



## Modelska Analiza 1

4. naloga

Luka Papež  
28221030

# 1 Naloga - Populacijski modeli

1. Model epidemije: populacijo razdelimo v tri razrede: (D) zdravi in dovezetni, (B) bolni in kli-  
conosi, (I) imuni: nedovzetni in neklicenosni. Bolezen se širi s stiki med zdravimi in bolnimi.  
Bolnik preide s konstantno verjetnostjo med imune (ozdravi ali umre).

$$\dot{D} = -\alpha DB, \quad \dot{B} = +\alpha DB - \beta B, \quad \dot{I} = \beta B. \quad (1)$$

V epidemiji nas zanima njen vrh (maksimalno trenutno število obolelih), čas nastopa maksimuma in celotno število obolelih. S cepljenjem lahko vnaprej preselimo določen del populacije med imune. Kako vpliva delež cepljenih na parametre epidemije? Kako se spremeni potek epidemije, če obolele razdeliš na več stadijev okužbe? Poskušlahko s 3 stadiji: najprej so okuženi, a ne širijo epidemije (inkubacijska doba), potem so močno kužni, potem pa so v izolaciji in jim kužnost pada.

2. Preuči standardni deterministični model zajci-lisice (model Lotka-Volterra) v obliki

$$\dot{Z} = \alpha Z - \beta ZL, \quad \dot{L} = -\gamma L + \delta ZL. \quad (2)$$

Nariši in preišči fazni diagram (brezdimenzijska oblika, zastojne točke, stabilnost ...). Oglej si obhodne dobe v odvisnosti od začetnega stanja. Zadošča, da preiščeš stanja, v katerih ima ena komponenta ravnovesno vrednost.

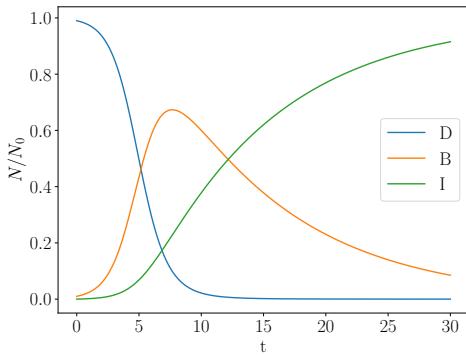
3. Analiziraj fazni portret za populacijski model laserja s konstantnim črpanjem.

$$\dot{f} = -\alpha f + B_1 af, \quad \dot{a} = -\beta a - B_2 af + R. \quad (3)$$

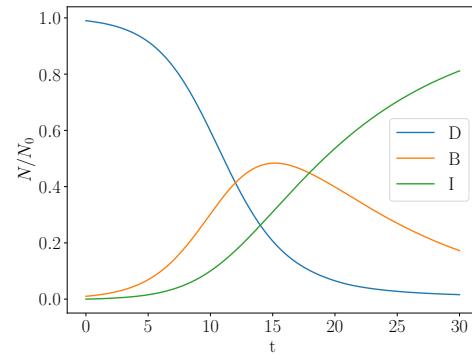
Določi ravnovesno stanje v odvisnosti od moči črpanja. Kako se s tem parametrom spreminja frekvenca in karakteristični čas relaksacijskih oscilacij?

## 2 Model epidemije

Model epidemije opišemo z enačbami (1), kjer definiramo konstanti  $\alpha$  in  $\beta$ , ki opisujeta hitrost širjenja bolezni in zdravljenja. Za lažjo obravnavo še postavimo količino celotne populacije na 1 oziroma, da ob vseh trenutkih velja  $D + B + I = 1$ . Da se populacija ohranja tudi ob razvoju skozi čas potrdimo z lastnostjo  $\dot{D} + \dot{B} + \dot{I} = 0$ . S tem lahko narišemo preproste grafe poteka epidemije.



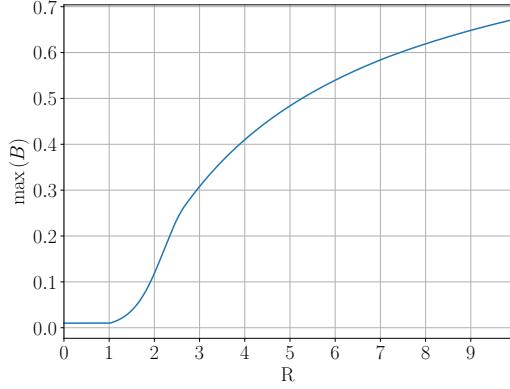
(a) Parametra nastavljena na  $\alpha = 1$  in  $\beta = 0.1$ .



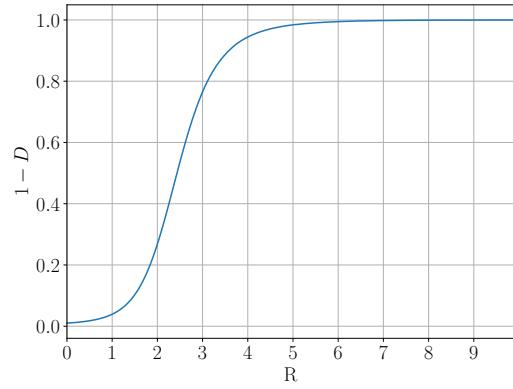
(b) Parametra nastavljena na  $\alpha = 0.5$  in  $\beta = 0.1$ .

Slika 1: Poteka epidemije pri različnih vrednostih parametrov.

Za raziskovanje maksimuma trenutnega števila obolelih uvedimo reprodukcijsko število  $R = \alpha D_0 / \beta$  in narišimo graf velikosti maksimuma od reprodukcijskega števila na sliki 2a. Na tem grafu opazimo, da se maksimalno število obolelih ne poveča dokler reprodukcijsko število ne preseže vrednosti 1 nato začne eksponentno naraščati. Rast se nato umiri pri vrednosti reprodukcijskega števila 2.5. Pri točki 2.5 na grafu na sliki 2b opazimo, da zboli približno polovica celotnega prebivalstva.

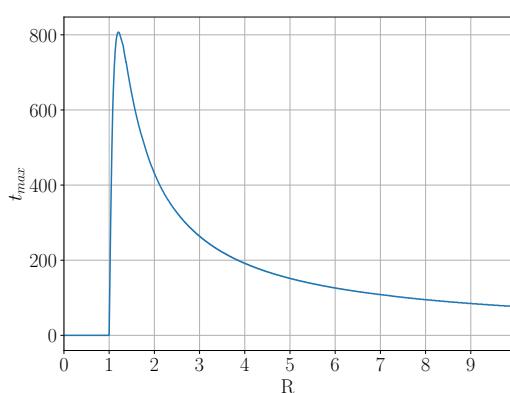


(a) Maksimum trenutnega števila obolelih v odvisnosti od reprodukcijskega števila.

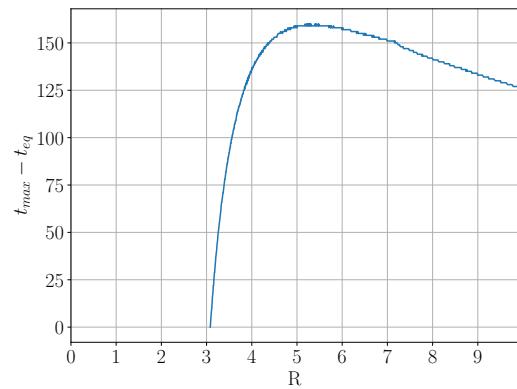


(b) Celotno število obolelih v odvisnosti od reprodukcijskega števila.

Na sliki 1 opazimo tudi, da se vrh števila trenutno bolnih zgodi kmalu po tem, ko je število zdravih (D) in bolnih (B) enako. Za boljše razumevanje narišimo še čas maksimuma po začetku in po enakem številu obolelih in zdravih, če se to zgodi. Opazimo na slikah 3a in 3b, da se maksimum pri  $R < 1$  zgodi že takoj na začetku in se torej epidemija nikoli ne zgodi, saj kot smo že opazili število trenutno obolelih pada. Po tem dobimo kratko območje naraščanja, kjer je naraščanje obolelih zelo počasno oziroma je epidemija zelo dolga. Pri reprodukcijskem številu 3 pa se tudi zgodi, da je več ljudi trenutno bolnih (B) kakor pa zdravih (D), kar zanimivo približno ustrezata tretjini. Čas med maksimum in enakim številom zdravih (D) in obolelih (B) se nato viša do točke, kjer maksimum preseže polovico prebivalstva.



(a) Čas maksimuma trenutnega števila obolelih v odvisnosti od reprodukcijskega števila.

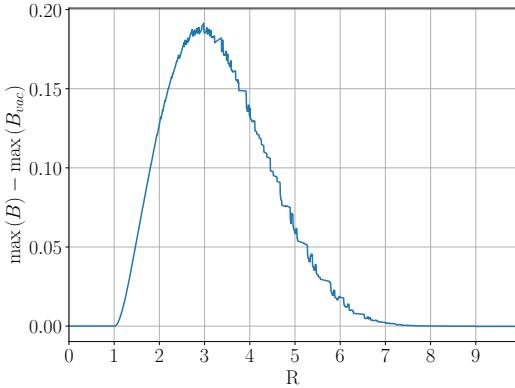


(b) Čas med maksimumom trenutnega števila obolelih in enakim številom zdravih (D) in obolelih (B) v odvisnosti od reprodukcijskega števila.

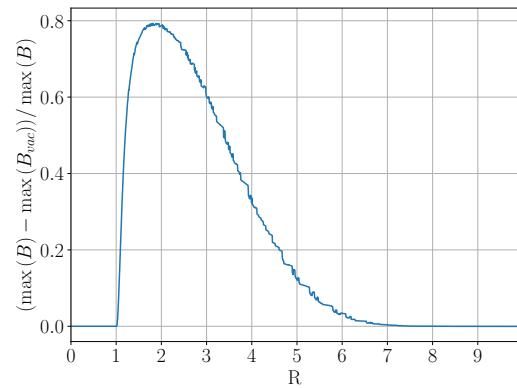
Pogledamo lahko tudi primer, ko po času  $t_0$  začnemo s cepljenjem in tako premaknemo zdrave (D) med cepljene (V). Tak sistem opišemo z naslednjimi enačbami

$$\dot{D} = -\alpha DB - \gamma DH(t_0), \quad \dot{B} = \alpha DB - \beta B, \quad \dot{I} = \beta B, \quad \dot{V} = \gamma DH(t_0). \quad (4)$$

Prva stvar, ki nas zanima je seveda za koliko zmanjšamo obremenitev zdravstva oziroma z drugimi besedami maksimum števila trenutno bolnih. Na primeru na sliki 4a opazimo, da cepljenje najbolj zmanjša število bolnih ljudi na enkrat okoli reprodukcijskega števila 3. Ko pogledamo relativno vrednost maksimuma pa ugotovimo, da ga najbolj zmanjša pri reprodukcijskem številu 2 in to skoraj za 80%.



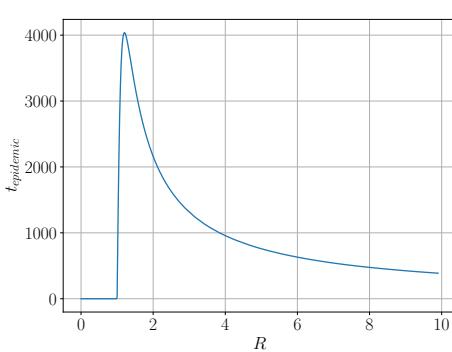
(a) Razlika med maksimumom števila trenutno bolnih brez cepljenja in s cepljenjem pri  $t_0 = 10$  za obdobje epidemije  $t = 100$  za  $\gamma=0.1$ .



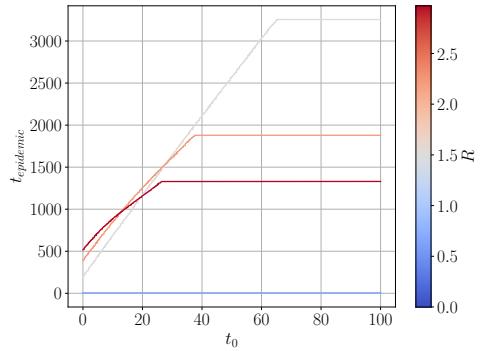
(b) Relativna razlika med maksimumom števila trenutno bolnih brez cepljenja in s cepljenjem pri  $t_0 = 10$  za obdobje epidemije  $t = 100$  za  $\gamma=0.1$ .

Seveda pa nas v praksi najbolj zanima kdaj se bo epidemija končala. Glede na prejšnje ugotovitve vemo, da se epidemija ne začne, če je  $R < 1$ . Na podlagi tega uvedemo efektivno reprodukcijsko število  $R_{eff}(t) = \alpha D(T)/\beta$  in definiramo konec epidemije, ko je vrednost tega pod 1.

Z risanjem grafa dolžine epidemije v odvisnosti od reprodukcijskega števila nam razkrije, da ima to enako odvisnost kot čas do maksima števila trenutno bolnih. Na sliki 5b je graf časa konca epidemije v odvisnosti od časa začetka cepljenja. Tako dolžina epidemije kot velikost maksimuma števila trenutno bolnih ima enako odvisnost in sicer najprej dolžina ter velikost linearno naraščata z začetkom cepljenja. Nato pa se ustali na konstanti vrednosti, ker je bilo cepljenje prepozno in se je bolezen že preveč razširila.

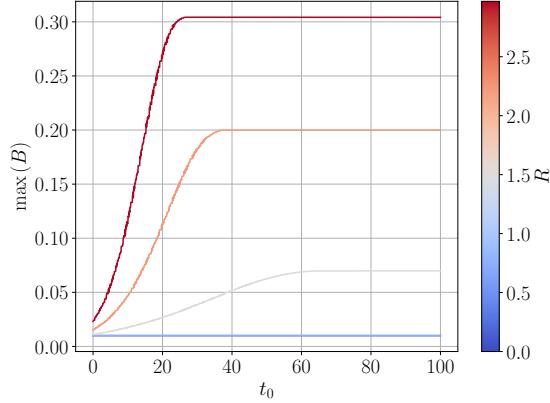


(a) Dolžina epidemije v odvisnosti od R brez cepljenja pri  $\gamma = 0.1$ .



(b) Dolžina epidemije v odvisnosti od začetka cepljenja  $t_0$  pri  $R = 3$  in  $\gamma = 0.1$ .

Enaka odvisnost med dolžino epidemije in časom maksimuma števila trenutnih bolnih se prenese enaka odvisnost tudi pri odvisnosti od časa začetka cepljenja kar vidimo na sliki 6.

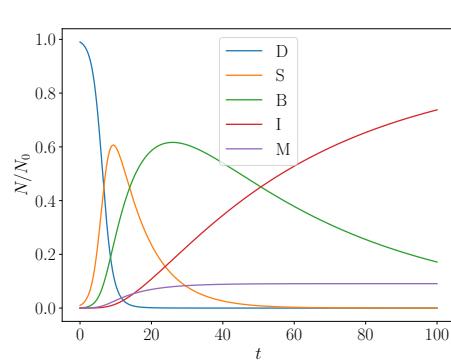


Slika 6: Maksimum števila trenutno bolnih v odvisnosti od začetka cepljenja  $t_0$  pri  $R = 3$  in  $\gamma = 0.1$ .

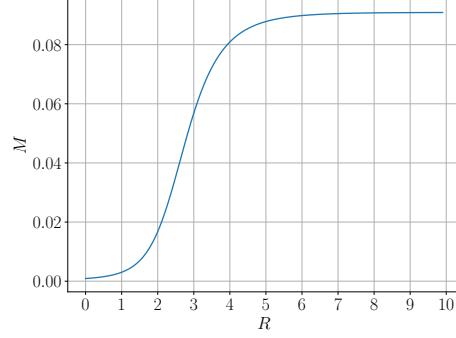
Potek bolezni lahko razdelimo tudi na več faz na primer zdravi (D), hudo bolni (S), bolni (B), imuni (I) ter mrtvi (M). Za tak sistem enačbe napišemo sledeče

$$\dot{D} = -\alpha DB - \beta DS, \quad \dot{S} = \alpha DB + \beta DS - (\gamma + \delta)S, \quad \dot{B} = \gamma S - \epsilon B, \quad \dot{I} = \epsilon B, \quad \dot{M} = \delta S. \quad (5)$$

Za potrebe reprodukcijskega in efektivnega reprodukcijskega števila definiramo  $R = (\alpha + \beta)D / (\gamma + \delta + \epsilon)$ . Na sliki 7a imamo potek epidemije za določene parametre, kjer je zanimivo kako je najprej velik delež populacije hudo bolnih (S) nato pa se to prelevi le v bolnost (B) zaradi počasnega ozdravljanja iz te faze. Zanimiva je tudi opazka kako na sliki 7b najprej število mrtvih v odvisnosti od reprodukcijskega števila hitro narašča nato pa se ustali na malo pod 9% populacije.

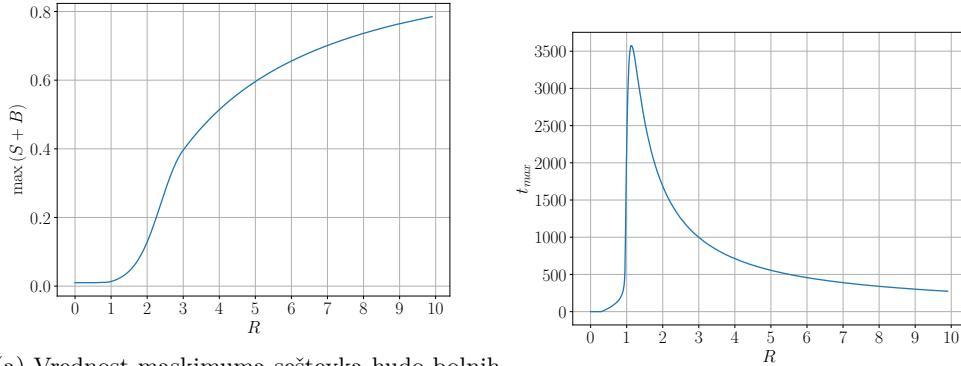


(a) Potek epidemije z več fazami bolezni.



(b) Število smrti v epidemiji v odvisnosti od reprodukcijskega števila.

Pogledamo si lahko tudi maksimume in čas pojava le teh. Iz slike 8a razberemo, da je delež bolnih le malo višji pri določenih reprodukcijskih številih. Kot vidimo na sliki 8b se maksimumi pojavijo precej kasneje v primerjavi s tistimi na sliki 3a, kar nakazuje precej daljšo epidemijo od tiste s preprostejšim modelom.



(a) Vrednost maskima seštevka hudo bolnih in bolnih v odvisnosti od reprodukcijskega števila.  
(b) Čas do maksima seštevka hudo bolnih in vila.

### 3 Določanje parametrov glede na podatke iz COVID Sledilnika

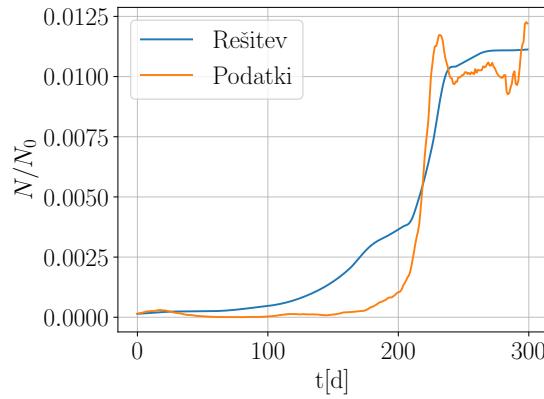
Da bi določili parametre dejanskega sistema in ugotovili tudi kako se sistem v celoti obnaša smo najprej zastavili enačbe

$$\dot{D} = -\alpha DB - \gamma D + \epsilon(I + V), \quad \dot{B} = \alpha DB - \beta B - \delta B, \quad \dot{I} = \beta B - \epsilon I, \quad \dot{V} = \gamma D - \epsilon V, \quad \dot{M} = \delta B.$$

Ideja je bila, da bi lahko s tem sistemom opisali celotno epidemijo. A se je ta sistem izkazal za preveč zahtevnega in smo s postopnim poenostavljanjem končali na osnovnem modelu (1). Za bolj primerljivo dinamiko z modelom smo se omejili na prvih 300 dni, kjer je bila rast eksponentna in se je proti koncu umirila. S tem smo tako postavili parametre  $\alpha_n$  in  $\beta_n$ , ki jih variramo. Za primer na sliki 9 je bil vsak par parametrov odgovoren za 30 dni in smo tako imeli 20 parametrov. Za vgrajeno metodo `scipy.optimize.least_squares` smo nato iz podatkov iz COVID sledilnika vzeli podatek o novih potrjenih primerih  $C$ , ki smo ga normalizirali s populacijo Slovenije 2000000 in definirali sledečo funkcijo

$$\mathcal{L}_1 = (\dot{B} - C)^2.$$

S prilagajanjem začetnih vrednosti parametrov uspemo zajeti dinamiko dejanskih podatkov. Glavna napaka je predvsem razlika v eksponentni rasti. Zelo lepo pa se ujema vrh, kjer naša rešitev preide natanko čez sredino rahlo zašumljenih podatkov.



Slika 9: Rešitev trenutnega števila bolnih (B) minimizacije 20 parametrov glede na podatke.

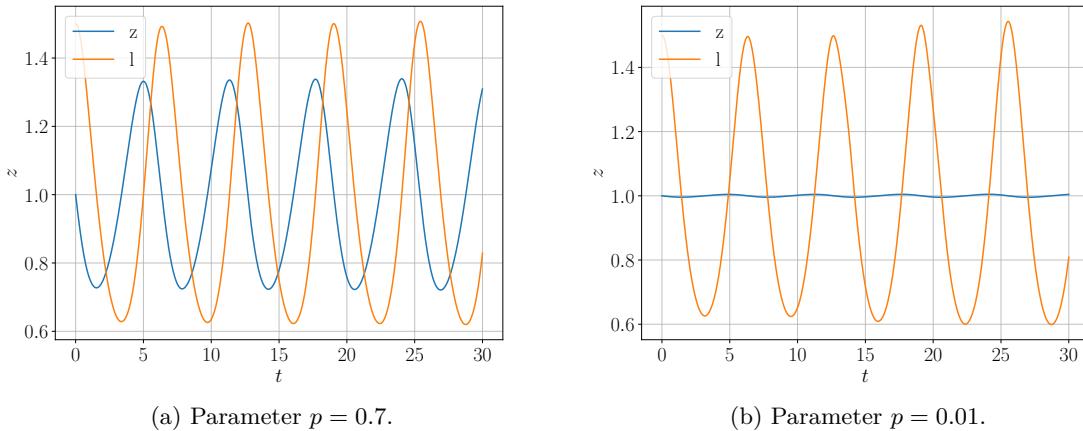
## 4 Model Lotka-Volterra

Model Lotka-Volterra je standardni model opisa sistema plen-lovec in je definiran z enačbami (2). Ta sistem lahko poenostavimo tako, da uvedemo novi spremenljivki  $l = \beta/\alpha L$  in  $z = \delta/\gamma Z$ , kar nam definira sistem

$$\dot{z} = \alpha z(1 - l), \quad \dot{l} = \gamma l(z - 1).$$

Z reskaliranjem časa  $\mathcal{T} = t\sqrt{\alpha\gamma}$  in uvedbo še ene nove spremenljivke  $p = \sqrt{\alpha/\gamma}$  pa sistem postane enoparametričen

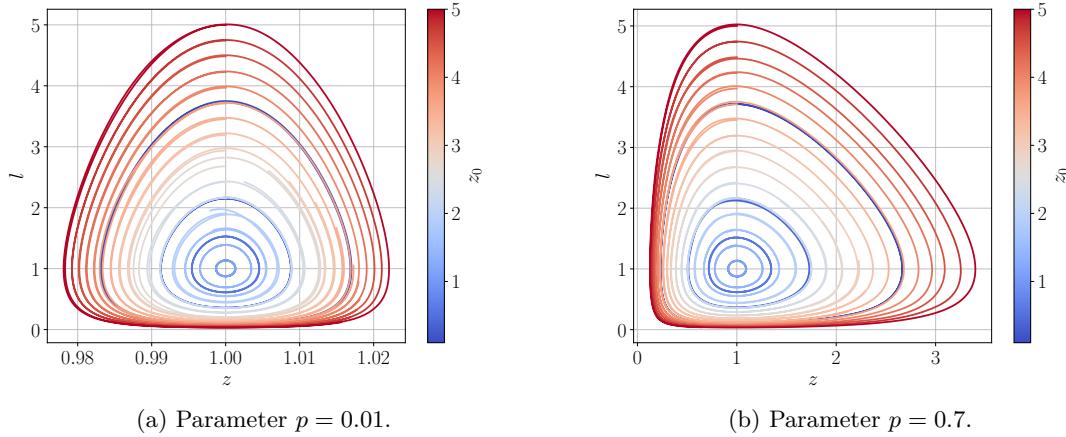
$$\dot{z} = pz(1 - l), \quad \dot{l} = \frac{l}{p}(z - 1).$$



Slika 10: Primer populacije lisic in zajcev skozi čas.

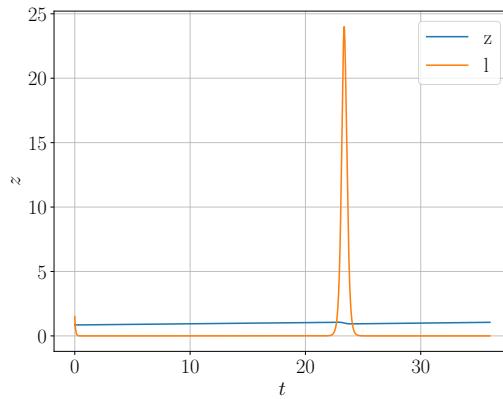
Iz takega sistema dobimo periodične rešitve kot na sliki 10. Rešitve lahko narišemo tudi v obliki faznega diagrama kot na sliki 11. Na faznem diagramu opazimo, da rešitve oscilirajo okoli točke  $(z, l) = (1, 1)$ .

To pojasnimo s stacionarnima točkama sistema, ki jih določimo z  $\dot{z} = 0$  in  $\dot{l} = 0$ . Ena izmed točk je  $(0, 0)$ , kjer nobena izmed populacij ne obstaja in se zato nobena ne manjša oziroma narašča. Druga točka je  $(1, 1)$ , kjer sta populaciji v sožitju in velikostih obe ohranjata konstantno vrednost.



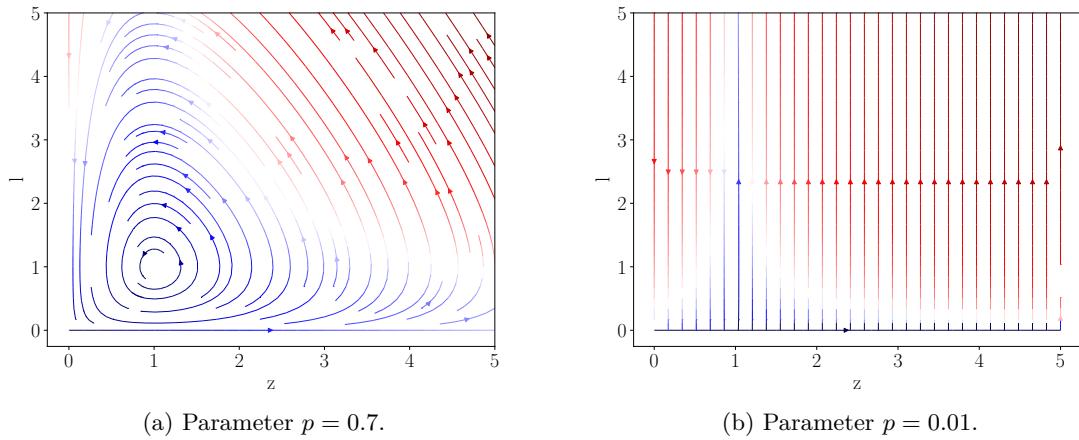
Slika 11: Fazni diagram ob variranju  $z_0$  in fiksniem  $l_0 = 1$ .

Zanimiv je tudi problem z vrednostjo  $p = 0.01$  in  $l_0 = 0.85$  pri katerem zaradi majhnosti parametra  $p$  lisice praktično izumrejo in populacija zajcev efektivno linearno narašča. Nato pa velikost zajcev preseže 1 in populacija lisic se s tem nenadno poveča. Zarad pomanjkanja zajcev pa se nato ponovno strmo upade.



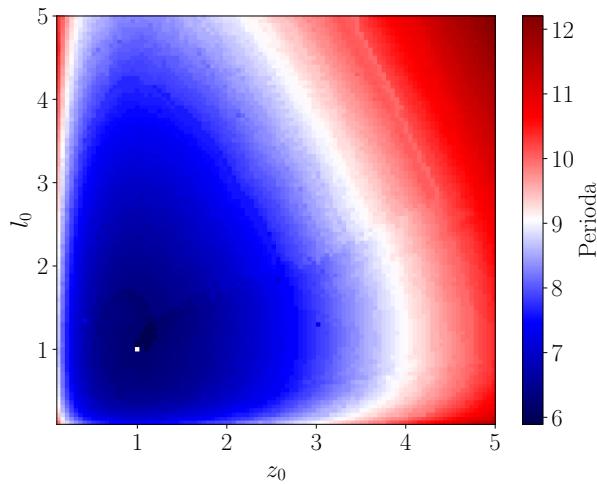
Slika 12: Populacija lisic in zajcev skozi čas pri začetnih pogojih  $z_0 = 1.5$ ,  $l_0 = 0.85$  in parametru  $p = 0.01$ .

Bolje nam ta pojav razloži tudi graf gradientov v faznem diagramu na sliki 13. Pri parametru  $p = 0.7$  so prehodi zvezni in ni tako ekstremnih sprememb. Pri parametru  $p = 0.01$  pa se gradient nad  $z = 1$  na enkrat obrne kar povzroči tako velik prehod. Lepo se vidi tudi konstanten odvod pri  $l = 0$ , kjer populacija zajcev linearno narašča.



Slika 13: Gradienti v faznem diagramu.

Periode rešitev so najnižje v okolici točke  $(1, 1)$ , kjer je perioda nič, saj je tam populacija zajcev in lisic konstantna. V sami točki  $(1, 1)$  oziroma že v njeni ožji okolici pa program ne najde rešitve. Podobno bi bilo v točki  $(0, 0)$  a tam ne iščemo periode.



Slika 14: Periode rešitev pri  $p = 0.7$

## 5 Populacijski model laserja

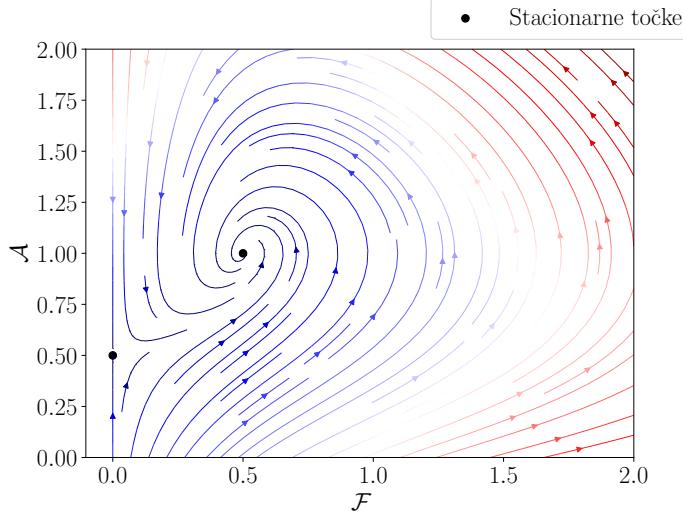
Populacijski model laserja opišemo z enačbami (3). Za nadaljno obravnavo predpostavimo, da imajo vsi nivoji enako degeneracijo torej predpostavimo, da velja  $B_1 = B_2 = B$ . Podobno kot v prejšnjem poglavju jih želimo prepisati v obliko z enim parametrom. To storimo po enakem postopku z uvedbo novih spremenljivk in reskaliranjem časa  $\mathcal{F} = B/\beta f$ ,  $\mathcal{A} = B/\alpha a$ ,  $\mathcal{T} = t\sqrt{\alpha\beta}$  in na koncu uvedemo še končna parametra  $p = \sqrt{\alpha/\beta}$ ,  $\mathcal{R} = \frac{B}{\alpha\beta}R$ .

$$\dot{\mathcal{F}} = p\mathcal{F}(\mathcal{A} - 1), \quad \dot{\mathcal{A}} = -\frac{\mathcal{A}}{p}(1 + \mathcal{F}) + \frac{\mathcal{R}}{p}.$$

V naslednjem koraku poiščemo ravnoesno stanje. Prvi pogoj  $\dot{\mathcal{F}} = 0$  nam da dve rešitvi  $\mathcal{A} = 1$  in  $\mathcal{F} = 0$ . S pogojem  $\dot{\mathcal{A}} = 0$  pa dobimo predpis  $\mathcal{R} = \mathcal{A}(1 - \mathcal{F})$ . Ob upoštevanju prejšnjega pogoja imamo tako dve rešitvi

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = 0 &\Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{A}, \\ \mathcal{A} = 1 &\Rightarrow \mathcal{R} = 1 + \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Prva stacionarna točka ustreza stanjem, ko je  $R$  pod pragom, drugo pa ko je nad pragom in laser deluje. Te točki se tudi jasno izoblikujeta z gradienti v faznem diagramu na sliki 15, kjer vidimo kako se izolira območje, kjer  $\mathcal{F} = 0$  in kako preostalo območje kaže v smeri stacionarne točke z  $\mathcal{A} = 1$ .



Slika 15: Gradienti modela laserja v faznem diagramu pri vrednosti parametrov  $p = 1$  in  $R = 0.5$ .

Za analizo relaksacijskih oscilacij najprej zapišemo Jakobijansko matriko

$$J(A, F) = \begin{pmatrix} p(A - 1) & pF \\ -\frac{\mathcal{A}}{p} & -\frac{1 + \mathcal{F}}{p} \end{pmatrix}.$$

Za izračun njenih lastnih vrednosti moramo rešiti naslednjo kvadratno enačbo

$$\lambda^2 - \lambda \left( p(1 - \mathcal{R}) + \frac{\mathcal{F} + 1}{p} \right) + (1 - \mathcal{R})(\mathcal{F} + 1) + \mathcal{A}\mathcal{F} = 0. \quad (6)$$

Enačbo rešimo v prej izračunanih stacionarnih točkah

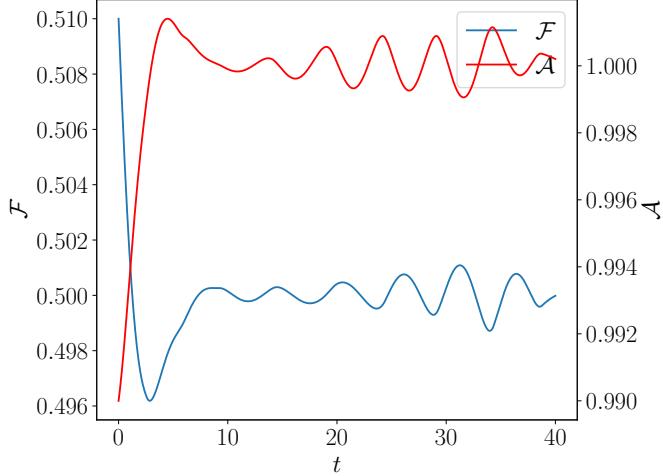
$$(\mathcal{F}, \mathcal{A}) = (0, \mathcal{R}) \Rightarrow \lambda_1 = p(1 - R), \lambda_2 = \frac{1}{p} \quad (7)$$

$$(\mathcal{F}, \mathcal{A}) = (\mathcal{R} - 1, 1) \Rightarrow \lambda = -\frac{\mathcal{R}}{2p} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{R}^2}{p^2} - 4(\mathcal{R} - 1)} \quad (8)$$

Lastne vrednosti prve stacionarne točke (7) nam potrdijo, da tam ni oscilacij. Za drugo stacionarno točko (8) pa velja, da če je  $\mathcal{R}^2/p^2 < 4(\mathcal{R} - 1)$  in  $0 < \mathcal{R}/2p$  potem pride do relaksacijskih oscilacij in sta frekvenca in karakteristični čas

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{4(\mathcal{R} - 1) - \frac{\mathcal{R}^2}{p^2}}, \quad \tau = \frac{2p}{\mathcal{R}}.$$

Če našo simulacijo rahlo izmagnemo iz stacionarne točke bi morali opaziti izračunano oscilacijo na sliki 16. Za izbrane parametre ustreza perioda  $T = 10.48$ , ki je v našo simulaciji rahlo krajša. Precej nenavadno je tudi, da se po po tretjem vrhu amplituda veča.



Slika 16: Relaksacijska oscilacija pri parameterih  $p = 2$ ,  $R = 1.5$ .

## 6 Zaključek

V tej nalogi smo se spoznali z modeliranjem sistemov s sistemom sklopljenih diferencialnih enačb. Z začetka smo si ogledali model simuliranja poteka epidemije in standarden mode Lotka-Volterra, ki smo jih preučili s pomočjo različnih metrik in faznih diagramov. Za konec pa smo si še pogledali populacijski model laserja in poiskali različne načine njegovega delovanja.