I Olimpiadas de Matemáticas Colegio Real Royal School

Prueba escrita categoría eastuler (9°, 10° y 11°)

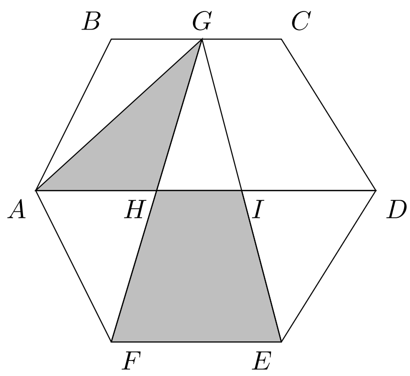
28 de Marzo de 2025

1 Instrucciones e Información

- No inicie la prueba hasta que la persona a cargo lo indique
- Esta prueba tiene preguntas cerradas y abiertas, solo es necesario argumentar las preguntas abiertas.
- En caso de que la pregunta sea abierta, asegúrese de escribir claramente la respuesta final en la hoja de respuestas.
- Las preguntas cerradas solo es necesario marcar la opción deseada en la hoja de respuestas.
- Los diagramas no están necesariamente dibujados a escala, se ofrecen únicamente como ayudas visuales.
- Se permite el uso de papel para operaciones, papel cuadriculado, regla y compás. No se permite ninguna otra ayuda.
- Tendrá exactamente 60 minutos para completar el mayor número de preguntas.

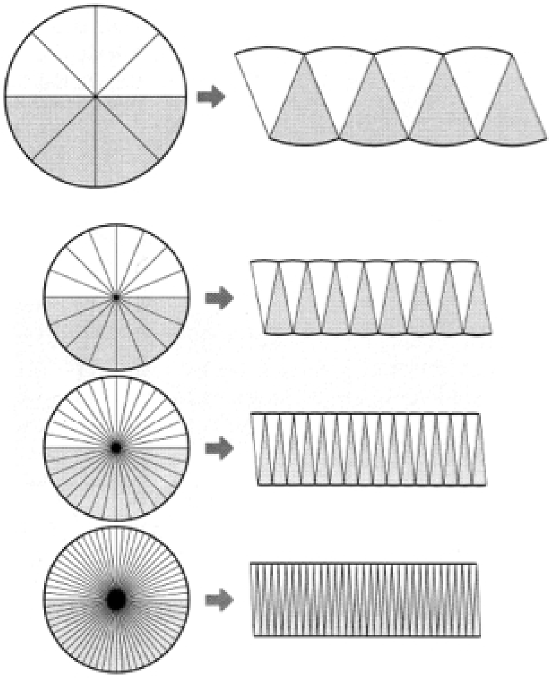
2 Prueba escrita

1. Sea ABCDEF un hexágono regular, y G el punto medio del segmento BC, ¿Cuál es la razón del área del triángulo AGH y el trapecio EHIF?



2. Si $a+b=10$ y $a^2+b^2=50$, ¿a cuanto equivale ab?
3. Sea f una función tal que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$. Hallar el valor de $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ si $f(1)=1/2$.

4. Si un círculo de diámetro 10 es dividido en muchas secciones y luego reorganizado para formar un rectángulo, ¿cuánto es la diferencia del perímetro del rectángulo y la circunferencia original del círculo?



5. Thor tiene siete rocas y un martillo. Cada vez que le pega a una roca con su martillo, se parte en cinco rocas más pequeñas. Si parte las rocas varias veces, ¿cual de los siguientes números puede ser el número de rocas que obtiene al final?

A. 17 B. 20 C. 21 D. 23 E. 25

6. El resultado de $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 97 - 98 + 99 - 100$ es igual a:

A. 0 B. 1 C. 50 D. -50 E. 101

7. ¿Cuántos dígitos tiene el número $4^8 * 5^{13}$?

A. 12 B. 13 C. 14 D. 15 E. N/A

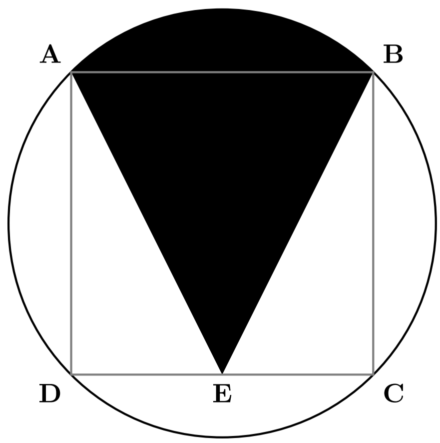
8. ¿Cuál es el valor de n?

$7n - 6n = (7 + 6)(7^2 + 6^2)(7^4 + 6^4)(7^8 + 6^8)(7^{16} + 6^{16}).....(7^{2048} + 6^{2048})$

9. ¿Cuál es el valor de la siguiente ecuación?

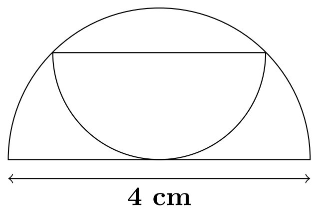
$$\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + ...}}}}$$

10. La siguiente figura consta de una circunferencia de 1 cm de radio con un cuadrado inscrito en ésta. Teniendo en cuenta que E es el punto medio del segmento DC, el área de la región de la sombreada es:



11. ¿Cuál es la suma de las soluciones de $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$?

12. Un semicírculo se encuentra inscrito dentro de otro semicírculo más grande como se muestra en la figura. ¿Cuál es el radio del semicírculo menor?

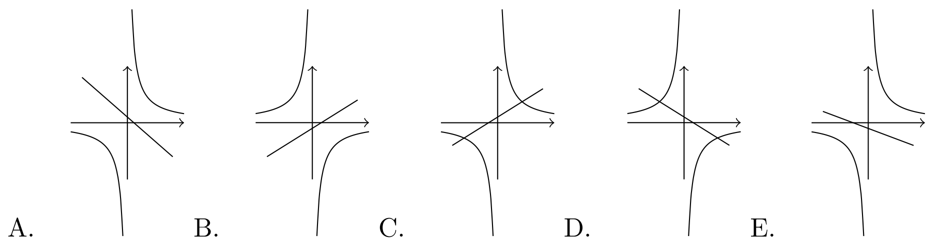


A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm   B. $\sqrt{2}$ mm   C. 2 cm   D. $\sqrt{2}$ cm   E. N/A

13. Sea k un número real distinto de cero. Se grafican dos funciones

$$f(x) = \frac{k}{x}, \quad g(x) = kx + k$$

sobre el mismo plano. ¿En cuál de las siguientes opciones se muestran correctamente las gráficas?



14. Considérese la ecuación p(x): ax$^{\mathbf{2}}$+bx+c=0, cuyos coeficientes a, b y c son distintos a cero y cada uno es solución de la ecuación que resulta de eliminar el término con ese coeficiente de p(x); por ejemplo, el coeficiente b es una solución para ax$^{\mathbf{2}}$+c=0. ¿Cuál es la suma de todas las soluciones de p(x)?

A. 1 B. -1 C. 2 D. -1 o 1 E. N/A

15. Para $n \geq 2$, sea k_n el producto $5 \cdot 10 \cdot 17 \cdot 26 \cdot \cdots \cdot (n^2+1)$, y sea

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{24}\right)\left(1 - \frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^4}\right).$$

¿Cuál es el valor de $\frac{S_n}{k_n}$?

a) $\frac{1}{2}\frac{1}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) $\frac{1}{k_n}\frac{n^2}{n^4+1}$

c) $\frac{n^4+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{n!}$

d) $\frac{1}{k_n n^4}\left(\frac{1}{(n-1)!^4}\right)$

e) N/A

16. Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional.