UNIVERSITY OF LJUBLJANA
FMF
Faculty of Mathematics and Physics

Matematično-fizikalni praktikum

Naloga 7

Luka Papež

10. december 2024

1 Naloga

Čim več metod uporabi za izračun nihanja matematičnega nihala z začetnim pogojem $\theta(0) = \theta_0 = 1$,$\dot{\theta}(0) = 0$. Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in poglej, kako se amplitude nihajev sistematično kvarijo. Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš energijo $E \propto 1 - \cos\theta + \frac{\dot{\theta}^2}{2\omega_0^2}$. Nariši tudi ustrezne fazne portrete!. Z analitično rešitvijo dobimo za nihajni čas $\frac{4}{\omega_0} K\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right)$, kjer je $K(m)$ popolni eliptični integral prve vrste, ki je v SciPy knjižnici in v članku na spletni učilnici podan z:

$$K(m) = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-mz^2)}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\left(1 - m\sin^2 u\right)}}$$

2 Uvod

Gibanje masne točke v polju sil v eni dimenziji opišemo z diferencialno enačbo drugega reda, z Newtonovim zakonom

$$m\,[2]xt = F\ .$$

Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m\,xt = p\ , \qquad pt = F$$

in tako jo tudi rešujemo: kot sistem dveh enačb prvega reda.
Seveda morajo biti na voljo tudi ustrezni začetni pogoji, tipično $x(t=0) = x_0$ in $dx/dt = v(t=0) = v_0$. Splošnejše gre tu za sistem diferencialnih enačb drugega reda:

$$[n]yx = f(x, y, y', y'', ...),$$

ki ga lahko prevedemo na sistem enačb prvega reda z uvedbo novih spremenljivk v slogu gibalne količine pri Netwonovi enačbi ($y' = v, y'' = z, ...$).
Z nekaj truda se da eksplicitno dokazati, mi pa lahko privzamemo, da so metode za reševanje enačb hoda (Runge-Kutta 4. reda, prediktor-korektor...) neposredno uporabne za reševanje takšnih sistemov enačb in torej aplikabilne v poljubno dimenzijah, kar naj bi v principu zadovoljilo večino naših zahtev.
Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je f le funkcija koordinat, $f(y)$, ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak n velikosti h, $x_n = x_0 + n \cdot h$:

$$[2]yx = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak y_n in $v_n = y'_n$:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \\
v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot \left[f(y_n) + f(y_{n+1}) \right].
\end{aligned}
$$

Alternativno lahko to shemo zapišemo tudi s pomočjo dodatnih vmesnih točk in preskakujemo med lego in hitrostjo z zamikom h/2 (od tod angleško ime 'leapfrog' za ta zapis):

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_{n+1/2} \\
v_{n+3/2} &= v_{n+1/2} + h \cdot f(y_{n+1}).
\end{aligned}
$$

V še enem drugačnem zapisu je metoda poznana tudi kot metoda "Središčne razlike" (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

$$
y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n),
$$

kjer prvo točko y_1 izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljamo tudi za primere, ko je f tudi funkcija 'časa' x, f(x,y), le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Za simplektične metode višjih redov je na voljo na primer Forest-Ruth metoda ali Position Extended Forest-Ruth Like (PEFRL) metoda, ki sta obe globalno četrtega reda in enostavni za implementacijo.

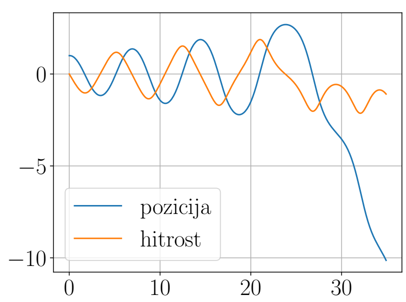
3 Rešitev

3.1 Eulerjeva in RK45 metoda

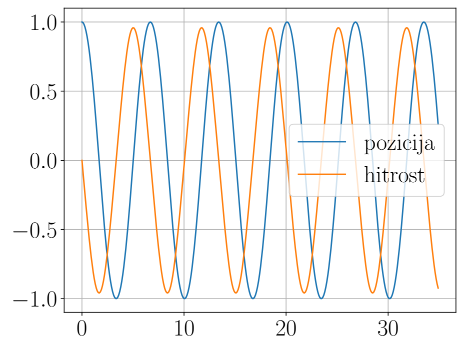
Naloga nas postavi pred izziv reševanja diferencialnih enačb v obliki Newtonove enačbe. Torej z drugimi besedami diferencialnimi enačbami drugega reda. Kot glavni primer si poglejmo matematično nihalo. Gibanje opišemo s kotom φ kot dimenzijo odmika od ravnovesne lege. Rešujemo torej naslednjo enačbo

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

kjer $\frac{g}{l}$ predstavlja kvadrat frekvence gibanja ω^2. Za namene našega računanja vzamemo primer $\omega = 1$. Za začetek si poglejmo kako se obneseta Eulerjeva metoda in Runge-Kutta-Fehlberg (RK45).



(a) Eulerjeva metoda

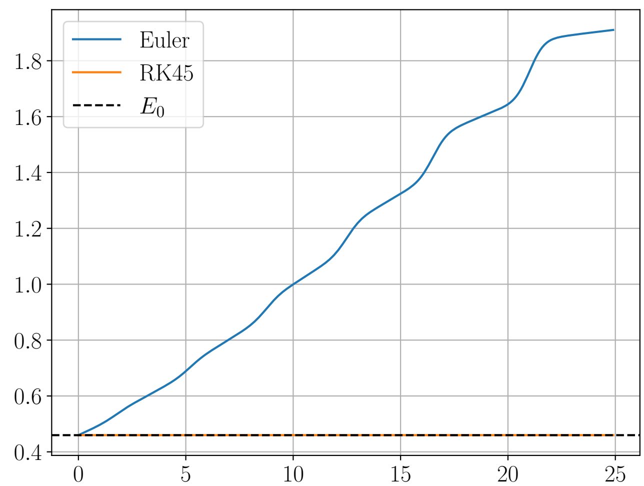


(b) Runge-Kutta 45

Slika 1: Hitrost in pozicija matematičnega nihala

Kot pričakovano po že pridobljenih izkušnjah natančnost Eulerjeve metode na hitrosti precej hitro pridobi velika odstopanja. Posledično pa se izguba natančnosti še toliko bolj opazi pri poziciji. Seveda pa metoda RK45 lepo obdrži natančnost.

Za ocenjevanje natančnosti so primerne ohranitvene količine. V našem primeru smo izbrali energijo, saj lahko njeno odvisnost $E \propto 1 - \cos\varphi + \frac{\dot{\varphi}^2}{2\omega^2}$ enostavno izračunamo z začetnimi pogoji.

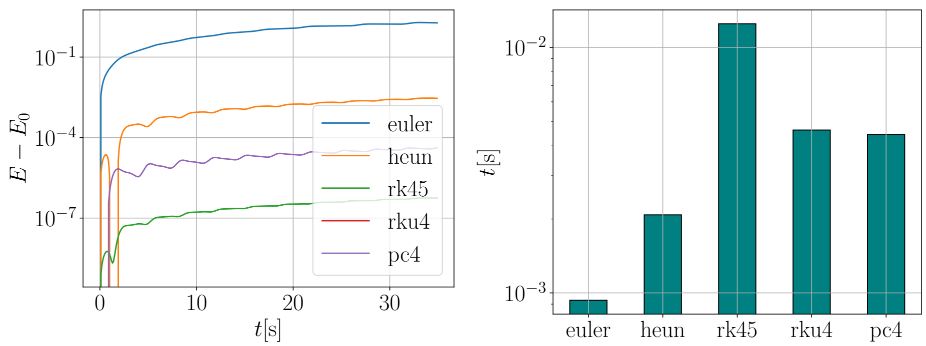


Slika 2: Energija matematičnega nihala pri uporabi Eulerjeve metode in RK45

Kot smo razbrali že iz pozicije in hitrosti se očitno energija pri Eulerjevi metodi ne ohrania. Pri metodi RK45 pa je ohranitev precej dobra.

3.2 Primerjava različnih metod

Oglejmo si napake ohranitev energije in potreben čas za izračun pri nekaj reprezentivnih primerih metod integracije.

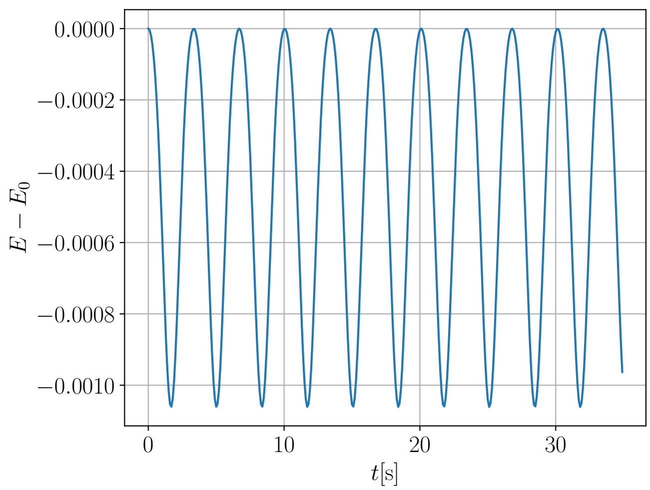


(a) Odstopanje od začetne energije

(b) Razlika v računskem času

Slika 3: Primerjava različnih integracijskih metod

Dobimo pričakovane rezultate, kjer je metoda RK45 še najbolj natančna in hkrati najpočasnejša. Poglejmo si še simplektično metodo Leapfrog, ki ohranja stabilnost sistema s pomočjo opravljanja pol korakov. Algoritem je zelo podoben Eulerjevi metodi le, da pozicijo spremenimo s sredinsko vrednostjo hitrosti v intervalu. Poglejmo si kako se energija ohranja v tem primeru.



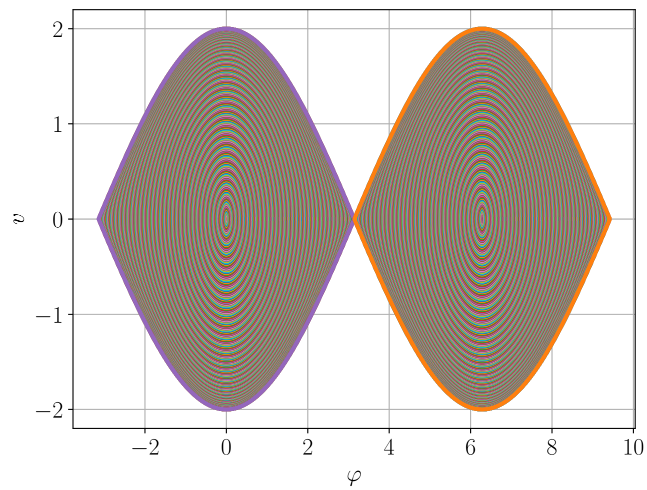
Slika 4: Energija matematičnega nihala z uporabo Leapfrog metode

Dobimo zanimiv rezultat. Za razliko od ostalih metod, kjer napaka relativno konsistentno narašča, energija tu oscilira pod pravo vrednostjo energije. Najvišja napaka je sicer bližje manj natančnim metodam, a bi to lahko izboljšali z zmanjšanjem koraka. Časovno pa je metoda z 1.2 ms primerljiva s hitrostjo Eulerjeve metode.

3.3 Fazni prostor

Za konec pa narišemo še fazni prostor. Na našem grafu vsaka posamezna krivulja predstavlja pot matematičnega nihala z začetno pozicijo $\varphi = 0$ in določeno začetno hitrost glede na pozicijo na grafu. Da so naše krivulje čim bolj sklenjene pa si pomagamo z izračunom nihajnega časa. To storimo z analitično rešitvijo $\frac{4}{\omega} K\left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right)$, kjer je $K(m)$ popolni eliptični integral prve vrste, φ_0 amplituda in ω frekvenca nihala.

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - m \sin^2 u}}$$



Slika 5: Fazni prostor matematičnega nihala

Pri manjših amplitudah so poti elipse, ko se amplituda povečuje pa se vedno bolj približuje nezveznosti. Največji odmik nato opazimo pri vrednosti π(zaradi izbrane frekvence $\omega = 1$) čez katero se graf zrcali. Če bi še naprej risali z večjim odmikom φ bi se tako na vrednostih $2k\pi - \pi$ ponovil zgornji vzorec.

4 Zaključek

Tokratna naloga je bila podobna prejšnji le, da smo povečali red diferencialne enačbe. Na žalost mi sicer ni uspelo najti časa, da bi rešil tudi dodatne naloge, ki so izgledale kar precej zanimive. Sem pa zato namenil nekaj več časa vsako letnemu reševanju božiča. Letos je namreč izginil glavni zgodovinar, ki je vedno prisoten pri odhodu božičkovih sank.