\,[hv]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv + hv) - \varphi(u_0 + tv)}{h} - \mathcal{G}\varphi(u_0)v \\
&= \mathcal{G}\varphi(u_0 + tv)v - \mathcal{G}\varphi(u_0)v.
\end{aligned}$$

Se sigue de (9.15) que

$$\begin{aligned}
\left\|\sigma_v'(t)\right\|_W &\leq \|\mathcal{G}\varphi(u_0 + tv) - \mathcal{G}\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V \\
&\leq \varepsilon \|v\|_V \qquad \forall t \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Usando el teorema del valor medio (ver Teorema 9.14) concluimos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - \mathcal{G}\varphi(u_0)v\|_W &= \|\sigma_v(1) - \sigma_v(0)\|_W \\
&\leq \varepsilon \|v\|_V \qquad \text{si} \quad \|v\|_V < \delta.
\end{aligned}$$

Esto prueba que φ es diferenciable en u_0 y que $\varphi'(u_0) = \mathcal{G}\varphi(u_0)$. Como $\mathcal{G}\varphi$ es continua, φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω. □

El teorema anterior proporciona un criterio muy útil para verificar la diferenciabilidad de una función y calcular su derivada. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 9.22. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. La función $\varphi\colon \mathcal{C}^0[a, b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\varphi(u) := \int_a^b f(u(t))dt$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{C}^0[a,b]$ y su derivada es

$$\varphi'(u)v := \int_a^b f'(u(t))v(t)dt.$$

Demostración. Probaremos primero que φ es Gâteaux-diferenciable. Sean $u, v \in \mathcal{C}^0[a,b]$, $v \neq 0$, y $\varepsilon > 0$. Denotemos por

$$M := \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \qquad \text{y} \qquad \tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{(b-a)\,\|v\|_\infty}.$$

Como f' es uniformemente continua en $[-M, M]$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|f'(x) - f'(y)\right| < \tilde{\varepsilon} \qquad \forall x, y \in [-M, M] \text{ con } |x-y| < \delta.$$

Del Corolario 9.18 y la desigualdad anterior se sigue que, si $x,\ x + hz \in [-M, M]$ y $|hz| < \delta$, entonces

$$\left|f(x+hz) - f(x) - f'(x)hz\right| \leq \sup_{s\in[0,1]} \left|f'(x+shz) - f'(x)\right| |hz| \leq \tilde{\varepsilon}\,|hz|\,. \tag{9.16}$$

Observa que

$$|u(t) + hv(t)| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty = M \qquad \forall t \in [a,b],\ h \in [0,1].$$

Por tanto, podemos aplicar la desigualdad (9.16) a $x := u(t)$, $z := v(t)$ y $0 < |h| < \text{mín}\left\{1, \frac{\delta}{\|v\|_\infty}\right\}$ para obtener

$$\left|\frac{f(u(t) + hv(t)) - f(u(t))}{h} - f'(u(t))v(t)\right| \leq \tilde{\varepsilon}\,|v(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall t \in [a,b].$$

En consecuencia, si $0 < |h| < \text{mín}\left\{1, \frac{\delta}{\|v\|_\infty}\right\}$, entonces

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\varphi(u+hv) - \varphi(u)}{h} - \int_a^b f'(u(t))v(t)dt\right| \\ &\qquad \leq \int_a^b \left|\frac{f(u(t)+hv(t)) - f(u(t))}{h} - f'(u(t))v(t)\right| dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\int_a^b f'(u(t))v(t)dt = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u+hv) - \varphi(u)}{h} =: \mathcal{G}\varphi(u)v.$$

La función $\mathcal{G}\varphi(u)\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathbb{R}$ es claramente lineal y, como

$$|\mathcal{G}\varphi(u)v| \leq \left(\int_a^b \left|f'(u(t))\right| dt\right) \|v\|_\infty \qquad \forall v \in \mathcal{C}^0[a,b],$$

la Proposición 9.1 asegura que $\mathcal{G}\varphi(u)$ es continua. Por tanto, φ es Gâteaux-diferenciable en u para todo $u \in \mathcal{C}^0[a,b]$.

Probaremos ahora que $\mathcal{G}\varphi\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})$ es continua. Sean $u_0 \in \mathcal{C}^0[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Denotemos por $M_0 := \|u_0\|_\infty + 1$. Como f' es uniformemente continua en $[-M_0, M_0]$, existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\left|f'(x) - f'(y)\right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \qquad \forall x,y \in [-M_0, M_0] \text{ con } |x-y| < \delta.$$

Observa que, si $\|u - u_0\|_\infty < \delta$, entonces

$$|u(t)| \leq \|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|u-u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \delta < M_0 \qquad \forall t \in [a,b].$$

Por tanto, para todo $v \in \mathcal{C}^0[a,b]$,

$$|\mathcal{G}\varphi(u)v - \mathcal{G}\varphi(u_0)v| \leq \int_a^b \left|f'(u(t)) - f'(u_0(t))\right| |v(t)|\, dt < \varepsilon \|v\|_\infty .$$

En consecuencia,

$$\|\mathcal{G}\varphi(u) - \mathcal{G}\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})} = \sup_{\substack{v \in \mathcal{C}^0[a,b] \\ v \neq 0}} \frac{|\mathcal{G}\varphi(u)v - \mathcal{G}\varphi(u_0)v|}{\|v\|_\infty} \leq \varepsilon$$

si $\|u - u_0\|_\infty < \delta$. Esto prueba que $\mathcal{G}\varphi\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})$ es continua.

Del Teorema 9.21 se sigue que φ es de clase $\mathcal{C}^1$ y que $\varphi' = \mathcal{G}\varphi$. □

9.5. Derivadas parciales

Sean $V_1, \ldots, V_n, W$ espacios de Banach. El producto cartesiano $V_1 \times \cdots \times V_n$ con la norma

$$\|(v_1, \ldots, v_n)\|_{V_1 \times \cdots \times V_n} := \max_{j=1,\ldots,n} \left\|v_j\right\|_{V_j}$$

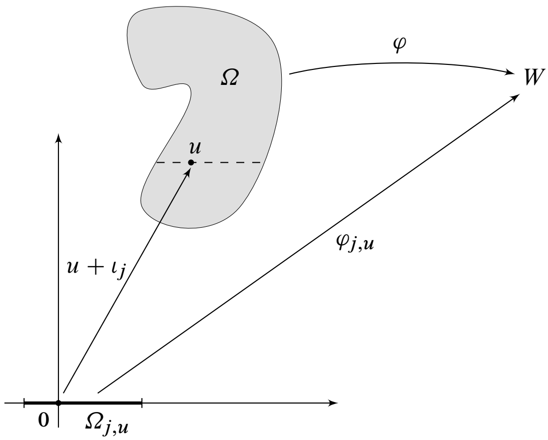
es un espacio de Banach (ver Ejercicio 5.37). La inclusión en el j-ésimo factor,

$$\iota_j\colon V_j \to V_1 \times \cdots \times V_n, \qquad \iota_j(v) := (0, \ldots, 0, \underbrace{v}_{j\text{-ésimo}}, 0, \ldots, 0),$$

es una función lineal y una isometría. Si Ω es abierto en $V_1 \times \cdots \times V_n$ y $u \in \Omega$, entonces

$$\Omega_{j,u} := \left\{ v \in V_j : u + \iota_j v \in \Omega \right\}$$

es un abierto de V_j que contiene a 0.



En lo que resta de esta sección supondremos que Ω es abierto en $V_1 \times \cdots \times V_n$.

Definición 9.23. *Una función $\varphi \colon \Omega \to W$ es **parcialmente diferenciable respecto a la j-ésima variable en el punto** u **de** Ω si la función*

$$\varphi_{j,u} \colon \Omega_{j,u} \to W, \qquad \varphi_{j,u}(v) := \varphi(u + \iota_j v),$$

es diferenciable en 0*. La **derivada parcial de** φ **respecto a la j-ésima variable en** u se define como*

$$\partial_j \varphi(u) := \varphi'_{j,u}(0) \in \mathcal{L}(V_j, W).$$

*La función φ es **parcialmente diferenciable respecto a la j-ésima variable en** Ω si lo es en todo punto $u \in \Omega$, y **la derivada parcial de** φ **respecto a la j-ésima variable** en Ω es la función*

$$\partial_j \varphi \colon \Omega \to \mathcal{L}(V_j, W), \qquad u \mapsto \partial_j \varphi(u).$$

Si $\varphi \colon \Omega \to W$ es diferenciable en u entonces, por la regla de la cadena, φ es parcialmente diferenciable respecto a la j-ésima variable en u y

$$\partial_j \varphi(u) = \varphi'(u) \circ \iota_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Es decir, $\partial_j \varphi(u)$ es la restricción de $\varphi'(u)$ al factor V_j. Nota que $v = \sum_{j=1}^n \iota_j v_j$ si $v = (v_1, \ldots, v_n)$. En consecuencia,

$$\varphi'(u)v = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi(u) v_j. \tag{9.17}$$

Los siguientes ejemplos relacionan estos conceptos con conceptos bien conocidos de cálculo.

Ejemplo 9.24. *Si Ω es abierto en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ y $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x, entonces $\partial_j \varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Como en la sección* 9.3*, identificamos a la función lineal $\partial_j \varphi(x)$ con su valor en* 1*. Ésta es la **derivada parcial de** φ **respecto a** x_j a la que se suele denotar por*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}.$$

*El **gradiente de** φ **en** x es el vector*

$$\nabla \varphi(x) := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

La fórmula (9.17) *se escribe entonces como*

$$\varphi'(x)y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) y_j = \nabla \varphi(x) \cdot y,$$

donde $\nabla \varphi(x) \cdot y$ denota al producto escalar usual de los vectores $\nabla \varphi(x)$ y y en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 9.25. *Si Ω es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x, entonces la j-ésima componente φ_j de φ es la composición $\varphi_j := \pi_j \circ \varphi$ con la j-ésima proyección*

$$\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \qquad \pi_j(z_1, \ldots, z_m) := z_j.$$

Como π_j es lineal, aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\varphi_j'(x) = \pi_j \circ \varphi'(x),$$

es decir, $\varphi_j'(x)$ es la j-ésima componente de $\varphi'(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi'(x)y &= (\varphi_1'(x)y, \ldots, \varphi_m'(x)y) \\ &= (\nabla \varphi_1(x) \cdot y, \ldots, \nabla \varphi_m(x) \cdot y), \end{aligned}$$

es decir, $\varphi'(x)$ es la función lineal dada por la matriz

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

que se llama la ***matriz jacobiana de*** *φ* ***en*** *x.*

No es cierto, en general, que si φ es parcialmente diferenciable respecto a cada variable en u entonces φ es diferenciable en u [Ejercicio 9.47]. Pero sí lo es si se cumple además que $\partial_j\varphi$ es continua en Ω para toda $j = 1, \dots, n$.

Teorema 9.26. *Una función $\varphi\colon \Omega \to W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω si y sólo si φ es parcialmente diferenciable respecto a la j-ésima variable en Ω y*

$$\partial_j\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}(V_j, W)$$

es continua en Ω para todo $j = 1, \dots, n$.

Demostración. $\Rightarrow$): Ya vimos que, si $\varphi\colon \Omega \to W$ es diferenciable en u, entonces φ es parcialmente diferenciable respecto a la j-ésima variable en u y $\partial_j\varphi(u) = \varphi'(u) \circ \iota_j$. Por tanto, $\partial_j\varphi$ es continua si φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω.

$\Leftarrow$): Supongamos ahora que φ es parcialmente diferenciable respecto a la j-ésima variable en Ω y que $\partial_j\varphi$ es continua en Ω para todo $j = 1, \dots, n$. Basta considerar el caso $n = 2$, ya que el caso general se obtiene iterando éste.

Sean $u = (u_1, u_2) \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Como φ es diferenciable respecto a la primera variable en u y $\partial_2\varphi$ es continua en u, existe $\delta > 0$ tal que

$$u+v \in \Omega \qquad \text{si } v = (v_1, v_2) \in V_1{\times}V_2 \text{ y } \|v\|_{V_1\times V_2} := \text{máx}\left\{\|v_1\|_{V_1}, \|v_2\|_{V_2}\right\} < \delta,$$

$$\|\varphi(u + \iota_1 v_1) - \varphi(u) - \partial_1\varphi(u)v_1\|_W \leq \frac{\varepsilon}{4}\|v_1\|_{V_1} \qquad \text{si } \|v_1\|_{V_1} < \delta, \tag{9.18}$$

$$\|\partial_2\varphi(u + v) - \partial_2\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)} < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{si } \|v\|_{V_1\times V_2} < \delta.$$

La segunda desigualdad implica que

$$\begin{aligned}\|\partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1)v_2 - \partial_2\varphi(u)v_2\|_W &\leq \|\partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1) - \partial_2\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)}\|v_2\|_{V_2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4}\|v_2\|_{V_2} \qquad \text{si } \|v_1\|_{V_1} < \delta, \end{aligned} \tag{9.19}$$

y también que

$$\begin{aligned}
&\|\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1+t\iota_2 v_2)-\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)}\\
&\quad\le \|\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1+t\iota_2 v_2)-\partial_2\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)}+\|\partial_2\varphi(u)-\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)}\\
&\quad<\tfrac{\varepsilon}{2}\qquad \text{si }\ \|v\|_{V_1\times V_2}<\delta\ \text{ y }\ t\in[0,1].
\end{aligned}$$

De esta última desigualdad y el Corolario 9.18 se sigue que

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(u+v)-\varphi(u+\iota_1 v_1)-\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)v_2\|_W\\
&\quad\le \sup_{t\in[0,1]}\|\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1+t\iota_2 v_2)-\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)}\,\|v_2\|_{V_2}\\
&\quad\le \tfrac{\varepsilon}{2}\,\|v_2\|_{V_2}\qquad \text{si }\ \|v\|_{V_1\times V_2}<\delta.
\end{aligned}\tag{9.20}$$

Finalmente, de las desigualdades (9.18), (9.19) y (9.20) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(u+v)-\varphi(u)-\partial_1\varphi(u)v_1-\partial_2\varphi(u)v_2\|\\
&\quad\le \|\varphi(u+v)-\varphi(u+\iota_1 v_1)-\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)v_2\|\\
&\qquad+\|\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)v_2-\partial_2\varphi(u)v_2\|+\|\varphi(u+\iota_1 v_1)-\varphi(u)-\partial_1\varphi(u)v_1\|\\
&\quad\le \varepsilon\,\|v\|_{V_1\times V_2}\qquad \text{si }\ \|v\|_{V_1\times V_2}<\delta.
\end{aligned}$$

Esto prueba que φ es diferenciable en u y que $\varphi'(u)v=\partial_1\varphi(u)v_1+\partial_2\varphi(u)v_2$. Por tanto, φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω. □

9.6. Derivadas de orden superior

Sean V y W espacios de Banach y Ω un subconjunto abierto de V. Si $\varphi\colon\Omega\to W$ es diferenciable en Ω, su derivada es una función que toma valores en el espacio de Banach $\mathcal{L}(V,W)$. Tiene pues sentido preguntarnos si $\varphi'\colon\Omega\to\mathcal{L}(V,W)$ es, a su vez, diferenciable en Ω. Si lo es, decimos que φ es dos veces diferenciable en Ω. La derivada de φ' se llama la segunda derivada de φ y se denota por

$$D^2\varphi\colon\Omega\to\mathcal{L}(V,\mathcal{L}(V,W)),$$

o simplemente por φ''. Veremos a continuación que el espacio $\mathcal{L}(V,\mathcal{L}(V,W))$ tiene una representación sencilla: es el espacio de funciones bilineales y continuas $V\times V\to W$.

Sean $V_1,\dots,V_k,W$ espacios de Banach.

Definición 9.27. *Una función $F: V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ es **k-multilineal** si es lineal en cada variable, es decir, si para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ y $u_i \in V_i$, $i \neq j$, la función $V_j \to W$ dada por*

$$v \longmapsto F[u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \dots, u_m]$$

*es lineal. Si $k = 2$ se dice que F es **bilineal**.*

Denotamos por

$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W) := \{F: V_1 \times \cdots \times V_k \to W : F \text{ es } k\text{-multilineal y continua}\}.$$

Si $V_1 = \cdots = V_k = V$ escribimos simplemente

$$\mathcal{L}_k(V, W) := \mathcal{L}(\underbrace{V, \dots, V}_{k \text{ veces}}; W).$$

Como en el caso $k = 1$ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 9.28. *Si $F: V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ es k-multilineal, entonces F es continua si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|F[v]\|_W \leq c\,\|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_k\|_{V_k} \qquad \forall v = (v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k. \tag{9.21}$$

Demostración. $\Rightarrow$): Si F es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|F[v]\|_W < 1 \qquad \text{si } \|v\|_{V_1 \times \cdots \times V_k} := \max_{j=1,\dots,k} \left\|v_j\right\|_{V_j} < \delta.$$

Por tanto, para todo $v = (v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k$, tal que $v_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, k$,

$$\frac{\delta^k}{2^k\,\|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_k\|_{V_k}}\,\|F[v]\|_W = \left\|F\left[\frac{\delta}{2}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|_{V_1}}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|_{V_k}}\right)\right]\right\|_W < 1.$$

En consecuencia,

$$\|F[v]\|_W \leq \frac{2^k}{\delta^k}\,\|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_k\|_{V_k} \qquad \forall v = (v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k.$$

$\Leftarrow$): Supongamos ahora que se cumple (9.21). Sean $u, v \in V_1 \times \cdots \times V_k$ y $R := \|u\|_{V_1 \times \cdots \times V_k} + 1$. Como F es k-multilineal,

$$\begin{aligned} F[v]-F[u] = F[v_1-u_1,v_2,\dots,v_k] & \\ &+\sum_{i=2}^{k-1}F[u_1,\dots,u_{i-1},v_i-u_i,v_{i+1},\dots,v_k] \\ &+F[u_1,\dots,u_{k-1},v_k-u_k]. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad del triángulo y la desigualdad (9.21) concluimos que

$$\begin{aligned} \|F[v]-F[u]\|_W &\leq c\,\|v_1-u_1\|_{V_1}\,\|v_2\|_{V_2}\cdots\|v_k\|_{V_k} \\ &\quad+c\sum_{i=2}^{k-1}\|u_1\|_{V_1}\cdots\|u_{i-1}\|_{V_{i-1}}\,\|v_i-u_i\|_{V_i}\,\|v_{i+1}\|_{V_{i+1}}\cdots\|v_k\|_{V_k} \\ &\quad+c\,\|u_1\|_{V_1}\cdots\|u_{k-1}\|_{V_{k-1}}\,\|v_k-u_k\|_{V_k} \\ &\leq cR^{k-1}\sum_{i=1}^{k}\|v_i-u_i\|_{V_i}\qquad\text{si }\|v-u\|_{V_1\times\cdots\times V_k}<1. \end{aligned}$$

De esta desigualdad se sigue inmediatamente que F es continua en u. □

Para $F\in\mathcal{L}(V_1,\dots,V_k;W)$ definimos

$$\|F\|_{\mathcal{L}(V_1,\dots,V_k;W)}:=\sup_{\substack{v_j\in V_j\smallsetminus\{0\}\\ j=1,\dots,k}}\frac{\|F[v_1,\dots,v_k]\|_W}{\|v_1\|_{V_1}\cdots\|v_k\|_{V_k}}. \tag{9.22}$$

Esta es una norma en $\mathcal{L}(V_1,\dots,V_k;W)$, que coincide con la definida en (9.1) cuando $k=1$.

Asociando a cada $F\in\mathcal{L}(V_1,\dots,V_k;W)$ la función $\hat{F}\in\mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,\dots,V_k;W))$ dada por

$$(\hat{F}v_1)[v_2,\dots,v_k]:=F[v_1,v_2,\dots,v_k],\qquad v_j\in V_j,$$

obtenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mathcal{L}(V_1,\dots,V_k;W)\cong\mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,\dots,V_k;W)) \tag{9.23}$$

que es además una isometría, es decir,

$$\left\|F\right\|_{\mathcal{L}(V_1,\dots,V_k;W)}=\left\|\hat{F}\right\|_{\mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,\dots,V_k;W))}$$

[Ejercicio 9.57]. Iterando estos isomorfismos obtenemos

$$\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_k;W) \cong \mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,\cdots,\mathcal{L}(V_{k-1},\mathcal{L}(V_k,W))\cdots)).$$

En consecuencia, $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_k;W)$ es un espacio de Banach (ver Proposición 9.3).

Podemos definir ahora las derivadas de orden superior como sigue.

Definición 9.29. *Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Una función $\varphi\colon \Omega \to W$ es **k-veces diferenciable en Ω** si φ es $(k-1)$-veces diferenciable en Ω y su derivada de orden $k-1$ es diferenciable en Ω. La derivada de $D^{k-1}\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}_{k-1}(V,W)$ se llama la **derivada de orden k de** φ y se denota*

$$D^k\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}(V,\mathcal{L}_{k-1}(V,W)) \cong \mathcal{L}_k(V,W).$$

*Si $D^k\varphi$ es continua en Ω decimos que φ **es de clase $\mathcal{C}^k$ en Ω**.*

*Si $D^j\varphi$ admite una extensión continua a la cerradura $\overline{\Omega}$ de Ω para cada $j = 0,1,\ldots,k$, donde $D^0\varphi := \varphi$, decimos que φ **es de clase $\mathcal{C}^k$ en $\overline{\Omega}$**.*

*Finalmente, si φ es de clase $\mathcal{C}^k$ en Ω (resp. en $\overline{\Omega}$) para todo $k \in \mathbb{N}$, decimos que φ **es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω** (resp. en $\overline{\Omega}$).*

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 9.30. *La función $\varphi\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(\overline{x}) := \|\overline{x}\|_{\ell_2}^2$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en ℓ_2,*

$$D^2\varphi(\overline{x})[\overline{y},\overline{z}] = 2\sum_{k=1}^{\infty} y_k z_k \qquad \forall \overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \ell_2,$$

y $D^k\varphi(\overline{x}) = 0 \in \mathcal{L}_k(\ell_2,\mathbb{R})$ para todo $\overline{x} \in \ell_2$, $k \geq 3$.

Demostración. Sabemos que φ es diferenciable, que su derivada $\varphi'\colon \ell_2 \to \mathcal{L}(\ell_2,\mathbb{R})$ está dada por

$$\varphi'(\overline{x})\overline{z} = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k \qquad \forall \overline{x} = (x_k),\ \overline{z} = (z_k) \in \ell_2$$

(ver Ejemplo 9.10) y que φ' es continua (ver Ejemplo 9.16). Observa además que φ' es lineal, es decir,

$$\varphi'(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha\varphi'(\overline{x}) + \beta\varphi'(\overline{y}) \qquad \forall \overline{x},\overline{y} \in \ell_2,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

El Ejemplo 9.9 asegura entonces que $D^2\varphi(\overline{x}) = \varphi'$ para todo $\overline{x} \in \ell_2$, y usando el isomorfismo (9.23) obtenemos

$$D^2\varphi(\overline{x})[\overline{y},\overline{z}] = \varphi'[\overline{y},\overline{z}] = \varphi'(\overline{y})\overline{z} = 2\sum_{k=1}^{\infty} y_k z_k \qquad \forall \overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \ell_2.$$

Más aún, como $D^2\varphi\colon \ell_2 \to \mathcal{L}_2(\ell_2,\mathbb{R})$ es constante, el Ejemplo 9.8 asegura que $D^k\varphi(\overline{x}) = 0 \in \mathcal{L}_k(\ell_2,\mathbb{R})$ para todo $\overline{x} \in \ell_2$, $k \geq 3$. □

Como ocurre en espacios euclidianos, la derivada de orden k en cada punto es simétrica.

Proposición 9.31. *Si $\varphi\colon \Omega \to W$ es k-veces diferenciable en Ω entonces, para cada $u \in \Omega$, la k-ésima derivada de φ en u es simétrica, es decir,*

$$D^k\varphi(u)[v_1,\ldots,v_k] = D^k\varphi(u)[v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(k)}]$$

para cualesquiera $v_1,\ldots,v_k \in V$ y cualquier permutación $\tau\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}$.

Demostración. Consideramos dos casos.

CASO 1: $k = 2$.

Sean $u \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Como φ es dos veces diferenciable en u existe $\delta > 0$ tal que $u + v \in \Omega$ y

$$\left\|\varphi'(u+v) - \varphi'(u) - D^2\varphi(u)v\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq \varepsilon \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < 2\delta. \tag{9.24}$$

Sean $v, w \in V$ tales que $\text{máx}\{\|v\|_V, \|w\|_V\} < \delta$. Definimos $\sigma\colon [0,1] \to W$ como

$$\sigma(t) := \varphi(u + tv + w) - \varphi(u + tv).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sigma'(t) - D^2\varphi(u)[w,v] = {} & \left[\varphi'(u+tv+w)v - \varphi'(u)v - D^2\varphi(u)[tv+w,v]\right] \\ & - \left[\varphi'(u+tv)v - \varphi'(u)v - D^2\varphi(u)[tv,v]\right]\end{aligned}$$

y aplicando (9.24) obtenemos

$$\begin{aligned}&\left\|\sigma'(t) - D^2\varphi(u)[w,v]\right\|_W \\ &\quad\leq \left\|\varphi'(u+tv+w) - \varphi'(u) - D^2\varphi(u)[tv+w]\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V \\ &\qquad + \left\|\varphi'(u+tv) - \varphi'(u) - D^2\varphi(u)(tv)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V \\ &\quad< 2\varepsilon\left(\|v\|_V + \|w\|_V\right)\|v\|_V \qquad \forall t \in [0,1].\end{aligned}$$

El Corolario 9.18 y la desigualdad anterior implican que

$$\begin{aligned}
&\left\|\sigma(1)-\sigma(0)-D^2\varphi(u)[w,v]\right\|_W \\
&\quad\leq \left\|\sigma(1)-\sigma(0)-\sigma'(0)\right\|_W + \left\|\sigma'(0)-D^2\varphi(u)[w,v]\right\|_W \\
&\quad\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\|\sigma'(t)-\sigma'(0)\right\|_W + \left\|\sigma'(0)-D^2\varphi(u)[w,v]\right\|_W \\
&\quad\leq 3\sup_{t\in[0,1]}\left\|\sigma'(t)-D^2\varphi(u)[w,v]\right\|_W \\
&\quad\leq 6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)\|v\|_V\,.
\end{aligned}$$

Observa que $\sigma(1)-\sigma(0)=\varphi(u+v+w)-\varphi(u+v)-\varphi(u+w)+\varphi(u)$ es simétrica en v y w, por lo que intercambiando los papeles de v y w en la desigualdad anterior obtenemos

$$\left\|\sigma(1)-\sigma(0)-D^2\varphi(u)[v,w]\right\|_W \leq 6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)\|w\|_V\,.$$

En consecuencia,

$$\left\|D^2\varphi(u)[v,w]-D^2\varphi(u)[w,v]\right\|_W \leq 6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)^2$$

si $\text{máx}\left\{\|v\|_V,\|w\|_V\right\}<\delta$.

Si $v,w\in V$ son arbitrarios, escogemos $\lambda\in(0,1]$ tal que $\text{máx}\left\{\|\lambda v\|_V,\|\lambda w\|_V\right\}<\delta$. De la desigualdad anterior se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
\left\|D^2\varphi(u)[v,w]-D^2\varphi(u)[w,v]\right\|_W &= \frac{1}{\lambda^2}\left\|D^2\varphi(u)[\lambda v,\lambda w]-D^2\varphi(u)[\lambda w,\lambda v]\right\|_W \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2}6\varepsilon\left(\|\lambda v\|_V+\|\lambda w\|_V\right)^2 \\
&= 6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)^2.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon>0$ es arbitraria, concluimos que $D^2\varphi(u)[v,w]=D^2\varphi(u)[w,v]$ para cualesquiera $v,w\in V$.

CASO 2: $k>2$.

El resultado se obtiene por inducción usando el caso $k=2$ y el isomorfismo (9.23).

□

Definición 9.32. *Si V y W son espacios de Banach, Ω es un subconjunto abierto de V y $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ definimos*

$$\mathcal{C}^k(\Omega,W):=\left\{\varphi\colon\Omega\to W:\varphi \text{ es de clase } \mathcal{C}^k \text{ en } \Omega\right\},$$

$$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, W) := \left\{\varphi\colon \overline{\Omega} \to W : \varphi \text{ es de clase } \mathcal{C}^k \text{ en } \overline{\Omega}\right\}.$$

Si $W = \mathbb{R}$ escribiremos simplemente

$$\mathcal{C}^k(\Omega) := \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}),$$
$$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}).$$

9.7. La fórmula de Taylor

Si φ es diferenciable en u_0 entonces

$$\varphi(u_0 + v) = \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)v + r_1(v)$$

donde $\lim_{v\to 0} \frac{\|r_1(v)\|_W}{\|v\|_V} = 0$. Es decir, cerca de u_0, φ es la suma de una función constante más una función lineal salvo por un término que tiende a cero más rápidamente que $\|v\|_V$. La fórmula de Taylor generaliza esta afirmación. Asegura que si φ es de clase $\mathcal{C}^k$ en u_0 entonces, cerca de ese punto, φ es una suma de funciones j-multilineales, $j = 0, \dots, k$, salvo por un término que tiende a cero más rápidamente que $\|v\|_V^k$.

El teorema que veremos a continuación es una extensión a espacios de Banach del teorema de Taylor[3] para funciones reales de variable real del cálculo diferencial. Usaremos ese resultado para demostrar éste, por lo que conviene que revises su demostración [Ejercicio 9.59].

Brook Taylor

[3] Brook Taylor (1685-1731) nació Edmonton, Inglaterra. Estudió en la Universidad de Cambridge. Publicó su célebre fórmula en 1715, pero su importancia no fue reconocida sino hasta 1772 cuando J. L. Lagrange se dió cuenta de su potencial y la llamó *el fundamento principal del cálculo diferencial*.

Teorema 9.33 (Taylor)**.** *Si V es un espacio de Banach, Ω es un subconjunto abierto de V, $u_0 \in \Omega$ y $v \in V$ satisfacen que $u_0 + tv \in \Omega$ para todo $t \in [0,1]$, y $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega)$, entonces existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$\begin{aligned}\varphi(u_0+v) = {} & \varphi(u_0) + D\varphi(u_0)v + \frac{1}{2}D^2\varphi(u_0)[v,v] + \cdots \\ & + \frac{1}{k!}D^k\varphi(u_0)[\underbrace{v,\ldots,v}_{k\ \text{veces}}] + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}\varphi(u_0+\theta v)[\underbrace{v,\ldots,v}_{k+1\ \text{veces}}].\end{aligned}$$

Demostración. Observa que la función real de variable real $f(t) := \varphi(u_0 + tv)$ está definida en algún intervalo abierto que contiene a $[0,1]$, es de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en dicho intervalo y

$$D^j f(t) = D^j\varphi(u_0+tv)[\underbrace{v,\ldots,v}_{j\ \text{veces}}], \qquad j = 1,\ldots,k+1. \tag{9.25}$$

En efecto: por la regla de la cadena, $Df(t) = D\varphi(u_0+tv)v$. Argumentando por inducción, si $D^{j-1}f(t) = D^{j-1}\varphi(u_0+tv)[v,\ldots,v]$ para algún $j = 2,\ldots,k+1$, entonces $D^{j-1}f = \mathcal{E} \circ \left(D^{j-1}\varphi\right) \circ \sigma$, donde $\sigma(t) := u_0 + tv$ y $\mathcal{E}$ es la función que a cada $F \in \mathcal{L}_{j-1}(V,\mathbb{R})$ le asocia el valor $F[v,\ldots,v] \in \mathbb{R}$. Observa que $\mathcal{E}$ es lineal y continua [Ejercicio 9.56]. Entonces, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$D^j f(t) = \left(D^j\varphi(u_0+tv)v\right)[\underbrace{v,\ldots,v}_{j-1\ \text{veces}}].$$

Esta función corresponde a (9.25) bajo el isomorfismo (9.23).

Aplicando el teorema de Taylor para funciones de variable real [Ejercicio 9.59] a la función f, concluimos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi(u_0+v) = f(1) = {} & f(0) + Df(0) + \frac{1}{2}D^2 f(0) + \cdots \\ & + \frac{1}{k!}D^k f(0) + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}f(\theta) \\ = {} & \varphi(u_0) + D\varphi(u_0)v + \frac{1}{2}D^2\varphi(u_0)[v,v] + \cdots \\ & + \frac{1}{k!}D^k\varphi(u_0)[\underbrace{v,\ldots,v}_{k\ \text{veces}}] + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}\varphi(u_0+\theta v)[\underbrace{v,\ldots,v}_{k+1\ \text{veces}}].\end{aligned}$$

Esta es la identidad deseada. $\square$

Corolario 9.34 (Fórmula de Taylor)**.** *Si V es un espacio de Banach, Ω es un subconjunto abierto de V, $u_0 \in \Omega$ y $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, entonces la función*

$$r_k(v) := \varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - D\varphi(u_0)v - \cdots - \frac{1}{k!}D^k\varphi(u_0)[\underbrace{v, \ldots, v}_{k \text{ veces}}] \qquad (9.26)$$

está definida en una vecindad de 0 *en V y satisface*

$$\lim_{v \to 0} \frac{r_k(v)}{\|v\|_V^k} = 0.$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que $B_V(u_0, \delta) \subset \Omega$. Aplicando el Teorema 9.33 con k en vez de $k + 1$ obtenemos que, para cada $v \in B_V(0, \delta)$, existe $\theta_v \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi(u_0 + v) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} D^j\varphi(u_0)[v, \ldots, v] + \frac{1}{k!} D^k\varphi(u_0 + \theta_v v)[v, \ldots, v].$$

Por otra parte, de la definición de r_k se sigue que

$$\varphi(u_0 + v) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j\varphi(u_0)[v, \ldots, v] + r_k(v).$$

Tomando la diferencia de estas identidades obtenemos

$$r_k(v) = \frac{1}{k!}\left(D^k\varphi(u_0 + \theta_v v) - D^k\varphi(u_0)\right)[v, \ldots, v].$$

En consecuencia, si $v \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{|r_k(v)|}{\|v\|_V^k} &= \frac{1}{k!}\frac{\left|\left(D^k\varphi(u_0 + \theta_v v) - D^k\varphi(u_0)\right)[v, \ldots, v]\right|}{\|v\|_V^k} \\ &\leq \frac{1}{k!}\left\|D^k\varphi(u_0 + \theta_v v) - D^k\varphi(u_0)\right\|_{\mathcal{L}_k(V,\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Dado que $D^k\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$ es continua en u_0 y que $\theta_v \in (0, 1)$, concluimos que $\lim_{v \to 0} \frac{r_k(v)}{\|v\|_V^k} = 0$. □

La función

$$P_k(v) := \varphi(u_0) + D\varphi(u_0)v + \cdots + \frac{1}{k!}D^k\varphi(u_0)[\underbrace{v, \ldots, v}_{k \text{ veces}}]$$

se llama la **expansión de Taylor de grado k de φ alrededor de u_0**.

9.8. Ejercicios

Ejercicio 9.35. *Prueba que*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}$$

es una norma en $\mathcal{L}(V,W)$.

Ejercicio 9.36. *Si identificamos al espacio* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *con el espacio* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *de matrices de* $m\times n$ *de la manera usual, este espacio resulta isomorfo a* $\mathbb{R}^{mn}$. *Prueba que cualquier isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\iota\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}^{mn}$$

es un homeomorfismo para cualquier norma que le demos a $\mathbb{R}^{mn}$.

Ejercicio 9.37. *Prueba que, para todo* $T\in\mathcal{L}(V,W)$,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{v\in\bar{B}_V(0,1)} \|Tv\|_W = \sup_{v\in S_V(0,1)} \|Tv\|_W\,.$$

donde $\bar{B}_V(0,1) := \{v\in V : \|v\|_V\leq 1\}$ *y* $S_V(0,1) := \{v\in V : \|v\|_V = 1\}$.

Ejercicio 9.38. *Sean* V,W,Z *espacios de Banach. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $S\in\mathcal{L}(V,W)$ *y* $T\in\mathcal{L}(W,Z)$ *entonces*

$$\|T\circ S\|_{\mathcal{L}(V,Z)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)}\,\|S\|_{\mathcal{L}(V,W)}\,.$$

(b) Si $S_k\to S$ *en* $\mathcal{L}(V,W)$ *y* $T_k\to T$ *en* $\mathcal{L}(W,Z)$ *entonces* $T_k\circ S_k\to T\circ S$ *en* $\mathcal{L}(V,Z)$.

Ejercicio 9.39. *Prueba que, si* $\varphi,\psi\colon\Omega\to W$ *son diferenciables en* u_0, *entonces* $\lambda\varphi+\mu\psi$ *es diferenciable en* u_0 *y*

$$(\lambda\varphi+\mu\psi)'(u_0) = \lambda\varphi'(u_0)+\mu\psi'(u_0).$$

Ejercicio 9.40. *Sean* V_1,V_2 *espacios de Banach,* $(u_1,u_2)\in V_1\times V_2$. *Prueba que las funciones*

$$\iota_{1,u_2}\colon V_1\to V_1\times V_2,\qquad \iota_{1,u_2}(v_1) := (v_1,u_2),$$

$$\iota_{2,u_1} : V_2 \to V_1 \times V_2, \qquad \iota_{2,u_1}(v_2) := (u_1, v_2),$$

son diferenciables y calcula su derivada.

Ejercicio 9.41. *Prueba que la función* $\varphi \colon \mathcal{C}^0([0,1], V) \to V \times V$ *dada por*

$$\varphi(\sigma) := (\sigma(0), \sigma(1))$$

es diferenciable y calcula su derivada.

Ejercicio 9.42. *Prueba que la función* $\varphi \colon \mathcal{C}^0[0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(u) := \int_0^1 u^2$$

es diferenciable y calcula su derivada.

Ejercicio 9.43. Un subconjunto A de un espacio métrico X es **conexo** si para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ existe una trayectoria de a_1 a a_2 en A.

Prueba que, si Ω *es un subconjunto abierto y conexo de un espacio de Banach* V, $\varphi \colon \Omega \to W$ *es diferenciable en* Ω *y* $\varphi'(u) = 0$ *para todo* $u \in \Omega$, *entonces* φ *es constante en* Ω. (Sugerencia: Usa el teorema del valor medio.)

Ejercicio 9.44. *Sea* $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prueba que φ *es diferenciable en* $(0,0)$. (Sugerencia: Usa la desigualdad de Young, Lema 2.11.)

Ejercicio 9.45. *Sea* $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prueba que existen las derivadas parciales $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ *y* $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)$, *pero que no existe ninguna otra derivada direccional en* $(0,0)$, *es decir, si* $xy \neq 0$ *no existe el límite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(tx,ty) - \varphi(0,0)}{t}.$$

Ejercicio 9.46. *Sea* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prueba que existen todas las derivadas direccionales de φ *en* $(0,0)$*, pero que* φ *no es Gâteaux-diferenciable en* $(0,0)$.

Ejercicio 9.47. *Prueba que la función* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es Gâteaux-diferenciable en $(0,0)$*, pero no es diferenciable en* $(0,0)$.

Ejercicio 9.48. *Considera las funciones* $f_1, f_2, f_\infty\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_1(x) := \|x\|_1, \qquad f_2(x) := \|x\|_2, \qquad f_\infty(x) := \|x\|_\infty.$$

Investiga en qué puntos son diferenciables y calcula su derivada en dichos puntos.

Ejercicio 9.49. *Considera la función*

$$\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}, \qquad \|x\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

(a) *Prueba que* $\|\cdot\|_1$ *es Gâteaux-diferenciable en* $x = (x_k)$ *si y sólo si* $x_k \neq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Calcula, en este caso, su derivada de Gâteaux.*

(b) *Prueba que* $\|\cdot\|_1$ *no es Fréchet-diferenciable en ningún punto.*

Ejercicio 9.50. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$*. Prueba que la función* $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(t) := \int_t^b f(s)ds$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ *y su derivada es* $\varphi'(t) = -f(t)$.

Ejercicio 9.51. *Sea* $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua, cuya derivada parcial respecto a la segunda variable existe y es continua en* $[a,b] \times \mathbb{R}$.

(a) *Prueba que la función* $\varphi\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(u) := \int_a^b f(s,u(s))ds$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ *y su derivada está dada por*

$$\varphi'(u)v = \int_a^b \partial_2 f(s,u(s))\,[v(s)]\,ds.$$

(b) *Prueba que la función* $\Phi\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ *dada por*

$$\Phi(u)(t) := \int_a^t f(s,u(s))ds$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ *y su derivada está dada por*

$$\left(\Phi'(u)v\right)(t) = \int_a^t \partial_2 f(s,u(s))\,[v(s)]\,ds.$$

Ejercicio 9.52. (a) *Prueba que toda función* $T \in \mathcal{L}(V,W)$ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula su derivada de orden* k *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(b) *Prueba que toda función* $F \in \mathcal{L}(V_1,V_2;W)$ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula su derivada de orden* k *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9.53. *Sea* $F \in \mathcal{L}_2(V,\mathbb{R})$. *Si* F *es simétrica, es decir, si* $F[v_1,v_2] = F[v_2,v_1]$ *para cualesquiera* $v_1,v_2 \in V$, *prueba que la función*

$$Q\colon V \to \mathbb{R}, \qquad Q(v) = \frac{1}{2}F[v,v],$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula todas sus derivadas.*

Ejercicio 9.54. *Prueba que la función* $\varphi\colon \mathcal{C}^0[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$ *dada por* $\varphi(u) := u^2$ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula todas sus derivadas.*

Ejercicio 9.55. *Sea* $K\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y simétrica. Prueba que la función* $\varphi\colon \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(u) := \int_a^b \int_a^b K(x,y)u(x)u(y)dxdy$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula todas sus derivadas.*

Ejercicio 9.56. *Sean* $V_1, \dots, V_n, W$ *espacios de Banach y* $v_j \in V_j$. *Prueba que la función*

$$\mathcal{E}\colon \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W) \to W, \qquad \mathcal{E}(F) := F[v_1, \dots, v_n],$$

es lineal y continua.

Ejercicio 9.57. *Considera la función* $\iota\colon \mathcal{L}(V_1, V_2; W) \to \mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W))$ *dada por* $\iota(F) := \hat{F}$ *donde*

$$(\hat{F} v_1) v_2 = F[v_1, v_2], \qquad \forall v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Prueba que

(a) ι *está bien definida, es decir,* $\hat{F} \in \mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W))$ *si* $F \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$*,*

(b) ι *es un isomorfismo de espacios vectoriales,*

(c) ι *es una isometría, es decir,*

$$\|F\|_{\mathcal{L}(V_1, V_2; W)} = \left\|\hat{F}\right\|_{\mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W))} \qquad \forall F \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W).$$

Ejercicio 9.58. *Sean* $V_1, \dots, V_n, W$ *espacios de Banach,* Ω *un subconjunto abierto de* $V := V_1 \times \cdots \times V_n$ *y* $\varphi\colon \Omega \to W$.

(a) Prueba que si φ *es de clase* $\mathcal{C}^2$ *entonces existen las derivadas parciales de orden* 2*,*

$$\partial_j \partial_i \varphi(u) := \partial_j\, (\partial_i \varphi)\, (u) \in \mathcal{L}(V_j, \mathcal{L}(V_i, W)) \cong \mathcal{L}(V_j, V_i; W),$$

para cualesquiera $u \in \Omega$*,* $i, j = 1, \dots, n$*, y que se cumple*

$$D^2\varphi(u)[v, w] = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j \partial_i \varphi(u)[v_j, w_i]$$

para cualesquiera $v = (v_1, \dots, v_n)$*,* $w = (w_1, \dots, w_n) \in V$.

(b) Prueba que, si φ *es de clase* $\mathcal{C}^2$*, entonces* $\partial_j \partial_i \varphi(u) = \partial_i \partial_j \varphi(u)$ *para cualesquiera* $u \in \Omega$*,* $i, j = 1, \dots, n$.

(c) Prueba que, si las derivadas parciales $\partial_j \partial_i \varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}(V_j, V_i; W)$ *de orden* 2 *existen y son continuas para cualesquiera* $i, j = 1, \dots, n$*, entonces* φ *es de clase* $\mathcal{C}^2$.

(d) Formula y demuestra los resultados análogos para φ *de clase* $\mathcal{C}^k$*,* $k \geq 2$.

Ejercicio 9.59 (Teorema de Taylor para funciones de variable real)**.** *Prueba que si $f \in \mathcal{C}^{k+1}(a,b)$ y $0 \in (a,b)$ entonces, para cada $t \in (a,b)$, existe un punto $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(t) = f(0)+Df(0)t+\frac{1}{2}D^2f(0)t^2+\cdots+\frac{1}{k!}D^kf(0)t^k+\frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}f(\theta t)t^{k+1}.$$

Ejercicio 9.60. *Sea $Q: V \to \mathbb{R}$ como en el* Ejercicio 9.53.

(a) Para cualesquiera $k \geq 2$ y $u_0 \in V$, calcula la expansión de Taylor de grado k de Q alrededor de u_0.

(b) Calcula la función r_k definida en (9.26).

Ejercicio 9.61. *Sea $\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\right\}$ y sea $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$\varphi(x,y) := \frac{x-y}{x+y}.$$

(a) Calcula la expansión de Taylor de grado 2 de la función φ alrededor de $(1,1)$.

(b) Comprueba directamente que la función r_2 definida en (9.26) *con $u_0 = (1,1)$ satisface*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Ejercicio 9.62. *Utiliza una expansión de Taylor de la función $\varphi(x,y) := \cos(x+y)$ para calcular*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

10

El teorema de la función implícita

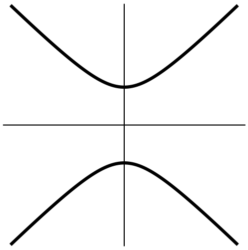
Sean $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, y $c \in \mathbb{R}$. Queremos obtener información sobre la estructura del conjunto de soluciones $\xi \in \Omega$ de la ecuación

$$\varphi(\xi) = c, \tag{10.1}$$

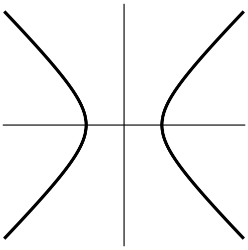
al que denotaremos por

$$M := \{\xi \in \Omega : \varphi(\xi) = c\}.$$

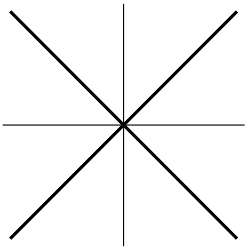
Veamos un ejemplo. Si $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ entonces para $c < 0$ el conjunto M tiene dos componentes: una de ellas es la gráfica de la función $x \mapsto \sqrt{x^2 - c}$ y la otra es la gráfica de $x \mapsto -\sqrt{x^2 - c}$. Análogamente, si $c > 0$, el conjunto M tiene dos componentes: la gráfica de la función $y \mapsto \sqrt{c + y^2}$ y la de la función $y \mapsto -\sqrt{c + y^2}$. En cambio, si $c = 0$, no existe ninguna vecindad de $(0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ cuya intersección con M sea la gráfica de alguna función.



$x^2 - y^2 = c < 0$



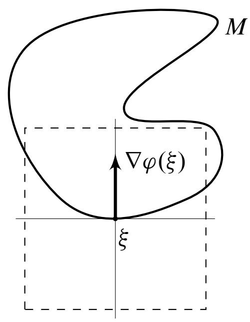
$x^2 - y^2 = c > 0$



$x^2 - y^2 = 0$

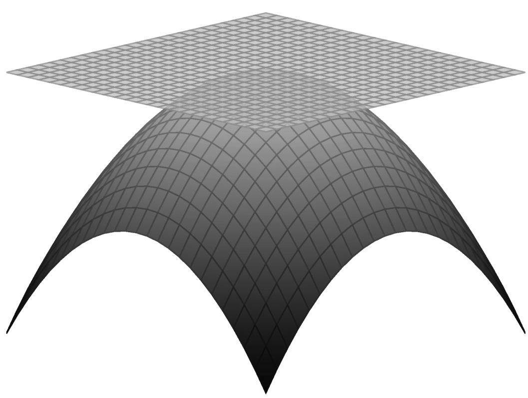
Nota que $\nabla\varphi(x, y) \neq (0, 0)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. En este caso, la recta perpendicular a $\nabla\varphi(x, y)$ es tangente a M en el punto (x, y), es decir, M se parece a dicha recta en una vecindad del punto.

Los conjuntos M de soluciones de (10.1) que tienen la propiedad de que $\nabla\varphi(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in M$ se llaman *variedades*. El teorema de la función implícita asegura que, si M es una variedad entonces, en una vecindad de cada punto $\xi \in M$, M es la gráfica de una función cuyo dominio es un abierto en el subespacio de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a $\nabla\varphi(\xi)$ y cuyo codominio es el espacio generado por $\nabla\varphi(\xi)$.



En particular, cerca de ξ, M se parece a $\mathbb{R}^{n-1}$. Esto permite extender conceptos y resultados del cálculo diferencial a las variedades.

En las aplicaciones interesa a menudo encontrar mínimos o máximos locales de una cierta función $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sobre una variedad M. El teorema de la función implícita proporciona un criterio sencillo para detectarlos: si $\xi \in M$ es un máximo o un mínimo local de g en M, entonces $\nabla g(\xi)$ es perpendicular al espacio tangente a M en ξ. Por ejemplo, si $g(x,y,z) := z$ es la función que a cada punto de $\mathbb{R}^3$ le asocia su altura respecto al plano xy, los máximos y mínimos locales de g sobre una superficie M en $\mathbb{R}^3$ tienen la propiedad de que el plano tangente a M en tales puntos es paralelo al plano xy.



Los resultados anteriores son válidos también en espacios de Banach y tienen aplicaciones importantes en ese contexto, por ejemplo, para probar la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales no lineales[1].

10.1. El teorema de la función implícita

Sean Y un espacio de Banach, Ω un subconjunto abierto de Y, $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $c \in \mathbb{R}^m$. Como mencionamos en la introducción, nos interesa obtener información sobre la estructura del conjunto de soluciones $u \in \Omega$ de la ecuación

$$\varphi(u) = c, \tag{10.2}$$

al que denotaremos por

$$M := \{u \in \Omega : \varphi(u) = c\}.$$

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.1. *Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Si $c > 0$, el conjunto M es la esfera de radio $\sqrt{c}$ con centro en el origen. Ésta tiene la propiedad de que, localmente, se parece a $\mathbb{R}^{n-1}$ en el siguiente sentido: Para cada punto $\xi \in M$ existe un subespacio vectorial $T_\xi M$ de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$, a saber*

$$T_\xi M := \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \xi = 0\},$$

tal que, en una vecindad de ξ, el conjunto M es la gráfica de una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ cuyo dominio es la bola abierta de radio $\sqrt{c}$ en $T_\xi M$ y cuyo codominio es el complemento ortogonal de $T_\xi M$. Dicha función f está dada por

$$f(y) := \left(\sqrt{c - \|y\|^2}\right)\frac{\xi}{\|\xi\|}, \qquad \forall y \in T_\xi M \text{ tal que } \|y\| < \sqrt{c}.$$

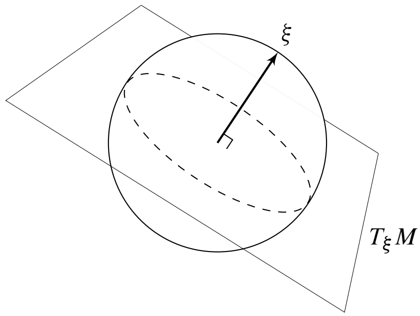
La gráfica de f, definida como

$$\operatorname{graf}(f) := \left\{(y, z) : y \in T_\xi M,\ \|y\| < \sqrt{c},\ z = f(y)\right\},$$

resulta ser el conjunto $\{x \in M : x \cdot \xi > 0\}$, el cual es abierto en M y contiene a ξ.

Observa que $\nabla\varphi(\xi) = 2\xi$, por lo que $T_\xi M = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nabla\varphi(\xi) = 0\}$.

[1] Consulta, por ejemplo, [AP93].



Queremos obtener una condición suficiente para que el conjunto de soluciones de la ecuación (10.2) sea, localmente, la gráfica de una función. El siguiente concepto jugará un papel fundamental.

Definición 10.2. *Decimos que $c \in \mathbb{R}^m$ es un **valor regular de** $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ si $\varphi'(u)\colon Y \to \mathbb{R}^m$ es suprayectiva para todo $u \in M := \{w \in \Omega : \varphi(w) = c\}$.*

El subespacio vectorial

$$T_u M := \ker \varphi'(u) = \left\{v \in Y : \varphi'(u)v = 0\right\}$$

*de Y se llama el **espacio tangente a** M en el punto $u \in M$.*

Nota que, si $M = \emptyset$, entonces c es un valor regular de φ. Si c es un valor regular de φ y $M \neq \emptyset$, necesariamente $\dim Y \geq m$. Observa además que, dado que $\varphi'(u)\colon Y \to \mathbb{R}^m$ es continua, el espacio tangente $T_u M$ es un subespacio cerrado de Y y, por tanto, es un espacio de Banach.

Ejemplo 10.3. *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ entonces c es un valor regular de φ si y sólo si $\nabla\varphi(\xi) \neq 0$ para cada $\xi \in M$. En este caso,*

$$T_\xi M = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nabla\varphi(\xi) = 0\},$$

es decir, $T_\xi M$ es el subespacio ortogonal a $\nabla\varphi(\xi)$.

Este ejemplo incluye a la función $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, considerada en el Ejemplo 10.1, y es un caso particular del siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.4. *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathcal{C}^1$, $m \leq n$, entonces c es un valor regular de φ si y sólo si el conjunto*

$$\{\nabla\varphi_1(\xi), \ldots, \nabla\varphi_m(\xi)\}$$

es linealmente independiente para cada $\xi \in M$. En ese caso,

$$T_\xi M = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nabla \varphi_j(\xi) = 0,\ j = 1, \ldots, m \right\}$$

es el complemento ortogonal del espacio generado por $\{\nabla \varphi_1(\xi), \ldots, \nabla \varphi_m(\xi)\}$.

Demostración. En efecto, $\varphi'(\xi)$ es la función lineal dada por la matriz jacobiana

$$\varphi'(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix},$$

y ésta es suprayectiva si y sólo si la matriz tiene rango máximo, es decir, sí y sólo si sus renglones son linealmente independientes.

Nota que $\varphi'(\xi) y = (\nabla \varphi_1(\xi) \cdot y, \ldots, \nabla \varphi_m(\xi) \cdot y)$, así que $y \in T_\xi M$ si y sólo si $\nabla \varphi_j(\xi) \cdot y = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$. □

Si queremos expresar localmente a M como la gráfica de una función definida en un subconjunto abierto del espacio tangente, necesitamos primero expresar a Y como un producto de espacios de Banach de la forma $T_u M \times W_u$. Si $Y = \mathbb{R}^n$ podemos simplemente tomar a W_u como el complemento ortogonal de $T_u M$.

Desde un punto de vista puramente algebraico, todo subespacio V de un espacio vectorial Y tiene un espacio complementario, es decir, existe un subespacio W de Y tal que Y es linealmente isomorfo a $V \times W$. Sin embargo, si Y es un espacio de Banach de dimensión infinita y V es cerrado en Y, ni W es necesariamente cerrado en Y, ni Y es necesariamente homeomorfo a $V \times W$.

En el caso particular que estamos considerando sí podemos expresar a Y como $T_u M \times W_u$ de manera apropiada. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10.5. *Si Y es un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R}^m)$ es suprayectiva y $V := \ker T$, entonces existe un subespacio vectorial cerrado W de Y tal que la restricción $T|_W : W \to \mathbb{R}^m$ de T a W es un isomorfismo de espacios vectoriales y la función lineal*

$$\iota \colon V \times W \to Y, \qquad \iota(v, w) := v + w,$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Escogemos $w_j \in Y$ tal que $T w_j = e_j$, $j = 1, \ldots, m$, y denotamos por W al subespacio vectorial de Y generado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$. La función lineal $S \colon \mathbb{R}^m \to Y$ dada por

$$S(x_1, \ldots, x_m) := x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m$$

es también continua, ya que su dominio es de dimensión finita (ver Ejercicio 4.42). Además, cumple que $TSx = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. En consecuencia, $y - STy \in \ker T$ para todo $y \in Y$ y la función

$$\pi : Y \to V \times W, \qquad \pi(y) := (y - STy, STy),$$

es lineal y continua (ver Ejercicio 3.49). Claramente, ι es lineal y continua y $\iota \circ \pi = \mathrm{id}_Y$. Observa que $ST(v + w) = STw = w$ para todo $v \in V$, $w \in W$. Por tanto,

$$\pi(\iota(v, w)) = (v + w - ST(v + w),\ ST(v + w)) = (v, w),$$

es decir, $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{V\times W}$. Esto prueba que ι es un homeomorfismo.

Para probar que W es cerrado en Y tomemos una sucesión (y_k) en W tal que $y_k \to y$ en Y. Como ST es continua, se tiene que $y_k = STy_k \to STy$. En consecuencia, $y = STy \in W$. Esto prueba que W es cerrado en Y. □

Definición 10.6. *Una función lineal y biyectiva $T\colon V \to W$ entre dos espacios de Banach V y W que es además un homeomorfismo se llama un* ***isomorfismo de Banach****.*

De la Proposición 10.5 se desprende que, si c es un valor regular de φ entonces, para cada $u \in M$, existe un subespacio cerrado W_u de Y tal que la función

$$\iota\colon T_uM \times W_u \to Y, \qquad \iota(v, w) := v + w,$$

es un isomorfismo de Banach. El teorema de la función implícita, que enunciaremos a continuación, garantiza que M se puede expresar localmente como la gráfica de una función cuyo dominio es un abierto de T_uM y cuyo codominio es W_u.

Teorema 10.7 (de la función implícita)**.** *Sean V, W, Z espacios de Banach, Ω un subconjunto abierto de $V \times W$, $(v_0, w_0) \in \Omega$ y $\varphi\colon \Omega \to Z$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω. Si $\varphi(v_0, w_0) = c$ y $\partial_2\varphi(v_0, w_0) \in \mathcal{L}(W, Z)$ es un isomorfismo de Banach, entonces existen $\delta, \eta > 0$ tales que $B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta) \subset \Omega$ y una función $f\colon B_V(v_0, \delta) \to W$ de clase $\mathcal{C}^1$ con las siguientes propiedades:*

(I) El conjunto de soluciones $(v, w) \in B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta)$ de la ecuación

$$\varphi(v, w) = c$$

coincide con la gráfica de f,

$$\mathrm{graf}(f) := \{(v, f(v)) : v \in B_V(v_0, \delta)\}.$$

En particular, $f(v_0) = w_0$ y $f(v) \in B_W(w_0, \eta)$ para todo $v \in B_V(v_0, \delta)$.

(II) Para todo $v \in B_V(v_0, \delta)$ *se cumple que* $\partial_2\varphi(v, f(v))$ *es un isomorfismo de Banach y*

$$f'(v) = -\left[\partial_2\varphi(v, f(v))\right]^{-1} \circ \partial_1\varphi(v, f(v)).$$

Pospondremos la demostración de este teorema para la Sección 10.4 de este capítulo, y procederemos a presentar algunas consecuencias importantes.

La Proposición 10.5 asegura que, si $c \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, entonces para cada $u \in M$ existe un subespacio cerrado W_u de Y tal que la función

$$\iota\colon T_uM \times W_u \to Y, \qquad \iota(v, w) := v + w,$$

es un isomorfismo de Banach. Identificando a Y con $T_uM \times W_u$ mediante dicho isomorfismo, se obtiene que $\partial_2\varphi(u) \equiv \varphi'(u)\mid_{W_u}\colon W_u \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Nota que W_u no es único. Para cualquier elección de W_u con las propiedades mencionadas se tiene el siguiente resultado, que es consecuencia inmediata del teorema de la función implícita.

Corolario 10.8. *Si* $c \in \mathbb{R}^m$ *es un valor regular de* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ *y* $u = v_0 + w_0 \in M$ *con* $v_0 \in T_uM$ *y* $w_0 \in W_u$*, entonces existen* $\delta, \eta > 0$ *y una función* $f\colon B_{T_uM}(v_0, \delta) \to W_u$ *de clase* $\mathcal{C}^1$ *tal que*

$$M \cap (B_{T_uM}(v_0, \delta) \times B_{W_u}(w_0, \eta)) = \{v + f(v) : v \in B_{T_uM}(v_0, \delta)\}.$$

Más aún, $\partial_2\varphi(v + f(v))$ *es un isomorfismo y*

$$f'(v) = -\left[\partial_2\varphi(v + f(v))\right]^{-1} \circ \partial_1\varphi(v + f(v))$$

para cada $v \in B_{T_uM}(v_0, \delta)$.

Es importante hacer notar que, si la función φ del Teorema 10.7 y del Corolario 10.8 es de clase $\mathcal{C}^k$, entonces la función f también es de clase $\mathcal{C}^k$ [Ejercicio 10.24].

10.2. Extremos locales de una función diferenciable sobre una variedad

Sean Ω un subconjunto abierto de un espacio de Banach Y, $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, $c \in \mathbb{R}^m$ y $M := \{u \in \Omega : \varphi(u) = c\}$. El Corolario 10.8 permite caracterizar al espacio tangente como sigue.

Proposición 10.9. *Si c es un valor regular de φ entonces, para cada $u \in M$,*

$$T_u M = \left\{\sigma'(0) : \sigma \in \Gamma_u(M)\right\},$$

donde $\Gamma_u(M)$ es el conjunto de todas las funciones $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$ de clase $\mathcal{C}^1$ tales que $\sigma(0) = u$ y $\sigma(t) \in M$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demostración. $\supset$): Si $\sigma \in \Gamma_u(M)$ entonces $(\varphi \circ \sigma)(t) = c$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por tanto, $(\varphi \circ \sigma)'(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En particular, si $t = 0$, usando la regla de la cadena obtenemos

$$0 = (\varphi \circ \sigma)'(0) = \varphi'(u)\left[\sigma'(0)\right].$$

Esto prueba que $\sigma'(0) \in \ker \varphi'(u) =: T_u M$.

$\subset$): Inversamente, sea $\overline{v} \in T_u M$. Si escribimos $u = v_0 + w_0$ con $v_0 \in T_u M$ y $w_0 \in W_u$, el Corolario 10.8 asegura que existen $\delta, \eta > 0$ y una función $f\colon B_{T_u M}(v_0, \delta) \to W_u$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$M \cap [B_{T_u M}(v_0, \delta) \times B_{W_u}(w_0, \eta)] = \{v + f(v) : v \in B_{T_u M}(v_0, \delta)\}$$

y

$$f'(v_0) = -\left[\partial_2 \varphi(u)\right]^{-1} \circ \partial_1 \varphi(u).$$

Escogemos $\varepsilon > 0$ tal que $v_0 + t\overline{v} \in B_{T_u M}(v_0, \delta)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y definimos $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$ como

$$\sigma(t) := v_0 + t\overline{v} + f(v_0 + t\overline{v}).$$

Claramente, $\sigma \in \Gamma_u(M)$. Como $\overline{v} \in T_u M$ se tiene que $\partial_1 \varphi(u)\overline{v} = \varphi'(u)\overline{v} = 0$ y, en consecuencia,

$$f'(v_0)\overline{v} = -\left[\partial_2 \varphi(u)\right]^{-1}\left[\partial_1 \varphi(u)\overline{v}\right] = 0.$$

Por tanto,

$$\sigma'(0) = \overline{v} + f'(v_0)\overline{v} = \overline{v}.$$

Esto prueba que $T_u M \subset \{\sigma'(0) : \sigma \in \Gamma_u(M)\}$. $\square$

Así pues, $T_u M$ es el conjunto de velocidades en el punto u de todas las trayectorias continuamente diferenciables en M que pasan por u. Esto justifica llamarlo el espacio tangente a M en u. Nota que esta última caracterización no depende de la función φ.

Definición 10.10. *Un subconjunto M de un espacio de Banach Y se llama una* ***subvariedad de Y de clase $\mathcal{C}^k$ y de codimensión*** *m si existen una función $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^k$ definida en un abierto Ω de Y que contiene a M y un valor regular $c \in \mathbb{R}^m$ de φ tales que $M = \{u \in \Omega : \varphi(u) = c\}$.*

Las subvariedades aparecen a menudo en las aplicaciones como restricciones de una función cuyos máximos y mínimos locales sobre la variedad interesa encontrar.

Definición 10.11. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que $\xi \in A$ es un* ***mínimo local*** *de $g\colon X \to \mathbb{R}$ en A si existe $\delta > 0$ tal que*

$$g(\xi) \leq g(x) \qquad \forall x \in A \cap B_X(\xi, \delta).$$

Decimos que $\xi \in A$ es un ***máximo local*** *de $g\colon X \to \mathbb{R}$ en A si existe $\delta > 0$ tal que*

$$g(\xi) \geq g(x) \qquad \forall x \in A \cap B_X(\xi, \delta).$$

Los mínimos y máximos locales de una función en una variedad tienen la siguiente propiedad.

Proposición 10.12. *Sean M una subvariedad de un espacio de Banach Y, Ω un subconjunto abierto de Y que contiene a M y $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Si u es un mínimo (máximo) local de g en M, entonces*

$$g'(u)v = 0 \qquad \forall v \in T_u M.$$

Demostración. Sean $v \in T_u M$ y $\sigma \in \Gamma_u(M)$, definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que $\sigma'(0) = v$. Si u es un mínimo (máximo) local de g en M, entonces 0 es un mínimo (máximo) local de $g \circ \sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. Por tanto,

$$0 = (g \circ \sigma)'(0) = g'(u)\left[\sigma'(0)\right] = g'(u)v,$$

como afirma el enunciado. □

Definición 10.13. *Sean M una subvariedad de un espacio de Banach Y, Ω un subconjunto abierto de Y que contiene a M y $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Se dice que un punto $u \in M$ es un* ***punto crítico de*** *g* ***en*** *M si*

$$g'(u)v = 0 \qquad \forall v \in T_u M.$$

La Proposición 10.12 afirma que los máximos y mínimos locales son puntos críticos de g en M. Para $Y = \mathbb{R}^n$ podemos caracterizar a los puntos críticos del siguiente modo.

Teorema 10.14 (multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, $c \in \mathbb{R}^m$ un valor regular de φ y $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = c\}$. Sea $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces ξ es un punto crítico de g en M si y sólo si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ únicos tales que*

$$\nabla g(\xi) = \lambda_1 \nabla\varphi_1(\xi) + \cdots + \lambda_m \nabla\varphi_m(\xi) \qquad y \qquad \varphi(\xi) = c.$$

Demostración. Por definición, ξ es un punto crítico de g en M si y sólo si $\nabla g(\xi)$ es ortogonal a $T_\xi M$. En el Ejemplo 10.4 vimos que $\{\nabla\varphi_1(\xi), \ldots, \nabla\varphi_m(\xi)\}$ es una base del complemento ortogonal de $T_\xi M$. En consecuencia, ξ es un punto crítico de g en M si y sólo si $\nabla g(\xi)$ se expresa de manera única como

$$\nabla g(\xi) = \lambda_1 \nabla\varphi_1(\xi) + \cdots + \lambda_m \nabla\varphi_m(\xi)$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 10.15. *Sea $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$. Los puntos críticos de g en la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ son los puntos de la forma $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ y $(0, \ldots, 0, \pm 1)$. Los primeros son máximos y los últimos son mínimos de g en $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Demostración. Por el teorema anterior, ξ es punto crítico de g en $\mathbb{S}^{n-1}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$2(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) = \nabla g(\xi) = \lambda \nabla\varphi(\xi) = \lambda 2(\xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad \text{y} \qquad \varphi(\xi) = 1, \tag{10.3}$$

donde $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Si $\xi_j \neq 0$ para algún $j = 1, \ldots, n-1$, entonces ξ satisface (10.3) si y sólo si $\lambda = 1$ y $\xi_n = 0$. Si $\xi_1 = \cdots = \xi_{n-1} = 0$, entonces $\xi_n = \pm 1$ y la igualdad (10.3) se cumple para $\lambda = 0$. Por tanto, los puntos críticos de g en $\mathbb{S}^{n-1}$ son los puntos de la forma $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ y $(0, \ldots, 0, \pm 1)$. Para verificar si son máximos o mínimos basta observar que

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) = 1, \qquad g(0, \ldots, 0, \pm 1) = 0,$$

y $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

10.3. Homeomorfismos lineales

Consideremos el conjunto de isomorfismos de Banach de V a W al que denotaremos

$$\mathcal{H}(V, W) := \{T \in \mathcal{L}(V, W) : T \text{ es isomorfismo de Banach}\}.$$

Un elemento de $\mathcal{H}(V, W)$ es una función $T\colon V \to W$ lineal, continua y biyectiva, cuyo inverso es lineal y continuo.

Si $T \in \mathcal{H}(V, V)$ denotamos por

$$T^0 := I, \qquad T^k := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ veces}},$$

donde I es la identidad. Escribiremos TS en vez de $T \circ S$ para denotar a la composición.

Probaremos que $\mathcal{H}(V,W)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(V,W)$. Para ello usaremos el siguiente resultado.

Lema 10.16. *Si $S \in \mathcal{L}(V,V)$ y $\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)} < 1$, entonces $I - S \in \mathcal{H}(V,V)$,*

$$(I-S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k,$$

$$\left\|(I-S)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \frac{1}{1 - \left\|S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)}}$$

y

$$\lim_{S\to 0} \frac{\left\|(I-S)^{-1} - I - S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)}}{\left\|S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)}} = 0.$$

Demostración. Como $\left\|S^k\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \|S\|^k_{\mathcal{L}(V,V)}$ (ver Ejercicio 9.38) y $\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)} < 1$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|S^k\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|S\|^k_{\mathcal{L}(V,V)} = \frac{1}{1 - \left\|S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)}}.$$

El Teorema 5.25 asegura entonces que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} S^k \tag{10.4}$$

converge en $\mathcal{L}(V,V)$ y que

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} S^k\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \frac{1}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}}. \tag{10.5}$$

Observa que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(I-S)\left(\sum_{k=0}^{n} S^k\right) = I - S^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} S^k\right)(I-S).$$

Dado que la serie (10.4) converge, la sucesión $S^k \to 0$ en $\mathcal{L}(V,V)$. Por tanto, haciendo tender $n \to \infty$, obtenemos

$$(I-S)\left(\sum_{k=0}^{\infty} S^k\right) = I = \left(\sum_{k=0}^{\infty} S^k\right)(I-S).$$

Esto prueba que $I - S \in \mathcal{H}(V, V)$ y que

$$(I - S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k.$$

De la desigualdad (10.5) se sigue que

$$\left\|(I - S)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \frac{1}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}}.$$

Por último, observa que

$$(I - S)^{-1} - I - S = \sum_{k=2}^{\infty} S^k = S^2 \sum_{k=0}^{\infty} S^k = S^2 (I - S)^{-1}.$$

En consecuencia,

$$\left\|(I - S)^{-1} - I - S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \frac{\|S\|^2_{\mathcal{L}(V,V)}}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}}.$$

Por tanto,

$$\lim_{S \to 0} \frac{\left\|(I - S)^{-1} - I - S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)}}{\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}} \leq \lim_{S \to 0} \frac{\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}} = 0,$$

lo que demuestra la última afirmación del lema. □

En la demostración del teorema de la función implícita usaremos el siguiente resultado.

Proposición 10.17. *(a) $\mathcal{H}(V, W)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(V, W)$.*

(b) La función

$$\Phi : \mathcal{H}(V, W) \to \mathcal{L}(W, V), \qquad \Phi(T) := T^{-1},$$

es diferenciable y su derivada en T_0 es

$$\Phi'(T_0)T = -T_0^{-1} T T_0^{-1}.$$

Demostración. (a): Si $V = W = \{0\}$ o si $\mathcal{H}(V, W) = \emptyset$, la afirmación es obvia. Supongamos pues que $\mathcal{H}(V, W) \neq \emptyset$ y que $V \neq \{0\}$ y $W \neq \{0\}$. Sea $T_0 \in \mathcal{H}(V, W)$. Entonces $T_0 \neq 0$. Probaremos que

$$B_{\mathcal{L}(V,W)}(T_0, r) \subset \mathcal{H}(V, W), \qquad \text{donde } r := \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1}_{\mathcal{L}(W,V)}. \tag{10.6}$$

Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $\|T - T_0\|_{\mathcal{L}(V,W)} < r$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|T_0^{-1}T - I\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} &= \left\|T_0^{-1}(T - T_0)\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \\ &\leq \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)} \left\|T - T_0\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} < 1.\end{aligned}$$

El Lema 10.16 asegura entonces que $T_0^{-1}T \in \mathcal{H}(V,V)$. En consecuencia, $T = T_0 T_0^{-1} T \in \mathcal{H}(V,W)$. Esto prueba que $B_{\mathcal{L}(V,W)}(T_0, r) \subset \mathcal{H}(V,W)$.

(b): Sean $T_0 \in \mathcal{H}(V,W)$ y $T \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $T \neq 0$ y $\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} < r$, con r como en (10.6). Denotemos por $S := T_0^{-1}T$. Entonces $\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)} < 1$ y el Lema 10.16 asegura que $I - S \in \mathcal{H}(V,V)$. Se tiene que

$$(I - S)^{-1}T_0^{-1} = (T_0(I - S))^{-1} = (T_0 - T)^{-1},$$

y, por tanto,

$$(T_0 - T)^{-1} - T_0^{-1} - T_0^{-1}TT_0^{-1} = \left[(I - S)^{-1} - I - S\right] T_0^{-1}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}&\frac{\left\|(T_0 - T)^{-1} - T_0^{-1} - T_0^{-1}TT_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}}{\left\|T\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}} \\ &\qquad\qquad \leq \frac{\left\|(I - S)^{-1} - I - S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}}{\left\|S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}^{-1}}.\end{aligned}$$

Nota que $S \to 0$ cuando $T \to 0$. De modo que, usando el Lema 10.16, concluimos que

$$\begin{aligned}&\lim_{T \to 0} \frac{\left\|(T_0 - T)^{-1} - T_0^{-1} - T_0^{-1}TT_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}}{\left\|T\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}} \\ &\qquad\qquad \leq \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}^2 \left(\lim_{T \to 0} \frac{\left\|(I - S)^{-1} - I - S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)}}{\left\|S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)}}\right) = 0.\end{aligned}$$

Observa que la función

$$\mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(W,V), \qquad T \mapsto T_0^{-1}TT_0^{-1},$$

es lineal y, como

$$\|T_0^{-1}TT_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(W,V)} \leq \|T_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(W,V)}^2 \|T\|_{\mathcal{L}(V,W)},$$

esta función es continua.

Esto prueba que Φ es diferenciable en T_0 y que $\Phi'(T_0)T = -T_0^{-1}TT_0^{-1}$. $\square$

10.4. Demostración del teorema de la función implícita

Observa primero que basta probar el Teorema 10.7 para $c = 0$. En efecto: la función $\widetilde{\varphi}(v,w) := \varphi(v,w) - c$ cumple que $\widetilde{\varphi}(v_0,w_0) = 0$ si y sólo si $\varphi(v_0,w_0) = c$, y $\partial_i\widetilde{\varphi}(v,w) = \partial_i\varphi(v,w)$ para todo $(v,w) \in \Omega$, $i = 1,2$. Así que, si el teorema de la función implícita vale para $\widetilde{\varphi}$, también vale para φ.

En lo que resta de esta sección supondremos que V, W, Z son espacios de Banach, Ω es un subconjunto abierto de $V \times W$, $\varphi\colon \Omega \to Z$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, y (v_0,w_0) es un punto de Ω tal que

$$\varphi(v_0,w_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad T_0 := \partial_2\varphi(v_0,w_0) \in \mathcal{H}(W,Z).$$

Dado $(v,w) \in \Omega$, definimos

$$\psi_v(w) := w - T_0^{-1}\varphi(v,w).$$

Observa que

$$\varphi(v,w) = 0 \iff T_0^{-1}\varphi(v,w) = 0 \iff \psi_v(w) = w. \tag{10.7}$$

Esto sugiere usar el teorema de punto fijo de Banach para obtener soluciones de la ecuación $\varphi(v,w) = 0$. Empezaremos demostrando el siguiente lema.

Lema 10.18. *Existen $\delta, \eta > 0$ tales que*

(i) $\bar{B}_V(v_0,\delta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta) \subset \Omega$,

(ii) $\partial_2\varphi(v,w) \in \mathcal{H}(W,Z)$ *para cualesquiera* $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$, $w \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$,

(iii) $\left\|\psi_v(w) - w_0\right\|_W < \eta$ *para cualesquiera* $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$, $w \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$,

(iv) $\left\|\psi_v(w_1) - \psi_v(w_2)\right\|_W \leq \frac{3}{4}\left\|w_1 - w_2\right\|_W$ *para cualesquiera* $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$, $w_1, w_2 \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$.

Demostración. Sea $c_0 := \|T_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z,W)}$. Como $\mathcal{H}(W,Z)$ es abierto en $\mathcal{L}(W,Z)$ (ver Proposición 10.17), $\partial_2\varphi(v_0,w_0) \in \mathcal{H}(W,Z)$ y $\partial_2\varphi\colon \Omega \to \mathcal{L}(W,Z)$ es continua, existe $\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\bar{B}_V(v_0,\eta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta) \subset \Omega, \\ &\partial_2\varphi(v,w) \in \mathcal{H}(W,Z) \qquad \forall (v,w) \in \bar{B}_V(v_0,\eta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta), \end{aligned} \tag{10.8}$$

y

$$\left\|\partial_2\varphi(v,w) - \partial_2\varphi(v_0,w_0)\right\|_{\mathcal{L}(W,Z)} < \tfrac{1}{4c_0} \qquad \forall (v,w) \in \bar{B}_V(v_0,\eta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta). \tag{10.9}$$

Por otra parte, como $T_0^{-1}\varphi$ es continua y $T_0^{-1}\varphi(v_0, w_0) = 0$, existe $\delta \in (0, \eta)$ tal que

$$\left\|T_0^{-1}\varphi(v, w_0)\right\|_W < \tfrac{\eta}{4} \qquad \forall v \in \bar{B}_V(v_0, \delta). \tag{10.10}$$

Las propiedades *(i)* y *(ii)* se siguen de (10.8). Probemos *(iii)* y *(iv)*.

Sean $v \in \bar{B}_V(v_0, \delta)$, $w_1, w_2 \in \bar{B}_W(w_0, \eta)$. Entonces, $w_{t+1} := (1-t)w_1 + tw_2 \in \bar{B}_W(w_0, \eta)$ para todo $t \in [0, 1]$. Del Corolario 9.18 y la desigualdad (10.9) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left\|\psi_v(w_1) - \psi_v(w_2)\right\|_W \\
&\quad = \left\|T_0^{-1}T_0[w_1 - w_2] - T_0^{-1}\left[\varphi(v, w_1) - \varphi(v, w_2)\right]\right\|_W \\
&\quad \leq c_0\left\|\partial_2\varphi(v_0, w_0)[w_1 - w_2] - \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)\right\|_Z \\
&\quad \leq c_0\left\|\partial_2\varphi(v_0, w_0)[w_1 - w_2] - \partial_2\varphi(v, w_0)[w_1 - w_2]\right\|_Z \\
&\qquad\quad + c_0\left\|\partial_2\varphi(v, w_0)[w_1 - w_2] - \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)\right\|_Z \\
&\quad \leq c_0\left\|\partial_2\varphi(v, w_0) - \partial_2\varphi(v_0, w_0)\right\|_{\mathcal{L}(W,Z)}\left\|w_1 - w_2\right\|_W \\
&\qquad\quad + c_0 \sup_{t\in[0,1]}\left\|\partial_2\varphi(v, w_{t+1}) - \partial_2\varphi(v, w_0)\right\|_{\mathcal{L}(W,Z)}\left\|w_1 - w_2\right\|_W \\
&\quad \leq \tfrac{3}{4}\left\|w_1 - w_2\right\|_W.
\end{aligned}$$

En consecuencia, usando (10.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\psi_v(w) - w_0\right\|_W &\leq \left\|\psi_v(w) - \psi_v(w_0)\right\|_W + \left\|\psi_v(w_0) - w_0\right\|_W \\
&= \left\|\psi_v(w) - \psi_v(w_0)\right\|_W + \left\|T_0^{-1}\varphi(v, w_0)\right\|_W \\
&\leq \tfrac{3}{4}\left\|w - w_0\right\|_W + \tfrac{\eta}{4} \\
&\leq \eta \qquad \forall v \in \bar{B}_V(v_0, \delta),\ \forall w \in \bar{B}_W(w_0, \eta).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Lema 10.19. *Para* $\delta, \eta > 0$ *como en el* Lema 10.18 *se cumple lo siguiente:*

(a) Para cada $v \in \bar{B}_V(v_0, \delta)$ *existe* $f(v) \in B_W(w_0, \eta)$ *tal que*

$$\varphi(v, f(v)) = 0,$$

y $f(v)$ *es el único elemento de* $\bar{B}_W(w_0, \eta)$ *con esta propiedad.*

(b) La función $f : B_V(v_0, \delta) \to W$ *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *y*

$$f'(v) = -\left[\partial_2\varphi(v, f(v))\right]^{-1} \circ \partial_1\varphi(v, f(v)) \qquad \forall v \in B_V(v_0, \delta).$$

Demostración. (a): Sea $v \in \bar{B}_V(v_0, \delta)$. La afirmación *(iii)* del Lema 10.18 asegura que ψ_v es una función de $\bar{B}_W(w_0, \eta)$ en sí mismo. Como $\bar{B}_W(w_0, \eta)$ es cerrado y W es de Banach, $\bar{B}_W(w_0, \eta)$ es un espacio métrico completo. La afirmación *(iv)* del Lema 10.18 asegura que

$$\psi_v : \bar{B}_W(w_0, \eta) \to \bar{B}_W(w_0, \eta)$$

es una contracción. Por el teorema de punto fijo de Banach (ver Teorema 6.3) existe un único $f(v) \in \bar{B}_W(w_0, \eta)$ tal que

$$f(v) = \psi_v(f(v)).$$

La afirmación *(iii)* del Lema 10.18 asegura entonces que $f(v) = \psi_v(f(v)) \in B_W(w_0, \eta)$. De la observación (10.7) se sigue la afirmación *(a)*.

Antes de probar la afirmación *(b)* probaremos que la función $f : B_V(v_0, \delta) \to W$ es continua.

Sean $v_1 \in B_V(v_0, \delta)$ y $\varepsilon > 0$. Como $\psi_v^k(f(v)) = f(v)$, la afirmación *(iv)* del Lema 10.18 asegura que

$$\left\|\psi_v^k(w_0) - f(v)\right\|_W \leq \left(\tfrac{3}{4}\right)^k \left\|w_0 - f(v)\right\|_W < \left(\tfrac{3}{4}\right)^k \eta \qquad \forall v \in B_V(v_0, \delta).$$

Por tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, independiente de v, tal que

$$\left\|\psi_v^k(w_0) - f(v)\right\|_W < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq k_0, \ \ \forall v \in B_V(v_0, \delta).$$

La función $v \mapsto \psi_v(w_0) = w_0 - T_0^{-1}\varphi(v, w_0)$ es continua en $B_V(v_0, \delta)$. Por tanto, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\left\|\psi_v^{k_0}(w_0) - \psi_{v_1}^{k_0}(w_0)\right\|_W < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \forall v \in B_V(v_0, \delta) \cap B_V(v_1, \gamma).$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \left\|f(v) - f(v_1)\right\|_W &\leq \left\|f(v) - \psi_v^{k_0}(w_0)\right\|_W + \left\|\psi_v^{k_0}(w_0) - \psi_{v_1}^{k_0}(w_0)\right\|_W \\ &\quad + \left\|\psi_{v_1}^{k_0}(w_0) - f(v_1)\right\|_W \\ &< \varepsilon \qquad \forall v \in B_V(v_0, \delta) \cap B_V(v_1, \gamma). \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es continua en $B_V(v_0, \delta)$.

(b): Sean $v, v_1 \in B_V(v_0, \delta)$ y $\varepsilon > 0$. Denotamos por

$$w := f(v), \qquad w_1 := f(v_1), \qquad T_1 := \partial_1\varphi(v_1, w_1), \qquad T_2 := \partial_2\varphi(v_1, w_1).$$

La afirmación *(ii)* del Lema 10.18 asegura que T_2 es un isomorfismo de Banach. Definimos

$$c_1 := \left\|T_2^{-1}T_1\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}, \qquad c_2 := \left\|T_2^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Z,W)}, \qquad \theta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{c_1+1}\right\}.$$

Se sigue de *(a)* que $\varphi(v_1,w_1) = 0 = \varphi(v,w)$. En consecuencia,

$$\varphi(v,w) - \varphi(v_1,w_1) - \varphi'(v_1,w_1)(v-v_1,w-w_1) = -T_1(v-v_1) - T_2(w-w_1)$$

y, como φ es diferenciable en (v_1,w_1), se tiene que

$$\lim_{(v,w)\to(v_1,w_1)} \frac{\left\|T_1(v-v_1)+T_2(w-w_1)\right\|_Z}{\left\|(v-v_1,w-w_1)\right\|_{V\times W}} = 0. \tag{10.11}$$

De (10.11) y de la continuidad de f se sigue que existe $\gamma > 0$ tal que $B_V(v_1,\gamma) \subset B_V(v_0,\delta)$ y

$$\left\|T_1[v-v_1]+T_2[w-w_1]\right\|_Z \leq \tfrac{\theta}{2c_2}\left(\left\|v-v_1\right\|_V + \left\|w-w_1\right\|_W\right)$$

si $\left\|v-v_1\right\|_V < \gamma$. Así que, si $\left\|v-v_1\right\|_V < \gamma$,

$$\begin{aligned}\left\|T_2^{-1}T_1[v-v_1]+w-w_1\right\|_W &= \left\|T_2^{-1}\left[T_1[v-v_1]+T_2\left[w-w_1\right]\right]\right\|_W \\ &\leq \tfrac{\theta}{2}\left(\left\|v-v_1\right\|_V + \left\|w-w_1\right\|_W\right)\end{aligned} \tag{10.12}$$

y, como $\theta \leq 1$,

$$\begin{aligned}\left\|w-w_1\right\|_W &\leq \left\|T_2^{-1}T_1[v-v_1]+w-w_1\right\|_W + \left\|T_2^{-1}T_1[v-v_1]\right\|_W \\ &\leq \tfrac{1}{2}\left(\left\|v-v_1\right\|_V + \left\|w-w_1\right\|_W\right) + c_1\left\|v-v_1\right\|_V,\end{aligned}$$

es decir,

$$\left\|w-w_1\right\|_W \leq (2c_1+1)\left\|v-v_1\right\|_V \qquad \text{si } \left\|v-v_1\right\|_V < \gamma.$$

Combinando ésta con la desigualdad (10.12) obtenemos que

$$\begin{aligned}\left\|f(v)-f(v_1)+T_2^{-1}T_1[v-v_1]\right\|_W &= \left\|w-w_1+T_2^{-1}T_1[v-v_1]\right\|_W \\ &\leq \tfrac{\theta}{2}\left\|v-v_1\right\|_V + \tfrac{\theta}{2}\left\|w-w_1\right\|_W \\ &\leq \theta(c_1+1)\left\|v-v_1\right\|_V \\ &\leq \varepsilon\left\|v-v_1\right\|_V \qquad \text{si } \left\|v-v_1\right\|_V < \gamma,\end{aligned}$$

lo cual demuestra que f es diferenciable en v_1 y que

$$f'(v_1) = -\left[\partial_2\varphi(v_1, f(v_1))\right]^{-1} \circ \partial_1\varphi(v_1, f(v_1)).$$

Probaremos ahora que $f' \colon B_V(v_0, \delta) \to \mathcal{L}(V, W)$ es continua. Sean $v_k, v \in B_V(v_0, \delta)$ tales que $v_k \to v$ en V. Como f, $\partial_1\varphi$, $\partial_2\varphi$ y la función $T \mapsto T^{-1}$ son funciones continuas (ver Proposición 10.17), se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_1\varphi(v_k, f(v_k)) &\longrightarrow \partial_1\varphi(v, f(v)) && \text{en } \mathcal{L}(V, Z), \\ \left[\partial_2\varphi(v_k, f(v_k))\right]^{-1} &\longrightarrow \left[\partial_2\varphi(v, f(v))\right]^{-1} && \text{en } \mathcal{L}(Z, W). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$-\left[\partial_2\varphi(v_k, f(v_k))\right]^{-1} \circ \partial_1\varphi(v_k, f(v_k)) \longrightarrow -\left[\partial_2\varphi(v, f(v))\right]^{-1} \circ \partial_1\varphi(v, f(v))$$

en $\mathcal{L}(V, W)$ (ver Ejercicio 9.38), es decir, $f'(v_k) \to f(v)$ en $\mathcal{L}(V, W)$. Esto prueba que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $B_V(v_0, \delta)$. □

Demostración del Teorema 10.7*:* Sean $\delta, \eta > 0$ como en el Lema 10.18 y $f \colon B_V(v_0, \delta) \to W$ como en el Lema 10.19. Entonces $B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta) \subset \Omega$ y f es de clase $\mathcal{C}^1$. La afirmación *(a)* del Lema 10.19 asegura que

$$\{(v, w) \in B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta) : \varphi(v, w) = 0\} = \{(v, f(v)) : v \in B_V(v_0, \delta)\}.$$

Esta es la afirmacion *(I)* del Teorema 10.7. La afirmación *(II)* se sigue de las afirmaciones *(ii)* del Lema 10.18 y *(b)* del Lema 10.19. □

10.5. Ejercicios

Ejercicio 10.20. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times (m + n)$ tal que el determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,m+n} \end{vmatrix}$$

es distinto de 0*. Prueba directamente (sin usar el teorema de la función implícita) que existe una única función $L \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$A(x_1, \dots, x_m, L(x_1, \dots, x_m)) = 0.$$

Ejercicio 10.21. *Identificamos al espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con el espacio $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de matrices de $m \times n$ de la manera usual.*

(a) Prueba que el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es vacío si $m \neq n$ y es el espacio de matrices cuyo determinante es distinto de 0 si $m = n$.

(b) Prueba que el determinante $\det\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es una función continua y concluye que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

(c) Si $n \leq m$, el espacio $\mathcal{M}ono(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de funciones lineales e inyectivas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ coincide con el espacio de matrices de $m \times n$ de rango n. Prueba que $\mathcal{M}ono(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(d) Análogamente, si $n \geq m$, prueba que el espacio $\mathcal{E}pi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de funciones lineales y suprayectivas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Ejercicio 10.22. *Sea $F\colon \mathcal{L}(W,V) \times \mathcal{L}(W,V) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(V,W), \mathcal{L}(W,V))$ la función*

$$F(T_1, T_2)S := T_1 S T_2.$$

Prueba que F es bilineal y que

$$\left\|F(T_1,T_2)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(V,W),\mathcal{L}(W,V))} \leq \left\|T_1\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}\left\|T_2\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}.$$

En consecuencia, F es continua.

Ejercicio 10.23. *Prueba que la función*

$$\Phi\colon \mathcal{H}(V,W) \to \mathcal{L}(W,V), \qquad \Phi(T) = T^{-1},$$

es de clase C^∞. (Sugerencia: Usa los Ejercicios 9.52 y 10.22.)

Ejercicio 10.24. *Demuestra que, si en el* Teorema 10.7 *la función φ es de clase $\mathcal{C}^k$, entonces la función f también es de clase $\mathcal{C}^k$.*

Ejercicio 10.25 (Teorema de la función inversa)**.** *Sean V, W espacios de Banach, Ω un subconjunto abierto de V, $\varphi\colon \Omega \to W$ una función de clase $\mathcal{C}^k$ en Ω con $1 \leq k \leq \infty$, y $v_0 \in \Omega$. Prueba que, si $\varphi'(v_0) \in \mathcal{H}(V,W)$, entonces existen un abierto Ω' de W y un abierto Ω'' de V tales que $v_0 \in \Omega'' \subset \Omega$, $\varphi(\Omega'') = \Omega'$ y la función*

$$\varphi\,|_{\Omega''}\colon \Omega'' \to \Omega'$$

es un homeomorfismo cuyo inverso $\psi := (\varphi\,|_{\Omega''})^{-1} : \Omega' \to \Omega''$ *es de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* Ω' *y satisface*

$$\psi'(\varphi(v_0)) = \left(\varphi'(v_0)\right)^{-1}.$$

(Sugerencia: Aplica el teorema de la función implícita a la función $\theta\colon W \times \Omega \to W$, $\theta(w, v) := \varphi(v) - w$.)

Ejercicio 10.26. *Considera la función* $\varphi\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\varphi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Para todo $(r,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ *existen un abierto* Ω' *de* $\mathbb{R}^2$ *y un abierto* Ω'' *de* $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *tales que* $(r,\theta) \in \Omega''$, $\varphi(\Omega'') = \Omega'$ *y la función*

$$\varphi\,|_{\Omega''}\colon \Omega'' \to \Omega'$$

es un homeomorfismo cuyo inverso $\psi := (\varphi\,|_{\Omega''})^{-1} : \Omega' \to \Omega''$ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$.

(b) La función $\varphi\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *no es un homeomorfismo.*

Ejercicio 10.27. *Considera la función* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} (x, y - x^2) & \text{si } x^2 \leq y, \\ (x, \frac{y^2 - x^2 y}{x^2}) & \text{si } 0 \leq y < x^2, \\ -\varphi(x,-y) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Prueba que

(a) φ *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*,*

(b) $\varphi'(0,0)$ *es la identidad de* $\mathbb{R}^2$*,*

(c) φ *no es de clase* $\mathcal{C}^1$*en* $\mathbb{R}^2$*,*

(d) φ *no es inyectiva en ningún abierto* Ω *que contiene a* $(0,0)$.

Ejercicio 10.28. *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ *y* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una función de clase* $\mathcal{C}^k$ *con* $1 \leq k \leq \infty$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $\varphi'(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es inyectiva, entonces existen un abierto* Ω' *de* $\mathbb{R}^n$ *y un abierto* Ω'' *de* $\mathbb{R}^m$ *tales que* $x_0 \in \Omega' \subset \Omega$ *y* $\varphi(\Omega') \subset \Omega''$, *y una función* $\psi\colon \Omega'' \to \mathbb{R}^m$ *de clase* $\mathcal{C}^k$ *tal que*

$$\psi(\varphi(x_1,\ldots,x_n)) = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0) \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega'.$$

(b) *Si* $\varphi'(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es suprayectiva, entonces existen un abierto* Ω' *de* $\mathbb{R}^n$ *y una función* $\eta\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$ *de clase* $\mathcal{C}^k$ *tales que* $x_0 \in \Omega'$, $\eta(x_0) = x_0$, $\eta(\Omega') \subset \Omega$ *y*

$$\varphi(\eta(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_m) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega'.$$

Ejercicio 10.29. *Encuentra los máximos y los mínimos locales de la función* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$ *en la esfera unitaria* $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Ejercicio 10.30. *Sea* T *el toro de revolución en* $\mathbb{R}^3$ *que se obtiene rotando el círculo*

$$S := \left\{(x, y, 0) : (x-a)^2 + y^2 = r^2\right\}, \qquad 0 < r < a,$$

alrededor del eje y.

(a) *Encuentra los puntos críticos de la función* $g(x, y, z) = z$ *en* T, *y di cuáles de ellos son máximos o mínimos locales de* g *en* T.

(b) *Encuentra los puntos críticos de la función* $h(x, y, z) = y$ *en* T, *y di cuáles de ellos son máximos o mínimos locales de* h *en* T.

Ejercicio 10.31. *Sean* Ω *un subconjunto abierto de un espacio de Banach* V, $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^2$ *y* $u_0 \in \Omega$ *un punto crítico de* φ, *es decir,* $\varphi'(u_0)v = 0$ *para todo* $v \in V$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si existe* $c > 0$ *tal que*

$$D^2\varphi(u_0)(v, v) \geq c \qquad \forall v \in V \text{ con } \|v\| = 1,$$

entonces u_0 *es un mínimo local de* φ, *es decir, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\varphi(u) \geq \varphi(u_0)$ *si* $\|u - u_0\| < \delta$.

(b) *Si existe* $c < 0$ *tal que*

$$D^2\varphi(u_0)(v, v) \leq c \qquad \forall v \in V \text{ con } \|v\| = 1,$$

entonces u_0 *es un máximo local de* φ, *es decir, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\varphi(u) \leq \varphi(u_0)$ *si* $\|u - u_0\| < \delta$.

(Sugerencia: Usa el teorema de Taylor.)

Parte III

La integral de Lebesgue

11

La integral de una función continua con soporte compacto

La teoría de integración moderna fue iniciada por Henri Lebesgue en 1902. La integral de Lebesgue es una de las piedras angulares del análisis matemático y tiene aplicaciones muy importantes en ecuaciones diferenciales, probabilidad y muchas otras ramas de las matemáticas.

La noción de integrabilidad de Lebesgue es más general que la de Riemann en el sentido de que abarca a muchas más funciones. Pero su principal virtud es que permite intercambiar el límite por la integral bajo condiciones mucho menos restrictivas que las que requiere la integral de Riemann.

Hay muchas maneras de introducir la integral de Lebesgue. La que daremos aquí tiene como punto de partida a la integral de Riemann de una función real continua en un intervalo cerrado, tal y como se define en los primeros cursos de cálculo. Supondremos que el lector está familiarizado con ella y con sus propiedades.

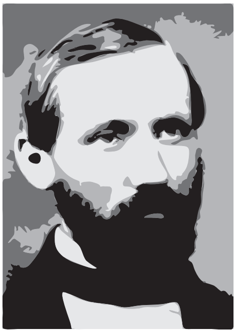
En este capítulo definiremos la integral de funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que se anulan fuera de algún subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Para este tipo de funciones, la integral que aquí introduciremos coincide con la de Riemann. Pero no hace falta usar sumas de Riemann: basta definir la integral mediante un proceso iterativo, integrando respecto a cada una de las variables. Esto no sólo tiene la ventaja de reducir el cálculo de la integral de una función de varias variables al de integrales de funciones de una sola variable, sino que permite además obtener las propiedades básicas de la integral de manera sencilla a partir de las propiedades correspondientes para funciones de una sola variable.

Probaremos que la integral es una medida de Haar, es decir, que es lineal, monótona e invariante bajo traslaciones, y que cualquier medida de Haar es un múltiplo de la integral. Este hecho permite establecer fácilmente la invariancia de la integral bajo isometrías lineales y obtener una fórmula de transformación de la integral de una función bajo un cambio de variable dado por un isomorfismo lineal. Partiendo de este resultado, obtendremos una fórmula análoga cuando el cambio de variable está dado por un difeomorfismo.

En el próximo capítulo extenderemos esta integral a una familia mucho más amplia de funciones, y en el capítulo subsecuente demostraremos los teoremas fundamentales de la teoría de integración de Lebesgue.

11.1. Definición y propiedades básicas

Definiremos la integral de funciones cada vez más generales partiendo de la integral de Riemann[1] de una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supondremos que el lector está familiarizado con dicha integral y con sus propiedades.



Bernhard Riemann

Definición 11.1. *Un* ***rectángulo en*** $\mathbb{R}^n$ *es un producto* $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ *de* n *intervalos cerrados en* $\mathbb{R}$*, es decir,*

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i = 1, \dots, n\},$$

con $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$*,* $i = 1, \dots, n$*.*

Primero definiremos la integral de una función continua en un rectángulo mediante un proceso de iteración. Para ello requerimos comprobar que la función que se obtiene integrando respecto a la primera variable es continua respecto a las variables restantes.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) nació en Breselenz, en el Reino de Hanover, actualmente Alemania. Estudió en la Universidad de Göttingen, donde fue alumno de Gauss. Más tarde fue profesor en esa universidad. Entre sus muchas aportaciones fundó el campo de la geometría riemanniana.

Lema 11.2. *Sea $f : Q \to \mathbb{R}$ una función continua en un rectángulo $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Entonces la función $f_1 : [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f_1(x_2, \ldots, x_n) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1,$$

es continua.

Demostración. El Teorema 4.31 asegura que f es uniformemente continua en Q. Por tanto, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b_1 - a_1 + 1} \qquad \text{si } \left\|x - y\right\| < \delta.$$

Sean $\tilde{x} = (x_2, \ldots, x_n), \tilde{y} = (y_2, \ldots, y_n) \in [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si $\left\|\tilde{x} - \tilde{y}\right\| < \delta$, entonces,

$$|f_1(\tilde{x}) - f_1(\tilde{y})| \leq \int_{a_1}^{b_1} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, y_2, \ldots, y_n)| \, dx_1 < \varepsilon.$$

Esto prueba que f_1 es continua. □

Si integramos ahora f_1 respecto a la variable x_2, obtendremos una función continua de las $n - 2$ variables restantes. Repitiendo este proceso para cada variable obtenemos un número real.

Definición 11.3. *La* ***integral de una función continua*** $f : Q \to \mathbb{R}$ ***en un rectángulo*** $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ *se define como*

$$\int_Q f := \int_{a_n}^{b_n} \cdots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots dx_n.$$

Usaremos ahora esta integral para definir la integral de funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que se anulan fuera de algún rectángulo.

Definición 11.4. *El* ***soporte*** *de una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la cerradura en $\mathbb{R}^n$ del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$. Lo denotamos*

$$\operatorname{sop}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Denotaremos por

$$\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) : \operatorname{sop}(f) \text{ es compacto} \right\},$$

donde $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Observa que $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ (ver Ejercicio 11.33).

Definición 11.5. *Sea $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Definimos **la integral de f en** $\mathbb{R}^n$ como*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_Q f,$$

donde Q es algún rectángulo que contiene a $\operatorname{sop}(f)$.

Es sencillo comprobar que la definición anterior no depende del rectángulo elegido. Lo proponemos como ejercicio [Ejercicio 11.30].

Notación 11.6. *Denotaremos a la integral de f en $\mathbb{R}^n$ de cualquiera de las siguientes formas:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \cdots dx_n.$$

La última notación pone en evidencia el orden en el que consideramos a las variables de integración en la Definición 11.3. *Más adelante veremos que el orden es irrelevante* (ver Corolario 11.18).

Dados $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotamos por $\mathrm{T}_\xi f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la función

$$\left(\mathrm{T}_\xi f\right)(x) := f(x - \xi). \tag{11.1}$$

$\mathrm{T}_\xi f$ se llama la **traslación de f por** ξ.

Teorema 11.7. *La integral tiene las siguientes propiedades:*

(Linealidad) *Si $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f + \mu \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

(Monotonía) *Si $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y $f \leq g$ (es decir, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$), entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

(Invariancia bajo traslaciones) *Si $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathrm{T}_\xi f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{T}_\xi f = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Demostración. Las primeras dos propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades correspondientes para funciones de variable real [Ejercicios 11.33 y 11.31]. Probaremos la invariancia bajo traslaciones. Sean $\xi \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Si $n = 1$ y $\mathrm{sop}(f) \subset [a, b]$, entonces $\mathrm{sop}(\mathrm{T}_\xi f) \subset [a + \xi, b + \xi]$ y usando el teorema de cambio de variable para funciones de variable real [Ejercicio 11.32] obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_a^b f(x)dx = \int_{a+\xi}^{b+\xi} f(x-\xi)dx = \int_{a+\xi}^{b+\xi} (\mathrm{T}_\xi f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_\xi f.$$

Si $n > 1$ y $\mathrm{sop}(f) \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, entonces $\mathrm{sop}(\mathrm{T}_\xi f) \subset [a_1 + \xi_1, b_1 + \xi_1] \times \cdots \times [a_n + \xi_n, b_n + \xi_n]$. Aplicando el caso $n = 1$ y argumentando por inducción obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1 - \xi_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \ldots, x_n - \xi_n)dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{T}_\xi f,
\end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

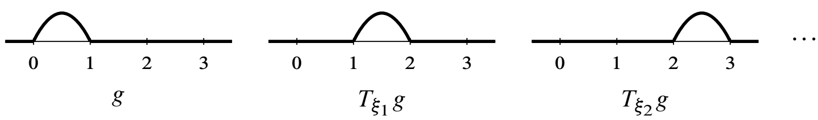
Una consecuencia de la invariancia bajo traslaciones es que la integral del límite puntual de una sucesión de funciones no coincide, en general, con el límite de las integrales de dichas funciones, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.8. *Existe una sucesión (f_k) en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ que converge puntualmente a 0, tal que $\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k\right)$ no converge a 0. En consecuencia,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \neq \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx.$$

Demostración. Sea $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} g \neq 0$ y $\mathrm{sop}(g) \subset [0, 1]^n$. Definimos $f_k := \mathrm{T}_{\xi_k} g$, donde $\xi_k = (k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\mathrm{sop}(f_k) \subset [k, k+1] \times [0, 1]^{n-1}$ y, por tanto, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte, de la invariancia de la integral bajo traslaciones se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} g \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$



En consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} g \neq 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f_k(x),$$

como afirma el enunciado. □

Más adelante daremos condiciones razonables que permiten intercambiar la integral con el límite puntual de funciones (ver Teorema 13.26).

11.2. Unicidad de la integral

En esta sección veremos que las propiedades de linealidad, monotonía e invariancia bajo traslaciones determinan a la integral, salvo por una constante. Este hecho será de utilidad para probar la invariancia de la integral bajo isometrías lineales y el teorema de cambio de variable.

Definición 11.9. *Una* ***medida de Haar*** *en* $\mathbb{R}^n$ *es una función* $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *con las siguientes tres propiedades:*

(Linealidad) $J(\lambda f + \mu g) = \lambda J(f) + \mu J(g)$ *para cualesquiera* $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(Monotonía) $J(f) \leq J(g)$ *para cualesquiera* $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *con* $f \leq g$,

(Invariancia bajo traslaciones) $J(\mathrm{T}_\xi f) = J(f)$ *para cualesquiera* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *y* $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

El Teorema 11.7 afirma que la integral es una medida de Haar[2]. El siguiente resultado afirma que ésta es esencialmente la única medida de Haar en $\mathbb{R}^n$.

[2] Alfréd Haar (1885-1933) nació en Budapest, Hungría. Estudió el doctorado en la Universidad de Göttingen donde fue alumno de Hilbert. Fue profesor de la Universidad de Szeged. Junto con Riesz, contribuyó a formar en ella un centro importante de matemáticas.

Alfréd Haar

Teorema 11.10 (Comparación de medidas de Haar)**.** *Si* $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *es una medida de Haar, entonces existe una constante* $c \geq 0$ *tal que*

$$J(f) = c \int_{\mathbb{R}^n} f \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n).$$

Para demostrar este teorema veremos primero que, bajo hipótesis adecuadas, una medida de Haar conmuta con el límite uniforme de funciones en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Observa que toda función f en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ está acotada, así que su norma uniforme en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|,$$

está bien definida.

Lema 11.11. *Sea* $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *una función lineal y monótona. Si* (f_k) *es una sucesión en* $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *tal que existe un compacto* K *en* $\mathbb{R}^n$ *que contiene a* $\operatorname{sop}(f_k)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $f_k \to f$ *uniformemente en* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\lim_{k\to\infty} J(f_k) = J(f).$$

Demostración. Del Teorema 5.14 se sigue que f es continua y, como $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\operatorname{sop}(f) \subset K$. En consecuencia, $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Sea $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(x) = 1$ para todo $x \in K$ y $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ [Ejercicio 11.38]. Como $\operatorname{sop}(f - f_k) \subset K$, se tiene que

$$-\|f - f_k\|_\infty\, g \leq f - f_k \leq \|f - f_k\|_\infty\, g$$

y, como J es lineal y monótona, concluimos que

$$-\|f - f_k\|_\infty\, J(g) \leq J(f) - J(f_k) \leq \|f - f_k\|_\infty\, J(g).$$

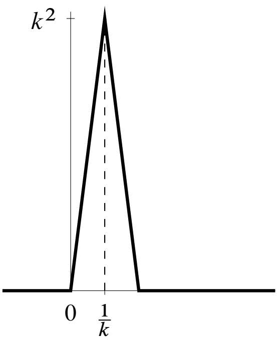
La Proposición 5.15 asegura que $\|f - f_k\|_\infty \to 0$. En consecuencia, $|J(f) - J(f_k)| \to 0$. □

Vale la pena observar que la afirmación del Lema 11.11 no es cierta si sustituimos convergencia uniforme por convergencia puntual, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.12. *La sucesión de funciones* $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_k(x) := \text{máx}\left\{k^2 - k^3\left|x - \tfrac{1}{k}\right|, 0\right\}$$

converge puntualmente a 0 *en* $\mathbb{R}$ *y* $\text{sop}(f_k) \subset [0,2]$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, pero* $\int_{\mathbb{R}} f_k = k \to \infty$.



$y = f_k(x)$

Veremos ahora que toda función $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ se puede expresar como el límite uniforme de combinaciones lineales de traslaciones y dilataciones de una única función Θ que definiremos a continuación.

Sea $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

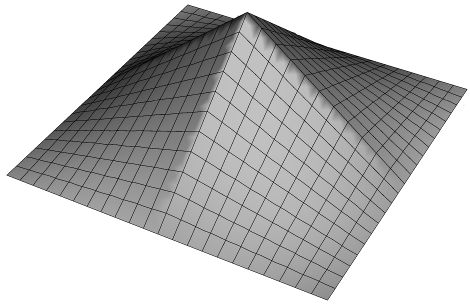
$$\theta(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Definimos $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\Theta(x_1, \ldots, x_n) := \theta(x_1) \cdots \theta(x_n) \tag{11.2}$$

y, para cada $\delta > 0$, definimos

$$\Theta_\delta(x) := \Theta\left(\frac{x}{\delta}\right). \tag{11.3}$$



Gráfica de Θ

Esta función es continua y tiene las siguientes propiedades.

Lema 11.13. *(a)* $\mathrm{sop}(\Theta_\delta) = [-\delta, \delta]^n$.

(b) $(\mathrm{T}_{\delta\xi}\Theta_\delta)(x) = \left(\mathrm{T}_\xi\Theta\right)\left(\frac{x}{\delta}\right)$ *para cualesquiera* $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

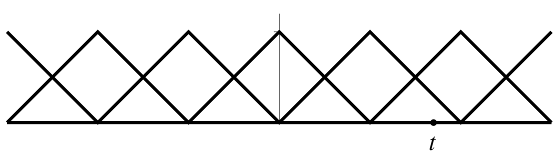
(c) $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta = 1$, *donde* $\mathbb{Z}^n$ *denota a los puntos de* $\mathbb{R}^n$ *de coordenadas enteras.*

Demostración. La afirmación *(a)* es inmediata, pues $\mathrm{sop}(\Theta) = [-1, 1]^n$. La afirmación *(b)* también es clara, ya que

$$(\mathrm{T}_{\delta\xi}\Theta_\delta)(x) = \Theta_\delta(x - \delta\xi) = \Theta(\tfrac{x}{\delta} - \xi) = (\mathrm{T}_\xi\Theta)(\tfrac{x}{\delta}).$$

Para probar *(c)* observa primero que, si $t \in [j-1, j]$ con $j \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta(t-k) = \theta(t-(j-1)) + \theta(t-j) = 1 - (t-j+1) + 1 - (j-t) = 1.$$



Por tanto,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{T}_k\theta = 1.$$

En consecuencia, si $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, dado que

$$(\mathrm{T}_m \Theta)(x_1, \ldots, x_n) = \left(\mathrm{T}_{m_1}\theta\right)(x_1) \cdots (\mathrm{T}_{m_n}\theta)(x_n),$$

se cumple que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} (\mathrm{T}_m \Theta)(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \left(\mathrm{T}_{m_1}\theta\right)(x_1)\right) \cdots \left(\sum_{m_n\in\mathbb{Z}} (\mathrm{T}_{m_n}\theta)(x_n)\right) = 1,$$

es decir,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{T}_m \Theta = 1.$$

De esta identidad y la identidad *(b)* se sigue inmediatamente *(c)*. □

Observa que, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, entonces $f(\delta m) \neq 0$ únicamente para un número finito de $m \in \mathbb{Z}^n$. Por tanto, la función

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(\delta m)\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta$$

es una suma finita de funciones continuas con soporte compacto y, en consecuencia, pertenece a $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Lema 11.14. *Para cada $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{\delta\to 0} \left\| f - \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(\delta m)\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta \right\|_\infty = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f tiene soporte compacto, f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$ [Ejercicio 11.39]. Por tanto, existe $\rho > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{si } \|x - y\| < \rho.$$

Sea $\delta < \frac{\rho}{\sqrt{n}}$. Usando la afirmación *(c)* del Lema 11.13, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(\delta m)(\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(x) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} (f(x) - f(\delta m))(\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(x) \\ &= \sum_{m\in S(x)} (f(x) - f(\delta m))(\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(x), \end{aligned} \tag{11.4}$$

donde $S(x) := \{m \in \mathbb{Z}^n : x \in \mathrm{sop}(\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)\}$. Nota que $S(x)$ es un conjunto finito. Ahora bien, como

$$\mathrm{sop}(\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : x - \delta m \in [-\delta, \delta]^n\},$$

se tiene que

$$\|x - \delta m\| \leq \sqrt{n}\delta < \rho \qquad \forall m \in S(x).$$

Aplicando la desigualdad del triángulo a (11.4) concluimos que

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(\delta m)(\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(x)\right| &\leq \sum_{m\in S(x)} |f(x) - f(\delta m)|\,(\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(x) \\ &< \varepsilon \sum_{m\in S(x)} (\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(x) \leq \varepsilon \qquad \text{si } \delta < \frac{\rho}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\left\|f - \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(\delta m)\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta\right\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \text{si } \delta < \frac{\rho}{\sqrt{n}}.$$

Esto concluye la demostración. □

Finalmente, calcularemos $J(\Theta_{2^{-k}})$ en términos de $J(\Theta)$.

Lema 11.15. *Sea $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una función lineal e invariante bajo traslaciones. Entonces, para cada $\delta > 0$, se cumple que*

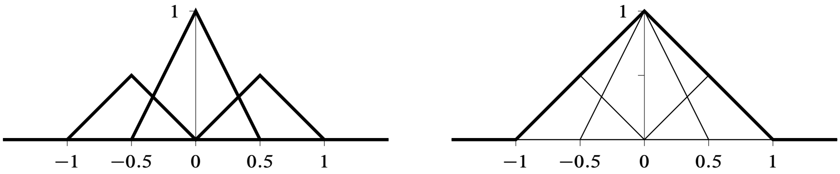
$$2^n J(\Theta_\delta) = J(\Theta_{2\delta}).$$

En consecuencia,

$$2^{nk} J(\Theta_{2^{-k}}) = J(\Theta) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Un cálculo directo, que proponemos como ejercicio [Ejercicio 11.40] y aquí ilustramos con una figura, muestra que

$$\tfrac{1}{2}\,\theta(2t+1) + \theta(2t) + \tfrac{1}{2}\,\theta(2t-1) = \theta(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Reemplazando t por $\frac{t}{2\delta}$ en la identidad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\theta_{2\delta}(t) = \theta\left(\tfrac{t}{2\delta}\right) &= \tfrac{1}{2}\,\theta\left(\tfrac{t+\delta}{\delta}\right) + \theta\left(\tfrac{t}{\delta}\right) + \tfrac{1}{2}\,\theta\left(\tfrac{t-\delta}{\delta}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{T}_{-\delta}\theta_\delta)(t) + \theta_\delta(t) + \tfrac{1}{2}(\mathrm{T}_\delta\theta_\delta)(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\theta_{2\delta} = \sum_{\nu\in\Gamma} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|\nu|} \mathrm{T}_{\nu\delta}\theta_\delta, \qquad \text{con } \Gamma := \{-1, 0, 1\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\Theta_{2\delta}(x_1, \ldots, x_n) &= \theta_{2\delta}(x_1)\cdots\theta_{2\delta}(x_n) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma^n} c_\gamma(\mathrm{T}_{\gamma\delta}\Theta_\delta)(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{11.5}$$

donde

$$c_\gamma = \prod_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|\gamma_i|} \qquad \text{con } \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma^n.$$

Observa que

$$\sum_{\gamma\in\Gamma^n} c_\gamma = \left(\tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2}\right) \sum_{\gamma\in\Gamma^{n-1}} c_\gamma = \left(\tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2}\right)^n = 2^n.$$

Como J es lineal e invariante bajo traslaciones, aplicando J a la identidad (11.5) concluimos que

$$J(\Theta_{2\delta}) = \sum_{\gamma\in\Gamma^n} c_\gamma J(\Theta_\delta) = 2^n J(\Theta_\delta).$$

Esta es la primera identidad del enunciado.

Para probar la segunda aplicamos ésta k veces, con $\delta = 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-k}$ respectivamente, para obtener

$$J(\Theta) = 2^n J(\Theta_{2^{-1}}) = 2^{2n} J(\Theta_{2^{-2}}) = \cdots = 2^{kn} J(\Theta_{2^{-k}}).$$

Esto concluye la demostración. □

Demostración del Teorema 11.10. Sea $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una medida de Haar y sea $c := J(\Theta)$, donde Θ es la función definida en (11.2). Denotemos por $I : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ a la función

$$I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Probaremos que

$$J(f) = cI(f) \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n).$$

Usando el Ejercicio 11.37 obtenemos

$$I(\Theta) = \left(\int_{\mathbb{R}} \theta\right)^n = 1.$$

Aplicando el Lema 11.15 tanto a I como a J concluimos que

$$J(\Theta_{2^{-k}}) = 2^{-kn} J(\Theta) = 2^{-kn} cI(\Theta) = cI(\Theta_{2^{-k}}).$$

Sea $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. De los Lemas 11.11 y 11.14 se sigue que

$$\begin{aligned}
J(f) &= \lim_{k\to\infty} J\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(2^{-k}m)\mathrm{T}_{2^{-k}m}\Theta_{2^{-k}}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(2^{-k}m)J(\Theta_{2^{-k}}) \\
&= c\lim_{k\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(2^{-k}m)I(\Theta_{2^{-k}}) \\
&= c\lim_{k\to\infty} I\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(2^{-k}m)\mathrm{T}_{2^{-k}m}\Theta_{2^{-k}}\right) = cI(f).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

11.3. Invariancia bajo isometrías

Sea $GL(n,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes reales, es decir, de las matrices cuyo determinante es distinto de cero. Si identificamos a una matriz A con la transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por ella, de la manera usual, entonces $GL(n,\mathbb{R})$ es el conjunto de isomorfismos lineales $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ definido en la Sección 10.3.

$GL(n,\mathbb{R})$ con el producto de matrices (o la composición de transformaciones lineales) es un grupo, que se llama **grupo lineal general**.

Observa lo siguiente.

Lema 11.16. *Si* $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *es una medida de Haar en* $\mathbb{R}^n$ *y* $A \in GL(n, \mathbb{R})$*, entonces la función* $J_A : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$J_A(f) := J(f \circ A)$$

está bien definida y es una medida de Haar en $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Sean $A \in GL(n, \mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Puesto que $\operatorname{sop}(f \circ A) = A^{-1}(\operatorname{sop}(f))$, se tiene que $\operatorname{sop}(f \circ A)$ es compacto (ver Proposición 4.10). Así que $f \circ A \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba que J_A está bien definida.

La linealidad y la monotonía de J_A son consecuencia inmediata de las propiedades correspondientes de J. Probemos la invariancia bajo traslaciones.

Sean $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\left(\mathrm{T}_\xi f\right) \circ A\right)(x) &= \left(\mathrm{T}_\xi f\right)(Ax) = f(Ax - \xi) \\ &= f(A(x - A^{-1}\xi)) = (\mathrm{T}_{A^{-1}\xi}(f \circ A))(x).\end{aligned}$$

Como J es invariante bajo traslaciones concluimos que

$$J_A(\mathrm{T}_\xi f) = J(\left(\mathrm{T}_\xi f\right) \circ A) = J(\mathrm{T}_{A^{-1}\xi}(f \circ A)) = J(f \circ A) = J_A(f),$$

es decir, J_A es invariante bajo traslaciones. □

Una matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ se llama **ortogonal** si es una isometría, es decir, si

$$\|Ax\| = \|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si A es una matriz ortogonal entonces $\det A = \pm 1$. El conjunto de todas las matrices ortogonales de $n \times n$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, llamado el **grupo ortogonal,** que se denota por $O(n)$.

Usaremos el Teorema 11.10 para probar que la integral es invariante bajo isometrías.

Teorema 11.17 (Invariancia bajo isometrías)**.** *Para cualesquiera* $A \in O(n)$*,* $\zeta \in \mathbb{R}^n$ *y* $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + \zeta)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy.$$

Demostración. Sean $I, I_A \colon \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

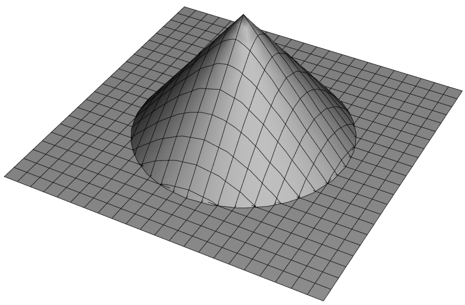
$$I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f, \qquad I_A(f) := I(f \circ A).$$

Ambas son medidas de Haar en $\mathbb{R}^n$ (ver Lema 11.16). Por el Teorema 11.10, existe una constante $c \geq 0$ tal que

$$I_A(f) = cI(f) \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n). \tag{11.6}$$

Probaremos que $c = 1$. Para ello, considera la función

$$f_0(x) := \begin{cases} 1 - \|x\| & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$



Gráfica de f_0

Como $\|Ax\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $f_0 = f_0 \circ A$. En consecuencia,

$$cI(f_0) = I_A(f_0) = I(f_0 \circ A) = I(f_0),$$

y como $I(f_0) \neq 0$ [Ejercicio 11.36] concluimos que $c = 1$. Sustituyendo este valor en la identidad (11.6) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ A = \int_{\mathbb{R}^n} f \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n).$$

Por último, usamos la invariancia de la integral bajo traslaciones para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{T}_{-\xi} f) \circ A = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{T}_{-\xi} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n).$$

Ésta es la identidad deseada. □

Una consecuencia sencilla pero importante del Teorema 11.17 es que la integral no depende del orden de las variables.

Corolario 11.18. *Para cualquier permutación* $(i_1, \dots, i_n)$ *de* $(1, \dots, n)$ *se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{i_1} \cdots dx_{i_n}.$$

Demostración. Sea A la matriz que permuta coordenadas como sigue:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n), \qquad \text{donde } \; y_k := x_j \text{ si } i_j = k.$$

Claramente, $\|Ax\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, por tanto $A \in O(n)$. Aplicando el Teorema 11.17 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ A)(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_{i_1} \cdots dy_{i_n},\end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

El Teorema 11.17 se extiende como sigue.

Teorema 11.19. *Para cualesquiera* $A \in GL(n, \mathbb{R})$*,* $\zeta \in \mathbb{R}^n$ *y* $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + \zeta) \, |\det A| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy.$$

Para demostrar este teorema usaremos el siguiente caso particular de él.

Lema 11.20. *Si* A *es una matriz diagonal de* $n \times n$ *tal que* $\det A \neq 0$*, entonces para toda* $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) \, |\det A| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy.$$

Demostración. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

tal que $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$. Considera la medida de Haar $I_A : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_A(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A$$

(ver Lema 11.16). Por el Teorema 11.10 existe $c \geq 0$ tal que

$$I_A(f) = c \int_{\mathbb{R}^n} f \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n). \tag{11.7}$$

Para determinar c basta calcular el valor de I_A en la función Θ definida en (11.2). Nota que, para $\lambda \neq 0$,

$$\theta(\lambda t) = \begin{cases} 1 - |\lambda t| & \text{si } |t| \leq \frac{1}{|\lambda|}, \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{1}{|\lambda|}. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(\lambda t) dt = \frac{1}{|\lambda|}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Theta \circ A &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\lambda_1 x_1) \cdots \theta(\lambda_n x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{1}{|\lambda_1|} \cdots \frac{1}{|\lambda_n|} = \frac{1}{|\det A|}. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} \Theta = 1$ concluimos que

$$\frac{1}{|\det A|} = I_A(\Theta) = c \int_{\mathbb{R}^n} \Theta = c.$$

Sustituyendo este valor en la identidad (11.7) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ A = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n),$$

como afirma el enunciado. □

Usaremos el siguiente resultado de algebra lineal[3] para probar el Teorema 11.19.

Teorema 11.21 (Descomposición en valores singulares)**.** *Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes reales. Entonces existen $U_1, U_2 \in O(n)$ y una matriz diagonal D con coeficientes no negativos tales que $A = U_1 D U_2$.*

Proponemos la demostración de este resultado como ejercicio [Ejercicio 11.46].

[3] Consulta, por ejemplo, [FIS03] (Theorem 6.27).

Demostración del Teorema 11.19. Sean $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema 11.21, existen $U_1, U_2 \in O(n)$ y una matriz diagonal D tales que

$$A = U_1 D U_2.$$

En particular, $|\det D| = |\det A| \neq 0$. Usando el Teorema 11.17, el Lema 11.20 y la invariancia de la integral bajo traslaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(U_1 x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(U_1 D x)\,|\det D|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(U_1 D U_2 x)\,|\det D|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\,|\det A|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+\zeta)\,|\det A|\,dx,\end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

11.4. El teorema de cambio de variable

Ahora nuestro objetivo es extender el Teorema 11.19, reemplazando a la transformación $x \mapsto Ax+\zeta$ por una función φ que localmente se parece a ella. Empezaremos precisando lo que esto significa.

A lo largo de esta sección Ω denotará a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 11.22. *Sea $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. El* ***soporte de*** f *es la cerradura en $\mathbb{R}^n$ del conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Lo denotamos* $\operatorname{sop}(f)$.

Nota que el soporte de una función $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ no necesariamente está contenido en Ω. Por ejemplo, si $f(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$ entonces $\operatorname{sop}(f) = \overline{\Omega}$, que no está contenido en Ω si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Definimos

$$\mathcal{C}_c^0(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\Omega) : \operatorname{sop}(f) \text{ es compacto y } \operatorname{sop}(f) \subset \Omega \right\}.$$

Nota que $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ (ver Ejercicio 11.33). Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ este espacio coincide con el de la Definición 11.4.

Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, denotamos por $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la función

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega. \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, entonces $\bar{f}$ es continua en todo $\mathbb{R}^n$ y pertenece a $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ [Ejercicio 11.48].

Definición 11.23. *Si $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ definimos **la integral de** f **en** Ω como*

$$\int_\Omega f := \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}.$$

Definición 11.24. *Sean Ω y Ω' subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Una función $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ es un **difeomorfismo de clase** $\mathcal{C}^1$ si φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, φ es biyectiva y su inverso $\varphi^{-1}\colon \Omega' \to \Omega$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω'.*

Si φ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$, la regla de la cadena asegura que

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(\xi)) \circ \varphi'(\xi) = \mathrm{id} \qquad \text{y} \qquad \varphi'(\xi) \circ (\varphi^{-1})'(\varphi(\xi)) = \mathrm{id} \qquad \forall \xi \in \Omega,$$

donde $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la identidad. Por tanto, $\varphi'(\xi) \in GL(n, \mathbb{R})$ para todo $\xi \in \Omega$. En una vecindad pequeña de ξ, la función φ es muy cercana a la función

$$\alpha_\xi(x) := \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)[x - \xi] = \varphi'(\xi)x + \left[\varphi(\xi) - \varphi'(\xi)\xi\right],$$

para la cual vale el Teorema 11.19. Probaremos la siguiente extensión de ese resultado.

Teorema 11.25 (de cambio de variable)**.** *Sean Ω y Ω' subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ y $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega')$. Entonces $(f \circ \varphi)\,|\det \varphi'| \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega f(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| dx = \int_{\Omega'} f(y)dy.$$

La idea de la demostración es aproximar localmente a φ por la función α_ξ y aplicar el Teorema 11.19. Dedicaremos el resto de esta sección a la demostración de este resultado. Usaremos el siguiente lema.

Lema 11.26. *Sean $K = (K, d_K)$ un espacio métrico compacto, $X = (X, d_X)$ un espacio métrico y $\varphi\colon K \to X$ una función continua. Entonces existe una función no decreciente $\omega\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$ y*

$$d_X(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \omega(d_K(x, y)) \qquad \forall x, y \in K.$$

Demostración. Para cada $t \in [0, \infty)$ definimos

$$\omega(t) := \sup\{d_X(\varphi(x), \varphi(y)) : x, y \in K,\ d_K(x, y) \leq t\}. \tag{11.8}$$

Como la función $h\colon K \times K \to \mathbb{R}$ dada por $h(x,y) := d_X(\varphi(x), \varphi(y))$ es continua (ver Ejercicio 3.49) y $K \times K$ es compacto (ver Ejercicio 7.28), se tiene que h es acotada. Por tanto, $\omega(t) \in [0,\infty)$ para todo $t \in [0,\infty)$. Claramente, $\omega(t) \leq \omega(s)$ si $t \leq s$. Además, como φ es uniformemente continua en K, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon \qquad \text{si } \ d_K(x,y) < \delta.$$

En consecuencia, $\omega(t) \in [0,\varepsilon]$ si $t \in [0,\delta)$, es decir, $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$. Por último, si $x, y \in K$ y $t := d_K(x,y)$, de la definición de ω se sigue que

$$d_X(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \omega(t) = \omega(d_K(x,y)).$$

Esto concluye la demostración. $\square$

La función ω definida en (11.8) es la función óptima para la cual se cumple la desigualdad del lema. Se le llama el *módulo de continuidad uniforme* de φ.

Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos por

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\,,$$
$$Q(x,\delta) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq \delta\}\,.$$

Recuerda que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ que cumple

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq \|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{11.9}$$

(ver Ejercicio 2.42). A continuación introduciremos los conjuntos y las constantes que usaremos en los siguientes lemas y en la demostración del Teorema 11.25.

Notación 11.27. *Sean Ω y Ω' abiertos en $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ y $f \in \mathcal{C}^0_c(\Omega')$. Definimos*

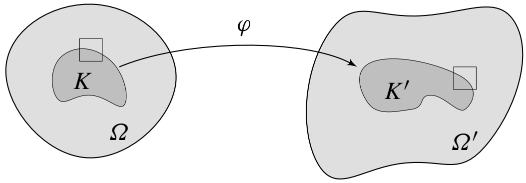
$$K' := \operatorname{sop}(f) \qquad y \qquad K := \varphi^{-1}(K').$$

Como K y K' son subconjuntos compactos de Ω y Ω' respectivamente, las distancias de K a $\mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega$ y de K' a $\mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega'$ son positivas (ver Ejercicio 4.41). *Por tanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que*

$$Q(\xi,\delta_1) \subset \Omega \qquad \forall \xi \in K,$$
$$Q(\zeta,\delta_1) \subset \Omega' \qquad \forall \zeta \in K'.$$

Sean

$$K_1 := \bigcup_{\xi\in K} Q(\xi,\delta_1) \qquad y \qquad K_1' := \bigcup_{\zeta\in K'} Q(\zeta,\delta_1).$$



K_1 y K_1' son subconjuntos compactos de Ω y Ω' respectivamente (ver Ejercicio 4.33). *Por tanto, como φ' es continua en K_1 y $(\varphi^{-1})'$ es continua en K_1', existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sup_{x\in K_1} \left\|\varphi'(x)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq M \qquad y \qquad \sup_{y\in K_1'} \left\|(\varphi^{-1})'(y)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Definimos $c_0 := M\sqrt{n}$ *y* $\delta_2 := \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{\delta_1}{c_0}\right\}$.

Lema 11.28. *Para cada $\delta \in (0, \delta_1)$, $\xi \in K$ y $x \in \Omega$ se cumple lo siguiente:*

(a) Si $\|\varphi(x) - \varphi(\xi)\|_\infty \leq \delta$, entonces $\|x - \xi\|_\infty \leq c_0\delta$.

(b) Si $\|\varphi'(\xi)\,[x - \xi]\|_\infty \leq \delta$, entonces $\|x - \xi\|_\infty \leq c_0\delta$.

Demostración. (a): Si $\|\varphi(x) - \varphi(\xi)\|_\infty \leq \delta$, entonces $y_t := (1-t)\varphi(\xi) + t\varphi(x) \in Q(\varphi(\xi), \delta) \subset K_1'$ para cada $t \in [0, 1]$. Usando las desigualdades (11.9) y el teorema del valor medio (ver Corolario 9.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|x - \xi\|_\infty \leq \|x - \xi\| &= \left\|\varphi^{-1}(\varphi(x)) - \varphi^{-1}(\varphi(\xi))\right\| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|(\varphi^{-1})'(y_t)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \|\varphi(x) - \varphi(\xi)\| \\
&\leq M\sqrt{n}\, \|\varphi(x) - \varphi(\xi)\|_\infty \\
&\leq c_0\delta.
\end{aligned}$$

(b): Si $\|\varphi'(\xi)(x - \xi)\|_\infty \leq \delta$, usando las desigualdades (11.9) y (9.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|x - \xi\|_\infty \leq \|x - \xi\| &= \left\|(\varphi^{-1})'(\varphi(\xi))\left[\varphi'(\xi)\,[x - \xi]\right]\right\| \\
&\leq \left\|(\varphi^{-1})'\,[\varphi(\xi)]\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \left\|\varphi'(\xi)\,[x - \xi]\right\| \\
&\leq M\sqrt{n}\left\|\varphi'(\xi)\,[x - \xi]\right\|_\infty \\
&\leq c_0\delta.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Considera la función $\Theta_\delta \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en (11.3). Es sencillo comprobar que

$$\left|(\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(x) - (\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(y)\right| \leq \frac{n}{\delta} \|x - y\|_\infty \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{11.10}$$

Proponemos esta desigualdad como ejercicio [Ejercicio 11.47].

Lema 11.29. *Si $\zeta \in K'$ y $\delta \in (0, \delta_2)$, entonces*

$$\operatorname{sop}(\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta) \subset K_1' \qquad y \qquad \operatorname{sop}((\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta) \circ \varphi) \subset K_1.$$

Además, existe una función $\omega \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$ y

$$\left| \int_\Omega (\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| dx - \int_{\Omega'} (\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(y) dy \right| \leq \omega(\delta) \delta^n$$

para cualesquiera $\zeta \in K'$, $\delta \in (0, \delta_2)$.

Demostración. Sean $\zeta \in K'$, $\xi := \varphi^{-1}(\zeta) \in K$ y $\delta \in (0, \delta_2)$. Denotemos por $\alpha_\xi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a la función $\alpha_\xi(x) := \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)\,[x - \xi]$. Como $\operatorname{sop}(\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta) = Q(\zeta, \delta)$ y $c_0 \delta < \delta_1$, del Lema 11.28 se sigue que

$$\operatorname{sop}((\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta) \circ \varphi) \subset Q(\xi, c_0 \delta) \subset K_1, \tag{11.11}$$

$$\operatorname{sop}((\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta) \circ \alpha_\xi) \subset Q(\xi, c_0 \delta) \subset K_1. \tag{11.12}$$

Por otra parte, como $\varphi'(\xi) \in GL(n, \mathbb{R})$, aplicando el Teorema 11.19 obtenemos

$$\int_\Omega \left(\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta\right)(\alpha_\xi(x)) \left|\det \varphi'(\xi)\right| dx = \int_{\Omega'} \left(\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta\right)(y) dy.$$

En consecuencia, bastará probar que existe una función $\omega \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$ y

$$\left| \int_\Omega (\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| dx - \int_\Omega (\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(\alpha_\xi(x)) \left|\det \varphi'(\xi)\right| dx \right| \leq \omega(\delta) \delta^n. \tag{11.13}$$

Sea $x \in Q(\xi, c_0 \delta)$. Como $x_t := (1 - t)\xi + t x \in Q(\xi, c_0 \delta) \subset K_1$ para cualquier $t \in [0, 1]$, el teorema del valor medio (ver Corolario 9.18) asegura que

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi(x) - \alpha_\xi(x)\right\| &= \left\|\varphi(x) - \varphi(\xi) - \varphi'(\xi)\,[x - \xi]\right\| \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} \left\|\varphi'(x_t) - \varphi'(\xi)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|x - \xi\| \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} \left\|\sqrt{n}\varphi'(x_t) - \sqrt{n}\varphi'(\xi)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|x - \xi\|_\infty .
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 11.26 a la función $\sqrt{n}\varphi' \colon K_1 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ obtenemos una función no decreciente $\omega_1 \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\lim_{t\to 0^+} \omega_1(t) = 0$ y

$$\left\| \sqrt{n}\varphi'(y) - \sqrt{n}\varphi'(z) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq \omega_1(\|y-z\|_\infty) \qquad \forall y, z \in K_1.$$

Por tanto,

$$\left\|\varphi(x) - \alpha_\xi(x)\right\|_\infty \leq \sup_{t\in[0,1]} \omega_1(\|x_t - \xi\|_\infty)\, \|x-\xi\|_\infty \leq \omega_1(c_0\delta)c_0\delta. \tag{11.14}$$

De las desigualdades (11.10) y (11.14) se sigue que

$$\left|(\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\varphi(x)) - (\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\alpha_\xi(x))\right| \leq \frac{n}{\delta}\left\|\varphi(x) - \alpha_\xi(x)\right\|_\infty \leq c_0 n\omega_1(c_0\delta). \tag{11.15}$$

Por otra parte, aplicando el Lema 11.26 a la función $|\det\varphi'| \colon K_1 \to \mathbb{R}$ obtenemos una función no decreciente $\omega_2 \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\lim_{t\to 0^+} \omega_2(t) = 0$ y

$$\left|\,\left|\det\varphi'(x)\right| - \left|\det\varphi'(\xi)\right|\,\right| \leq \omega_2(\|x-\xi\|_\infty) \leq \omega_2(c_0\delta). \tag{11.16}$$

Usando la desigualdad del triángulo y las desigualdades (11.15) y (11.16) concluimos que

$$\begin{aligned}
&\left|\,(\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\varphi(x))\left|\det\varphi'(x)\right| - (\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\alpha_\xi(x))\left|\det\varphi'(\xi)\right|\,\right| \\
&\quad\leq \left|\det\varphi'(x)\right|\,\left|(\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\varphi(x)) - (\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\alpha_\xi(x))\right| \\
&\qquad + \left|\,\left|\det\varphi'(x)\right| - \left|\det\varphi'(\xi)\right|\,\right|\,(\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\alpha_\xi(x)) \\
&\quad\leq M_1c_0n\omega_1(c_0\delta) + \omega_2(c_0\delta) =: \omega_3(\delta)
\end{aligned} \tag{11.17}$$

para toda $x \in Q(\xi, c_0\delta)$, donde $M_1 := \sup_{x\in K_1} |\det\varphi'(x)|$.

Por último, usando el Ejercicio 11.35, las afirmaciones (11.11) y (11.12), la desigualdad (11.17) y el Ejercicio 11.31 obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega (\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\varphi(x))\left|\det\varphi'(x)\right|dx - \int_\Omega (\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\alpha_\xi(x))\left|\det\varphi'(\xi)\right|dx\right| \\
&\quad\leq \int_\Omega \left|\,(\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\varphi(x))\left|\det\varphi'(x)\right| - (\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\alpha_\xi(x))\left|\det\varphi'(\xi)\right|\,\right|dx \\
&\quad= \int_{Q(\xi,c_0\delta)} \left|\,(\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\varphi(x))\left|\det\varphi'(x)\right| - (\mathrm{T}_\xi\Theta_\delta)(\alpha_\xi(x))\left|\det\varphi'(\xi)\right|\,\right|dx \\
&\quad\leq \int_{Q(\xi,c_0\delta)} \omega_3(\delta)dx = \omega_3(\delta)(2c_0\delta)^n = \omega(\delta)\delta^n,
\end{aligned}$$

donde $\omega(\delta) := (2c_0)^n\omega_3(\delta)$. Esto demuestra la afirmación (11.13). □

Demostración del Teorema 11.25. Sea $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega')$ y sea $g := (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|$. Entonces $\operatorname{sop}(g) = \varphi^{-1}(\operatorname{sop}(f))$. Por tanto, $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$.

Para cada $\delta \in (0, \delta_2)$, denotemos por

$$\begin{aligned} f_\delta &:= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f(\delta m) \mathrm{T}_{\delta m} \Theta_\delta, \\ g_\delta &:= (f_\delta \circ \varphi) \left|\det \varphi'\right| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f(\delta m)((\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta) \circ \varphi) \left|\det \varphi'\right|. \end{aligned}$$

El Lema 11.29 asegura que $\operatorname{sop}(f_\delta \circ \varphi) \subset K_1$ y $\operatorname{sop}(f_\delta) \subset K_1'$. Por otra parte, el Lema 11.14 asegura que

$$\lim_{\delta \to 0} \|f - f_\delta\|_\infty = 0.$$

Como

$$\|g - g_\delta\|_\infty = \sup_{x \in K_1} |f(\varphi(x)) - f_\delta(\varphi(x))| \left|\det \varphi'(x)\right| \le \|f - f_\delta\|_\infty \sup_{x \in K_1} \left|\det \varphi'(x)\right|,$$

concluimos que $\lim_{\delta \to 0} \|g - g_\delta\|_\infty = 0$.

Del Lema 11.11 se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \int_\Omega g(x)dx &= \lim_{\delta \to 0} \int_\Omega g_\delta(x)dx \\ &= \lim_{\delta \to 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f(\delta m) \int_\Omega (\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| dx, \\ \int_{\Omega'} f(y)dy &= \lim_{\delta \to 0} \int_{\Omega'} f_\delta(y)dy \\ &= \lim_{\delta \to 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f(\delta m) \int_{\Omega'} (\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(y)dy. \end{aligned}$$

Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{sop}(f) \subset [-r, r]^n$. Aplicando el Lema 11.29 obtenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f(\delta m) \left(\int_\Omega (\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| dx - \int_{\Omega'} (\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(y)dy \right) \right| \\ &\quad \le \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |f(\delta m)| \left| \int_\Omega (\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| dx - \int_{\Omega'} (\mathrm{T}_{\delta m}\Theta_\delta)(y)dy \right| \\ &\quad \le \|f\|_\infty \left(\frac{2r}{\delta} + 1 \right)^n \omega(\delta)\delta^n = \|f\|_\infty (2r + \delta)^n \, \omega(\delta), \end{aligned}$$

donde $\lim_{\delta\to 0^+} \omega(\delta) = 0$. En consecuencia,

$$\left| \int_\Omega g(x)dx - \int_{\Omega'} f(y)dy \right| \leq \lim_{\delta\to 0^+} \|f\|_\infty (2r+\delta)^n \, \omega(\delta) = 0.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

11.5. Ejercicios

Ejercicio 11.30. *Prueba que, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y Q_1 y Q_2 son dos rectángulos que contienen a* $\mathrm{sop}(f)$*, entonces*

$$\int_{Q_1} f = \int_{Q_2} f.$$

Ejercicio 11.31. *Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^0(Q)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_Q \lambda f + \mu g = \lambda \int_Q f + \mu \int_Q g.$$

(b) Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^0(Q)$ con $f \leq g$,

$$\int_Q f \leq \int_Q g.$$

(c) Si $c\colon Q \to \mathbb{R}$ es una función constante, entonces

$$\int_Q c = c \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Ejercicio 11.32 (Cambio de variable para funciones de variable real)**.** *Sean $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$ y $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $g(t) \in [\alpha,\beta]$ para todo $t \in [a,b]$, prueba que*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

(Sugerencia: Usa los teoremas fundamentales del cálculo y la regla de la cadena.)

Ejercicio 11.33. *Prueba que, para cualesquiera* $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ *y* $\xi \in \mathbb{R}^n$,

(a) $\operatorname{sop}(f+g) \subset \operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(g)$,

(b) $\operatorname{sop}(\lambda f) = \operatorname{sop}(f)$,

(c) $\operatorname{sop}(\mathrm{T}_\xi f) = \operatorname{sop}(f) + \xi := \{x + \xi : x \in \operatorname{sop}(f)\}$,

(d) $\operatorname{sop}(fg) \subset \operatorname{sop}(f) \cap \operatorname{sop}(g)$,

(e) $\operatorname{sop}(f) = \operatorname{sop}(|f|)$.

¿Es válida, en general, la igualdad en los incisos (a) y (d)?

Ejercicio 11.34. *Dadas* $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definimos* $\text{mín}\{f,g\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\text{máx}\{f,g\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *como*

$$(\text{mín}\{f,g\})(x) := \text{mín}\{f(x), g(x)\}, \qquad (\text{máx}\{f,g\})(x) := \text{máx}\{f(x), g(x)\}.$$

Prueba que, si $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $\text{mín}\{f,g\} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *y* $\text{máx}\{f,g\} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. (Sugerencia: Usa las identidades (8.16) y (8.15).)

Ejercicio 11.35. *Prueba que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n).$$

Ejercicio 11.36. *Prueba que, si* $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$ *y* $f(x_0) > 0$ *para algún* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f > 0.$$

Ejercicio 11.37. *Sean* $1 \leq m \leq n$, $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^m)$ *y* $h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n-m})$. *Definimos* $g \odot h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *como*

$$(g \odot h)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := g(x_1, \ldots, x_m) h(x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Prueba que $g \odot h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *y que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g \odot h) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} g \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} h \right).$$

Ejercicio 11.38. *Sea* K *un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$. *Da un ejemplo de una función* $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $g(x) = 1$ *para todo* $x \in K$ *y* $g(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 11.39. *Prueba que, si* $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$*, entonces* f *es uniformemente continua en* $\mathbb{R}^n$. (Sugerencia: Usa el Teorema 4.31.)

Ejercicio 11.40. *Prueba que*

$$\frac{1}{2}\,\theta(2t+1)+\theta(2t)+\frac{1}{2}\,\theta(2t-1)=\theta(t) \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Ejercicio 11.41. *(a) Prueba que, si* $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *es una medida de Haar, entonces para cualquier* $a \geq 0$ *la función* $aJ : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$(aJ)(f) := aJ(f)$$

es una medida de Haar.

(b) ¿Es cierta la afirmación anterior si $a < 0$*?*

Ejercicio 11.42. *Sea*

$$\mathcal{C}_{per}^0(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) : f(x+m) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall m \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

el espacio de las funciones continuas de periodo 1 *en cada variable* $x_1, \ldots, x_n$*. Prueba que*

(a) $\mathcal{C}_{per}^0(\mathbb{R}^n)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$*,*

(b) $\mathrm{T}_\xi f \in \mathcal{C}_{per}^0(\mathbb{R}^n)$ *para toda* $f \in \mathcal{C}_{per}^0(\mathbb{R}^n)$ *y* $\xi \in \mathbb{R}^n$*,*

(c) la función $I_{per} : \mathcal{C}_{per}^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$I_{per}(f) := \int_Q f,$$

donde $Q := [0,1]^n$*, es lineal, monótona e invariante bajo traslaciones.*

Ejercicio 11.43. *Sea* $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$*. El producto de números complejos le da a* $\mathbb{S}^1$ *la estructura de grupo abeliano. El* n***-toro***

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ veces}}$$

es también un grupo abeliano con la multiplicación

$$(z_1, \ldots, z_n)(w_1, \ldots, w_n) := (z_1 w_1, \ldots, z_n w_n).$$

La ***función exponencial*** $\exp\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$*, definida como*

$$\exp(x_1, \dots, x_n) := (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}),$$

es un homomorfismo de grupos, es decir, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Dados $\zeta \in \mathbb{T}^n$ *y* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^n)$*, la* ***traslación de*** f ***por*** ζ *es la función* $\mathrm{T}_\zeta f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^n)$ *dada por*

$$\left(\mathrm{T}_\zeta f\right)(z) := f\left(\zeta^{-1} z\right), \qquad z \in \mathbb{T}^n. \tag{11.18}$$

Prueba que

(a) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^n)$ *si y sólo si* $f \circ \exp \in \mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R}^n)$*,*

(b) la función $I_{\mathbb{T}^n}\colon \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$I_{\mathbb{T}^n}(f) := I_{per}(f \circ \exp),$$

donde $I_{per}\colon \mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *es la función definida en el ejercicio anterior, es una* ***medida de Haar en*** $\mathbb{T}^n$*, es decir, es lineal, monótona e invariante bajo la traslación definida en* (11.18) [4].

Ejercicio 11.44. *Sea* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la función*

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{1 - \|x\|^2} & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Prueba que $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n)$ *y que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f > 0.$$

Ejercicio 11.45. *(a) Si* A *es una matriz de* $n \times n$ *demuestra que son equivalentes las siguientes cuatro afirmaciones:*

(a.1) A *es ortogonal, i.e.* $\|Ax\| = \|x\|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

(a.2) A *preserva el producto escalar, i.e.* $Ax \cdot Ay = x \cdot y$ *para todos* $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*

(a.3) Los renglones de A *son vectores ortonormales.*

(a.4) Las columnas de A *son vectores ortonormales.*

(b) Prueba que cualquiera de estas afirmaciones implica que $\det A = \pm 1$.

(c) ¿Es cierto que si A *es una matriz de* $n \times n$ *y* $\det A = \pm 1$ *entonces* A *es ortogonal?*

[4] Si quieres aprender más sobre medidas de Haar consulta [Nac60].

Ejercicio 11.46. *Demuestra el* Teorema 11.21.

Ejercicio 11.47. *(a) Prueba que*

$$|\Theta(x) - \Theta(y)| \leq n \, \|x - y\|_\infty \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Sugerencia: Usa inducción sobre n.)

(b) Prueba que, para todo $\delta > 0$ *y todo* $\zeta \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|(\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(x) - (\mathrm{T}_\zeta \Theta_\delta)(y)\right| \leq \frac{n}{\delta} \, \|x - y\|_\infty \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ejercicio 11.48. *Sea* Ω *un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Prueba que, si* $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ *y* $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es la función*

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega, \end{cases}$$

entonces $\bar{f} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 11.49. *Sean* $\Omega := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ *y* $\Omega' := (0, \infty) \times (0, 2\pi)$. *Prueba que, para toda* $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x, y) dx\, dy = \int_{\Omega'} f(r \cos\vartheta, r \operatorname{sen}\vartheta) r\, dr\, d\vartheta.$$

En los ejercicios siguientes denotaremos por

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) := \mathcal{C}_c^0(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

al conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$ con soporte compacto en Ω.

Ejercicio 11.50 (Integración por partes)**.** *(a) Prueba que, si* $f \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, *entonces* $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

(b) Prueba que, si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, *entonces* $\frac{\partial f}{\partial x_i} g$, $f \frac{\partial g}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g = -\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

(Sugerencia: Aplica *(a)* a la función fg.)

Ejercicio 11.51 (Fórmula de Green)**.** *Sea* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. *El* ***laplaciano de*** f *es la función*

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Prueba que, si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *y* $g \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$, *entonces* $(\Delta f)g$, $\nabla f \cdot \nabla g$, $f(\Delta g) \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega (\Delta f)g = -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g = \int_\Omega f(\Delta g).$$

(Sugerencia: Aplica el Ejercicio 11.50.)

12

Funciones Lebesgue-integrables

En el capítulo anterior definimos la integral de una función continua con soporte compacto. Nuestro objetivo es extender la noción de integrabilidad a una clase más amplia de funciones.

Empezaremos considerando aquellas funciones $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que son supremos puntuales de sucesiones no decrecientes de funciones $g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos por $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de tales funciones. En virtud de la monotonía de la integral es razonable definir

$$\int_{\mathbb{R}^n} g := \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} g_k.$$

Un resultado debido a Dini (ver Teorema 12.2) garantiza que esta integral está bien definida. Análogamente consideraremos el conjunto $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ de aquellas funciones $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ que son ínfimos puntuales de sucesiones no crecientes de funciones $h_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y definiremos

$$\int_{\mathbb{R}^n} h := \inf_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} h_k.$$

Para aquellas funciones que pertenecen a $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ ambas integrales coinciden con la integral definida en el capítulo anterior.

En general, estas integrales no tienen por qué ser finitas. Más aún, el conjunto $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ no es un espacio vectorial. Estos inconvenientes se resuelven del siguiente modo: considera el conjunto $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ de todas aquellas funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para las cuales

$$\begin{aligned} -\infty < \sup &\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} h : h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n),\ h \leq f \right\} \\ = \inf &\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g : g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n),\ g \geq f \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Estas funciones se llaman Lebesgue-integrables y su integral se define como

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f &:= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} h : h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n),\ h \leq f\right\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} g : g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n),\ g \geq f\right\}.\end{aligned}$$

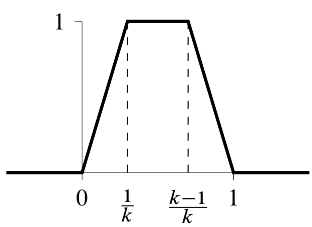
Esta definición resulta complicada de manejar. Demostraremos que una función es Lebesgue-integrable si se puede aproximar, en un sentido adecuado, por una sucesión de funciones continuas con soporte compacto, y que su integral de Lebesgue es el límite de las integrales de dicha sucesión. Esta caracterización permite extender de manera sencilla las propiedades que demostramos en el capítulo anterior a este contexto más general. Probaremos que el conjunto $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial, que la integral es lineal y monótona y que continúa satisfaciendo la fórmula de cambio lineal de variable. Los teoremas fundamentales de la teoría de integración de Lebesgue se demostrarán en el siguiente capítulo.

12.1. La integral de una función semicontinua

Considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12.1. *Sea* $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función*

$$f_k(t) := \begin{cases} kt & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right], \\ k(1-t) & \text{si } t \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right], \\ 0 & \text{si } t \notin [0,1]. \end{cases}$$



Nota que $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$*, que* $f_k \leq f_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y que, para cada* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \begin{cases} 1 & \textit{si } t \in (0,1), \\ 0 & \textit{si } t \notin (0,1). \end{cases}$$

Además, como

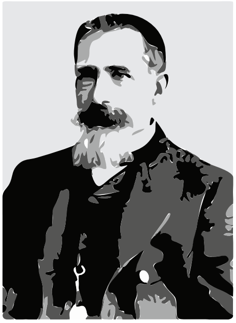
$$\int_{\mathbb{R}} f_k = 1 - \tfrac{1}{k},$$

se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k = 1.$$

El ejemplo anterior sugiere la posibilidad de extender la integral a aquellas funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que son el límite puntual de una sucesión creciente de funciones continuas con soporte compacto, definiéndola como el límite de las integrales de una tal sucesión. Para ello requerimos probar que dicho límite no depende de la sucesión elegida. El siguiente resultado nos permitirá obtener esa conclusión.

En general, no es cierto que, si una sucesión de funciones continuas converge puntualmente a una función continua en un espacio compacto, entonces converge uniformemente (ver Ejemplo 5.13). Sin embargo, Dini[1] demostró que esta afirmación sí es cierta si la sucesión es no decreciente.



Ulisse Dini

Teorema 12.2 (Dini)**.** *Sea* K *un espacio métrico compacto y sean* $f, f_k \in \mathcal{C}^0(K)$ *tales que*

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \cdots$$

[1] Ulisse Dini (1845-1918) nació en Pisa, Italia. Estudió en la Scuola Normale Superiore, donde fue alumno de Enrico Betti, y en París, donde fue alumno de Charles Hermite y Joseph Bertrand. Fue profesor de la Universidad de Pisa y rector de la Scuola Normale Superiore.

y

$$f_k(x) \to f(x) \ \ \textit{para cada } x \in K.$$

Entonces $f_k \to f$ *uniformemente en* K.

Demostración. Definimos $g_k := f - f_k$. Entonces $g_k \geq g_{k+1} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = 0 \qquad \forall x \in K.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ elegimos $k_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$g_k(x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_x.$$

Además, como g_{k_x} es continua, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\left|g_{k_x}(y) - g_{k_x}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si } d_K(y,x) < \delta_x.$$

Por tanto,

$$g_k(y) \leq g_{k_x}(y) \leq \left|g_{k_x}(y) - g_{k_x}(x)\right| + g_{k_x}(x) < \varepsilon \qquad \text{si } \ k \geq k_x \ \text{ y } d_K(y,x) < \delta_x.$$

Como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset B_K(x_1, \delta_{x_1}) \cup \cdots \cup B_K(x_n, \delta_{x_n}).$$

En consecuencia,

$$g_k(y) < \varepsilon \qquad \forall k \geq \text{máx}\left\{k_{x_1}, \ldots, k_{x_n}\right\}, \ \forall y \in K.$$

Esto prueba que $f_k \to f$ uniformemente en K. □

Una consecuencia importante del teorema de Dini es la siguiente.

Corolario 12.3. *Sean* $f, f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *tales que*

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \cdots$$

y

$$f_k(x) \to f(x) \ \ \textit{para cada } x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Demostración. Observa que, si $f(x) = 0 = f_1(x)$, entonces $f_k(x) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\operatorname{sop}(f_k) \subset \operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(f_1) =: K$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 12.2, $f_k \to f$ uniformemente en K y, por tanto, en $\mathbb{R}^n$. Aplicando el Lema 11.11, concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f,$$

como afirma el enunciado. □

Si $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y $f_k \leq f_{k+1}$, por la monotonía de la integral se tiene que $\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_{k+1}$. De modo que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

El siguiente resultado es consecuencia del Corolario 12.3.

Corolario 12.4. *Si $f_k, g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ cumplen que $f_k \leq f_{k+1}$ y $g_k \leq g_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k.$$

Demostración. Fija $k \in \mathbb{N}$ y, para cada $j \in \mathbb{N}$, considera la función $h_j := \min\{f_k, g_j\}$. Entonces $h_j \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ (ver Ejercicio 11.34), $h_j \leq h_{j+1}$, $f_k(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} h_j(x) = \lim_{k\to\infty} h_j(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $h_j \leq g_j$. Aplicando el Corolario 12.3 obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_j \leq \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_j \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_j.$$

Intercambiando f_k y g_k obtenemos el resultado. □

Denotamos por $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tales que existe una sucesión de funciones (f_k) en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ que cumple que $f_k \leq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = f$.

Definición 12.5. *Si $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ definimos* ***la integral de f en $\mathbb{R}^n$*** *como*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

donde (f_k) *es una sucesión de funciones en* $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *tales que* $f_k \leq f_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = f$.

El Corolario 12.4 asegura que la integral de f en $\mathbb{R}^n$ no depende de la sucesión elegida. En particular, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, podemos tomar $f_k = f$. Esto prueba que, para funciones en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, la integral dada por la Definición 12.5 coincide con la introducida en el capítulo precedente.

A continuación daremos una descripción más accesible del conjunto $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$. El siguiente lema muestra que las funciones que pertenecen a $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ son semicontinuas inferiormente (ver Definición 4.22).

Sea X un espacio métrico. El **supremo puntual** de un conjunto de funciones $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $i \in \mathcal{I}$, es la función

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

definida como

$$\big(\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i\big)(x) := \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x).$$

Lema 12.6. *Si* X *es un espacio métrico y* $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *es s.c.i. para todo* $i \in \mathcal{I}$, *entonces* $\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i$ *es s.c.i.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $c < (\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i)(x_0)$. Escogemos $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $c < f_{i_0}(x_0)$. Como f_{i_0} es s.c.i., existe $\delta > 0$ tal que

$$c < f_{i_0}(x) \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$

En consecuencia,

$$c < f_{i_0}(x) \leq \big(\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i\big)(x) \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$

Esto prueba que $\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i$ es s.c.i. □

El siguiente resultado caracteriza a los elementos de $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 12.7. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) f *es s.c.i. y existe un compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus K.$$

(b) Existen funciones $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ *tales que* $f_k \leq f_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y*

$$f = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k.$$

Demostración. (b)⇒(a): Sean $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tales que $f_k \leq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $f = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. El Lema 12.6 asegura que f es s.c.i. Por otra parte, como $f \geq f_1$, se tiene que

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathrm{sop}(f_1).$$

Esto prueba que f cumple *(a)*.

(a)⇒(b): Sea f s.c.i. y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus K$, con $K \neq \emptyset$ compacto. Por el Teorema 4.29, f alcanza su mínimo en K. Por tanto, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

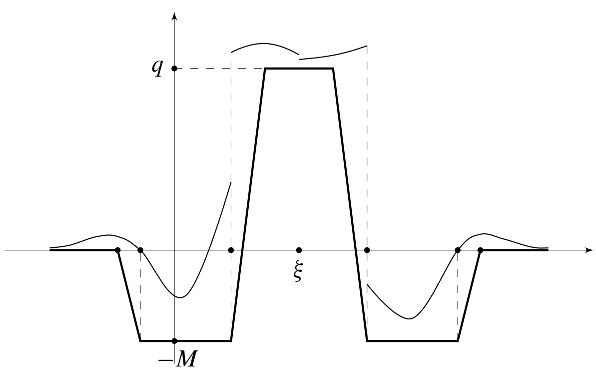
$$f(x) > -M \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea

$$\mathcal{N} := \{(\xi, \varepsilon, q) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : \quad \varepsilon > 0, \quad q > -M, \quad f(x) > q \ \forall x \in B(\xi, \varepsilon)\},$$

donde $B(\xi, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\| < \varepsilon\}$. Para cada $\nu = (\xi, \varepsilon, q) \in \mathcal{N}$ escogemos $r_\nu \in (\varepsilon, \infty)$ tal que $K \subset B(\xi, r_\nu)$ y definimos $g_\nu \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ como

$$g_\nu(x) := \begin{cases} q & \text{si } \|x - \xi\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ -\frac{2(q+M)}{\varepsilon}\|x - \xi\| + 2q + M & \text{si } \frac{\varepsilon}{2} \leq \|x - \xi\| \leq \varepsilon, \\ -M & \text{si } \varepsilon \leq \|x - \xi\| \leq r_\nu, \\ -M(r_\nu + 1 - \|x - \xi\|) & \text{si } r_\nu \leq \|x - \xi\| \leq r_\nu + 1, \\ 0 & \text{si } r_\nu + 1 \leq \|x - \xi\|. \end{cases}$$



Por construcción, $g_\nu \leq f$. Probemos que $\sup_{\nu\in\mathcal{N}} g_\nu = f$.

En efecto, como f es s.c.i., dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $q \in \mathbb{Q}$ con $-M < q < f(x)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$q < f(y) \qquad \forall y \in B(x, \delta).$$

Tomando $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \frac{\delta}{2})$ y $\xi \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, tenemos que $B(\xi, \varepsilon) \subset B(x, \delta)$. Por tanto,

$$q < f(y) \qquad \forall y \in B(\xi, \varepsilon)$$

y, en consecuencia, $\nu = (\xi, \varepsilon, q) \in \mathcal{N}$ y $g_\nu(x) = q$. Esto prueba que $\sup_{\nu \in \mathcal{N}} g_\nu = f$.

El conjunto $\mathcal{N}$ es numerable. Numeramos sus elementos $\mathcal{N} = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ y definimos

$$f_k := \sup\left\{g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_k}\right\}.$$

Entonces $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ (ver Ejercicio 11.34), $f_k \leq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $f = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene que

$$\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) = \big\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} : f \text{ es s.c.i. y } \exists K \text{ compacto} \\ \text{tal que } f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus K\big\}.$$

Procediendo de manera análoga, definiremos la integral de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ que son el límite puntual de una sucesión decreciente de funciones continuas con soporte compacto.

El **ínfimo puntual** de un conjunto de funciones $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $i \in \mathcal{I}$, definidas en un espacio métrico X es la función

$$\inf_{i \in \mathcal{I}} f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

dada por

$$\left(\inf_{i \in \mathcal{I}} f_i\right)(x) := \inf_{i \in \mathcal{I}} f_i(x).$$

Nota que, si definimos $-(-\infty) := \infty$, las funciones semicontinuas inferior y superiormente (ver Definición 4.23) se relacionan como sigue:

$$f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ es s.c.s.} \quad \Longleftrightarrow \quad -f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ es s.c.i.} \qquad (12.1)$$

Esta relación, junto con el Lema 12.6, implica que el ínfimo puntual de una familia de funciones semicontinuas superiormente es semicontinuo superiormente. Además, se tienen los siguientes resultados.

Corolario 12.8. *Si $f_k, g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ son tales que $f_k \geq f_{k+1}$ y $g_k \geq g_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\text{ínf}_{k\in\mathbb{N}} f_k = \text{ínf}_{k\in\mathbb{N}} g_k$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k.$$

Demostración. Esta afirmación es consecuencia inmediata del Corolario 12.4, aplicado a las sucesiones $(-f_k)$ y $(-g_k)$, y la relación (12.1). □

Proposición 12.9. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) f es s.c.s. y existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus K.$$

(b) Existen funciones $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tales que $f_k \geq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$f = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k.$$

Demostración. De la relación (12.1) y la Proposición 12.7 se sigue inmediatamente este resultado. □

Denotamos por

$$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) := \big\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} : f \text{ es s.c.s. y } \exists K \text{ compacto}$$
$$\text{tal que } f(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus K \big\}.$$

Definición 12.10. *Sea $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$. Definimos* ***la integral de f en $\mathbb{R}^n$*** *como*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

donde (f_k) es una sucesión de funciones en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tales que $f_k \geq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\text{ínf}_{k\in\mathbb{N}} f_k = f$.

La Proposición 12.9 asegura que tal sucesión (f_k) existe y el Corolario 12.8 asegura que la integral de f en $\mathbb{R}^n$ no depende de la sucesión elegida. En particular, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, podemos tomar $f_k = f$. Esto prueba que, para funciones en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, la integral dada por la Definición 12.10 coincide con la introducida en el capítulo precedente. Más aún, como

$$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n),$$

las integrales dadas por las Definiciones 12.5 y 12.10 coinciden en $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$.

12.2. Propiedades de la integral de funciones semicontinuas

Probaremos algunas propiedades importantes de la integral. Empezamos con la siguiente observación sencilla. Como antes, convenimos que $-(-\infty) := \infty$.

Lema 12.11. $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ *si y sólo si* $-f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$. *En este caso,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = -\int_{\mathbb{R}^n} (-f)\,.$$

Demostración. Observa que $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $f_k \leq f_{k+1}$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = f$ si y sólo si $-f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $-f_k \geq -f_{k+1}$ y $\inf_{k\in\mathbb{N}}(-f_k) = -f$. Por el Teorema 11.7,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k = -\int_{\mathbb{R}^n} (-f_k)\,.$$

Pasando al límite obtenemos la identidad deseada. □

Si $f, g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ o $f, g \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in [0,\infty)$, definimos

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x),$$

donde

$$\begin{array}{rcrl}
a + \infty := \infty & \text{y} & \infty + a := \infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\,, \\
a + (-\infty) := -\infty & \text{y} & (-\infty) + a := -\infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\,, \\
\lambda\,(\infty) := \infty & \text{y} & \lambda\,(-\infty) := -\infty & \forall \lambda \in (0,\infty), \\
0\,(\pm\infty) := 0. & & &
\end{array}$$

Estas definiciones no son arbitrarias: ∞ es, por definición, el supremo de cualquier sucesión no decreciente y no acotada de números reales. Si a una sucesión de este tipo le sumamos un número real, o si la multiplicamos por un número positivo, obtenemos nuevamente una sucesión de este tipo. Mientras que, si la multiplicamos por 0, obtenemos la sucesión constante igual a 0. Las otras definiciones se obtienen de manera análoga. Nota, en cambio, que "$\infty - \infty$" no está definido.

Ni $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ ni $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ son espacios vectoriales. Sin embargo, se cumple lo siguiente.

Proposición 12.12. *(a) Si $f, g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in [0, \infty)$, entonces $f+g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, $\lambda f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g \qquad y \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

(b) Si $f, g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y $f \leq g$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Ambas afirmaciones también son ciertas si reemplazamos $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ por $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Demostraremos ambas afirmaciones para $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$. El resultado para $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ se obtiene aplicando el Lema 12.11.

(a): Si $f_k, g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ son tales que $f_k \leq f_{k+1}$, $g_k \leq g_{k+1}$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = f$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k = g$, entonces

$$f_k + g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n), \qquad f_k + g_k \leq f_{k+1} + g_{k+1}, \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} (f_k + g_k) = f + g,$$

y para $\lambda \in [0, \infty)$

$$\lambda f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n), \qquad \lambda f_k \leq \lambda f_{k+1}, \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} (\lambda f_k) = \lambda f.$$

Del Teorema 12.7 se sigue que $f+g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, y las identidades

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f$$

son consecuencia de las correspondientes identidades para las funciones $f_k, g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema 11.7).

(b): Si $f, g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, $f \leq g$, y $f_k, g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ son tales que $f_k \leq f_{k+1}$, $g_k \leq g_{k+1}$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = f$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k = g$, definimos

$$h_k := \min\{f_k, g_k\}.$$

Entonces $h_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $h_k \leq h_{k+1}$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} h_k = f$ y $h_k \leq g_k$. De la monotonía de la integral para funciones en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema 11.7) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k \leq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k =: \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Esto concluye la demostración. □

Una consecuencia que nos será de utilidad más adelante es la siguiente.

Corolario 12.13. *Si $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, entonces $f - g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f - g) = \int_{\mathbb{R}^n} f - \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Demostración. El Lema 12.11 y la Proposición 12.12 implican que $-g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, $f - g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f - g) = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} (-g) = \int_{\mathbb{R}^n} f - \int_{\mathbb{R}^n} g,$$

como afirma el enunciado. □

Se cumple además lo siguiente.

Proposición 12.14. *Si $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $x \mapsto f(Ax + \zeta)$ pertenece a $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + \zeta)\, |\det A|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy.$$

La afirmación también es cierta si reemplazamos $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ por $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Si $f = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ con $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y $f_k \leq f_{k+1}$, y si denotamos por $\varphi(x) := Ax + \zeta$, entonces $f_k \circ \varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $f_k \circ \varphi \leq f_{k+1} \circ \varphi$ y $f \circ \varphi = \sup_{k \in \mathbb{N}} (f_k \circ \varphi)$. Así que $f \circ \varphi \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y el resultado es consecuencia inmediata del Teorema 11.19. □

Para $1 \leq m < n$, identificamos a $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ y denotamos a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ como $x = (y, z)$ con $y \in \mathbb{R}^m$ y $z \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Si $g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $h \colon \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g \geq 0$, $h \geq 0$, definimos $g \odot h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como

$$(g \odot h)\,(y, z) := g(y)h(z),$$

donde $(\infty)(\infty) := \infty$.

Proposición 12.15. *Sean $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^m)$ y $h \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^{n-m})$ tales que $g \geq 0$ y $h \geq 0$. Entonces $g \odot h \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g \odot h) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} g \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} h \right).$$

La afirmación también es cierta si reemplazamos $\mathcal{S}_*$ por $\mathcal{S}^*$.

Demostración. Demostraremos el resultado para $\mathcal{S}_*$. La demostración para $\mathcal{S}^*$ es más sencilla.

Sean $g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^m)$ y $h_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n-m})$ tales que $g_k \leq g_{k+1}$, $h_k \leq h_{k+1}$, $g = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k$ y $h = \sup_{k\in\mathbb{N}} h_k$. Sustituyendo, de ser necesario, g_k por $\max\{g_k, 0\}$ y h_k por $\max\{h_k, 0\}$, podemos suponer que $g_k \geq 0$ y $h_k \geq 0$. Se tiene entonces que $g_k \odot h_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $g_k \odot h_k \leq g_{k+1} \odot h_{k+1}$ y $g \odot h = \sup_{k\in\mathbb{N}}(g_k \odot h_k)$. Usando el Ejercicio 11.37 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (g \odot h) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (g_k \odot h_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^m} g_k\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} h_k\right)\right] = \left(\int_{\mathbb{R}^m} g\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} h\right),\end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

El siguiente resultado asegura que la integral se obtiene integrando sucesivamente respecto a cada variable.

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y un punto $z \in \mathbb{R}^{n-m}$, denotamos por $f^z: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a la función

$$f^z(y) := f(y, z).$$

Proposición 12.16 (Teorema de Fubini para funciones semicontinuas)**.** *Sean* $1 \leq m < n$ *y* $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$*. Entonces, para cada* $z \in \mathbb{R}^{n-m}$*, la función* f^z *pertenece a* $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^m)$*, la función* $F: \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *dada por*

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}^m} f^z$$

pertenece a $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^{n-m})$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F = \int_{\mathbb{R}^n} f. \tag{12.2}$$

La afirmación también es cierta si reemplazamos $\mathcal{S}_*$ *por* $\mathcal{S}^*$ *y* ∞ *por* $-\infty$*.*

Demostración. Probaremos la afirmación para $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$. La afirmación para $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ se obtiene aplicando el Lema 12.11.

Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \leq f_{k+1}$ y $f = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Entonces, para cada $z \in \mathbb{R}^{n-m}$, se cumple que $f_k^z \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^m)$, $f_k^z \leq f_{k+1}^z$ y $f^z = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k^z$. En consecuencia, $f^z \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^m)$ y

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}^m} f^z = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_k^z = \lim_{k\to\infty} F_k(z), \tag{12.3}$$

donde $F_k\colon \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$F_k(z) := \int_{\mathbb{R}^m} f_k^z.$$

Esta función es continua (ver Lema 11.2). Además, si $\mathrm{sop}(f_k) \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $z \notin [a_{m+1}, b_{m+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, entonces $f_k^z = 0$ y, en consecuencia, $F_k(z) = 0$. Por tanto, $F_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n-m})$. De la monotonía de la integral se sigue que $F_k \leq F_{k+1}$ y la igualdad (12.3) afirma que $F = \sup_{k\in\mathbb{N}} F_k$. Esto implica que $F \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^{n-m})$ y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F_k. \tag{12.4}$$

Por otra parte, de la definición de la integral en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F_k(z)dz &= \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_k^z(y)dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_k(y,z)dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned} \tag{12.5}$$

De las identidades (12.4) y (12.5) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f,$$

como afirma el enunciado. □

Nota que, por la invariancia de la integral bajo isometrías (Proposición 12.14), podemos intercambiar el orden de las integrales en la proposición anterior, es decir, integrar primero respecto a z y después respecto a y. Las identidades correspondientes (12.2) suelen escribirse como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y,z)dy \right) dz &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y,z)dy\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} f(y,z)dz \right) dy. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Un primer resultado que permite el intercambio del límite puntual de funciones con la integral es el siguiente.

Proposición 12.17 (Convergencia monótona para funciones semicontinuas)**.** *Sea* (f_k) *una sucesión en* $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $f_k \leq f_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $f := \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. *Entonces* $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos una sucesión $(f_{k,j})$ en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_{k,j} \leq f_{k,j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $f_k := \sup_{j\in\mathbb{N}} f_{k,j}$. Observa que

$$f_{i,j} \leq f_i \leq f_k \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \forall i \leq k.$$

Definimos

$$g_k := \max_{i\leq k,\, j\leq k} f_{i,j}.$$

Entonces $g_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $g_k \leq g_{k+1}$ y $g_k \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y

$$f = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} f_{i,j} = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k.$$

En consecuencia, $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y de la monotonía de la integral (Proposición 12.12) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_i \leq \int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Pasando al límite obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k,$$

como afirma el enunciado. $\square$

12.3. El volumen de un conjunto

Aplicaremos las propiedades de la integral para calcular el volumen de algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Empecemos definiendo este concepto.

Definición 12.18. *La **función característica** (o **función indicadora**) de un subconjunto* X *de* $\mathbb{R}^n$ *es la función*

$$1_X(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus X. \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que la función 1_X es s.c.i si y sólo si X es abierto en $\mathbb{R}^n$, y es s.c.s. si y sólo si X es cerrado en $\mathbb{R}^n$. En consecuencia,

$$1_X \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) \text{ si y sólo si } X \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n, \tag{12.7}$$

$$1_X \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \text{ si y sólo si } X \text{ es compacto en } \mathbb{R}^n. \tag{12.8}$$

Proponemos la demostración de estas afirmaciones como ejercicio [Ejercicio 12.48].

Definición 12.19. *Si X es un subconjunto abierto o X es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, definimos el* ***volumen de*** *X en $\mathbb{R}^n$ como*

$$\mathrm{vol}_n(X) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_X \quad \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\,.$$

El volumen tiene las siguientes propiedades.

Proposición 12.20. *(a) Si $X \subset Y$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y ambos son abiertos o ambos son compactos, entonces*

$$\mathrm{vol}_n(X) \leq \mathrm{vol}_n(Y).$$

(b) Sea $\varphi(x) = Ax+\zeta$ con $A \in GL(n,\mathbb{R})$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\varphi(X) := \{\varphi(x) : x \in X\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ si X lo es, y $\varphi(X)$ es compacto si X lo es. En ambos casos,

$$\mathrm{vol}_n(\varphi(X)) = |\det A|\ \mathrm{vol}_n(X).$$

Demostración. (a): Si $X \subset Y$ entonces $1_X \leq 1_Y$. Además, $1_X, 1_Y \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ si X y Y son abiertos, y $1_X, 1_Y \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ si X y Y son compactos. Así que en ambos casos podemos aplicar la afirmación *(b)* de la Proposición 12.12 para obtener la afirmación deseada.

(b): Como φ es un homeomorfismo, $\varphi(X)$ es abierto si X lo es y $\varphi(X)$ es compacto si X lo es. Nota que $1_{\varphi(X)} \circ \varphi = 1_X$. Las Proposiciones 12.12 y 12.14 aseguran entonces que

$$|\det A| \int_{\mathbb{R}^n} 1_X = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1_{\varphi(X)} \circ \varphi\right) |\det A| = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\varphi(X)},$$

como afirma el enunciado. $\square$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 12.21. *(a) Si* $U = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ *con* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, *entonces*

$$\mathrm{vol}_n(U) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

(b) Si $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ *con* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, *entonces*

$$\mathrm{vol}_n(Q) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

En particular, si $a_i = b_i$ *para algún* $i = 1, \ldots, n$, *entonces* $\mathrm{vol}_n(Q) = 0$.

Demostración. (a): En el Ejemplo 12.1 probamos que

$$\mathrm{vol}_1((0,1)) = 1.$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, y $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $\varphi(t) := (b-a)t + a$, entonces $\varphi((0,1)) = (a,b)$ y la Proposición 12.20 asegura que

$$\mathrm{vol}_1((a,b)) = b - a.$$

Observa que $1_U = 1_{(a_1,b_1)} \odot \cdots \odot 1_{(a_n,b_n)}$. Aplicando la Proposición 12.15 obtenemos

$$\mathrm{vol}_n(U) = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} 1_{(a_i,b_i)} = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

(b): Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_k(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b], \\ k(t-a) + 1 & \text{si } t \in [a - \frac{1}{k}, a], \\ k(b-t) + 1 & \text{si } t \in [b, b + \frac{1}{k}], \\ 0 & \text{si } t \notin [a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Entonces $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$, $f_k \geq f_{k+1}$ y $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k = 1_{[a,b]}$. Por tanto,

$$\mathrm{vol}_1([a,b]) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k = \lim_{k\to\infty} \left(b - a + \tfrac{1}{k}\right) = b - a.$$

Como $1_Q = 1_{[a_1,b_1]} \odot \cdots \odot 1_{[a_n,b_n]}$, aplicando la Proposición 12.15 obtenemos que

$$\mathrm{vol}_n(Q) = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} 1_{[a_i,b_i]} = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

como afirma el enunciado. □

Corolario 12.22. *Si X es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, o si X es compacto, entonces* $\mathrm{vol}_n(X) < \infty$.

Demostración. En ambos casos X es acotado, así que existe $r \in (0, \infty)$ tal que $X \subset (-r, r)^n$. La Proposición 12.20 y el Ejemplo 12.21 aseguran que

$$\begin{aligned} &\mathrm{vol}_n(X) \leq \mathrm{vol}_n((-r, r)^n) = (2r)^n < \infty \qquad \text{si } X \text{ es abierto},\\ &\mathrm{vol}_n(X) \leq \mathrm{vol}_n([-r, r]^n) = (2r)^n < \infty \qquad \text{si } X \text{ es compacto}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Corolario 12.23. $\mathrm{vol}_n(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Demostración. De la Proposición 12.20 y el Ejemplo 12.21 se sigue que

$$\mathrm{vol}_n(\mathbb{R}^n) \geq \mathrm{vol}_n((-r, r)^n) = (2r)^n \qquad \forall r > 0.$$

Por tanto, $\mathrm{vol}_n(\mathbb{R}^n) = \infty$. □

Una consecuencia importante del teorema de Fubini (Proposición 12.16) es el principio de Cavalieri[2], que afirma lo siguiente.

Corolario 12.24 (Principio de Cavalieri)**.** *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos*

$$K_t := \left\{ y \in \mathbb{R}^{n-1} : (y, t) \in K \right\}.$$

Entonces, la función $t \mapsto \mathrm{vol}_{n-1}(K_t)$ pertenece a $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ y

$$\mathrm{vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}_{n-1}(K_t)dt.$$

[2] Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) nació en Milán, Italia. Estudió teología en el monasterio de San Gerolamo en Milán y geometría en la Universidad de Pisa. Su *método de los indivisibles* para calcular áreas y volúmenes es un antecedente importante del cálculo moderno.

Bonaventura Cavalieri

Demostración. Aplicamos la Proposición 12.16 con $m = n - 1$ a la función 1_K. Como $1_K^t = 1_{K_t}$ para cada $t \in \mathbb{R}$, la función F de la Proposición 12.16 es la función $F(t) := \mathrm{vol}_{n-1}(K_t)$. Dicha proposición asegura que $F \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ y que

$$\mathrm{vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_K = \int_{\mathbb{R}} F = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}_{n-1}(K_t)dt,$$

como afirma el enunciado. $\square$

Usemos el principio de Cavalieri para calcular el volumen de la bola.

Ejemplo 12.25. *Sea* $\bar{B}^n(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$*,* $r > 0$*. Entonces*

$$\omega_n := \mathrm{vol}_n(\bar{B}^n(0,1)) = \begin{cases} \frac{1}{k!}\pi^k & \text{si } n = 2k, \\ \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}\pi^k & \text{si } n = 2k+1, \end{cases}$$

y

$$\mathrm{vol}_n(\bar{B}^n(0,r)) = r^n\omega_n.$$

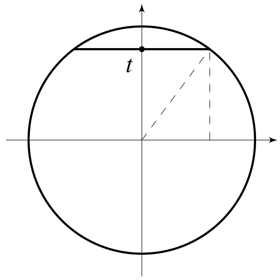
Demostración. Como $\bar{B}^n(0,r) = \left\{rx : x \in \bar{B}^n(0,1)\right\}$, la afirmación

$$\mathrm{vol}_n(\bar{B}^n(0,r)) = r^n\omega_n \tag{12.9}$$

es consecuencia de la Proposición 12.20. Ahora calcularemos ω_n.

Si $n > 1$, del principio de Cavalieri y la identidad (12.9) se sigue que

$$\begin{aligned} \omega_n &= \int_{-1}^1 \mathrm{vol}_{n-1}\left(\bar{B}^{n-1}(0,\sqrt{1-t^2})\right)dt \\ &= \omega_{n-1}\int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\,dt. \end{aligned} \tag{12.10}$$



El cambio de variable $t = \cos x$ nos da

$$c_n := \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^n x \, dx.$$

Integrando por partes obtenemos que

$$c_{2k} = \pi \prod_{i=1}^{k} \tfrac{2i-1}{2i} \qquad \text{y} \qquad c_{2k+1} = 2 \prod_{i=1}^{k} \tfrac{2i}{2i+1}.$$

Por tanto, $c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$, lo que implica que

$$\omega_n = \omega_{n-1} c_n = \omega_{n-2} c_n c_{n-1} = \tfrac{2\pi}{n} \omega_{n-2} \qquad \text{si } n > 2. \tag{12.11}$$

Como $\omega_1 := \mathrm{vol}_1([-1, 1]) = 2$, de la ecuación (12.10) se sigue que $\omega_2 = 2c_2 = \pi$. Iterando (12.11) obtenemos que

$$\omega_{2k} = \frac{1}{k!} \pi^k \qquad \text{y} \qquad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)} \pi^k,$$

como afirma el enunciado. □

12.4. Funciones Lebesgue-integrables

Para definir la integral de Lebesgue haremos uso de los siguientes conceptos.

Definición 12.26. *Para cualquier función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definimos la* ***integral superior de*** f *como*

$$\int^* f := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g : g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n),\ g \geq f \right\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

y la ***integral inferior de*** f *como*

$$\int_* f := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} h : h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n),\ h \leq f\right\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\,.$$

Observa que en ambos casos el conjunto cuyo ínfimo o cuyo supremo estamos tomando no es vacío, ya que la función constante ∞ pertenece a $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y la función constante $-\infty$ pertenece a $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$. Enunciamos a continuación algunas propiedades sencillas de estas integrales.

Lema 12.27. *(a) Para toda* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*,*

$$\int_* f = -\int^* (-f)\,.$$

(b) Para toda $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*,*

$$\int_* f \leq \int^* f.$$

(c) Si $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *cumplen que* $f_1 \leq f_2$*, entonces*

$$\int^* f_1 \leq \int^* f_2 \qquad y \qquad \int_* f_1 \leq \int_* f_2.$$

(d) Si $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$*, entonces*

$$\int_* f = \int^* f = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

(e) Para cualesquiera $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *y* $\lambda \in [0, \infty)$*,*

$$\int^* \lambda f = \lambda \int^* f \qquad y \qquad \int_* \lambda f = \lambda \int_* f.$$

(f) Para cualesquiera $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$

$$\int^* (f_1 + f_2) \leq \int^* f_1 + \int^* f_2.$$

Demostración. *(a)* es consecuencia inmediata del Lema 12.11.

(b): Basta probar que, si $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $h \leq g$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \leq \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Del Corolario 12.13 y la monotonía de la integral (Proposición 12.12) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} h = \int_{\mathbb{R}^n} (g-h) \geq 0.$$

Esta es la desigualdad deseada.

(c) es consecuencia inmediata de la definición.

(d): Sea $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$. La igualdad

$$\int^* f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

es consecuencia inmediata de la definición de la integral superior. Sean $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, tales que $f_k \leq f_{k+1}$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = f$. En particular, $f_k \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $f_k \leq f$. De la definición de integral inferior y la afirmación *(b)* obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_* f \leq \int^* f = \int_{\mathbb{R}^n} f,$$

es decir,

$$\int_* f = \int^* f = \int_{\mathbb{R}^n} f \qquad \forall f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n).$$

Si $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, las identidades correspondientes se siguen de éstas utilizando la afirmación *(a)* y el Lema 12.11.

(e): Si $\lambda = 0$ el resultado es obvio. Supongamos que $\lambda > 0$. Para toda $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tal que $g \geq \lambda f$, se tiene que $\lambda^{-1} g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda^{-1} g \geq f$. Usando la Proposición 12.12 obtenemos

$$\lambda \int^* f \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-1} g = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Se tiene entonces que

$$\lambda \int^* f \leq \int^* \lambda f.$$

Reemplazando f por λf y λ por λ^{-1} en la desigualdad anterior obtenemos

$$\lambda^{-1} \int^* \lambda f \leq \int^* f,$$

es decir,

$$\int^* \lambda f \leq \lambda \int^* f.$$

Esto prueba la igualdad para la integral superior. La igualdad para la integral inferior se obtiene aplicando la afirmación *(a)*.

(f): Si $\int^* f_1 = \infty$ o $\int^* f_2 = \infty$ la desigualdad deseada se cumple trivialmente. Supongamos que $\int^* f_1 < \infty$ y $\int^* f_2 < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tales que $g_1 \geq f_1$, $g_2 \geq f_2$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_1 \leq \left(\int^* f_1\right) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} g_2 \leq \left(\int^* f_2\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, $g_1 + g_2 \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, $g_1 + g_2 \geq f_1 + f_2$ y, sumando las desigualdades anteriores, obtenemos

$$\int^* (f_1 + f_2) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (g_1 + g_2) \leq \left(\int^* f_1 + \int^* f_2\right) + \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$\int^* (f_1 + f_2) \leq \int^* f_1 + \int^* f_2,$$

como se afirma en *(f)*. □

Definición 12.28. *Una función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *es* ***(Lebesgue-) integrable*** *si*

$$-\infty < \int_* f = \int^* f < \infty.$$

En este caso, la ***integral (de Lebesgue[3]) de*** f *se define como*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_* f = \int^* f \quad \in \mathbb{R}.$$

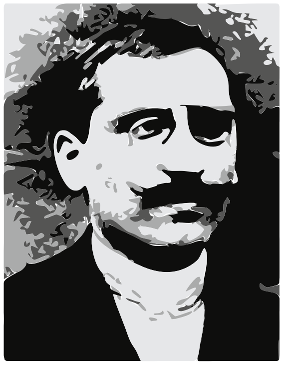
Observaciones 12.29. *Del* Lema 12.27 *se infiere lo siguiente:*

(a) *Si* $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, *entonces* f *es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral definida en la* Sección 12.1 *cumple que*

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty.$$

En este caso, la integral de Lebesgue de f *coincide con dicha integral.*

[3] Henri Léon Lebesgue (1875-1941) nació en Beauvais, Oise, Francia. Estudió en la Sorbonne de Paris, donde fue alumno de Émile Borel. Introdujo su teoría de integración en 1902 en su tesis de doctorado titulada *Integral, longitud y área*.



Henri Lebesgue

(b) *En particular, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, entonces f es Lebesgue-integrable y la integral de Lebesgue de f coincide con la de la* Definición 11.5.

La Definición 12.28 se puede reformular como sigue.

Lema 12.30. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es Lebesgue-integrable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existen $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tales que $h \leq f \leq g$,*

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^n} h, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} g < \infty \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} h < \varepsilon.$$

Demostración. $\Rightarrow$): Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es Lebesgue-integrable entonces, como su integral superior y su integral inferior son finitas, para cada $\varepsilon > 0$, existen $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tales que $h \leq f \leq g$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \leq \int^* f + \frac{\varepsilon}{2} < \infty \qquad \text{y} \qquad -\infty < \int_* f - \frac{\varepsilon}{2} < \int_{\mathbb{R}^n} h.$$

Dado que la integral superior y la integral inferior de f coinciden, concluimos que

$$0 = \int^* f - \int_* f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} h < \int^* f - \int_* f + \varepsilon = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$): Inversamente, si para cada $\varepsilon > 0$ existen $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tales que $h \leq f \leq g$,

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^n} h, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} g < \infty \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} h < \varepsilon,$$

entonces

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^n} h \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g < \infty$$

y, en consecuencia,

$$0 \leq \int^* f - \int_* f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} h < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Esto prueba que f es Lebesgue-integrable. □

El siguiente resultado proporciona una caracterización muy útil de las funciones Lebesgue-integrables y permite expresar a su integral como el límite de integrales de funciones en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, definimos $|f| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como

$$|f|(x) := |f(x)|,$$

donde $|\pm\infty| := \infty$.

Proposición 12.31. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Entonces f es Lebesgue-integrable si y sólo si existe una sucesión (φ_k) en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f - \varphi_k| = 0.$$

En ese caso, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k.$$

Demostración. $\Rightarrow$): Supongamos que f es Lebesgue-integrable. Basta probar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int^* |f - \varphi| < \varepsilon. \tag{12.12}$$

Por el Lema 12.30 y el Corolario 12.13, existen $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ tales que $h \leq f \leq g$ y

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^n} h, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} g < \infty \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (g - h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, de la definición de la integral para funciones en $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ se sigue que existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \leq g$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como

$$|f - \varphi|(x) = \begin{cases} f(x) - \varphi(x) \leq g(x) - \varphi(x) & \text{si } f(x) \geq \varphi(x), \\ \varphi(x) - f(x) \leq g(x) - h(x) & \text{si } f(x) \leq \varphi(x), \end{cases}$$

se tiene que

$$|f - \varphi| \leq (g - h) + (g - \varphi) \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n).$$

Usando el Lema 12.27 y la Proposición 12.12, concluimos que

$$\int^* |f - \varphi| \leq \int_{\mathbb{R}^n} [(g - h) + (g - \varphi)] = \int_{\mathbb{R}^n} (g - h) + \int_{\mathbb{R}^n} (g - \varphi) < \varepsilon.$$

Esto prueba la afirmación (12.12).

$\Leftarrow$): Supongamos que existe una sucesión (φ_k) en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f - \varphi_k| = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int^* |f - \varphi_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si } k \geq k_0.$$

Entonces, por definición de la integral superior, para cada $k \geq k_0$ existe $g_k \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tal que $g_k \geq |f - \varphi_k|$ y

$$\int^* |f - \varphi_k| \leq \int_{\mathbb{R}^n} g_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, $g_k + \varphi_k \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$, $-g_k + \varphi_k \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $-g_k + \varphi_k \leq f \leq g_k + \varphi_k$. Aplicando el Lema 12.27 y la Proposición 12.12 obtenemos que

$$\begin{aligned} -\infty < -\frac{\varepsilon}{2} + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k < -\int_{\mathbb{R}^n} g_k + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = \int_* (-g_k + \varphi_k) \leq \int_* f \\ \leq \int^* f \leq \int^* (g_k + \varphi_k) = \int_{\mathbb{R}^n} g_k + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k < \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k < \infty. \end{aligned} \tag{12.13}$$

En consecuencia,

$$0 \leq \int^{*} f - \int_{*} f \leq \varepsilon.$$

Concluimos que

$$-\infty < \int_{*} f = \int^{*} f < \infty,$$

es decir, f es Lebesgue-integrable.

Finalmente, se sigue de (12.13) que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0.$$

Esto prueba que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k$$

como afirma el enunciado. □

12.5. Propiedades básicas de la integral de Lebesgue

Usaremos la Proposición 12.31 para probar algunas propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue. Empecemos observando lo siguiente.

Proposición 12.32. *(a) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es Lebesgue-integrable, entonces $-f$ es Lebesgue-integrable y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-f) = -\int_{\mathbb{R}^n} f.$$

(b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es Lebesgue-integrable, entonces $|f|$ es Lebesgue-integrable y

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Demostración. (a): Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es Lebesgue-integrable, usando el Lema 12.27 obtenemos que

$$\int^{*} (-f) = -\int_{*} f = -\int^{*} f = \int_{*} (-f).$$

Esto demuestra la afirmación *(a)*.

(b): La Proposición 12.31 asegura que existe una sucesión (φ_k) en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f-\varphi_k| = 0.$$

Observa que $0 \leq ||f|-|\varphi_k|| \leq |f-\varphi_k|$. Así que, por la monotonía de la integral superior,

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \int^* ||f|-|\varphi_k|| \leq \lim_{k\to\infty} \int^* |f-\varphi_k| = 0.$$

La Proposición 12.31 asegura entonces que $|f|$ es Lebesgue-integrable y, junto con el Ejercicio 11.35, asegura además que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k| \geq \lim_{k\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right|,$$

como afirma el enunciado. □

Veremos más adelante que una función Lebesgue-integrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sólo toma los valores $\pm\infty$ en un conjunto muy pequeño que no afecta el valor de la integral (ver Proposición 13.11). Por ello consideraremos en el resto de esta sección únicamente funciones que toman valores reales.

Denotemos por

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ es Lebesgue-integrable}\}.$$

El siguiente resultado afirma que $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial y que la integral es una función lineal y monótona.

Teorema 12.33 (Linealidad y monotonía)**.** *(a) Si $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} f_1 + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^n} f_2.$$

(b) Si $f, g \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y $f \leq g$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Demostración. (a): Sean $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. La Proposición 12.31 asegura que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $\varphi_{1,k}, \varphi_{2,k} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} \int^* \left| f_i - \varphi_{i,k} \right| = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2.$$

De las afirmaciones *(c)*, *(e)* y *(f)* del Lema 12.27 se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int^* \left|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \lambda_1\varphi_{1,k} - \lambda_2\varphi_{2,k}\right| \\ &\leq |\lambda_1| \int^* \left|f_1 - \varphi_{1,k}\right| + |\lambda_2| \int^* \left|f_2 - \varphi_{2,k}\right|. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} \int^* \left|(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) - (\lambda_1\varphi_{1,k} + \lambda_2\varphi_{2,k})\right| = 0.$$

La Proposición 12.31 asegura entonces que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lambda_1\varphi_{1,k} + \lambda_2\varphi_{2,k}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{1,k} + \lim_{k\to\infty} \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{2,k} \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} f_1 + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^n} f_2. \end{aligned}$$

Esto demuestra la linealidad.

(b): La monotonía es consecuencia inmediata de la Definición 12.28 y la afirmación *(c)* del Lema 12.27. □

Ahora probaremos el teorema de cambio de variable para isometrías afines. El teorema de cambio de variable para difeomorfismos es más delicado. Lo demostraremos en el siguiente capítulo.

Teorema 12.34 (Cambio lineal de variable)**.** *Sean $A \in GL(n,\mathbb{R})$ y $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ entonces la función $x \mapsto f(Ax+\zeta)$ pertenece a $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+\zeta)\,|\det A|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy.$$

Demostración. Sean $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tales que $h \leq f \leq g$. Denotemos por $F(x) := Ax+\zeta$. Por la Proposición 12.14, $(h \circ F)\,|\det A| \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, $(g \circ F)\,|\det A| \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h \circ F)\,|\det A| = \int_{\mathbb{R}^n} h \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (g \circ F)\,|\det A| = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f &= \operatorname{ínf}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} (g\circ F)\,|\det A| : g\in\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n),\ g\geq f\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} (h\circ F)\,|\det A| : h\in\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n),\ h\leq f\right\}.\end{aligned}$$

Por otra parte, como $(h\circ F)\,|\det A| \leq (f\circ F)\,|\det A| \leq (g\circ F)\,|\det A|$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (h\circ F)\,|\det A| &\leq \int_* (f\circ F)\,|\det A|\,,\\ \int^* (f\circ F)\,|\det A| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (g\circ F)\,|\det A|\,.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int^* (f\circ F)\,|\det A| \leq \int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_* (f\circ F)\,|\det A|\,.$$

Del Lema 12.27 se sigue la igualdad y, por tanto, la integrabilidad de $f\circ F$ y la identidad deseada. $\square$

Si $1\leq m<n$, $g\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ y $h\colon\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}$, definimos $g\odot h\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ como

$$(g\odot h)\,(y,z) := g(y)h(z), \qquad \text{donde } (y,z)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}\equiv\mathbb{R}^n. \tag{12.14}$$

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 12.35. *Si $f_1\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ y $f_2\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^{n-m})$, $1\leq m<n$, entonces $f_1\odot f_2\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_1\odot f_2) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} f_2\right).$$

Demostración. Por la Proposición 12.32, si $f_1\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ y $f_2\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^{n-m})$ entonces $|f_1|\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ y $|f_2|\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^{n-m})$. Por tanto, existe $M\in\mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{máx}\left\{\int_{\mathbb{R}^m} |f_1|\,,\ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} |f_2|\right\} < M.$$

Elegimos $\tilde{g}\in\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^m)$ tal que $\tilde{g}\geq|f_1|$ y

$$\int_{\mathbb{R}^m} \tilde{g} < M. \tag{12.15}$$

Por otra parte, la Proposición 12.31 asegura que existen $\varphi_{1,k} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^m)$, $\varphi_{2,k} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n-m})$ tales que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\left|f_1-\varphi_{1,k}\right|=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left|f_2-\varphi_{2,k}\right|=0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$,

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left|\varphi_{2,k}\right| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-m}}|f_2| + \int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left|f_2-\varphi_{2,k}\right| < M, \\ \int_{\mathbb{R}^m}\left|f_1-\varphi_{1,k}\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left|f_2-\varphi_{2,k}\right| < \frac{\varepsilon}{2M}.\end{gathered} \tag{12.16}$$

Para cada $k \geq k_0$ elegimos $g_{1,k} \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^m)$ y $g_{2,k} \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^{n-m})$ de modo que $g_{1,k} \geq \left|f_1-\varphi_{1,k}\right|$, $g_{2,k} \geq \left|f_2-\varphi_{2,k}\right|$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_{1,k} < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-m}} g_{2,k} < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{12.17}$$

Observa que

$$\begin{aligned}\left|(f_1 \odot f_2)-(\varphi_{1,k}\odot\varphi_{2,k})\right| &\leq \left(|f_1|\odot\left|f_2-\varphi_{2,k}\right|\right)+\left(\left|f_1-\varphi_{1,k}\right|\odot\left|\varphi_{2,k}\right|\right) \\ &\leq \left(\tilde{g}\odot g_{2,k}\right)+\left(g_{1,k}\odot\left|\varphi_{2,k}\right|\right)\end{aligned}$$

En consecuencia, usando el Lema 12.27, la Proposición 12.15 y las desigualdades (12.15), (12.16) y (12.17) obtenemos

$$\begin{aligned}\int^{*}\left|(f_1 \odot f_2)-(\varphi_{1,k}\odot\varphi_{2,k})\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\tilde{g}\odot g_{2,k}\right)+\int_{\mathbb{R}^n}\left(g_{1,k}\odot\left|\varphi_{2,k}\right|\right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^m}\tilde{g}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}}g_{2,k}\right)+\left(\int_{\mathbb{R}^m}g_{1,k}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left|\varphi_{2,k}\right|\right) \\ &< \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.\end{aligned}$$

De la Proposición 12.31 se sigue entonces que $f_1 \odot f_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y, usando el Ejercicio 11.37, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f_1\odot f_2) &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\varphi_{1,k}\odot\varphi_{2,k}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^m}\varphi_{1,k}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\varphi_{2,k}\right)=\left(\int_{\mathbb{R}^m}f_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}}f_2\right),\end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

El teorema de Fubini para funciones Lebesgue-integrables es más delicado. Lo posponemos para el siguiente capítulo.

12.6. Conjuntos integrables

Definición 12.36. *Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es* ***integrable*** *si $1_X \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. La* ***medida de Lebesgue*** *(o el* ***volumen****)* ***de*** *X en $\mathbb{R}^n$ se define como*

$$\mathrm{vol}_n(X) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_X$$

Se suele usar también la notación $|X|$ o $|X|_n$ en vez de $\mathrm{vol}_n(X)$.

El Corolario 12.22 asegura que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es integrable y todo subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ es integrable. Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces su cerradura $\overline{\Omega}$ y su frontera $\partial\Omega := \overline{\Omega} \smallsetminus \Omega$ son compactos y, por tanto, integrables. Para obtener otros ejemplos de conjuntos integrables usaremos el siguiente resultado.

Lema 12.37. *Si $f, g \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y g es acotada, entonces $fg \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. La Proposición 12.31 asegura que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int^* |f - \varphi_k| < \frac{1}{2k\,(\|g\|_\infty + 1)},$$

y que existe $\psi_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int^* |g - \psi_k| < \frac{1}{2k\,(\|\varphi_k\|_\infty + 1)}.$$

Como

$$|fg - \varphi_k\psi_k| \le |f - \varphi_k|\,|g| + |\varphi_k|\,|g - \psi_k| \le \|g\|_\infty\,|f - \varphi_k| + \|\varphi_k\|_\infty\,|g - \psi_k|\,,$$

se tiene que

$$\int^* |fg - \varphi_k\psi_k| \le \|g\|_\infty \left(\int^* |f - \varphi_k|\right) + \|\varphi_k\|_\infty \left(\int^* |g - \psi_k|\right) < \frac{1}{k}.$$

Esto prueba que $fg \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. □

Veremos más adelante que el producto de funciones Lebesgue-integrables no necesariamente es integrable (ver Ejemplo 13.32).

Proposición 12.38. *Si X y Y son subconjuntos integrables de $\mathbb{R}^n$, entonces $X \cap Y$, $X \cup Y$ y $X \smallsetminus Y$ son integrables y*

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(X \cup Y) &= \mathrm{vol}_n(X) + \mathrm{vol}_n(Y) - \mathrm{vol}_n(X \cap Y), \\ \mathrm{vol}_n(X \smallsetminus Y) &= \mathrm{vol}_n(X) - \mathrm{vol}_n(X \cap Y). \end{aligned}$$

Demostración. Para cualesquiera subconjuntos X y Y de $\mathbb{R}^n$ se cumple que

$$1_{X\cap Y} = 1_X 1_Y, \tag{12.18}$$

$$1_{X\cup Y} = 1_X + 1_Y - 1_{X\cap Y}, \tag{12.19}$$

$$1_{X\smallsetminus Y} = 1_X - 1_{X\cap Y}. \tag{12.20}$$

Si $1_X \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y $1_Y \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, el Lema 12.37 y la identidad (12.18) aseguran que $1_{X\cap Y} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. Del Teorema 12.33 y las identidades (12.19) y (12.20) se sigue que $1_{X\cup Y} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, $1_{X\smallsetminus Y} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y que son válidas las identidades del enunciado. $\square$

En consecuencia, si K es compacto y Ω es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $K \cap \Omega$ es integrable.

Proposición 12.39. *Si X es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^m$ y Y es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^{n-m}$, entonces $X \times Y$ es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$ y*

$$\mathrm{vol}_n(X \times Y) = (\mathrm{vol}_m(X))\,(\mathrm{vol}_{n-m}(Y))\,.$$

Demostración. Para cualesquiera subconjuntos X y Y de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $1_{X\times Y} = 1_X \odot 1_Y$. La afirmación es consecuencia de la Proposición 12.35. $\square$

Observación 12.40. *Si $n > m$, identificamos a $\mathbb{R}^m$ con el subespacio $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$. La proposición anterior asegura que, si X es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^m$, entonces $X \equiv X \times \{0\}$ es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$. Es decir, la integrabilidad de un conjunto no depende del espacio euclidiano que lo contiene. Pero su medida de Lebesgue sí, ya que $\mathrm{vol}_n(X) = 0$ para todo subconjunto integrable X de $\mathbb{R}^m$.*

12.7. La integral sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$

Extenderemos ahora el concepto de integrabilidad a funciones definidas en un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$.

Dada $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definimos $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ como

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus X. \end{cases} \tag{12.21}$$

$\bar{f}$ se llama la **extensión trivial de** f a $\mathbb{R}^n$.

Definición 12.41. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es **(Lebesgue-) integrable en** X si la función $\bar{f}$ es (Lebesgue-)integrable en $\mathbb{R}^n$. La **integral (de Lebesgue) de** f **en** X se define como*

$$\int_X f := \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}.$$

Denotamos por

$$\mathfrak{L}(X) := \{f: X \to \mathbb{R} : f \text{ es Lebesgue-integrable en } X\}. \tag{12.22}$$

Identificando a $f: X \to \mathbb{R}$ con su extensión $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tiene que $\mathfrak{L}(X)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 12.42. *Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f: K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f \in \mathfrak{L}(K)$.*

Demostración. Sean $a := \min_{x \in K} f$ y $b := \max_{x \in K} f$. Definimos $g: K \to \mathbb{R}$ como $g(x) := f(x) - a$. Como $g \geq 0$, se tiene que $\bar{g} \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ [Ejercicio 12.47]. Entonces

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g} \leq \int_{\mathbb{R}^n} (b-a)1_K = (b-a)\,\mathrm{vol}_n(K) < \infty.$$

De la Observación 12.29 se sigue que $\bar{g} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. Puesto que K es integrable, se tiene entonces que $\bar{f} = \bar{g} + a1_K \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, $f \in \mathfrak{L}(K)$. □

Proposición 12.43. *Si $f: X \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-integrable en X y Y es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$ tal que $Y \subset X$, entonces la restricción de f a Y,*

$$f|_Y : Y \to \mathbb{R},$$

es Lebesgue-integrable en Y y se cumple que

$$\int_Y (f|_Y) = \int_X f 1_Y.$$

Demostración. Observa que $\overline{f\,|_Y} = \bar{f}1_Y$. Así que este resultado es consecuencia inmediata del Lema 12.37. □

Notación 12.44. *(a) En adelante denotaremos simplemente por f, en vez de $\bar{f}$, a la extensión trivial de f a $\mathbb{R}^n$.*

(b) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-integrable en X y Y es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$ tal que $Y \subset X$, denotamos por

$$\int_Y f := \int_Y (f\,|_Y)\,.$$

(c) Si $X = (a, b)$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, escribimos

$$\int_a^b f := \int_{(a,b)} f.$$

*(d) En adelante diremos simplemente que f es **integrable en** X, en vez de decir que es Lebesgue-integrable en X, y llamaremos a la integral de Lebesgue simplemente la **integral**. Análogamente nos referiremos simplemente a la **medida** en vez de la medida de Lebesgue.*

12.8. Ejercicios

Ejercicio 12.45. *Prueba que, si K es un espacio métrico compacto y $f, f_k \in \mathcal{C}^0(K)$ son tales que $f_1 \geq \cdots \geq f_k \geq f_{k+1} \geq \cdots$ y $f_k(x) \to f(x)$ para cada $x \in K$, entonces $f_k \to f$ uniformemente en K.*

Ejercicio 12.46. *Prueba que, si $f_k \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, $f_k \geq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $f := \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, entonces $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Ejercicio 12.47. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$ considera su extensión trivial $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus X. \end{cases}$$

Si $f: X \to \mathbb{R}$ *es continua y* $f \geq 0$*, prueba que*

(a) *si* X *es abierto, entonces* $\bar{f} \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$*,*

(b) *si* X *es compacto, entonces* $\bar{f} \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$*.*

(Sugerencia: Usa el Ejercicio 4.46.)

Ejercicio 12.48. *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Demuestra que*

(a) $1_X \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ *si y sólo si* X *es abierto en* $\mathbb{R}^n$*,*

(b) $1_X \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ *si y sólo si* X *es compacto en* $\mathbb{R}^n$*.*

Ejercicio 12.49. (a) *Si* A *es una matriz de* $n \times n$ *(no necesariamente invertible) y* $\zeta \in \mathbb{R}^n$*, considera la función afín* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por* $\varphi(x) := Ax + \zeta$*. Prueba que, si* K *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\varphi(K)$ *es integrable y*

$$\mathrm{vol}_n(\varphi(K)) = |\det A|\,\mathrm{vol}_n(K).$$

(b) *Prueba que, si* K *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces* $\lambda K := \{\lambda x : x \in K\}$ *es integrable y*

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K) = |\lambda|^n\,\mathrm{vol}_n(K).$$

Ejercicio 12.50. *Sean* $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$*. Prueba que el* ***paralelogramo***

$$P := \{\xi_0 + t_1\xi_1 + \cdots + t_n\xi_n : t_i \in [0,1]\ \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ *y que*

$$\mathrm{vol}_n(P) = |\det(\xi_1 \cdots \xi_n)|\,.$$

(Sugerencia: Usa el Ejercicio 12.49.)

Ejercicio 12.51. *Sean* K *un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *y* $a \in (0,\infty)$*. Usando el principio de Cavalieri, calcula el volumen en* $\mathbb{R}^n$ *del cilindro*

$$K \times [0,a] := \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : y \in K,\ t \in [0,a]\right\}$$

en términos de a *y* $\mathrm{vol}_{n-1}(K)$*.*

Ejercicio 12.52. *Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$ y $a \in [0,\infty)$. Calcula el volumen en $\mathbb{R}^n$ del cono*

$$C := \left\{((1-t)y, ta) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : y \in K,\ t \in [0,1]\right\}$$

en términos de a y $\mathrm{vol}_{n-1}(K)$. (Sugerencia: Usa el principio de Cavalieri.)

Ejercicio 12.53. *Sean $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$. Calcula el volumen en $\mathbb{R}^n$ del simplejo*

$$\Sigma(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) := \left\{\sum_{i=0}^{n} t_i \xi_i \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\right\}.$$

(Sugerencia: Calcula primero el volumen de $\Sigma(0, e_1, \ldots, e_n)$ para la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de R^n, y aplica el Ejercicio 12.49 para obtener el caso general.)

Ejercicio 12.54. *Calcula el volumen en $\mathbb{R}^n$ del elipsoide*

$$E := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\right\}$$

con semiejes $a_1, \ldots, a_n \in (0,\infty)$. (Sugerencia: Usa el Ejemplo 12.25 y el Ejercicio 12.49.)

Ejercicio 12.55. *Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f \geq 0$. Sea*

$$G^f := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in K,\ 0 \leq t \leq f(x)\}$$

el conjunto de puntos bajo la gráfica de f.

(a) Prueba que G^f es compacto y que

$$\mathrm{vol}_{n+1}(G^f) = \int_K f.$$

(Sugerencia: Aplica la Proposición 12.16.)

(b) Usa la afirmación (a) y el Ejemplo 12.25 *para calcular la integral de la función*

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{1 - \|x\|^2} & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

del Ejercicio 11.44.

Ejercicio 12.56. *Si X y Y son subconjuntos integrables de $\mathbb{R}^n$ demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $X \subset Y$ entonces $\mathrm{vol}_n(X) \leq vol_n(Y)$.

(b) $\mathrm{vol}_n(Y \smallsetminus X) \geq \mathrm{vol}_n(Y) - \mathrm{vol}_n(X)$.

(c) Si $X \subset Y$ entonces $\mathrm{vol}_n(Y \smallsetminus X) = \mathrm{vol}_n(Y) - \mathrm{vol}_n(X)$.

Ejercicio 12.57. *Prueba que, si X es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$ y* $\mathrm{vol}_n(X) > 0$ *entonces, para cada $\alpha > 1$, existe un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$X \subset \Omega \qquad y \qquad \mathrm{vol}_n(\Omega) < \alpha\,\mathrm{vol}_n(X).$$

(Sugerencia: Toma $\varepsilon := \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, observa que existe $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tal que $g \geq 1_X$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} g < (1+\varepsilon)\,\mathrm{vol}_n(X),$$

y define $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 1-\varepsilon\}$.)

Ejercicio 12.58. *Prueba que, si Y es un subconjunto integrable y acotado de $\mathbb{R}^n$ y* $\mathrm{vol}_n(Y) > 0$ *entonces, para cada $\beta < 1$, existe un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$K \subset Y \qquad y \qquad \beta\,\mathrm{vol}_n(Y) < \mathrm{vol}_n(K).$$

(Sugerencia: Elige un rectángulo Q tal que $Y \subset Q$ y aplica el ejercicio anterior al conjunto $X := Q - Y$.)

Ejercicio 12.59. *(a) Prueba que, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, entonces $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$ y*

$$\int_{\Omega} |f| \leq \|f\|_\infty\,\mathrm{vol}_n(\Omega).$$

(b) Si omitimos la hipótesis de que Ω sea acotado, ¿es cierto que $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$?

(c) Si omitimos la hipótesis de que f sea acotada, ¿es cierto que $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$?

Ejercicio 12.60. *Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos $f^+, f^- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como*

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

Prueba que $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $f^+ \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y $f^- \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. (Sugerencia: Observa que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.)

Ejercicio 12.61. *Prueba que, si* $f, g \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $\max\{f, g\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ *y* $\min\{f, g\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 12.62. *Prueba que, si* $-\infty < a < b < \infty$ *y* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces la integral de* f *dada por la* Definición 12.41 *coincide con la integral usual de Riemann* $\int_a^b f$.

Ejercicio 12.63. *Prueba que, si* X *es un subconjunto integrable de* $\mathbb{R}^n$*, la función constante con valor* $c \in \mathbb{R}$ *es integrable en* X *y*

$$\int_X c = c \operatorname{vol}_n(X).$$

Ejercicio 12.64 (Funciones Riemann-integrables)**.** *Sea* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *el espacio vectorial generado por las funciones características de los rectángulos en* $\mathbb{R}^n$*, es decir, los elementos de* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *son funciones de la forma*

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{m} c_i 1_{Q_i},$$

donde Q_i *es un rectángulo y* $c_i \in \mathbb{R}$*. Se les llama* ***funciones escalonadas****.*

(a) Prueba que toda función escalonada es Lebesgue-integrable y que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta = \sum_{i=1}^{m} c_i \operatorname{vol}_n(Q_i).$$

(b) Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es* ***Riemann-integrable*** *si, para cada* $\varepsilon > 0$*, existen* $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *tales que* $\vartheta_1 \leq f \leq \vartheta_2$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_2 - \int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_1 < \varepsilon.$$

Prueba que, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$*, entonces* f *es Riemann-integrable.*

(c) Si f *es Riemann-integrable, su* ***integral de Riemann*** $I(f)$ *se define como*

$$\begin{aligned} I(f) := {} & \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta : \vartheta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),\ \vartheta \geq f\right\} \\ = {} & \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta : \vartheta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),\ \vartheta \leq f\right\}. \end{aligned}$$

Prueba que toda función Riemann-integrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es Lebesgue-integrable y*

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

(d) *Sea* $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. *Prueba que* $1_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *no es Riemann-integrable. En el siguiente capítulo probaremos que esta función sí es Lebesgue-integrable* (ver Ejemplo 13.5).

13

Teoremas fundamentales de la teoría de integración

En este capítulo expondremos los teoremas fundamentales de la teoría de integración de Lebesgue.

El cálculo efectivo de integrales múltiples depende en gran medida de la posibilidad de reducirlo al cálculo sucesivo de integrales en dimensiones menores. El teorema de Fubini afirma que la integral de una función integrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se puede obtener integrando coordenada a coordenada, es decir, si $1 \leq m < n$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy.$$

Este resultado requiere de ciertas precauciones ya que la función $x \mapsto f(x, y)$ puede no ser integrable para ciertas $y \in \mathbb{R}^{n-m}$. El teorema de Fubini afirma que el conjunto de tales y's tiene medida 0.

Los conjuntos integrables de medida 0 se llaman conjuntos nulos. Veremos que si dos funciones coinciden fuera de un conjunto nulo y una de ellas es integrable, entonces la otra lo es y las integrales de ambas coinciden. Es decir, podemos sustituir de manera arbitraria los valores de una función en un conjunto nulo sin que esto altere ni la integrabilidad de la función ni el valor de su integral.

Estudiaremos también la posibilidad de intercambiar al límite por la integral, es decir, de obtener la integral del límite puntual de una sucesión de funciones integrables como el límite de las integrales de dichas funciones. Este es un asunto de gran relevancia en el análisis matemático y tiene múltiples aplicaciones. La ausencia de buenas condiciones que permitan este intercambio es el motivo que llevó a sustituir la integral de Riemann por la integral de Lebesgue. Para la integral de Riemann la posibilidad de intercambiar al límite por la integral está estrechamente ligada a la convergencia uniforme mientras que, para la integral de Lebesgue, los teoremas que permiten este intercambio contienen hipótesis considerablemente más débiles.

Los dos teoremas fundamentales sobre convergencia en la teoría de integración de Lebesgue son el teorema de convergencia monótona de Levi y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. El primero afirma que, si la sucesión de funciones integrables (f_k) es no decreciente y el supremo de sus integrales está acotado, entonces su límite puntual f es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k. \tag{13.1}$$

El segundo afirma que, si una sucesión (f_k) de funciones integrables converge puntualmente a una función f y si tales funciones están dominadas puntualmente por una función integrable g, es decir, si $|f_k| \le g$ para todo k, entonces f es integrable y se cumple (13.1). Un tercer resultado importante, que se obtiene a partir del teorema de convergencia monótona y se usa para probar el teorema de convergencia dominada, es el lema de Fatou, que da condiciones para la integrabilidad del límite inferior de una sucesión de funciones.

Usando estos resultados de convergencia, demostraremos el teorema de cambio de variable para funciones integrables a partir del resultado correspondiente para funciones continuas con soporte compacto.

13.1. Conjuntos nulos

Por simplicidad, escribiremos $|X|$ en vez de $\mathrm{vol}_n(X)$.

Definición 13.1. *Se dice que un subconjunto Z de $\mathbb{R}^n$ es* ***nulo*** *si Z es integrable y $|Z| = 0$.*

Observación 13.2. *Observa que Z es nulo si y sólo si $\int^* 1_Z = 0$, ya que en ese caso*

$$0 \le \int_* 1_Z \le \int^* 1_Z = 0$$

y, en consecuencia, 1_Z es integrable y $|Z| = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Z = 0$.

Si $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $f_k \ge 0$, la sucesión de sumas parciales $\sum_{k=1}^m f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es no decreciente. Denotamos al supremo puntual de esta sucesión de funciones por

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k := \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{m} f_k \right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

El siguiente lema juega un papel importante en el estudio de las propiedades de los conjuntos nulos.

Lema 13.3. *Sean* $f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *tales que* $f_k \geq 0$. *Entonces*

$$\int^* \sum_{k=1}^{\infty} f_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int^* f_k.$$

Demostración. Si $\int^* f_k = \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, el resultado es trivialmente cierto. Así pues, supongamos que $\int^* f_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dada $\varepsilon > 0$, escogemos $g_k \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tal que $g_k \geq f_k$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int^* f_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. De la Proposición 12.17 se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned} \int^* \sum_{k=1}^{\infty} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} g_k &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{m} g_k \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int^* f_k \right) + \varepsilon, \end{aligned}$$

para toda $\varepsilon > 0$. En consecuencia,

$$\int^* \sum_{k=1}^{\infty} f_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int^* f_k,$$

como afirma el enunciado. □

Una primera consecuencia de este lema es la siguiente.

Proposición 13.4. *(a) Si* Z *es nulo y* $Y \subset Z$, *entonces* Y *es nulo.*

(b) Si $\{Z_k : k \in \mathbb{N}\}$ *es una familia numerable de subconjuntos nulos de* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $Z := \cup_{k=1}^{\infty} Z_k$ *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^n$.

Demostración. *(a)* es consecuencia inmediata de la monotonía de la integral superior.

(b): Observa que $1_Z \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Z_k}$. Aplicando la monotonía de la integral superior, el Lema 13.3 y la Observación 13.2 obtenemos

$$0 \leq \int^* 1_Z \leq \int^* \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Z_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int^* 1_{Z_k} = 0.$$

En consecuencia, Z es nulo. □

En particular, se cumple lo siguiente.

Ejemplo 13.5. *Todo subconjunto numerable N de $\mathbb{R}^n$ es nulo, pues cada punto de N lo es.*

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 13.6. *Si $1 \leq m < n$, K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ y $f\colon K \to \mathbb{R}^{n-m}$ es una función continua, entonces la gráfica de f,*

$$\operatorname{graf}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in K,\ y = f(x)\},$$

es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Como $\operatorname{graf}(f)$ es la imagen de K bajo la función continua $g\colon K \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) := (x, f(x))$, se tiene que $\operatorname{graf}(f)$ es compacto. Por tanto, $\operatorname{graf}(f)$ es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$.

Dado que

$$1_{\operatorname{graf}(f)}(x, y) = \begin{cases} 1_{\{f(x)\}}(y) & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin K, \end{cases}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^m$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} 1_{\operatorname{graf}(f)}(x, y)dy = 0.$$

Del teorema de Fubini para funciones semicontinuas (ver Proposición 12.16) se sigue que

$$|\operatorname{graf}(f)| = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\operatorname{graf}(f)} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} 1_{\operatorname{graf}(f)}(x, y)dy \right) dx = 0,$$

como afirma el enunciado. □

Del ejemplo anterior y el teorema de la función implícita se deduce que las subvariedades de $\mathbb{R}^n$ son subconjuntos nulos [Ejercicio 13.47]. Veamos un caso particular.

Ejemplo 13.7. *La esfera $S^{n-1}(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$, $r \geq 0$, es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $f : \bar{B}^{n-1}(0,r) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) := \sqrt{r^2 - \|x\|^2}$, donde $\bar{B}^{n-1}(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| \leq r\}$. Como $S^{n-1}(0,r) = S^+ \cup S^-$ con $S^\pm :=$ graf$(\pm f)$, del ejemplo anterior y la Proposición 13.4 se sigue que $S^{n-1}(0,r)$ es nulo. □

Proposición 13.8. *Z es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $Z \subset \Omega$ y $|\Omega| < \varepsilon$.*

Demostración. $\Rightarrow$): Si Z es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$ entonces $\int^* 1_Z = 0$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tal que $g \geq 1_Z$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como g es s.c.i., $\Omega := g^{-1}(\frac{1}{2}, \infty)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ (ver Ejercicio 4.46) y, puesto que $g \geq 1_Z$, se tiene que $Z \subset \Omega$. Finalmente, dado que $2g \geq 1_\Omega$, se cumple que

$$|\Omega| = \int_{\mathbb{R}^n} 1_\Omega \leq \int_{\mathbb{R}^n} 2g < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$): Inversamente, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $Z \subset \Omega$ y $|\Omega| < \varepsilon$, entonces

$$0 \leq \int^* 1_Z \leq \int_{\mathbb{R}^n} 1_\Omega < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

En consecuencia, Z es nulo. □

Definición 13.9. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que una propiedad $P(x)$ se cumple* ***casi dondequiera (c.d.) en*** *X, o bien que se cumple* ***para casi todo (p.c.t.)*** *$x \in X$, si el conjunto*

$$\{x \in X : P(x) \text{ no se cumple}\}$$

es nulo.

La siguiente proposición asegura que, si modificamos una función integrable sobre un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$, la función obtenida sigue siendo integrable y su integral es la misma.

Proposición 13.10. *Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ tales que $f(x) = g(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. Si f es integrable, entonces g es integrable y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Demostración. Sean $Z := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$, $h_k := 1_Z$ y $h := \sum_{k=1}^{\infty} h_k$, es decir, $h(x) = \infty$ si $x \in Z$ y $h(x) = 0$ si $x \notin Z$. Aplicando el Lema 13.3, obtenemos que

$$\int^* h \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int^* h_k = 0.$$

Por otra parte, la Proposición 12.31 asegura que existe una sucesión (φ_k) en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f - \varphi_k| = 0.$$

Nota que $|g - \varphi_k| \leq h + |f - \varphi_k|$. Por tanto,

$$\int^* |g - \varphi_k| \leq \int^* h + \int^* |f - \varphi_k| = \int^* |f - \varphi_k|$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |g - \varphi_k| = 0.$$

La Proposición 12.31 asegura entonces que g es integrable y que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = \int_{\mathbb{R}^n} f,$$

como afirma el enunciado. □

Además, una función integrable toma los valores $\pm\infty$ únicamente en un conjunto nulo. De hecho, se cumple lo siguiente.

Proposición 13.11. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ satisface $\int^* |f| < \infty$, entonces $f(x) \in \mathbb{R}$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, si f es integrable, entonces $f(x) \in \mathbb{R}$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $Z := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \pm\infty\}$. Como $1_Z \leq \varepsilon |f|$ para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\int^* 1_Z \leq \varepsilon \int^* |f| \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

En consecuencia, $\int^* 1_Z = 0$ y, por tanto, Z es nulo. Esto prueba que $f(x) \in \mathbb{R}$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$.

Si f es integrable, entonces $|f|$ es integrable (ver Proposición 12.32) y, por tanto, $\int^* |f| < \infty$. De la afirmación anterior se sigue que $f(x) \in \mathbb{R}$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. □

Las proposiciones anteriores nos permiten concluir lo siguiente.

Corolario 13.12. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es integrable, entonces la función $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) < \infty, \\ 0 & \text{si } f(x) = \pm\infty, \end{cases}$$

es integrable, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Demostración. La Proposición 13.11 asegura que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. De la Proposición 13.10 se sigue entonces que $\widetilde{f}$ es integrable y que las integrales de f y $\widetilde{f}$ coinciden. □

Proposición 13.13. *Sea $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una sucesión de funciones tales que*

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f_k| = 0.$$

Entonces existe una subsucesión (f_{k_j}) de (f_k) tal que $f_{k_j}(x) \to 0$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Tomemos $k_1 < \cdots < k_j < k_{j+1} < \cdots$ tales que

$$\int^* |f_{k_j}| < \frac{1}{2^j}.$$

Por el Lema 13.3, se tiene que

$$\int^* \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int^* |f_{k_j}| \leq 1.$$

La Proposición 13.11 asegura entonces que existe un subconjunto nulo Z de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_j}(x)| < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z.$$

En consecuencia, $f_{k_j}(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z$. □

Observación 13.14. *En la proposición anterior no es posible concluir que la sucesión* (f_k) *converge puntualmente a* 0 *c.d. en* $\mathbb{R}^n$*: existen ejemplos de sucesiones tales que* $\lim_{k\to\infty} \int^* |f_k| = 0$ *pero* $(f_k(x))$ *no converge para ningún* x *en un conjunto de medida positiva* [Ejercicio 13.51].

Una consecuencia importante de la proposición anterior es la siguiente.

Corolario 13.15. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$*. Entonces,* $\int^* |f| = 0$ *si y sólo si* $f(x) = 0$ *p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^n$*. En particular, si* f *es integrable y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| = 0,$$

entonces $f(x) = 0$ *p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Demostración. $\Leftarrow$): Si $f(x) = 0$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, la Proposición 13.10 asegura que $|f|$ es integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} |f| = 0$.

$\Rightarrow$): Inversamente, si $\int^* |f| = 0$, aplicando la Proposición 13.13 a la sucesión $f_k := f$, obtenemos que $f(x) = 0$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. □

13.2. El teorema de Fubini

Ahora queremos investigar si es posible calcular la integral de una función integrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ integrando coordenada a coordenada. El primer problema con el que nos topamos es que, si f es integrable, $1 \le m < n$, y $y \in \mathbb{R}^{n-m}$, la función $f^y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dada por

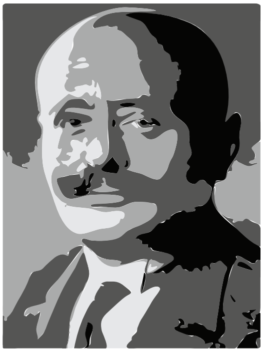
$$f^y(x) := f(x, y)$$

no necesariamente es integrable. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 13.16. *Sea* $1 \le m < n$*. Puesto que* $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^n$ [Ejercicio 13.46]*, la función* $1_{\mathbb{R}^m\times\{0\}}$ *es integrable en* $\mathbb{R}^n$*. Sin embargo,* $(1_{\mathbb{R}^m\times\{0\}})^0 = 1_{\mathbb{R}^m}$ *no es integrable en* $\mathbb{R}^m$ (ver Corolario 12.23).

El teorema de Fubini[1] afirma que este mal comportamiento ocurre únicamente en un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^{n-m}$ y que la integral de una función integrable f se puede calcular integrando sucesivamente respecto a cada variable.

[1] Guido Fubini (1879-1943) nació en Venecia. Estudió en la Scuola Normale Superiore de Pisa, donde fue alumno de Ulisse Dini y Luigi Bianchi. Fue profesor en el Politécnico y la Universidad de Turín.



Guido Fubini

Teorema 13.17 (Fubini)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una función integrable y $1 \leq m < n$. Entonces existe un subconjunto nulo Z de $\mathbb{R}^{n-m}$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^{n-m} \smallsetminus Z$, la función $f^y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dada por*

$$f^y(x) := f(x, y)$$

es integrable. La función $F : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} f^y & \text{si } y \in \mathbb{R}^{n-m} \smallsetminus Z, \\ 0 & \text{si } y \in Z, \end{cases}$$

también es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F = \int_{\mathbb{R}^n} f. \tag{13.2}$$

Demostración. Sean $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tales que $h \leq f \leq g$. El teorema de Fubini para funciones semicontinuas (ver Proposición 12.16) asegura que $h^y \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m)$ y $g^y \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^m)$ para todo $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ y que las funciones

$$H(y) := \int_{\mathbb{R}^m} h^y \qquad \text{y} \qquad G(y) := \int_{\mathbb{R}^m} g^y$$

cumplen que $H \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{n-m})$, $G \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^{n-m})$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} H = \int_{\mathbb{R}^n} h \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-m}} G = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Para cada $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ denotamos por

$$F_1(y) := \int_* f^y \qquad \text{y} \qquad F_2(y) := \int^* f^y.$$

Como $h^y \leq f^y \leq g^y$, se tiene que $H \leq F_1 \leq F_2 \leq G$ (ver Lema 12.27). En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} H \leq \int_* F_i \leq \int^* F_i \leq \int_{\mathbb{R}^{n-m}} G = \int_{\mathbb{R}^n} g, \qquad i = 1, 2.$$

Dado que f es integrable en $\mathbb{R}^n$, tomando el ínfimo sobre las funciones $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n)$ tales que $g \geq f$ y el supremo sobre las funciones $h \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ tales que $h \leq f$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_* F_i \leq \int^* F_i \leq \int_{\mathbb{R}^n} f, \qquad i = 1, 2.$$

En consecuencia, F_1 y F_2 son integrables en $\mathbb{R}^{n-m}$ y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F_1 = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F_2 = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Por el Corolario 13.12, $Z_i := \{y \in \mathbb{R}^{n-m} : F_i(y) = \pm\infty\}$ es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^{n-m}$, la función $\widetilde{F}_i : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{F}_i(y) := \begin{cases} F_i(y) & \text{si } y \in \mathbb{R}^{n-m} \smallsetminus (Z_1 \cup Z_2), \\ 0 & \text{si } y \in Z_1 \cup Z_2, \end{cases}$$

es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} \widetilde{F}_i = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F_i = \int_{\mathbb{R}^n} f, \qquad i = 1, 2.$$

Como $\widetilde{F}_i$ toma valores en $\mathbb{R}$ tiene sentido considerar $\widetilde{F}_2 - \widetilde{F}_1$ y, dado que $\widetilde{F}_2 - \widetilde{F}_1 \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}^{n-m}}(\widetilde{F}_2 - \widetilde{F}_1) = 0$, el Corolario 13.15 asegura que

$$Z_0 := \left\{y \in \mathbb{R}^{n-m} : \widetilde{F}_1(y) \neq \widetilde{F}_2(y)\right\}$$

es nulo en $\mathbb{R}^{n-m}$. Entonces $Z := Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$ es nulo en $\mathbb{R}^{n-m}$ y, como

$$\widetilde{F}_i(y) = F_i(y) \qquad \text{y} \qquad -\infty < \widetilde{F}_1(y) = \widetilde{F}_2(y) < \infty \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{n-m} \smallsetminus Z,$$

de la definición de F_1 y F_2 se sigue que

$$-\infty < \int_* f^y = \int^* f^y < \infty \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{n-m} \smallsetminus Z.$$

Por tanto, f^y es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^m} f^y = F_1(y) = F_2(y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^{n-m} \smallsetminus Z.$$

Finalmente, como $F_1 = F$ c.d. en $\mathbb{R}^{n-m}$ y F_1 es integrable en $\mathbb{R}^{n-m}$, la Proposición 13.10 asegura que F es integrable en $\mathbb{R}^{n-m}$ y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Esto concluye la demostración. □

Notación 13.18. *La identidad* (13.2) *suele escribirse como*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y,z)\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y,z)dy \right) dz.$$

Dado que el intercambio de variables $(y,z) \mapsto (z,y)$ *es una transformación ortogonal, el* Teorema 12.34 *asegura que también*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y,z)\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} f(y,z)dz \right) dy.$$

13.3. Teoremas de convergencia

Daremos a continuación varios criterios importantes que garantizan la integrabilidad del límite puntual de funciones integrables y la posibilidad de expresar a la integral de dicho límite como el límite de las correspondientes integrales.

El siguiente ejemplo muestra que no es cierto, en general, que el supremo puntual de una sucesión no decreciente de funciones integrables sea integrable.

Ejemplo 13.19. *Si* $f_k := 1_{B^n(0,k)}$ *es la función característica de la bola de radio* k *con centro en el origen en* $\mathbb{R}^n$*, entonces* f_k *es integrable y* $f_k \leq f_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Sin embargo,* $1_{\mathbb{R}^n} = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *no es integrable.*

Si el supremo puntual $f := \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ de una sucesión no decreciente (f_k) de funciones integrables es integrable, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty.$$

El teorema que enunciaremos a continuación, afirma que basta con que este límite sea finito para garantizar la integrabilidad de f.

Nota que, si (t_k) es una sucesión no decreciente de números reales entonces, para cualesquiera $k, i \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$t_{k+i} - t_k = \sum_{j=k+1}^{k+i} \left(t_j - t_{j-1}\right).$$

Tomando el límite cuando $i \to \infty$ concluimos que

$$\lim_{i\to\infty} t_i - t_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(t_j - t_{j-1}\right). \tag{13.3}$$

Usaremos esta fórmula en la demostración del siguiente resultado de Beppo Levi[2].

Beppo Levi

Teorema 13.20 (de convergencia monótona)**.** *Si* $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *es integrable,* $f_k \leq f_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k < \infty,$$

entonces $f := \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *es integrable y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

[2] Beppo Levi (1875-1961) nació en Turín, Italia y obtuvo el doctorado en la Universidad de Turín. En 1939 emigró a Argentina donde fue profesor de la Universidad Nacional del Litoral (hoy Universidad Nacional de Rosario).

Demostración. Como f_k es integrable, la Proposición 13.11 asegura que el conjunto

$$Z_k := \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) = \pm\infty\}$$

es nulo para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $Z := \cup_{k=1}^{\infty} Z_k$ es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$ (ver Proposición 13.4). Reemplazando los valores de f_k en Z por 0 obtenemos funciones cuyo supremo puntual coincide con f fuera de Z. Estas nuevas funciones también son integrables y la integral de cada una de ellas coincide con la de la función original (ver Proposición 13.10). Por tanto, podemos suponer, sin perder generalidad, que f_k toma valores en $\mathbb{R}$.

De la fórmula (13.3) se sigue que

$$f - f_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(f_j - f_{j-1}\right).$$

Por tanto, usando el Lema 13.3 y la fórmula (13.3), obtenemos

$$\begin{aligned}\int^* (f - f_k) &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \int^* (f_j - f_{j-1}) \\ &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j - \int_{\mathbb{R}^n} f_{j-1}\right) = \left(\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i\right) - \int_{\mathbb{R}^n} f_k.\end{aligned}$$

Como $\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i < \infty$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} \left(\left(\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i\right) - \int_{\mathbb{R}^n} f_k\right) = 0$ y, en consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} \int^* (f - f_k) = 0. \tag{13.4}$$

Por otra parte, la Proposición 12.31 asegura que existe $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int^* |f_k - \varphi_k| < \frac{1}{k}.$$

Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f - \varphi_k| \leq \lim_{k\to\infty} \int^* |f - f_k| + \lim_{k\to\infty} \int^* |f_k - \varphi_k| = 0.$$

Esto prueba que f es integrable y de la identidad (13.4) se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k,$$

como afirma el enunciado.

$\square$

El análogo para sucesiones decrecientes de funciones también es válido.

Corolario 13.21. *Si $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ es integrable y $f_k \geq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k > -\infty,$$

entonces $f := \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Demostración. Este resultado se obtiene aplicando el Teorema 13.20 a la sucesión $(-f_k)$. □

Corolario 13.22. *Sea $X_1 \subset \cdots \subset X_k \subset \cdots$ una sucesión no decreciente de subconjuntos integrables de $\mathbb{R}^n$. Si la sucesión $(|X_k|)$ de sus medidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ está acotada, entonces $\cup_{k=1}^{\infty} X_k$ es integrable y*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right| = \lim_{k\to\infty} |X_k|\,.$$

Demostración. Este resultado es consecuencia del Teorema 13.20 aplicado a la sucesión de funciones características 1_{X_k}, ya que $\sup_{k\in\mathbb{N}} 1_{X_k} = 1_{\cup_{k=1}^{\infty} X_k}$. □

Corolario 13.23. *Sea $X_1 \supset \cdots \supset X_k \supset \cdots$ una sucesión no creciente de subconjuntos integrables de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\cap_{k=1}^{\infty} X_k$ es integrable y*

$$\left|\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k\right| = \lim_{k\to\infty} |X_k|\,.$$

Demostración. Este resultado es consecuencia del Corolario 13.21 aplicado a la sucesión de funciones características 1_{X_k}, ya que $\inf_{k\in\mathbb{N}} 1_{X_k} = 1_{\cap_{k=1}^{\infty} X_k}$. Nota que $\int_{\mathbb{R}^n} 1_{X_k} \geq 0$. □

Dadas funciones $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, denotamos por $\liminf_{k\to\infty} f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ y por $\limsup_{k\to\infty} f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ a las funciones

$$\Big(\liminf_{k\to\infty} f_k\Big)(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x), \qquad \Big(\limsup_{k\to\infty} f_k\Big)(x) := \limsup_{k\to\infty} f_k(x)$$

(ver Definición 4.26). El siguiente resultado, debido a Fatou[3], da condiciones para la integrabilidad de $\liminf_{k\to\infty} f_k$.

Pierre Fatou

Teorema 13.24 (Lema de Fatou)**.** *Sea* $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *una sucesión de funciones integrables con las siguientes propiedades:*

(i) existe una función integrable $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *tal que* $f_k \geq g$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$,

(ii) existe $M \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq M \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\liminf_{k\to\infty} f_k$ *es integrable y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Demostración. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Para cada $j \geq k$ definimos $f_{j,k} := \min\{f_i : k \leq i \leq j\}$. Entonces, $f_{j,k}$ es integrable (ver Ejercicio 12.61), $f_{j,k} \geq f_{j+1,k}$ y $f_{j,k} \geq g$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_{j,k} \geq \int_{\mathbb{R}^n} g > -\infty.$$

Por el Corolario 13.21, se tiene que $g_k := \inf_{j\geq k} f_{j,k}$ es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k = \inf_{j\geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_{j,k} \leq \inf_{j\geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \leq M, \tag{13.5}$$

[3] Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) nació en Lorient, Francia. Estudió matemáticas en la École Normale Supérieure de Paris y trabajó como astrónomo en el observatorio de París.

ya que $f_j \geq f_{j,k}$. Observa que $g_k = \text{ínf}_{j\geq k} f_j$. Como $g_k \leq g_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, el Teorema 13.20 asegura que $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k$ es integrable y, usando la desigualdad (13.5), obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq k} f_j = \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_j,$$

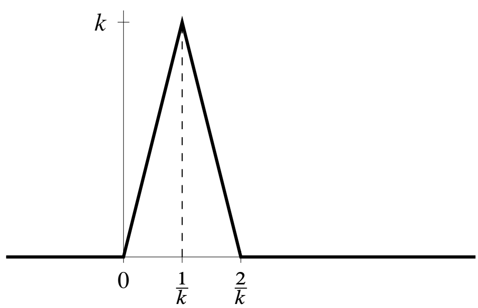
como afirma el enunciado. □

El siguiente ejemplo muestra que, en general, no se cumple la igualdad en el lema de Fatou, ni siquiera cuando la sucesión (f_k) converge puntualmente.

Ejemplo 13.25. *Existen sucesiones (f_k) que satisfacen las hipótesis del lema de Fatou para las cuales se cumple la desigualdad estricta*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k < \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Demostración. Sea $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f_k(x) := \max\left\{k - k^2\left|x - \frac{1}{k}\right|, 0\right\}$.



$y = f_k(x)$

Entonces f_k es integrable, $f_k \geq 0$ y

$$\int_{\mathbb{R}} f_k = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k = 0 < 1 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k.$$

Es decir, en este caso no se da la igualdad. □

Uno de los teoremas más importantes de la teoría de integración es el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Este teorema da una condición suficiente para la integrabilidad del límite puntual de una sucesión de funciones integrables: basta que la sucesión (f_k) esté dominada por una función integrable g, es decir, que $|f_k(x)| \leq g(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, para que $\lim_{k\to\infty} f_k$ sea integrable. Dicha condición asegura además que podemos intercambiar al límite por la integral.

Teorema 13.26 (de convergencia dominada)**.** *Sean $f, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ funciones con las siguientes propiedades:*

(i) f_k *es integrable,*

(ii) $f_k(x) \to f(x)$ *p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^n$,

(iii) existe una función integrable $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *tal que, para cada* $k \in \mathbb{N}$, *se cumple que* $|f_k(x)| \leq g(x)$ *p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces f es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Demostración. Los conjuntos

$$\begin{aligned} Z_{-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \pm\infty\}, \\ Z_0 &:= \{x \in \mathbb{R}^n : (f_k(x)) \text{ no converge a } f(x)\}, \\ Z_k &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x)| > g(x)\}, \end{aligned}$$

son nulos. Por tanto, $Z := \cup_{k=-1}^{\infty} Z_k$ es nulo. Nota que $|f(x)| \leq g(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z$. Reemplazando $f_k(x)$, $f(x)$ y $g(x)$ por 0 para todo $x \in Z$, podemos suponer sin perder generalidad que f_k, f y g toman valores en $\mathbb{R}$, y que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad |f_k(x)| \leq g(x) \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{13.6}$$

Como $f_k \geq -g$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} g =: M \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

el lema de Fatou (ver Teorema 13.24) asegura que f es integrable y que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k. \tag{13.7}$$

Observa que las funciones $-f_k$ y $-f$ también satisfacen (13.6). Por tanto,

$$-\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} -f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} -f_k = -\limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k. \tag{13.8}$$

De (13.7) y (13.8) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

(ver Ejercicio 4.45). Esto concluye la demostración. □

Observa que las sucesiones de funciones de los Ejemplos 11.8, 11.12, 13.19 y 13.25 no están dominadas por ninguna función integrable g [Ejercicio 13.58].

La importancia del teorema de convergencia dominada quedará de manifiesto en las múltiples aplicaciones que veremos en el resto de este libro. Concluimos esta sección con dos corolarios interesantes de los teoremas de convergencia monóntona y convergencia dominada. En las secciones siguientes daremos algunas aplicaciones de ellos.

Corolario 13.27. *Sean $X_1 \subset \cdots \subset X_k \subset \cdots$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $X := \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función tal que $f|_{X_k} \in \mathfrak{L}(X_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{X_k} |f| < \infty.$$

Entonces $f \in \mathfrak{L}(X)$, $f \in \mathfrak{L}(X \smallsetminus X_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_X f = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f \qquad y \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{X \smallsetminus X_k} |f| = 0.$$

Demostración. Como hemos convenido (ver Notación 12.44), identificamos a f con su extensión trivial a $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $f_k := f 1_{X_k}$. Por hipótesis $f_k \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia, $|f_k| \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ y, como $|f_k| \leq |f_{k+1}|$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k| = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} |f| < \infty,$$

el teorema de convergencia monótona (ver Teorema 13.20) asegura que $|f| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k|$ es integrable.

Ahora, como $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $|f_k(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$, el teorema de convergencia dominada (ver Teorema 13.26) asegura que f es integrable y que

$$\int_X f = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f$$

Entonces $f - f_k = f 1_{X \smallsetminus X_k}$ es integrable y, en consecuencia, $|f - f_k|$ también lo es. Puesto que $|f(x) - f_k(x)| \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $|f(x) - f_k(x)| \leq 2|f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$, el teorema de convergencia dominada asegura que

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_X |f - f_k| = \lim_{k\to\infty} \int_{X \smallsetminus X_k} |f|,$$

como afirma el enunciado. □

Corolario 13.28. *Sea $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables tales que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j| < \infty.$$

Entonces la serie $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge c.d. en $\mathbb{R}^n$ a una función integrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f - \sum_{j=1}^{k} f_j \right| = 0.$$

Demostración. Denotemos por

$$g_k := \sum_{j=1}^{k} |f_j| \qquad \text{y} \qquad g := \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k.$$

Como g_k es integrable, $g_k \leq g_{k+1}$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j| < \infty,$$

el teorema de convergencia monótona asegura que g es integrable. En consecuencia, por la Proposición 13.11, existe un subconjunto nulo Z de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z.$$

Esto implica que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z$.

Definimos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z, \\ 0 & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Entonces $\sum_{j=1}^{k} f_j(x) \to f(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$ y

$$\left| \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \right| \leq g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

El teorema de convergencia dominada asegura entonces que f es integrable. En consecuencia, $f - \sum_{j=1}^{k} f_j$ es integrable y, como

$$f(x) - \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \to 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z$$

y

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \right| \leq |f(x)| + \left| \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \right| \leq |f(x)| + g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

el teorema de convergencia dominada asegura que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f - \sum_{j=1}^{k} f_j \right| = 0,$$

como afirma el enunciado. □

13.4. La integral de funciones radiales

Sean $0 < a < b < \infty$. Considera el conjunto

$$A^n(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \|x\| \leq b\}.$$

Observa que $A^n(a,b) = \left[\bar{B}^n(0,b) \smallsetminus \bar{B}^n(0,a)\right] \cup S^{n-1}(0,a)$. De la Proposición 12.38 y los Ejemplos 12.25 y 13.7 se sigue entonces que

$$\mathrm{vol}_n(A^n(a,b)) = (b^n - a^n)\omega_n,$$

donde ω_n es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Se dice que una función $g\colon A^n(a,b) \to \mathbb{R}$ es **radial** si su valor depende únicamente de $\|x\|$, es decir, si $g(x) = f(\|x\|)$ donde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. El siguiente resultado afirma que, si f es continua, la integral de g se puede calcular en términos de la integral de Riemann de f.

Teorema 13.29 (Integral de una función radial)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces*

$$\int_{A^n(a,b)} f(\|x\|)dx = n\omega_n \int_a^b f(t)t^{n-1}dt.$$

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la partición $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ del intervalo $[a,b]$ tal que $a_j - a_{j-1} = \frac{1}{k}(b-a)$. Por simplicidad denotamos por $A := A^n(a,b)$ y $A_j := A^n(a_{j-1}, a_j)$. Entonces $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ y $A_i \cap A_j$ es nulo si $i \neq j$ (ver Ejemplo 13.7). Por tanto,

$$|A| = |A_1| + \cdots + |A_k|\,.$$

El teorema del valor medio aplicado a la función $t \mapsto t^n$ asegura que existe $\xi_j \in (a_{j-1}, a_j)$ tal que

$$a_j^n - a_{j-1}^n = n\xi_j^{n-1}(a_j - a_{j-1}).$$

Por tanto,

$$\left|A_j\right| = (a_j^n - a_{j-1}^n)\omega_n = n\xi_j^{n-1}(a_j - a_{j-1})\omega_n.$$

Considera la función

$$g_k := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)1_{A_j}.$$

Se tiene que

$$\int_A g_k = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\left|A_j\right| = n\omega_n \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\xi_j^{n-1}(a_j - a_{j-1}).$$

La suma que aparece en el término de la derecha es una suma de Riemann para la integral de la función $t \mapsto f(t)t^{n-1}$ en $[a,b]$. Por tanto, haciendo tender $k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_A g_k = n\omega_n \int_a^b f(t)t^{n-1}dt. \tag{13.9}$$

Demostraremos a continuación que

$$\int_A f(\|x\|)dx = \lim_{k\to\infty} \int_A g_k(x)dx. \tag{13.10}$$

Como f es uniformemente continua en $[a,b]$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{|A|} \qquad \text{si} \;\; |s-t| < \frac{b-a}{k} \;\; \text{con} \;\; k \geq k_0.$$

En consecuencia, dado que $|f(\|x\|) - g_k(x)| = \sum_{j=1}^k \left|f(\|x\|) - f(\xi_j)\right| 1_{A_j}(x)$ p.c.t. $x \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_A |f(\|x\|) - g_k(x)|\, dx &= \sum_{j=1}^k \int_{A_j} \left|f(\|x\|) - f(\xi_j)\right| dx \\ &\leq \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon}{|A|} \left|A_j\right| = \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.\end{aligned}$$

Esto demuestra (13.10). Combinando las identidades (13.9) y (13.10) se obtiene la identidad deseada. □

Ejemplo 13.30. *Si $\gamma \in \mathbb{R}$ y $0 < a < b < \infty$, entonces*

$$\int_{A^n(a,b)} \|x\|^\gamma \, dx = \begin{cases} \frac{n}{n+\gamma}\omega_n \left(b^{n+\gamma} - a^{n+\gamma}\right) & \text{si } \gamma + n \neq 0, \\ n\omega_n \left(\ln b - \ln a\right) & \text{si } \gamma + n = 0. \end{cases}$$

Demostración. Por el teorema anterior,

$$\int_{A^n(a,b)} \|x\|^\gamma \, dx = n\omega_n \int_a^b t^{\gamma+n-1} dt.$$

Calculando la integral de la derecha se obtiene el resultado. □

Si $\gamma < 0$ la función $x \mapsto \|x\|^\gamma$ no está definida en 0. Sin embargo, como $\{0\}$ es un conjunto nulo, podemos extender esta función a una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dándole cualquier valor en 0, por ejemplo 0.

Proposición 13.31. *Si $\gamma \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, entonces*

(a) *la función $x \mapsto \|x\|^\gamma$ es integrable en $\bar{B}^n(0,r)$ si y sólo si $\gamma + n > 0$ y, en ese caso,*

$$\int_{\|x\|\leq r} \|x\|^\gamma \, dx = \frac{n\omega_n}{n+\gamma} r^{n+\gamma}.$$

(b) *la función $x \mapsto \|x\|^\gamma$ es integrable en $\mathbb{R}^n \smallsetminus B^n(0,r)$ si y sólo si $\gamma + n < 0$ y, en ese caso,*

$$\int_{\|x\|\geq r} \|x\|^\gamma \, dx = -\frac{n\omega_n}{n+\gamma} r^{n+\gamma}.$$

Demostración. *(a):* Sea $\varepsilon > 0$. Del Ejemplo 13.30 se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A^n(\varepsilon,r)} \|x\|^\gamma \, dx = \begin{cases} \frac{n}{n+\gamma}\omega_n r^{n+\gamma} & \text{si } n+\gamma > 0, \\ \infty & \text{si } n+\gamma \leq 0. \end{cases}$$

Si $n + \gamma > 0$, el Corolario 13.27 asegura que $x \mapsto \|x\|^\gamma$ es integrable en $\bar{B}^n(0,r)$ y que

$$\int_{\|x\|\leq r} \|x\|^\gamma \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A^n(\frac{1}{k},r)} \|x\|^\gamma \, dx = \frac{n}{n+\gamma} \omega_n r^{n+\gamma}.$$

Supongamos ahora que $\gamma + n \leq 0$. Si $x \mapsto \|x\|^\gamma$ fuera integrable en $\bar{B}^n(0,r)$, se tendría que

$$\int_{A^n(\varepsilon,r)} \|x\|^\gamma \, dx \leq \int_{\|x\|\leq r} \|x\|^\gamma \, dx < \infty \qquad \forall \varepsilon \in (0,r).$$

Esto es una contradicción.

La demostración de *(b)* es análoga [Ejercicio 13.68]. □

Anteriormente probamos que el producto de dos funciones integrables es integrable si una de ellas es acotada (ver Lema 12.37). El siguiente ejemplo muestra que esta última hipótesis es importante.

Ejemplo 13.32. *El producto de funciones integrables no es necesariamente integrable.*

Demostración. La función $f(x) := \|x\|^{-n/2}$ es integrable en $\bar{B}^n(0,r)$, pero $f^2(x) = \|x\|^{-n}$ no lo es. □

La Proposición 13.31 nos permite dar un criterio muy útil de integrabilidad para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en términos de su comportamiento al ∞. Empezamos introduciendo el siguiente concepto.

Definición 13.33. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es* ***localmente integrable en*** *Ω si, para todo subconjunto compacto K de Ω, la función $f|_K : K \to \mathbb{R}$ es integrable en K.*

Observa que cualquier función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es localmente integrable (ver Ejemplo 12.42). Denotamos por

$$\mathfrak{L}_{\text{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es localmente integrable en } \Omega\}. \tag{13.11}$$

Una consecuencia del Corolario 13.27 es la siguiente.

Proposición 13.34. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$ si y sólo si $f \in \mathfrak{L}_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int^* |f| < \infty$.*

Demostración. $\Rightarrow$): Claramente, si $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$, entonces $f \in \mathfrak{L}_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int^* |f| < \infty$.

$\Leftarrow$): Inversamente, supongamos que $f \in \mathfrak{L}_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int^* |f| < \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\Omega_k := \left\{x \in \Omega : \|x\| < k,\ \ \text{dist}(x, \partial\Omega) > \tfrac{1}{k}\right\}.$$

Entonces $\overline{\Omega}_k \subset \overline{\Omega}_{k+1}$ y $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{\Omega}_k$, donde $\overline{\Omega}_k$ es la cerradura de Ω_k en $\mathbb{R}^n$. Como $\overline{\Omega}_k$ es compacto, se tiene que $f|_{\overline{\Omega}_k} \in \mathfrak{L}(\overline{\Omega}_k)$ y

$$\int_{\overline{\Omega}_k} |f| \leq \int^* |f| < \infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el Corolario 13.27, $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$. □

Corolario 13.35 (Criterio de integrabilidad)**.** *Si $f \in \mathfrak{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y existen $\varepsilon > 0$, $M \geq 0$ y $r > 0$ tales que*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\|x\|^{n+\varepsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus B^n(0, r),$$

entonces $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Como $|f| = |f| 1_{\bar{B}^n(0,r)} + |f| 1_{\mathbb{R}^n \smallsetminus \bar{B}^n(0,r)}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int^* |f| &\leq \int^* |f| 1_{\bar{B}^n(0,r)} + \int^* |f| 1_{\mathbb{R}^n \smallsetminus \bar{B}^n(0,r)} \\ &\leq \int_{\|x\| \leq r} |f| + M \int_{\|x\| \geq r} \frac{1}{\|x\|^{n+\varepsilon}} dx < \infty. \end{aligned}$$

La existencia de las dos últimas integrales se sigue de que $f \in \mathfrak{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y de la Proposición 13.31, respectivamente. La Proposición 13.34 asegura que $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. □

13.5. El teorema de cambio de variable

El teorema de cambio de variable para funciones continuas con soporte compacto (ver Teorema 11.25) se generaliza a funciones integrables como sigue.

Teorema 13.36 (de cambio de variable)**.** *Sean Ω y Ω' subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, $f \in \mathfrak{L}(\Omega')$ si y sólo si $(f \circ \varphi)\,|\det \varphi'| \in \mathfrak{L}(\Omega)$ y, en tal caso, se cumple que*

$$\int_\Omega f(\varphi(x))\left|\det \varphi'(x)\right| dx = \int_{\Omega'} f(y)dy.$$

Reduciremos la demostración de este teorema al caso en el que $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega')$. Para ello requerimos el siguiente resultado.

Proposición 13.37 (Aproximación por funciones en $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$)**.** *Si Ω es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$ entonces existe una sucesión $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f - f_k| = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Basta probar que existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |f - f_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Como convenimos (ver Notación 12.44), identificamos a f con su extensión trivial a $\mathbb{R}^n$. Por la Proposición 12.31 existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13.12}$$

Considera la sucesión no decreciente de subconjuntos abiertos y acotados de Ω,

$$\Omega_k := \left\{x \in \Omega : \|x\| < k,\ \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \tfrac{1}{k}\right\}.$$

Nota que $\Omega = \cup_{k=1}^\infty \Omega_k$. Como Ω_k es integrable se tiene que $g\ |_{\Omega_k} \in \mathfrak{L}(\Omega_k)$ (ver Proposición 12.43), y como además

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} |g| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g| < \infty,$$

el Corolario 13.27 asegura que $g \in \mathfrak{L}(\Omega \smallsetminus \Omega_k)$ y que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\smallsetminus\Omega_k} |g| = 0.$$

Escogemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega\smallsetminus\Omega_{k_0}} |g| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13.13}$$

Por simplicidad escribimos $\Omega_0 := \Omega_{k_0}$. Sea $M := \max_{x\in\overline{\Omega}_0} |g(x)|$. Como $1_{\Omega_0} \in S_*(\mathbb{R}^n)$, existe $h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $h \leq 1_{\Omega_0}$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1_{\Omega_0} - h\right) < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Reemplazando h por $\max\{0, h\}$, podemos suponer además que $h \geq 0$. Entonces $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega_0$ y, en consecuencia, $gh \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$. Más aún, usando el Ejercicio 13.50 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f - gh| &\leq \int_{\Omega} |f - g| + \int_{\Omega\smallsetminus\Omega_0} |g - gh| + \int_{\Omega_0} |g - gh| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - g| + \int_{\Omega\smallsetminus\Omega_0} |g| + M \int_{\mathbb{R}^n} \left(1_{\Omega_0} - h\right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Requerimos también información sobre la imagen de un conjunto nulo bajo una función de clase $\mathcal{C}^1$. Se cumple lo siguiente.

Lema 13.38. *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ es de clase $\mathcal{C}^1$ entonces, para todo subconjunto nulo Z de Ω, el conjunto $\varphi(Z) := \{\varphi(z) : z \in Z\}$ es nulo.*

Demostración. Sea $\Omega_k := \left\{x \in \Omega : \|x\| < k,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\right\}$. Dado que la unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo, basta probar que $\varphi(Z \cap \Omega_k)$ es nulo para cada $k \in \mathbb{N}$.

Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos una familia numerable de cubos Q_j, $j \in \mathbb{N}$, tales que

$$Z \cap \Omega_k \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \subset \Omega_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| < \varepsilon.$$

Ésta se obtiene escogiendo un abierto U tal que $Z \cap \Omega_k \subset U \subset \Omega_k$ y $|U| < \varepsilon$ (ver Proposición 13.8) y expresándolo como una unión de cubos, $U = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$, tales que $\mathrm{int}(Q_i) \cap \mathrm{int}(Q_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ (ver Ejercicio 13.45).

Como $\overline{\Omega}_k$ es compacto y $\varphi' \colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es continua, se tiene que

$$M_k := \sup_{x\in\overline{\Omega}_k} \left\|\varphi'(x)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Del teorema del valor medio (ver Corolario 9.17) y las desigualdades (11.9) se sigue entonces que, para cualesquiera $x, y \in Q_j$,

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M_k \|x - y\| \leq M_k \sqrt{n} \|x - y\|_\infty .$$

Esto implica que, si Q_j es un cubo de semilado δ, entonces $\varphi(Q_j)$ está contenido en un cubo de semilado $M_k\sqrt{n}\delta$. Por tanto,

$$\left|\varphi(Q_j)\right| \leq M_k^n n^{n/2} \left|Q_j\right| \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Nota que $\varphi(Q_j)$ es compacto y, por tanto, integrable. Se tiene entonces que

$$\left|\bigcup_{j=1}^m \varphi(Q_j)\right| \leq \sum_{j=1}^m \left|\varphi(Q_j)\right| \leq M_k^n n^{n/2} \sum_{j=1}^m \left|Q_j\right| \leq M_k^n n^{n/2}\varepsilon \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

El Corolario 13.22 asegura que $\bigcup_{j=1}^\infty \varphi(Q_j)$ es integrable y que

$$\left|\bigcup_{j=1}^\infty \varphi(Q_j)\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\bigcup_{j=1}^m \varphi(Q_j)\right| \leq M_k^n n^{n/2}\varepsilon.$$

Como $\varphi(Z \cap \Omega_k) \subset \bigcup_{j=1}^\infty \varphi(Q_j)$, concluimos que

$$\int^* 1_{\varphi(Z\cap\Omega_k)} \leq M_k^n n^{n/2}\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Esto prueba que $\varphi(Z \cap \Omega_k)$ es nulo. $\square$

Estamos listos para demostrar el teorema de cambio de variable.

Demostración del Teorema 13.36. Sea $f \in \mathfrak{L}(\Omega')$. Por la Proposición 13.37 existe una sucesión (f_k) en $\mathcal{C}_c^0(\Omega')$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} |f - f_k| = 0. \tag{13.14}$$

Reemplazando a (f_k) por una subsucesión, podemos suponer además que existe un subconjunto nulo Z de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f_k(y) \to f(y) \qquad \forall\, y \in \Omega' \smallsetminus Z$$

(ver Proposición 13.13). Denotemos por

$$g_k := (f_k \circ \varphi)\left|\det \varphi'\right| \qquad \text{y} \qquad g := (f \circ \varphi)\left|\det \varphi'\right|.$$

Entonces, $g_k \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$,

$$g_k(x) \to g(x) \qquad \forall\, x \in \Omega \smallsetminus \varphi^{-1}(Z)$$

y $\varphi^{-1}(Z)$ es nulo (ver Lema 13.38). El Teorema 11.25 asegura que

$$\int_\Omega g_k = \int_\Omega (f_k \circ \varphi)\left|\det \varphi'\right| = \int_{\Omega'} f_k, \tag{13.15}$$

y que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|g_k - g_j\right| &= \int_\Omega \left(\left|f_k - f_j\right| \circ \varphi\right)\left|\det \varphi'\right| = \int_{\Omega'} \left|f_k - f_j\right| \\ &\leq \int_{\Omega'} |f_k - f| + \int_{\Omega'} \left|f - f_j\right|.\end{aligned}$$

De esta última desigualdad y la afirmación (13.14) se sigue que existen $k_1 < \cdots < k_j < k_{j+1} < \cdots$ tales que

$$\int_\Omega \left|g_{k_{j+1}} - g_{k_j}\right| < \frac{1}{2^j}.$$

En consecuencia, definiendo $g_{k_0} := 0$, concluimos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_\Omega \left|g_{k_{j+1}} - g_{k_j}\right| < \infty,$$

Observa que

$$g_{k_m} = \sum_{j=0}^{m-1} (g_{k_{j+1}} - g_{k_j})$$

y que

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (g_{k_{j+1}}(x) - g_{k_j}(x)) \qquad \forall\, x \in \Omega \smallsetminus \varphi^{-1}(Z).$$

El Corolario 13.28 asegura entonces que g es integrable y que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega}\left|g-g_{k_m}\right|=0.$$

Por tanto, usando las identidades (13.14) y (13.15), concluimos que

$$\int_{\Omega}g=\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega}g_{k_m}=\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega'}f_{k_m}=\int_{\Omega'}f,$$

que es la identidad deseada.

Finalmente observa que, si $g:=(f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|$, entonces

$$f=(g\circ\varphi^{-1})\left|\det\left(\varphi^{-1}\right)'\right|.$$

En consecuencia, $f\in\mathfrak{L}(\Omega')$ si $g\in\mathfrak{L}(\Omega)$. Esto concluye la demostración. □

Veamos una aplicación del teorema anterior.

Ejemplo 13.39 (Coordenadas polares)**.** $f\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ *si y sólo si la función* $(r,\theta)\mapsto rf(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$ *es integrable en* $[0,\infty)\times[0,2\pi]$ *y, en ese caso,*

$$\int_{\mathbb{R}^2}f=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}rf(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta.$$

Demostración. Sean $\Omega:=(0,\infty)\times(0,2\pi)$ y $\Omega':=\mathbb{R}^2\smallsetminus\{(x,0):x\geq 0\}$. La función $\varphi\colon\Omega\to\Omega'$ dada por $\varphi(r,\theta):=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ y $|\det\varphi'(r,\theta)|=r$. Por el Teorema 13.36, $f\in\mathfrak{L}(\Omega')$ si y sólo si $(r,\theta)\mapsto rf(\varphi(r,\theta))$ es integrable en Ω, y

$$\int_{\Omega'}f=\int_{\Omega}rf(\varphi(r,\theta))\,dr\,d\theta.$$

Como $([0,\infty)\times[0,2\pi])\smallsetminus\Omega$ y $\mathbb{R}^2\smallsetminus\Omega'$ son subconjuntos nulos de $\mathbb{R}^2$, concluimos que $f\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ si y sólo si $(r,\theta)\mapsto rf(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$ es integrable en $[0,\infty)\times[0,2\pi]$ y

$$\int_{\mathbb{R}^2}f=\int_{\Omega'}f=\int_{\Omega}rf(\varphi(r,\theta))\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}rf(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta,$$

como afirma el enunciado. □

13.6. Ejercicios

Ejercicio 13.40. *Prueba que* $[0,1] \smallsetminus \mathbb{Q}$ *es integrable y calcula su medida en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 13.41. *El objetivo de este ejercicio es mostrar la existencia de subconjuntos nulos no numerables de* $[0,1]$. *El* ***conjunto de Cantor*** $\mathfrak{C}$ *se construye como sigue: Al intervalo* $[0,1]$ *le quitamos su* tercio medio $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ *y denotamos al conjunto restante por*

$$\mathfrak{C}_1 := [0,1] \smallsetminus \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right).$$

A cada uno de los dos subintervalos cerrados de $\mathfrak{C}_1$ *le quitamos su tercio medio y denotamos al conjunto restante por*

$$\mathfrak{C}_2 := \mathfrak{C}_1 \smallsetminus \left(\left(\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9}\right)\right).$$

Continuando de esta manera, a cada uno de los 2^k *subintervalos cerrados de* $\mathfrak{C}_k$ *le quitamos su tercio medio y denotamos al conjunto restante por* $\mathfrak{C}_{k+1}$. *Definimos*

$$\mathfrak{C} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{C}_k.$$

Prueba que $\mathfrak{C}$ *es nulo y no es numerable.*

Ejercicio 13.42. *Para cada* $\varepsilon > 0$, *define de manera explícita un subconjunto abierto integrable* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\mathbb{Q}^n \subset \Omega$ *y* $|\Omega| < \varepsilon$.

Ejercicio 13.43. *(a) Prueba que, si* Z *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\mathbb{R}^n \smallsetminus Z$ *es denso en* $\mathbb{R}^n$.

(b) ¿Es cierto que, si un subconjunto integrable X *de* $\mathbb{R}^n$ *tiene medida positiva entonces* $\mathrm{int}(X) \neq \emptyset$*?*

Ejercicio 13.44. *Prueba que* Z *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^n$ *si y sólo si* $Z \cap Q$ *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^n$ *para todo rectángulo* $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 13.45. *Un* ***cubo*** *es un rectángulo* $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ *tal que* $b_i - a_i = b_1 - a_1 \neq 0$ *para todo* $i = 2,\ldots,n$.

(a) Prueba que todo subconjunto abierto Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *es la unión de una familia numerable de cubos* Q_k, $k \in \mathbb{N}$, *tales que* $\mathrm{int}(Q_j) \cap \mathrm{int}(Q_k) = \emptyset$ *si* $j \neq k$.

(b) Sean Ω *un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $Z \subset \Omega$. *Prueba que* Z *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^n$ *si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una familia numerable de cubos*

Q_k, $k \in \mathbb{N}$, tales que

$$Z \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \subset \Omega \qquad y \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon.$$

(Sugerencia: Usa la Proposición 13.8 y el inciso *(a)*.)

Ejercicio 13.46. *(a) Prueba que, si $1 \leq m < n$, X es una unión numerable de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$ y $f : X \to \mathbb{R}^{n-m}$ es una función continua, entonces la gráfica de f,*

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in X,\ y = f(x)\},$$

es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$.

(b) Prueba que, si Ω es abierto en $\mathbb{R}^m$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-m}$ es continua, entonces la gráfica de f es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$.

(c) Prueba que todo subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^n$ es nulo.

Ejercicio 13.47. *Prueba que toda subvariedad M de $\mathbb{R}^n$* (ver Definición 10.10) *es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$.* (Sugerencia: Usa el Teorema 10.7.)

Ejercicio 13.48. *Prueba que, si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y $m > n$, entonces $\varphi(\Omega)$ es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^m$.*

Ejercicio 13.49 (Lema de Sard)**.** *Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. El conjunto*

$$K := \left\{x \in \Omega : \det \varphi'(x) = 0\right\}$$

*se llama el **conjunto de puntos críticos de** φ, su imagen $\varphi(K)$ se llama el **conjunto de valores críticos de** φ, y $\mathbb{R}^n \smallsetminus \varphi(K)$ se llama el **conjunto de valores regulares de** φ. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) El conjunto de valores críticos de φ es un subconjunto nulo de $\mathbb{R}^n$.

(b) El conjunto de valores regulares de φ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 13.50. *Sean X_1, X_2 subconjuntos integrables de $\mathbb{R}^n$ tales que $X_1 \cap X_2$ es nulo. Denotamos por $X := X_1 \cup X_2$. Prueba que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es integrable en X si y sólo si $f|_{X_1}$ es integrable en X_1 y $f|_{X_2}$ es integrable en X_2 y que, en ese caso,*

$$\int_X f = \int_{X_1} f + \int_{X_2} f.$$

Ejercicio 13.51. *Considera la familia numerable de intervalos cerrados*

$$\left[0,\tfrac{1}{2}\right],\ \left[\tfrac{1}{2},1\right],\ \left[0,\tfrac{1}{3}\right],\ \left[\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right],\ \left[\tfrac{2}{3},1\right],\ \left[0,\tfrac{1}{4}\right],\ \left[\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right],\ \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\right],\ \left[\tfrac{3}{4},1\right],\ \ldots$$

Sea f_k *la función característica del* k*-ésimo intervalo de la lista.*

(a) Prueba que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_k| = 0.$$

(b) Prueba que $(f_k(x))$ *no converge para ningún* $x \in [0,1]$.

(c) Exhibe una subsucesión (f_{k_j}) *que converge a* 0 *c.d. en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 13.52. *Prueba que si* Z *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^m$ *entonces, para cualquier subconjunto integrable* X *de* $\mathbb{R}^n$*, el conjunto* $Z \times X$ *es un subconjunto nulo de* $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 13.53. *Considera la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \in (0,1)^2, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (0,1)^2. \end{cases}$$

(a) Prueba que la función $x \mapsto f(x,y)$ *es integrable en* $\mathbb{R}$ *para todo* $y \in \mathbb{R}$*, la función* $y \mapsto f(x,y)$ *es integrable en* $\mathbb{R}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, y que las integrales*

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right)dy, \qquad \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx,$$

existen y son distintas.

(b) ¿Es f *una función integrable en* $\mathbb{R}^2$*?*

Ejercicio 13.54. *Considera la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2} & \text{si } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{si } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{en los otros casos,} \end{cases}$$

y realiza un análisis análogo al del ejercicio anterior.

Ejercicio 13.55. *Usando el* Ejercicio 12.62 *y el teorema de Fubini prueba que, si Q es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ y $f: Q \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la integral de Lebesgue de f* (Definición 12.41) *coincide con la integral dada por la* Definición 11.3.

Ejercicio 13.56. *Prueba que, si X_k es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$ y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| < \infty,$$

entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$ y

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| .$$

Ejercicio 13.57. *Prueba que, si $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es integrable, $f_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k < \infty,$$

entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k .$$

Ejercicio 13.58. *Prueba, sin usar el teorema de convergencia dominada, que para las sucesiones de funciones (f_k) de los* Ejemplos 11.8, 11.12, 13.19,y 13.25 *no existe ninguna función integrable $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que $|f_k| \leq g$ c.d. en $\mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Ejercicio 13.59. *Prueba que, si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \smallsetminus B^n(0,k)} f = 0.$$

Ejercicio 13.60 (Dependencia continua de un parámetro)**.** *Sean $Y \subset \mathbb{R}^m$, $y_0 \in Y$ y $f: \mathbb{R}^n \times Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con las siguientes propiedades:*

(i) Para cada $y \in Y$, la función $x \mapsto f(x, y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

(ii) P.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(x, y)$ es continua en y_0.

(iii) Existe una función integrable $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *tal que, para todo* $y \in Y$,

$$|f(x,y)| \leq g(x) \qquad \text{c.d. en } \mathbb{R}^n.$$

Prueba que la función $F\colon Y \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx,$$

es continua en y_0.

Ejercicio 13.61 (Derivación bajo el signo de integral)**.** *Sea* $f\colon \mathbb{R}^n \times (a,b) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *una función con las siguientes propiedades:*

(i) Para cada $t \in (a,b)$, *la función* $x \mapsto f(x,t)$ *es integrable en* $\mathbb{R}^n$.

(ii) P.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, *la función* $t \mapsto f(x,t)$ *toma valores en* $\mathbb{R}$ *y es diferenciable en* (a,b).

(iii) Existe una función integrable $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *tal que, para todo* $t \in (a,b)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) \qquad \text{c.d. en } \mathbb{R}^n.$$

Prueba que la función $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx,$$

es diferenciable en (a,b) *y que*

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Ejercicio 13.62. *Sea* $f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3) := \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^3)$. *Prueba que la función* $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\|y-x\|}dy,$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ *y que sus derivadas parciales están dadas por*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|y-x\|}\frac{\partial f}{\partial y_i}(y)dy, \qquad i = 1,2,3.$$

Ejercicio 13.63. *Sea $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos integrables de $\mathbb{R}^n$ tales que $X_j \cap X_i$ es nulo si $i \neq j$. Denotamos por $X := \cup_{k=1}^{\infty} X_k$. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f\,|_{X_k} \in \mathfrak{L}(X_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{X_j} |f| \leq M \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

prueba que $f \in \mathfrak{L}(X)$ y

$$\int_X f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X_j} f.$$

Ejercicio 13.64. *Prueba que, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable, X_k es un subconjunto integrable de $\mathbb{R}^n$ y $\lim_{k\to\infty} |X_k| = 0$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f = 0.$$

Ejercicio 13.65. *Prueba que, para todo $r > 0$, $1 \leq i \leq n$,*

$$\int_{\bar{B}^n(0,r)} x_i^2 \, dx = \frac{\omega_n}{n+2} r^{n+2}.$$

(Sugerencia: Observa que, por la invariancia de la integral bajo transformaciones ortogonales,

$$\int_{\bar{B}^n(0,r)} x_i^2 \, dx = \int_{\bar{B}^n(0,r)} x_j^2 \, dx,$$

y calcula

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\bar{B}^n(0,r)} x_i^2 \, dx.)$$

Ejercicio 13.66. *Para $0 \leq a < b < \infty$ y n par, calcula la integral*

$$\int_{A^n(a,b)} \exp(-\|x\|^2) dx.$$

Ejercicio 13.67. *Para $0 < a < b < \infty$, calcula la integral*

$$\int_{A^n(a,b)} \ln(\|x\|) dx.$$

Ejercicio 13.68. *Sea $r > 0$. Prueba que la función $x \mapsto \|x\|^\gamma$ es integrable en $\mathbb{R}^n \smallsetminus B^n(0,r)$ si y sólo si $\gamma + n < 0$ y, en ese caso,*

$$\int_{\|x\|\geq r} \|x\|^\gamma \, dx = -\frac{n\omega_n}{n+\gamma} r^{n+\gamma}.$$

Ejercicio 13.69. *Prueba que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(-\|x\|^2)$, es integrable en $\mathbb{R}^n$ y que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|^2) dx = \pi^{n/2}.$$

Ejercicio 13.70. *¿Para qué números $\gamma > 0$ es $x \mapsto \left(\frac{1}{1-\|x\|^2}\right)^\gamma$ integrable en $B^n(0,1)$? Calcula la integral*

$$\int_{\|x\|<1} \left(\frac{1}{1-\|x\|^2}\right)^\gamma dx$$

para tales γ.

Ejercicio 13.71. *Sean $a_1, \ldots, a_m$ puntos distintos en $\mathbb{R}^n$, $m > n > 1$, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) := \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\|x - a_i\|}.$$

Prueba que f es integrable en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 13.72. *Prueba que, si $f \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ y $g \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n-m})$ con $1 \leq m < n$, entonces $f \odot g \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, donde $(f \odot g)(x,y) := f(x)g(y)$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \equiv \mathbb{R}^n$.*

Ejercicio 13.73 (Coordenadas esféricas)**.** *Sea $\varphi \colon [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la función $\varphi(r,\theta,\phi) := (r \operatorname{sen}\theta\cos\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\theta)$. Entonces $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ si y sólo si la función $(r,\theta,\phi) \mapsto f(\varphi(r,\theta,\phi))r^2 \operatorname{sen}\theta$ es integrable en $[0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$ y, en ese caso,*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(r\operatorname{sen}\theta\cos\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\theta) r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\phi.$$

Ejercicio 13.74 (Coordenadas cilíndricas)**.** *Enuncia y demuestra el teorema de cambio de variable para el cambio de coordenadas $(r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$.*

Ejercicio 13.75. *Usando coordenadas esféricas calcula el volumen de la bola $\bar{B}_3(0,r) := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq r\right\}$.*

14

Los espacios de Lebesgue

En el espacio de funciones continuas con soporte compacto $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ podemos considerar las normas
$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}, \qquad p \in [1,\infty),$$
análogas a aquéllas en $\mathcal{C}^0[a,b]$ que consideramos en el capítulo 2. Éstas aparecen en muchas aplicaciones importantes, pero el espacio $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ no resulta adecuado para tratar muchas de esas aplicaciones porque no es completo.

Los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, que introduciremos en este capítulo, son espacios de Banach y contienen a $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ como subespacio denso. Sus elementos son clases de equivalencia de funciones *medibles* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $|f|^p$ es integrable, y su norma es la que definimos arriba. Los espacios de Lebesgue tienen una enorme relevancia en análisis y en diversas áreas de las matemáticas, e importantes aplicaciones en la física, la ingeniería, las finanzas y otras disciplinas.

Las funciones medibles son aquéllas que se obtienen como el límite puntual de una sucesión de funciones integrables en Ω. A diferencia de las funciones integrables, las funciones medibles tienen la ventaja de que el producto de funciones medibles y la p-ésima potencia de una función medible resultan ser funciones medibles. Se tiene además un criterio sencillo que garantiza su integrabilidad: si f es medible y está dominada por una función integrable, entonces f es integrable (ver Teorema 14.15). Para funciones medibles vale además el inverso del teorema de Fubini (ver Teorema 14.17).

Probaremos que el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto en Ω es un subespacio denso de $L^p(\Omega)$. Para ello introduciremos el *producto de convolución*, que asocia a un par de funciones $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ una función $\rho * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$. Escogiendo ρ_k de manera adecuada, se obtiene una sucesión $\rho_k * f$ de funciones con soporte compacto que converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

El producto de convolución tiene múltiples aplicaciones que van desde la solución de problemas con condición de frontera en ecuaciones diferenciales parciales, hasta el procesamiento de señales digitales o de imágenes[1].

Finalmente, estudiaremos la noción de compacidad en $L^p(\Omega)$ y daremos condiciones que garantizan que un subconjunto $\mathcal{K}$ de $L^p(\Omega)$ es compacto.

14.1. Conjuntos y funciones medibles

Denotemos por
$$\bar{B}^n(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}.$$

El volumen de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ siempre está definido (ver Definición 12.19), aun cuando éste no sea integrable. Podemos extender la noción de volumen como sigue.

Definición 14.1. *Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es* ***(Lebesgue-) medible*** *si $X \cap \bar{B}^n(0,k)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Su* ***medida (de Lebesgue)*** *se define como*
$$|X| := \lim_{k\to\infty} \left|X \cap \bar{B}^n(0,k)\right|.$$

Observaciones 14.2. *(a) Observa que todo conjunto integrable es medible* (ver Proposición 12.38). *El* Corolario 13.22 *asegura que, en ese caso, la noción de medida dada por la* Definición 12.36 *coincide con la dada aquí.*

(b) El recíproco no es cierto: claramente, $\mathbb{R}^n$ es medible pero no es integrable.

(c) Nota también que si X es medible y $|X| = 0$ entonces X es un conjunto nulo. Proponemos la demostración de esta afirmación como ejercicio [Ejercicio 14.51].

Los conjuntos medibles tienen las siguientes propiedades.

Proposición 14.3. *(a) Si X y Y son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, entonces $X \smallsetminus Y$ es medible.*

(b) Si $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, entonces
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \qquad y \qquad \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$$
son medibles.

[1] Consulta,por ejemplo, el applet de M. Levoy, A. Adams, K. Dektar y N. Willett, *Spacial Convolution*, applet para el curso Digital Photography (Spring 2011), Stanford University. http://graphics.stanford.edu/courses/cs178/applets/convolution.html

Demostración. *(a)* es consecuencia de la identidad

$$(X \smallsetminus Y) \cap \bar{B}^n(0,k) = \left[X \cap \bar{B}^n(0,k)\right] \smallsetminus \left[Y \cap \bar{B}^n(0,k)\right]$$

y la Proposición 12.38.

(b): Sean $k \in \mathbb{N}$ y $Y_m := \cup_{j=1}^m \left(X_j \cap \bar{B}^n(0,k)\right)$. Como $Y_m \subset \bar{B}^n(0,k)$, se tiene que la sucesión $(|Y_m|)$ es acotada. El Corolario 13.22 asegura entonces que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(X_j \cap \bar{B}^n(0,k)\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right) \cap \bar{B}^n(0,k)$$

es integrable. En consecuencia, $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ es medible. De *(a)* y la identidad

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j = \mathbb{R}^n \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \smallsetminus X_j)$$

se sigue que $\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$ es medible. □

La proposición anterior proporciona muchos ejemplos de conjuntos medibles, como los siguientes.

Ejemplo 14.4. *(a) Todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ es medible.*

(b) Todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es medible.

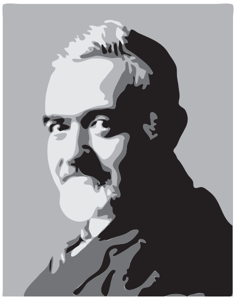
(c) Las uniones y las intersecciones numerables de subconjuntos abiertos o cerrados de $\mathbb{R}^n$ son medibles.

Demostración. *(a):* Si X es cerrado en $\mathbb{R}^n$, entonces $X \cap \bar{B}^n(0,k)$ es compacto y, en consecuencia, integrable en $\mathbb{R}^n$.

(b) y *(c)* son consecuencia inmediata de *(a)* y de la Proposición 14.3. □

No todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son medibles. A continuación daremos un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no lo es. Dicho ejemplo se debe a Vitali[2].

[2] Giuseppe Vitali (1875-1932) nació en Ravenna, Italia. Estudió en la Scuola Normale Superiore de Pisa, donde fue alumno de Luigi Bianchi y asistente de Ulisse Dini. Fue maestro de secundaria durante más de 20 años hasta que finalmente obtuvo una cátedra en la Universidad de Modena y Reggio Emilia.



Giuseppe Vitali

Requerimos el siguiente lema.

Lema 14.5. *Si X es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ con $|X| > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\{x - y : x, y \in X\} \supset (-\delta, \delta)$.*

Demostración. Reemplazando, de ser necesario, a X por alguno de sus subconjuntos $X \cap [-k, k]$ de medida positiva, podemos suponer sin perder generalidad que X es integrable en $\mathbb{R}$. Escojamos un abierto Ω en $\mathbb{R}$ tal que $X \subset \Omega$ y $|\Omega| < \frac{4}{3}|X|$ (ver Ejercicio 12.57). Ω es la unión de una familia numerable de intervalos cerrados I_k, $k \in \mathbb{N}$, cuyos interiores son ajenos por pares (ver Ejercicio 13.45). Usando el Corolario 13.22 obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = |\Omega| < \frac{4}{3}|X| = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} |X \cap I_k|.$$

Esta desigualdad implica que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|I_{k_0}\right| < \frac{4}{3}\left|X \cap I_{k_0}\right|$. Sea $\delta := \frac{1}{2}\left|I_{k_0}\right|$. Denotemos por $Y := X \cap I_{k_0}$ y por

$$Y + z := \{y + z : y \in Y\}.$$

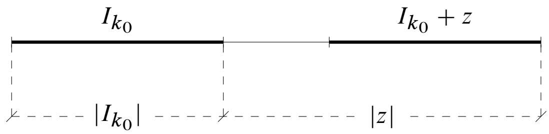
Probaremos a continuación que

$$(Y + z) \cap Y \neq \emptyset \qquad \forall z \in (-\delta, \delta). \tag{14.1}$$

Argumentando por contradicción, supongamos que $(Y + z) \cap Y = \emptyset$ para algún $z \in (-\delta, \delta)$. Entonces

$$\begin{aligned} 2|Y| &= |Y + z| + |Y| = |(Y + z) \cup Y| \\ &\leq \left|\left(I_{k_0} + z\right) \cup I_{k_0}\right| \leq \left|I_{k_0}\right| + |z| \leq \frac{3}{2}\left|I_{k_0}\right|, \end{aligned}$$

lo cual es imposible, ya que $|I_{k_0}| < \frac{4}{3}|Y|$. En consecuencia, se cumple (14.1), es



decir, para cada $z \in (-\delta, \delta)$ existen $x, y \in Y$ tales que $x + z = y$. Esto concluye la demostración. □

Teorema 14.6 (Vitali). $\mathbb{R}$ *contiene un subconjunto que no es medible.*

Demostración. Considera la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ dada por

$$x \sim y \quad \text{si y sólo si} \quad x - y \in \mathbb{Q},$$

y escoge un elemento en cada clase de equivalencia. Sea X el conjunto de dichos elementos. Entonces $\mathbb{R} = \cup_{q \in \mathbb{Q}}(X + q)$. Si X fuera medible, necesariamente $|X| > 0$ pues, de lo contrario, $\mathbb{R}$ sería nulo (ver Ejercicio 14.51). De modo que, por el Lema 14.5, existiría $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subset \{x - y : x, y \in X\}$, lo cual es imposible ya que

$$\{x - y : x, y \in X\} \subset (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}.$$

Así concluimos que X no es medible. □

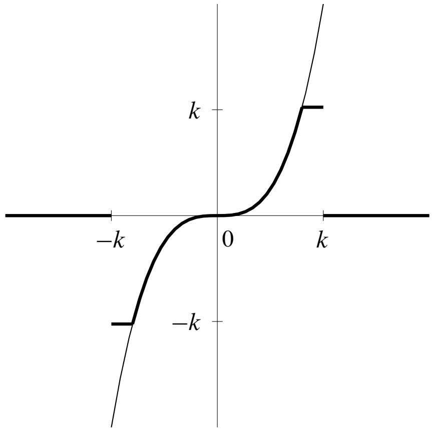
De manera análoga se define el concepto de función medible: una función es medible si cuando restringimos su dominio a $\bar{B}^n(0, k)$ y proyectamos sus valores sobre el intervalo $[-k, k]$ la función resulta integrable.

Más precisamente: dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ consideramos, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función $f_{[k]} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$f_{[k]} := \text{mín}\{\text{máx}\{f, -k\}, k\}\, 1_{\bar{B}^n(0,k)}, \tag{14.2}$$

es decir,

$$f_{[k]}(x) := \begin{cases} k & \text{si } \|x\| \leq k \quad \text{y} \quad f(x) \in [k, \infty), \\ f(x) & \text{si } \|x\| \leq k \quad \text{y} \quad f(x) \in [-k, k], \\ -k & \text{si } \|x\| \leq k \quad \text{y} \quad f(x) \in (-\infty, -k], \\ 0 & \text{si } \|x\| > k. \end{cases}$$



Definición 14.7. *Una función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *es* ***(Lebesgue-) medible*** *si* $f_{[k]}$ *es integrable en* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Observa que, para cualquier subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$(1_X)_{[k]} = 1_{X \cap \bar{B}^n(0,k)}. \tag{14.3}$$

En consecuencia, un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si 1_X es medible. El teorema de Vitali muestra pues que no todas las funciones son medibles. Pero muchas funciones sí lo son, por ejemplo las siguientes.

Ejemplo 14.8. *Toda función* $f \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *es medible. En particular, toda función continua* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es medible.*

Demostración. Si $f \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $f 1_{\bar{B}^n(0,k)}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ (ver Definición 13.33). En consecuencia,

$$f_{[k]} = \min\left\{\max\left\{f 1_{\bar{B}^n(0,k)}, -k 1_{\bar{B}^n(0,k)}\right\}, k 1_{\bar{B}^n(0,k)}\right\}$$

es integrable en $\mathbb{R}^n$ (ver Ejercicio 12.61). $\square$

Probaremos ahora que las funciones medibles son precisamente aquéllas que son límites puntuales de funciones integrables.

Proposición 14.9. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f *es medible.*

(b) Existe una sucesión $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de funciones integrables tales que* $f_k(x) \to f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Existe una sucesión $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *de funciones medibles tales que* $f_j(x) \to f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. (a)⇒(b): Si f es medible, entonces $f_{[k]}$ es integrable y $f_{[k]}(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b)⇒(c): Esta implicación es obvia, ya que toda función integrable es medible.

(c)⇒(a): Si f_j es medible y $f_j(x) \to f(x)$ entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\left(f_j\right)_{[k]}$ es integrable y que $\lim_{j\to\infty} \left(f_j\right)_{[k]}(x) = f_{[k]}(x)$. Claramente, $|\left(f_j\right)_{[k]}| \leq k1_{\bar{B}^n(0,k)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. El teorema de convergencia dominada (Teorema 13.26) asegura entonces que $f_{[k]}$ es integrable. Esto prueba que f es medible. □

Concluimos lo siguiente.

Ejemplo 14.10. *Si* $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$*, entonces* f *es medible.*

Demostración. Toda función $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ es, por definición, el límite puntual de una sucesión de funciones en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Así que, por la Proposición 14.9, f es medible. □

Proposición 14.11. *(a) Si* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *son medibles y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, entonces* $\lambda f + \mu g$ *es medible.*

(b) Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *son medibles, entonces*

$$|f|, \quad f^+, \quad f^-, \quad \max\{f, g\} \quad y \quad \min\{f, g\}$$

son funciones medibles.

Demostración. (a): Por la Proposición 14.9 existen sucesiones de funciones integrables $f_k, g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $f_k(x) \to f(x)$ y $g_k(x) \to g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como $\lambda f_k + \mu g_k$ es integrable y $(\lambda f_k + \mu g_k)(x) \to (\lambda f + \mu g)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ la Proposición 14.9 asegura que $\lambda f + \mu g$ es medible.

(b) se demuesta de manera análoga. □

El siguiente resultado caracteriza a las funciones medibles en términos de conjuntos medibles.

Proposición 14.12. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *es medible si y sólo si*

$$f^{\geq a} := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\}$$

es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. $\Rightarrow$): Si f es medible, la Proposición 14.11 asegura que la función $f_k := \text{mín}\left\{\text{máx}\left\{k(f - a + \frac{1}{k}), 0\right\}, 1\right\}$ es medible para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Nota que $f_k(x) = 0$ si $f(x) \leq a - \frac{1}{k}$ y que $f_k(x) = 1$ si $f(x) \geq a$. En consecuencia, $f_k(x) \to 1_{f^{\geq a}}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La Proposición 14.9 asegura entonces que la función $1_{f^{\geq a}}$ es medible, y de (14.3) se sigue que $f^{\geq a}$ es un conjunto medible.

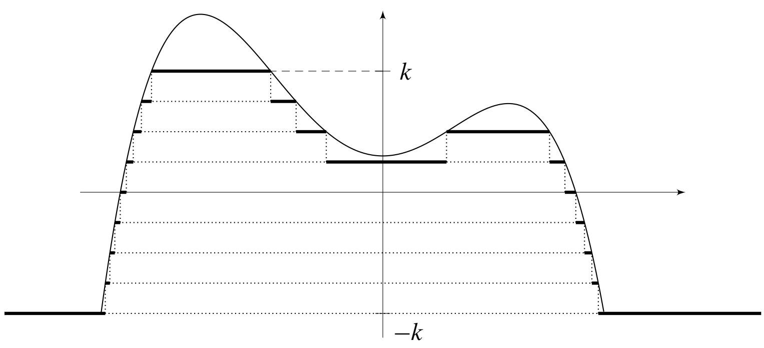
$\Leftarrow$): Inversamente, supongamos que $f^{\geq a}$ es medible para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ subdividimos el intervalo $[-k, k]$ en intervalos de longitud $\frac{1}{2^k}$ y denotamos a los puntos de la partición por $a_{k,j} := -k + \frac{j}{2^k}$, $j = 0, \ldots, k2^{k+1}$. De la Proposición 14.3 se sigue que los conjuntos

$$\begin{aligned}
X_{k,0} &:= \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < a_{k,1}\right\} = \mathbb{R}^n \smallsetminus f^{\geq a_{k,1}},\\
X_{k,j} &:= \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_{k,j} \leq f(x) < a_{k,j+1}\right\} = f^{\geq a_{k,j}} \smallsetminus f^{\geq a_{k,j+1}},\\
X_{k,k2^{k+1}} &:= \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_{k,k2^{k+1}} \leq f(x)\right\} = f^{\geq k},
\end{aligned}$$

son medibles, para todo $j = 1, \ldots, k2^{k+1} - 1$. Por tanto, la función

$$f_k := \sum_{j=0}^{k2^{k+1}} a_{k,j} 1_{X_{k,j}}$$

es medible.



Además, $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La Proposición 14.9 asegura entonces que f es medible. $\square$

Recuerda que, en general, no es cierto que el producto de funciones integrables es integrable (ver Ejemplo 13.32). Pero sí es una función medible, como veremos a continuación.

Proposición 14.13. *(a) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible y $p \in (0, \infty)$, entonces $|f|^p$ es medible.*

(b) Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son medibles, entonces fg es medible.

Demostración. (a): Por Proposición 14.11 sabemos que $|f|$ es medible. Entonces, la Proposición 14.12 asegura que

$$\left(|f|^p\right)^{\geq a} = \begin{cases} |f|^{\geq a^{1/p}} & \text{si } a \in (0, \infty), \\ \mathbb{R}^n & \text{si } a \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

es un conjunto medible para todo $a \in \mathbb{R}$ y, en consecuencia, $|f|^p$ es una función medible.

(b): Como

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right],$$

la afirmación *(a)* con $p = 2$ y la Proposición 14.11 implican que fg es medible. □

Si modificamos los valores de una función medible sobre un conjunto nulo, ésta continúa siendo medible.

Proposición 14.14. *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si f es medible y $f(x) = g(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, entonces g es medible.*

Demostración. Si f es medible y $f(x) = g(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f_{[k]}$ es integrable y $f_{[k]}(x) = g_{[k]}(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $g_{[k]}$ es integrable (ver Proposición 13.10). Esto prueba que g es medible. □

El siguiente criterio de integrabilidad jugará un papel muy importante en la siguiente sección.

Teorema 14.15. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es medible y existe una función integrable $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $|f(x)| \leq g(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, entonces f es integrable.*

Demostración. Si f es medible, entonces $f_{[k]}$ es integrable para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $f_{[k]}(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\left|f_{[k]}(x)\right| \leq |f(x)| \leq g(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $k \in \mathbb{N}$, el teorema de convergencia dominada (Teorema 13.26) asegura que f es integrable. □

Recuerda que, si f es integrable, entonces $|f|$ lo es (ver Proposición 12.32). Del teorema anterior se obtiene inmediatamente el recíproco para funciones medibles.

Corolario 14.16. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es medible y $|f|$ es integrable, entonces f es integrable.*

Tonelli[3] demostró que para funciones medibles vale el recíproco del teorema de Fubini.

Leonida Tonelli

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función, $1 \leq m < n$ y $y \in \mathbb{R}^{n-m}$, denotaremos como antes por $f^y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a la función

$$f^y(x) := f(x, y).$$

Teorema 14.17 (Tonelli)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible y $1 \leq m < n$. Si $|f|^y$ es integrable en $\mathbb{R}^m$ p.c.t. $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ y la función $F : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ definida como*

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^m} |f|^y \qquad \textit{p.c.t. } y \in \mathbb{R}^{n-m}$$

es integrable en $\mathbb{R}^{n-m}$, entonces f es integrable en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Si f es medible entonces la función $g_k := |f|_{[k]}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y el teorema de Fubini (Teorema 13.17) asegura que g_k^y es integrable en $\mathbb{R}^m$ p.c.t. $y \in \mathbb{R}^{n-m}$, que la función $G_k : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ dada por

$$G_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} g_k^y \qquad \text{p.c.t. } y \in \mathbb{R}^{n-m}$$

[3] Leonida Tonelli (1885-1946) nació en Gallipoli, Puglia, Italia. Estudió en la Universidad de Bologna donde fue alumno de Cesare Arzelà. Fue profesor en las universidades de Parma, Bologna y Pisa.

es integrable en $\mathbb{R}^{n-m}$ y que se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} G_k.$$

Nota que $g_k \le |f|$. En consecuencia, $g_k^y \le |f|^y$, $G_k \le F$ c.d. en $\mathbb{R}^{n-m}$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} G_k \le \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F < \infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $g_k \le g_{k+1}$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k = |f|$, el teorema de convergencia monótona (Teorema 13.20) asegura que $|f|$ es integrable, y el Corolario 14.16 asegura que f es integrable. $\square$

14.2. Los espacios $L^p(\Omega)$

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Como hemos convenido, identificaremos a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con su extensión trivial a todo $\mathbb{R}^n$ (ver Notación 12.44). Diremos entonces que f es medible si su extensión trivial lo es. En el conjunto

$$\mathfrak{M}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible}\}$$

consideramos la relación de equivalencia dada por

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{14.4}$$

Al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por

$$M(\Omega) := \mathfrak{M}(\Omega)/\sim . \tag{14.5}$$

Observa que, si $f_i = g_i$ c.d. en Ω, $i = 1, 2$, entonces $\lambda f_1 + \mu f_2 = \lambda g_1 + \mu g_2$ c.d. en Ω para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En consecuencia, la estructura de espacio vectorial de $\mathfrak{M}(\Omega)$ (ver Proposición 14.11) induce una estructura de espacio vectorial en $M(\Omega)$.

Denotaremos a la clase de equivalencia de f simplemente por $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si una función está definida c.d. en Ω, la consideraremos definida en todo Ω dándole, por ejemplo, el valor 0 en los puntos en los que no está definida.

Definición 14.18. *Si $p \in [1, \infty)$ definimos*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f \in M(\Omega) : |f|^p \text{ es integrable en } \Omega \right\}.$$

Para $f \in L^p(\Omega)$ *denotamos por*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Nota que, si f es medible y $|f|$ es integrable en Ω, entonces f es integrable en Ω (ver Corolario 14.16). Por tanto, $L^1(\Omega)$ es simplemente el conjunto de clases de equivalencia de funciones en $\mathfrak{L}(\Omega)$ bajo la relación (14.4).

Definición 14.19. *Definimos*

$$L^\infty(\Omega) := \{ f \in M(\Omega) : \text{ existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq c \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega \}.$$

A una función $f \in L^\infty(\Omega)$ *se le llama una función* ***esencialmente acotada****. Si* $f \in L^\infty(\Omega)$ *denotamos por*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty := \text{ínf}\{ c \in \mathbb{R} : \ |f(x)| \leq c \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega \}.$$

Nota que $\|f\|_p$ depende únicamente de la clase de equivalencia de f.

Observa también que, si $f \in L^\infty(\Omega)$, el conjunto

$$Z_k := \left\{ x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{k} \right\}$$

es nulo para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \in \Omega \smallsetminus \bigcup_{k=1}^\infty Z_k$, es decir,

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \qquad \text{p.c.t. } x \in \Omega. \tag{14.6}$$

A continuación probaremos que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado (ver Definición 2.9). Empecemos observando lo siguiente.

Lema 14.20. *Sean* $p \in [1, \infty]$ *y* $f \in L^p(\Omega)$*. Entonces,* $\|f\|_p = 0$ *si y sólo si* $f(x) = 0$ *p.c.t.* $x \in \Omega$*.*

Demostración. Para $p = \infty$ esta afirmación es consecuencia inmediata de (14.6). Si $p \in [1, \infty)$, el Corolario 13.15 asegura que

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x)|^p = 0 \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega,$$

de donde se sigue inmediatamente la afirmación. □

Como los elementos de $L^p(\Omega)$ son clases de equivalencia bajo la relación (14.4), el lema anterior afirma que $\|\cdot\|_p$ cumple la propiedad (N1) de la definición de norma (ver Definición 2.9).

Como en el ejemplo que estudiamos en el Capítulo 2, la desigualdad del triángulo se obtiene a partir de la desigualdad de Hölder. Sólo que ahora su demostración es más delicada, ya que tenemos que cerciorarnos de que las funciones que estamos considerando son integrables. Es por ello que resulta importante considerar funciones medibles. Veamos los detalles.

Proposición 14.21 (Desigualdad de Hölder). *(a) Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

(b) Si $f \in L^\infty(\Omega)$ y $g \in L^1(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 .$$

Demostración. Observa primero que, como f y g son medibles, la función $|fg|$ es medible (ver Proposiciones 14.11 y 14.13).

(a): Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$. La afirmación es trivial si $f = 0$ o si $g = 0$. Supongamos pues que ambas funciones son distintas de cero. Por el Lema 14.20, se tiene entonces que $\|f\|_p \neq 0$ y $\|g\|_q \neq 0$. Para cada $x \in \Omega$ aplicamos la desigualdad de Young (ver Lema 2.11) a la pareja de números reales

$$a_x := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \qquad \text{y} \qquad b_x := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

para obtener

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q},$$

es decir,

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p \|f\|_p^p} |f(x)|^p + \frac{1}{q \|g\|_q^q} |g(x)|^q \right). \tag{14.7}$$

Como $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, el lado derecho de la desigualdad (14.7) es integrable. El Teorema 14.15 implica entonces que $|fg|$ es integrable. En consecuencia, $fg \in L^1(\Omega)$.

Integrando la desigualdad (14.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\|fg\|_1 = \int_\Omega |fg| &\leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p \|f\|_p^p} \int_\Omega |f|^p + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int_\Omega |g|^q \right) \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \|f\|_p \|g\|_q ,\end{aligned}$$

como afirma el enunciado.

(b): Si $f \in L^\infty(\Omega)$ y $g \in L^1(\Omega)$, entonces $\|f\|_\infty |g|$ es integrable. Usando la desigualdad (14.6) obtenemos que $|f(x)g(x)| \leq \|f\|_\infty |g(x)|$ p.c.t. $x \in \Omega$. El Teorema 14.15 implica entonces que $fg \in L^1(\Omega)$. Integrando la desigualdad anterior, obtenemos

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |g| = \|f\|_\infty \|g\|_1 .$$

Esto concluye la demostración. □

Notación 14.22. *De aquí en adelante convendremos que* $\frac{1}{\infty} := 0$. *De este modo la identidad* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *tiene sentido para todo* $p \in [1, \infty]$.

Para probar la desigualdad del triángulo usaremos la siguiente desigualdad elemental.

Lema 14.23. *Para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in (0, \infty)$,

$$|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

Demostración. Se tiene que

$$|a + b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq (2\,\text{máx}\,\{|a|\,, |b|\})^p = 2^p\,\text{máx}\left\{|a|^p\,, |b|^p\right\} \leq 2^p(|a|^p+|b|^p),$$

como afirma el enunciado. □

Proposición 14.24 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sea* $p \in [1, \infty]$. *Si* $f, g \in L^p(\Omega)$, *entonces* $f + g \in L^p(\Omega)$ *y se cumple que*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p . \tag{14.8}$$

Demostración. Observa primero que, si f y g son medibles, entonces $|f + g|^r$ es medible para todo $r \in (0, \infty)$ (ver Proposiciones 14.11 y 14.13). Consideramos tres casos.

CASO 1: $p = 1$.

Si $f, g \in L^1(\Omega)$, como $|f + g| \leq |f| + |g|$, el Teorema 14.15 asegura que $f + g \in L^1(\Omega)$. Integrando ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

CASO 2: $p = \infty$.

Si $f, g \in L^\infty(\Omega)$, como $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ c.d. en Ω, se tiene que $f + g \in L^\infty(\Omega)$ y

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

CASO 3: $p \in (1, \infty)$.

Si $f, g \in L^p(\Omega)$, el Lema 14.23 asegura que $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$ para toda $x \in \Omega$ y del Teorema 14.15 se sigue que $f + g \in L^p(\Omega)$.

Sea $q := \frac{p}{p-1}$. Entonces $|f + g|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ y

$$\left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q = \left(\int_\Omega (|f + g|^{p-1})^q \right)^{1/q} = \left(\int_\Omega |f + g|^p \right)^{(p-1)/p} = \|f + g\|_p^{p-1}.$$

Como

$$|f + g|^p = |f + g|\,|f + g|^{p-1} \leq |f|\,|f + g|^{p-1} + |g|\,|f + g|^{p-1},$$

aplicando la desigualdad de Hölder (ver Proposición 14.21) obtenemos

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p = \int_\Omega |f + g|^p &\leq \int_\Omega |f|\,|f + g|^{p-1} + \int_\Omega |g|\,|f + g|^{p-1} \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Si $\|f + g\|_p = 0$, la desigualdad (14.8) se satisface trivialmente. Si $\|f + g\|_p \neq 0$, dividiendo la desigualdad anterior entre $\|f + g\|_p^{p-1}$ obtenemos la desigualdad (14.8). □

Proposición 14.25. $L^p(\Omega) = (L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ *es un espacio normado para todo* $p \in [1, \infty]$.

Demostración. El Lema 14.20 asegura que $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$ en $L^p(\Omega)$. Esta es la condición (N1) de la definición de norma (ver Definición 2.9).

Si f es medible y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λf es medible (ver Proposición 14.11). Además, si $p \in [1, \infty)$, entonces $|\lambda f|^p = |\lambda|^p |f|^p$ es integrable si $|f|^p$ lo es. Para $p = \infty$ observa que $|\lambda f| \leq |\lambda| c$ c.d. en Ω si $|f| \leq c$ c.d. en Ω. Por tanto, para cualquier $p \in [1, \infty]$, $\lambda f \in L^p(\Omega)$ y $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$.

Esta última afirmación, junto con la Proposición 14.24, asegura que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_p$ satisface las condiciones (N2) y (N3) de la Definición 2.9. □

Probaremos a continuación que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach. Para ello requerimos la siguiente generalización del Teorema 13.26.

Teorema 14.26 (de convergencia dominada en L^p)**.** *Sean $p \in [1,\infty)$ y (f_k) una sucesión en $M(\Omega)$ tal que $f_k(x) \to f(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$. Si existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$|f_k(x)| \leq g(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces $f_k, f \in L^p(\Omega)$ y

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0.$$

Demostración. Como cada f_k es medible, las Proposiciones 14.14 y 14.9 implican que f es medible. Más aún, como $|f_k|^p$ es medible y $|f_k(x)|^p \leq |g(x)|^p$ p.c.t. $x \in \Omega$, el Teorema 14.15 asegura que $|f_k|^p$ es integrable. Dado que $|f_k(x)|^p \to |f(x)|^p$ p.c.t. $x \in \Omega$, el teorema de convergencia dominada (Teorema 13.26) asegura que $|f|^p$ es integrable. En consecuencia, $f_k, f \in L^p(\Omega)$, y de la Proposición 14.24 se sigue que $|f - f_k|^p$ es integrable. Usando el Lema 14.23 obtenemos que

$$|f(x) - f_k(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |f_k(x)|^p) \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

El teorema de convergencia dominada asegura entonces que $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$. □

Teorema 14.27. *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $p \in [1,\infty]$.*

Demostración. Supongamos primero que $p \in [1,\infty)$. Sea (f_k) una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Escogemos $k_1 < \cdots < k_j < k_{j+1} < \cdots$ tales que

$$\|f_i - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^j} \qquad \text{si } i,k \geq k_j.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| f_{k_{j+1}} - f_{k_j} \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Definimos $f_{k_0} := 0$,

$$g_m := \sum_{j=0}^{m-1} \left| f_{k_{j+1}} - f_{k_j} \right| \qquad \text{y} \qquad g := \sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{k_{j+1}} - f_{k_j} \right| = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_m.$$

La Proposición 14.24 asegura que $\|g_m\|_p \leq \sum_{j=0}^{m-1} \left\| f_{k_{j+1}} - f_{k_j} \right\|_p$. En consecuencia,

$$\int_\Omega |g_m|^p = \|g_m\|_p^p \leq \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left\| f_{k_{j+1}} - f_{k_j} \right\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| f_{k_{j+1}} - f_{k_j} \right\|_p \right)^p < \infty$$

y, por el teorema de convergencia monótona (ver Teorema 13.20), la función $|g|^p = \sup_{m\in\mathbb{N}} |g_m|^p$ es integrable. La Proposición 13.11 asegura entonces que existe un subconjunto nulo Z de Ω tal que

$$g(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \right| < \infty \qquad \forall x \in \Omega \smallsetminus Z.$$

Esto implica que la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \right)$$

converge para cada $x \in \Omega \smallsetminus Z$. Definimos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \right) & \text{si } x \in \Omega \smallsetminus Z, \\ 0 & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Dado que

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \right) = f_{k_m}(x),$$

se tiene que

$$f_{k_m}(x) \to f(x) \qquad \text{y} \qquad \left| f_{k_m}(x) \right| \leq g_m(x) \leq g(x) \qquad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Del Teorema 14.26, se sigue que $f \in L^p(\Omega)$ y

$$\lim_{j\to\infty} \left\| f - f_{k_j} \right\|_p = 0,$$

es decir, la subsucesión (f_{k_j}) converge a f en $L^p(\Omega)$. Como (f_k) es de Cauchy, concluimos que $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$ (ver Ejercicio 5.30).

Consideremos ahora el caso $p = \infty$. Si (f_k) es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\Omega)$, entonces existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_i - f_k \|_\infty \leq \frac{1}{m} \qquad \forall i, k \geq k_m.$$

Sea $Z_{i,k}$ un subconjunto nulo de Ω tal que

$$| f_i(x) - f_k(x) | \leq \| f_i - f_k \|_\infty \qquad \forall x \in \Omega \smallsetminus Z_{i,k}.$$

Entonces, $Z := \bigcup_{i,k=1}^{\infty} Z_{i,k}$ es nulo y, para cada $x \in \Omega \smallsetminus Z$,

$$|f_i(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{m} \qquad \forall i, k \geq k_m. \tag{14.9}$$

Es decir, $(f_k(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. En consecuencia, para cada $x \in \Omega \smallsetminus Z$, existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f_k(x) \to f(x)$ en $\mathbb{R}$. Extendemos f como $f(x) := 0$ si $x \in Z$. Las Proposiciones 14.14 y 14.9 aseguran que la función f es medible. Fijando k y haciendo tender i a infinito en la desigualdad (14.9), obtenemos que

$$|f(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{m} \qquad \forall x \in \Omega \smallsetminus Z, \ \forall k \geq k_m.$$

Por tanto, $f - f_k \in L^{\infty}(\Omega)$ y

$$\|f - f_k\|_{\infty} \leq \frac{1}{m} \qquad \forall k \geq k_m. \tag{14.10}$$

Como $f = (f - f_{k_1}) + f_{k_1}$, concluimos que $f \in L^{\infty}(\Omega)$, y se sigue de (14.10) que $f_k \to f$ en $L^{\infty}(\Omega)$. □

Si $p \in [1, \infty)$ la convergencia de una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$ no implica que ésta converge puntualmente c.d. en Ω. Sin embargo, repasando la demostración del Teorema 14.27, vemos que hemos probado lo siguiente.

Teorema 14.28. *Sea (f_k) una sucesión en $L^p(\Omega)$ tal que $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$.*

(a) Si $p \in [1, \infty)$, existen una subsucesión (f_{k_j}) de (f_k) y una función $g \in L^p(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} &f_{k_j}(x) \to f(x) && \textit{p.c.t. } x \in \Omega, \\ &\left|f_{k_j}(x)\right| \leq g(x) && \textit{p.c.t. } x \in \Omega, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(b) Si $p = \infty$, entonces $f_k(x) \to f(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$ y existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f_k(x)| \leq c$ p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. (a): Supongamos primero que $p \in [1, \infty)$. Como (f_k) es de Cauchy en $L^p(\Omega)$, siguiendo la demostración del Teorema 14.27 concluimos que existen una subsucesión (f_{k_j}) de (f_k) y funciones $\tilde{f}, g \in L^p(\Omega)$ tales que

$$f_{k_j}(x) \to \tilde{f}(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega, \qquad \left|f_{k_j}(x)\right| \leq g(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

y $f_k \to \tilde{f}$ en $L^p(\Omega)$. Como $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$ se tiene que $f = \tilde{f}$.

(b): Supongamos ahora que $p = \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un conjunto nulo Z_k tal que

$$|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty \quad \text{y} \quad |f(x) - f_k(x)| \leq \|f - f_k\|_\infty \qquad \forall x \in \Omega \smallsetminus Z_k.$$

Tomando $Z := \bigcup_{k=1}^\infty Z_k$ obtenemos que

$$|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty \quad \text{y} \quad |f(x) - f_k(x)| \leq \|f - f_k\|_\infty \qquad \forall x \in \Omega \smallsetminus Z, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $f_k \to f$ en $L^\infty(\Omega)$ concluimos que $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in \Omega \smallsetminus Z$. Además, (f_k) está acotada en $L^\infty(\Omega)$, por lo que $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty \leq c$ para cualesquiera $x \in \Omega \smallsetminus Z$ y $k \in \mathbb{N}$. □

Veamos un ejemplo importante.

Proposición 14.29. *Sean $f(x) := \|x\|^\gamma$ con $\gamma \in \mathbb{R}$, y $r > 0$.*

(a) Si $p \in [1, \infty)$ entonces $f \in L^p(B^n(0,r))$ si y sólo si $p\gamma + n > 0$ y, en ese caso,

$$\|f\|_{L^p(B^n(0,r))} = \left|\frac{n\omega_n}{n + p\gamma}\right|^{1/p} r^{(n/p)+\gamma}.$$

(b) $f \in L^\infty(B^n(0,r))$ si y sólo si $\gamma \geq 0$ y, en ese caso,

$$\|f\|_{L^\infty(B^n(0,r))} = r^\gamma.$$

(c) Si $p \in [1, \infty)$ entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus B^n(0,r))$ si y sólo si $p\gamma + n < 0$ y, en ese caso,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus \bar{B}^n(0,r))} = \left|\frac{n\omega_n}{n + p\gamma}\right|^{1/p} r^{(n/p)+\gamma}.$$

(d) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n \smallsetminus B^n(0,r))$ si y sólo si $\gamma \leq 0$ y, en ese caso,

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \smallsetminus \bar{B}^n(0,r))} = r^\gamma.$$

Demostración. Es sencillo comprobar que f es una función medible [Ejercicio 14.60]. Las afirmaciones *(a)* y *(c)* son consecuencia inmediata de la Proposición 13.31.

(b): Si $\gamma \geq 0$, entonces f es continua en $\mathbb{R}^n$ y creciente en la dirección radial. Por tanto, $f \in L^\infty(B^n(0,r))$ y

$$\|f\|_{L^\infty(\bar{B}^n(0,r))} = r^\gamma.$$

Si $\gamma < 0$ entonces, para cualquier $c > 0$, se cumple que $\|x\|^{\gamma} \leq c$ si y sólo si $\|x\| \geq c^{1/\gamma}$. Como $B^n(0, c^{1/\gamma}) \cap B^n(0, r)$ no es un conjunto nulo, concluimos que $f \notin L^{\infty}(B^n(0, r))$.

(d): Esta afirmación se demuestra de manera análoga. □

Queremos ahora comparar a los espacios $L^s(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$. Una consecuencia de la proposición anterior es la siguiente.

Proposición 14.30. *Si $1 \leq p < s \leq \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ no está contenido en $L^s(\Omega)$ para ningún abierto Ω.*

Demostración. Sea $\xi \in \Omega$. Escogemos $r > 0$ tal que $B^n(\xi, r) \subset \Omega$. Si $q \in (p, s)$, la Proposición 14.29 asegura que la función

$$f(x) := \begin{cases} \|x - \xi\|^{-n/q} & \text{si } x \in B^n(\xi, r), \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \smallsetminus B^n(\xi, r), \end{cases}$$

satisface $f \in L^p(\Omega)$ y $f \notin L^s(\Omega)$. □

La inclusión opuesta se tiene cuando la medida de Ω es finita.

Proposición 14.31. *Si $|\Omega| < \infty$ y $1 \leq p < s \leq \infty$, entonces $L^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y esta inclusión es continua. Más aún, para todo $f \in L^s(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq |\Omega|^{(s-p)/sp} \|f\|_s && \textit{si } s \in [1, \infty), \\ \|f\|_p &\leq |\Omega|^{1/p} \|f\|_{\infty} && \textit{si } s = \infty. \end{aligned}$$

Demostración. Nota que, si $|\Omega| < \infty$, entonces $1_\Omega \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, \infty]$ y

$$\|1_\Omega\|_q = \left(\int_\Omega 1_\Omega\right)^{1/q} = |\Omega|^{1/q}.$$

Si $1 \leq p < s < \infty$ y $f \in L^s(\Omega)$, entonces $|f|^p \in L^{s/p}(\Omega)$ y

$$\left\||f|^p\right\|_{s/p} = \left(\int_\Omega |f|^s\right)^{p/s} = \|f\|_s^p.$$

De la desigualdad de Hölder (ver Proposición 14.21) se sigue que $|f|^p = 1_\Omega |f|^p$ es integrable y que

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega 1_\Omega |f|^p \leq \|1_\Omega\|_{s/(s-p)} \left\||f|^p\right\|_{s/p} = |\Omega|^{(s-p)/s} \|f\|_s^p.$$

En consecuencia, $f \in L^p(\Omega)$ y

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{(s-p)/sp} \|f\|_s . \tag{14.11}$$

Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces $|f|^p \leq \|f\|_\infty^p 1_\Omega$ c.d. en Ω. Como $|\Omega| < \infty$, la función $\|f\|_\infty^p 1_\Omega$ es integrable. Por tanto, $f \in L^p(\Omega)$ (ver Teorema 14.15). Integrando la desigualdad anterior obtenemos $\|f\|_p^p \leq |\Omega| \|f\|_\infty^p$, es decir,

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{1/p} \|f\|_\infty . \tag{14.12}$$

Finalmente, si $f_k \to f$ en $L^s(\Omega)$, como las desigualdades (14.11) y (14.12) aseguran la existencia de una constante c tal que

$$\|f_k - f\|_p \leq c \|f_k - f\|_s ,$$

concluimos que $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$. Esto prueba que la inclusión $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua. $\square$

Si $|\Omega| = \infty$ las afirmaciones de la Proposición 14.31 no son ciertas en general, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14.32. *Si $\Omega := \mathbb{R}^n \smallsetminus \bar{B}^n(0,1)$, $1 \leq p < s \leq \infty$ y $f(x) := \|x\|^{-n/q}$ con $q \in (p,s)$, entonces $f \in L^s(\Omega)$ pero $f \notin L^p(\Omega)$* (ver Proposición 14.29).

14.3. Aproximación mediante funciones suaves

Para $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ denotamos por

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) := \mathcal{C}_c^0(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega), \tag{14.13}$$

al espacio de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$ con soporte compacto en Ω. El objetivo de esta sección es probar que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$. Empezaremos demostrando la siguiente afirmación.

Proposición 14.33. *$\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$. Es decir, dadas $f \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tal que*

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Demostración. Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Las funciones

$$f_{[k]} = \text{mín}\{\text{máx}\{-k, f\}, k\} 1_{\bar{B}^n(0,k)},$$

definidas en (14.2), cumplen que $f_{[k]}(x) \to f(x)$ y que $\left|f_{[k]}(x)\right| \leq |f(x)|$ para todo $x \in \Omega$. Del Teorema 14.26 se sigue que $f_{[k]} \in L^p(\Omega)$ y

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f - f_{[k]} \right\|_p = 0.$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f - f_{[k]} \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.14}$$

Como $f_{[k]}$ es integrable, la Proposición 13.37 asegura que existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left| f_{[k]} - \varphi \right| < \frac{\varepsilon^p}{2^p (2k)^{p-1}}.$$

Sea $g := \min\{\max\{-k, \varphi\}, k\}$. Entonces $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ y $\left| f_{[k]} - g \right| \leq 2k$. Además se cumple que $\left| f_{[k]} - g \right| \leq \left| f_{[k]} - \varphi \right|$, ya que si $|\varphi(x)| > k$ entonces $|y - g(x)| < |y - \varphi(x)|$ para todo $y \in [-k, k]$. Por tanto,

$$\left| f_{[k]} - g \right|^p \leq \left| f_{[k]} - g \right|^{p-1} \left| f_{[k]} - \varphi \right| \leq (2k)^{p-1} \left| f_{[k]} - \varphi \right|.$$

Esta desigualdad implica que $\left| f_{[k]} - g \right|^p$ es integrable y que

$$\left\| f_{[k]} - g \right\|_p^p = \int_\Omega \left| f_{[k]} - g \right|^p \leq (2k)^{p-1} \int_\Omega \left| f_{[k]} - \varphi \right| < \frac{\varepsilon^p}{2^p}. \tag{14.15}$$

De las desigualdades (14.14) y (14.15) y la desigualdad de Minkowski se sigue que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. □

Observación 14.34. *$\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ no es denso en $L^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Si $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, entonces $\Omega \smallsetminus \operatorname{sop}(g)$ es abierto y no vacío. Por tanto, existen $x_0 \in \Omega$ y $\delta > 0$ tales que $g(x) = 0$ para todo $x \in B^n(x_0, \delta)$. En consecuencia,

$$\|1_\Omega - g\|_\infty \geq 1 \qquad \forall g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega).$$

Esto prueba que $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ no es denso en $L^\infty(\Omega)$. □

Definición 14.35. *Un subconjunto abierto ω de $\mathbb{R}^n$* ***está compactamente contenido en*** *Ω si su cerradura $\overline{\omega}$ es compacta y $\overline{\omega} \subset \Omega$. Escribimos $\omega \subset\subset \Omega$ para denotar que ω está compactamente contenido en Ω. Definimos*

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{ f \in M(\Omega) : f 1_\omega \text{ es integrable para todo abierto } \omega \subset\subset \Omega \}.$$

Nota que $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es el conjunto de clases de equivalencia de funciones en el espacio $\mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, definido en (13.11), bajo la relación (14.4).

Si $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathrm{sop}(f) \subset B^n(0,r)$, entonces

$$f(x-y)g(y) = f(x-y)g(y)1_{B^n(x,r)}(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Como $g1_{B^n(x,r)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y la función $y \mapsto f(x-y)$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ (ver Proposición 14.21). Esta observación nos permite definir la siguiente función.

Definición 14.36. *Sean $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. La* ***convolución de f y g*** *es la función $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Veremos a continuación que $f*g$ hereda las propiedades de regularidad de f.

Proposición 14.37. *Si $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f*g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$. En particular, $f*g$ es medible.*

Demostración. Sea (x_k) una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $x_k \to x$. Definimos $h_k(y) := f(x_k - y)g(y)$ y $h(y) := f(x-y)g(y)$. Puesto que f es continua, se cumple que $h_k(y) \to h(y)$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$. Elegimos $r > 0$ tal que $\mathrm{sop}(f) \subset B^n(0,r)$ y $x_k \in B^n(0,r)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nota que, si $x_k - y \in \mathrm{sop}(f)$, entonces $y \in B^n(0,2r)$. En consecuencia, $h_k = h_k 1_{B^n(0,2r)}$ y

$$|h_k(y)| \leq \|f\|_\infty \left|\left(g1_{B^n(0,2r)}\right)(y)\right| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que $g1_{B^n(0,2r)}$ es integrable, el teorema de convergencia dominada (Teorema 13.26) asegura que

$$\lim_{k\to\infty}(f*g)(x_k) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} h_k = \int_{\mathbb{R}^n} h = (f*g)(x).$$

Esto demuestra que $f*g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua. □

Nota que el soporte de $f*g$ no es necesariamente compacto. Por ejemplo, si $g = 1_{\mathbb{R}^n}$ entonces $f*g$ es la función constante con valor $c := \int_{\mathbb{R}^n} f$, cuyo soporte es $\mathbb{R}^n$ si $c \neq 0$.

Proposición 14.38. *Si* $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demostración. Fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Como $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es uniformemente continua (ver Ejercicio 11.39). Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| < \varepsilon \qquad \text{si } \|y - z\| < \delta. \tag{14.16}$$

Sea $r > 0$ tal que $\mathrm{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset B^n(0,r)$ y $x + te_i \in B^n(0,r)$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$, donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + te_i - y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + te_i - y) 1_{B^n(0,2r)}(y) \qquad \forall t \in [-\delta, \delta],\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{14.17}$$

Por otra parte, aplicando el teorema del valor medio a la función $s \mapsto f(x + ste_i - y)$ para cada $t \in [-\delta, \delta]$ y cada $y \in \mathbb{R}^n$, concluimos que existe $s \in (0,1)$ tal que

$$f(x + te_i - y) - f(x - y) = t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + ste_i - y). \tag{14.18}$$

De (14.16), (14.17) y (14.18) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)\right| |g(y)| \\
&\quad = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + ste_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)\right| \left|\left(g 1_{B^n(0,2r)}\right)(y)\right| < \varepsilon \left|\left(g 1_{B^n(0,2r)}\right)(y)\right|
\end{aligned}$$

para cualesquiera $0 < |t| < \delta$, $y \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(f * g)(x + te_i) - (f * g)(x)}{t} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g\right)(x)\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)\right) g(y)\,dy\right| \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)\right| |g(y)|\,dy \\
&\qquad < \varepsilon \int_{B^n(0,2r)} |g|.
\end{aligned}$$

para todo $0 < |t| < \delta$. Esto prueba que

$$\lim_{t \to 0} \frac{(f * g)(x + te_i) - (f * g)(x)}{t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g\right)(x),$$

es decir, que existe la derivada parcial de $f * g$ respecto a x_i en x y que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

Por la proposición anterior, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)$ es continua. $\square$

Corolario 14.39. *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^k$.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la afirmación se obtiene inductivamente aplicando la proposición anterior a las derivadas parciales de orden $k - 1$ de f. $\square$

Observa que

$$L^p(\Omega) \subset L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, p \in [1, \infty].$$

En efecto: si $g \in L^p(\Omega)$, entonces $g1_\omega \in L^p(\omega)$ para todo subconjunto abierto y acotado ω de $\mathbb{R}^n$ y la Proposición 14.31 asegura que $g1_\omega \in L^1(\omega)$.

Ahora veremos que $f * g$ hereda también las propiedades de integrabilidad de g.

Proposición 14.40. *Si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, \infty]$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p \, .$$

Demostración. Consideramos tres casos.

Caso 1: $p = \infty$.

En este caso la afirmación es evidente.

Caso 2: $p = 1$.

La función $h \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) := |f(x - y)g(y)|$ es medible ya que es el producto de la función continua $(x, y) \mapsto |f(x - y)|$ con la función $1 \odot |g| \in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^{2n})$ (ver Ejercicio 13.72) y ambas son funciones medibles (ver Ejemplo 14.8 y Proposición 14.13). Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, h es integrable respecto a x y

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x, y)dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \, dx = \|f\|_1 \, |g(y)| \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Más aún, $\|f\|_1 |g| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)dx\,dy = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1 . \tag{14.19}$$

El teorema de Tonelli (Teorema 14.17) asegura entonces que h es integrable en $\mathbb{R}^{2n}$. Observa que

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)dy.$$

Como h es integrable en $\mathbb{R}^{2n}$, el teorema de Fubini (13.17) garantiza que el lado derecho de esta desigualdad es integrable respecto a x y, dado que $f * g$ es medible (ver Proposición 14.37), ello implica que $f * g$ es integrable (ver Teorema 14.15). Más aún, usando (14.19) obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)dx\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1 .\end{aligned}$$

En consecuencia, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, como afirma el enunciado.

CASO 3: $p \in (1,\infty)$.

Sea $q := \frac{p}{p-1}$. De la desigualdad de Hölder (ver Proposición 14.21) se sigue que

$$\begin{aligned}|(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{1/q}\,|f(x-y)|^{1/p}\,|g(y)|\,dy \\ &\leq \|f\|_1^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \\ &= \|f\|_1^{1/q}\left[\left(|f| * |g|^p\right)(x)\right]^{1/p} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|(f * g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{p/q}\left(|f| * |g|^p\right)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando el caso $p = 1$ a las funciones $|f|$ y $|g|^p$ y el Teorema 14.15 concluimos que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p\,dx \leq \|f\|_1^{p/q}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|f| * |g|^p\right)(x)dx \leq \|f\|_1^{p/q}\,\|f\|_1\,\|g\|_p^p ,$$

es decir,

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p,$$

como afirma el enunciado. $\square$

Usaremos la convolución para aproximar a una función $f \in L^p(\Omega)$ mediante funciones suaves. Empezaremos eligiendo funciones $\rho_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuyo soporte se hace cada vez más pequeño conforme k crece.

Definición 14.41. *Una sucesión de funciones (ρ_k) se llama una **sucesión regularizante** si, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$\rho_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \rho_k \geq 0, \qquad \operatorname{sop}(\rho_k) \subset \bar{B}^n(0, 1/k), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1.$$

Ejemplo 14.42. *Sea*

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

y sea $c := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho\right)^{-1}$. Definimos

$$\rho_k(x) := ck^n \rho(kx).$$

Es sencillo comprobar que (ρ_k) es una sucesión regularizante [Ejercicio 14.76]. *Se le llama la **sucesión regularizante estándar**.*

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y (ρ_k) es una sucesión regularizante, entonces

$$\operatorname{sop}(\rho_k * f) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq \tfrac{1}{k}\right\},$$

pero $\operatorname{sop}(\rho_k * f)$ no está necesariamente contenido en Ω. Por ejemplo, si $f = 1_\Omega$ y (ρ_k) es la sucesión regularizante estándar, entonces

$$(\rho_k * 1_\Omega)(x) = \int_\Omega \rho_k(x - y)dy \begin{cases} > 0 & \text{si } \operatorname{dist}(x, \Omega) < \frac{1}{k}, \\ = 0 & \text{si } \operatorname{dist}(x, \Omega) \geq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\operatorname{sop}(\rho_k * 1_\Omega) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq \tfrac{1}{k}\right\}.$$

Nota sin embargo que, si $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, entonces $\mathrm{sop}(\rho_k * g) \subset \Omega$ para k suficientemente grande. Más aún, se cumple lo siguiente.

Lema 14.43. *Dadas $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ y una sucesión regularizante (ρ_k) existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_k * g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ para todo $k \geq k_0$ y*

$$\lim_{k\to\infty} \|g - (\rho_k * g)\|_p = 0 \qquad \forall\, p \in [1, \infty].$$

Demostración. Escogemos un abierto ω tal que $\mathrm{sop}(g) \subset \omega \subset\subset \Omega$. Como

$$\mathrm{sop}(\rho_k * g) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}(x, \mathrm{sop}(g)) \leq \tfrac{1}{k}\right\},$$

existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{sop}(\rho_k * g) \subset \omega$ para todo $k \geq k_0$, y del Corolario 14.39 se sigue que $\rho_k * g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ para todo $k \geq k_0$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $p \in [1, \infty)$. Como g es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x-y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{1/p}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|y\| < \delta.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, haciendo el cambio de variable $z := x - y$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(\rho_k * g)(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y) g(y)dy - g(x) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(z) g(x-z)dz - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(y) g(x)dy \\
&= \int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(y) \left(g(x-y) - g(x)\right) dy.
\end{aligned}$$

Por tanto, si $k \geq \frac{1}{\delta}$ se tiene que

$$|(\rho_k * g)(x) - g(x)| \leq \int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(y) \left|g(x-y) - g(x)\right| dy < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{1/p}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{14.20}$$

y para $k \geq \max\left\{k_0, \frac{1}{\delta}\right\} =: k_1$ se cumple que

$$\int_\Omega |(\rho_k * g) - g|^p = \int_\omega |(\rho_k * g) - g|^p < \frac{\varepsilon^p}{|\omega|} |\omega| = \varepsilon^p. \tag{14.21}$$

De las desigualdades (14.20) y (14.21) se obtienen respectivamente las desigualdades

$$\|(\rho_k * g) - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{1/p}} \qquad \text{y} \qquad \|(\rho_k * g) - g\|_p < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_1.$$

Esto demuestra la afirmación. □

Teorema 14.44. *$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$.*

Demostración. Sean $p \in [1,\infty)$, $f \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 14.33 existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tal que $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Si (ρ_k) es una sucesión regularizante, el Lema 14.43 asegura que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_k * g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ y $\|(\rho_k * g) - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, $\|(\rho_k * g) - f\|_p < \varepsilon$. $\square$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ se tiene un resultado más preciso.

Teorema 14.45. *Si $p \in [1,\infty)$ entonces, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y toda sucesión regularizante (ρ_k), se cumple que*

$$\rho_k * f \to f \qquad \text{en } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 14.33 existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, y por el Lema 14.43 existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(\rho_k * g) - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $k \geq k_0$. La Proposición 14.40 asegura entonces que

$$\|(\rho_k * f) - (\rho_k * g)\|_p = \|\rho_k * (f - g)\|_p \leq \|\rho_k\|_1 \|f - g\|_p = \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En consecuencia,

$$\|(\rho_k * f) - f\|_p \leq \|(\rho_k * f) - (\rho_k * g)\|_p + \|(\rho_k * g) - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon$$

para todo $k \geq k_0$. $\square$

14.4. Un criterio de compacidad en $L^p(\Omega)$

Sea $p \in [1,\infty)$. A continuación daremos condiciones suficientes para que un subconjunto $\mathcal{K}$ de $L^p(\Omega)$ sea compacto.

El siguiente resultado se conoce como el teorema de Fréchet-Kolmogorov[4]. Podemos pensar en él como la versión para espacios L^p del teorema de Arzelà-Ascoli, que se usa, por cierto, en su demostración.

Como antes, dados $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotamos por $\mathrm{T}_\xi f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la traslación de f por ξ, es decir,

$$\mathrm{T}_\xi f(x) := f(x - \xi).$$

[4] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) nació en Tambov, Rusia. Estudió en la Universidad Estatal de Moscú, donde fue alumno de Nikolai Luzin. Fue profesor en dicha universidad.

Andrey Kolmogorov

Teorema 14.46 (Fréchet-Kolmogorov)**.** *Sean* $p \in [1,\infty)$, Ω *y* ω *subconjuntos abiertos de* $\mathbb{R}^n$ *con* $\omega \subset\subset \Omega$ *y* $\mathcal{K}$ *un subconjunto acotado de* $L^p(\Omega)$ *con la siguiente propiedad: para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta \in (0, \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega))$ *tal que*

$$\left\| \mathrm{T}_\xi f - f \right\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|\xi\| < \delta \quad \text{y} \quad \forall f \in \mathcal{K}. \tag{14.22}$$

Entonces el conjunto $\mathcal{K}_\omega := \{f 1_\omega : f \in \mathcal{K}\}$ *es relativamente compacto en* $L^p(\omega)$.

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que Ω es acotado. Entonces $\mathcal{K}$ es un subconjunto acotado de $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p]$. Demostraremos el resultado en tres pasos.

AFIRMACIÓN 1: Sea $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces el conjunto $\mathcal{K}_{\rho,\omega} := \{(\rho * f)\, 1_{\overline{\omega}} : f \in \mathcal{K}\}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(\overline{\omega})$.

En efecto: como $\mathcal{K}$ es un subconjunto acotado de $L^1(\Omega)$, existe $C_0 > 0$ tal que

$$|(\rho * f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)|\,|f(y)|\,dy \leq \|\rho\|_\infty \|f\|_1 \leq C_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall f \in \mathcal{K}.$$

Además, como ρ es Lipschitz continua, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{K}$ se cumple que

$$\begin{aligned} |(\rho * f)(x_1) - (\rho * f)(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x_1 - y) - \rho(x_2 - y)|\,|f(y)|\,dy \\ &\leq C_1 \|x_1 - x_2\| \|f\|_1 \leq C_2 \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathcal{K}_{\rho,\omega}$ es un subconjunto acotado y equicontinuo de $\mathcal{C}^0(\overline{\omega})$. Como $\overline{\omega}$ es compacto, el teorema de Arzelà-Ascoli (ver Corolario 7.10) asegura que $\mathcal{K}_{\rho,\omega}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(\overline{\omega})$.

AFIRMACIÓN 2: Dados $\varepsilon > 0$ y una sucesión regularizante (ρ_k), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0 \quad \text{y} \quad \forall f \in \mathcal{K}.$$

En efecto: tomemos $\delta \in (0, \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega))$ tal que se cumple (14.22) y $k_0 > \frac{1}{\delta}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, haciendo el cambio de variable $z := x - y$ y aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos
$$\begin{aligned}
|(\rho_k * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y) f(y)\, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(z)\, dz \right| \\
&= \int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)\, |f(x-z) - f(x)|\, dz \\
&= \int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)^{\frac{p-1}{p}} (\rho_k(z)^{\frac{1}{p}}\, |f(x-z) - f(x)|)\, dz \\
&\leq \left(\int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)\, |f(x-z) - f(x)|^p\, dz \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Por tanto,
$$|(\rho_k * f)(x) - f(x)|^p \leq \int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)\, |f(x-z) - f(x)|^p\, dz. \tag{14.23}$$

A continuación usaremos los teoremas de Tonelli y Fubini (Teoremas 14.17 y 13.17) para probar que el lado derecho de esta desigualdad es integrable respecto a x. Observa que la función $h(x,z) := \rho_k(z)\, |f(x-z) - f(x)|^p\, 1_\omega(x)$ es medible en $\mathbb{R}^{2n}$. Además, es integrable respecto a x y la integral está dada por
$$H(z) = \rho_k(z) \int_\omega |f(x-z) - f(x)|^p\, dx = \rho_k(z)\, \|\mathrm{T}_z f - f\|_{L^p(\omega)}^p.$$

Como $H \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ [Ejercicio 14.77], el teorema de Tonelli asegura que h es integrable en $\mathbb{R}^{2n}$ y, de la desigualdad (14.23), el teorema de Fubini y la hipótesis (14.22) inferimos que, para todo $k \geq k_0$ y toda $f \in \mathcal{K}$,
$$\begin{aligned}
\int_\omega |(\rho_k * f)(x) - f(x)|^p\, dx &\leq \int_\omega \int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)\, |f(x-z) - f(x)|^p\, dz\, dx \\
&= \int_{B^n(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z) \int_\omega |f(x-z) - f(x)|^p\, dx\, dz < \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

AFIRMACIÓN 3: $\mathcal{K}_\omega$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$.

Por el Corolario 7.6 basta probar que $\mathcal{K}_\omega$ es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos una sucesión regularizante (ρ_k), fijamos $k_0 \in \mathbb{N}$ como en la Afirmación 2 y denotamos por $\rho := \rho_{k_0}$.

Como ω es acotado, la inclusión $\mathcal{C}^0(\overline{\omega}) \hookrightarrow L^p(\omega)$ es continua. De la Afirmación 1 se sigue que $\mathcal{K}_{\rho,\omega}$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. Por tanto, existen $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{K}$ tales que

$$\mathcal{K}_{\rho,\omega} \subset B_{L^p(\omega)}((\rho * g_1)\, 1_{\overline{\omega}}, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_{L^p(\omega)}((\rho * g_m)\, 1_{\overline{\omega}}, \varepsilon).$$

Es decir, para cada $f \in \mathcal{K}$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|\rho * f - \rho * g_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$. Usando la Afirmación 2 obtenemos

$$\begin{aligned} \|f - g_i\|_{L^p(\omega)} &\leq \|f - \rho * f\|_{L^p(\omega)} + \|\rho * f - \rho * g_i\|_{L^p(\omega)} \\ &\quad + \|\rho * g_i - g_i\|_{L^p(\omega)} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{K}_\omega \subset B_{L^p(\omega)}(g_1 1_\omega, 3\varepsilon) \cup \cdots \cup B_{L^p(\omega)}(g_m 1_\omega, 3\varepsilon).$$

Esto prueba que $\mathcal{K}_\omega$ es totalmente acotado en $L^p(\omega)$. $\square$

Corolario 14.47. *Sean $p \in [1, \infty)$, Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{K}$ un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$, con las siguientes propiedades:*

(i) Para cada $\varepsilon > 0$ y cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$ existe $\delta \in (0, \mathrm{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega))$ tal que

$$\left\|\mathrm{T}_\xi f - f\right\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|\xi\| < \delta \quad \text{y} \quad \forall f \in \mathcal{K}.$$

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $\omega \subset\subset \Omega$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega \smallsetminus \omega)} < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{K}.$$

Entonces $\mathcal{K}$ es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Probaremos que $\mathcal{K}$ es totalmente acotado. Dado $\varepsilon > 0$ escogemos un abierto $\omega \subset\subset \Omega$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega \smallsetminus \omega)} < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \forall f \in \mathcal{K}.$$

Por el Teorema 14.46, $\mathcal{K}_\omega := \{f 1_\omega : f \in \mathcal{K}\}$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. De modo que existen $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{K}$ tales que

$$\mathcal{K}_\omega \subset B_{L^p(\omega)}(g_1 1_\omega, \tfrac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup B_{L^p(\omega)}(g_m 1_\omega, \tfrac{\varepsilon}{3}).$$

Es decir, para cada $f \in \mathcal{K}$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|f - g_i\|_{L^p(\omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\|f - g_i\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f - f 1_\omega\|_{L^p(\Omega)} + \|f 1_\omega - g_i 1_\omega\|_{L^p(\Omega)} + \|g_i 1_\omega - g_i\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|f\|_{L^p(\Omega \smallsetminus \omega)} + \|f - g_i\|_{L^p(\omega)} + \|g_i\|_{L^p(\Omega \smallsetminus \omega)} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\mathcal{K} \subset B_{L^p(\Omega)}(g_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_{L^p(\Omega)}(g_m, \varepsilon),$$

así que $\mathcal{K}$ es totalmente acotado. Por el Corolario 7.6, $\mathcal{K}$ es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$. □

14.5. Un criterio de nulidad

Concluimos este capítulo dando un criterio de nulidad para funciones en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ que usaremos más adelante. Requerimos el siguente lema.

Lema 14.48. *Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$. Entonces existe $\zeta \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta(x) = 1$ para todo $x \in K$ y $\zeta(x) = 0$ si* $\mathrm{dist}(x, K) \geq \delta$.

Demostración. Sean

$$X := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) \leq \tfrac{\delta}{3}\right\}, \qquad Y := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) \geq \tfrac{2\delta}{3}\right\}.$$

La función

$$f(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, Y)}{\mathrm{dist}(x, Y) + \mathrm{dist}(x, X)}$$

está bien definida, es continua (ver Ejercicio 3.52) y satisface que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = 1$ si $x \in X$ y $f(x) = 0$ si $x \in Y$.

Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{3}$ y $\rho_k \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_k \geq 0$, $\mathrm{sop}(\rho_k) \subset B^n(0, \frac{1}{k})$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1$. Es sencillo comprobar que la función $\zeta := \rho_k * f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tiene las propiedades deseadas. □

Proposición 14.49. *Si* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *cumple que*

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega),$$

entonces $f = 0$ *c.d. en* Ω.

Demostración. Consideramos dos casos.

CASO 1: $f \in L^1(\Omega)$ y $|\Omega| < \infty$.

Dada $\varepsilon > 0$ escogemos $g \in \mathcal{C}^0_c(\Omega)$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ (ver Proposición 14.33). Entonces, para toda $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$,

$$\int_\Omega g\varphi = \int_\Omega g\varphi - \int_\Omega f\varphi \leq \int_\Omega |g - f|\,|\varphi| \leq \|f - g\|_1 \|\varphi\|_\infty < \varepsilon \|\varphi\|_\infty .$$

Sean $K_1 := \{x \in \Omega : g(x) \geq \varepsilon\}$ y $K_2 := \{x \in \Omega : g(x) \leq -\varepsilon\}$. Como g es continua, K_1 y K_2 son cerrados. Dado que $K_1 \cup K_2 \subset \mathrm{sop}(g)$, se tiene que K_1 y K_2 son compactos. Por tanto, $\mathrm{dist}(K_1, K_2) > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \mathrm{dist}(K_1, K_2)$ y

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}(x, K_1 \cup K_2) \leq \delta\} \subset \Omega.$$

Por el Lema 14.48 existen $\zeta_i \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tales que $0 \leq \zeta_i(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta_i(x) = 1$ si $x \in K_i$ y $\zeta_i(x) = 0$ si $\mathrm{dist}(x, K_i) \geq \delta$, $i = 1, 2$. Definimos $\varphi := \zeta_1 - \zeta_2$. Entonces $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ y satisface

$$-1 \leq \varphi(x) \leq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x) = 1 \ \ \forall x \in K_1, \qquad \varphi(x) = -1 \ \ \forall x \in K_2.$$

Para esta función φ y $K := K_1 \cup K_2$ se cumple que

$$\int_K |g| = \int_K g\varphi = \int_\Omega g\varphi - \int_{\Omega \smallsetminus K} g\varphi \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty + \int_{\Omega \smallsetminus K} |g\varphi| < \varepsilon + \int_{\Omega \smallsetminus K} |g| .$$

Dado que $|g(x)| < \varepsilon$ para $x \in \Omega \smallsetminus K$, obtenemos

$$\int_\Omega |g| = \int_K |g| + \int_{\Omega \smallsetminus K} |g| < \varepsilon + 2\int_{\Omega \smallsetminus K} |g| \leq \varepsilon + 2\,|\Omega|\,\varepsilon.$$

En consecuencia,

$$\|f\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g\|_1 \leq 2(1 + |\Omega|)\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Por tanto, $f = 0$ c.d. en Ω.

CASO 2: $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $|\Omega|$ arbitrario.
Sea
$$\Omega_k := \left\{x \in \Omega : \|x\| < k,\ \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \tfrac{1}{k}\right\}.$$
Como Ω_k es abierto y acotado y $f 1_{\Omega_k} \in L^1(\Omega_k)$, aplicando el Caso 1 concluimos que $f = 0$ c.d. en Ω_k. Por tanto, $f = 0$ c.d. en $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. □

14.6. Ejercicios

Ejercicio 14.50. *Si Ω es abierto en $\mathbb{R}^n$, prueba que la medida $|\Omega|$ de la* Definición 14.1 *coincide con el volumen* $\mathrm{vol}_n(\Omega)$ *de la* Definición 12.19.

Ejercicio 14.51. *Prueba que si X es medible y $|X| = 0$ entonces X es un conjunto nulo.*

Ejercicio 14.52. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) Si X es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ entonces $X+\xi := \{x + \xi : x \in X\}$ es medible y $|X + \xi| = |X|$.

(b) Si X y Y son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ y $Y \subset X$, entonces $|Y| \leq |X|$.

(c) Si $X_1 \subset \cdots \subset X_k \subset X_{k+1} \subset \cdots$ es una sucesión de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ es medible y
$$\left|\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right| = \lim_{j\to\infty} |X_j|.$$

(d) Si $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ es medible y
$$\left|\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |X_j|.$$
Si además $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces
$$\left|\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right| = \sum_{j=1}^{\infty} |X_j|.$$

(e) Si $X_1 \supset \cdots \supset X_k \supset X_{k+1} \supset \cdots$ *es una sucesión de subconjuntos medibles de* $\mathbb{R}^n$ *y* $|X_1| < \infty$*, entonces* $\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$ *es medible y*

$$\left|\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j\right| = \lim_{j\to\infty} \left|X_j\right|.$$

Ejercicio 14.53. *Prueba que, si* X *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^m$ *y* Y *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $X \times Y$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^{m+n}$*.*

Ejercicio 14.54. *Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y demuestra tu afirmación.*

(a) Toda función medible pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*.*

(b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *es medible, entonces* $f(x) \in \mathbb{R}$ *p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Ejercicio 14.55. *Prueba que, si* $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *es una sucesión de funciones medibles, entonces las funciones*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \qquad \limsup_{k\to\infty} f_k, \qquad \liminf_{k\to\infty} f_k,$$

son medibles.

Ejercicio 14.56. *Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *es medible.*

(b) $f^{\geq a} := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\}$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

(c) $f^{<a} := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < a\}$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

(d) $f^{\leq a} := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq a\}$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

(e) $f^{>a} := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

Ejercicio 14.57. *Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es medible, demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si U *es abierto en* $\mathbb{R}$*, entonces* $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in U\}$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^n$*.*

(b) Si C *es cerrado en* $\mathbb{R}$*, entonces* $f^{-1}(C) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in C\}$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^n$*.*

Ejercicio 14.58. *Prueba que, si* $f_1, \ldots, f_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *son medibles y* $\varphi \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces la función* $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) := \varphi(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

es medible.

Ejercicio 14.59. *Prueba que, si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es medible, entonces la función*

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) = 0, \end{cases}$$

es medible.

Ejercicio 14.60. *Prueba que, para todo* $\gamma \in \mathbb{R}$, *la función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^\gamma & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es medible.

Ejercicio 14.61. *Prueba que, si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *es medible y* $f \geq 0$, *entonces*

$$\int^* f = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_{[k]}.$$

Ejercicio 14.62. *Prueba que, si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *es medible,* $f \geq 0$ *y* $1 \leq m < n$, *entonces*

(a) la función $f^y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *es medible p.c.t.* $y \in \mathbb{R}^{n-m}$,

(b) la función $F : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *dada por*

$$F(y) := \int^* f^y$$

es medible y

$$\int^* f = \int^* F.$$

Ejercicio 14.63. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *da un ejemplo de un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *que no sea medible.*

Ejercicio 14.64 (Teorema de Egorov)**.** *Sean X un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ tal que $|X| < \infty$ y $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles tales que $f_k(x) \to f(x)$ p.c.t. $x \in X$. Prueba que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto medible $Y \subset X$ tal que*

(a) $|X \smallsetminus Y| < \varepsilon$,

(b) (f_k) *converge a f uniformemente en Y.*

(Sugerencia: Considera los conjuntos

$$Y_{m,k} := \bigcup_{j=k}^{\infty} \left\{ x \in X : \left| f_j(x) - f(x) \right| \geq \frac{1}{2^m} \right\}.$$

Usando el Ejercicio 14.52 prueba que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $\left| Y_{m,k_m} \right| < \frac{\varepsilon}{2^m}$. Demuestra que $Y := X \smallsetminus \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_{m,k_m}$ tiene las propiedades deseadas.)

Ejercicio 14.65. *Prueba que el espacio*

$$\mathcal{C}_b^0(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada} \}$$

está contenido en $L^\infty(\Omega)$ y que la norma inducida por $\|\cdot\|_\infty$ coincide con la definida en (5.5)*, es decir,*

$$\text{ínf}\, \{ c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c \text{ p.c.t. } x \in \Omega \} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \qquad \forall f \in \mathcal{C}_b^0(\Omega).$$

Ejercicio 14.66. *Sea ω un subconjunto abierto de Ω y $p \in [1, \infty]$. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $f \in L^p(\Omega)$, entonces $f 1_\omega \in L^p(\omega)$ y

$$\| f 1_\omega \|_{L^p(\omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)}.$$

(b) Si $f \in L^p(\Omega)$ y X es un subconjunto medible de Ω con $|X| < \infty$, entonces $f 1_X \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, p]$ y

$$\| f 1_X \|_{L^r(\Omega)} \leq |X|^{\frac{p-r}{rp}} \| f \|_{L^p(\Omega)}.$$

(c) Si $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$ y $|\omega| < \infty$, entonces $f_k 1_\omega \to f 1_\omega$ en $L^r(\omega)$ para todo $r \in [1, p]$.

Ejercicio 14.67 (Desigualdad de interpolación)**.** *Sean* $1 \leq p < s < r \leq \infty$. *Prueba que, si* $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, *entonces* $f \in L^s(\Omega)$ *y se cumple que*

$$\|f\|_s \leq \|f\|_p^{1-\alpha} \, \|f\|_r^{\alpha},$$

donde $\alpha \in (0,1)$ *satisface que* $\frac{1}{s} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{r}$ *si* $r < \infty$ *y* $\alpha := 1 - \frac{p}{s}$ *si* $r = \infty$.

Ejercicio 14.68 (Desigualdad de Hölder generalizada)**.** *Sean* $r, p_1, \ldots, p_m \in [1,\infty)$ *tales que* $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r}$. *Prueba que para cualesquiera* $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$, $1 \leq j \leq m$, *se cumple que* $\prod_{j=1}^m f_j \in L^r(\Omega)$ *y*

$$\left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_r \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}.$$

Ejercicio 14.69. *Prueba que,si* $|\Omega| < \infty$ *y* $f \in L^\infty(\Omega)$, *entonces*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} |\Omega|^{-1/p} \|f\|_p.$$

Ejercicio 14.70. *Si* $f = (f_1, \ldots, f_m)$ *y* $f_1, \ldots, f_m \in L^s(\Omega)$ *definimos*

$$\|f\|_s := \left(\|f_1\|_s^s + \cdots + \|f_m\|_s^s \right)^{1/s}.$$

Prueba que, si $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p < s \leq \infty$ *y* $f_1, \ldots, f_m \in L^s(\Omega)$, *entonces*

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq (m\,|\Omega|)^{(s-p)/sp} \|f\|_s && \text{si } s \in [1,\infty), \\ \|f\|_p &\leq (m\,|\Omega|)^{1/p} \|f\|_\infty && \text{si } s = \infty. \end{aligned}$$

(Sugerencia: Usa la Proposición 14.31 y el Ejercicio 2.42.)

Ejercicio 14.71. *Sea* $f_k \colon (0,1) \to \mathbb{R}$ *la función* $f_k(x) := \operatorname{sen}^k(k\pi x)$.

(a) Prueba que $f_k \in L^p(0,1)$ *para todo* $p \in [1,\infty]$.

(b) Prueba que $f_k \to 0$ *en* $L^p(0,1)$ *para todo* $p \in [1,\infty)$.

(c) ¿Converge la sucesión (f_k) *en* $L^\infty(0,1)$*?*

Ejercicio 14.72. *Sea* $p \in [1,\infty]$. *¿Es cierto que para toda sucesión* (f_k) *en* $L^p(\Omega)$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_p = \|f\|_p$ *se cumple que* $f_k \to f$ *en* $L^p(\Omega)$*?*

Ejercicio 14.73. *Sea $p \in [1,\infty)$. Prueba que, dada $\varepsilon > 0$, existe una constante $C > 0$, que depende sólo de ε y de p, tal que*

$$\left||a+b|^p - |a|^p\right| \leqq \varepsilon\,|a|^p + C\,|b|^p \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 14.74 (Lema de Brezis-Lieb)**.** *Sea $p \in [1,\infty)$ y sea (f_k) una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$ tal que $f_k(x) \to f(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$. Prueba que*

$$\lim_{k\to\infty}\left(|f_k|_p^p - |f_k - f|_p^p\right) = |f|_p^p\,,$$

siguiendo los pasos que se indican a continuación:

(i) Prueba que $f \in L^p(\Omega)$.

(ii) Dada $\varepsilon > 0$ definimos

$$g_k := \left||f_k|^p - |f_k - f|^p - |f|^p\right| - \varepsilon\,|f_k - f|^p\,.$$

Usando el Ejercicio 14.73 *prueba que existe $C > 0$ tal que*

$$g_k(x) \leq (C+1)|f(x)|^p \qquad \forall x \in \Omega \;\; y \;\; \forall k \in \mathbb{N}.$$

(iii) Sea $g_k^+ := \text{máx}\{g_k, 0\}$. Prueba que

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k^+ = 0.$$

(iv) Prueba que existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\int_\Omega \left||f_k|^p - |f_k - f|^p - |f|^p\right| \leqq \widetilde{C}\varepsilon + \int_\Omega g_k^+ \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(v) Concluye que

$$\lim_{k\to\infty}\left(|f_k|_p^p - |f_k - f|_p^p - |f|_p^p\right) = 0.$$

Ejercicio 14.75. *Sean $p,q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dado $g \in L^q(\Omega)$ definimos*

$$\eta_g\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \eta_g(f) := \int_\Omega fg.$$

(a) Prueba que η_g es lineal y continua.

(b) Considera el espacio

$$\mathcal{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R}) := \{f : L^p(\Omega) \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

con la norma definida en (9.1). *Prueba que la función*

$$\Phi : L^q(\Omega) \to \mathcal{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R}), \qquad \Phi(g) := \eta_g,$$

es lineal, y que es una isometría, es decir,

$$\left\|\eta_g\right\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R})} = \|g\|_q \qquad \forall g \in L^q(\Omega).$$

En particular, Φ es continua e inyectiva[5].

Ejercicio 14.76. *Demuestra que la sucesión del* Ejemplo 14.42 *es una sucesión regularizante.*

Ejercicio 14.77. *Prueba que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1,\infty)$, la función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(z) := \|\mathrm{T}_z f - f\|_p$$

es continua, donde $\mathrm{T}_z f$ es la traslación de f por z.

Ejercicio 14.78. *Demuestra los siguentes resultados a partir del* Teorema 14.44 *(sin usar la* Proposición 14.49*).*

(a) Si $f \in L^2(\Omega)$ satisface que

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

entonces $f = 0$ c.d. en Ω.

(b) Si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

entonces $f = 0$ en Ω.

[5] De hecho, Φ es también suprayectiva, lo que permite identificar a $\mathcal{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R})$ con $L^{p/(p-1)}(\Omega)$. A este resultado se le conoce como el *teorema de representación de Riesz*. Consulta, por ejemplo, [Bré84], Teorema IV.11.

Ejercicio 14.79 (Convolución de funciones integrables)**.** *Sean* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) *Prueba que la función* $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ *pertenece a* $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. (Sugerencia: Usa el Teorema 14.17.)

(b) *Prueba que existe un subconjunto nulo* Z *de* $\mathbb{R}^n$ *tal que la función* $y \mapsto f(x-y)g(y)$ *es integrable para todo* $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z$. (Sugerencia: Aplica el Teorema 13.17.)

(c) *Definimos la* ***convolución de*** f ***y*** g *como*

$$(f * g)(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus Z, \\ 0 & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Prueba que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y que*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 \, .$$

(d) *Prueba que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y)dx\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right).$$

(e) *Prueba que*

$$f * g = g * f.$$

15

Espacios de Hilbert

Entre los espacios de Banach tienen especial importancia aquéllos cuya norma está inducida por un producto escalar. Se llaman *espacios de Hilbert* y son la extensión más natural del espacio euclidiano a dimensión infinita. Los conceptos y resultados de la geometría euclidiana se generalizan de manera natural a estos espacios: allí vale el teorema de Pitágoras y la ley del paralelogramo, y podemos definir la proyección ortogonal sobre un subespacio y su complemento ortogonal siempre y cuando dicho subespacio sea cerrado.

La existencia de la proyección ortogonal tiene una consecuencia bien importante: tal y como ocurre en $\mathbb{R}^n$, en un espacio de Hilbert H cualquier función lineal y continua $\eta\colon H \to \mathbb{R}$ se puede expresar como el producto escalar por un elemento u_0 de H, es decir,

$$\eta u = \langle u_0, u \rangle \qquad \forall u \in H.$$

A este resultado se le conoce como el teorema de representación de Fréchet-Riesz y tiene aplicaciones muy importantes (ver Teorema 16.29).

Los espacios de Hilbert son el ambiente natural para muchas aplicaciones. Veremos en los próximos capítulos que la existencia de soluciones a ciertas ecuaciones en derivadas parciales se puede plantear en términos de la existencia del mínimo de un funcional sobre un hiperplano o sobre una esfera en un espacio de Hilbert. Dichos subconjuntos no son compactos, por lo que el problema de minimización no resulta trivial.

En este capítulo introduciremos una nueva noción de convergencia, llamada *convergencia débil*, que, a diferencia de la convergencia usual, tiene la propiedad de que cualquier sucesión acotada contiene una subsucesión convergente en el sentido débil. Este concepto es muy útil para abordar problemas de minimización ya que proporciona un candidato para el mínimo: el límite débil de una sucesión minimizante. Resta probar, en cada situación concreta, que éste es efectivamente el mínimo que buscamos. Daremos aplicaciones importantes de este método en los próximos capítulos.

15.1. Conceptos y propiedades básicas

Comencemos recordando el concepto de producto escalar y sus propiedades básicas.

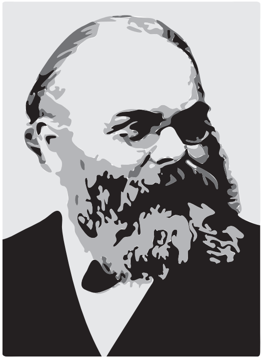
Definición 15.1. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un* ***producto escalar*** *en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

(PE1) $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ *para cualesquiera* $v_1, v_2, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(PE2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ *para cualesquiera* $v, w \in V$.

(PE3) $\langle v, v \rangle > 0$ *para todo* $v \in V$, $v \neq 0$.

Definimos
$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}. \tag{15.1}$$



Hermann Schwarz

Proposición 15.2. *Se cumplen las siguientes relaciones.*

(a) Desigualdad de Cauchy-Schwarz[1]*:*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \qquad \forall v, w \in V.$$

(b) Desigualdad del triángulo:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall v, w \in V.$$

[1] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) nació en Hermsdorf, Silesia, entonces parte de Prusia y hoy de Polonia. Estudió en Berlín, donde fue alumno de Ernst Kummer y Karl Weierstrass. Fue profesor en la Universidad de Göttingen.

(c) Identidad del paralelogramo:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \qquad \forall v, w \in V.$$

Demostración. (a): Para cualesquiera $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple

$$0 \leq \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle = \|v\|^2 + 2\lambda \langle v, w \rangle + \lambda^2 \|w\|^2 .$$

Si $w \neq 0$, tomando $\lambda := -\frac{\langle v,w \rangle}{\|w\|^2}$ obtenemos

$$0 \leq \|v\|^2 - 2\frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2}.$$

Multiplicando esta desigualdad por $\|w\|^2$ concluimos que

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 ,$$

y sacando raíz cuadrada obtenemos la desigualdad deseada. Nota que ésta se satisface trivialmente si $w = 0$.

(b): Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 . \end{aligned}$$

Sacando raíz cuadrada obtenemos la desigualdad del triángulo.

(c) se obtiene mediante un cálculo directo. Proponemos su demostración como ejercicio [Ejercicio 15.34]. □

Las desigualdades anteriores tienen las siguientes consecuencias.

Proposición 15.3. $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ *es una norma en* V.

Demostración. La desigualdad del triángulo se probó en la Proposición 15.2. Las otras propiedades son consecuencia inmediata de la definición del producto escalar. □

La norma (15.1) se llama la **norma inducida por el producto escalar** $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un cálculo sencillo muestra que el producto escalar se expresa en términos de la norma inducida como sigue:

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \right) \qquad \forall v, w \in V. \tag{15.2}$$

Proposición 15.4 (Continuidad del producto escalar)**.** *Si $w_k \to w$ en V, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \langle v, w_k\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \forall v \in V.$$

Demostración. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$|\langle v, w\rangle - \langle v, w_k\rangle| = |\langle v, w - w_k\rangle| \leq \|v\| \, \|w - w_k\| \, ,$$

para cualesquiera $v, w, w_k \in V$. En consecuencia, $\langle v, w_k\rangle \to \langle v, w\rangle$ si $w_k \to w$. □

David Hilbert

Definición 15.5. *Un* ***espacio de Hilbert***[2] *es un espacio vectorial H con un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que es completo respecto a la norma inducida* (15.1)*.*

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 15.6. *(a) $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar usual*

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \; y = (y_1, \ldots, y_n).$$

(b) El espacio ℓ_2 de todas las sucesiones $\overline{x} = (x_k)$ de números reales tales que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$converge, con el producto escalar

$$\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle_{\ell_2} := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \qquad \overline{x} = (x_k), \; \overline{y} = (y_k) \in \ell_2, \tag{15.3}$$

es un espacio de Hilbert.

[2] David Hilbert (1862-1943) nació en Königsberg en la provincia de Prusia, hoy parte de Rusia. Estudió en la Universidad de Königsberg y fue profesor en la Universidad de Göttingen. Es reconocido como uno de los matemáticos más universales e influyentes del siglo XIX y principios del XX.

(c) *Para cualquier abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, el espacio $L^2(\Omega)$ con el producto escalar*

$$\langle f, g\rangle_2 := \int_\Omega fg, \qquad f, g \in L^2(\Omega), \tag{15.4}$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración. *(a)* es bien conocido.

(b): La convergencia de la serie (15.3) se sigue de la desigualdad de Hölder para series con $p = 2$ (ver Ejercicio 2.43). Es sencillo comprobar que (15.3) es un producto escalar que induce la norma de ℓ_2. Sabemos que este espacio es completo (ver Ejercicio 5.33).

(c): La desigualdad de Hölder (ver Proposición 14.21) implica que fg es integrable si $f, g \in L^2(\Omega)$. Es sencillo comprobar que (15.4) es un producto escalar que induce la norma de $L^2(\Omega)$. Sabemos que este espacio es completo (ver Teorema 14.27). □

Ejemplo 15.7 (Suma directa de espacios de Hilbert)**.** *Si H_i es un espacio vectorial con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$, $i = 1, 2$, entonces*

$$\langle(v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle_{H_1\oplus H_2} := \langle v_1, w_1\rangle_1 + \langle v_2, w_2\rangle_2\,, \quad v_1, w_1 \in H_1, \ \ v_2, w_2 \in H_2,$$

es un producto escalar en la suma directa $H_1 \oplus H_2$. Si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert, entonces $H_1 \oplus H_2$ es un espacio de Hilbert.

Demostración. Es sencillo comprobar que éste es un producto escalar en $H_1 \oplus H_2$. La norma inducida es

$$\|(v_1, v_2)\| = \sqrt{\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2}.$$

En consecuencia, $H_1 \oplus H_2$ es un espacio de Hilbert si H_1 y H_2 lo son (ver Ejercicio 5.37). □

No cualquier subespacio vectorial de un espacio de Hilbert resulta ser un espacio de Hilbert. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 15.8. *$\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ con el producto escalar de $L^2(\Omega)$ no es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega) \smallsetminus \mathcal{C}_c^0(\Omega)$. Por la Proposición 14.33, existe una sucesión (g_k) en $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tal que $g_k \to f$ en $L^2(\Omega)$. Entonces, la sucesión (g_k) es de Cauchy pero no converge en $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$. □

Recuerda que un subespacio A de un espacio métrico completo X es completo si y sólo si A es cerrado en X (ver Proposición 5.9), de modo que se tiene lo siguiente.

Proposición 15.9. *Un subespacio vectorial V de un espacio de Hilbert H es un espacio de Hilbert si y sólo si V es cerrado en H.*

15.2. Complemento ortogonal

Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definición 15.10. *Si V es un subespacio vectorial de H, el* ***espacio ortogonal a V en H*** *se define como*

$$V^{\perp} := \{w \in H : \langle v, w\rangle = 0 \ \ \forall v \in V\}.$$

Es claro que $V^{\perp}$ es un subespacio vectorial de H. Nota que $V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ pero, a diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^n$, no necesariamente se cumple que $V = (V^{\perp})^{\perp}$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.11. *El espacio ortogonal a $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es $\{0\}$.*

Demostración. Si $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)^{\perp}$ se cumple que

$$\int_{\Omega} f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega).$$

La Proposición 14.49 asegura entonces que $f = 0$ en $L^2(\Omega)$. □

La siguiente afirmación implica que una condición necesaria para que $V = (V^{\perp})^{\perp}$ es que V sea cerrado en H. De hecho, esta condición también es suficiente [Ejercicio 15.39].

Proposición 15.12. *$V^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H.*

Demostración. Si (w_k) es una sucesión en $V^{\perp}$ que converge a w en H, entonces

$$\langle v, w\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle v, w_k\rangle = 0 \qquad \forall v \in V$$

(ver Proposición 15.4). Por tanto, $w \in V^{\perp}$. Esto prueba que $V^{\perp}$ es cerrado en H. □

El espacio ortogonal se puede describir del siguiente modo.

Proposición 15.13. *Sean V un subespacio vectorial de H y $w \in H$. Entonces*

$$w \in V^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \|w\| = \inf_{v\in V} \|w - v\|.$$

Demostración. $\Rightarrow$): Si $w \in V^{\perp}$ entonces $\|w - v\|^2 = \|w\|^2 + \|v\|^2$ para todo $v \in V$. En consecuencia, $\|w\| \leq \|w - v\|$ y, como $\|w\| = \|w - 0\| \geq \inf_{v\in V} \|w - v\|$, concluimos que

$$\|w\| = \inf_{v\in V} \|w - v\|.$$

$\Leftarrow$): Supongamos ahora que $\|w\| = \text{ínf}_{v\in V} \|w - v\|$. Para cada $v \in V$ con $\|v\| = 1$ definimos $f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_v(t) := \|w - tv\|^2 = \|w\|^2 - 2\langle w, v\rangle t + t^2.$$

Esta función es diferenciable y $t_v := \langle w, v\rangle$ es el único punto crítico de f_v. Por hipótesis, se tiene que

$$f_v(0) = \|w\|^2 \leq \underset{t\in\mathbb{R}}{\text{ínf}} \|w - tv\|^2 = \underset{t\in\mathbb{R}}{\text{ínf}} f_v(t).$$

Es decir, 0 es un mínimo de f_v. En consecuencia, $0 = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in V$. $\square$

Probaremos ahora que, si V es cerrado, el ínfimo se alcanza y es único.

Proposición 15.14. *Sea V un subespacio vectorial cerrado de H. Entonces, para cada $u \in H$, existe un único $v \in V$ tal que*

$$\|u - v\| = \underset{w\in V}{\text{ínf}} \|u - w\|. \tag{15.5}$$

Demostración. Sea $u \in H$. Denotemos por

$$d := \underset{w\in V}{\text{ínf}} \|u - w\|.$$

Observa que para cualesquiera $w, \tilde{w} \in V$ se cumple que

$$\|w + \tilde{w} - 2u\| = 2\left\|\frac{w + \tilde{w}}{2} - u\right\| \geq 2d, \tag{15.6}$$

ya que $\frac{1}{2}(w + \tilde{w}) \in V$. Tomemos una sucesión (v_k) en V tal que $\text{lím}_{k\to\infty} \|u - v_k\| = d$. Dada $\varepsilon > 0$ elegimos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u - v_k\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall k \geq k_0.$$

Aplicando la identidad del paralelogramo y la desigualdad (15.6) obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|v_j - v_k\right\|^2 &= \left\|(v_j - u) + (u - v_k)\right\|^2 \\ &= 2\left(\|u - v_k\|^2 + \left\|u - v_j\right\|^2\right) - \left\|(v_j - u) - (u - v_k)\right\|^2 \\ &< 4d^2 + \varepsilon - 4d^2 = \varepsilon \qquad \text{si } j, k \geq k_0.\end{aligned}$$

Esto prueba que (v_k) es una sucesión de Cauchy en V. Dado que V es de Hilbert (ver Proposición 15.9), existe $v \in V$ tal que $v_k \to v$ en H. En consecuencia,

$$\|u - v\| = \lim_{k\to\infty} \|u - v_k\| = d.$$

Probaremos ahora que v es único. Si $\tilde{v} \in V$ cumple que $\|\tilde{v} - u\| = d$ entonces, aplicando de nuevo la identidad del paralelogramo y la desigualdad (15.6) obtenemos

$$\|v - \tilde{v}\|^2 = 2(\|v - u\|^2 + \|\tilde{v} - u\|^2) - \|v + \tilde{v} - 2u\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

Por tanto, $\tilde{v} = v$. □

Definición 15.15. *Sea V un subespacio vectorial cerrado de H. La* ***proyección ortogonal de H sobre V*** *es la función*

$$P_V : H \to V$$

que a cada $u \in H$ le asocia el único elemento $P_V u$ de V tal que

$$\|u - P_V u\| = \inf_{w\in V} \|u - w\|.$$

Las proposiciones anteriores proporcionan la siguiente caracterización de la proyección ortogonal.

Corolario 15.16. *Si V es un subespacio cerrado de H y $u \in H$, entonces $P_V u$ es el único elemento de V tal que*

$$u - P_V u \in V^\perp.$$

Demostración. Si $v \in V$ la Proposición 15.13 asegura que

$$u - v \in V^\perp \iff \|u - v\| = \inf_{w\in V} \|u - v - w\| = \inf_{z\in V} \|u - z\|.$$

De la Proposición 15.14 se sigue que tal v existe y es única y, por definición, $v = P_V u$. □

El Ejemplo 15.11 muestra que la suma directa de V y $V^\perp$ no necesariamente es todo H. Probaremos a continuación que $V \oplus V^\perp$ coincide con H si V es cerrado. En este caso el espacio $V^\perp$ se llama el **complemento ortogonal de V en H**.

En lo que sigue $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H,V)}$ denota a la norma definida en (9.1).

Teorema 15.17 (Complemento ortogonal)**.** *Sea V un subespacio vectorial cerrado de H. Se cumple lo siguiente:*

(a) La proyección ortogonal $P_V : H \to V$ es la única función lineal de H en V que cumple:

(a.1) $P_V \circ P_V = P_V$,

(a.2) $\ker P_V = V^\perp$.

(b) P_V es continua y $\|P_V\|_{\mathcal{L}(H,V)} = 1$ si $V \neq \{0\}$.

(c) La función $\iota : V \oplus V^\perp \to H$ dada por $\iota(v, w) := v + w$ es un isomorfismo lineal y una isometría.

Demostración. (a): Probaremos primero que P_V es lineal. Sean $u, \tilde{u} \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lambda P_V u + \mu P_V \tilde{u} \in V$ y

$$\lambda u + \mu\tilde{u} - (\lambda P_V u + \mu P_V \tilde{u}) = \lambda (u - P_V u) + \mu (\tilde{u} - P_V \tilde{u}) \in V^\perp.$$

Del Corolario 15.16 se sigue que $P_V (\lambda u + \mu\tilde{u}) = \lambda P_V u + \mu P_V \tilde{u}$.

El Corolario 15.16 implica además que $P_V v = v$ para todo $v \in V$. En consecuencia, $P_V(P_V u) = P_V u$ para todo $u \in H$, es decir, P_V satisface *(a.1)*. La afirmación *(a.2)* es consecuencia inmediata del mismo corolario.

Si $T : H \to V$ es una función lineal que satisface *(a.1)* entonces, para todo $u \in H$, se cumple que $T(u - Tu) = 0$. Si además T satisface *(a.2)*, entonces $u - Tu \in V^\perp$ y el Corolario 15.16 asegura que $Tu = P_V u$. Esto demuestra la unicidad.

(b): Dado que $u = P_V u + (u - P_V u)$ y $\langle u - P_V u, P_V u \rangle = 0$, se tiene que

$$\|u\|^2 = \|P_V u\|^2 + \|u - P_V u\|^2 . \tag{15.7}$$

En particular,

$$\|P_V u\| \leq \|u\| \qquad \forall u \in H,$$

lo que implica que P_V es continua y, además, que

$$\|P_V\|_{\mathcal{L}(H,V)} := \sup_{u \in H \smallsetminus \{0\}} \frac{\|P_V u\|}{\|u\|} \leq 1.$$

Por otra parte, si $v \in V$ y $v \neq 0$, entonces $P_V v = v$ y

$$\frac{\|P_V v\|}{\|v\|} = 1.$$

Concluimos que $\|P_V\|_{\mathcal{L}(H,V)} = 1$.

(c): La función $\iota\colon V \oplus V^{\perp} \to H$ dada por $\iota(v,w) := v + w$ es claramente lineal y la función

$$H \to V \oplus V^{\perp}, \qquad u \mapsto (P_V u,\ u - P_V u),$$

es su inverso. De modo que ι es un isomorfismo de espacios vectoriales. La identidad (15.7) prueba que ι es una isometría para la métrica de $V \oplus V^{\perp}$ definida en el Ejemplo 15.7. □

15.3. El teorema de representación de Fréchet-Riesz

El objetivo de esta sección es describir al espacio $\mathcal{L}(H,\mathbb{R})$ de las funciones lineales y continuas de un espacio de Hilbert H a $\mathbb{R}$ (ver sección 9.1). A este espacio se le llama el **dual topológico de** H.

Proposición 15.18. *Para cada $w \in H$ la función*

$$T_w\colon H \to \mathbb{R}, \qquad T_w u := \langle w, u \rangle\,,$$

es lineal y continua y cumple que

$$\|T_w\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} = \|w\|\,. \tag{15.8}$$

Demostración. Las propiedades (PE1) y (PE2) aseguran que T_w es lineal y la Proposición 15.4 asegura que T_w es continua. Si $w = 0$ entonces (15.8) se satisface trivialmente. Si $w \neq 0$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\|w\| = \frac{|T_w w|}{\|w\|} \leq \sup_{u \in H\smallsetminus\{0\}} \frac{|T_w u|}{\|u\|} \leq \sup_{u \in H\smallsetminus\{0\}} \frac{\|w\|\,\|u\|}{\|u\|} = \|w\|\,.$$

Esto prueba que $\|w\| = \|T_w\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})}$. □

El teorema de representación de Fréchet-Riesz[3] da una descripción completa del dual topológico de H. Afirma que las funciones T_w son los únicos elementos de $\mathcal{L}(H,\mathbb{R})$.

[3] Frigyes Riesz (1880-1956) nació en Győr, en el reino de Hungría, entonces parte del imperio Austro-Húngaro. Estudió en la Universidad de Budapest. Junto con Haar fundó en 1922 el Instituto de Matemáticas János Bolyai de la Universidad de Szeged, de la que fue profesor y rector.

Frigyes Riesz

Teorema 15.19 (de representación de Fréchet-Riesz)**.** *Sean H un espacio de Hilbert y $T: H \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua. Entonces existe un único $w \in H$ tal que*

$$Tu = \langle w, u \rangle =: T_w u \qquad \forall u \in H. \tag{15.9}$$

Más aún, la función $\iota: H \to \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ dada por $\iota w := T_w$ es un isomorfismo lineal y una isometría.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ y denotemos por $V := \ker T$. Como T es continua, V es un subespacio cerrado de H. Si $V = H$, entonces $T = 0$ y $w = 0$ cumple (15.9). Si $V \neq H$, el Teorema 15.17 asegura que $V^\perp \neq \{0\}$. Escojamos $w_0 \in V^\perp$ tal que $\|w_0\| = 1$. Entonces $Tw_0 \neq 0$. Definimos

$$w := (Tw_0)\, w_0.$$

Observa que

$$T\left(u - \frac{Tu}{Tw_0} w_0\right) = Tu - \frac{Tu}{Tw_0} Tw_0 = 0 \qquad \forall u \in H.$$

Por tanto, $u - \frac{Tu}{Tw_0} w_0 \in V$, de lo cual concluimos que

$$\langle w, u \rangle = \left\langle w, u - \frac{Tu}{Tw_0} w_0 \right\rangle + \frac{Tu}{Tw_0} \langle w, w_0 \rangle = (Tu) \langle w_0, w_0 \rangle = Tu \qquad \forall u \in H.$$

Si algún otro $\tilde{w} \in H$ cumple (15.9), entonces $\langle w - \tilde{w}, u \rangle = 0$ para todo $u \in H$, en particular para $u = w - \tilde{w}$. Por tanto, $\|w - \tilde{w}\|^2 = 0$, lo que implica que $\tilde{w} = w$.

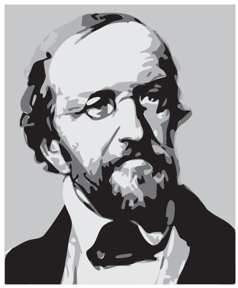
Por último, de la bilinealidad del producto escalar se sigue que

$$\iota(\lambda w_1 + \mu w_2)u = \langle \lambda w_1 + \mu w_2, u \rangle = \lambda \langle w_1, u \rangle + \mu \langle w_2, u \rangle = [\lambda\, (\iota w_1) + \mu(\iota w_2)]\, u$$

para todo $u \in H$. Por tanto ι es lineal. De la primera afirmación de este teorema se sigue que ι es biyectiva, y la identidad (15.8) asegura que ι es una isometría. $\square$

El teorema de representación de Fréchet-Riesz tiene aplicaciones muy importantes. Permite, por ejemplo, definir el gradiente de una función diferenciable $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$ [Ejercicio 15.42] o probar la existencia y unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales con condicion de frontera (ver Teorema 16.29).

El siguiente resultado afirma que el elemento $w \in H$ dado por el teorema anterior es el mínimo de un funcional[4]. A esta propiedad se le conoce como el principio de Dirichlet[5].



Gustav Dirichlet

Proposición 15.20 (Principio de Dirichlet)**.** *Sean V un espacio vectorial con producto escalar y $T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Entonces, $w \in V$ satisface*

$$\langle w, u\rangle = Tu \qquad \forall u \in V$$

si y sólo si w es un mínimo del funcional $J : V \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) := \tfrac{1}{2}\left\|u\right\|^2 - Tu.$$

Demostración. $\Rightarrow$): Si $\langle w, u\rangle = Tu$ para todo $u \in V$, entonces

$$\begin{aligned} J(u) - J(w) &= \tfrac{1}{2}\left\|u\right\|^2 - T(u) - \tfrac{1}{2}\left\|w\right\|^2 + Tw \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|u\right\|^2 - \langle w, u\rangle + \tfrac{1}{2}\left\|w\right\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|u - w\right\|^2 \geq 0 \qquad \forall u \in V. \end{aligned}$$

[4] A las funciones definidas en un espacio de Banach que toman valores reales se les suele llamar funcionales en vez de funciones.

[5] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) nació en Düren, entonces parte del imperio francés y actualmente de Alemania. Estudió en el Collège de France y en la Facultad de Ciencias de París. Fue profesor en las universidades de Berlín y de Göttingen.

$\Leftarrow$): Supongamos ahora que w es un mínimo de J. Para cada $u \in V$ consideremos la función $J_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$J_u(t) := J(w + tu) = \tfrac{1}{2} \|w\|^2 + \langle w, u\rangle t + \tfrac{1}{2} \|u\|^2 t^2 - Tw - (Tu)t.$$

Esta función es diferenciable y su derivada es

$$J_u'(t) = \langle w, u\rangle + \|u\|^2 t - Tu.$$

Como w es un mínimo de J, se tiene que 0 es un mínimo J_u. Por tanto, $J_u'(0) = \langle w, u\rangle - Tu = 0$ para todo $u \in V$. $\square$

15.4. Bases de Hilbert

Dado un subconjunto $\mathcal{X}$ de H, denotamos por $\mathrm{lin}(\mathcal{X})$ al subespacio vectorial de H generado por $\mathcal{X}$, es decir,

$$\mathrm{lin}(\mathcal{X}) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathcal{X},\ m \in \mathbb{N} \right\}. \tag{15.10}$$

Definición 15.21. *Un subconjunto $\mathcal{O}$ de un espacio de Hilbert H se llama un* ***conjunto ortogonal*** *si*

$$\langle u, v\rangle = 0 \qquad \forall u, v \in \mathcal{O},\ u \neq v.$$

Si además

$$\|u\| = 1 \qquad \forall u \in \mathcal{O},$$

se dice que $\mathcal{O}$ es un ***conjunto ortonormal.***.

Un subconjunto $\mathcal{B}$ de H se llama una ***base de Hilbert de*** *H si es ortonormal y* $\mathrm{lin}(\mathcal{B})$ *es denso en H, es decir,*

$$H = \overline{\mathrm{lin}(\mathcal{B})}.$$

Observa que, en general, una base de Hilbert de H no es una base de H en el sentido del álgebra lineal, es decir, $\mathrm{lin}(\mathcal{B})$ no necesariamente coincide con H, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.22. *Sea $\overline{e}_k = (e_{k,j})$ la sucesión cuyos términos son $e_{k,k} = 1$ y $e_{k,j} = 0$ si $k \neq j$. Entonces $\mathcal{B} := \{\overline{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hilbert de ℓ_2.*

Demostración. Claramente $\mathcal{B} := \{\overline{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de ℓ_2. Los elementos de $\mathrm{lin}(\mathcal{B})$ son combinaciones lineales finitas de elementos de $\mathcal{B}$, en consecuencia

$$\text{lin}(\mathcal{B}) = \{(x_k) \in \ell_2 : \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_k = 0\ \forall k \geq k_0\}\,.$$

De modo que $\text{lin}(\mathcal{B}) \neq \ell_2$. Veamos que $\ell_2 = \overline{\text{lin}(\mathcal{B})}$. En efecto: dado $\overline{x} = (x_j) \in \ell_2$, si denotamos por $\overline{x}_k$ a la sucesión cuyos términos son $\overline{x}_{k,j} := x_j$ si $j \leq k$ y $\overline{x}_{k,j} := 0$ si $j > k$, entonces $\overline{x}_k \in \text{lin}(\mathcal{B})$ y $\overline{x}_k \to \overline{x}$ en ℓ_2. □

15.5. Convergencia débil

Vimos que, a diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^n$, en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita existen sucesiones acotadas que no contienen ninguna subsucesión convergente (ver Ejercicio 5.39). Introduciremos a continuación una noción de convergencia, más débil que la usual, para la cual se cumple que cualquier sucesión acotada contiene una subsucesión convergente. En los próximos capítulos daremos aplicaciones importantes de este resultado.

Sea H un espacio de Hilbert.

Definición 15.23. *Una sucesión (u_k) en H* ***converge débilmente a*** *u* ***en*** *H si, para cada $v \in H$, se cumple que*

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle\,.$$

Se dice entonces que u ***es el límite débil de*** *(u_k)* ***en*** *H. Se escribe $u_k \rightharpoonup u$ para denotar que (u_k) converge débilmente a u.*

Es sencillo comprobar que el límite débil de una sucesión, de existir, es único [Ejercicio 15.49].

Notación 15.24. *Cuando la notación anterior se pueda prestar a confusión, escribiremos*

$$u_k \rightharpoonup u \ \ \textbf{\textit{débilmente en}}\ H$$

si (u_k) converge débilmente a u en H y, si (u_k) converge a u en H en el sentido usual, escribiremos

$$u_k \to u \ \ \textbf{\textit{fuertemente en}}\ H.$$

Proposición 15.25. *Si $u_k \to u$ fuertemente en H, entonces $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H.*

Demostración. Si $u_k \to u$ fuertemente en H entonces la Proposición 15.4 asegura que

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle \qquad \forall v \in H,$$

es decir, $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H. □

En espacios de dimensión finita ambas nociones de convergencia coinciden [Ejercicio 15.50]. No así en espacios de dimensión infinita, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.26. *Si $\mathcal{O} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de H, entonces $e_k \rightharpoonup 0$ débilmente en H pero (e_k) no converge fuertemente en H.*

Demostración. Sea $v \in H$.

CASO 1: $v \in \operatorname{lin}(\mathcal{O})$.

Si $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ entonces $\langle e_k, v\rangle = 0$ para todo $k > m$. Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \langle e_k, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in \operatorname{lin}(\mathcal{O}).$$

CASO 2: $v \in V := \overline{\operatorname{lin}(\mathcal{O})}$.

Dada $\varepsilon > 0$ escogemos $w \in \operatorname{lin}(\mathcal{O})$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|v - w\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |\langle e_k, w\rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall k \geq k_0.$$

Entonces, como $\|e_k\| = 1$, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|\langle e_k, v\rangle| \leq |\langle e_k, v - w\rangle| + |\langle e_k, w\rangle| \leq \|e_k\| \, \|v - w\| + |\langle e_k, w\rangle| < \varepsilon \ \ \forall k \geq k_0.$$

Esto prueba que

$$\lim_{k\to\infty} \langle e_k, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in V.$$

CASO 3: $v \in V^\perp$.

En este caso $\langle e_k, v\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

CASO 4: $v \in H$ arbitrario.

Como V es un subespacio cerrado de H, el Teorema 15.17 asegura que $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V$ y $v_2 \in V^\perp$. De los dos casos anteriores se sigue entonces que

$$\lim_{k\to\infty} \langle e_k, v\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle e_k, v_1\rangle + \lim_{k\to\infty} \langle e_k, v_2\rangle = 0 = \langle 0, v\rangle \qquad \forall v \in H.$$

Esto prueba que $e_k \rightharpoonup 0$ débilmente en H.

Finalmente observa que

$$\left\|e_k - e_j\right\|^2 = \left\|e_k\right\|^2 + \left\|e_j\right\|^2 = 2 \qquad \forall k \neq j.$$

En consecuencia (e_k) no converge fuertemente en H. □

Proposición 15.27. *(a) Si (u_k) converge débilmente a u en H, entonces*

$$\|u\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\| \,. \tag{15.11}$$

(b) Si (u_k) converge débilmente a u en H, entonces (u_k) converge fuertemente a u en H si y sólo si

$$\|u\| = \lim_{k\to\infty} \|u_k\| \,. \tag{15.12}$$

Demostración. (a): Supongamos que (u_k) converge débilmente a u en H. Si $u = 0$, la desigualdad (15.11) se cumple trivialmente. Si $u \neq 0$, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\frac{\langle u_k, u\rangle}{\|u\|} \leq \|u_k\| \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\langle u_k, u\rangle \to \|u\|^2$, tomando límites inferiores concluimos que

$$\|u\| = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle u_k, u\rangle}{\|u\|} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\langle u_k, u\rangle}{\|u\|} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\| \,.$$

(b): Si (u_k) converge débilmente a u en H, entonces $\langle u_k, u\rangle \to \|u\|^2$. De la identidad

$$\|u_k - u\|^2 = \|u_k\|^2 - 2\langle u_k, u\rangle + \|u\|^2 \,, \qquad k \in \mathbb{N},$$

se sigue entonces que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|u_k\| = \|u\| \,,$$

como afirma el enunciado. □

Probaremos a continuación que toda sucesión acotada en H contiene una subsucesión débilmente convergente. Requerimos el siguiente lema.

Lema 15.28. *Sea (u_k) una sucesión acotada en H tal que la sucesión $(\langle u_k, v\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$ para cada $v \in H$. Entonces existe $u \in H$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H.*

Demostración. La función $T\colon H \to \mathbb{R}$ dada por

$$Tv := \lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle$$

es claramente lineal. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|u_k\| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$|\langle u_k, v\rangle| \leq \|u_k\| \, \|v\| \leq c \, \|v\| \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall v \in H.$$

Por tanto,

$$|Tv| = \lim_{k\to\infty} |\langle u_k, v\rangle| \leq c \, \|v\| \qquad \forall v \in H.$$

Esto prueba que T es continua. Por el teorema de representación de Fréchet-Riesz (Teorema 15.19) existe $u \in H$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle =: Tv = \langle u, v\rangle \qquad \forall v \in H.$$

Esto prueba que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H. □

La propiedad fundamental de la convergencia débil es la siguiente.

Teorema 15.29. *Toda sucesión acotada en H contiene una subsucesión débilmente convergente en H.*

Demostración. Sea (u_k) una sucesión acotada en H y sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|u_k\| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$|\langle u_k, u_1\rangle| \leq \|u_k\| \, \|u_1\| \leq c \, \|u_1\| \, .$$

Es decir, la sucesión de números reales $(\langle u_k, u_1\rangle)$ está acotada y, por tanto, existe una subsucesión (u_k^1) de (u_k) tal que $(\langle u_k^1, u_1\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$. La sucesión $(\langle u_k^1, u_2\rangle)$ también está acotada y, por tanto, existe una subsucesión (u_k^2) de (u_k^1) tal que $(\langle u_k^2, u_2\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$. Continuando de este modo obtenemos, para cada $m \in \mathbb{N}$, una subsucesión (u_k^m) de (u_k^{m-1}) tal que $(\langle u_k^m, u_m\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$ cuando $k \to \infty$. Definimos $w_k := u_k^k$. La sucesión (w_k) es una subsucesión de (u_k). Probaremos que (w_k) converge débilmente en H. De acuerdo con el Lema 15.28 basta probar que la sucesión $(\langle w_k, v\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$ para cada $v \in H$. Consideramos cuatro casos.

CASO 1: $v = u_m$.

Observa que la subsucesión $(w_m, w_{m+1}, \dots)$ de (w_k) es una subsucesión de (u_j^m). En consecuencia, $(\langle w_k, u_m\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$ cuando $k \to \infty$.

CASO 2: $v \in V := \mathrm{lin}(\{u_m : m \in \mathbb{N}\})$.

Del caso anterior y la bilinealidad del producto escalar se sigue que $(\langle w_k, v\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$.

CASO 3: $v \in \overline{V}$.

Dada $\varepsilon > 0$ elegimos $w \in V$ tal que $\|v - w\| < \frac{\varepsilon}{4c}$. El caso anterior asegura que la sucesión $(\langle w_k, w\rangle)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\left\langle w_k - w_j, w\right\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $k, j \geq k_0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\left|\left\langle w_k - w_j, v\right\rangle\right| &\leq \left|\left\langle w_k - w_j, v - w\right\rangle\right| + \left|\left\langle w_k - w_j, w\right\rangle\right| \\ &\leq \left\|w_k - w_j\right\| \|v - w\| + \left|\left\langle w_k - w_j, w\right\rangle\right| \\ &\leq \left(\|w_k\| + \left\|w_j\right\|\right) \|v - w\| + \left|\left\langle w_k - w_j, w\right\rangle\right| \\ &< 2c\frac{\varepsilon}{4c} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{si } k, j \geq k_0.\end{aligned}$$

Esto prueba que la sucesión $(\langle w_k, v\rangle)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por tanto, converge.

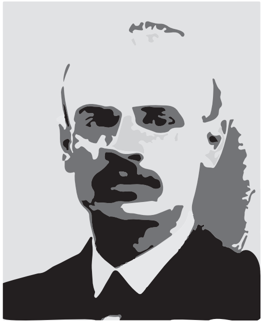
CASO 4: $v \in H$ arbitrario.

Como $\overline{V}$ es cerrado en H, el Teorema 15.17 asegura que $v = w + z$ con $w \in \overline{V}$ y $z \in \overline{V}^{\perp}$. Por tanto,

$$\langle w_k, v\rangle = \langle w_k, w\rangle + \langle w_k, z\rangle = \langle w_k, w\rangle .$$

Aplicando el caso anterior concluimos que la sucesión $(\langle w_k, v\rangle)$ converge. $\square$

Para concluir, probaremos que toda sucesión débilmente convergente está acotada. Usaremos el siguiente resultado de Baire[6].



René-Louis Baire

[6] René-Louis Baire (1874-1932) nació en París. Estudió en la École Normale Supérieure y fue profesor de la Universidad de Borgoña en Dijon.

Lema 15.30 (de Baire). *Si X es un espacio métrico completo no vacío y $X_1, X_2, \dots$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de X tales que*

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m, \tag{15.13}$$

entonces $\operatorname{int}(X_{m_0}) \neq \emptyset$ *para algún $m_0 \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que $\operatorname{int}(X_m) = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Tomemos $x_1 \in X$ y $r_1 \in (0, \frac{1}{2})$. Como $B_X(x_1, r_1) \cap (X \smallsetminus X_1) \neq \emptyset$, existen $x_2 \in X$ y $r_2 \in (0, \frac{1}{4})$ tales que $\bar{B}_X(x_2, r_2) \subset B_X(x_1, r_1) \cap (X \smallsetminus X_1)$. Continuando de este modo obtenemos $x_m \in X$ y $r_m \in (0, \frac{1}{2^m})$ tales que

$$\bar{B}_X(x_m, r_m) \subset B_X(x_{m-1}, r_{m-1}) \cap (X \smallsetminus X_{m-1}) \qquad \forall m > 1. \tag{15.14}$$

Se tiene entonces que

$$d_X(x_i, x_m) < r_m < \tfrac{1}{2^m} \qquad \forall i \geq m \geq 1. \tag{15.15}$$

En consecuencia, la sucesión (x_i) es de Cauchy en X y, como X es completo, $x_i \to x$ en X. Haciendo tender $i \to \infty$ en (15.15) obtenemos que

$$d_X(x, x_m) \leq r_m \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Se sigue de (15.14) que $x \in X \smallsetminus X_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, lo cual contradice (15.13). □

Proposición 15.31. *Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H entonces (u_k) está acotada en H.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$X_m := \{w \in H : |\langle u_k, w \rangle| \leq m \ \ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente, X_m es cerrado en H. Además, como para cada $w \in H$ la sucesión $(\langle u_k, w \rangle)$ está acotada en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$H = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m.$$

Por el lema de Baire, existen $m_0 \in \mathbb{N}$, $w_0 \in X_{m_0}$ y $\delta > 0$ tales que $B_H(w_0, \delta) \subset X_{m_0}$. Entonces, si $\|u_k\| \neq 0$, se cumple que $w_0 + \frac{\delta}{2} \frac{u_k}{\|u_k\|} \in X_{m_0}$ y, por tanto,

$$\frac{\delta}{2} \|u_k\| = \left\langle u_k, \frac{\delta}{2} \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\rangle \leq \left| \left\langle u_k, w_0 + \frac{\delta}{2} \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\rangle \right| + |\langle u_k, w_0 \rangle| \leq 2m_0.$$

Esto implica que $\|u_k\| \leq \frac{4}{\delta} m_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

15.6. Ejercicios

Ejercicio 15.32. *¿Es*

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{1/2} fg$$

un producto escalar en $\mathcal{C}^0[0,1]$?

Ejercicio 15.33 (Teorema de Pitágoras)**.** *Prueba que, si V es un espacio vectorial con producto escalar y $\langle v, w\rangle = 0$, entonces*

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 .$$

Ejercicio 15.34 (Identidad del paralelogramo)**.** *Demuestra que, si $\|\cdot\|$ es la norma inducida por un producto escalar en V, entonces*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \qquad \forall v, w \in V.$$

Ejercicio 15.35. *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Prueba que, si la norma cumple la ley del paralelogramo*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \qquad \forall v, w \in V,$$

entonces

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$$

es un producto escalar en V tal que $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$ para todo $v \in V$. (Sugerencia: Para probar que $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$ demuéstralo primero para $\lambda \in \mathbb{Q}$ y usa la continuidad para demostrarlo para $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Ejercicio 15.36. *Sea V_i espacio vectorial con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$, $i = 1, 2$. Prueba que, si $\iota\colon V_1 \to V_2$ es una isometría lineal, entonces*

$$\langle \iota v, \iota w\rangle_2 = \langle v, w\rangle_1 \qquad \forall v, w \in V_1.$$

Ejercicio 15.37. *Demuestra que las normas de los siguientes espacios no están inducidas por ningún producto escalar.*

(a) $\mathbb{R}^n_p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ *con* $p \in [1, \infty]$, $p \neq 2$ (ver (2.4)).

(b) ℓ_p *con* $p \in [1, \infty]$, $p \neq 2$ (ver Proposición 2.15).

(c) $L^p(\Omega)$ *con* $p \in [1, \infty]$, $p \neq 2$ (ver Definiciones 14.18 y 14.19).

Ejercicio 15.38. *Prueba que todo subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio de Hilbert H es cerrado en H.*

Ejercicio 15.39. *Sea V un subespacio vectorial de un espacio de Hilbert H. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) $(\overline{V})^\perp = V^\perp$.

(b) Si V es cerrado en H, entonces $(V^\perp)^\perp = V$.

(c) $(V^\perp)^\perp = \overline{V}$.

(d) Si V es denso en H entonces $V^\perp = \{0\}$.

Ejercicio 15.40. *Prueba que, si $f \in L^2(\Omega) \smallsetminus \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, no existe ningún $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ tal que*

$$\|f - g\|_2 = \inf_{h \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)} \|f - h\|_2 \,.$$

Es decir, la Proposición 15.14 *no es válida, en general, si V no es cerrado en H.*

Un subconjunto C de un espacio vectorial es **convexo** si $(1-t)x + ty \in C$ para cualesquiera $x, y \in C$ y $t \in [0,1]$.

Ejercicio 15.41. *Prueba que, si C es un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H y $u \in H$, entonces existe un único $v \in C$ tal que*

$$\|u - v\| = \inf_{w \in C} \|u - w\| \,.$$

Ejercicio 15.42 (Gradiente de una función diferenciable)**.** *Sean U un subconjunto abierto de H y $\varphi \colon U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.*

(a) Prueba que, para cada $u \in U$, existe un único elemento $\nabla\varphi(u) \in H$ tal que

$$\varphi'(u)v = \langle \nabla\varphi(u), v\rangle \qquad \forall v \in H.$$

*$\nabla\varphi(u)$ se llama el **gradiente de φ en u**.*

(b) Prueba que φ es de clase $\mathcal{C}^1$ si y sólo si la función

$$\nabla\varphi \colon U \to H, \qquad u \mapsto \nabla\varphi(u),$$

es continua.

(c) *Si φ es de clase $\mathcal{C}^1$, prueba que $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de φ si y sólo si $\nabla\varphi(u) \neq 0$ para todo $u \in M := \varphi^{-1}(c)$.*

En las siguientes afirmaciones supondremos que φ es de clase $\mathcal{C}^1$, que $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de φ y que $M := \varphi^{-1}(c)$. Recuerda que, en ese caso, M es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^1$ de H. Las definiciones necesarias se encuentran en el Capítulo 10.

(d) *Prueba que el espacio tangente a M en el punto $u \in M$ es el espacio ortogonal a $\nabla\varphi(u)$, es decir,*

$$T_u M = \{v \in H : \langle \nabla\varphi(u), v \rangle = 0\}.$$

(e) ***(Multiplicador de Lagrange)*** *Sea $\psi : U \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Prueba que u es un punto crítico de ψ en M si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla\psi(u) = \lambda\nabla\varphi(u).$$

Ejercicio 15.43. *En un espacio de Hilbert H considera la función $\phi : H \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(u) := \|u\|^2$.*

(a) *Prueba que ϕ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y calcula sus derivadas.*

(b) *Calcula $\nabla\phi(u)$ para todo $u \in H$.*

(c) *Prueba que la esfera unitaria*

$$\Sigma := \{u \in H : \|u\| = 1\}$$

es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ de H y que el espacio tangente a Σ en u es

$$T_u\Sigma = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Ejercicio 15.44 (Ortonormalización de Gram-Schmidt)**.** *Sea $\mathcal{X} = \{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto linealmente independiente de H, es decir, para $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

Definimos $e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$, y para $k > 1$ definimos inductivamente

$$w_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \left\langle v_k, e_j \right\rangle e_j \qquad y \qquad e_k := \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$

Prueba que $\mathcal{O} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *es un subconjunto ortonormal de* H *y que* $\mathrm{lin}(\mathcal{O}) = \mathrm{lin}(\mathcal{X})$.

Ejercicio 15.45. *Sea* $\mathcal{B}$ *un subconjunto ortonormal de* H. *Demuestra que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) $\mathcal{B}$ *es una base de Hilbert de* H.

(b) $\mathcal{B}$ *es un subconjunto ortonormal maximal de* H, *es decir, si* $\mathcal{B}'$ *es un subconjunto ortonormal de* H *y* $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ *entonces* $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Ejercicio 15.46. *Sea* $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *un subconjunto ortonormal de* H. *Prueba que* $\mathcal{B}$ *es una base de Hilbert de* H *si y sólo si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle \, e_k := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \langle u, e_k \rangle \, e_k = u \qquad \forall u \in H.$$

Ejercicio 15.47 (Polinomios de Legendre)**.** *(a) Sea* $\mathcal{P}[-1,1]$ *el conjunto de todas las funciones* $p\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *de la forma*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \;\; m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prueba que $\mathcal{P}[-1,1]$ *es denso en* $L^2(-1,1)$. (Sugerencia: Usa el Teorema 8.3.)

(b) Sea

$$e_k(x) := \left(k + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_k(x) \qquad \text{con } P_k(x) := \frac{1}{2^k k!} \left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^2-1)^k.$$

P_k *se llama el* k***-ésimo polinomio de Legendre***.

Prueba que $\mathcal{B} := \{e_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *es un subconjunto ortonormal de* $L^2(-1,1)$ *y que*

$$\mathrm{lin}(\mathcal{B}) = \mathcal{P}[-1,1].$$

(Sugerencia: Observa que $\mathcal{B}$ se obtiene aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt al conjunto $\{p_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, donde $p_k(x) := x^k$.)

(c) Prueba que $\mathcal{B}$ *es una base de Hilbert para* $L^2(-1,1)$.

Ejercicio 15.48 (Serie de Fourier)**.** *Sean*

$$e_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad e_{2m}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} mx, \qquad e_{2m+1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx.$$

(a) Prueba que $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hilbert de $L^2(-\pi, \pi)$.

(b) Prueba que, para toda función $f \in L^2(-\pi, \pi)$,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f e_k \right) e_k.$$

Esta serie se llama la ***serie de Fourier de*** *f.*

Ejercicio 15.49. *Sea H un espacio de Hilbert.*

(a) Prueba que el límite débil de una sucesión débilmente convergente en H es único.

(b) Prueba que, si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H, entonces toda subsucesión de (u_k) converge débilmente a u en H.

(c) Prueba que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H si y sólo si $Tu_k \to Tu$ en $\mathbb{R}$ para todo $T \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$.

(d) Prueba que, si $u_k \rightharpoonup u$ y $v_k \rightharpoonup v$ débilmente en H y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u_k + \mu v_k \rightharpoonup \lambda u + \mu v$ débilmente en H.

Ejercicio 15.50. *Prueba que toda sucesión débilmente convergente en $\mathbb{R}^n$ es convergente.*

Ejercicio 15.51. *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert.*

(a) Prueba que, si $T\colon H_1 \to H_2$ es una función lineal y continua y $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H_1, entonces $Tu_k \rightharpoonup Tu$ débilmente en H_2.

(b) Prueba que, si $T\colon H_1 \to H_2$ es una función lineal y continua, $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H_1 y $Tu_k \rightharpoonup v$ débilmente en H_2, entonces $v = Tu$.

(c) Da un ejemplo de una función continua $\varphi\colon H_1 \to H_2$ y una sucesión (u_k) débilmente convergente en H_1 tal que $(\varphi(u_k))$ no converge débilmente en H_2.

Ejercicio 15.52. *Sea $f_k(x) := \operatorname{sen} kx$. Prueba que la sucesión (f_k) converge débilmente a 0 en $L^2(-\pi, \pi)$.*

Ejercicio 15.53. *Sea $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{sop}(g) \subset \bar{B}^n(0, \frac{1}{2})$ y $\int_{\mathbb{R}^n} g^2 = 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos*

$$g_k(x_1, \dots, x_n) := g(x_1 + k, \dots, x_n).$$

(a) *Prueba que $g_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y que (g_k) no converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$.* (Sugerencia: Demuestra que $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

(b) *Sea $h_k := kg_k$. ¿Converge (h_k) débilmente en $L^2(\mathbb{R}^n)$?*

Se dice que un subconjunto A de H es **secuencialmente débilmente cerrado** en H si para cualquier sucesión (u_k) en A tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H se cumple que $u \in A$.

Ejercicio 15.54. (a) *Prueba que, si A es secuencialmente débilmente cerrado en H, entonces A es cerrado en H.*

(b) *Prueba que, si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, la esfera unitaria*

$$S := \{v \in H : \|v\| = 1\}$$

es cerrada pero no es secuencialmente débilmente cerrada en H.

(c) *Prueba que todo subespacio vectorial cerrado V de un espacio de Hilbert H es secuencialmente débilmente cerrado.*

Ejercicio 15.55. *Prueba que, si H es un espacio de Hilbert,*

(a) *$\emptyset$ y H son secuencialmente débilmente cerrados en H,*

(b) *si A_1 y A_2 son secuencialmente débilmente cerrados en H, entonces $A_1 \cup A_2$ es secuencialmente débilmente cerrado en H,*

(c) *si A_i es secuencialmente débilmente cerrado en H para todo $i \in \mathcal{I}$, entonces $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ es secuencialmente débilmente cerrado en H.*

El Ejercicio 15.55 afirma que el conjunto $\{H \smallsetminus A : A$ es secuencialmente débilmente cerrado en $H\}$ es una topología[7] en H.

Ejercicio 15.56. *Sean H un espacio de Hilbert, $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de H y $\alpha \in [0, 1]$. Definimos*

$$v_k := \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right) e_k + \alpha e_1, \qquad k \geq 2.$$

(a) *Calcula $\|v_k\|$ para $k \geq 2$.*

(b) *Prueba que $v_k \rightharpoonup \alpha e_1$ débilmente en H.*

[7] Para la definición de topología consulta, por ejemplo, [Pri03].

La **cerradura débil** de un subconjunto A de un espacio de Hilbert H es el conjunto de los puntos $u \in H$ para los cuales existe una sucesión (v_k) en A tal que $v_k \rightharpoonup u$ débilmente en H.

Ejercicio 15.57. *Prueba que, si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, la cerradura débil de la esfera unitaria*

$$S := \{v \in H : \|v\| = 1\}$$

es la bola unitaria

$$B := \{u \in H : \|u\| \leq 1\}.$$

(Sugerencia: Usa el Ejercicio 15.56.)

16

Espacios de Sobolev

En el estudio de ecuaciones en derivadas parciales surge de manera natural la necesidad de considerar normas que involucren, no sólo a la función misma, sino a sus derivadas. Por ejemplo, si φ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ con soporte compacto en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, podemos considerar las normas

$$\|\varphi\| := \left(\int_\Omega |\varphi|^p + \int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|^p + \cdots + \int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right|^p\right)^{1/p}, \qquad p \in [1,\infty).$$

El espacio de dichas funciones, al que denotamos $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$, no resulta completo con esta norma.

Los espacios de Sobolev que estudiaremos en este capítulo son espacios de Banach y contienen a $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ como subespacio denso. Consisten de funciones en $L^p(\Omega)$ que tienen derivadas parciales en un sentido débil y dichas *derivadas débiles* son elementos de $L^p(\Omega)$. De modo que la norma definida arriba tiene sentido para dichas funciones.

Las derivadas débiles son una herramienta fundamental en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales, pues al debilitar la noción de derivada se vuelve más fácil encontrar soluciones. Este tipo de soluciones se llaman *soluciones débiles*. Una vez encontrada la solución débil, hay que analizar si ésta resulta diferenciable en el sentido usual y si resulta ser una solución auténtica de nuestra ecuación.

Los espacios de Sobolev son el ambiente adecuado para estudiar la existencia de soluciones débiles. Gracias al principio de Dirichlet, los mínimos de ciertos funcionales en un espacio de Sobolev resultan ser soluciones débiles de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

Aplicaremos la teoría de espacios de Sobolev para probar la existencia de una solución $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de la ecuación en derivadas parciales

$$-\Delta u + u = f$$

con valor prescrito sobre la frontera $\partial\Omega$ de Ω, i.e. tal que cumple

$$u(\zeta) = g(\zeta) \qquad \forall \zeta \in \partial\Omega,$$

donde $\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ es el operador de Laplace y $f, g \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

16.1. Derivadas débiles

Dado un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ denotamos por

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) := \mathcal{C}_c^0(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

al conjunto de las funciones $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$ con soporte compacto contenido en Ω.

La fórmula de integración por partes es el punto de partida para definir las derivadas débiles.

Proposición 16.1 (Integración por partes)**.** *(a) Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

(b) Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demostración. (a): Identificamos a φ con su extensión trivial a $\mathbb{R}^n$, así que $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ (ver Ejercicio 11.48), y elegimos $a > 0$ de modo que $\operatorname{sop}(\varphi) \subset [-a, a]^n$. Sin perder generalidad podemos tomar $i = 1$. El teorema fundamental del cálculo asegura que

$$\int_{-a}^{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \widehat{x})\, dx_1 = \varphi(a, \widehat{x}) - \varphi(-a, \widehat{x}) = 0 \qquad \forall \widehat{x} = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-a}^{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \widehat{x})\, dx_1\, d\widehat{x} = 0.$$

(b): Aplicando la afirmación *(a)* al producto $f\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ obtenemos

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

como afirma el enunciado. □

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 16.2. *Sea $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Decimos que u es* ***débilmente diferenciable en*** *Ω si existen $v_1, \dots, v_n \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tales que*

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \tag{16.1}$$

para toda $i = 1, \cdots, n$.

v_i se llama la i-***ésima derivada débil de*** *u en Ω y se denota*

$$D_i u := v_i.$$

El ***gradiente débil de*** *u en Ω es la función $\Omega \to \mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las derivadas débiles. Lo denotamos por*

$$\nabla u := (D_1 u, D_2 u, \dots, D_n u).$$

Observación 16.3. *Observa que, si $v, w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisfacen*

$$-\int_\Omega v\varphi = \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega w\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

entonces $v = w$ c.d. en Ω (ver Proposición 14.49). *Es decir, para cada $i = 1, \cdots, n$, la función v_i que cumple* (16.1) *es única.*

La Proposición 16.1 afirma lo siguiente.

Ejemplo 16.4. *Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces u es débilmente diferenciable en Ω y*

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

No todas las funciones débilmente diferenciables son diferenciables, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.5. *Sea $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $u(x) = |x|$. Entonces u es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}$ y su derivada débil es la función*

$$(Du)(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x \leq 0. \end{cases}$$

Demostración. Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathrm{sop}(\varphi) \subset [-a, a]$, tomando en cuenta que u es diferenciable en $(-a, 0)$ y en $(0, a)$ y usando el teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u\varphi' + (Du)\varphi\right] &= \int_{-a}^{0} \left[u\varphi' + (Du)\varphi\right] + \int_{0}^{a} \left[u\varphi' + (Du)\varphi\right] \\ &= \int_{-a}^{0} (u\varphi)' + \int_{0}^{a} (u\varphi)' = -a\varphi(-a) + a\varphi(a) = 0, \end{aligned}$$

pues $\varphi(a) = \varphi(-a) = 0$. □

Existen funciones que no son débilmente diferenciables. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 16.6. *La función característica $1_{(-\infty,0)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que existe $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,0)}\varphi' = -\int_{-\infty}^{\infty} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Entonces se cumple, en particular, que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} v\varphi &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi' = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(-\infty, 0), \\ \int_{0}^{\infty} v\varphi &= -\int_{0}^{\infty} 0 = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, \infty). \end{aligned}$$

Estas dos identidades, junto con la Proposición 14.49, implican que $v = 0$ c.d. en $\mathbb{R}$. En consecuencia,

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi' = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,0)}\varphi' = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Esto es una contradicción. □

Observación 16.7. *El* Ejemplo 16.6 *muestra que la extensión trivial de una función débilmente diferenciable en Ω no es, en general, débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$: la función constante igual a* 1 *es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(-\infty, 0)$ pero su extensión trivial $1_{(-\infty,0)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}$.*

Un ejemplo interesante es el siguiente.

Proposición 16.8. *Si $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma + n > 1$, la función $u(x) = \|x\|^\gamma$ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y*

$$(D_i u)(x) = \gamma \|x\|^{\gamma-2} x_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Por simplicidad denotamos por $v_i(x) := \gamma \|x\|^{\gamma-2} x_i$. La Proposición 13.31 asegura que $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si $\gamma + n > 0$. Como $|v_i(x)| \leq \gamma \|x\|^{\gamma-1}$, se tiene que $v_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si $\gamma - 1 + n > 0$.

Elegimos $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x) = 0$ si $\|x\| \leq 1$ y $\psi(x) = 1$ si $\|x\| \geq 2$, y definimos $\psi_k(x) := \psi(kx)$. Entonces $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\psi_k(x) = 0 \text{ si } \|x\| \leq 1/k \qquad \text{y} \qquad \psi_k(x) = 1 \text{ si } \|x\| \geq 2/k.$$

Observa que u es diferenciable en $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ y que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \gamma \|x\|^{\gamma-2} x_i = v_i(x) \qquad \text{si } x \neq 0.$$

Por tanto, $u\psi_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ y la Proposición 16.1 asegura que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_k + u\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right) \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{16.2}$$

Calcularemos ahora el límite cuando $k \to \infty$ de cada uno de los sumandos.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Las funciones $u\psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ y $u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ son integrables en $\mathbb{R}^n$ y cumplen que

$$u\psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \to u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ c.d. en } \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \left| u\psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq \left| u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \text{ en } \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Del teorema de convergencia dominada (Teorema 13.26) se sigue entonces que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u\psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \tag{16.3}$$

Análogamente se demuestra que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_i\varphi = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_k\varphi. \tag{16.4}$$

Por otra parte, como $\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(x) = k\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(kx)$, se tiene que

$$\left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_\infty \leq k \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_\infty .$$

Observa además que $\mathrm{sop}(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} \leq \|x\| \leq \frac{2}{k} \right\} =: A^n(\frac{1}{k}, \frac{2}{k})$. En consecuencia, usando el Ejemplo 13.30 obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \varphi \right| &\leq \int_{A^n(\frac{1}{k}, \frac{2}{k})} \left| u \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \varphi \right| \\
&\leq k \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \int_{A^n(\frac{1}{k}, \frac{2}{k})} \|x\|^\gamma \, dx \\
&= \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \frac{n\omega_n}{\gamma + n} \left(\frac{2^{\gamma+n} - 1}{k^{\gamma+n-1}} \right)
\end{aligned}$$

y, dado que $\gamma + n - 1 > 0$, concluimos que

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \varphi = 0. \tag{16.5}$$

De (16.2), (16.3), (16.4) y (16.5) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} v_i \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

como afirma el enunciado. □

Proposición 16.9 (Linealidad de la derivada débil)**.** *Si $u,\ v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ son débilmente diferenciables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y*

$$D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Observa que, para cada $i = 1, \ldots, n$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[(\lambda u + \mu v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (\lambda D_i u + \mu D_i v)\varphi \right] \\
&\qquad = \lambda \int_\Omega \left[u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i u)\varphi \right] + \mu \int_\Omega \left[v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i v)\varphi \right] = 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y $D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v$. □

Dado que el producto de dos funciones en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ no necesariamente pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ no siempre tiene sentido preguntarse si el producto de funciones débilmente diferenciables es débilmente diferenciable. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 16.10 (Derivada débil de un producto)**.** *Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω y $\zeta \in C^\infty_c(\Omega)$, entonces la extensión trivial de ζu es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y*

$$D_i(\zeta u) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} u + \zeta D_i u.$$

Demostración. Sea $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\zeta\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ y, en consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\zeta D_i u + u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right) \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial(\zeta\varphi)}{\partial x_i} + \int_\Omega (D_i u)(\zeta\varphi) = 0.$$

Esto demuestra la afirmación. $\square$

16.2. Espacios de Sobolev

Introducimos ahora los espacios de Sobolev[1].

Sergei Sobolev

Definición 16.11. *Sea $p \in [1, \infty]$. El* ***espacio de Sobolev*** *$W^{1,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{1,p}(\Omega) := \big\{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega \\ \text{ y } D_i u \in L^p(\Omega)\ \forall i = 1, \dots, n\big\}.$$

[1] Sergei Lvovich Sobolev (1908-1989) nació en San Petersburgo, Rusia. Estudió en la Universidad de Leningrado, donde fue alumno de Nikolai Maksimovich Günter y Vladimir Smirnov. Fue investigador del Instituto Steklov y profesor de la Universidad Estatal de Moscú.

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\|u\|_p^p + \|D_1 u\|_p^p + \cdots + \|D_n u\|_p^p\right)^{1/p} & si \;\; p \in [1,\infty), \\ \text{máx}\left\{\|u\|_\infty, \|D_1 u\|_\infty, \ldots, \|D_n u\|_\infty\right\} & si \;\; p = \infty. \end{cases}$$

Proposición 16.12. *$W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es una norma en $W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty]$.*

Demostración. Como $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial, de la Proposición 16.9 se sigue que $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial. Probemos ahora que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es una norma.

(N1): Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Si $u = 0$ entonces $D_i u = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y, en consecuencia, $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$. Inversamente: como $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, si $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$ entonces $u = 0$ en $L^p(\Omega)$.

(N2): Claramente $\|\lambda u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = |\lambda| \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para cualesquiera $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N3): Si $p \in [1,\infty)$, aplicando primero la desigualdad de Minkowski en $L^p(\Omega)$ (ver Proposición 14.24) y luego la desigualdad del triángulo (2.3) para la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, obtenemos que, para cualesquiera $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left(\|u+v\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_i u + D_i v\|_p^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\left(\|u\|_p + \|v\|_p\right)^p + \sum_{i=1}^n \left(\|D_i u\|_p + \|D_i v\|_p\right)^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p\right)^{1/p} + \left(\|v\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_i v\|_p^p\right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

La demostración de la desigualdad para $p = \infty$ es análoga. □

Probaremos que $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. La demostración se basa en el siguiente hecho.

Lema 16.13. *Sean $p \in [1,\infty]$ y (u_k) una sucesión en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_k \to v_i$ en $L^p(\Omega)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces u es débilmente diferenciable en Ω, $v_i = D_i u$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y $u_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty]$. Tomando q de modo que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y usando la desigualdad de Hölder (ver Proposición 14.21) obtenemos que

$$\left|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega u_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \le \|u-u_k\|_p \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_q \to 0 \qquad \text{cuando } k\to\infty,$$
$$\left|\int_\Omega v_i\varphi - \int_\Omega (D_iu_k)\varphi\right| \le \|v_i - D_iu_k\|_p \,\|\varphi\|_q \to 0 \qquad \text{cuando } k\to\infty.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i\varphi = \lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega u_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega (D_iu_k)\varphi\right) = 0$$

para cada $i=1,\dots,n$. Esto prueba que u es débilmente diferenciable en Ω y que $v_i = D_iu$. En consecuencia, $u\in W^{1,p}(\Omega)$. Además, si $p\in[1,\infty)$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \lim_{k\to\infty}\|D_iu_k - D_iu\|_p^p = 0.$$

Análogamente, $\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = 0$ si $p=\infty$. □

Teorema 16.14. *$W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $p\in[1,\infty]$.*

Demostración. Sea (u_k) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces las sucesiones (u_k) y (D_iu_k) son de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo, se tiene que $u_k\to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_iu_k\to v_i$ en $L^p(\Omega)$ para cada $i=1,\dots,n$. Del Lema 16.13 se sigue que $u\in W^{1,p}(\Omega)$ y $u_k\to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Esto demuestra que $W^{1,p}(\Omega)$ es completo. □

Notación 16.15. *Si $p=2$ se denota por*

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega) \qquad y \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} := \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{16.6}$$

En este caso la norma está inducida por el producto escalar

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n\int_\Omega (D_iu)(D_iv) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v. \tag{16.7}$$

Por tanto, $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Veamos un ejemplo.

Proposición 16.16. *Sean $\gamma \in \mathbb{R}$, $u(x) := \|x\|^\gamma$ y $r > 0$.*

(a) Si $p \in [1, \infty)$ y $(\gamma - 1)p + n > 0$ entonces $u \in W^{1,p}(B^n(0, r))$.

(b) Si $\gamma \geq 1$ entonces $u \in W^{1,\infty}(B^n(0, r))$.

Demostración. Si $p \in [1, \infty)$ y $(\gamma - 1)p + n > 0$ entonces $(\gamma - 1 + n)p > (p - 1)n \geq 0$ y, en consecuencia, $\gamma - 1 + n > 0$. Así mismo, si $\gamma \geq 1$ entonces $\gamma - 1 + n > 0$. Así que en ambos casos la Proposición 16.8 asegura que u es débilmente diferenciable en $B^n(0, r)$ y que

$$(D_i u)(x) = \gamma \|x\|^{\gamma - 2} x_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Como $|(D_i u)(x)| \leq \gamma \|x\|^{\gamma - 1}$, de la Proposición 14.29 se sigue que $u \in L^p(B^n(0, r))$ y que $D_i u \in L^p(B^n(0, r))$ para todo $i = 1, \ldots, n$. □

A continuación queremos investigar si el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$ para $p \in [1, \infty)$. Veremos primero que sí lo es cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$. Requerimos el siguiente resultado.

Lema 16.17 (de truncamiento)**.** *Sean $p \in [1, \infty)$ y (ψ_k) una sucesión en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una sucesión (φ_k) en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Escogemos una función $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta(x) = 1$ si $\|x\| \leq 1$ y $\zeta(x) = 0$ si $\|x\| \geq 2$, y definimos $\zeta_k(x) := \zeta(\frac{x}{k})$. Entonces, $\zeta_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y cumple que

$$0 \leq \zeta_k(x) \leq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \zeta_k(x) = 1 \text{ si } \|x\| \leq k, \qquad \zeta_k(x) = 0 \text{ si } \|x\| \geq 2k.$$

Defininimos $\varphi_k := \zeta_k \psi_k$. Nota que $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Probaremos que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Del teorema de convergencia dominada en L^p (Teorema 14.26) se sigue que

$$\|v - \zeta_k v\|_p \to 0 \qquad \forall v \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

y, como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta_k u - \zeta_k \psi_k|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta_k|^p \, |u - \psi_k|^p \leq \|u - \psi_k\|_p^p \to 0$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \zeta_k D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta_k|^p \left| D_i u - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right|^p \leq \left\| D_i u - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_p^p \to 0,$$

usando la desigualdad del triángulo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} \|u - \zeta_k\psi_k\|_p = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{k\to\infty} \left\| D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_p = 0.$$

Por otra parte, puesto que $\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\left(\frac{x}{k}\right)$, se tiene que

$$\left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \right\|_\infty = \frac{1}{k} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty.$$

Así que, como (ψ_k) está acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}\psi_k \right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}\psi_k \right|^p \leq \frac{1}{k^p} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty^p \|\psi_k\|_p^p \leq \frac{c}{k^p} \to 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left\| D_i u - \frac{\partial(\zeta_k\psi_k)}{\partial x_i} \right\|_p &= \left\| D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}\psi_k \right\|_p \\ &\leq \left\| D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_p + \left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}\psi_k \right\|_p \to 0. \end{aligned}$$

Hemos probado pues que

$$\varphi_k \to u \ \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \to D_i u \ \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Aplicando el Lema 16.13 concluimos que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 16.18. *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1,\infty)$.*

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y sea (ρ_k) una sucesión regularizante (ver Definición 14.41). Las Proposiciones 14.38 y 14.40 aseguran que $\rho_k * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u) = \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} * u \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Puesto que u es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y la función $y \mapsto \rho_k(x-y)$ pertenece a $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}(x-y)u(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y)D_i u(y)dy \\ &= -\left(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} * u\right)(x) + (\rho_k * D_i u)(x). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u) = \rho_k * D_i u \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

El Teorema 14.45 asegura que

$$\rho_k * u \to u \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u) \to D_i u \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Aplicando el Lema 16.13 concluimos que $\rho_k * u \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. La afirmación del teorema se obtiene aplicando el Lema 16.17 a las funciones $\psi_k := \rho_k * u$. □

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ no es, en general, denso en $W^{1,p}(\Omega)$. En las aplicaciones que daremos en la siguiente sección jugará un papel importante el siguiente espacio.

Definición 16.19. *Sea $p \in [1, \infty)$. El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la cerradura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Denotamos por*

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$, por tanto $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach y $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

El Teorema 16.18 asegura que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ pero estos espacios en general no coinciden cuando $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ [Ejercicio 16.45].

En el resto de esta sección supondremos que $p \in [1, \infty)$.

Ejemplo 16.20. *Si $u \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $u \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ y sea (ρ_k) una sucesión regularizante. De la Proposición 14.38 se sigue que $\rho_k * u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ para k suficientemente grande y $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u) = \rho_k * \frac{\partial u}{\partial x_i}$. El Teorema 14.45 asegura entonces que

$$\rho_k * u \to u \ \text{ en } L^p(\Omega) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u) \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ en } L^p(\Omega) \ \ \forall i = 1, \ldots, n,$$

y aplicando el Lema 16.13 obtenemos que $\rho_k * u \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. En consecuencia, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

En la siguiente proposición denotamos por $\bar{v}$ a la extensión trivial de v a $\mathbb{R}^n$ definida en (12.21).

Proposición 16.21. *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $D_i(\bar{u}) = \overline{D_i u}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Sea (φ_k) una sucesión en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $\varphi_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \to D_i u$ en $L^p(\Omega)$. Además, $\bar{\varphi}_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}}$. En consecuencia,

$$\bar{\varphi}_k \to \bar{u} \;\text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial x_i} \to \overline{D_i u} \;\text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \;\; \forall i = 1, \ldots, n.$$

Del Lema 16.13 se sigue que $\bar{u}$ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y $D_i(\bar{u}) = \overline{D_i u}$. Por tanto, $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

La proposición anterior nos permite considerar a $W_0^{1,p}(\Omega)$ como un subespacio de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Puesto que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega)$ podemos extender, bajo hipótesis adecuadas, las fórmulas conocidas para la composición funciones diferenciables a funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposición 16.22 (Regla de la cadena para derivadas débiles)**.** *Sea $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ y $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $g \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y*

$$D_i(g \circ u) = (g' \circ u) D_i u.$$

Demostración. Por el teorema del valor medio (ver Teorema 9.14)

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq \left\| g' \right\|_\infty |t_1 - t_2| \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{16.8}$$

Sean $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tales que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $g(0) = 0$, se tiene que $g \circ \varphi_k \in \mathcal{C}_c^1(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando (16.8) obtenemos

$$\int_\Omega |g \circ u - g \circ \varphi_k|^p \leq \left\| g' \right\|_\infty^p \int_\Omega |u - \varphi_k|^p \to 0.$$

Por tanto, $g \circ u \in L^p(\Omega)$ y

$$g \circ \varphi_k \to g \circ u \qquad \text{en } L^p(\Omega). \tag{16.9}$$

Por otra parte, el Teorema 14.28 asegura que (φ_k) contiene una subsucesión tal que $\varphi_{k_j}(x) \to u(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$ y, puesto que g' es continua, se tiene que

$$g'(\varphi_{k_j}(x)) D_i u(x) \to g'(u(x)) D_i u(x) \qquad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Además,

$$\left|g'(\varphi_{k_j}(x))D_i u(x)\right| \leq \left\|g'\right\|_\infty |D_i u(x)| \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $D_i u \in L^p(\Omega)$, el Teorema 14.26 asegura que $(g' \circ u)D_i u \in L^p(\Omega)$ y

$$\lim_{j\to\infty} \left\|(g' \circ u)D_i u - (g' \circ \varphi_{k_j})D_i u\right\|_p = 0.$$

Se tiene además que

$$\int_\Omega \left|(g' \circ \varphi_{k_j})D_i u - (g' \circ \varphi_{k_j})\frac{\partial \varphi_{k_j}}{\partial x_i}\right|^p \leq \left\|g'\right\|_\infty^p \int_\Omega \left|D_i u - \frac{\partial \varphi_{k_j}}{\partial x_i}\right|^p \to 0$$

cuando $j \to \infty$. De la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} &\left\|\left(g' \circ u\right) D_i u - \frac{\partial(g \circ \varphi_{k_j})}{\partial x_i}\right\|_p \\ &\qquad \leq \left\|\left(g' \circ u\right) D_i u - \left(g' \circ \varphi_{k_j}\right) D_i u\right\|_p + \left\|\left(g' \circ \varphi_{k_j}\right) D_i u - \left(g' \circ \varphi_{k_j}\right) \frac{\partial \varphi_{k_j}}{\partial x_i}\right\|_p, \end{aligned}$$

se obtiene entonces que

$$\frac{\partial(g \circ \varphi_{k_j})}{\partial x_i} \to \left(g' \circ u\right) D_i u \qquad \text{en } L^p(\Omega). \tag{16.10}$$

El Lema 16.13 y las afirmaciones (16.9) y (16.10) nos permiten concluir que $g \circ u$ es débilmente diferenciable en Ω, que $D_i(g \circ u) = (g' \circ u)D_i u$ y que $g \circ \varphi_{k_j} \to g \circ u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Finalmente, como $g \circ \varphi_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$, se tiene que $g \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Una función $\varphi\colon U \to U'$ entre subconjuntos abiertos U y U' de $\mathbb{R}^n$ se llama un **difeomorfismo de clase** $\mathcal{C}^k$ si φ es de clase $\mathcal{C}^k$ en U, φ es biyectiva y su inverso $\varphi^{-1}\colon U' \to U$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en U'.

Proposición 16.23 (Cambio de variable para derivadas débiles)**.** *Sea $\theta\colon \Omega' \to \Omega$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\frac{\partial\theta_i}{\partial y_j} \in L^\infty(\Omega')$ y $\frac{\partial(\theta^{-1})_i}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$ para $i, j =$*

$1,\ldots,n$. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $u \circ \theta \in W_0^{1,p}(\Omega')$ y

$$D_i(u \circ \theta) = \sum_{j=1}^{n} \left(D_j u \circ \theta\right) \frac{\partial \theta_j}{\partial y_i} \qquad \forall i = 1,\ldots,n,$$

donde θ_i y $(\theta^{-1})_i$ denotan a la i-ésima función componente de θ y θ^{-1} respectivamente.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\|\det(\theta^{-1})'\right\|_\infty \leq c^p \qquad \text{y} \qquad \left\|\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j}\right\|_\infty \leq c \quad \forall i,j = 1,\ldots,n,$$

Observa primero que el teorema de cambio de variable (Teorema 13.36) asegura que, si $v \in L^p(\Omega)$, entonces $|v \circ \theta|^p = |v|^p \circ \theta$ es integrable y

$$\|v \circ \theta\|_p^p = \int_{\Omega'} |v|^p \circ \theta = \int_{\Omega} |v|^p \left|\det(\theta^{-1})'\right| \leq c^p \|v\|_p^p .$$

Sean $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tales que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces, $\varphi_k \circ \theta \in \mathcal{C}_c^1(\Omega') \subset W_0^{1,p}(\Omega')$. De la observación anterior se sigue que $u \circ \theta \in L^p(\Omega')$, $D_j u \circ \theta \in L^p(\Omega')$,

$$\|u \circ \theta - \varphi_k \circ \theta\|_p = \|(u - \varphi_k) \circ \theta\|_p \leq c \|u - \varphi_k\|_p \to 0,$$

y

$$\begin{aligned}
\left\|(D_j u \circ \theta)\frac{\partial \theta_j}{\partial y_i} - \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \circ \theta\right)\frac{\partial \theta_j}{\partial y_i}\right\|_p &= \left\|\left[\left(D_j u - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right) \circ \theta\right] \frac{\partial \theta_j}{\partial y_i}\right\|_p \\
&\leq c \left\|\left(D_j u - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right) \circ \theta\right\|_p \\
&\leq c^2 \left\|D_j u - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right\|_p \to 0
\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$, para cada $j = 1,\ldots,n$. Por tanto, $\varphi_k \circ \theta \to u \circ \theta$ en $L^p(\Omega')$ y

$$\frac{\partial(\varphi_k \circ \theta)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \circ \theta\right) \frac{\partial \theta_j}{\partial y_i} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(D_j u \circ \theta\right) \frac{\partial \theta_j}{\partial y_i} \quad \text{en } L^p(\Omega').$$

El Lema 16.13 asegura entonces que $u \circ \theta$ es débilmente diferenciable en Ω, que $D_i(u \circ \theta) = \sum_{j=1}^{n} \left(D_j u \circ \theta\right) \frac{\partial \theta_j}{\partial y_i}$ y que $\varphi_k \circ \theta \to u \circ \theta$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Finalmente, como $\varphi_k \circ \theta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$, se tiene que $u \circ \theta \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Observa que en las dos proposiciones anteriores jugó un papel importante el hecho de que u es el límite de funciones en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Estas proposiciones son válidas también para funciones en $W^{1,p}(\Omega)$, pero su demostración requiere de un resultado de aproximación más delicado que no veremos aquí[2].

Intuitivamente se antoja pensar a $W_0^{1,p}(\Omega)$ como el espacio de las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω. Esta afirmación no tiene sentido en general, ya que los elementos de $W^{1,p}(\Omega)$ son clases de equivalencia de funciones que coinciden c.d. en Ω y, si $\partial\Omega$ tiene medida 0, en cualquier clase de equivalencia hay una función que se anula en la frontera. Veremos a continuación que, bajo ciertas condiciones, esta afirmación tiene sentido y es cierta.

Como antes denotamos por

$$B^{n-1}(0,r) := \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| < r\right\}$$

y por $\bar{B}^{n-1}(0,r)$ a su cerradura.

Definición 16.24. *Un subconjunto* ***abierto*** *Ω de $\mathbb{R}^n$ es* ***de clase*** *$\mathcal{C}^k$ si, para cada $x_0 \in \partial\Omega$, existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 y un difeomorfismo $\vartheta : B^{n-1}(0,1) \times (-1,1) \to U$ de clase $\mathcal{C}^k$ tal que $\vartheta(0,0) = x_0$,*

$$\vartheta(B^{n-1}(0,1) \times (0,1)) = U \cap \Omega \qquad y \qquad \vartheta(B^{n-1}(0,1) \times \{0\}) = U \cap \partial\Omega.$$

Teorema 16.25. *Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, entonces $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

Demostración. Sean $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y $x_0 \in \partial\Omega$. Probaremos que $u(x_0) = 0$.

Elegimos U y ϑ como en la Definición 16.24. Nota primero que, reemplazando a $B^{n-1}(0,1)$ por $B^{n-1}(0,3/4)$, a $(-1,1)$ por $(-3/4,3/4)$, a U por $\vartheta(B^{n-1}(0,3/4) \times (-3/4,3/4))$ y reescalando, podemos suponer que ϑ y $\frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_j}$ son continuas en $\bar{B}^{n-1}(0,1) \times [-1,1]$ y que $\frac{\partial (\vartheta^{-1})_i}{\partial x_j}$ es continua en $\overline{U}$, en cuyo caso

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_j} \in L^\infty(B^{n-1}(0,1) \times (0,1)) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial (\vartheta^{-1})_i}{\partial x_j} \in L^\infty(U) \qquad \forall i,j = 1,\dots,n.$$

[2] Consulta, por ejemplo, [Bré84], Proposiciones IX.5 y IX.6.

Sean $K := \vartheta(\bar{B}^{n-1}(0,\frac{1}{2}) \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ y $\delta := \frac{1}{2}\mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^n \smallsetminus U)$. Por el Lema 14.48 existe $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \le \zeta(x) \le 1$ si $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta(x) = 1$ si $x \in K$ y $\zeta(x) = 0$ si $\mathrm{dist}(x, K) \ge \delta$.

Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y (ψ_k) es una sucesión en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces $\zeta\psi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(U \cap \Omega)$. Además,

$$\|\zeta u - \zeta\psi_k\|_{L^p(U\cap\Omega)}^p = \int_{U\cap\Omega} |\zeta|^p \, |u - \psi_k|^p \le \|u - \psi_k\|_{L^p(\Omega)}^p \to 0,$$

$$\begin{aligned}
&\left\| D_i(\zeta u) - \frac{\partial(\zeta\psi_k)}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U\cap\Omega)} \\
&\qquad \le \left\| \zeta D_i u - \zeta \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U\cap\Omega)} + \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} u - \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\psi_k \right\|_{L^p(U\cap\Omega)} \\
&\qquad \le \left\| D_i u - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty \|u - \psi_k\|_{L^p(\Omega)}^p \to 0.
\end{aligned}$$

Del Lema 16.13 se sigue que $\zeta u \in W^{1,p}(U \cap \Omega)$ y que $\zeta\psi_k \to \zeta u$ en $W^{1,p}(U \cap \Omega)$ y, como $\zeta\psi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(U \cap \Omega)$, se tiene entonces que $\zeta u \in W_0^{1,p}(U \cap \Omega)$. Aplicando la Proposición 16.23 concluimos que

$$v := \zeta u \circ \vartheta \in W_0^{1,p}(B^{n-1}(0,1) \times (0,1)) \cap \mathcal{C}^0(\bar{B}^{n-1}(0,1) \times [0,1]).$$

Demostraremos que

$$v(y,0) = 0 \qquad \forall y \in B^{n-1}(0,1). \tag{16.11}$$

Observa que esto basta para probar la afirmación del teorema ya que, como $x_0 = \vartheta(0,0) \in K$, se tiene que $u(x_0) = \zeta(x_0)u(x_0) = v(0,0) = 0$.

Para probar (16.11) elegimos $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(B^{n-1}(0,1) \times (0,1))$ tal que $\varphi_k \to v$ en $W^{1,p}(B^{n-1}(0,1) \times (0,1))$. Como $\varphi_k(y,0) = 0$ para todo $y \in B^{n-1}(0,1)$, el teorema fundamental del cálculo asegura que

$$\varphi_k(y,t) = \int_0^t \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(y,s)ds \qquad \forall t \in (0,1).$$

Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Por el teorema del valor medio para integrales existen $t_\varepsilon, s_\varepsilon \in (0,\varepsilon)$ tales que

$$\int_0^\varepsilon |\varphi_k(y,t)| \, dt = \varepsilon \, |\varphi_k(y,t_\varepsilon)| \qquad \text{y} \qquad \int_0^\varepsilon |v(y,t)| \, dt = \varepsilon \, |v(y,s_\varepsilon)| \, . \tag{16.12}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon |\varphi_k(y,t)|\,dt \leq \int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(y,s)\right| ds \qquad \forall \varepsilon \in (0,1),$$

e integrando ambos lados de la desigualdad sobre $B^{n-1}(0,1)$ obtenemos que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_\varepsilon} |\varphi_k| \leq \int_{Q_\varepsilon} \left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right|,$$

donde $Q_\varepsilon := B^{n-1}(0,1)\times(0,\varepsilon)$. Dado que Q_ε tiene medida finita, se tiene que $\varphi_k \to v$ en $L^1(Q_\varepsilon)$ y $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \to D_n v$ en $L^1(Q_\varepsilon)$ (ver Proposición 14.31). De modo que, pasando al límite cuando $k \to \infty$, concluimos que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_\varepsilon} |v| \leq \int_{Q_\varepsilon} |D_n v|\,.$$

Combinando esta desigualdad con (16.12) obtenemos

$$\int_{\|y\|<1} |v(y,s_\varepsilon)| = \int_{\|y\|<1} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon |v(y,t)|\,dt\,dy = \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_\varepsilon} |v| \leq \int_{Q_\varepsilon} |D_n v|\,.$$

Nota que, como v es continua, $|v(y,s_\varepsilon)| \to |v(y,0)|$ cuando $\varepsilon \to 0$. Aplicando el teorema de convergencia dominada (Teorema 13.26) concluimos que

$$\int_{\|y\|<1} |v(y,0)| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\|y\|<1} |v(y,s_\varepsilon)| \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q_\varepsilon} |D_n v| = 0.$$

En consecuencia, $v(y,0) = 0$ para todo $y \in B^{n-1}(0,1)$. □

El recíproco del teorema anterior también es cierto sin ninguna condición de regularidad en $\partial\Omega$. Más precisamente: si $u \in W^{1,p}(\Omega)\cap\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$[3].

16.3. Problemas elípticos con condición de frontera

La ecuación en derivadas parciales

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{16.13}$$

[3] La demostración de esta afirmación se encuentra, por ejemplo, en [Bré84], Teorema IX.17.

donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{16.14}$$

es el operador de Laplace o laplaciano, se llama la **ecuación de Laplace.** Las soluciones de esta ecuación se llaman **funciones armónicas.**

Un ejemplo bien conocido de funciones armónicas aparece en análisis complejo: la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son funciones armónicas. En la teoría de probabilidad la ecuación de Laplace juega un papel importante en el estudio del movimiento Browniano. En física aparece en múltiples contextos. Típicamente, u denota la densidad de alguna cantidad en equilibrio, por ejemplo, una concentración química, una temperatura, un potencial electrostático, etc.[4]

La ecuación de Laplace es el ejemplo más sencillo de una ecuación elíptica. Dedicaremos esta sección al estudio de algunos problemas elípticos lineales que satisfacen una condición prescrita sobre la frontera de Ω.

16.3.1. Un problema de Dirichlet homogéneo

Dado un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, nos preguntamos si existe una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \qquad\quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{16.15}$$

donde $\partial\Omega$ denota a la frontera de Ω.

La condición "$u = 0$ sobre $\partial\Omega$" recibe el nombre de **condición de Dirichlet homogénea.**

Definición 16.26. *Una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que satisface* (16.15) *se llama una solución clásica de* (16.15).

Observa que, si existe una solución clásica de (16.15), entonces forzosamente $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Además, se cumple lo siguiente.

Proposición 16.27. *Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisface $-\Delta u + u = f$, entonces*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

[4] Consulta [FLS66].

Demostración. Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Multiplicando ambos lados de la ecuación $-\Delta u + u = f$ por $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrando, obtenemos que

$$-\int_\Omega (\Delta u)\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{16.16}$$

La fórmula de integración por partes (ver Proposición 16.1) asegura que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\varphi.$$

Sumando estas identidades para $i = 1, \dots, n$, obtenemos la **fórmula de Green**

$$-\int_\Omega (\Delta u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{16.17}$$

Combinando (16.16) y (16.17) obtenemos la identidad deseada. □

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 16.28. *Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \tag{16.18}$$

se llama una ***solución débil*** *de* (16.15).

El lado izquierdo de (16.18) es el producto escalar

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega u\varphi + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

en el espacio $H^1(\Omega)$ que definimos en (16.7), así que podemos reescribir la condición (16.18) como

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{16.19}$$

La existencia de una solución débil es consecuencia del teorema de representación de Fréchet-Riesz.

Teorema 16.29 (Existencia y unicidad)**.** *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema* (16.15). *Más aún, u es el único mínimo del* *funcional $J: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int_\Omega fv.$$

A esta última afirmación se le conoce como el **principio de Dirichlet**.

Demostración. Para $f \in L^2(\Omega)$ considera la función $T: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Tv := \int_\Omega fv.$$

Esta función es claramente lineal. Además, usando la desigualdad de Hölder en $L^2(\Omega)$ obtenemos que, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega fv\right| \le \|f\|_2 \|v\|_2 \le \|f\|_2 \left(\|v\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \|D_i v\|_2^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Esto prueba que T es continua en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de representación de Fréchet-Riesz (Teorema 15.19) existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = Tv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, u es la única solución débil de (16.15). Por la Proposición 15.20, u es el único mínimo de J. □

Observación 16.30. *Observa que, como $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ y las funciones $v \mapsto \langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)}$ y $Tv = \int_\Omega fv$ son continuas en $H_0^1(\Omega)$, si la identidad* (16.19) *se satisface para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ entonces se cumple también para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Así que la condición* (16.18) *es equivalente a*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{16.20}$$

El siguiente resultado afirma que, si los datos del problema y la solución débil son suficientemente regulares, entonces ésta es una solución clásica.

Proposición 16.31. *Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema* (16.15) *satisface $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica de* (16.15).

Demostración. El Teorema 16.25 asegura que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Por otra parte, aplicando la fórmula de Green (16.17) obtenemos

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi - \int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

La Proposición 14.49 asegura entonces que $h := -\Delta u + u - f = 0$ c.d. en Ω. Como h es continua, si $h(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in \Omega$, se tendría que $h(x) \neq 0$ para todo $x \in B^n(x_0, \delta)$ con $\delta > 0$, lo cual es una contradicción. Así que

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \Omega.$$

Esto prueba que u es una solución clásica de (16.15). □

Si los datos del problema son suficientemente regulares, la solución débil resulta ser suficientemente regular. Se tiene, por ejemplo, el siguiente resultado, cuya demostración no daremos aquí[5].

Teorema 16.32 (de regularidad)**.** *Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema* (16.15), *entonces $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

De hecho, bastan condiciones de regularidad mucho más débiles sobre Ω y f para concluir que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$[6], como requiere la Proposición 16.31.

Usando el teorema de regularidad obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 16.33. *Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, entonces el problema* (16.15) *tiene una única solución clásica $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Demostración. La afirmación es consecuencia inmediata del Teorema 16.32 y la Proposición 16.31. □

16.3.2. Un problema de Dirichlet no homogéneo

Estudiaremos ahora la misma ecuación con una condición más general sobre la frontera.

Dados un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y funciones $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, nos preguntamos si existe una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \qquad\quad u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{16.21}$$

[5] Puedes consultar la demostración en [Eva88].
[6] Una referencia muy completa sobre resultados de este tipo es [GT01].

La condición “$u = g$ sobre $\partial\Omega$” recibe el nombre de **condición de Dirichlet.**

Definición 16.34. *Una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que satisface* (16.21) *se llama una solución clásica de* (16.21).

El Teorema 16.25 sugiere buscar soluciones en el espacio afín

$$A_g := \left\{u \in H^1(\Omega) : u - g \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Definimos entonces una solución débil como sigue.

Definición 16.35. *Una función $u \in A_g$ que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \tag{16.22}$$

*se llama una **solución débil** de* (16.21).

Observa que la condición (16.22) es la misma que la condición (16.18) del caso homogéneo. Sólo que ahora buscamos una solución en A_g en vez de en $H_0^1(\Omega)$. Nota que A_g no es un espacio vectorial (y en consecuencia no es un espacio de Hilbert) a menos que $g = 0$ en cuyo caso $A_g = H_0^1(\Omega)$.

El Teorema 16.29 se extiende como sigue.

Teorema 16.36 (Existencia y unicidad de la solución débil)**.** *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^1(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in A_g$ del problema* (16.21). *Más aún, u es el único mínimo del funcional $J : A_g \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J(v) := \frac{1}{2}\,\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int_\Omega fv.$$

A esta última afirmación se le llama el **principio de Dirichlet**.

Proponemos la demostración de este teorema como ejercicio [Ejercicio 16.48].

Nuevamente, si los datos del problema y la solución débil son suficientemente regulares, ésta es una solución clásica.

Proposición 16.37. *Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $g \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y la solución débil $u \in A_g$ del problema* (16.21) *satisface $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica de* (16.21).

Demostración. Como $u - g \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, el Teorema 16.25 asegura que $u(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$.

El mismo argumento empleado en la demostración de la Proposición 16.31, prueba que $-\Delta u + u = f$ en Ω. Por tanto, u es una solución clásica de (16.21). □

Como en el caso homogéneo, usando el Teorema 16.32 se prueba la existencia de una única solución clásica cuando Ω es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ [Ejercicio 16.48].

Durante mucho tiempo el principio de Dirichlet se aplicó de manera exitosa pero poco rigurosa: si la integral de Dirichlet (que en nuestro caso es el funcional J) resultaba estar acotada inferiormente, los expertos (incluyendo a Riemann, que fue quien le puso el nombre de *principio de Dirichlet*) daban por hecho la existencia de un mínimo. Hasta que Weierstrass en 1895 mostró un contraejemplo, que proponemos aquí como ejercicio [Ejercicio 16.47].

16.4. Ejercicios

Ejercicio 16.38. *Prueba que, si ω es un subconjunto abierto de Ω y $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω, entonces la restricción de u a ω es débilmente diferenciable en ω y*

$$D_i(u\,|_\omega) = (D_i u)\,|_\omega\ .$$

Ejercicio 16.39. *Prueba que, si Ω es conexo, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω y $D_i u = 0$ c.d. en Ω para todo $i = 1, \dots, n$, entonces u es constante c.d. en Ω.*

Ejercicio 16.40. *Sean $\Omega = \mathbb{R}^n \smallsetminus B_n(0, r)$, $r > 0$, y $u(x) := \|x\|^\gamma$.*

(a) ¿Para qué valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ es u débilmente diferenciable en Ω?

(b) Dada $p \in [1, \infty]$, ¿para qué valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ se cumple que $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Ejercicio 16.41. *Considera las siguientes funciones:*

(a) $u_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u_i(x) := \frac{x_i}{\|x\|}, \quad i = 1, \dots, n.$

(b) $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u(x) := \ln \|x\|.$

(c) $1_{B^n(0,1)}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$ *donde* $B^n(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$

¿Para qué valores de n es cada una de las funciones anteriores débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$? ¿Para qué valores de n y p pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$?

Ejercicio 16.42. *Sea $p \in [1, \infty)$. Prueba que, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, entonces $u\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y*

$$D_i(u\varphi) = (D_i u)\,\varphi + u\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Ejercicio 16.43. *Sea $p \in [1, \infty)$. Prueba que, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y*

$$(D_i\,|u|)\,(x) = \begin{cases} (D_i u)\,(x) & \text{si } u(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) = 0, \\ -\,(D_i u)\,(x) & \text{si } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

(Sugerencia: Considera las funciones $\phi_\varepsilon(t) = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, y $\phi_\varepsilon \circ u$. Prueba que $\phi_\varepsilon \circ u \to |u|$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$.)

Ejercicio 16.44. *Sea $p \in [1, \infty)$. Prueba que, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces*

$$u^+ := \max\{u, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad u^- := \min\{u, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

y sus derivadas débiles son

$$\left(D_i u^+\right)(x) = \begin{cases} (D_i u)\,(x) & \text{si } u(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$(D_i u^-)\,(x) = \begin{cases} (D_i u)\,(x) & \text{si } u(x) \leq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) \geq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 16.45. *Sean Ω un subconjunto abierto de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, \infty)$. Prueba que, si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \neq W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Ejercicio 16.46. *Prueba que, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $D_i u \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces*

$$D_j D_i u = D_i D_j u \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Ejercicio 16.47 (Ejemplo de Weierstrass)**.**

Sea $V := \left\{u \in \mathcal{C}^1[-1,1] : u(1) = 1, u(-1) = -1\right\}$ y sea

$$J(u) := \int_{-1}^{1} \left|x u'(x)\right|^2 dx$$

(a) Prueba que $\inf\{J(u) : u \in V\} = 0$. (Sugerencia: Considera las funciones

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Prueba que pertenecen a V y que $J(u_\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.)

(b) Prueba que J no alcanza su mínimo en V.

Ejercicio 16.48. *Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Considera el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \qquad\quad u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{16.23}$$

Recuerda que una solución débil de este problema es una función $u \in A_g$, donde

$$A_g := \left\{ w \in H^1(\Omega) : w - g \in H_0^1(\Omega) \right\},$$

que satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{16.24}$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) Si $g \in H^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, el problema (16.23) *tiene una única solución débil.* (Sugerencia: Prueba que $u \in A_g$ satisface (16.24) si y sólo si $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega g\varphi + \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

y aplica el teorema de representación de Fréchet-Riesz.)

(b) $u \in A_g$ es una solución débil de (16.23) *si y sólo si u es un mínimo del funcional $J : A_g \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J(w) := \frac{1}{2} \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int_\Omega fw.$$

(c) Si $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica de (16.23) *si y sólo si $v := u - g$ es solución clásica de*

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \Delta g - g + f & \text{en } \Omega, \\ \qquad\quad v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(d) Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, entonces el problema (16.23) *tiene una única solución clásica $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

17

Encajes de Sobolev

Por definición, el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ está contenido en $L^p(\Omega)$. En el estudio de problemas no lineales surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿para qué valores q se cumple que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está contenido de manera continua en $L^q(\Omega)$? En este capítulo estudiaremos esta cuestión. Veremos que la respuesta varía, dependiendo de si $p \in [1, n)$, $p = n$ o $p \in (n, \infty)$.

La herramienta fundamental para este análisis son ciertas desigualdades que permiten estimar la norma en L^q de una función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en términos de la norma en L^p de su gradiente. A este tipo de desigualdades se les suele llamar *desigualdades de Sobolev*, en honor al matemático Sergei Sobolev a quien se deben algunas de ellas. Estas desigualdades se extienden por densidad a $W_0^{1,p}(\Omega)$ y permiten obtener encajes continuos de éste en otros espacios.

Probaremos, en particular, que cuando $p \in [1, n)$, el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ está contenido en $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p^*]$, donde $p^* := \frac{np}{n-p}$. Este número se llama el *exponente crítico de Sobolev*. Más aún, la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ resulta ser una función continua.

Cuando el dominio Ω es acotado y $q < p^*$ se tiene una propiedad aún más fuerte: la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ resulta ser compacta, es decir, toda sucesión acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ contiene una subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$. Este resultado, debido a Franz Rellich y Vladimir Kondrashov, tiene implicaciones muy importantes para la existencia de soluciones de problemas elípticos. Lo aplicaremos aquí para probar la existencia de una sucesión no acotada de valores propios del operador laplaciano en $H_0^1(\Omega)$ cuando Ω es un dominio acotado.

17.1. Desigualdades de Sobolev

En el producto $[L^p(\mathbb{R}^n)]^n := L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)$ (con n factores), $p \in [1, \infty)$, consideramos la norma

$$\|(f_1, \ldots, f_n)\|_p := \left(\|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_n\|_p^p\right)^{1/p}$$

(ver Ejercicio 2.53).

Nota que, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, su gradiente $\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n})$ pertenece a $[L^p(\mathbb{R}^n)]^n$ para todo $p \in [1, \infty)$.

Nos preguntamos para qué números $p, q \in [1, \infty)$ es posible acotar uniformemente a $\|\varphi\|_q$ en términos de $\|\nabla\varphi\|_p$. Veamos primero que p y q no pueden ser arbitrarios.

Proposición 17.1. *Sean $p, q \in [1, \infty)$. Si existe una constante $C > 0$, que depende únicamente de n, p y q, tal que*

$$\|\varphi\|_q \leq C \|\nabla\varphi\|_p \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{17.1}$$

entonces $p < n$ y $q = \frac{np}{n-p}$.

Demostración. Para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$ definimos

$$\varphi_\lambda(x) := \varphi(\lambda x).$$

Aplicando el teorema de cambio de variable obtenemos

$$\|\varphi_\lambda\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\lambda x)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^q \, dy = \frac{1}{\lambda^n} \|\varphi\|_q^q$$

y

$$\left\|\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_i}\right\|_p^p = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial\varphi(\lambda x)}{\partial x_i}\right|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial\varphi(y)}{\partial x_i}\right|^p dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_p^p.$$

Aplicando la desigualdad (17.1) a la función φ_λ concluimos que

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|\varphi\|_q \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{n/p}} \|\nabla\varphi\|_p \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \ \forall \lambda > 0,$$

es decir,

$$\|\varphi\|_q \leq C \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|\nabla\varphi\|_p \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \ \forall \lambda > 0.$$

Haciendo tender λ a cero si $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$ o a infinito si $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$ vemos que, si $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, la desigualdad anterior no se satisface para ninguna $\varphi \neq 0$.

Así que necesariamente $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$, en cuyo caso $\frac{n}{p} > 1$ y $q = \frac{np}{n-p}$, como afirma el enunciado. $\square$

Definición 17.2. *Si $p \in [1, n)$ se define el* ***exponente crítico de Sobolev*** *como*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Nota que $p^* > p$.

Probaremos a continuación que la desigualdad (17.1) se cumple cuando $p \in [1, n)$ y $q = p^*$. Usaremos el siguiente lema.

Lema 17.3. *Sean $n \geq 2$ y $f_1, \ldots, f_n \in L^{n-1}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $\widehat{x}_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y definimos*

$$f(x) := \prod_{i=1}^{n} f_i(\widehat{x}_i).$$

Entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Demostración. Demostraremos esta afirmación por inducción sobre n. Si $n = 2$ la afirmación es obvia, ya que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2)|\, dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)|\, dx_2 \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1)|\, dx_1.$$

Supongámosla cierta para n y demostrémosla para $n + 1$.

Sean $f_1, \ldots, f_{n+1} \in L^n(\mathbb{R}^n)$. Fijemos por un momento el valor de x_{n+1} y definamos $g_i(z_1, \ldots, z_{n-1}) := |f_i(z_1, \ldots, z_{n-1}, x_{n+1})|^{\frac{n}{n-1}}$, $i = 1, \ldots, n$. Observa que $g_i \in L^{n-1}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ de modo que, aplicando la hipótesis de inducción, concluimos que la función

$$g(y) := \prod_{i=1}^{n} g_i(\widehat{y}_i) = \prod_{i=1}^{n} |f_i(\widehat{y}_i, x_{n+1})|^{\frac{n}{n-1}}, \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|g_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z, x_{n+1})|^n\, dz \right)^{\frac{1}{n-1}}. \qquad (17.2)$$

Nota que

$$|f(y,x_{n+1})| = \left(\prod_{i=1}^{n} |f_i(\widehat{y}_i, x_{n+1})|\right) |f_{n+1}(y)| = |g(y)|^{\frac{n-1}{n}} \, |f_{n+1}(y)| \,.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y la desigualdad (17.2) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y,x_{n+1})| \, dy &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n-1}{n}} \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z,x_{n+1})|^n \, dz\right)^{\frac{1}{n}} \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \,. \qquad (17.3)\end{aligned}$$

Ahora hagamos variar x_{n+1}. Cada una de las funciones

$$h_i(x_{n+1}) := \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z,x_{n+1})|^n \, dz\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

pertenece a $L^n(\mathbb{R})$ y su norma en este espacio es

$$\|h_i\|_{L^n(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z,x_{n+1})|^n \, dz \, dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \,.$$

Así que, integrando la desigualdad (17.3) respecto a x_{n+1} y aplicando la desigualdad de Hölder generalizada (ver Ejercicio 14.68), concluimos que $\prod_{i=1}^{n} h_i \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x)| \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} |h_i(x_{n+1})| \, dx_{n+1}\right) \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{n} \|h_i\|_{L^n(\mathbb{R})}\right) \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right) \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \,.\end{aligned}$$

Ésta es la desigualdad deseada. □

Emilio Gagliardo

Louis Nirenberg

Teorema 17.4. *Existen constantes $C > 0$, que dependen únicamente de n y p, con las siguientes propiedades:*

(a) ***Desigualdad de Gagliardo[1]-Nirenberg[2]-Sobolev:*** *Si $p \in [1, n)$ entonces*

$$\|\varphi\|_{p^*} \leq C \, \|\nabla\varphi\|_p \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{17.4}$$

(b) Si $p \in (n, \infty)$ entonces

$$\|\varphi\|_\infty \leq C \, |\mathrm{sop}(\varphi)|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \, \|\nabla\varphi\|_p \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{17.5}$$

donde $|\mathrm{sop}(\varphi)|$ denota la medida del soporte de φ.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$. Como φ tiene soporte compacto, el teorema fundamental del cálculo asegura que

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) dt$$

para cada $1 \leq i \leq n$ y, en consecuencia,

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right| dt. \tag{17.6}$$

[1] Emilio Gagliardo (1930-2008) nació en Génova, Italia. Estudió en la Universidad de Génova, donde fue asistente de Guido Stampacchia con quien realizó sus primeros trabajos en ecuaciones diferenciales. Fue profesor en las universidades de Génova y Pavia.

[2] Louis Nirenberg (1925-2020) nació en Hamilton, Ontario, Canadá. Obtuvo el doctorado en la Universidad de Nueva York bajo la dirección de James Stoker. Es profesor en el Courant Institute of Mathematical Sciences de dicha universidad.

Si $n \geq 2$ definimos

$$f_i(z_1, , \ldots, z_{n-1}) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(z_1, \ldots, z_{i-1}, t, z_i, \ldots, z_{n-1}) \right| dt \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Entonces $f_1, \ldots, f_n \in L^{n-1}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ y

$$\| f_i \|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Elevando las desigualdades (17.6) a la $\frac{1}{n-1}$ y tomando el producto de todas ellas obtenemos

$$|\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} f_i(\widehat{x}_i),$$

donde $\widehat{x}_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Aplicando el Lema 17.3 se tiene entonces que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{n}{n-1}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(\widehat{x}_i) \right) \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_1^{\frac{1}{n-1}}.$$

Por tanto,

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_1^{\frac{1}{n}} \tag{17.7}$$

y como la media geométrica es menor o igual que la media aritmética concluimos que

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_1 = \frac{1}{n} \|\nabla \varphi\|_1. \tag{17.8}$$

Por otra parte, para cada $\gamma > 1$, reemplazando a φ por $|\varphi|^{\gamma-1} \varphi$ en la desigualdad (17.7) y aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{n\gamma}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \gamma \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\gamma-1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_p^{\frac{1}{n}} \\ &< \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla \varphi\|_p, \end{aligned} \tag{17.9}$$

donde la última desigualdad se obtiene aplicando el Ejercicio 2.42 como sigue:

$$\prod_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_p^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_p \leq \frac{n^{\frac{p-1}{p}}}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} < \|\nabla\varphi\|_p\,.$$

Usaremos las desigualdades anteriores para probar las afirmaciones del teorema.

(a): Supongamos que $p \in [1,n)$. Si $p = 1$ entonces $p^* = \frac{n}{n-1}$ y la desigualdad (17.8) es la desigualdad deseada. Si $p \neq 1$ tomamos $\gamma := \frac{n-1}{n}p^*$. Nota que $\gamma > 1$, que $\frac{p(\gamma-1)}{p-1} = \frac{n\gamma}{n-1} = p^*$ y que $\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^*}$. De la desigualdad (17.9) se sigue entonces que

$$\|\varphi\|_{p^*} \leq \gamma\,\|\nabla\varphi\|_p\,.$$

(b): Supongamos que $p \in (n,\infty)$. Si $n = 1$, la desigualdad (17.6) y el Ejercicio 14.66 (con $X = \mathrm{sop}(\varphi)$) implican que

$$\|\varphi\|_\infty \leq \left\|\varphi'\right\|_1 \leq |\mathrm{sop}(\varphi)|^{\frac{p-1}{p}}\left\|\varphi'\right\|_p,$$

que es la desigualdad deseada.

Si $n \geq 2$ consideramos primero el caso en el que

$$|\mathrm{sop}(\varphi)| = 1 \qquad \text{y} \qquad \|\nabla\varphi\|_p = 1. \tag{17.10}$$

De la desigualdad (17.9) y el Ejercicio 14.66 se sigue entonces que

$$\|\varphi\|_{\frac{n\gamma}{n-1}} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\left(\|\varphi\|_{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\left(\|\varphi\|_{\frac{p\gamma}{p-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad \forall\gamma > 1.$$

Tomemos $\gamma := \frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p}$. Nota que $\gamma > 1$. Sustituyendo γ por γ^k en la desigualdad anterior y tomando en cuenta que $\frac{p}{p-1}\gamma^k = \frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}$ obtenemos

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^k} \leq \gamma^{\frac{k}{\gamma^k}}\left(\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}}\right)^{\frac{\gamma^k-1}{\gamma^k}}. \tag{17.11}$$

Como hemos supuesto que $|\mathrm{sop}(\varphi)| = 1$ y $\|\nabla\varphi\|_p = 1$, la desigualdad (17.8) y el Ejercicio 14.70 aseguran que

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \frac{1}{n}\|\nabla\varphi\|_1 \leq \frac{1}{n}(n\,|\mathrm{sop}(\varphi)|)^{\frac{p-1}{p}}\|\nabla\varphi\|_p < 1.$$

Si $\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^k} \leq 1$ para una infinidad de $k \in \mathbb{N}$, el Ejercicio 14.69 garantiza que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Si, por el contrario, existe $k_0 \geq 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^{k_0}} \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^k} > 1 \quad \forall k > k_0,$$

entonces

$$\left(\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}}\right)^{\frac{\gamma^k-1}{\gamma^k}} \leq \|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}} \quad \forall k > k_0+1,$$

e iterando la desigualdad (17.11) obtenemos

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^k} \leq \gamma^{\left(\frac{k}{\gamma^k}+\cdots+\frac{k_0+1}{\gamma^{k_0+1}}\right)}\left(\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}\gamma^{k_0}}\right)^{\frac{\gamma^{k_0+1}-1}{\gamma^{k_0+1}}} \leq \gamma^\alpha,$$

donde $\alpha := \sum_{i=1}^\infty \frac{i}{\gamma^i} < \infty$, ya que $\gamma > 1$. Aplicando nuevamente el Ejercicio 14.69 concluimos que $\|\varphi\|_\infty \leq \gamma^\alpha$. Así pues, si φ satisface (17.10), entonces

$$\|\varphi\|_\infty \leq \gamma^\alpha = \gamma^\alpha \left|\operatorname{sop}(\varphi)\right|^{\frac{p-n}{np}} \|\nabla\varphi\|_p\,. \tag{17.12}$$

Para probar la desigualdad (17.5) en el caso general observa primero que, si $|\operatorname{sop}(\varphi)| = 0$ o $\|\nabla\varphi\|_p = 0$, entonces $\varphi = 0$ y la desigualdad se satisface trivialmente. Si $|\operatorname{sop}(\varphi)| \neq 0$ y $\|\nabla\varphi\|_p \neq 0$, aplicamos la desigualdad (17.12) a la función $\theta := \frac{\psi}{\|\nabla\psi\|_p}$ donde $\psi(x) := \varphi(|\operatorname{sop}(\varphi)|^{1/n}x)$. Nota que $|\operatorname{sop}(\theta)| = |\operatorname{sop}(\psi)| = 1$ y que $\|\nabla\theta\|_p = 1$. Así que, aplicando el caso anterior obtenemos

$$\|\varphi\|_\infty = \|\psi\|_\infty \leq \gamma^\alpha \|\nabla\psi\|_p = \gamma^\alpha \left|\operatorname{sop}(\varphi)\right|^{\frac{p-n}{np}} \|\nabla\varphi\|_p\,,$$

como afirma el enunciado. □

La desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev se extiende por densidad a $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nota que, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, su gradiente $\nabla u = (D_1u, \ldots, D_nu)$ pertenece a $[L^p(\mathbb{R}^n)]^n$ y

$$\|\nabla u\|_p := \left(\|D_1u\|_p^p + \cdots + \|D_nu\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Corolario 17.5. *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1,n)$, entonces $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ y existe una constante $C > 0$, que depende únicamente de n y p, tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\,\|\nabla u\|_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y (φ_k) es una sucesión en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces $\|\varphi_k - u\|_p \to 0$ y $\|\nabla\varphi_k - \nabla u\|_p \to 0$. Por otra parte, de la desigualdad (17.4) se sigue que

$$\left\|\varphi_k - \varphi_j\right\|_{p^*} \leq C \left\|\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_j\right\|_p \leq C \left\|\varphi_k - \varphi_j\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, (φ_k) es una sucesión de Cauchy en $L^{p^*}(\Omega)$ y, en consecuencia, $\varphi_k \to v$ en $L^{p^*}(\Omega)$. Como además $\varphi_k \to u$ en $L^p(\Omega)$, el Teorema 14.28 asegura que una subsucesión de (φ_k) converge tanto a u como a v c.d. en Ω. Por tanto, $u(x) = v(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$. Esto implica que $u \in L^{p^*}(\Omega)$ y, usando de nueva cuenta la desigualdad (17.4), obtenemos

$$\|u\|_{p^*} = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_k\|_{p^*} \leq C \lim_{n\to\infty} \|\nabla\varphi_k\|_p = C\,\|\nabla u\|_p\,,$$

que es la desigualdad deseada. □

La desigualdad anterior tiene la siguiente consecuencia importante.

Teorema 17.6 (de encaje de Sobolev)**.** *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, n)$, entonces*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [p, p^*]$$

y esta inclusión es continua.

Demostración. El Corolario 17.5 afirma que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ y que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{p^*} \leq C\,\|\nabla u\|_p \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{17.13}$$

Como además $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, la desigualdad de interpolación (ver Ejercicio 14.67) asegura que $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $q \in [p, p^*]$ y que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^{1-\alpha}\,\|u\|_{p^*}^{\alpha} \leq C^\alpha\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1-\alpha}\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\alpha} = C^\alpha\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,,$$

donde $\alpha \in [0,1]$ cumple que $\frac{1}{q} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{p^*}$. Esto prueba que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ y que esta inclusión es continua. □

Vale la pena hacer notar lo siguiente.

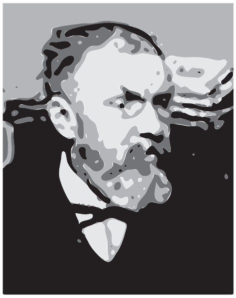
Observaciones 17.7. *(a) Si φ no tiene soporte compacto la desigualdad* (17.4) *no es válida en general: ciertamente no se cumple para la función constante $\varphi \equiv 1$.*

(b) *Si* $p = n$ *se cumple que* $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [n, \infty)$ *y esta inclusión es continua. Proponemos la demostración de esta afirmación como ejercicio* [Ejercicio 17.23].

(c) *Para* $p \in (n, \infty)$ *se cumple que* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ *y esta inclusión es continua*[3].

(d) *La inclusión* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *se tiene bajo ciertas condiciones, por ejemplo, si* Ω *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *y su frontera está acotada*[4].

Cuando Ω es acotado es posible acotar a $\|u\|_q$ en términos de $\|\nabla u\|_p$ y de la medida de Ω para un rango mayor de valores de p y q. La siguiente desigualdad se conoce como la desigualdad de Poincaré[5].



Henri Poincaré

Teorema 17.8 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea* Ω *un subconjunto abierto y acotado de* $\mathbb{R}^n$*. Existe una constante* $C > 0$*, que depende sólo de* n, p *y* q*, tal que*

$$\|u\|_q \leq C\, |\Omega|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\, \|\nabla u\|_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{17.14}$$

si alguna de las siguientes tres condiciones se satisface:

(a) $p \in [1, n)$ *y* $q \in [1, p^*]$.

(b) $p = n$ *y* $q \in [1, \infty)$.

(c) $p \in (n, \infty)$ *y* $q \in [1, \infty]$.

[3] Consulta, por ejemplo, [Bré84], Corolario IX.13.
[4] Consulta [Bré84], Corolario IX.14.
[5] Jules Henri Poincaré (1854-1912) nació en Nancy, Francia. Estudió en la École Polytechnique, donde fue alumno de Charles Hermite. Fue profesor de la Universidad de París (la Sorbonne). Realizó contribuciones fundamentales en diversos campos de la matemática.

En consecuencia,

- *si* $p \in [1,n)$ *entonces* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para cada* $q \in [1,p^*]$ *y la inclusión es continua,*
- $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para cada* $q \in [1,\infty)$ *y la inclusión es continua,*
- *y, más aún, si* $p \in (n,\infty)$ *entonces, módulo la elección de un representante,* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ *y la inclusión es continua.*

Demostración. (a): Si $p \in [1,n)$ y $q \in [1,p^*]$, aplicando las desigualdades de la Proposición 14.31 y el Corolario 17.5 obtenemos que

$$\|u\|_q \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \|u\|_{p^*} \leq C\,|\Omega|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(b): Sean $p = n$ y $q \in [1,\infty)$. Si $n = 1$ se sigue de (17.6) que

$$\|\varphi\|_q = \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_\Omega \|\varphi'\|_1^q\right)^{\frac{1}{q}} = |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|\varphi'\|_1 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Argumentando como en el Corolario 17.5 concluimos que

$$\|u\|_q \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|Du\|_1 \qquad \forall u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Si $n \geq 2$ definimos $r := \max\left\{\frac{nq}{n+q}, 1\right\}$. Observa que $r \in [1,n)$. Nota además que $r^* = q$ si $r = \frac{nq}{n+q}$ y que $q \leq \frac{n}{n-1}$ si $r = 1$. En consecuencia, de la afirmación *(a)*, la Proposición 14.31 y el Ejercicio 14.70 se sigue que, para toda $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$,

$$\|u\|_q \leq C\,\|\nabla u\|_r \leq C n^{\frac{1}{q}}\,|\Omega|^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_n \qquad \text{si } r = \frac{nq}{n+q},$$

$$\begin{aligned}\|u\|_q \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{n-1}{n}} \|u\|_{\frac{n}{n-1}} &\leq C\,|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{n-1}{n}} \|\nabla u\|_1 \\ &\leq C n^{\frac{n-1}{n}}\,|\Omega|^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_n \qquad \text{si } r = 1.\end{aligned}$$

(c): Sean $p \in (n,\infty)$ y $q \in [1,\infty]$. De la desigualdad (17.5) se sigue que

$$\|\varphi\|_\infty \leq C\,|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla\varphi\|_p \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \tag{17.15}$$

Recuerda que $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach (ver Teorema 5.21). Así que, argumentando como en el Corolario 17.5 se prueba que cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

coincide c.d. con una función que pertenece a $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y que la desigualdad (17.15) es válida para u. Combinando esa desigualdad con la Proposición 14.31 obtenemos

$$\|u\|_q \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u\|_\infty \leq C\, |\Omega|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p \,,$$

que es la desigualdad deseada. $\square$

La desigualdad de Poincaré permite reemplazar a la norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$ por $\|\nabla u\|_p$. Más precisamente, se cumple lo siguiente.

Corolario 17.9. *Sea $p \in [1,\infty)$. Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ entonces*

$$\|u\| := \|\nabla u\|_p$$

es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

En consecuencia, $W_0^{1,p}(\Omega)$ con esta nueva norma también es un espacio de Banach. Si $p=2$ esta norma está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^n \int_\Omega (D_i u)\,(D_i v)\,, \qquad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

De modo que $H_0^1(\Omega)$ con este producto escalar resulta ser un espacio de Hilbert.

Demostración. El Teorema 17.8 asegura que existe una constante C, que depende sólo de n y p, tal que

$$\|u\|_p \leq C\, |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tomando $C_0 := C\, |\Omega|^{\frac{1}{n}}$ obtenemos

$$\|u\| \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(C_0^p + 1\right)^{1/p} \|u\| \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Estas desigualdades implican, en particular, que

$$\|u\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0.$$

Así que $\|\cdot\|$ satisface la propiedad (N1) de la Definición 2.9. Las propiedades (N2) y (N3) se prueban como en la Proposición 16.12. Las mismas desigualdades aseguran que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ son equivalentes. $\square$

17.2. El teorema de Rellich-Kondrashov

Cuando Ω es acotado y $q < p^*$ la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ tiene una propiedad adicional: es un operador compacto. En esta sección probaremos esta afirmación.

Definición 17.10. *Una función $F : X \to Y$ entre espacios métricos es **compacta** si para cualquier subconjunto acotado A de X el conjunto $F(A) := \{F(a) : a \in A\}$ es relativamente compacto en Y.*

Equivalentemente, una función $F : X \to Y$ entre espacios métricos es compacta si para cualquier sucesión acotada (x_k) en X, la sucesión $(F(x_k))$ contiene una subsucesión convergente en Y [Ejercicio 17.19].

Empezaremos probando el siguiente lema.

Lema 17.11. *Si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$\left\|\mathrm{T}_\xi u - u\right\|_1 \leq \|\nabla u\|_1 \, \|\xi\| \, ,$$

donde $\mathrm{T}_\xi u$ denota a la traslación de u por ξ, es decir, $\left(\mathrm{T}_\xi u\right)(x) = u(x - \xi)$.

Demostración. Sean $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(t) := \varphi(x - t\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, obtenemos que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi(x-\xi) - \varphi(x) = f(1) - f(0) = f'(t_0) = -\nabla\varphi(x - t_0\xi) \cdot \xi.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |\varphi(x-\xi) - \varphi(x)| &= |\nabla\varphi(x - t_0\xi) \cdot \xi| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x - t_0\xi)\right| |\xi_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x - t_0\xi)\right|\right) \|\xi\| \, . \end{aligned}$$

Integrando esta desigualdad respecto a x concluimos que

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{T}_\xi\varphi - \varphi\right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-\xi) - \varphi(x)| \, dx \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x - t_0\xi)\right| dx\right) \|\xi\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_1\right) \|\xi\| = \|\nabla\varphi\|_1 \, \|\xi\| \, . \end{aligned}$$

Si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, tomamos una sucesión (φ_k) en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\|\varphi_k - u\|_1 \to 0$, $\|\mathrm{T}_\xi \varphi_k - \mathrm{T}_\xi u\|_1 \to 0$ y $\|\nabla\varphi_k - \nabla u\|_1 \to 0$. De la desigualdad anterior se sigue que

$$\|\mathrm{T}_\xi u - u\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|\mathrm{T}_\xi \varphi_k - \varphi_k\|_1 \leq \lim_{k\to\infty} \|\nabla\varphi_k\|_1 \|\xi\| = \|\nabla u\|_1 \|\xi\|,$$

como afirma el enunciado. $\square$

El siguiente resultado, debido a Franz Rellich[6] y Vladimir Kondrashov[7], juega un papel crucial en la demostración de la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.

Franz Rellich

Vladimir Kondrashov

Teorema 17.12 (Rellich-Kondrashov)**.** *Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, n)$ y $q \in [1, p^*)$, entonces la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta, es decir, toda sucesión acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ contiene una subsucesión que converge en $L^q(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto acotado de $W_0^{1,p}(\Omega)$. La desigualdad de Poincaré (ver Teorema 17.8) implica que $\mathcal{A}$ es un subconjunto acotado de $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*]$. Como de costumbre, identificamos a una función definida en un abierto

[6] Franz Rellich (1906-1955) nació en Tramin, en el norte de Italia. Estudió en la Universidad de Göttingen, donde fue alumno de Richard Courant. En 1933 se vió forzado a abandonar esa universidad debido a la posición activa que adoptó frente al nazismo. Regresó en 1946 y, como director del Instituto de Matemáticas, jugó un papel importante en su reconstrucción.

[7] Vladimir Iosifovich Kondrashov (1909-1971) nació en Moscú. Estudió en la Universidad Estatal de Moscú, donde fue alumno de Sergei Sobolev con quien continuó colaborando a lo largo de su vida. Fue profesor del Departamento de Alta Matemática del Instituto de Física de la Ingeniería de Moscú.

con su extensión trivial a todo $\mathbb{R}^n$, definida en (12.21). Probaremos que $\mathcal{A}$ satisface las hipótesis *(i)* y *(ii)* del Corolario 14.47 cuando $q \in [1, p^*)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y ω un abierto tal que $\omega \subset\subset \Omega$. Sea $C > 0$ tal que $\|u\|_{p^*} \leq C$ para todo $u \in \mathcal{A}$. Como la integral es invariante bajo traslaciones se tiene que $\left\|\mathrm{T}_\xi u\right\|_{p^*} \leq C$ para todo $u \in \mathcal{A}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Usando la desigualdad de interpolación (ver Ejercicio 14.67), el Lema 17.11 y el Ejercicio 14.70, concluimos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{T}_\xi u - u\right\|_q &\leq \left\|\mathrm{T}_\xi u - u\right\|_1^\alpha \left\|\mathrm{T}_\xi u - u\right\|_{p^*}^{1-\alpha} \\ &\leq (2C)^{1-\alpha} \left\|\mathrm{T}_\xi u - u\right\|_1^\alpha \leq (2C)^{1-\alpha} \|\nabla u\|_1^\alpha \|\xi\|^\alpha \\ &\leq (2C)^{1-\alpha} (n\,|\Omega|)^{\frac{\alpha(p-1)}{p}} \|\nabla u\|_p^\alpha \|\xi\|^\alpha \leq C_1 \|\xi\|^\alpha \qquad \forall u \in \mathcal{A},\end{aligned}$$

donde α satisface $\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{p^*}$. Observa que $\alpha > 0$ si $q \in [1, p^*)$. En consecuencia, tomando $\delta \in (0,\mathrm{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega))$ tal que $\delta < (\frac{\varepsilon}{C_1})^{\frac{1}{\alpha}}$ se tiene que

$$\left\|\mathrm{T}_\xi u - u\right\|_q < \varepsilon \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|\xi\| < \delta \quad \text{y} \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Así pues, $\mathcal{A}$ satisface la hipótesis *(i)* del Corolario 14.47 cuando $q \in [1, p^*)$.

Por otra parte, la Proposición 14.31 asegura que, para cualquier abierto $\omega \subset \Omega$,

$$\|u\|_{L^q(\Omega \smallsetminus \omega)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \smallsetminus \omega)} |\Omega \smallsetminus \omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}} \leq C\,|\Omega \smallsetminus \omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}} \qquad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Puesto que Ω es acotado y $\beta := \frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} > 0$, podemos elegir un abierto $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $|\Omega \smallsetminus \omega| < (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\beta}}$. Se tiene entonces que

$$\|u\|_{L^q(\Omega \smallsetminus \omega)} < \varepsilon \qquad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Es decir, $\mathcal{A}$ satisface la hipótesis *(ii)* del Corolario 14.47 cuando $q \in [1, p^*)$.

En consecuencia, $\mathcal{A}$ es relativamente compacto en $L^q(\Omega)$. □

Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ se tiene también que la inclusión $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, \infty)$ y que la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es compacta para $p \in (n, \infty)$. Proponemos estas afirmaciones como ejercicio [Ejercicio 17.25].

Los siguientes ejemplos muestran que el teorema de Rellich-Kondrashov no es válido en general si Ω no es acotado o si $q = p^*$.

Ejemplo 17.13. *Sea $p \in [1, n)$. La inclusión $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ no es compacta para ningún $q \in [p, p^*]$.*

Demostración. Sean $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \neq 0$, y (ξ_k) una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|\xi_k\| \to \infty$. Definimos $\varphi_k(x) := \varphi(x - \xi_k)$. Claramente,

$$\|\varphi_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{y} \qquad \|\varphi_k\|_q = \|\varphi\|_q \,.$$

Observa que $\varphi_k(x) \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Si alguna subsucesión (φ_{k_j}) de (φ_k) convergiese a v en $L^q(\mathbb{R}^n)$, una subsucesión de ella convergería a v c.d. en $\mathbb{R}^n$ (ver Teorema 14.28) y, en consecuencia, $v = 0$ c.d. en $\mathbb{R}^n$. Pero también se tendría que

$$\|v\|_q = \lim_{j\to\infty} \left\|\varphi_{k_j}\right\|_q = \|\varphi\|_q \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, ninguna subsucesión de (φ_k) converge en $L^q(\mathbb{R}^n)$. □

Denotamos por

$$B^n(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} \,.$$

Ejemplo 17.14. *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, n)$. Entonces la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ no es compacta.*

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que $0 \in \Omega$. Elegimos $r > 0$ de modo que $B^n(0,r) \subset \Omega$ y tomamos $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B^n(0,r))$ tal que $\varphi \neq 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_k(x) := k^{(n-p)/p}\varphi(kx)$. Entonces $\operatorname{sop}(\varphi_k) \subset B^n(0, \frac{r}{k}) \subset \Omega$ y, en consecuencia, $\varphi_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\varphi_k(x) \to 0$ para cada $x \neq 0$.

Mediante el cambio de variable $kx = y$ se obtiene que

$$\|\varphi_k\|_{p^*}^{p^*} = \int_\Omega k^n \, |\varphi(kx)|^{p^*} \, dx = \int_\Omega |\varphi(y)|^{p^*} \, dy = \|\varphi\|_{p^*}^{p^*}$$

y

$$\|\nabla\varphi_k\|_p^p = \sum_{i=1}^n \int_\Omega k^n \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(kx)\right|^p dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y)\right|^p dy = \|\nabla\varphi\|_p^p \,.$$

El Corolario 17.9 asegura entonces que (φ_k) está acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si una subsucesión (φ_{k_j}) de (φ_k) convergiese a una función u en $L^{p^*}(\Omega)$, se tendría que

$$\|u\|_{p^*} = \lim_{j\to\infty} \left\|\varphi_{k_j}\right\|_{p^*} = \|\varphi\|_{p^*} \neq 0$$

y que una subsucesión de (φ_{k_j}) convergería puntualmente a u c.d. en Ω (ver Teorema 14.28). Pero $\varphi_k(x) \to 0$ para cada $x \neq 0$. Por tanto, $u = 0$ c.d. en Ω. Esta es una contradicción; lo que prueba que (φ_k) no contiene ninguna subsucesión convergente en $L^{p^*}(\Omega)$. $\square$

A continuación daremos una aplicación importante del teorema de Rellich-Kondrashov.

17.3. Valores propios del laplaciano

En toda esta sección Ω denotará a un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{17.16}$$

Nos preguntamos para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ existe una solución no trivial de este problema.

Argumentando como en la Proposición 16.27 vemos que, si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ satisface $-\Delta u = \lambda u$, entonces

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Esto motiva la definición de solución débil.

Definición 17.15. *Una solución débil de* (17.16) *es una pareja* (λ, u) *con* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{17.17}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ *es un* ***valor propio de*** $-\Delta$ ***en*** $H_0^1(\Omega)$ *si existe* $e \in H_0^1(\Omega)$, $e \neq 0$, *tal que* (λ, e) *es solución débil de* (17.16). *Se dice entonces que* e *es una* ***función propia de*** $-\Delta$ ***en*** $H_0^1(\Omega)$ ***con valor propio*** λ.

La definición anterior sugiere considerar el producto escalar

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

en $H_0^1(\Omega)$, que induce la norma

$$\|u\| := \|\nabla u\|_2 .$$

El Corolario 17.9 asegura que esta norma es equivalente a la definida en (16.6) y que $H_0^1(\Omega)$ un espacio de Hilbert con este nuevo producto escalar.

Denotamos por

$$\langle u, v\rangle_2 := \int_\Omega uv$$

al producto escalar en $L^2(\Omega)$. Podemos entonces reescribir la condición (17.17) como

$$\langle u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle_2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observa que, si e es una función propia con valor propio λ entonces cualquier múltiplo te de e con $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ es una función propia con valor propio λ. Basta pues buscar funciones propias en el conjunto

$$\Sigma := \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_2 = 1\right\},$$

donde $\|u\|_2$ es la norma en $L^2(\Omega)$.

Nota además que, si $e \in \Sigma$ es una función propia con valor propio λ, tomando $u = v = e$ en la ecuación (17.17), se obtiene que

$$\|e\|^2 = \lambda. \tag{17.18}$$

Proposición 17.16. *(a) Los valores propios de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ están acotados inferiormente por una constante positiva.*

(b) Si λ y μ son valores propios distintos de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, y e_λ y e_μ son funciones propias con valores propios λ y μ respectivamente, entonces

$$\left\langle e_\lambda, e_\mu\right\rangle = 0 = \left\langle e_\lambda, e_\mu\right\rangle_2.$$

(c) Si $\{e_k \in \Sigma : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de funciones propias de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ que es ortonormal en $L^2(\Omega)$, entonces el conjunto de sus valores propios

$$\left\{\lambda_k = \|e_k\|^2 : k \in \mathbb{N}\right\}$$

no está acotado.

(d) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el espacio

$$E_\lambda := \left\{u \in H_0^1(\Omega) : (\lambda, u) \textit{ es solución débil de } (17.16)\right\}$$

*es de dimensión finita. Su dimensión se llama la **multiplicidad de** λ.*

Demostración. *(a):* Si λ es un valor propio y $e \in \Sigma$ es una función propia con valor propio λ, la desigualdad de Poincaré asegura que existe $C > 0$, independiente de λ y de e, tal que

$$1 = \|e\|_2^2 \leq C \|e\|^2 = C\lambda.$$

Por tanto, $\lambda \geq \frac{1}{C} > 0$.

(b): Si e_λ y e_μ son funciones propias con valores propios λ y μ, entonces

$$\lambda \left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle_2 = \left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle = \mu \left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle_2.$$

Por tanto, si $\lambda \neq \mu$, necesariamente $\left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle_2 = 0$ y, en consecuencia, $\left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle = 0$.

(c): Como $e_k \in \Sigma$ se cumple que $\|e_k\|^2 = \lambda_k$. De modo que, si (λ_k) está acotada, entonces (e_k) es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por el Teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 17.12), (e_k) contiene una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$. Ahora bien, como $\{e_k\}$ es ortonormal en $L^2(\Omega)$, se tiene que

$$\|e_k - e_m\|_2^2 = \|e_k\|_2^2 + \|e_m\|_2^2 = 2.$$

En consecuencia, ninguna subsucesión de (e_k) es de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Esto es una contradicción.

(d): Argumentando por contradicción, si $\dim E_\lambda = \infty$, entonces E_λ contiene un subconjunto $\{e_k \in \Sigma : k \in \mathbb{N}\}$ ortonormal en $L^2(\Omega)$ (ver Ejercicio 15.44). Para cada $k \in \mathbb{N}$, e_k es una función propia de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ con valor propio λ, lo cual contradice la afirmación *(c)*. □

Definimos $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$I(u) := \|u\|^2.$$

La siguiente proposición nos permite obtener funciones propias mediante un proceso de minimización.

Proposición 17.17. *Sea $H \neq \{0\}$ un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)$.*

(a) Se tiene que

$$\lambda := \inf_{v \in \Sigma \cap H} I(v) > 0.$$

(b) Si e es un mínimo de I en $\Sigma \cap H$ entonces

$$\langle e, v \rangle = \lambda \langle e, v \rangle_2 \qquad \forall v \in H.$$

(c) Si H es cerrado en $H_0^1(\Omega)$ entonces la función I alcanza su mínimo en $\Sigma \cap H$.

Demostración. (a): La desigualdad de Poincaré para $p = q = 2$ (ver Teorema 17.8) asegura que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_2 \leq C\, |\Omega|^{\frac{1}{n}}\, \|u\| \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, $\lambda \geq C^{-2}\, |\Omega|^{-\frac{2}{n}} > 0$.

(b): Sea e un mínimo de I en $\Sigma \cap H$ y sea $v \in H$. Tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña de modo que $\|e + tv\|_2 \neq 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, y consideremos la función $h\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) := I\left(\frac{e + tv}{\|e + tv\|_2}\right) = \frac{\|e + tv\|^2}{\|e + tv\|_2^2} = \frac{\|e\|^2 + 2\,\langle e, v\rangle\, t + \|v\|^2\, t^2}{\|e\|_2^2 + 2\,\langle e, v\rangle_2\, t + \|v\|_2^2\, t^2}.$$

Esta función es diferenciable y su derivada está dada por

$$h'(t) = \frac{2\,\|e + tv\|_2^2 \left(\langle e, v\rangle + \|v\|^2\, t\right) - 2I(e + tv)\left(\langle e, v\rangle_2 + \|v\|_2^2\, t\right)}{\|e + tv\|_2^4}.$$

Como 0 es un mínimo de h, se tiene que

$$0 = h'(0) = 2\left(\langle e, v\rangle - \lambda\,\langle e, v\rangle_2\right).$$

Esto demuestra la afirmación.

(c): Sea (u_k) una sucesión en $\Sigma \cap H$ tal que $I(u_k) = \|u_k\|^2 \to \lambda$. Entonces (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Aplicando el Teorema 15.29, el teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 17.12) y el Ejercicio 15.51, concluimos que (u_k) contiene una subsucesión (u_{k_j}) tal que

$$u_{k_j} \rightharpoonup e \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega),$$

$$u_{k_j} \to e \quad \text{fuertemente en } L^2(\Omega).$$

En consecuencia, $\|e\|_2 = 1$, es decir, $e \in \Sigma$. Más aún, como H es débilmente cerrado en $H_0^1(\Omega)$ (ver Ejercicio 15.54), se tiene que $e \in H$. Usando el Corolario 15.27 concluimos que

$$\lambda \leq I(e) = \|e\|^2 \leq \liminf_{j\to\infty} \left\|u_{k_j}\right\|^2 = \liminf_{j\to\infty} I(u_{k_j}) = \lambda.$$

Esto prueba que e es un mínimo de I en $\Sigma \cap H$. $\square$

Teorema 17.18. *Existe un subconjunto $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ de $H_0^1(\Omega)$ con las siguientes propiedades:*

(a) $e_k \in \Sigma$ *es una función propia de* $-\Delta$ *en* $H_0^1(\Omega)$ *con valor propio* $\lambda_k := I(e_k)$*,*

(b) $\langle e_k, e_m \rangle = 0$ *si* $k \neq m$*,*

(c) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ *y* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$*,*

(d) $\mathcal{B}$ *es una base de Hilbert de* $L^2(\Omega)$*.*

Demostración. Usando la Proposición 17.17 definimos (e_k) inductivamente como sigue: escogemos $e_1 \in \Sigma$ tal que

$$I(e_1) = \inf_{u \in \Sigma} I(u).$$

Sean $W_2 := \operatorname{lin}\{e_1\}$ el subespacio de $H_0^1(\Omega)$ generado por e_1 y

$$H_2 := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \langle e_1, v \rangle = 0 \right\}$$

su complemento ortogonal en $H_0^1(\Omega)$. Escogemos $e_2 \in \Sigma \cap H_2$ tal que

$$I(e_2) = \inf_{u \in \Sigma \cap H_2} I(u).$$

Continuando de este modo, definimos

$$W_k := \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}, \qquad H_k := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \langle w, v \rangle = 0 \ \ \forall w \in W_k \right\},$$

y escogemos $e_k \in \Sigma \cap H_k$ tal que

$$I(e_k) = \inf_{u \in \Sigma \cap H_k} I(u). \tag{17.19}$$

Se tiene entonces que

$$H_i \supset H_k \qquad \text{y} \qquad \langle e_k, e_i \rangle = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, k-1, \tag{17.20}$$

y usando la Proposición 17.17 concluimos que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots, \tag{17.21}$$

donde $\lambda_k := I(e_k)$, y que

$$\langle e_k, v \rangle = \lambda_k \langle e_k, v \rangle_2 \qquad \forall v \in H_k. \tag{17.22}$$

De (17.20) y (17.22) se sigue que $0 = \langle e_i, e_k \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_k \rangle_2$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$ y, dado que $\lambda_i > 0$, esta igualdad implica que

$$0 = \langle e_i, e_k \rangle = \langle e_i, e_k \rangle_2 \qquad \forall i = 1, \ldots, k-1. \tag{17.23}$$

Como $H_0^1(\Omega) = W_k \oplus H_k$, las afirmaciones (17.22) y (17.23) nos permiten concluir que

$$\langle e_k, v \rangle = \lambda_k \langle e_k, v \rangle_2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, la sucesión (e_k) satisface *(a)*. La afirmación (17.23) asegura que se cumple *(b)* y, como $e_k \in \Sigma$, asegura también que $\mathcal{B} := \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es ortonormal en $L^2(\Omega)$. La afirmación *(c)* se sigue entonces de (17.21) y de la Proposición 17.16.

Para obtener *(d)* resta probar que la cerradura de $\mathrm{lin}(\mathcal{B}) = \cup_{k=2}^{\infty} W_k$ en $L^2(\Omega)$ es $L^2(\Omega)$. Para ello basta demostrar que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ está contenido en la cerradura de $\mathrm{lin}(\mathcal{B})$, ya que $L^2(\Omega)$ es la cerradura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ (ver Teorema 14.44).

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \smallsetminus \mathrm{lin}(\mathcal{B})$. Denotemos por w_k a la proyección ortogonal de φ sobre W_k con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Entonces $\langle \varphi - w_k, w \rangle_2 = 0$ para todo $w \in W_k$. En consecuencia,

$$\langle \varphi - w_k, e_i \rangle = \lambda_i \langle \varphi - w_k, e_i \rangle_2 = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, k-1.$$

Esto prueba que $\langle \varphi - w_k, w \rangle = 0$ para todo $w \in W_k$. Como $\varphi \neq w_k$ se tiene que $\frac{\varphi - w_k}{\|\varphi - w_k\|_2} \in \Sigma \cap H_k$ y la identidad (17.19) implica que

$$\lambda_k \leq I\left(\frac{\varphi - w_k}{\|\varphi - w_k\|_2}\right).$$

Observa además que

$$\begin{aligned} I(\varphi) = I(\varphi - w_k + w_k) &= \|\varphi - w_k\|^2 + 2\langle \varphi - w_k, w_k \rangle + \|w_k\|^2 \\ &= \|\varphi - w_k\|^2 + \|w_k\|^2 \geq \|\varphi - w_k\|^2 = I(\varphi - w_k). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\varphi - w_k\|_2^2 \leq \lambda_k^{-1} I(\varphi - w_k) \leq \lambda_k^{-1} I(\varphi).$$

Como $\lambda_k \to \infty$ concluimos que $w_k \to \varphi$ en $L^2(\Omega)$. Esto prueba que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ está contenido en la cerradura de $\mathrm{lin}(\mathcal{B})$ en $L^2(\Omega)$. □

Observa que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2},$$

es decir, $\lambda_1^{-1/2}$ es la constante óptima para la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_2 \leq \lambda_1^{-1/2} \|u\|, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

El teorema anterior asegura la existencia de soluciones débiles (λ_k, e_k) del problema (17.16). El mismo razonamiento que usamos para probar la Proposición 16.31 demuestra que, si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$ y $e_k \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces (λ_k, e_k) es solución clásica de (17.16) [Ejercicio 17.27].

Se tiene también un resultado de regularidad que asegura que, si Ω es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y (λ_k, e_k) es solución débil de (17.16), entonces $e_k \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$[8].

17.4. Ejercicios

Ejercicio 17.19. *Prueba que una función $F: X \to Y$ entre espacios métricos es compacta si y sólo si para cualquier sucesión acotada (x_k) en X, la sucesión $(F(x_k))$ contiene una subsucesión convergente en Y.*

Ejercicio 17.20. *Sea $F: X \to Y$ una función lineal y continua entre espacios de Banach. Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) Si $\dim X < \infty$ *entonces F es compacta.*

(b) Si $\dim Y < \infty$ *entonces F es compacta.*

Ejercicio 17.21. *Prueba que, si* $\dim X = \infty$*, la identidad $I: X \to X$ no es compacta.*

Ejercicio 17.22. *(a) Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Prueba que existe una constante $C > 0$, que depende sólo de n, $\|\varphi\|_\infty$, $\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right\|_\infty, \ldots, \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right\|_\infty$, tal que*

$$\|u\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq C \int_\Omega \left(|u|^p + |D_1 u|^p + \cdots + |D_n u|^p\right) \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

(Sugerencia: Usa el Ejercicio 16.42.)

[8] Consulta, por ejemplo, [GT01], Teorema 8.13.

(b) Si ω es abierto y $\omega \subset\subset \Omega$, prueba que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n, p, ω y Ω, tal que

$$\left(\int_\omega |u|^{p^*}\right)^{p/p^*} \leq C \int_\Omega \left(|u|^p + |D_1 u|^p + \cdots + |D_n u|^p\right) \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{17.24}$$

(Sugerencia: Prueba que existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in \omega$ y aplica el problema anterior y el Teorema 17.6.)

(c) Si ω es abierto, $\omega \subset\subset \Omega$, y C satisface (17.24)*, prueba que para esa misma C se cumple que*

$$\left(\int_{\omega+\xi} |u|^{p^*}\right)^{p/p^*} \leq C \int_{\Omega+\xi} \left(|u|^p + |D_1 u|^p + \cdots + |D_n u|^p\right)$$

para cualesquiera $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n$, donde $X + \xi := \{x + \xi : x \in X\}$.

Ejercicio 17.23. *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, prueba que $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $q \in [n, \infty)$ y que esta inclusión es continua.* (Sugerencia: Usa la desigualdad (17.9) y la de Young para demostrar que, si $\gamma > 1$, existe una constante C_γ, que depende sólo de γ, tal que

$$\|\varphi\|_{\frac{n\gamma}{n-1}} \leq C_\gamma \left(\|\varphi\|_{\frac{n(\gamma-1)}{n-1}} + \|\nabla\varphi\|_n\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Aplica esta desigualdad con $\gamma = n + i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, j$, para concluir que existe una constante $C_{n,j}$, que depende sólo de n y j, tal que

$$\|\varphi\|_{\frac{n(n+j)}{n-1}} \leq C_{n,j} \|\varphi\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

y aplica la desigualdad de interpolación para probar que

$$\|\varphi\|_q \leq C_{n,j} \|\varphi\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

si $q \in [n, \frac{n(n+j)}{n-1}]$.)

Ejercicio 17.24 (Espacios de Sobolev de orden superior)**.** Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ y $p \in [1, \infty]$. Se definen recursivamente

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{u \in L^p(\Omega) : u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ y } D_i u \in W^{m-1,p}(\Omega),\ i = 1, \ldots, n\right\},$$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_p^p + \|D_1 u\|_{W^{m-1,p}(\Omega)}^p + \cdots + \|D_n u\|_{W^{m-1,p}(\Omega)}^p\right)^{1/p}.$$

Es decir, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si sus derivadas débiles de orden $\leq m$,

$$D^{\alpha}u := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} u$$

con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m$, existen y pertenecen a $L^p(\Omega)$, donde

$$D_i^0 u := u \qquad \text{y} \qquad D_i^{\alpha_i} u := \underbrace{D_i \cdots D_i}_{\alpha_i \text{ veces}} u \quad \text{si } \alpha_i \geq 1.$$

(Nota que todas las derivadas débiles de orden $\leq m$ son de esta forma, ver Ejercicio 16.46). Usando esta notación,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

(a) Prueba que $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ es una norma en $W^{m,p}(\Omega)$ y que $W^{m,p}(\Omega)$ con dicha norma es un espacio de Banach.

Se define
$$W_0^{m,p}(\Omega) := \text{ cerradura de } \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) \text{ en } W^{m,p}(\Omega).$$

(b) Prueba que, si $p \in [1, \frac{n}{m})$, entonces

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \text{con } q := \frac{np}{n - mp}$$

y esta inclusión es continua.

(c) Prueba que, si Ω está acotado y $p \in (\frac{n}{m}, \infty)$, entonces

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \qquad \text{con } k := m - \left[\frac{n}{p}\right] - 1$$

y esta inclusión es continua, donde la norma en $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ es la definida en el Ejercicio 5.48.

Ejercicio 17.25. *(a) Prueba que, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces la inclusión $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, \infty)$.* (Sugerencia: Reduce esta situación al caso $p \in [1, n)$ y usa el Teorema 17.12.)

(b) *Prueba que, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $p \in (n, \infty)$, entonces la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es compacta.* (Sugerencia: Usa el Corolario 7.10.)

(c) *Formula y demuestra las afirmaciones correspondientes a éstas y a la del* Teorema 17.12 *para los espacios de Sobolev de orden superior $W_0^{m,p}(\Omega)$ definidos en el* Ejercicio 17.24.

Ejercicio 17.26. *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$. Prueba que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

si y sólo si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ejercicio 17.27. *Prueba que, si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$, toda solución débil (λ, u) del problema* (17.16) *tal que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, es solución clásica de* (17.16), *es decir,*

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x) \;\; \forall x \in \Omega \qquad y \qquad u(x) = 0 \;\; \forall x \in \partial\Omega.$$

Ejercicio 17.28. *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.*

(a) *Prueba que, para cada $\lambda > -\lambda_1$,*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega),\lambda} := \left(\lambda \int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$ y que está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} := \lambda \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

(b) *Prueba que todas estas normas son equivalentes. En consecuencia, $H_0^1(\Omega)$ es completo con cualquiera de estas normas.*

(c) *Si $\lambda = -\lambda_1$, ¿es cierto que*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega),-\lambda_1} := \left(-\lambda_1 \int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 17.29. *Prueba que, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, $f \in L^2(\Omega)$ y $\lambda > -\lambda_1$, el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \textit{en } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

tiene una única solución débil, es decir, existe una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Además, esta función minimiza el funcional $J_\lambda \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \lambda v^2\right) - \int_\Omega fv.$$

*A la ecuación $-\Delta u = f$ se le llama la **ecuación de Poisson**.*

Referencias

[AP93] A. Ambrosetti y G. Prodi. *A primer of nonlinear analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[Bar82] Robert G. Bartle. *Introducción al análisis matemático*. Mexico: Limusa, 1982.

[Bel37] E.T. Bell. *Men of mathematics*. New York: Simon y Schuster, 1937.

[Bré84] Haïm Brézis. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

[CJ74] R. Courant y F. John. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Vol. 2. México: Limusa, 1974.

[Cos07] D.G. Costa. *An invitation to variational methods in differential equations*. Boston: Birkhäuser, 2007.

[Die69] Jean Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Vol. 10-I. Pure and Applied Mathematics. New York-London: Academic Press, 1969.

[Dug89] P. Dugac. «Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue». En: *Arch. Internat. Hist. Sci.* 39 (1989). págs. 69–110.

[Eva88] L.C. Evans. *Partial differential equations*. Vol. 19. Graduate Studies in Math. Providence: Amer. Math. Soc., 1988.

[FIS03] S. Friedberg, A.J. Insel y L.E. Spence. *Linear Algebra*. New Jersey: Pearson Education, 2003.

[FLS66] R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. *The Feynman lectures on physics*. Vol. 2. Addison-Wesley, 1966.

[GT01] D. Gilbarg y N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2001.

[Jos98] Jürgen Jost. *Postmodern analysis*. Universitext. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[KF72] A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Moscú: Editorial MIR, 1972.

[MT98] J.E. Marsden y A.J. Tromba. *Cálculo vectorial*. México: Addison-Wesley, Pearson Educación, 1998.

[Nac60] Leopoldo Nachbin. *Integral de Haar*. Textos de Matemática núm. 7. Brasil: Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, 1960.

[Pri03] Carlos Prieto. *Topología básica*. México: Fondo de Cultura Económica, 2003.

[Rud64] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1964.

[Sch92] Laurent Schwartz. *Analyse I-IV*. Paris: Hermann, 1992.

Índice analítico