02 – Zahlendarstellung

Grundzüge digitaler Systeme (192.134)

Vortrag von: Stefan Neumann

Fakultät für Informatik
TU Wien
E-Mail: gds@list.tuwien.ac.at

Bevor es losgeht...

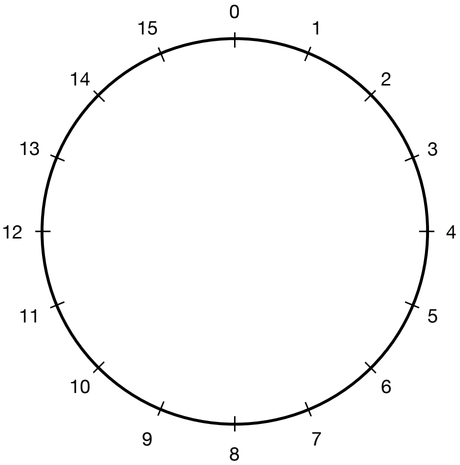
Wie löst man Probleme mit Hilfe von Computern?

- Eine der wesentlichen Fragen des Informatikstudiums ist:
  - Wie löst man Probleme mit Computern?
  - Wie stellt ein Computer Zahlen dar, wie findet man kürzeste Wege von A nach B, . . .
- Es gibt kein Patentrezept
  - Oft es ist sehr problemabhängig, wie man zu einer Lösung kommt
- Aber es gibt Herangehensweisen, die man lernen kann und die oft funktionieren
  - Variante 1: Zuerst löst man das Problem „ohne“ Computer und überträgt diesen Ansatz dann
  - Variante 2: Man löst zuerst ein „leichteres“ Problem und führt das „schwierige“ Problem später auf das leichte zurück
    - Alternativ: Manchmal ist es ebenfalls hilfreich, erst einen „schlechten“ Algorithmus zu entwerfen und diesen dann entsprechend zu verbessern
- Wir werden beide Techniken in den nächsten Tagen und Wochen mehrfach anwenden
- Diese Problemlöse-Fähigkeiten zu erlernen ist ein wesentlicher Teil des Studiums, nicht bloß Algorithmen auswendig zu lernen, sondern zu verstehen, wo die Ideen herkommen

. . . und noch eine weitere Sache . . .

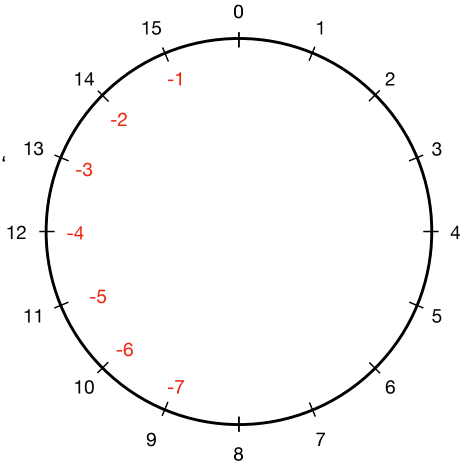
Rechnen mit Rest: Modulo

- Die Rechenoperation modulo
- Bezeichnet den Rest bei Division
- Für natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a \bmod b$ für den Rest, wenn man a durch b teilt
  - mod ist die Abkürzung für „modulo“
- Beispiele für $b = 16$:
  - $37 \bmod 16 = 5$
    - Da $\lfloor 37/16 \rfloor = 2$, Rest 5
  - $3 \bmod 16 = 3$
    - Da $\lfloor 3/16 \rfloor = 0$, Rest 3
  - $80 \bmod 16 = 0$
    - Da $\lfloor 80/16 \rfloor = 5$, Rest 0
- $\lfloor \cdot \rfloor$ bezeichnet Abrunden
- Intuitive Vorstellung: Man hat einen Zahlenkreis von 0 bis $b - 1$. Zahlen, die größer als $b - 1$ sind, „gehen im Kreis“.



Rechnen mit Rest: Modulo

- Wie funktioniert modulo-Rechnen mit negativen Zahlen a?
- Also $a < 0$ und $b \in \mathbb{N}$,
  wollen $a \bmod b$ ausrechnen
- So lange Vielfache von b addieren
  bis man Wert zwischen 0 und $b - 1$ erhält
  - Intuition:
    „Im Kreis gehen bis man eine positive Zahl hat"



- Beispiele für $b = 16$:
  - $37 \bmod 16 = 5$
    - Da $\lfloor 37/16 \rfloor = 2$, Rest 5
    - Ohne Runden: $37 = 2 \cdot 16 + 5$
  - $-1 \bmod 16 = 15$
    - Da $-1 = (-1) \cdot 16 + 15$
  - $-31 \bmod 16 = 1$
    - Da $-31 = (-2) \cdot 16 + 1$
  - $-80 \bmod 16 = 0$
    - Da $-80 = (-5) \cdot 16 + 0$

Zahlendarstellung – Übersicht

Komponenten eines Rechners

Fünf klassische Komponenten:

- Rechenwerk (Arithmetic Logic Unit, ALU)
- Steuer- oder Leitwerk (Control Unit, CU)

  Prozessor

- Hauptspeicher (Memory)
- Eingabe (Input)
- Ausgabe (Output)

- Historischer Ursprung: John von Neumann (Mitte der 1940er)
  - Programme und Daten werden gemeinsam im Speicher abgelegt

Bits

- Binärzeichen oder Bits (Symbole des binären Alphabets)
  - Ein binäres Alphabet hat genau zwei Symbole
  - Typischweise sind die zwei Symbole 0 und 1
  - Teilweise wird auch L (low) und H (high) genutzt
- Bit von Binary digit = Binärziffer
- Computer speichern Bits zum Beispiel mit sogenannten Flipflops (wird später bei Digitalschaltungen behandelt)
  - Für die nächsten Vorlesungen nehmen wir einfach an, dass wir Bits speichern können

Byte, Megabyte, ...

- Byte: Entspricht 8 Bits
- Beispiel für Bytes
  - 10001010 10110110
- Maßeinheit für z. B. Hauptspeichergrößen oder Festplattengrößen
- Präfixe zur kürzeren Schreibweise
  - Präfixe für eine große Anzahl von Bytes (Kilo, Mega, Giga, Tera, Peta, Exa, Zetta, Yotta, ...)
  - Achtung: Unterschiedliche Verwendung der Präfixe in der Literatur und Praxis!

SI-Präfixe

Kürzel	Name	Potenz	Wert
kB	Kilobyte	10^3	1 000 Bytes
MB	Megabyte	10^6	1 000 000 Bytes
GB	Gigabyte	10^9	1 000 000 000 Bytes
TB	Terabyte	10^{12}	1 000 000 000 000 Bytes

Binärpräfixe

Kürzel	Name	Potenz	Wert
KiB	Kibibyte	2^{10}	1 024 Bytes
MiB	Mebibyte	2^{20}	1 048 576 Bytes
GiB	Gibibyte	2^{30}	1 073 741 824 Bytes
TiB	Tebibyte	2^{40}	1 099 511 627 776 Bytes

Code

- Natürlich wollen wir nicht bloß Nullen und Einsen darstellen, sondern mit Computern auch Texte oder Bilder speichern
- Ein Code ist eine Zuordnungsvorschrift zwischen zwei Alphabeten
- Beispiel (Bitmuster zu Kleinbuchstaben)
  - Alphabet 1: Binäre Zeichenketten mit 5 Bits
  - Alphabet 2: die Kleinbuchstaben $\{a, b, c, \ldots, z\}$
  - Zuordnung: 00000 $\rightarrow$ a, 00001 $\rightarrow$ b, 00010 $\rightarrow$ c, ...
- Binärcodierung
  - Die Codierung irgendeines Alphabets durch Folgen von Binärzeichen
- Universeller Einsatz des binären Alphabets
  - Alle endlichen Alphabete lassen sich durch Folgen von Binärzeichen ausdrücken
- Im vierten Teil der Vorlesung sehen wir verschiedenste Codes (bspw. ASCII und UTF Codes, Barcodes, etc.)

Binäre Signale

Angenommen wir wollen ein Alphabet mit x Zeichen darstellen. Wie viele Bits brauchen wir?

- Wie viele verschiedene Kombinationen können wir mit n Bits darstellen?
- Beispiel: für $n = 2$ haben wir $4 = 2^2$ Kombinationen
  - 00, 01, 10, 11
- Beispiel: für $n = 3$ haben wir $8 = 2^3$ Kombinationen
  - 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
- Mit n Binärziffern können 2^n Kombinationen gebildet werden
  - Jedes Bit hat zwei mögliche Zustände, daher mit n Bits $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}_{n \text{ mal}}$ Kombinationen

$\Rightarrow$ Jedes zusätzliche Bit verdoppelt unsere möglichen Kombinationen

- Um x Kombinationen darzustellen, benötigt man $\lceil \log_2(x) \rceil$ Bits
  - Um die Kleinbuchstaben $\{a, b, \ldots, z\}$ darzustellen, brauchen wir $\lceil \log_2(26) \rceil = \lceil 4.701 \rceil = 5$ Bits
  - Um die Buchstaben $\{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\}$ darzustellen, brauchen wir $\lceil \log_2(2 \cdot 26) \rceil = \lceil 5.701 \rceil = 6$ Bits

Zahlendarstellung – Übersicht

1. Bits und Bytes
2. Zahlenumwandlungen – Von der Binärzahl zu ihrem Wert und retour
3. Zahlen mit Nachkommateil
4. Zahlensysteme allgemein
5. Rechnen im Binärsystem
6. Darstellung negativer (Ganz-)Zahlen
   - Vorzeichenbit
   - Einerkomplementdarstellung
   - Zweierkomplementdarstellung
   - Exzessdarstellung

Dezimalsystem

Bevor wir den Wert von Binärzahlen bestimmen, hier eine kurze Wiederholung zum Dezimalsystem, die uns gleich helfen wird

- Wie stellen wir Zahlen mit dem Dezimalsystem dar?
- Beispiel:

$$\begin{aligned} 1815 &= 1 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 5 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

- Ziffern $= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- Basis $= 10$
- Die Basis entspricht der Anzahl der Ziffern
- Jede Zahl ist eine Summe mit den Summanden Ziffernwert $\cdot$ (Potenz der Basis):
  - Eine n-stellige Zahl im Dezimalsystem wird dargestellt mit Ziffern $(a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)$ und besitzt den Wert

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i = a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

  - Für die Zahl 1815: $n = 4,\ a_3 = 1,\ a_2 = 8,\ a_1 = 1,\ a_0 = 5$

Binärsystem

Wie würden wir die Zahl 1815 im Binärsystem darstellen?

- Ziffern $= \{0{,}1\}$
- Basis $= 2$
- Beispiel:

$$1815 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5$$
$$+ 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

- Die Binärdarstellung von 1815 lautet 111 0001 0111
  - Die Darstellung erhält man durch das Ablesen der Koeffizienten
- Eine binäre Zahl entspricht also einer Ziffernfolge $(a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)$ und hat den Wert

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

$\Rightarrow$ Analog zu Dezimalsystem, aber diesmal sind alle Ziffern in $\{0, 1\}$ und die Basis ist 2

Zahlenumwandlungen – der Wert einer Binärzahl

- Jetzt: Wie erhält man den Wert einer beliebigen Binärzahl?
- Gegeben: Binärzahl = eine Folge der Zeichen `0` und `1`
- Gesucht: Ihr Wert, d.h., die natürliche Zahl, die durch die Binärzahl dargestellt wird

- Notation: Ist B eine Binärzahl, bezeichnen wir ihren Wert mit $(B)_2$
  - Beispiel: Ist B die Zeichenfolge `10110111`, steht $(\texttt{10110111})_2$ für ihren Wert.
- Erster Schritt: Festlegung der Ziffernwerte, hier $(\texttt{0})_2 = 0$ und $(\texttt{1})_2 = 1$
  - Scheint hier offensichtlich, ist es aber nicht immer
    Binärzahlen werden z.B. auch als `HLHHLHHH` geschrieben, mit $(\texttt{L})_2 = 0$ und $(\texttt{H})_2 = 1$

Zahlenumwandlungen – der Wert einer Binärzahl

Addition der Stellenwerte

- Variante 1: Stellenwerte
  - Wir setzen in die Formel $\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(a_i)_2}_{\text{Ziffernwert}} \cdot \overbrace{2^i}^{\text{Stellenwert}}$ ein.
  - Beispiel:

Binärdarstellung	(1	0	1	1	0	1	1	1	$)_2$
Ziffernwerte	1	0	1	1	0	1	1	1	
Stellenwerte	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	

Berechnung
$$= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 183$$

- Das Ergebnis der Berechnung ist eine natürliche Zahl aus $\mathbb{N}$, hier 183
  - Werte werden *immer* dezimal angeschrieben (Konvention), wir geben kein Zahlensystem an
  - Es gilt aber $(\texttt{183})_{10} = 183$, d.h., der Wert der Zeichenfolge `183` als Dezimalzahl interpretiert hat den Wert 183
- Bei der Zeichenfolge `10110111` müssen wir angeben, dass wir sie als Binärzahl interpretieren, indem wir $(\texttt{10110111})_2$ schreiben
  - Diese Zeichenfolge könnte auch eine Dezimalzahl sein und hätte dann den Wert $(\texttt{10110111})_{10} = 10110111$

Zahlenumwandlungen – der Wert einer Binärzahl

Konversion von binär zu dezimal – Hornerschema

- Variante 2: Hornerschema
  - Beruht auf folgender Beobachtung:

$$\begin{aligned}(\cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_2 &= \cdots + (a_3)_2 \cdot 2^3 + (a_2)_2 \cdot 2^2 + (a_1)_2 \cdot 2^1 + (a_0)_2 \cdot 2^0 \\ &= (((\cdots + (a_3)_2) \cdot 2 + (a_2)_2) \cdot 2 + (a_1)_2) \cdot 2 + (a_0)_2\end{aligned}$$

  - Berechnung effizienter, da wir die Stellenwerte nicht einzeln ausrechnen müssen
  - Beispiel:

$$\begin{aligned}&(1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)_2 \\ &= ((((((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= (((((2 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= ((((5 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= (((11 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= ((22 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= (45 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= 91 \cdot 2 + 1 \\ &= 183\end{aligned}$$

Zahlenumwandlungen – vom Wert zur Binärzahl

Konversion von dezimal zu binär

- Jetzt wollen wir Zahlen ins Binärsystem umrechnen
- Gegeben: natürliche Zahl $Z \in \mathbb{N}$
- Gesucht: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_i \in \{0, 1\}$, sodass

$$Z = (\cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_2 = \cdots + (a_3)_2 \cdot 2^3 + (a_2)_2 \cdot 2^2 + (a_1)_2 \cdot 2^1 + (a_0)_2 \cdot 2^0$$

- Beispiel: Wir wollen 7 ins Binärsystem umwandeln
  - 7 ist eine ungerade Zahl, also „gerade Zahl + 1“ ($7 = 6 + 1$)
  - Alle Zahlen, die wir mit den Bits $a_1, a_2, a_3, \ldots$ darstellen können, sind Vielfache von 2

  $\Rightarrow$ Wir wissen also $a_0 = 1$, da wir „+1“ nur mit 2^0 darstellen können

  - Mit den Bits $a_1, a_2, \ldots$ müssen wir jetzt also 6 darstellen
  - Wir wissen $6 = 4 + 2$
  - Alle Zahlen, die wir mit den Bits $a_2, a_3, \ldots$ darstellen können sind Vielfache von 4

  $\Rightarrow$ Wir wissen also $a_1 = 1$, da wir die „+2“ nur mit 2^1 darstellen können

  - Mit den Bits $a_2, \ldots$ müssen wir jetzt also 4 darstellen
  - Da $2^2 = 4$, wissen wir, dass $a_2 = 1$

  $\Rightarrow$ Die Binärdarstellung von 7 ist daher 111, d.h., $7 = (111)_2$

Zahlenumwandlungen – vom Wert zur Binärzahl

Konversion von dezimal zu binär

- Jetzt wollen wir Zahlen ins Binärsystem umrechnen
- Gegeben: natürliche Zahl $Z \in \mathbb{N}$
- Gesucht: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_i \in \{0, 1\}$, sodass

$$Z = (\cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_2 = \cdots + (a_3)_2 \cdot 2^3 + (a_2)_2 \cdot 2^2 + (a_1)_2 \cdot 2^1 + (a_0)_2 \cdot 2^0$$

- Algorithmus zum Umrechnen von dezimal zu binär:
  - Setze $Z_0 \leftarrow Z$, $i \leftarrow 0$ — „$\leftarrow$“: Wertezuweisung zu einer Variablen
  - Solange $Z_i \neq 0$:
    - $a_i \leftarrow Z_i \bmod 2$ — a_i ist der Rest, wenn man Z_i durch 2 teilt
    - $Z_{i+1} \leftarrow \frac{Z_i - a_i}{2}$ — ganzzahlige Division
    - $i \leftarrow i + 1$
- Beispiel: Darstellung von 6 als Binärzahl
  - $a_0 = Z_0 \bmod 2 = 6 \bmod 2 = 0,\ Z_1 = \frac{6-0}{2} = 3$
  - $a_1 = Z_1 \bmod 2 = 3 \bmod 2 = 1,\ Z_2 = \frac{3-1}{2} = 1$
  - $a_2 = Z_2 \bmod 2 = 1 \bmod 2 = 1,\ Z_3 = \frac{1-1}{2} = 0 \Longrightarrow 6 = (110)_2$
- Den Algorithmus kann man aus dem Hornerschema herleiten

Zahlenumwandlungen – vom Wert zur Binärzahl

Konversion von ganzen Zahlen

- Gesucht: Binärzahl B, sodass $(B)_2 = 29$
- Berechnung:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 29 \bmod 2 = 1 && \text{LSB (niederstwertige Stelle, least significant bit)} \\
a_1 &= 14 \bmod 2 = 0 \\
a_2 &= 7 \bmod 2 = 1 \\
a_3 &= 3 \bmod 2 = 1 \\
a_4 &= 1 \bmod 2 = 1 && \text{MSB (höchstwertige Stelle, most significant bit)}
\end{aligned}
$$

  Ergebnis: $29 = (\texttt{11101})_2$

- Wichtig: Die Bits werden in umgekehrter Reihenfolge angegeben, in der wir sie berechnet haben (wir berechnen a_0 zuerst, aber in der Binärdarstellung kommt es zuletzt, etc.)

Zahlendarstellung – Übersicht

Zahlen mit Nachkommateil im Dezimalsystem

Wir beginnen wieder mit einer kurzen Wiederholung zum Dezimalsystem:

- Wie stellen wir Zahlen mit Nachkommateil im Dezimalsystem dar?
- Beispiel:

$$\begin{aligned}0.1815 &= 1 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.001 + 5 \cdot 0.0001 \\ &= 1 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

- Wieder hat die letzte Ziffer die kleinste Zehnerpotenz
- Wir verringern den Exponenten bei jeder Stelle um -1
- Jeder Summand hat die Form Ziffernwert $\cdot$ (Potenz der Basis)$^{-1}$
- Eine Dezimalzahl mit n Nachkommastellen wird dargestellt mit Ziffern $(0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-(n-1)}a_{-n})$ und hat den Wert

$$\sum_{i=1}^{n} a_{-i}10^{-i}$$

- Für die Zahl 0.1815: $n = 4$, $a_{-1} = 1$, $a_{-2} = 8$, $a_{-3} = 1$, $a_{-4} = 5$

Zahlen mit Nachkommateil im Binärsystem

- Wie stellt man Zahlen mit Nachkommateil im Binärsystem dar?
- Ganz analog
- Beispiel:

$$\begin{aligned}(\texttt{0.1011})_2 &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} \\ &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\ &= 0.6875\end{aligned}$$

- Eine Binärzahl mit n Nachkommastellen wird dargestellt mit Ziffern $(0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-(n-1)}a_{-n})$ und hat den Wert

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{-i})_2 \cdot 2^{-i}$$

- Für die Zahl $(\texttt{0.1011})_2$: $n = 4$, $a_{-1} = 1$, $a_{-2} = 0$, $a_{-3} = 1$, $a_{-4} = 1$

Zahlenumwandlungen – der Wert einer Binärzahl

Nachkommateil

- Gesucht: Wert der Binärzahl `0.1101`, d.h., $(\texttt{0.1101})_2$
- Variante 1: Berechnung mittels Stellenwerten

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Binärdarstellung} & (\texttt{0.} & \texttt{1} & \texttt{1} & \texttt{0} & \texttt{1})_2 \\
\text{Ziffernwerte} & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\text{Stellenwerte} & & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & 2^{-4} \\
 & = & 1 \cdot 2^{-1} & + 1 \cdot 2^{-2} & + 0 \cdot 2^{-3} & + 1 \cdot 2^{-4} \\
 & = & 0.5 & + 0.25 & + 0 & + 0.0625 \\
 & = & \color{blue}{0.8125} & & &
\end{array}
$$

- Variante 2: Hornerschema

a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}
1	0	1	1

$$
\begin{aligned}
(((1/2 + 0)/2 + 1)/2 + 1)/2 \\
= ((0.5 \ /2 + 1)/2 + 1)/2 \\
= (1.25 \ /2 + 1)/2 \\
= 1.625 \ /2 \\
= \color{blue}{0.8125}
\end{aligned}
$$

Zahlenumwandlungen – vom Wert zur Binärzahl

Nachkommateil

- Gegeben: Zahl Z mit $0 < Z < 1$, wie z.B. 0.8125
- Gesucht: a_{-1}, a_{-2}, $a_{-3}, \ldots$ mit $a_i \in \{0, 1\}$, sodass $(0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots)_2 = Z$

- Umwandlung basierend auf Hornerschema
  - Setze $Z_{-1} \leftarrow Z$, $i \leftarrow 1$
  - Solange $Z_{-i} \neq 0$:
    - $a_{-i} = \lfloor Z_{-i} \cdot 2 \rfloor$
    - $Z_{-(i+1)} \leftarrow Z_{-i} \cdot 2 - a_{-i}$
    - $i \leftarrow i + 1$
- Hier bezeichnet $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsoperation
  - Beispiele: $\lfloor 8.5 \rfloor = 8$, $\lfloor 8 \rfloor = 8$, $\lfloor 8.9999 \rfloor = 8$
- $Z_{-(i+1)}$ wird berechnet, indem wir $a_{-i} = \lfloor Z_{-i} \cdot 2 \rfloor$ von $Z_{-i} \cdot 2$ abziehen
  Daher ist a_{-i} der Vor- und $Z_{-(i+1)}$ der Nachkommateil von $Z_{-i} \cdot 2$

Zahlenumwandlungen – vom Wert zur Binärzahl

Nachkommateil

- Gegeben: $Z = 0.8125$
- Gesucht: Binärzahl B, sodass $(B)_2 = Z$
- Berechnung:

$$\begin{array}{ll|l}
Z_{-1} = 0.8125 & a_{-1} = \lfloor 0.8125 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.625 \rfloor = 1 & \text{MSB} \\
Z_{-2} = 0.625 & a_{-2} = \lfloor 0.625 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.25 \rfloor = 1 & \\
Z_{-3} = 0.25 & a_{-3} = \lfloor 0.25 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0 & \\
Z_{-4} = 0.5 & a_{-4} = \lfloor 0.5 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.0 \rfloor = 1 & \text{LSB} \\
Z_{-5} = 0.0 \Longrightarrow \text{Abbruch} & &
\end{array}$$

- Wir erhalten $B = \texttt{0.1101}$

Zahlenumwandlungen – vom Wert zur Binärzahl

Nachkommateil

- Gegeben: $Z = 0.2$
- Gesucht: Binärzahl B, sodass $(B)_2 = Z$
- Berechnung:

$$\begin{array}{llll}
Z_{-1} = 0.2 & a_{-1} = \lfloor 0.2 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 0.4 \rfloor = 0 & \downarrow & \text{MSB} \\
Z_{-2} = 0.4 & a_{-2} = \lfloor 0.4 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 0.8 \rfloor = 0 & & \\
Z_{-3} = 0.8 & a_{-3} = \lfloor 0.8 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.6 \rfloor = 1 & & \\
Z_{-4} = 0.6 & a_{-4} = \lfloor 0.6 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.2 \rfloor = 1 & & \text{LSB} \\
Z_{-5} = 0.2 = Z_{-1} \Longrightarrow \text{Endlosschleife!} & & &
\end{array}$$

- Wir erhalten $B = \texttt{0.001100110011...}$, eine periodische Binärzahl
- Für eine endliche Binärdarstellung müssen wir die Berechnung z.B. nach 5 Nachkommastellen abbrechen und eine Ungenauigkeit in Kauf nehmen
- Wir erhalten $\widetilde{B} = \texttt{0.00110}$, wobei $(\widetilde{B})_2 = 0.125 + 0.0625 = 0.19 \neq Z$.

Zahlendarstellung – Übersicht

Zahlensysteme allgemein – Zahlenwert

- Zahlensystem zur Basis b, wobei $b \geq 2, b \in \mathbb{N}$
  - Es werden b verschiedene Ziffernsymbole $z_0, z_1, \ldots, z_{b-1}$ benötigt
  - Für den Wert der Ziffern gilt $(z_i)_b = i$
- Zahl $B = \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots$ zur Basis b
- Berechnung des Werts der Zahl B:

Zahl B	$\ldots$	a_2	a_1	a_0	.	a_{-1}	a_{-2}	$\ldots$
Ziffernwerte	$\ldots$	$(a_2)_b$	$(a_1)_b$	$(a_0)_b$		$(a_{-1})_b$	$(a_{-2})_b$	$\ldots$
Stellenwerte	$\ldots$	b^2	b^1	b^0		b^{-1}	b^{-2}	$\ldots$
Zahlenwert	$\ldots +$	$(a_2)_b \cdot b^2 +$	$(a_1)_b \cdot b^1 +$	$(a_0)_b \cdot b^0 +$		$(a_{-1})_b \cdot b^{-1} +$	$(a_{-2})_b \cdot b^{-2} +$	$\ldots$

- Beispiel: Basis $b = 6$

$$
\begin{aligned}
(\mathtt{520.3})_6 &= 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0 + 3 \cdot 6^{-1} \\
&= 180 + 12 + 0 + 0.5 \\
&= 192.5
\end{aligned}
$$

Zahlensysteme allgemein – Zahlenwert

Hornerschema

- Zahlensystem zur Basis b, wobei $b \geq 2, b \in \mathbb{N}$
  - Es werden b verschiedene Ziffernsymbole $z_0, z_1, \ldots, z_{b-1}$ benötigt
  - Für den Wert der Ziffern gilt $(z_i)_b = i$
- Zahl $B = \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots$ zur Basis b
- Berechnung des Werts der Zahl B mittels Horner-Schema:

$$\begin{aligned}(\cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_b = &((\cdots + (a_2)_b) \cdot b + (a_1)_b) \cdot b + (a_0)_b \quad \text{Vorkommateil} \\ &+ ((\cdots + (a_{-2})_b)/b + (a_{-1})_b)/b \quad \text{Nachkommateil}\end{aligned}$$

- Beispiel: Basis $b = 6$

$$\begin{aligned}(\texttt{520.31})_6 &= ((\texttt{5})_6 \cdot 6 + (\texttt{2})_6) \cdot 6 + (\texttt{0})_6 + ((\texttt{1})_6/6 + (\texttt{3})_6)/6 \\ &= (5 \cdot 6 + 2) \cdot 6 + 0 + (1/6 + 3)/6 \\ &= 186.5 + \tfrac{1}{36}\end{aligned}$$

Zahlensysteme allgemein – Darstellung einer Zahl

- Gegeben: Zahl Z
- Gesucht: Darstellung als $\dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots$ im Zahlensystem zur Basis b
- Berechne Vor- und Nachkommastellen getrennt

Vorkommastellen

- Setze $Z_0 \leftarrow \lfloor Z \rfloor$, $i \leftarrow 0$
- Solange $Z_i \neq 0$:
  - $a_i \leftarrow Z_i \bmod b$
  - $Z_{i+1} \leftarrow \frac{Z_i - a_i}{b}$
  - $i \leftarrow i + 1$

Nachkommastellen

- Setze $Z_{-1} \leftarrow Z - \lfloor Z \rfloor$, $i \leftarrow 1$
- Solange $Z_{-i} \neq 0$:
  - $a_{-i} = \lfloor Z_{-i} \cdot b \rfloor$
  - $Z_{-(i+1)} \leftarrow Z_{-i} \cdot b - a_{-i}$
  - $i \leftarrow i + 1$

Zahlensysteme

Spezialfall: Hexadezimalsystem

- Hexadezimales Zahlensystem: 16 Ziffern, aber im Zehnersystem nur Ziffern $0 \dots 9$
- Daher erweitert man die Dezimalziffern zu $0, 1, 2, \dots, 8, 9, A, B, C, D, E, F$
- Beispiele von hexadezimalen Zahlen mit ihrem dezimalen Äquivalent

hexadezimal	dezimal
10	16
1A	26
1F	31
FF	255
7FFF	32767

Zahlensysteme

binär – hexadezimal – dezimal

binär	hexadezimal	dezimal
0	0	0
1	1	1
10	2	2
11	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7
1000	8	8
1001	9	9

binär	hexadezimal	dezimal
1010	A	10
1011	B	11
1100	C	12
1101	D	13
1110	E	14
1111	F	15
10000	10	16
10001	11	17
10010	12	18

Zahlenumwandlungen – hexadezimal in dezimal

Beispiel

- Gesucht: Wert $(\mathtt{1C7})_{16}$

- Variante 1: Stellenwerte

$$\begin{aligned}(\mathtt{1C7})_{16} &= (\mathtt{1})_{16} \cdot 16^2 + (\mathtt{C})_{16} \cdot 16^1 + (\mathtt{7})_{16} \cdot 16^0 \\ &= 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 \\ &= 455\end{aligned}$$

- Variante 2: Hornerschema

$$\begin{aligned}(\mathtt{1C7})_{16} &= ((\mathtt{1})_{16} \cdot 16 + (\mathtt{C})_{16}) \cdot 16 + (\mathtt{7})_{16} \\ &= (1 \cdot 16 + 12) \cdot 16 + 7 \\ &= 455\end{aligned}$$

Zahlenumwandlungen – dezimal in hexadezimal

Beispiel

- Gesucht: Darstellung der Zahl 455 als Hexadezimalzahl

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= 455 & a_0 &= Z_0 \bmod 16 = 7 = (\texttt{7})_{16} \\
Z_1 &= (455 - 7)/16 = 28 & a_1 &= Z_1 \bmod 16 = 12 = (\texttt{C})_{16} \\
Z_2 &= (28 - 12)/16 = 1 & a_2 &= Z_2 \bmod 16 = 1 = (\texttt{1})_{16} \\
Z_3 &= (1 - 1)/16 = 0 \Longrightarrow \text{Abbruch}
\end{aligned}
$$

Ergebnis: `1C7`

Zahlenumwandlungen – binär in hexadezimal

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & (0010 & 1001 & 1111 & . & 1100 & 0110)_2 & & \\
= & (\;\;2 & 9 & F & . & C & 6\;\;)_{16} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & (\;\;\;10 & 1010 & 1110 & . & 1111 & 0001 & 1\;\;\;\;)_2 \\
= & (0010 & 1010 & 1110 & . & 1111 & 0001 & 1000)_2 \\
= & (\;\;2 & A & E & . & F & 1 & 8\;\;)_{16}
\end{array}
$$

bin	hex
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Zahlenumwandlungen – binär in hexadezimal

- Aus den Bits Vidererblöcke vor und nach dem Komma bilden (jeweils vom Komma weg)
- Viererblöcke einzeln ins hexadezimale System umwandeln
- Gegebenenfalls sind führende Nullen zu ergänzen oder Nullen am Ende der Zahl anzuhängen

- Die Konversion in umgekehrter Richtung ist genauso leicht zu realisieren

- Wegen der leichten Konversion und der kompakten Darstellung ist das hexadezimale Zahlensystem in der Informatik weit verbreitet
  - Beispielsweise in Hexdumps[1]

```
00000000  48 69 65 72 20 69 73 74  20 65 69 6e 20 42 65 69  |Hier ist ein Bei|
00000010  73 70 69 65 6c 74 65 78  74 2e 20 44 65 72 20 48  |spieltext. Der H|
00000020  65 78 64 75 6d 70 20 69  73 74 20 61 75 66 20 64  |exdump ist auf d|
00000030  65 72 20 6c 69 6e 6b 65  6e 20 53 65 69 74 65 20  |er linken Seite |
00000040  7a 75 20 73 65 68 65 6e  2e 0a 0a 4e 65 75 65 20  |zu sehen...Neue |
00000050  5a 65 69 6c 65 6e 20 6f  64 65 72 20 41 62 73 e4  |Zeilen oder Absä|
00000060  74 7a 65 20 73 69 6e 64  20 64 61 6e 6e 20 61 75  |tze sind dann au|
00000070  63 68 20 22 5a 65 69 63  68 65 6e 22 20 6d 69 74  |ch "Zeichen" mit|
00000080  20 65 69 6e 65 6d 20 62  65 73 74 69 6d 6d 74 65  | einem bestimmte|
00000090  6e 0a 43 6f 64 65 2e 28  30 61 29 2e 2e 2e 0a 0a  |n.Code.(0a).....|
```

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Dump#Hexdump

Zahlendarstellung – Übersicht

Rechnen im Binärsystem

- Im binären Zahlensystem gibt es nur die Ziffern 0 und 1
- Entsprechend einfach sind die Additionsregeln

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$

- Es bleibt nur mehr ein Fall zu behandeln, nämlich:
  - $1 + 1 = ?$
- Problem ähnlich wie im Dezimalsystem, wenn es zu einem Übertrag kommt
  - $5 + 5 = ?$ $\quad$ $7 + 8 = ?$
- Daher:

$$\boxed{1 + 1 = 10}$$

weil Stellenwertsystem

Addition im Binärsystem

- Beispiel im Dezimalsystem:

$$\begin{array}{rcccc} & 3 & 2 & 4 & 5 \\ + & & {}_{1}1 & 9 & 2 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}$$

- Im Binärsystem sehr ähnlich:
  - Ziffern – von rechts nach links – Stelle für Stelle aufaddieren
  - Zwischenergebnis unten notieren, jedoch nur letzte Stelle
  - Ist das Zwischenergebnis mehrstellig, so entstehen Überträge, die beim Abarbeiten der jeweils nächsten Spalte berücksichtigt werden müssen

Addition im Binärsystem

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & {}_{1}1 & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & {}_{1}0 & {}_{1}1 & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rccccccc} & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & & {}_{1}0 & {}_{1}1 & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

- Im Ergebnis tritt ein Überlauf auf

Subtraktion im Binärsystem

- Beispiel im Dezimalsystem:

	3	2	4	5	Minuend
−		$_1$1	9	2	Subtrahend
	3	0	5	3	

- Im Binärsystem funktioniert das sehr ähnlich:

  Falls bei der Subtraktion zweier Ziffern die Ziffer des Minuenden kleiner ist als die des Subtrahenden:

  - Von der höherwertigen Stelle eine Zahl im Wert der Basis ausborgen
  - Minuend um diesen Wert erhöhen
  - Zwischenergebnis anschreiben
  - Höherwertige Stelle vom Subtrahend um eins erhöhen

Subtraktion im Binärsystem

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & 0 \end{array}$$

$(1)_2 - (1)_2 = (0)_2$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & & & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 0 \end{array}$$

Wir „borgen“ uns eine Zahl von der nächsten Stelle und berechnen $(10)_2 - (1)_2 = (1)_2$; Bei der nächsten Stelle müssen wir $(1)_2$ zum Subtrahenden addieren

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & & {}_1 & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Wir „borgen“ uns eine Zahl der nächsten Stelle und erhalten daher $(10)_2 - (10)_2 = (0)_2$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & {}_1 & {}_1 & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Für die letzte Stelle „borgen“ wir uns wieder eine Zahl von der nächsten Stelle und berechnen $(10)_2 - (1)_2 = (1)_2$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & {}_1 & {}_1 & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}$$

$(1)_2 - (1)_2 = (0)_2$

Multiplikation im Binärsystem

- Multiplikation für Dezimalzahlen:
  - Multiplikand ziffernweise mit dem Multiplikator multiplizieren
  - Ergebnisse jeweils um eine Stelle verschoben untereinander schreiben
  - Zwischenergebnisse addieren

- Zum Beispiel:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 5 & \cdot & 2 & 4 & 3 \\
\hline
2 & 9 & 0 & & & & \\
 & 5 & 8 & 0 & & & \\
{}_{1} & {}_{1} & 4 & 3 & 5 & & \\
\hline
3 & 5 & 2 & 3 & 5 & &
\end{array}
$$

- Im Binärsystem einfacher, da weniger Ziffern

Multiplikation im Binärsystem

- Die Multiplikationsregeln lauten:

$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

- Man kann dieselbe Methode wie bei Dezimalzahlen verwenden, z.B.:

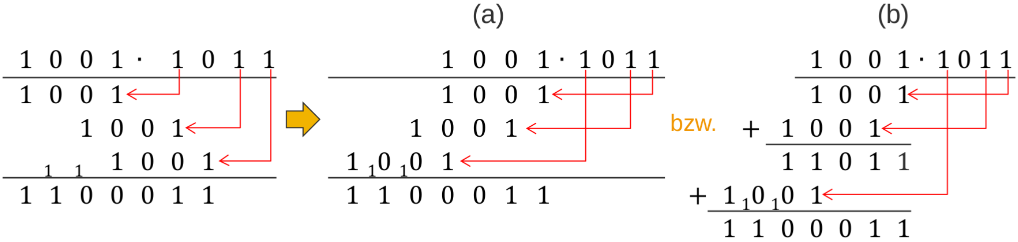
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & _1 & _1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & &
\end{array}
$$

Zeilen, die durch Multiplikation mit 0 enstehen, können auch weggelassen werden.

Multiplikation im Binärsystem

$0 \cdot 0 = 0$	
$0 \cdot 1 = 0$	
$1 \cdot 0 = 0$	
$1 \cdot 1 = 1$	

- Für Implementierung im Rechner günstiger:
  - mit der am weitesten rechts stehenden Ziffer des Multiplikators beginnen
  - Teilergebnisse nach links verschieben (a).
- Denn
  - nicht alle Zwischenergebnisse müssen gespeichert werden
  - jedes Teilergebnis kann sofort zum Endergebnis addiert werden
  - ermöglicht effizientere Implementierung (b).



Multiplikation im Binärsystem

$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

- Wichtiger Spezialfall: Multiplikation mit Zweierpotenz im Binärsystem

$$
\begin{array}{cccccccc}
5 & 7 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
5 & 7 & 1 & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

- Verschiebung des Multiplikanden um drei Stellen nach links, weil $(1000)_2 = (2^3)_{10}$
- Selber Effekt wie bei Multiplikation mit Zehnerpotenz im Dezimalsystem
- Allgemein: Multiplikation mit 2^k entspricht einer Verschiebung des Multiplikanden um k Stellen nach links
  - Englisch: *shift*
  - Bei der Implementierung effizienter Algorithmen oft praktisch

Division im Binärsystem

- Division im Dezimalsystem:

$$
\begin{array}{l}
7\lrcorner 4\ 3\ 1 : 3 = 2\ 4\ 7\ 7 \\
1\ 4 \\
\ \ \ 2\ 3 \\
\ \ \ \ \ \ 2\ 1
\end{array}
$$

- Im Dezimalsystem ist ein wesentlicher Bestandteil des Dividierens das Erraten einer Quotientenziffer.
- Betrachtet man zum Beispiel die Division
  $568 : 63 = ?$
  so sieht man zwar, dass 63 nicht mehr als 9-mal in 568 enthalten ist;
- Aber ob 63 nun 9-mal oder vielleicht nur 8-mal oder etwas noch weniger oft in 568 enthalten ist, bedarf eines geschulten Blickes (oder eines Taschenrechners)
- Im Binärsystem kommen als mögliche Quotientenziffern nur 0 und 1 in Frage

Division im Binärsystem

- Beispiel:

$$\begin{array}{rcccccl}
 & 1\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1 & : & 1\ 0\ 1\ 0 & = & 1 \\
- & \underline{1\,{}_1 0\ 1\ 0} & & & & & \\
 & 0\ 0\ 1\ 1 & 0 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 : 1\ 0\ 1\ 0 = 1\ 0 \\
- & \underline{1\,{}_1 0\ 1\ 0} \\
 & 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
- & \underline{\ \ 0\ 0\ 0\ 0} \\
 & \ \ \ \ 1\ 1\ 0\ 1
\end{array}$$

Dividend : Divisor $=$ Quotient

$$\begin{array}{rl}
 & 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 : 1\ 0\ 1\ 0 = 1\ 0\ 1 \\
- & \underline{1\,{}_1 0\ 1\ 0} \\
 & 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
- & \underline{\ \ 0\ 0\ 0\ 0} \\
 & \ \ \ \ 1\ 1\ 0\ 1 \\
- & \ \ \ \ \underline{1\,{}_1 0\ 1\ 0} \\
 & \ \ \ \ 0\ 0\ 1\ 1\ \mathit{Rest}
\end{array}$$

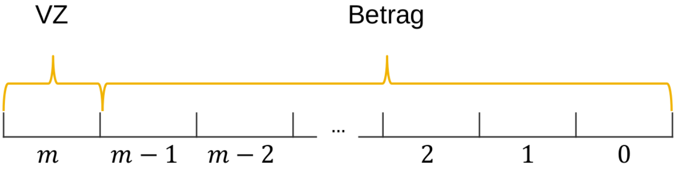
- Entscheiden ob Divisor $\leq$ Teil des Dividenden („geht rein“)
  - Ja: Quotientenziffer $= 1$, Nein: Quotientenziffer $= 0$
  - Bei Zahlen mit gleicher Bitzahl ist immer diejenige größer, die von links das erste 1-Bit hat, das in der anderen 0 ist (Beispiel: 10010000 ist größer als 10001111)

Zahlendarstellung – Übersicht

Darstellung negativer Zahlen

- Bisher: Darstellung positiver Zahlen (wie zum Beispiel 1815)
- Jetzt: Darstellung positiver *und negativer* Zahlen (wie zum Beispiel -209)
- Rechner-intern nur 0 und 1 zur Verfügung
  - Kodierung des Minus?
- Wir betrachten vier Möglichkeiten (jeweils mit gewissen Vor- und Nachteilen):
  - Vorzeichen und Betrag
  - Einerkomplement
  - Zweierkomplement
  - Exzessdarstellung
- Annahme: Alle Zahlen, die wir darstellen, haben $m + 1$ Bits
- Ziel: Benutzen der rechner-internen Addition zur Subtraktion

Darstellung negativer Zahlen - Vorzeichenbit



- Einfachste Möglichkeit: Verwendung von Vorzeichenbit, Rest wie bisher
- *m*-tes Bit: Vorzeichen (VZ)
  - positives Vorzeichen ... 0
  - negatives Vorzeichen ... 1
- Restliche *m* Bits: Betrag der darzustellenden Zahl

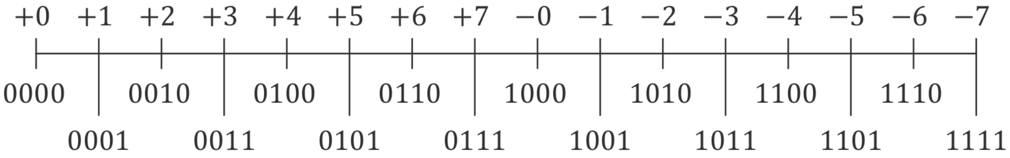
- Vorzeichen getrennt behandeln
  - bei arithmetischen Operationen und bei Vergleichsoperationen

- Bsp. für $m = 6$:

	VZ	Betrag
$+27$	0	0 1 1 0 1 1
-27	1	0 1 1 0 1 1

Darstellung negativer Zahlen - Vorzeichenbit

- Darstellung als Zahlengerade für $m = 3$:



- Ordnungsrelation gilt nur innerhalb der positiven Zahlen
  - Negativen Zahlen kommen „hinter“ den positiven
- Die Zahl 0 besitzt zwei Darstellungen $(-0\ /\ +0)$

Darstellung negativer Zahlen - Vorzeichenbit

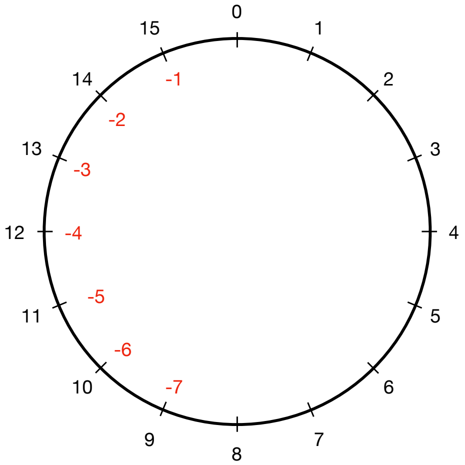
- Beispiel: Addition von zwei Zahlen in Vorzeichenbit Codierung
  - $x = 10\ 1001$ (entspricht -9)
  - $y = 00\ 1010$ (entspricht +10)
- Bei naiver Addition:
  - $10\ 1001 + 00\ 1010 = 11\ 0011$ (entspricht -19)
  - Falsches Resultat
- Korrekte Berechnung via Fallunterscheidung
  - Gleiches Vorzeichen von x und y:
    - Addition der Beträge
    - VZ behalten
  - Unterschiedliches Vorzeichen von x und y:
    - Subtraktion der Beträge
    - VZ der betragsmäßig größeren Zahl
- Im Beispiel:
  - VZ von x: 1, VZ von y: 0
  - Beträge subtrahieren: $0\ 1010 - 0\ 1001 = 0\ 0001$
  - Ergebnis 00 0001 (entspricht +1)

⇒ Wir benötigen weiterhin eine dezidierte Subtraktionsoperation

Subtraktion beim Modulo-Rechnen

- Wie werden wir die Subtraktionsoperation los?
- Am besten wäre es, wenn wir nicht zwischen positiven und negatizen Zahlen unterscheiden müssten
- Erinnerung ans Modulo-Rechnen:
  - Beim Modulo-Rechnen sind Subtraktion und Addition fast das gleiche:
    - $8 - 3 \bmod 16 = 5$
    - Alternativ können wir $-3 \bmod 16$ auch darstellen als $13 \bmod 16$
    - $8 - 3 \bmod 16$
      $= 8 + 13 \bmod 16$
      $= 21 \bmod 16 = 5$

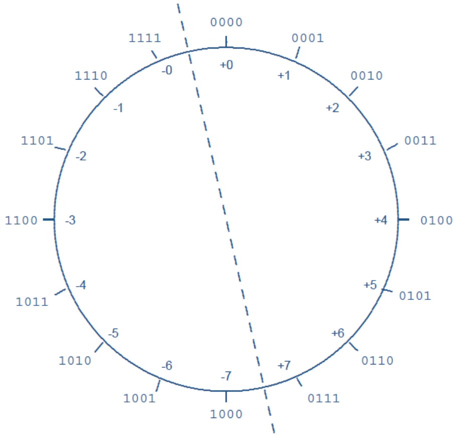
    $\Rightarrow$ Negative Zahl -3 wurde durch positive Zahl 13 ersetzt
  - Beim Rechnen $\bmod k$ können also negative Zahlen $-x$ einfach durch „große“ positive Zahlen $k - x$ ersetzen
    - Im Beispiel oben: -3 durch 13 ersetzt



Einerkomplementdarstellung

- Erinnerung ans Modulo-Rechnen:
  - Beim Modulo-Rechnen sind Subtraktion und Addition fast das gleiche:
    - Alternativ können wir $-3 \bmod 16$ auch darstellen als $13 \bmod 16$
  - Beim Rechnen $\bmod k$ können also negative Zahlen $-x$ einfach durch „große“ positive Zahlen $k - x$ ersetzen
    - Im Beispiel oben: -3 durch 13 ersetzt
- Genau das ist die Idee vom Einerkomplement:
  - Ersetze $-u$ durch $(2^{m+1} - 1) - u$
    - Statt der negativen Zahl $-u$ speichern wir die große (positive) Zahl $(2^{m+1} - 1) - u$
    - Warum $2^{m+1} - 1$?

    $\Rightarrow$ Die größte Zahl, die wir mit $m + 1$ Bits darstellen können ist $2^{m+1} - 1$
  - Rechts: Beispiel für $m = 3$



Einerkomplementdarstellung

Umwandeln einer Binärzahl in Einerkomplementdarstellung

Gegeben: Binärzahl u und Bitbreite der Einerkomplementdarstellung $m+1$
Gesucht: $(m+1)$-Bit Einerkomplementdarstellung von u

Positive Zahl u:

- Bei u von links 0en ergänzen, bis man $m+1$ Stellen hat
- Beispiel: $u = (1110\ 0011)_2$ mit $m = 9$
  - EK-Darstellung: 00 1110 0011

Negative Zahl u:

- 1.Schritt: Bei u von links 0en ergänzen bis man $m+1$ Stellen hat
- 2.Schritt: Alle Bits komplementieren, d.h. 0en und 1en austauschen („flippen“)

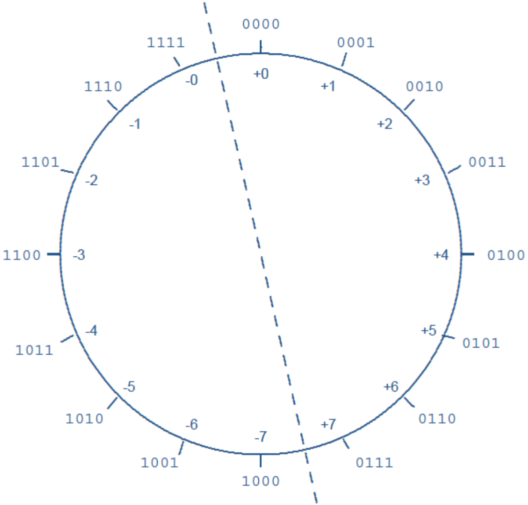
  $\Rightarrow$ Das Komplementieren ist das gleiche wie zu rechnen $\underbrace{11\ldots11}_{m+1 \text{ mal}} - u$, da dies der Rechnung $(2^{m+1} - 1 - u)_{10}$ entspricht
- Beispiel: $u = (-1110\ 0011)_2$ mit $m = 9$
  - 1.Schritt: 00 1110 0011
  - 2.Schritt: 11 0001 1100 (EK-Darstellung)

Einerkomplementdarstellung

- Man stelle sich die Zahlen auf einen Kreis angeordnet vor (rechts für $m = 3$)
  - Aufgrund der zweifachen Darstellung der 0 können Probleme auftreten
  - Beispiel:

$$\begin{array}{r|l} 0110 & +6 \\ 1011 & -4 \\ \hline 10001 & +1 \end{array}$$

  - Daher Überlauf 1 addieren!



Addition in Einerkomplementdarstellung – Beispiel 1 ($m = 5$)

- Berechnung -25 + 19

$$\begin{array}{rccccccr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & & & & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rccccccr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ + & 0 & 1 & 0_1 & 0 & 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & & & 0 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rccccccr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ + & 0 & 1_1 & 0_1 & 0 & 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & & 0 & 0 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rccccccr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ + & 0 & 1_1 & 0_1 & 0 & 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rccccccr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ + & 0 & 1_1 & 0_1 & 0 & 1 & 1 & 19 \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rccccccr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ + & 0 & 1_1 & 0_1 & 0 & 1 & 1 & 19 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -6 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 10 \end{array}}$$

Addition in Einerkomplementdarstellung - Beispiel 2 ($m = 5$)

- Berechnung 25 - 19, also so wie eben, aber mit umgekehrten Vorzeichen
  - Das „Überlauf-Bit“ im vorletzten Schritt impliziert, dass wir $+1$ hinzufügen müssen

$$\begin{array}{rcccccc|r} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & & & & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{rcccccc|r} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & & & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc|r} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & & 1 & 0 & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{rcccccc|r} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & 1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc|r} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{rcccccc|r} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{rcccccc|r} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ + & & & & & {}_{1} & 1 & \\ \hline & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 6 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 10 \end{array}}$$

Addition in Einerkomplementdarstellung - Beispiel 3 ($m = 5$)

- Addition zweier negativer Zahlen: -6 + (-19)
  - Das „Überlauf-Bit“ im vorletzten Schritt impliziert, dass wir +1 hinzufügen müssen

$$
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & & & & & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & & & & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & & 1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
+ & & & & & & {}_{1} & 1 & \\
\hline
 & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -25
\end{array}
$$

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$

Addition in Einerkomplementdarstellung - Beispiel 4 ($m = 5$)

- Eine tatsächliche Überschreitung des Zahlenbereiches kann durch einen Plausibilitätstest des Vorzeichens erkannt werden, z.B.:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\
+ & 1 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
+ & & & & & & 1 & \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 19 \\
\hline
\color{red}{\mathbf{1}} & \color{red}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{1}} & \color{red}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{1}} & \color{red}{\mathbf{1}} & -44
\end{array}
$$

- Da die Summe zweier negativer Zahlen nicht positiv sein kann, ist bei der Addition ein wirklicher Überlauf entstanden.
- Richtig wäre also -44, was aber mit $m = 5$ nicht darstellbar ist

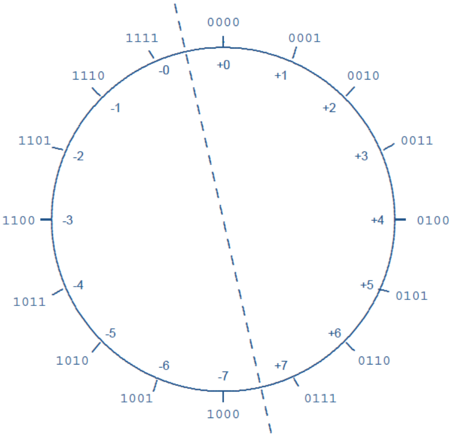
⇒ Wir können mittels Fallunterscheidung prüfen, ob dies der Fall war (prüfe, ob bei beiden Zahlen das erste Bit 1 ist, aber beim Ergebnis 0)

$$
\boxed{\begin{array}{l}
0 + 0 = 0 \\
0 + 1 = 1 \\
1 + 0 = 1 \\
1 + 1 = 10
\end{array}}
$$

Einerkomplementdarstellung

- Zusammenfassung der Einerkomplementdarstellung
  - Negative Zahlen werden durch ihre (binären) Komplemente dargestellt
  - Wir konnten Subtraktion durch Addition ersetzen (gut!)
  - Um korrekt zu addieren, brauchen wir weiterhin diverse Fallunterscheidungen wegen Doppelung $+0/{-0}$ (schlecht!)
- Können wir jetzt noch die Fallunterscheidungen loswerden?
  - Das Problem ergibt sich durch die „doppelte 0“

  $\Rightarrow$ Alle negativen Zahlen um eins weiterschieben
    - Das ist die Idee vom Zweierkomplement



Zweierkomplementdarstellung

- Negative Zahlen im Zweierkomplement durch Ergänzung auf 2^{m+1} dargestellt
- Ausgangspunkt: Einerkomplement der Zahl
  - Berechnung negativer (!) Zahlen: 1 dazu addieren

	$+27$	0 0 0 1 1 0 1 1
Einerkomplementdarst.:	-27	1 1 1 0 0 1 0 0
Zweierkomplementdarst.:	-27	1 1 1 0 0 1 0 1

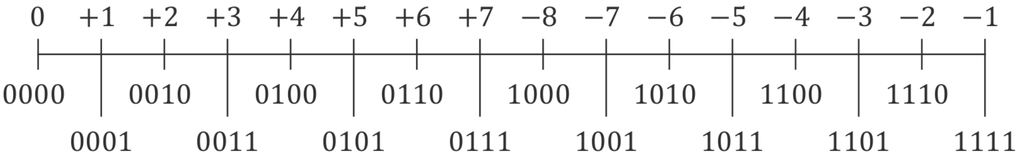
1 dazu addieren

  - Alternativ: die binären Ziffern der positiven Zahl von rechts nach links bis inkl. zur ersten 1 kopieren und die restlichen Ziffern komplementieren.

$$\begin{array}{rl} +27 & 0\;0\;0\;1\;1\;0\;1\;1 \\ \hline -27 & \underbrace{1\;1\;1\;0\;0\;1\;0}_{\textit{restliche Ziffern komplementiert}}\;\underbrace{1}_{\textit{von rechts bis zur ersten 1 kopiert}} \end{array}$$

Zweierkomplementdarstellung - Ordnungsrelation

- Bsp.: $m = 3$



- Ordnungsrelation wie beim Einerkomplement
  - Ordnung (getrennt) innerhalb der positiven und negativen Zahlen
  - Die negativen Zahlen kommen „hinter“ den positiven

- Die Zahl 0 hat eine eindeutige Darstellung

Zweierkomplementdarstellung

- Positive und negative Zahlen können am führenden Bit unterschieden werden.
- Überläufe bei Rechnungen kann man ignorieren, da die 0 eine eindeutige Darstellung besitzt

dezimale Zahl	dezimale Kodierung	binäre Kodierung
0	0	000 ... 00
1	1	000 ... 01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2^m - 1$	$2^m - 1$	011 ... 11
-2^m	2^m	100 ... 00
$-2^m + 1$	$2^m + 1$	100 ... 01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	$2^{m+1} - 1$	111 ... 11

Addition in Zweierkomplementdarstellung – Beispiel 1 ($m = 5$)

$$
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & {}_1 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & {}_1 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & & & & 1 & 0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & {}_1 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
+ & & 1 & {}_1 0 & 1 & 1 & {}_1 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & & 0 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
+ & & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 & {}_1 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{rcccccccr}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
+ & & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 & {}_1 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & \cancel{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 6
\end{array}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l}
0 + 0 = 0 \\
0 + 1 = 1 \\
1 + 0 = 1 \\
1 + 1 = 10
\end{array}}
$$

Addition in Zweierkomplementdarstellung – Beispiel 2 ($m = 5$)

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 & {}_1 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & & & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\ + & 0 & 1 & 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & & & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\ + & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\ + & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & 19 \\ \hline & & & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\ + & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & 19 \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\ + & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & 19 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \end{array}$$

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$

Addition in Zweierkomplementdarstellung – Beispiel 3 ($m = 5$)

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\ \hline & & & & & & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\ \hline & & & & & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\ \hline & & & & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ + & 1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\ \hline & & & 0 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ + & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\ \hline & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ + & & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\ \hline & \cancel{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & -25 \end{array}$$

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$

Überschreitung des Zahlenbereichs

- Eine tatsächliche Überschreitung des Zahlenbereiches kann wieder durch einen Plausibilitätstest des Vorzeichens erkannt werden, z.B.:

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\
+ & & 1 & {}_{1}0 & {}_{1}1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & \cancel{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & +20
\end{array}
$$

- Da die Summe zweier negativer Zahlen nicht positiv sein kann, ist bei der Addition ein wirklicher Überlauf entstanden.

Multiplikation in Zweierkomplementdarstellung (1 von 2)

- Da die Multiplikation zweier m-stelliger Zahlen ein $2m$-stelliges produzieren kann, müssen die Faktoren vor der Durchführung der Rechenoperation auf $2m$ Stellen erweitert werden
- Dabei ist zu beachten, dass positive Zahlen mit Nullern, negative Zahlen mit Einsern ergänzt werden müssen, um das Vorzeichen nicht zu zerstören

- Bsp. 1:

$$\begin{array}{ccccc} (6)_{10} & \cdot & (-3)_{10} & = & (-18)_{10} \\ \hline (\underbrace{000000}_{\textit{Ergänzende Nullen}}\mathbf{000110})_2 & \cdot & (\underbrace{111111}_{\textit{Ergänzende Einsen}}\mathbf{111101})_2 & = & (101110)_2 \end{array}$$

Multiplikation in Zweierkomplementdarstellung (2 von 2)

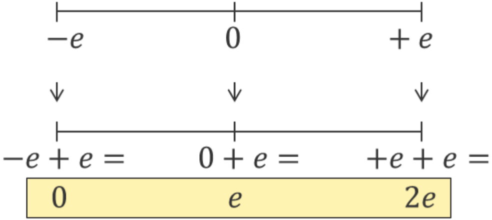
- Bsp. 2: $m = 3$

	1 1 1 1 1 0 0 1	$(-7)_{10}$ *mit Vorzeichenerweiterung*
$\cdot$	1 1 1 1 1 1 0 1	$(-3)_{10}$ *mit Vorzeichenerweiterung*
	1 1 1 1 1 0 0 1	$(11111001 \cdot 1$, *um null Stellen nach links verschoben*$)$
	0 0 0 0 0 0 0 0	$(11111001 \cdot 0$, *um eine Stelle nach links verschoben*$)$
	1 1 1 0 0 1 0 0	$(11111001 \cdot 1$, *um zwei Stellen nach links verschoben*$)$
	1 1 0 0 1 0 0 0	$(11111001 \cdot 1$, *um drei Stellen nach links verschoben*$)$
	1 0 0 1 0 0 0 0	$(11111001 \cdot 1$, *um vier Stellen nach links verschoben*$)$
	0 0 1 0 0 0 0 0	$(11111001 \cdot 1$, *um fünf Stellen nach links verschoben*$)$
	0 1 0 0 0 0 0 0	$(11111001 \cdot 1$, *um sechs Stellen nach links verschoben*$)$
$+$	1 0 0 0 0 0 0 0	$(11111001 \cdot 1$, *um sieben Stellen nach links verschoben*$)$
	0 0 0 1 0 1 0 1	$(+21)_{10}$, in 4 Bit nicht darstellbar

- Die Bits werden über den linken Rand hinausgeschoben, Überlauf kann vernachlässigt werden.

Exzessdarstellung

- Weitere Möglichkeit, negative Ganzzahlen darzustellen: Exzessdarstellung
- Exzess e addieren, sodass Zahlen nicht mehr negativ sind
- Symmetrischer Exzess



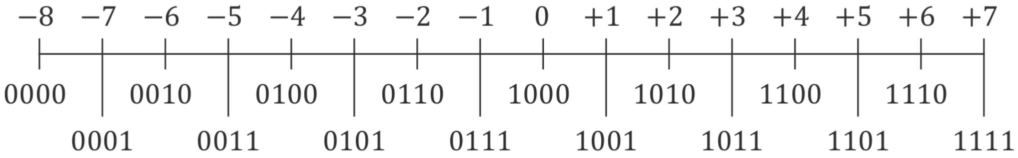
Exzess e addieren

Zahlen in Exzessdarstellung sind um e größer als sie eigentlich sind

- Exzess ergibt sich aus kleinster darstellbarer negativer Zahl
- $0_e = e$
- Welcher Zahlenbereich binär darstellbar?

Exzessdarstellung - Ordnungsrelation

- Bsp.: Anzahl Binärstellen $m + 1 = 4$, Exzess $e = 2^m = 2^3 = 8$



- Weiterer symmetrischer Exzess: $e = 2^m - 1$
  - Bei $m + 1 = 4$, Exzess $e = 2^m - 1 = 7$ also $(-7, .., +8)$ darstellbar

- Ordnungserhaltend
  - Kleinere Zahlen in Exzessdarstellung auch kleiner
- Zahl 0 hat eine eindeutige Darstellung

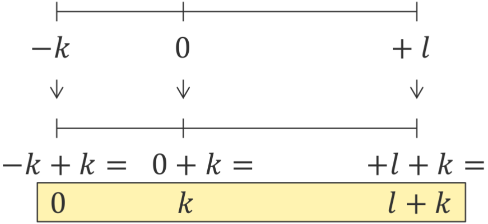
Exzessdarstellung und Zweierkomplement

- Für $e = 2^m$ ist Exzessdarstellung für negative Zahlen identisch mit Zweierkomplement, wenn man das Bit ganz links invertiert
  - Addition und Subtraktion von e durch invertieren des Bits ganz links

Dezimal	Exzessdarstellung, $e = 8$	Zweierkomplement
7	1111	0111
6	1110	0110
5	1101	0101
4	1100	0100
3	1011	0011
2	1010	0010
1	1001	0001
0	1000	0000
–1	0111	1111
–2	0110	1110
–3	0101	1101
–4	0100	1100
–5	0011	1011
–6	0010	1010
–7	0001	1001
–8	0000	1000

Exzessdarstellung

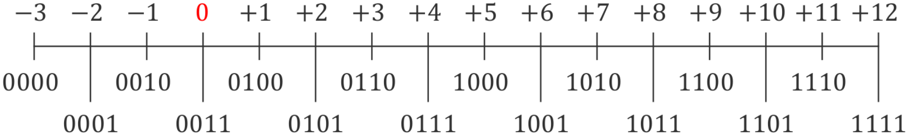
- Nicht-symmetrischer Exzess



Exzess k addieren

Zahlen in Exzessdarstellung sind um k größer als sie eigentlich sind

- Kleinste darstellbare negative Zahl $-k \rightarrow$ Exzess k
- Exzess k addieren, sodass Zahlen nicht mehr negativ sind
- Bsp.: $k = 3$, $m + 1 = 4$



Exzessdarstellung – Rechenoperationen

- Exzess bei arithmetischen Operationen berücksichtigen!
  - Addition: Exzess von der Summe subtrahieren
  - Subtraktion: Exzess zur Summe addieren

- Beispiel im Dezimalsystem:
  - Exzess $e = 12$, $A = -3$, $B = 4$, $A + B = ?$

  - $A_e = A + e = -3 + 12 = 9$
  - $B_e = B + e = 4 + 12 = 16$

  - $A_e + B_e = A + e + B + e = A + B + 2e = -3 + 4 + 2 \cdot 12 = 25$
  - $(A + B)_e = A + B + e = -3 + 4 + 12 = 13$

  - $(A + B)_e = A_e + B_e - e = 9 + 16 - 12 = 13$

Exzessdarstellung – Beispiel

- Bsp.: $-(A+B)$
  - $A_e = 011001,\ B_e = 110101,\ e = 100101$

1. Schritt: $(A+B)_e = A_e + B_e - e$
2. Schritt: $-(A+B)_e = 0_e - (A+B)_e + e$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -12 \\
+ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 16 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
- & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & e \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

Exzessdarstellung – Beispiel

- Bsp.: $-(A+B)$
  - $A_e = 011001,\ B_e = 110101,\ e = 100101$

1. Schritt: $(A+B)_e = A_e + B_e - e$
2. Schritt: $-(A+B)_e = 0_e - (A+B)_e + e$

$$\begin{array}{rccccccr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0_e \\ - & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Problem, da Subtrahend größer

$$\begin{array}{rcccccccr} & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0_e \\ + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & e \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ - & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ \hline \end{array}$$

Vergleich der verschiedenen Zahlendarstellungen 1

- Dezimale Zahl -502 umwandeln auf 12 Bit-Kodierung ($m = 11$) in
  - Vorzeichen mit Betrag
  - Einerkomplement
  - Zweierkomplement
  - Exzessdarstellung mit symmetrischem Exzess $e = 2^{11}$ (Spezialfall!)

$$
\begin{aligned}
-(502)_{10} &= -(1\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0)_2 \\
\text{Vorzeichen \& Betrag:} &\ (1\,|\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0)_2 \\
\text{Einerkomplement:} &\ (1\,|\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1)_2 \\
\text{Zweierkomplement:} &\ (1\,|\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0)_2 \\
\text{Exzessdarstellung:} &\ (0\,|\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0)_2
\end{aligned}
$$

mit 0en auffüllen und Vorzeichenbit 1 (weil neg. Zahl)

Bits invertieren

1 dazu zählen

VZ-Bit invertieren

Vergleich der verschiedenen Zahlendarstellungen 2

- Bitmuster 1101 interpretieren als Zahl u in der Darstellung
  - Vorzeichen mit Betrag
    - $VZ = 1$, also negativ, Betrag $= (101)_2$, daher $u = -5$
  - Einerkomplement
    - Erste Stelle 1, also negativ, daher Betrag invertieren
    - Betrag $= (010)_2$, daher $u = -2$
  - Zweierkomplement
    - Erste Stelle 1, also negativ, daher Betrag invertieren und 1 addieren
    - Betrag $= (011)_2$, daher $u = -3$
  - Exzessdarstellung mit $e = (101)_2$
    - binär: $u = u_e - e = (1101)_2 - (101)_2 = (1000)_2 = 8$
    - dezimal: $u_e = 13$, $u = u_e - e = 13 - 5 = 8$