

Part I.

1. $(\lambda x.x)$
 $\Rightarrow \lambda x.x$
2. $(\lambda x.x) a$
 $\Rightarrow a$
3. $(\lambda x.x) (\lambda y.y)$
 $\Rightarrow \lambda y.y$
4. $(\lambda xyz.zyx) a b (\lambda xy.x)$
 $\Rightarrow (\lambda yz.zya) b (\lambda xy.x)$
 $\Rightarrow (\lambda z.zba) (\lambda xy.x)$
 $\Rightarrow (\lambda xy.x) b a$
 $\Rightarrow (\lambda y.b) a$
 $\Rightarrow b$
5. $(\lambda xyz.yxz) (\lambda ab.b) (\lambda cd.d)$
 $\Rightarrow (\lambda yz.y(\lambda ab.b)z) (\lambda cd.d)$
 $\Rightarrow \lambda z.(\lambda cd.d)(\lambda ab.b)z$
6. $(\lambda x.(\lambda yz.z)x) a$
 $\Rightarrow (\lambda yz.z) a$
 $\Rightarrow \lambda z.z$
7. $(\lambda xy.x(\lambda ab.a)y) (\lambda xy.x) (\lambda xy.y)$
 $\Rightarrow (\lambda y.(\lambda xy.x)(\lambda ab.a)y)(\lambda xy.y)$
 $\Rightarrow (\lambda xy.x) (\lambda ab.a) (\lambda xy.y)$
 $\Rightarrow (\lambda y.(\lambda ab.a))(\lambda xy.y)$
 $\Rightarrow \lambda ab.a$
8. $(\lambda a.a) (\lambda ab.ab) (\lambda a.a) (\lambda ab.ab) (\lambda ab.a) (\lambda ab.b) (\lambda ab.a)$
 $\Rightarrow (\lambda ab.ab) (\lambda a.a) (\lambda ab.ab) (\lambda ab.a) (\lambda ab.b) (\lambda ab.a)$
 $\Rightarrow (\lambda a.a) (\lambda ab.ab) (\lambda ab.a) (\lambda ab.b) (\lambda ab.a)$
 $\Rightarrow (\lambda ab.ab) (\lambda ab.a) (\lambda ab.b) (\lambda ab.a)$
 $\Rightarrow (\lambda ab.a) (\lambda ab.b) (\lambda ab.a)$
 $\Rightarrow (\lambda b.(\lambda ab.b)) (\lambda ab.a)$
 $\Rightarrow \lambda ab.b$

9. $(\lambda abcde.f) (\lambda nfa.nf(nfa)) (\lambda abc.acb) (\lambda xyz.xxz) (\lambda a.(\lambda bdx.xd)a) g$

$\Rightarrow (\lambda bcde.f) (\lambda abc.acb) (\lambda xyz.xxz) (\lambda a.(\lambda bdx.xd)a) g$

$\Rightarrow (\lambda cde.f) (\lambda xyz.xxz) (\lambda a.(\lambda bdx.xd)a) g$

$\Rightarrow (\lambda de.f) (\lambda a.(\lambda bdx.xd)a) g$

$\Rightarrow (\lambda e.f) g$

$\Rightarrow f$

10.a

$\Rightarrow a$

Part II.

Shorthands:

$A \equiv \lambda abc.a$

$B \equiv \lambda abc.b$

$C \equiv \lambda abc.c$

$T \equiv \lambda ab.a$

$F \equiv \lambda ab.b$

Then, we define the following function, CYCLE:

$CYCLE \equiv \lambda a.aBCA$

Function DIV3:

$\lambda x.((x \text{ CYCLE } A)T F F)$

DIV3 4:

$DIV3\ 4 \Rightarrow \lambda x.((x \text{ CYCLE } A)T F F) (fa.f(f(fa))))$

$\Rightarrow (fa.f(f(fa))) \text{ CYCLE } A) T F F$

$\Rightarrow (\text{CYCLE } (\text{CYCLE } (\text{CYCLE } (\text{CYCLE } A)))) T F F$

$\Rightarrow (\text{CYCLE } (\text{CYCLE } (\text{CYCLE } B))) T F F$

$\Rightarrow (\text{CYCLE } (\text{CYCLE } C)) T F F$

$\Rightarrow (\text{CYCLE } A) T F F$

$\Rightarrow (B) T F F$

$\Rightarrow (\lambda abc.b) T F F$

$\Rightarrow F$