UNIVERSITY OF LJUBLJANA

FMF

Faculty of Mathematics and Physics

Matematično-fizikalni praktikum

Naloga 5

Luka Papež

20. november 2024

1 Naloga

Naloga: Na spletni strani MF praktikuma najdeš posnetke oglašanja velike uharice, naše največje sove. Posneti sta dve sovi z minimalnim ozadjem (`bubomono` in `bubo2mono`) in nekaj mešanih signalov, ki zakrivajo njuno oglašanje (`mix`, `mix1`, `mix2` in `mix22`). V signalih `mix2` in `mix22` je oglašanje sove komaj še zaznavno. Izračunaj avtokorelacijsko funkcijo vseh signalov in poskusi ugotoviti, za katero sovo gre pri teh najbolj zašumljenih signalih!

Dodatna naloga: Izračunaj še avtokorelacijsko funkcijo za kak signal, ki ga posnameš sam ali za kak proces, za katerega sam poiščeš ustrezne podatke.

2 Uvod

Diskretno Fourierovo transformacijo smo definirali kot

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \exp(2\pi kn/N), \qquad k = -\tfrac{N}{2}, \ldots, \tfrac{N}{2},$$

oziroma

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} h_n, \qquad W_N = \exp(2\pi/N).$$

Ta postopek ima očitno časovno zahtevnost N^2. Račun pa je mogoče izvesti tudi z bistveno manj operacijami. Osnovni premislek je razcep

$$H_k = H_k^{\mathrm{sod}} + W_N^k H_k^{\mathrm{lih}} ,$$

kjer smo transformiranko H izrazili s transformacijama njenih sodih in lihih členov, pri čemer je vsota vsake od transformacij zdaj dolžine N/2. Gornjo relacijo lahko uporabljamo rekurzivno: če je N enak potenci števila 2, lahko rekurzijo razdrobimo do nizov, ki imajo samo še en člen. Zanj je transformacija identiteta. Za obrat pri eni vrednosti frekvence (pri danem m) je potrebno na vsakem koraku rekurzije le eno množenje s potenco W, korakov pa je $\log_2 N$. Skupna časovna zahtevnost je torej le še $N \log_2 N$.
Da ne iščemo pripadnikov niza po vsej tabeli, si podatke preuredimo. Lahko je pokazati, da je v prvotni tabeli treba med seboj zamenjati podatke, katerih vrstna števila v binarnem zapisu so obrnjena: v novem redu jemljemo člene kar po vrsti. Tudi potenc W ne izražamo vedno znova s sinusi in kosinusi, pač pa jih računamo z rekurzijo. Tak ali podoben postopek je osnova vseh algoritmov hitre Fourierove transformacije (FFT).
Z neko transformacijo iz družine FFT bomo izračunali korelacijsko funkcijo dveh signalov. Korelacija periodičnih funkcij $g(t)$ in $h(t)$ s periodo T je definirana kot:

$$\phi_{gh}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t+\tau)\, h(t) t \, ,$$

oziroma diskretno

$$\phi_{gh}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_{k+n}\, h_k \; .$$

Računamo torej skalarni produkt funkcij, ki sta časovno premaknjeni za τ oziroma n. Če je za določeno vrednost premika ta funkcija višja kot v okolici, potem to pomeni, da sta si funkciji podobni, le da ju je treba premakniti, da se to vidi.
V primeru, da sta funkciji (signala), ki ju primerjamo, enaki, računamo njuno *avtokorelacijsko funkcijo*: ta je mera za to, ali signal ostaja s pretekanjem časa sam sebi podoben. Če je signal slabo koreliran (sam s sabo), korelacija $\phi_{hh}(n)$ relaksira h kvadratu povprečnega signala $\langle h \rangle^2$, kjer je

$$\langle h \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k \; .$$

Iz lokalnih maksimov v avtokorelacijski funkciji sklepamo na periodičnosti, bodisi popolne ali približne. Pri periodičnih signalih je tudi avtokorelacijska funkcija striktno periodična, za stohastične procese pa je značilna eksponentna avtokorelacijska funkcija. še bolj nas zanima, kako *hitro* se korelacija izgublja: računamo rajši reskalirano obliko avtokorelacije

$$\widetilde{\phi}_{hh}(n) = \frac{\phi_{hh}(n) - \langle h \rangle^2}{\phi_{hh}(0) - \langle h \rangle^2} \; ,$$

kjer je imenovalec nekakšno merilo za varianco signala,

$$\sigma^2 = \phi_{hh}(0) - \langle h \rangle^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(h_k - \langle h \rangle \right)^2 \; .$$

Pri zgornjih enačbah moramo še “peš” poskrbeti za periodično zaključenost signala pri $n = N$, torej da je perioda enaka velikosti vzorca. Če tega ne moremo narediti, je bolj pravilna definicija avtokorelacije

$$\phi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} h_{k+n}\, h_k \; .$$

Praktičen račun po zgornji formuli lahko postane za velike vzorce prezamuden. Avtokorelacijo rajši računamo s FFT (DFT) $\mathcal{F}$, saj je korelacija obratna Fourierova transformacija $\mathcal{F}^{-1}$ produkta Fourierovih transformacij $\mathcal{F}$, torej z $G = \mathcal{F}g$ in $H = \mathcal{F}h$ dobimo

$$\phi_{gh}(n) = \frac{1}{N-n} \mathcal{F}^{-1} \left[G \cdot (H)^* \right]$$

oziroma

$$\phi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \mathcal{F}^{-1} \left[|H|^2 \right] \; .$$

Za račun s FTT signale dolžine N najprej prepišemo v dvakrat daljše, periodično zaključene podatkovne nize, $\widetilde{h}_n = h_n$, $\widetilde{h}_{n+N} = 0$ za $n = 0, \ldots, N-1$ in $\widetilde{h}_{n+2N} = \widetilde{h}_n$. Tedaj se avtokorelacija zapiše v obliki

$$\phi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{2N-1} \widetilde{h}_{k+n}\, \widetilde{h}_k \ ,$$

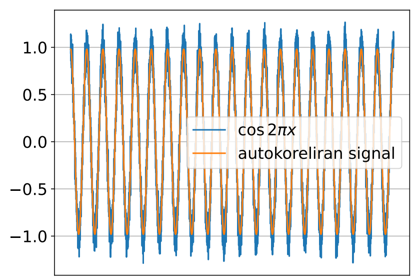
kar lahko izračunamo s FFT.

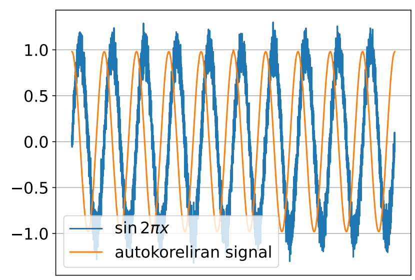
Naloga: Na spletni strani MF praktikuma najdeš posnetke oglašanja velike uharice, naše največje sove. Posneti sta dve sovi z minimalnim ozadjem (`bubomono` in `bubo2mono`) in nekaj mešanih signalov, ki zakrivajo njuno oglašanje (`mix`, `mix1`, `mix2` in `mix22`). V signalih `mix2` in `mix22` je oglašanje sove komaj še zaznavno. Izračunaj avtokorelacijsko funkcijo vseh signalov in poskusi ugotoviti, za katero sovo gre pri teh najbolj zašumljenih signalih!
Poglejte si rutine `four1` iz Numerical Recipes ali knjižnice `fftw3`, ki je še dosti hitrejša. V okolju Python so te rutine vključene v 'fft' paket. (Pri tako velikih vzorcih je skorajda nujno uporabiti FFT namesto počasne navadne DFT.)

3 Rešitev

3.1 Osnovne funkcije

Za začetek našega spoznavanja s korelacijo smo si pogledali kako ta deluje na osnovnih funkcijah kot so sinus in kosinus. Da poenostavimo naše primerjave jih normiramo z variacijo signala. Tako bo amplituda namreč enaka 1.



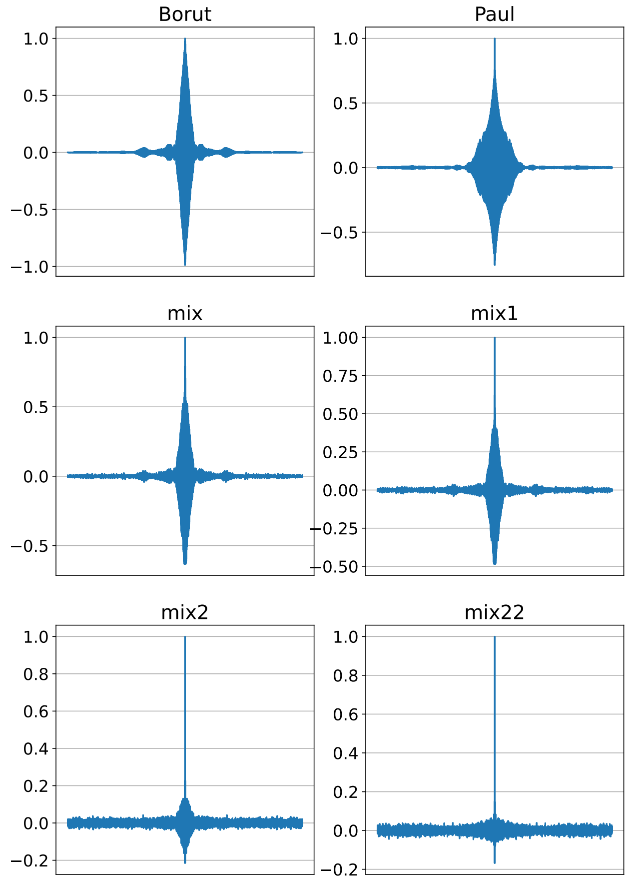


Slika 1: Korelacija sinusne in kosinusne funkcije

Pri zašumljenemu kosinusu, ki je soda funkcija opazimo, da se avtokorelacija funkcije lepo prilega. Pri sinusu pa so podatki rahlo zamaknjeni, saj je liha funkcija. Avtokorelacija pa nam vedno vrne sodo funkcijo in bi bilo potrebno za popolno prilagajanje še ročno dodati fazo.

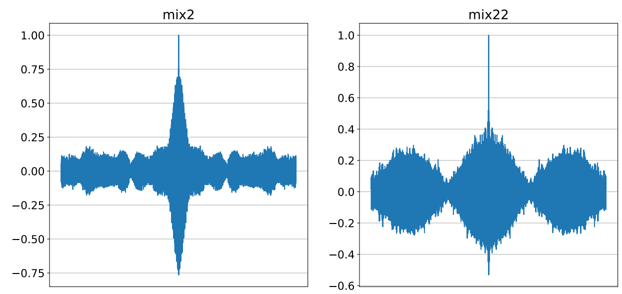
3.2 Sove

Podana sta nam posnetka dveh sov. Poleg tega pa dobimo še 4 posnetke v katerih je zašumljena ena izmed prejšnjih sov. Za lažjo primerjavo bomo prvo imenovali Borut drugo pa Paul. Za začetek naredimo avtokorelacijo, kot nam diktirajo navodila.



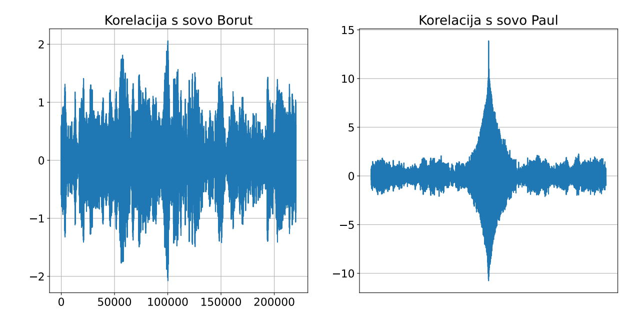
Slika 2: Avtokorelacija na vseh podanih posnetkih dveh sov

V prvi vrsti zgornjega grafa sta dva čista posnetka Boruta in Paula. V prvih dveh posnetkih s šumom lahko kar hitro opazimo, da je v obeh Borut. V tretjem pa nam ozkost signala tudi namiguje v to smer. V zadnjem primeru pa je signal praktično neopazen zato o njem ne moremo reči prav veliko. Prva intuitivna ideja kako bi lahko o zadnjih dveh signalih izvedeli več je, da avtokorelacijo ponovimo še enkrat.



Slika 3: Dvojna avtokorelacija na zadnjih dveh posnetkih sov

Ponovitev avtokorelacije nam potrdi naše prejšnje ugibanje, da je tretji signal posnetek Boruta. Zadnji posnetek pa ima precej unikatno obliko glede na ostale. Zato očitno to ni pravi pristop pri zadnji sovi. Zato poskusimo namesto avtokorelacije uporabiti korelacijo s čistima signaloma obeh sov.

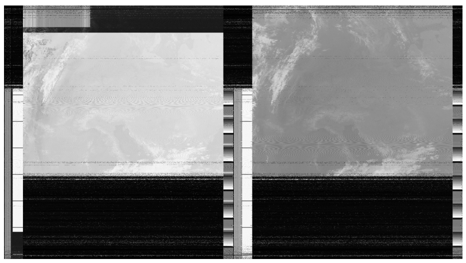


Slika 4: Korelacija zadnjega posnetka s posnetkom Boruta in Paula

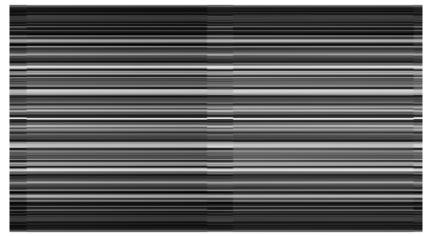
Tako nam korelacija pove, da je na zadnjem posnetku Paul. Če povzamemo naše ugotovitve smo ugotovili, da je na prvih treh zašumljenih posnetkih Borut na zadnjem pa Paul.

3.3 Dodatna naloga

Ob navodilu za dodatno nalogo sem se hitro spomnil na enega izmed mojih projektov, kjer sem iz vremenskih satelitov NOAA posnel signale slik Zemlje. Za obdelavo zvočnega signala bomo uporabili aplikacijo 'noaa-apt image decoder', ki je na voljo na internetu. Tako bomo najprej primerjali nastalo sliko pred našo obdelavo z avtokorelacijo in z obdelavo.



Slika 5: Slika Zemlje iz prejetega signala



Slika 6: Slika zemlje po obdelavi signala z avtokorelacijo

Kar zelo hitro opazimo, da je avtokorelacija sliko naredila nerazpoznavno. Razloge za to lahko iščemo v dejstvu, da je signal z dejanskimi podatki zelo kompleksen in pri visokih frekvencah. Zato avtokorelacija težje izboljša signal.

4 Zaključek

Naloga nas je postavila pred zanimiv identificiranja sov in nam na preprost način pokazala uporabnost avtokorelacije pri razpozanavanju signalov. Za konec pa prilagam še povezavo do projekta o iskanju zračnega topa.