



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Построение множества достижимости нелинейной системы»

Студент 315 группы
М. Н. Преображенский

Руководитель практикума
доцент П. А. Точилин

20 мая 2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Теоретические выкладки	3
2.1	Множество достижимости	3
2.2	Принцип максимума Понтрягина	4
2.3	Теорема о перемежающихся нулях функции	4
3	Анализ системы	5
3.1	Системы (S_+) и (S_-)	6
3.2	Множество достижимости	7
3.3	Стационарные точки	7
3.4	Устойчивость стационарных точек	8
4	Программная реализация	8
4.1	Описание алгоритма	8
4.2	Удаление самопересечений	9
5	Примеры	10
5.1	Пример 1 ($\alpha = 0.7$)	10
5.2	Пример 2 ($\alpha = 0.1$)	14
5.3	Пример 3 ($t = 3$)	17

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 3x^3 + 2\sin x + (\dot{x})^2 = u, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено следующее ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $x(t), \dot{x}(t)$) в классе программных управлений в заданный момент $t > t_0$, а также исследовать его свойства.

2 Теоретические выкладки

Для начала дадим определение некоторым основным терминам. Рассмотрим следующую *систему дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \geq 0, \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и введем следующие понятия.

2.1 Множество достижимости

Пусть $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — сопряжённые переменные.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle.$$

Определение 1. Множеством достижимости $\mathcal{X}(t, t_0, x^0)$ называется множество всех концов траекторий, являющихся решением системы дифференциальных уравнений (2) при различных допустимых управлениях.

Докажем следующее утверждение для системы общего вида:

Утверждение 1. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_1]$, $\tau_1 < \tau_2$ и x^0 — неподвижная точка системы (2) при нулевом управлении. Тогда $\mathcal{X}(\tau_1, t_0, x^0) \subseteq \mathcal{X}(\tau_2, t_0, x^0)$.

Доказательство: Пусть $\tilde{x} \in \mathcal{X}(\tau_1, t_0, x^0)$. Значит, существует такое управление $u^*(t)$ и соответствующее ему $x^*(t)$, что $x^*(\tau_1) = \tilde{x}$.

Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_0 + \tau_2 - \tau_1], \\ u^*(t + \tau_1 - \tau_2), & t \in [t_0 + \tau_2 - \tau_1, \tau_2]. \end{cases}$$

Тогда при $t \in [t_0, t_0 + \tau_2 - \tau_1]$ траектория нашей системы находится в точке x^0 , так как она является неподвижной при выбранном управлении. А на оставшемся отрезке времени траектория совпадает с x^* и в итоге в момент времени τ_2 равна \tilde{x} . Следовательно, $\tilde{x} \in \mathcal{X}(\tau_2, t_0, x^0)$.

2.2 Принцип максимума Понтрягина

Приведем одну из возможных формулировок ПМП:

Теорема 1. Пусть некоторому допустимому управлению $u^*(t)$ соответствует траектория $x^*(t)$, с концом $x^*(T)$, лежащем на границе множества достижимости. Тогда $\exists \psi : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ и число $\psi_0 \leq 0$ такие, что:

1. $(\psi_0, \psi) \neq \theta, \forall t \in [t_0, T]$ — условие невырожденности;
2. $\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t), u=u^*(t)}$ — условие сопряженности;
3. $\mathcal{H}(t, x^*(t), \psi(t), u^*(t)) = \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(t, x^*(t), \psi(t), u) = \mathcal{M}(x^*, \psi)$ — принцип максимума;
4. $\mathcal{M}(x^*, \psi) = \text{const.}$

Доказательство данной теоремы приведено в книге [3].

2.3 Теорема о перемежающихся нулях функции

Рассмотрим систему общего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2) + u. \end{cases} \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть u^* — управление, выбранное в соответствии с принципом максимума Понтрягина, x — соответствующая ему траектория, ψ — решение сопряженной системы. Если $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_1]$, то

1. $\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) = 0, \end{cases} \implies x_2(\tau_2) = 0.$
2. $\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) \neq 0, \end{cases} \implies x_2(\tau_2) \neq 0, \text{ но существует } \tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0.$
3. $\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in (t_1, t_2), \\ \psi_2(\tau_1) = 0, \end{cases} \implies \psi_2(\tau_2) = 0.$
4. $\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in (t_1, t_2), \\ \psi_2(\tau_1) \neq 0, \end{cases} \implies \psi_2(\tau_2) \neq 0, \text{ но существует } \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0.$

Доказательство:

Для рассматриваемой нами системы имеют место следующие равенства:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-f(x_1, x_2) + u).$$

$$\mathcal{M}(\psi, x) = \psi_1 x_2 - \psi_2 f(x_1, x_2) + |\psi_2|.$$

1. $\mathcal{M}|_{t=\tau_1} = \psi_1(\tau_1) \cdot x_2(\tau_1) - \psi_2(\tau_1) \cdot f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)) + |\psi_2(\tau_1)| = 0$, так как каждое слагаемое равно 0 по условию пункта 1.

$$\mathcal{M}|_{t=\tau_2} = \psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2) - \psi_2(\tau_2) \cdot f(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) + |\psi_2(\tau_2)| = \psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2).$$

Из ПМП $\mathcal{M}|_{t=\tau_1} = \mathcal{M}|_{t=\tau_2}$, а следовательно $\psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2) = 0$. Если $\psi_1(\tau_2) = 0$, то $\psi \equiv 0$, тем самым нарушается ПМП. Следовательно, $x_2(\tau_2) = 0$.

2. $\mathcal{M}|_{t=\tau_1} = \psi_1(\tau_1) \cdot x_2(\tau_1) - \psi_2(\tau_1) \cdot f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)) + |\psi_2(\tau_1)| = \psi_1(\tau_1) \cdot x_2(\tau_1) = \text{const}$
 $\mathcal{M}|_{t=\tau_2} = \psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2) - \psi_2(\tau_2) \cdot f(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) + |\psi_2(\tau_2)| = \psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2) = \text{const}.$

Из ПМП $\mathcal{M}|_{t=\tau_1} = \mathcal{M}|_{t=\tau_2} \neq 0$, так как по условию пункта 2 $x_2(\tau_1) \neq 0$ и $\psi_2(\tau_1) = 0$, из чего следует, что $\psi_1(\tau_1) \neq 0$, иначе противоречие ПМП. А значит и $x_2(\tau_1) \neq 0$.

Без ограничения общности возьмем $\psi_2(t) \neq 0$ на интервале (τ_1, τ_2) . И из условия пункта 2 имеем $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$. А значит $\psi_2(\tau_1) \cdot \dot{\psi}_2(\tau_2) \leq 0$.

При этом $\psi_2(\tau_1) = -\psi_1(\tau_1) + \psi_2(\tau_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\psi_1(\tau_1)$, $\psi_2(\tau_2) = -\psi_1(\tau_2) + \psi_2(\tau_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\psi_1(\tau_2)$. Из чего следует, что $\psi_1(\tau_1) \cdot \psi_1(\tau_2) < 0$.

Из $\mathcal{M}|_{t=\tau_1} = \mathcal{M}|_{t=\tau_2}$ имеем $\psi_1(\tau_1) \cdot x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2)$. Выше показали, что $\psi_1(\tau_1) \cdot \psi_1(\tau_2) < 0$. Поэтому $x_2(\tau_1) \cdot x_2(\tau_2) < 0$, из чего следует, что существует $\tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0$.

3. Введём функцию $z(t) = \psi_1(t) \cdot x_2(t) + \psi_2(t) \cdot \frac{d}{dt}x_2(t) = \psi_1(t) \cdot x_2(t) + \psi_2(t) \cdot (-f(x_1, x_2) + u)$ и пусть t_0 — точка непрерывности.

Тогда при $t \in U_\delta(t_0) : \frac{dz(t)}{dt} = \psi_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_2 + \psi_1(-f + u) + (-\psi_1(t) + \psi_2(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}) \cdot (f(x_1, x_2) + u) + \psi_2(-\frac{\partial f}{\partial x_2}(-f + u)) = 0$.

Значит, $z(t)$ — кусочно-постоянная функция. Разрыв может быть только из-за разрыва управления. Пусть \tilde{t}_0 — точка разрыва $z(t)$.

$z(\tilde{t}_0 \pm 0) = \psi_1(\tilde{t}_0 \pm 0) \cdot x_2(\tilde{t}_0 \pm 0) + \psi_2(\tilde{t}_0 \pm 0) \cdot \frac{d}{dt}x_2(\tilde{t}_0 \pm 0)$. Так как $\psi_2(\tilde{t}_0 \pm 0) \rightarrow 0$, то $z(\tilde{t}_0 - 0) = z(\tilde{t}_0 + 0)$.

$$\begin{cases} z(\tau_1) = \psi_1(\tau_1) \cdot x_2(\tau_1) + \psi_2(\tau_1) \cdot \frac{d}{dt}x_2(\tau_1), \\ z(\tau_2) = \psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2) \cdot \frac{d}{dt}x_2(\tau_2) \end{cases} \implies \psi_2(\tau_2) \cdot \dot{x}_2(\tau_2) = 0 \implies \psi_2(\tau_2) = 0.$$

4. $\begin{cases} z(\tau_1) = \psi_1(\tau_1) \cdot x_2(\tau_1) + \psi_2(\tau_1) \cdot \frac{d}{dt}x_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_1) \cdot \frac{d}{dt}x_2(\tau_1) \neq 0, \\ z(\tau_2) = \psi_1(\tau_2) \cdot x_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2) \cdot \frac{d}{dt}x_2(\tau_2) = \psi_2(\tau_2) \cdot \frac{d}{dt}x_2(\tau_2) \end{cases} \implies \psi_2(\tau_2) \cdot \dot{x}_2(\tau_2) \neq 0 \implies \psi_2(\tau_2) \neq 0.$

$z(\tau_1) = z(\tau_2)$, а значит $\psi_2(\tau_2) \cdot \dot{x}_2(\tau_2) \neq 0$. Поэтому $\psi_2(\tau_2) \neq 0$.

Доказательство теоремы окончено.

3 Анализ системы

Преобразуем наше дифференциальное уравнение (1) приведя его к виду (3):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1^3 - 2 \sin x_1 - x_2^2 + u. \end{cases} \quad (4)$$

При этом функция Гамильтона-Понтрягина примет следующий вид:

$$\mathcal{H} = \psi_1 x_2 - \psi_2 (3x_1^3 + 2 \sin x_1 + x_2^2 - u),$$

а сопряженная система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2(9x_1^2 + 2 \cos x_1), \\ \dot{\psi}_2 = 2x_2\psi_2 - \psi_1. \end{cases} \quad (5)$$

Посмотрим, какие выводы мы можем из этого сделать.

3.1 Системы (S_+) и (S_-)

Исходя из принципа максимума Понтрягина и учитывая ограничения $\alpha > 0$ оптимальным будет управление

$$\begin{cases} \alpha, & \psi_2 > 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2 = 0, \\ -\alpha, & \psi_2 < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Проверим возможность существования особого режима. Пусть $\psi_2 = 0$. На ненулевом интервале времени. Тогда и $\dot{\psi}_2 = 0$. Подставляя в (5), получим, что $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$, что противоречит условию невырожденности для сопряженных переменных в принципе максимума Понтрягина.

Исходя из начальных условий системы, $x_2(0) = 0$. Тогда либо $\psi_2(0) = 0$, либо $\psi_2(0) \neq 0$. Рассмотрим подробно оба этих варианта.

1. $\psi_2(0) = 0$.

Значит, $\psi_1(0) \neq 0$, иначе противоречие ПМП. Без ограничения общности можем считать, что $\psi_1(0) = \pm 1$.

а. $\psi_1(0) = 1$.

Дифференциальное уравнение для ψ_2 выглядит следующим образом: $\dot{\psi}_2 = \psi_1 - 2x_2\psi_2$. Следовательно в малой окрестности нуля $\dot{\psi}_2 > 0$, а значит $\psi_2(t) > 0$ для $t \in (0, \delta)$. Из условия максимума, имеем $u^* = \alpha \cdot \text{sgn}(\psi_2) = \alpha$ и система запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1^3 - 2 \sin x_1 - x_2^2 + \alpha, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2(9x_1^2 + 2 \cos x_1), \\ \dot{\psi}_2 = 2x_2\psi_2 - \psi_1. \end{cases} \quad (S_+) \quad (7)$$

б. $\psi_1(0) = -1$.

Аналогичными рассуждениями получаем $\psi_2(t) < 0$ на $(0, \delta)$ и $u^* = -\alpha$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1^3 - 2 \sin x_1 - x_2^2 - \alpha, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2(9x_1^2 + 2 \cos x_1), \\ \dot{\psi}_2 = 2x_2\psi_2 - \psi_1. \end{cases} \quad (S_-) \quad (8)$$

Начальные условия для систем (S_+) (7) и (S_-) (8) известны, поэтому можем их интегрировать, пока не обнулится $x_2(t)$. Пусть τ_0 — первый ненулевой момент времени, когда обнуляется $x_2(t)$. По 3-му пункту теоремы 2 в этот же момент времени обнулится и $\psi_2(t)$, а значит произойдет переключение управления и продолжим далее интегрировать новую систему.

2. $\psi_2(0) \neq 0$.

Тогда или $\psi_2(0) > 0$ и мы попадаем в (S_-) (8), или $\psi_2(0) < 0$ и мы попадаем в (S_+) (7).

По теореме 2 существует $\tau : \psi_2(\tilde{\tau}) = 0$, причем $\tilde{\tau} < \tau_0$. Следовательно, кривые, построенные в 1-м пункте являются кривыми переключения. То есть при $\psi_2(0) \neq 0$ мы сначала двигаемся по этой кривой, а затем в какой-то момент времени $\tilde{\tau}$ происходит переключение управления, и мы с этой кривой сходим.

3.2 Множество достижимости

Из прошлого пункта нам уже многое известно о системах (S_+) (7) и (S_-) (8). Доведем неизвестные начальные условия, чтобы иметь возможность интегрировать их на фиксированном отрезке времени $[0, T]$.

Рассмотрим систему (S_+) (7). Пусть t_1 — момент, когда справедливо $x_2(t_1) = 0$ (если $x_2(t_1) \neq 0$ на всем отрезке $[t_0, T]$, то положим $t_1 = T$).

Пусть $\psi_2(\tau_{\text{пер}}) = 0$ и $\tau_{\text{пер}}$ — первый нуль ψ_2 на $[0, t_1]$. При этом $\psi_1(\tau_{\text{пер}}) = -1$ т.к. можем нормировать (для системы (S_-) (8), соответственно, $\psi_1(\tau_{\text{пер}}) = 1$).

Разобьем интервал $[0, t_1]$: $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_n = t_1$ и находим $x_1(\tau_i) = x_{1,i}$, $x_2(\tau_i) = x_{2,i}$ при движении в системе (S_+) (7). Далее на отрезке $[\tau_i, T]$ интегрируем систему (S_+) (7):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1^3 - 2 \sin x_1 - x_2^2 + \alpha, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2(9x_1^2 + 2 \cos x_1), \\ \dot{\psi}_2 = 2x_2\psi_2 - \psi_1, \\ x_1(\tau_i) = x_{1,i}, \\ x_2(\tau_i) = x_{2,i}, \\ \psi_1(\tau_i) = -1, \\ \psi_2(\tau_i) = 0, \\ u^* = \alpha \cdot \text{sgn}(\psi_2). \end{cases} \quad (9)$$

Аналогично поступаем с системой (S_-) (8). В результате получаем множества точек, которые при объединении дают линию, содержащую границу множества достижимости, возможно, с самопересечениями (подробнее об их удалении ниже), так как множества «нахлестываются» друг на друга. Значит, для построения множества достижимости достаточно найти концы всех траекторий, удовлетворяющих принципу максимума, после чего удалить «петли», возникающие при самопересечении, точки которых не принадлежат границе.

Таким образом, граница множества достижимости $\partial\mathcal{X}(\tilde{t}, t_0, x^0)$ будет состоять из концов оптимальных траекторий задачи быстрогодействия.

3.3 Стационарные точки

Определение 2. Точка (x_1^*, x_2^*) называется стационарной точкой системы (3), если правая часть системы в этой точке равна 0.

Приравняем к 0 правые части системы (3). Получим

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ -3x_1^3 - 2 \sin x_1 - x_2^2 + u = 0, \end{cases} \quad (10)$$

Значит неподвижная точка лежит на прямой $x_2 = 0$, а координата x_1 численно определяется из уравнения

$$u = 3x_1^3 + 2\sin(x_1). \quad (11)$$

С учетом выражения (6), задающего оптимальное управление, (10) принимает вид

$$3x_1^3 + 2\sin(x_1) \pm \alpha = 0.$$

Производная этого выражения $9x_1^2 + 2\cos(x_1) > 0$ на всей численной прямой $x_1 \in \mathbb{R}$, а значит, вне зависимости от $\alpha \in \mathbb{R}$ единственным корнем этого уравнения будет действительное число, а наша система будет иметь 2 стационарные точки — x_+ и x_- , зеркальные относительно $(0, 0)$.

3.4 Устойчивость стационарных точек

Для проверки стационарной точки на устойчивость и определения типа этой точки необходимо проанализировать собственные значения якобиана систем (S_+) (7) и (S_-) (8). Якобианы обеих систем равны, выпишем их вид, а также отвечающую им характеристическую функцию:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9x_1^2 - 2\cos x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + 2x_2\lambda + 9x_1^2 + 2\cos x_1 = 0$$

Собственные значения якобиана (9) вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} : \lambda^2 + 9x_1^2 + 2\cos x_1 = 0$$

и с учетом выражения $9x_1^2 + 2\cos(x_1) > 0$ всегда лежат на комплексной оси что означает что обе наши особые точки x_+ и x_- вне зависимости от параметра будут являться центрами для своих систем (S_+) (7) и (S_-) (8) соответственно.

4 Программная реализация

4.1 Описание алгоритма

Опишем алгоритм построения границы множества достижимости в момент времени t .

1. Выпускаем «пробные» траектории, отвечающие $\psi_1(0) = \pm 1$ (то бишь системам (S_+) (7) и (S_-) (8)). Обозначим их W_+^0 и W_-^0 соответственно.
2. Находим моменты t_1 и t_2 , в которые W_+^0 и W_-^0 соответственно пересекают ось x_1 .
3. Перебираем по равномерной сетке $\tau_1 \in (0, \min(t_1, t)]$, $\tau_2 \in (0, \min(t_2, t)]$ — момент первого переключения.
4. Находим $(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1))$ ($(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2))$), решая систему (S_+) (7) ((S_-) (8)) до момента времени τ_1 (τ_2). Также знаем, что $\psi_2(\tau_1) = 0$ ($\psi_2(\tau_2) = 0$).
 $\psi_1(\tau_1) = -1$, так как имеем

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = 2x_2\psi_2 - \psi_1 \\ \psi_2(\tau_1) = 0 \\ \psi_2(t) < 0 \text{ для } t \in (0, \tau_1) \end{cases} \Rightarrow \dot{\psi}_2(\tau_1 - 0) < 0, \text{ а значит, } \psi_1(\tau_1) < 0.$$

Исходя из аналогичных рассуждений, возьмём $\psi_1(\tau_2) = 1$. Следовательно, мы знаем начальные условия и можем далее решать системы S_- (8) и S_+ (7) до следующего переключения.

5. Строим $\Gamma[t]$ — множество концов траекторий в момент времени t .
6. Преобразуем $\Gamma[t]$ в $\partial W[t]$.

4.2 Удаление самопересечений

Распишем пункт 6 поподробнее. Он включает в себя удаление самопересечений. Для этого проверим все пары отрезков, образующих границу области достижимости, на пересечение. Для первого отрезка из этой пары построим уравнение прямой. Подставим в него координаты концы второго отрезка. Если получившиеся 2 числа одинакового знака, то второй отрезок лежит целиком в одной из полуплоскостей для прямой, определяемой первым отрезком, а значит пересечения нет. Если же знаки разные, то получается, что концы второго отрезка лежат по разные стороны от первого. Найдем точку пересечения прямой и второго отрезка и проверим точку пересечения на принадлежность отрезкам. Если не принадлежит, то смело переходим к следующей паре отрезков. В противном случае, пересечение отрезков действительно есть, и тогда мы удаляем из массива точек, составляющих границу множества достижимости, все точки, лежащие между рассматриваемыми точками, и добавляем точку пересечения.

5 Примеры

5.1 Пример 1 ($\alpha = 0.7$)

Пусть $\alpha = 0.7$. Численно найдем стационарные точки для таких значений параметров. Для наглядности, построим график, на котором изображены графики функций $3x_1^3 + 2\sin(x_1) - \alpha$ и $3x_1^3 + 2\sin(x_1) + \alpha$, пересечения которых с нулём являются стационарными точками для систем (S_-) (8) и (S_+) (7) соответственно.

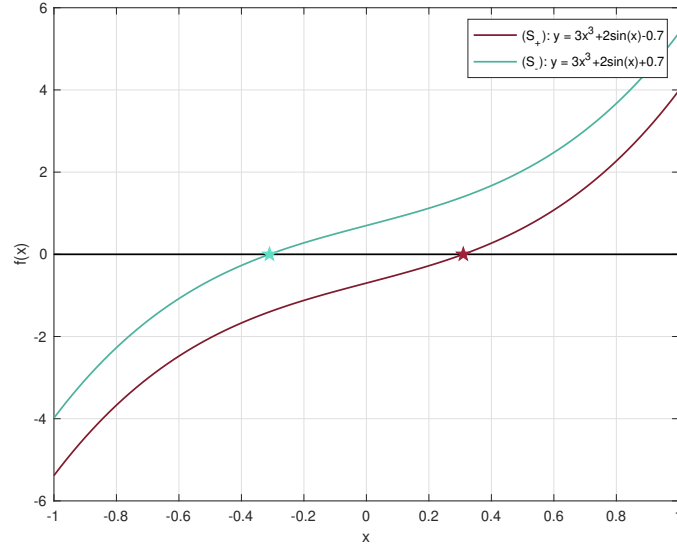


Рис. 1: Стационарные точки.

Стационарные точки в данном случае принимают значения $x_+ = 0.31$ и $x_- = -0.31$. Собственные значения якобиана: $\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + 2.709 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1.66i$. Это лишь подтверждает наши выводы о том, что обе стационарные точки являются центрами для своих систем. На графиках ниже оранжевым цветом выделена кривая переключений, а черным - граница множества достижимости.

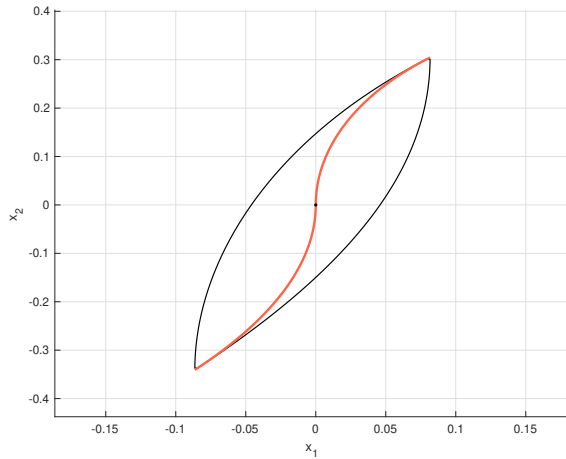


Рис. 2: $t = 0.5$

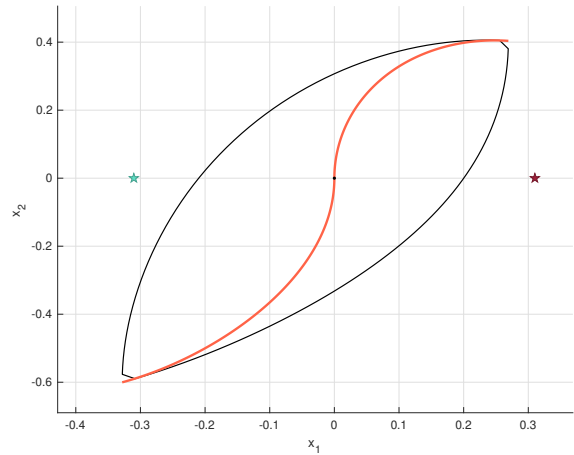


Рис. 3: $t = 1$

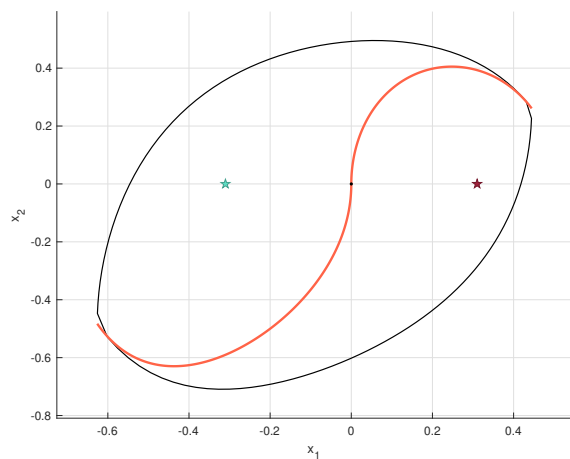


Рис. 4: $t = 1.5$

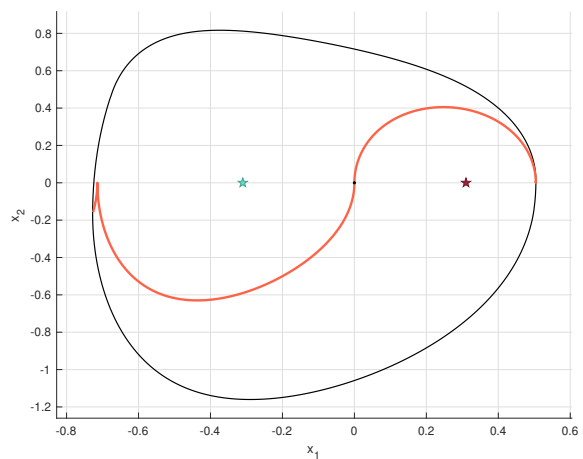


Рис. 5: $t = 2$

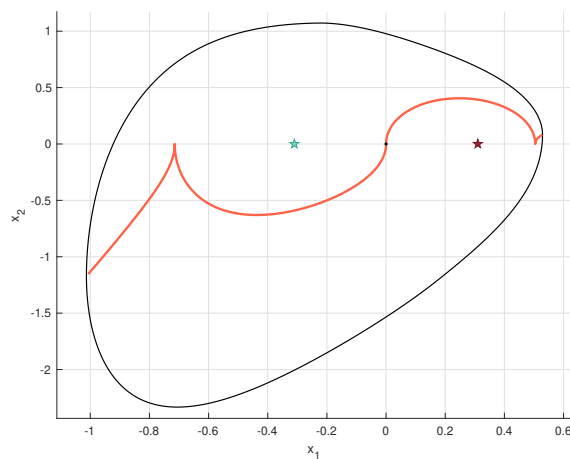


Рис. 6: $t = 2$,

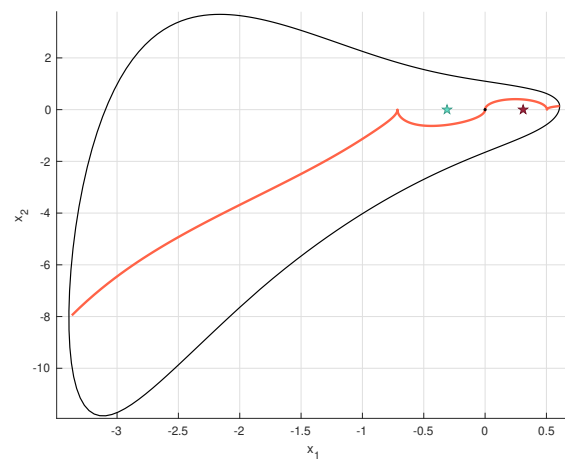


Рис. 7: $t = 3$

Теперь проверим, на самом ли деле устойчивые точки x_+ , x_- , являющиеся "центрами" для данной системы, влияют на траектории самой системы. Для этого выведем график вместе с траекториями (при $t = 2$):

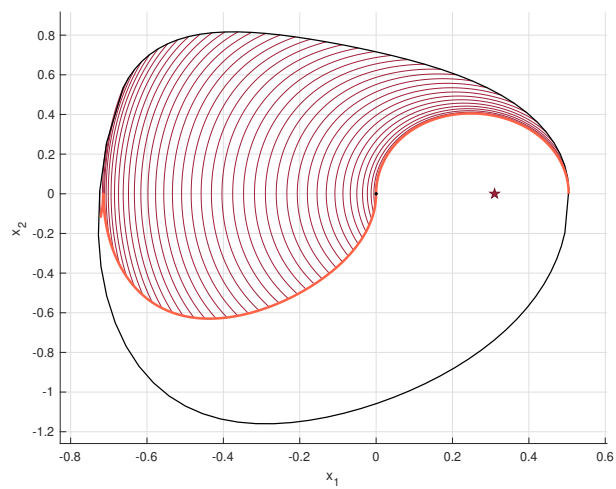


Рис. 8: $t = 2$, траектории системы (S_+) вращаются относительно точки x_+

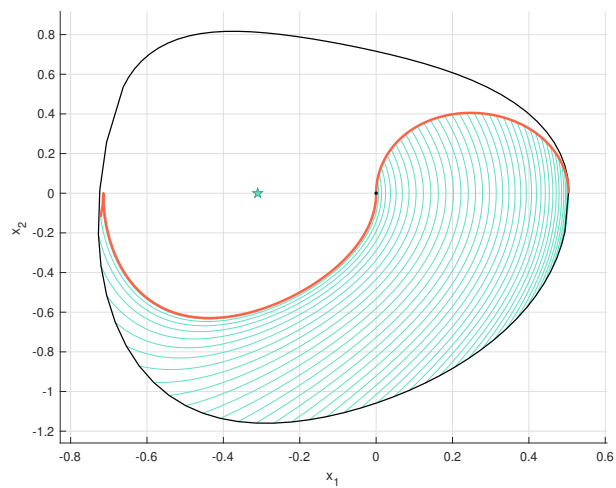


Рис. 9: $t = 2$, траектории системы (S_-) вращаются относительно точки x_-

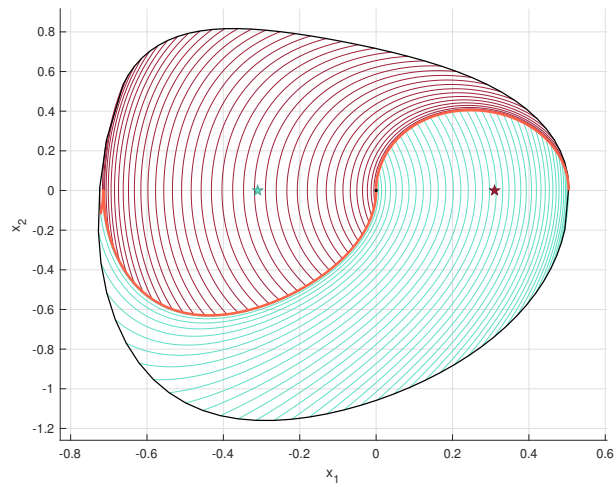


Рис. 10: $t = 2$, траектории систем (S_+) и (S_-)

5.2 Пример 2 ($\alpha = 0.1$)

Пусть $\alpha = 0.1$. Численно найдем стационарные точки для таких значений параметров. Для наглядности, построим график, на котором изображены графики функций $3x_1^3 + 2\sin(x_1) - \alpha$ и $3x_1^3 + 2\sin(x_1) + \alpha$, пересечения которых с нулём являются стационарными точками для систем (S_+) (7) и (S_-) (8) соответственно.

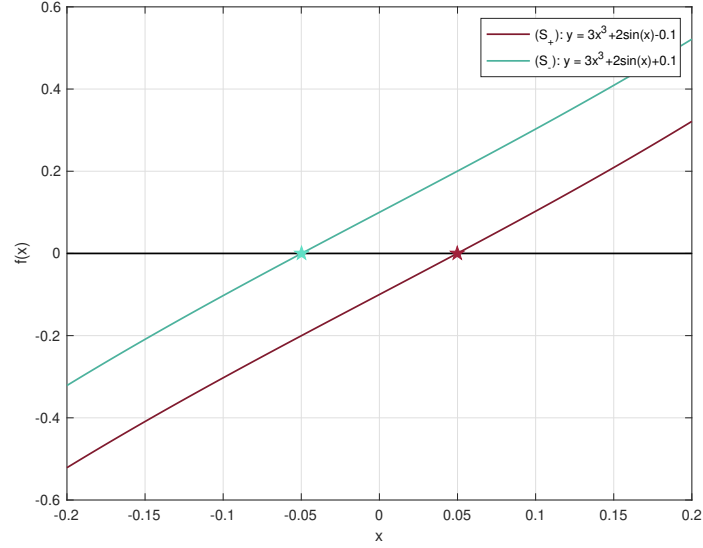


Рис. 11: Стационарные точки.

Стационарные точки в данном случае принимают значения $x_+ = 0.0498$ и $x_- = -0.0498$. Собственные значения якобиана: $\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + 2.019 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1.42i$. Это лишь подтверждает наши выводы о том, что обе стационарные точки являются центрами для своих систем. На графиках ниже оранжевым цветом выделена кривая переключений, а черным — граница множества достижимости.

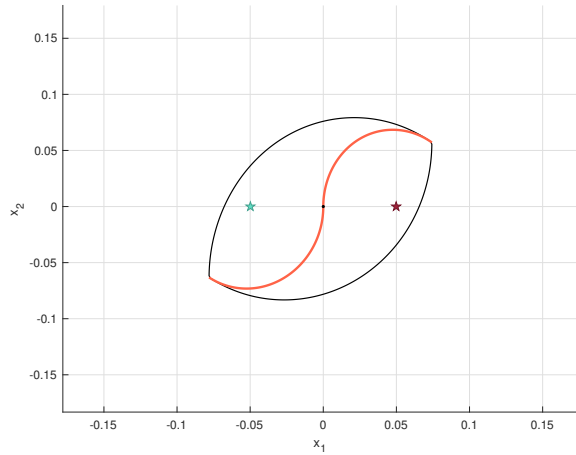


Рис. 12: $t = 1.5$

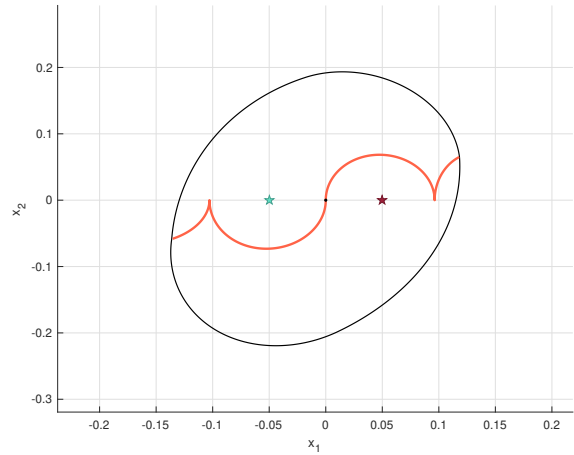


Рис. 13: $t = 3$

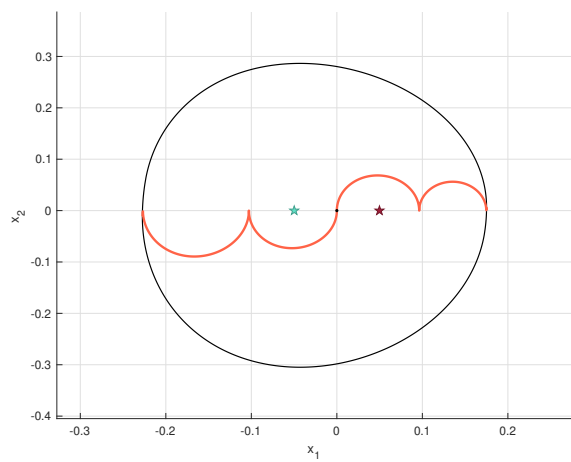


Рис. 14: $t = 4.5$

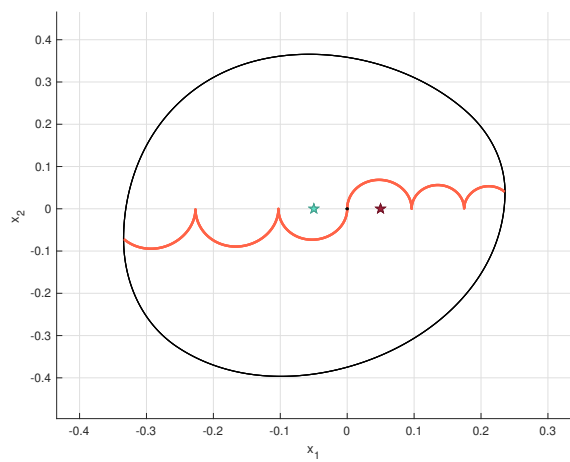


Рис. 15: $t = 6$

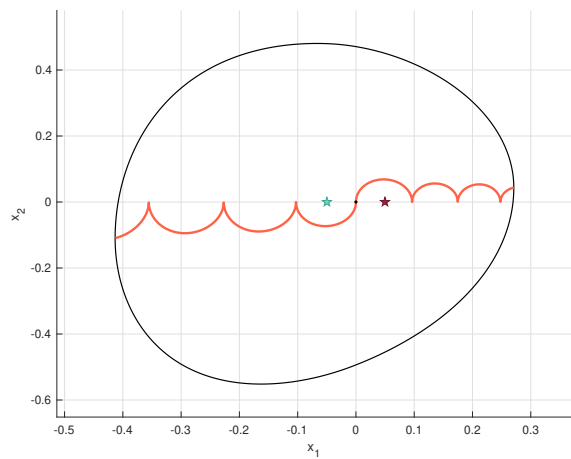


Рис. 16: $t = 7.5$

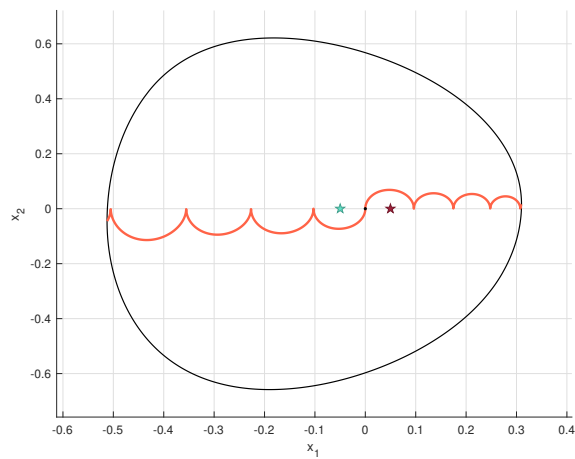


Рис. 17: $t = 9$

На следующем графике для большей наглядности помимо множества достижимости и кривой переключений отображены сами траектории, что позволяет убедиться в правильности определения типа особых точек.

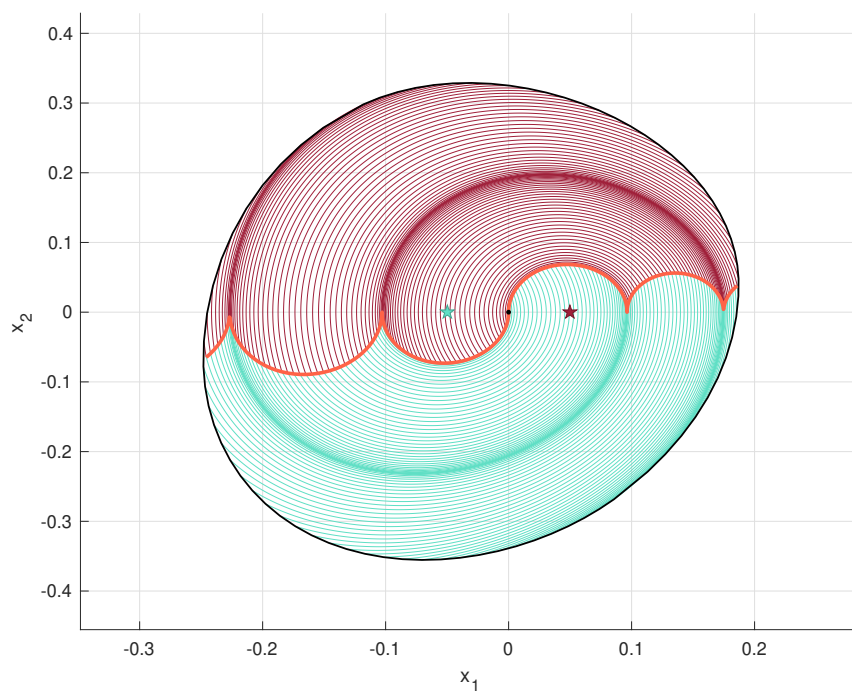


Рис. 18: $t = 5$, траектории систем (S_+) и (S_-)

5.3 Пример 3 ($t = 3$)

В этом примере фиксируем момент времени $t = 3$ и будем варьировать значение параметра. Как мы уже знаем, не зависимости от $\alpha \in \mathbb{R}$ обе наши особые точки x_+ и x_- будут являться центрами для своих систем (S_+) (7) и (S_-) (8) соответственно, так что бифуркации системы искать не нужно. На графиках ниже оранжевым цветом выделена кривая переключений, а черным - граница множества достижимости.

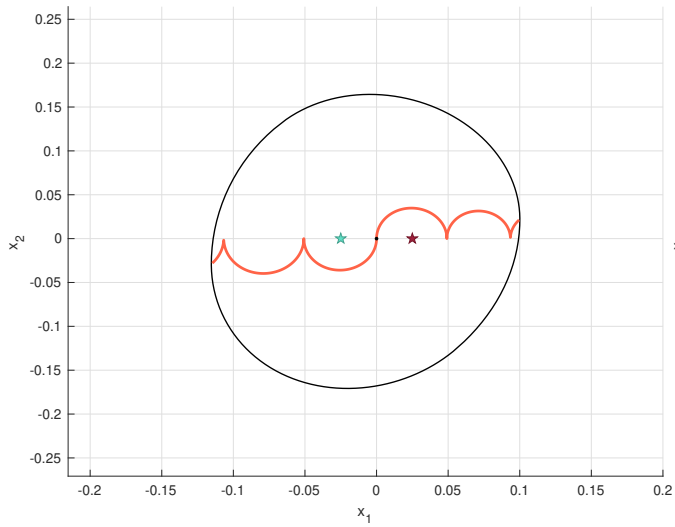


Рис. 19: $\alpha = 0.05$

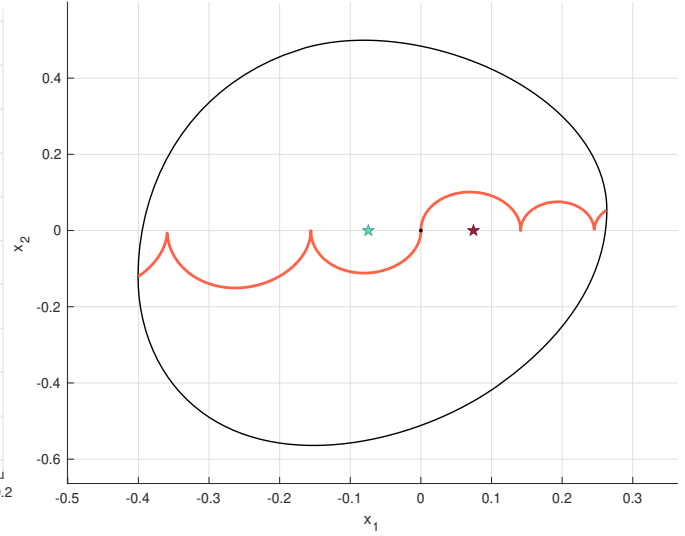


Рис. 20: $\alpha = 0.15$

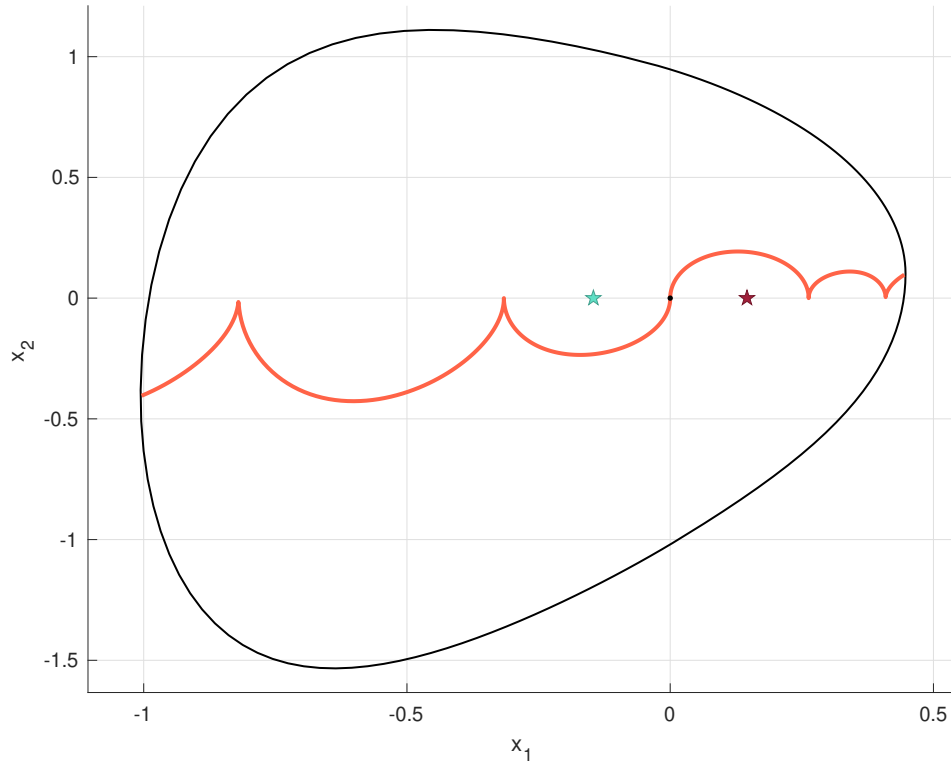


Рис. 21: $\alpha = 0.3$

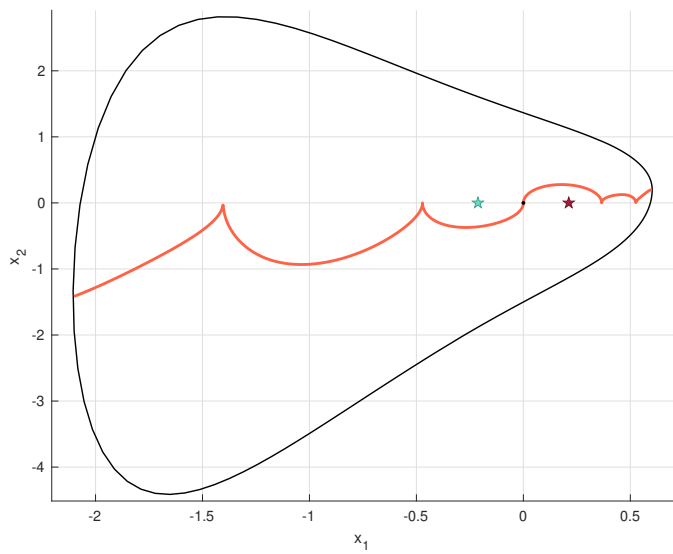


Рис. 22: $\alpha = 0.45$

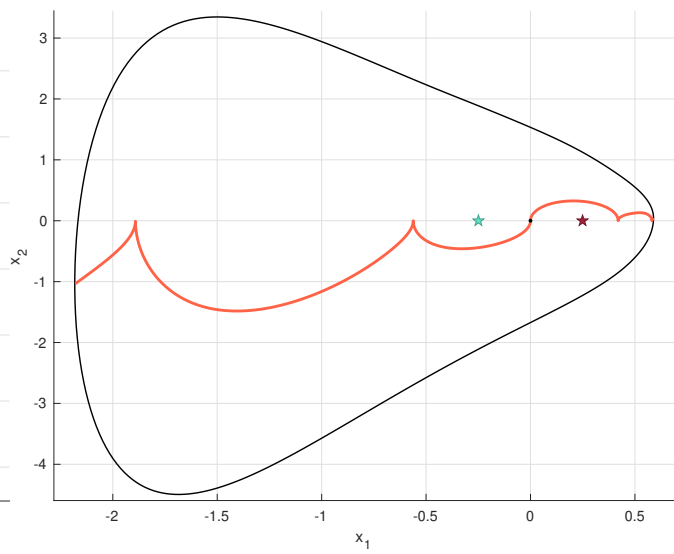


Рис. 23: $\alpha = 0.6$

Список литературы

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961
- [2] Чистяков И. А. Лекции по оптимальному управлению. 2022-2023
- [3] Э. Б. Ли, Л. Маркус Основы теории оптимального управления. М.НАУКА, 1972