

# Matematično-fizikalni praktikum

Naloga 1

Luka Papež

16. oktober 2024

# 1 Naloga

*Naloga:* Napravi računalniško simulacijo dvorazsežne naključne hoje za **polete in sprehode**. Začni vedno v izhodišču ( $x = y = 0$ ), nato pa določi naslednjo lego tako, da naključno izbereš smer koraka in statistično neodvisno od te izbire še njegovo dolžino, torej

$$\begin{aligned}x &\leftarrow x + l \cos \phi, \\y &\leftarrow y + l \sin \phi,\end{aligned}$$

kjer je  $\phi$  enakomerno naključno porazdeljen po intervalu  $[0, 2\pi]$ , dolžina koraka  $l$  pa naj bo porazdeljena v skladu s potenčno obliko. Dolžine  $l_i$  je v tem primeru potrebno generirati po verjetnostni porazdelitvi  $w(l) \sim p(l)$ .

V vsakem primeru nariši nekaj značilnih slik sprehodov za 10, 100, 1000 in 10000 korakov. Iz velikega števila sprehodov z velikim številom korakov nato poskusi določiti eksponent  $\gamma$  za nekaj izbranih parametrov  $\mu$  oziroma funkcij  $f(x)$  v posameznih primerih ter presodi, za kakšno vrsto difuzije gre.

# 2 Uvod

Naključni sprehodi so vrsta gibanja, pri katerem v velikem številu korakov napredujemo iz izhodišča v neko končno lego, tako da se parametri vsakega naslednjega koraka sproti naključno določajo. Običajni zgled je Brownovo gibanje (difuzija) drobnih delcev barvila po mirujoči homogeni tekočini, kjer je spočetka barvilo zbrano v izhodišču. “Težišče” barvila  $\langle x(t) \rangle$  v povprečju ostane v izhodišču, razen če v tekočini vzpostavimo kako anizotropijo (na primer v dveh razsežnostih z vsiljeno rotacijo). “Razmazanost” po dolgem času je sorazmerna s časom,

$$\sigma^2(t) \equiv \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = 2Dt.$$

Sorazmernostni koeficient je običajna difuzijska konstanta, priča smo normalni difuziji. Ta rezultat izhaja iz centralnega limitnega teorema (CLT), ki izraža, da je rezultatna porazdelitev končnih leg pri difuziji porazdeljena normalno (Gauss), če so le povprečni časi med koraki in povprečni kvadrati dolžin korakov končni.

Zanimiveje je opazovati naključne sprehode, pri katerih dovolimo nadpovprečno dolge korake. Verjetnostno gostoto porazdelitve po dolžinah posameznih korakov parametrizirajmo v potenčni obliki

$$p(l) \propto l^{-\mu}, \tag{1}$$

kjer naj bo  $1 < \mu < 3$ . Tedaj postane drugi moment porazdelitve

$$\langle l^2 \rangle = \int l^2 p(l) dl$$

neskončen. Govorimo o anomalni difuziji, prisotni pri celi družini kinematičnih distribucij dolžin poti z ”debelimi repi”.

Ustrezno sliko naključnega gibanja, povezanega s temi dolgimi koraki, lahko interpretiramo na dva načina:

- Lévyjev pobeg oz. polet (*flight*), implicira, da vsak korak iz porazdelitvetetraja enako dolgo, medtem ko se hitrost gibanja med koraki (divje) spreminja.
- Lévyjev sprehod (*walk*), ki interpretira korak iz porazdelitve kot gibanje s konstantno hitrostjo in tako koraki trajajo različno dolgo časa (dolžina koraka je sorazmerna s časom).

Slednja interpretacija bolj ustreza fizikalni sliki naključnega gibanja delca skozi snov, medtem ko se prva interpretacija uporablja v drugačnih aplikacijah.

Vse naloge lahko obravnavamo za obe interpretaciji, pobegov in sprehodov. V prvem primeru (pobeg, *flight*) je pretečeni čas direktno sorazmeren s številom korakov, v drugem primeru (sprehod, *walk*) pa je pretečeni čas sorazmeren z vsoto dolžine korakov.

Pri anomalni difuziji razmazanost (varianca) velike množice končnih leg naključnih Lévyjevih **sprehodov (walks)** narašča z drugačno potenco časa. Velja  $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$ , kjer je

$$\begin{aligned} 1 < \mu < 2, & \quad \gamma = 2 & \text{(balistični režim),} \\ 2 < \mu < 3, & \quad \gamma = 4 - \mu & \text{(super-difuzivni režim),} \\ \mu > 3, & \quad \gamma = 1 & \text{(normalna difuzija).} \end{aligned}$$

Za  $\mu = 2$  pričakujemo  $\sigma^2(t) \sim t^2 / \ln t$ , za  $\mu = 3$  pa  $\sigma^2(t) \sim t \ln t$  (glej na primer [1] in druge reference prav tam).

Slika je nekoliko drugačna pri opazovanju naključnih Lévyjevih **poletov (flights)**. Spet vzamemo zvezo  $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$  in dobimo odvisnosti

$$\begin{aligned} 1 < \mu < 3, & \quad \gamma = \frac{2}{\mu - 1} & \text{(super-difuzivni režim),} \\ \mu > 3, & \quad \gamma = 1 & \text{(normalna difuzija).} \end{aligned}$$

Pri  $\mu = 2$  očitno pričakujemo  $\sigma^2(t) \sim t^2$ , torej balistični režim.

*Statistični komentar:* v primerih, ko je drugi moment porazdelitve neskončen, bo tudi račun razmazanosti končnih leg  $x_n$  v obliki

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \langle x \rangle)^2 \quad (2)$$

divergiral oziroma bo imel ob ponovnih zagonih naključnega sprehoda močno raztresene vrednosti. Ta problem rešimo z uporabo robustne mere MAD, “median absolute deviation”

$$\text{MAD} \equiv \text{median}_i (|X_i - \text{median}_j X_j|) .$$

Z njo merimo povprečje absolutne vrednosti deviacije na način, ki je zelo malo občutljiv na oddaljene vrednosti v repih porazdelitve, saj te vrednosti na račun mediane bistveno manj vplivajo kot na račun običajne povprečne vrednosti.

## 3 Rešitev

### 3.1 Naključna pot

Za generiranje naključnih poti moramo najprej določiti porazdelitev po kateri bomo računali dolžino koraka. V navodilih imamo podano sorazmerje  $w(l) \propto p(l) \propto l^{-\mu}$ , ter enačbo,

$$\int_a^l w(t) dt = \rho \cdot \int_a^b w(t) dt,$$

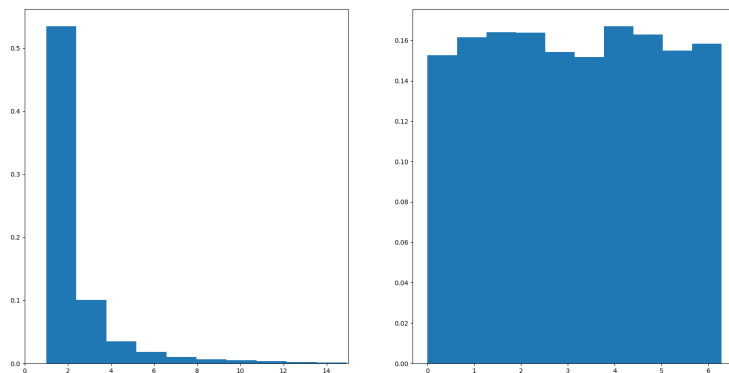
kjer je  $\rho \in [0, 1]$ ,  $a$  in  $b$  pa spodnja in zgornja meja. Iz te elegantne zveze dobimo predpis za generiranje naključne razdalje pri izbrani porazdelitvi.

$$l = (\rho b^{1-\mu} + (1-\rho)a^{1-\mu})^{\frac{1}{1-\mu}}$$

Da se izognemo težavam s konvergenco integralov nastavimo  $a = 1$  in izlimitiramo  $b$  v neskončnost. To nam da izraz

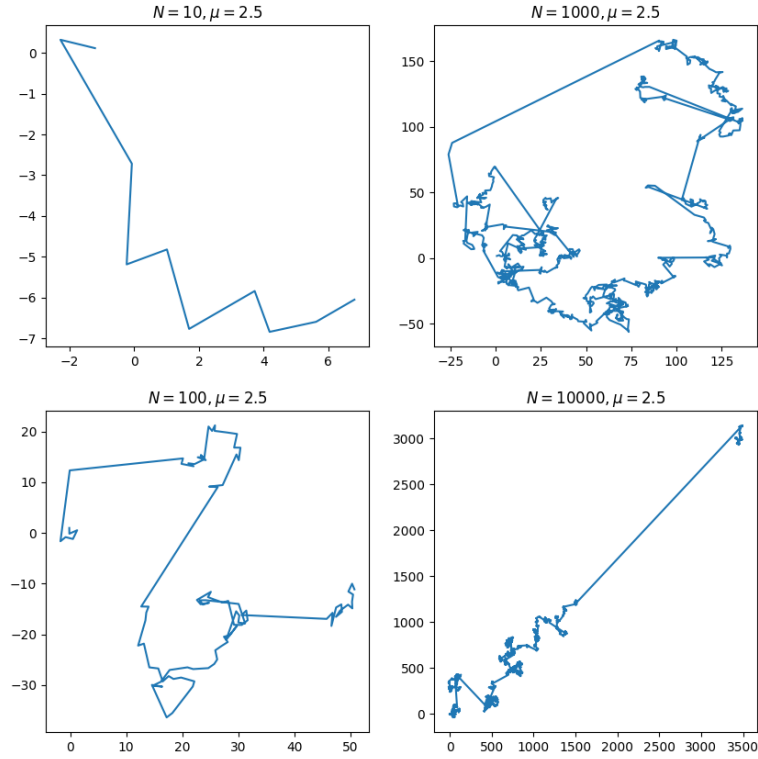
$$l = (1 - \rho)^{\frac{1}{1-\mu}}$$

Za generiranje kota premika pa preprosto uporabimo uniformno porazdelitev. Da preverimo formulo narišimo histogram porazdelitev



Slika 1: Distribucija dolžine (levo) in kotov (desno) koraka pri  $\mu = 2.5$

Kot vidimo obe porazdelitvi ustrezata pričakovani obliki. Zato lahko za začetek narišemo nekaj poti pri  $\mu = 2.5$



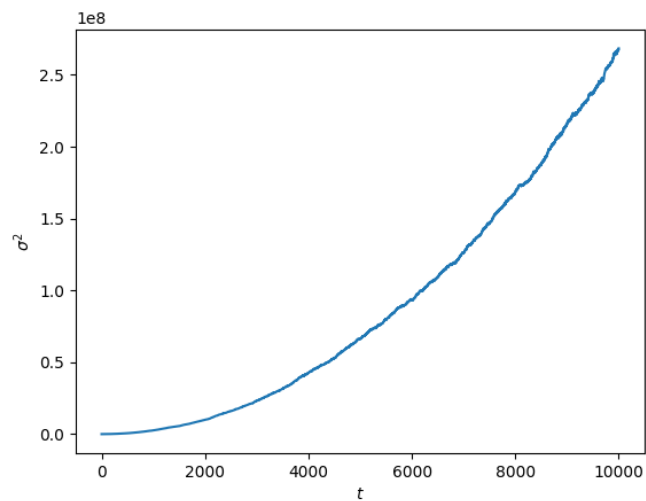
Slika 2: Naključne poti pri  $\mu = 2.5$

### 3.2 Lévyjev polet in sprehod

Zdaj imamo vse potrebne pogoje za obdelavo razmazanosti. Kot že omenjeno v uvodu bomo to računali s pomočje mere MAD, ki je sorazmerna s standardno deviacijo in sicer  $MAD \approx 0.6745\sigma$  [2]. Standardna deviacija pa je koren variacije. Tako smo robustno izračunali variacijo, ki je sorazmerna s potenco časa  $\sigma^2 \propto t^\gamma$ . Iz tega razmerja lahko potem iz dveh točk določimo  $\gamma$

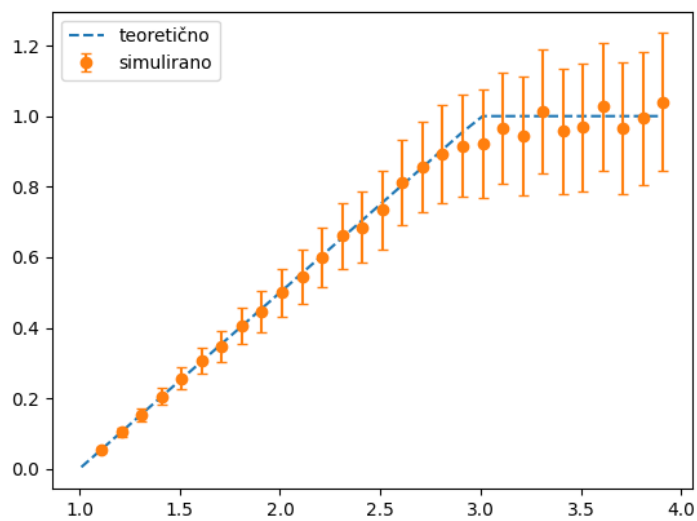
$$\gamma = \frac{\log(\sigma_2) - \log(\sigma_1)}{\log(t_2) - \log(t_1)}$$

Ta postopek nato iteriramo čez več točk in s tem določimo povprečno  $\gamma$  in napako fita. Lévyjevi poleti so čeprav fizikalno manj smiselni preprostejši za implementacijo, saj je čas direktno sorazmeren s številom korakov. Zato bomo začeli z njimi in narisali odvisnost  $\sigma^2$  od časa.



Slika 3: Odvisnost variacije od časa pri  $\mu = 2$

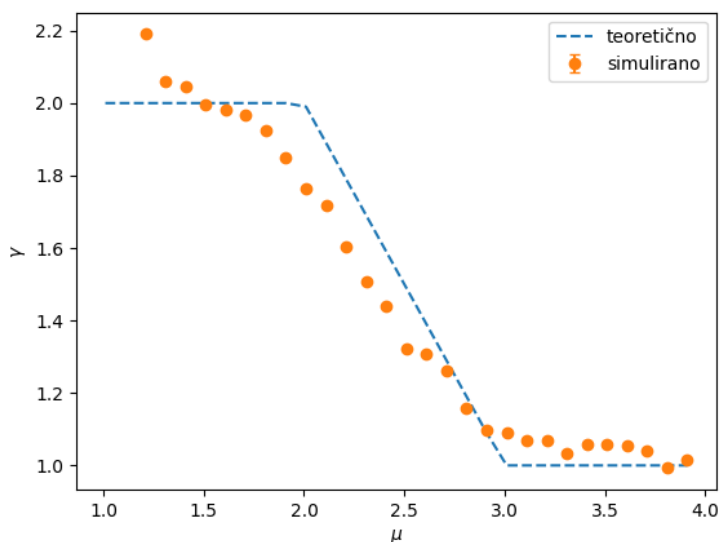
Pričakovano glede na podano teorijo opazimo potenčno funkcijo. Zdaj pa si poglejmo, kar odvisnost  $\gamma$  od  $\mu$  za Lévyjeve polete. Pri risanju grafa izvedemo tisoč poletov z deset tisoč koraki in to ponovimo desetkrat.



Slika 4: Odvisnost  $\gamma$  od  $\mu$  pri Lévyjevih poletih

Naša simulacija je bila precej uspešna. V intervalu super-difuzije so razlike minimalne. Odstopanja opazimo predvsem okoli  $\mu = 3$  torej na prehodu med super-difuzivnim načinom in normalnim. To je najverjetneje posledica nezveznosti teoretične funkcije v tej točki. Z več iteracijami in koraki pa bi se najverjetneje ta odstopanja zmanjšala.

V drugem delu naloge pa sledijo še Lévyjevi sprehodi. Za te smo uporabili implementacijo poletov in nato razbili točke tako, da je čas sorazmeren s prepotovano razdaljo. Ker za izračun MAD potrebujemo pozicije ob enakem času je to precej bolj časovno zahtevno. Zato bomo vzeli le tisoč sprehodov s po tisoč koraki in to enako kot prej ponovili desetkrat.



Slika 5: Odvisnost  $\gamma$  od  $\mu$  pri Lévyjevih sprehodi

Pri sprehodih so razlike večje, a so dobljene napake simulacije presenetljivo majhne. Razlike od teorije lahko pripišemo dejstvu, da smo uporabili manjše število korakov in iteracij. Kljub temu pa je splošen trend teoretične  $\gamma$  še vedno viden. Odstopanje opazimo pri  $\mu = 2$ , kjer je prehod med balističnim in super-difuzivnim režimom. Pri prehodu v normalni režim pa so nenatančnosti največje kar se verjetno zgodi zaradi premalega števila korakov.

## 4 Zaključek

Sama ideja naloge je precej preprosta. Najtežji del naloge je bila gotovo implementacija Lévyjevih sprehodov. Lahko bi si sicer ta del naloge še precej utežil z učinkovitim implementiranjem le teh, a se tega zaradi pomanjkanja časa nisem lotil. Največ časa pa sem porabil na iskanju dejstva, da sem uporabljal premajhen interval pri generiranju naključnih razdalj. Za konec pa še zanimivo dejstvo, da je imel Space Shuttle na krovu teleprinter.

## Literatura

- [1] E. R. Weeks, J. S. Urbach, H. L. Swinney, *Physica D* **97** (1996) 291.
- [2] Baccyak4H, Rgbcmv, Median absolute deviation, Wikipedia (2024)