Факультет компьютерных технологий и прикладной математики
Кафедра вычислительных технологий
02.03.02

Функциональное и логическое программирование
Лабораторная работа № 3. Числовые алгоритмы, рекурсия

Каждое задание должно быть загружено на личный git-репозиторий отдельным коммитом. Лабораторная работа выполняется в одном файле. Защита работы возможна на любой лабораторной работе от 1 до 24. Последний коммит для данной работы должен быть сделан не позднее лабораторной работы № 6. За защиту выставляется оценка. В случае, если последний коммит сделан позже срока, но до 12 ЛР, за работу выставляется оценка минус ОДИН балл. В случае, если последний коммит сделан до 18 ЛР, за работу выставляется оценка минус 2 балла. Если последний коммит сделан позже, работа не проверяется. Наличие выполненных работ учитывается на экзамене.

Если часть задач выполнена в один коммит, работа не проверяется. Если все коммиты сделаны в один час, работа не проверяется.

Общее задание. Отработать построение рекурсивных предикатов на примере числовых алгоритмов

Для этого необходимо выполнить следующие задания, некоторые задания выполняются по варинтам.

Задание 1. Реализовать предикат max(X,Y,Z), где Z максимальное из чисел X и Y.

Задание 2. Реализовать предикат max(X,Y,U,Z), где Z максимальное из чисел X и Y.

Задание 3. Реализовать предикат fact(N,X), где X – это факториал первого аргумента с помощью рекурсии вверх.

Задание 4. Реализовать предикат fact(N,X), где X – это факториал первого аргумента с помощью рекурсии вниз.

Задание 5. Реализовать предикат fib(N,X), где X – число Фибоначчи с номером N, причем 1 и 2 элемент равны 1 с помощью рекурсии вверх.

Задание 6. Реализовать предикат fib(N,X), где X – число Фибоначчи с номером N, причем 1 и 2 элемент равны 1 с помощью рекурсии вниз.

Задание 7. Найти сумму цифр числа с помощью рекурсии вверх.

Задание 8. Найти сумму цифр числа с помощью рекурсии вниз.

Задание 9. Реализовать предикат с помощью рекурсии вверх.
Вариант 1. Найти произведение цифр числа.
Вариант 2. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 3. Найти минимальную цифру числа.
Вариант 4. Найти произведение цифр числа.
Вариант 5. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 6. Найти минимальную цифру числа.
Вариант 7. Найти произведение цифр числа.
Вариант 8. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 9. Найти минимальную цифру числа.
Вариант 10. Найти произведение цифр числа.
Вариант 11. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 12. Найти минимальную цифру числа.

Задание 10. Реализовать предикат с помощью рекурсии вниз.
Вариант 1. Найти произведение цифр числа.
Вариант 2. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 3. Найти минимальную цифру числа.
Вариант 4. Найти произведение цифр числа.
Вариант 5. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 6. Найти минимальную цифру числа.
Вариант 7. Найти произведение цифр числа.
Вариант 8. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 9. Найти минимальную цифру числа.
Вариант 10. Найти произведение цифр числа.
Вариант 11. Найти максимальную цифру числа.
Вариант 12. Найти минимальную цифру числа.

Задание 11. Выполнить указанную задачу с помощью рекурсии вверх и рекурсии вниз, для каждой реализации отдельный коммит.
Вариант № 1. Найти количество нечетных цифр числа, больших 3.
Вариант № 2. Найти сумму цифр числа, делящихся на 3.
Вариант № 3. Найти произведение цифр числа, не делящихся на 5.
Вариант № 4. Найти максимальную цифры числа, не делящуюся на 3.
Вариант № 5. Найти минимальную нечетную цифру числа.
Вариант № 6. Найти количество цифр числа, меньших 3.
Вариант № 7. Найти количество нечетных цифр числа, больших 3.
Вариант № 8. Найти сумму цифр числа, делящихся на 3.
Вариант № 9. Найти произведение цифр числа, не делящихся на 5.
Вариант № 10. Найти максимальную цифры числа, не делящуюся на 3.
Вариант № 11. Найти минимальную нечетную цифру числа.

Вариант № 12. Найти количество цифр числа, меньших 3.

Задание 12. Найти НОД двух чисел.
Проверить число на простоту.
Найти количество делителей числа

Задание 13. Следующая итерационная последовательность определена для набора натуральных чисел:

$n \to n / 2$ (n четное)

$n \to 3n + 1$ (n нечетное)

Используя приведенное выше правило и начиная с 13, мы генерируем следующую последовательность:

$$13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Можно видеть, что эта последовательность (начиная с 13 и заканчивая 1) содержит 10 членов. Хотя это еще не доказано (проблема Коллатца), считается, что все начальные числа заканчиваются на 1.

Какой стартовый номер, менее одного миллиона, дает самую длинную цепочку?

ПРИМЕЧАНИЕ. После запуска цепочки условия могут превышать миллион.

Задание 14. Выполнить указанную задачу с помощью рекурсии вверх и рекурсии вниз, для каждой реализации отдельный коммит.

Вариант № 1. Найти сумму простых делителей числа.

Вариант № 2. Найти количество чисел, взаимно простых с заданным.

Вариант № 3. Найти максимальный простой делитель числа.

Вариант № 4. Найти количество четных чисел, не взаимно простых с данным

Вариант № 5. Найти количество делителей числа, не делящихся на 3.

Вариант № 6. Найти сумму непростых делителей числа.

Вариант № 7. Найти сумму простых делителей числа.

Вариант № 8. Найти количество чисел, взаимно простых с заданным.

Вариант № 9. Найти максимальный простой делитель числа.

Вариант № 10. Найти количество четных чисел, не взаимно простых с данным

Вариант № 11. Найти количество делителей числа, не делящихся на 3.

Вариант № 12. Найти сумму непростых делителей числа.

Задание 15.

Вариант № 1.

Найти произведение таких делителей числа, сумма цифр которых меньше, чем сумма цифр исходного числа.

Вариант № 2.

Найти делитель числа, являющийся взаимно простым с наибольшим количеством цифр данного числа.

Вариант № 3.
Найти НОД максимального нечетного непростого делителя числа и произведения цифр данного числа.
Вариант № 4.
Найти произведение максимального числа, не взаимно простого с данным, не делящегося на наименьший делитель исходно числа, и суммы цифр числа, меньших 5.
Вариант № 5.
Найти сумму всех делителей числа, взаимно простых с суммой цифр числа и не взаимно простых с произведением цифр числа.
Вариант № 6.
Найти количество чисел, не являющихся делителями исходного числа, не взамнопростых с ним и взаимно простых с суммой простых цифр этого числа.
Вариант № 7.
Найти произведение таких делителей числа, сумма цифр которых меньше, чем сумма цифр исходного числа.
Вариант № 8.
Найти делитель числа, являющийся взаимно простым с наибольшим количеством цифр данного числа.
Вариант № 9.
Найти НОД максимального нечетного непростого делителя числа и прозведения цифр данного числа.
Вариант № 10.
Найти произведение максимального числа, не взаимно простого с данным, не делящегося на наименьший делитель исходно числа, и суммы цифр числа, меньших 5.
Вариант № 11.
Найти сумму всех делителей числа, взаимно простых с суммой цифр числа и не взаимно простых с произведением цифр числа.
Вариант № 12.
Найти количество чисел, не являющихся делителями исходного числа, не взамно простых с ним и взаимно простых с суммой простых цифр этого числа.

Задание 16.
Вариант 1.
Пусть d (n) определяется как сумма собственных делителей n (чисел меньше n, которые делятся равномерно на n).
Если d (a) = b и d (b) = a , где $a \neq b$, то a и b являются дружественной парой, и каждый из a и b называется дружным числом.
Например, правильными делителями 220 являются 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110; следовательно, d (220) = 284. Правильными делителями 284 являются 1, 2, 4, 71 и 142; поэтому d (284) = 220.
Найдите количество всех пар дружных чисел до 10000.

Задача должна быть решена без использования списков.
Вариант 2.
Число называется совершенным, если равно сумме своих делителей, назовем число избыточным, если сумма его делителей больше самого числа. Минимальное число с избытком – это 12. Найдите количество чисел, меньшее 20000, которые нельзя представить в виде суммы двух чисел с избытком.
Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 3.
Найдите число d, меньшее 1000, для которого десятичная дробь 1/d содержит самый длинный период
Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 4.
Эйлер выяснил, что многочлен n^2+n+41 порождает простые числа для всех n=0..39. Среди произвольных многочленов с целыми коэффициентами n^2+an+b, где коэффициенты по модулю меньше 1000 найти такой многочлен, который будет порождать максимальное количество простых чисел, начиная с n=0. Вывести произведение его коэффициентов.
Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 5.
Удивительно, но есть только три числа, которые можно записать как сумму четвертых степеней их цифр:
$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$
$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$
$9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$
Так как $1 = 1^4$ не сумма, она не включена.
Сумма этих чисел составляет 1634 + 8208 + 9474 = 19316.
Найдите сумму всех чисел, которые можно записать как сумму пятых степеней их цифр.
Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 6.
145 - любопытное число, как 1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145.
Найдите сумму всех чисел, которые равны сумме факториала их цифр.
Примечание: как 1! = 1 и 2! = 2 не являются суммами, они не включены.
Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 7.
Рассмотрим все целочисленные комбинации a^b для $2 \le a \le 5$ и $2 \le b \le 5$:

$2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32$
$3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243$
$4^2 = 16, 4^3 = 64, 4^4 = 256, 4^5 = 1024$
$5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, 5^5 = 3125$

Если они затем расположены в числовом порядке, с удаленными повторениями, мы получаем следующую последовательность из 15 различных терминов:

4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 64, 81, 125, 243, 256, 625, 1024, 3125

Сколько различных членов в последовательности, сгенерированной a^{b}, для $2 \le a \le$ n и $2 \le b \le$ m? Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 8.

Номер 3797 обладает интересным свойством. Будучи простым, можно непрерывно удалять цифры слева направо и оставаться простыми на каждом этапе: 3797, 797, 97 и 7. Аналогично мы можем работать справа налево: 3797, 379, 37 и 3.

Найдите сумму простых чисел, меньших 1000000 которые можно обрезать слева направо и справа налево.

ПРИМЕЧАНИЕ. 2, 3, 5 и 7 не считаются усеченными простыми числами.

Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 9.

Если p - периметр прямоугольного треугольника с целыми сторонами длины, $\{ a , b , c \}$, то есть ровно три решения для $p = 120$.

{20,48,52}, {24,45,51}, {30,40,50}

Для какого значения $p \le 1000$ число решений максимально?

Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 10.

Мы скажем, что n- цифровое число является пандигитальным, если оно использует все цифры от 1 до n ровно один раз. Например, 2143 - это 4-значный пандигитал, а также простое число.

Какое самое большое n- цифровое пандигитальное простое число существует?

Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 11

Пентагональные числа генерируются по формуле

$P(n) = n(3n - 1) / 2$. Первые десять пятиугольных чисел:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, ...

Видно, что $P(4) + P(7) = 22 + 70 = 92 = P_8$. Однако их различие $70 - 22 = 48$ не является пятиугольным. Найдите пару пятиугольных чисел P_j и P_k , меньших числа 1000000 для которых их сумма и разность пятиугольны и $D = | P_k - P_j |$ сведено к минимуму; какова стоимость D?

Задача должна быть решена без использования списков.

Вариант 12.

Кристиан Голдбах предложил, чтобы каждое нечетное составное число можно было записать в виде суммы простого и двойного квадрата.

$9 = 7 + 2 \times 1^2$
$15 = 7 + 2 \times 2^2$
$21 = 3 + 2 \times 3^2$
$25 = 7 + 2 \times 3^2$
$27 = 19 + 2 \times 2^2$
$33 = 31 + 2 \times 1^2$
Оказывается, догадка оказалась ложной.
Какова наименьшая нечетная композиция, которая не может быть записана как сумма простого и двойного квадрата?