08 – Prädikatenlogik als Spezifikationssprache

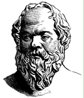
Grundzüge digitaler Systeme (192.134)

Vortrag von: Martin Riener

Fakultät für Informatik
TU Wien
E-Mail: gds@list.tuwien.ac.at

Prädikatenlogik als Spezifikationssprache – Übersicht

Sokrates aus Sicht der Aussagenlogik



Alle Menschen sind sterblich.	A	$A, B \not\models C$
Sokrates ist ein Mensch.	B	1 1 0
Sokrates ist sterblich.	C	

Clipart courtesy FCIT

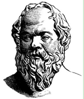
- Die Prämissen und die Konklusion sind für die Aussagenlogik *Atome*.
- Können nur durch (drei unabhängige) Variablen modelliert werden.
- Keine korrekte aussagenlogische Inferenz!
- Keine Berücksichtigung der inneren Struktur der Aussagen: „alle Menschen“, „ist sterblich“, „ist Mensch“, ...

Aussagenlogik zu ausdrucksschwach für eine adäquate Modellierung!

Prädikatenlogik: Erweiterung der Aussagenlogik um

- Quantoren: für alle ($\forall$), es gibt ($\exists$)
- Prädikatensymbole: $Mensch(x)$ ... „x ist ein Mensch“
- Funktionsterme: $Mensch(mutter(sokrates))$ ... „Sokrates Mutter ist ein Mensch“

Sokrates aus Sicht der Prädikatenlogik



$$\begin{array}{l} \text{Alle Menschen sind sterblich.} \\ \text{Sokrates ist ein Mensch.} \\ \hline \text{Sokrates ist sterblich.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall x\ (Mensch(x) \Rightarrow Sterblich(x)) \\ Mensch(sokrates) \\ \hline Sterblich(sokrates) \end{array}$$

Clipart courtesy FCIT

Warum ist das eine korrekte Inferenz?

$\forall x\ P(x) \models P(t)$ (Instanziierungsregel)

Wenn P für alle x gilt, dann gilt P für jedes spezielle Objekt t.

$\forall x(Mensch(x) \Rightarrow Sterblich(x)) \models Mensch(sokrates) \Rightarrow Sterblich(sokrates)$

$A,\ A \Rightarrow B \models B$ (Modus ponens)

Wenn A gilt und wenn B aus A folgt, dann gilt auch B.

$Mensch(sokrates),\ Mensch(sokrates) \Rightarrow Sterblich(sokrates) \models Sterblich(sokrates)$

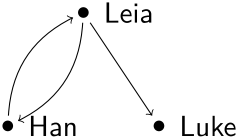
$$\frac{Mensch(sokrates) \qquad \dfrac{\forall x(Mensch(x) \Rightarrow Sterblich(x))}{Mensch(sokrates) \Rightarrow Sterblich(sokrates)}}{Sterblich(sokrates)}$$

Venn-Diagramme reichen nicht aus

- $Mensch(sokrates)$ konnten wir noch als Menge bzw. Venn-Diagramm verstehen, bei mehr Argumenten funktioniert das nicht.

Alle bekommen von jemandem eine Medaille.	$\forall y \exists x\ MedailleAn(x, y)$
Jemand verleiht allen eine Medaille.	$\exists x \forall y\ MedailleAn(x, y)$

- Inferenz nicht gültig, wie sieht ein Gegenbeispiel aus?



$MedailleAn(leia, luke)$
$MedailleAn(leia, han)$
$MedailleAn(han, leia)$

- Wir wollen allgemeine Beziehungen zwischen Objekten einer Menge (Relationen) darstellen können.

Funktions-, Prädikaten- und Variablensymbole

$\mathcal{F}$ … Menge der Funktionssymbole; besitzen Stelligkeit (Arität)
$f/n \in \mathcal{F}$ … f ist ein n-stelliges Funktionssymbol.
(f benötigt n Argumente.)
$f/0$ … nullstelliges Funktionssymbol, Konstantensymbol

$\mathcal{P}$ … Menge der Prädikatensymbole; besitzen Stelligkeit (Arität)
$P/n \in \mathcal{P}$ … P ist ein n-stelliges Prädikatensymbol.
(P benötigt n Argumente.)
$P/0$ … nullstelliges Prädikatensymbol, entspricht Aussagenvariable

$\mathcal{V} = \{x, y, z, x_0, x_1, \dots\}$ … Individuenvariablensymbole

$\mathit{Mensch}(\mathit{mutter}(\mathit{sokrates})), \quad \mathit{Sterblich}(x)$

Funktionssymbole: $\mathit{mutter}/1$, $\mathit{sokrates}/0$
Prädikatensymbole: $\mathit{Mensch}/1$, $\mathit{Sterblich}/1$
Variablensymbol: x

Prädikatenlogik als Spezifikationssprache – Übersicht

Termsprachen

- aufgebaut aus Variablen- und Funktionssymbolen.
- ermöglichen die Bildung von Ausdrücken wie $3 \cdot \sin(x + 2)$.
- sind eine allgemeine Repräsentationsform für hierarchische Strukturen.

Termsprache über $\mathcal{F}$ und $\mathcal{V}$

Die Menge $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, kurz $\mathcal{T}$, der Terme über $\mathcal{F}$ und $\mathcal{V}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

(t1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ — Individuenvariablen sind Terme.

(t2) $f \in \mathcal{T}$, falls $f/0 \in \mathcal{F}$. — Konstantensymbole sind Terme.

(t3) $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$, falls $f/n \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.
Funktionssymbole mit der passenden Zahl an Termargumenten sind Terme.

Notation:

- Pre-/Postfixnotation für manche unären $(n = 1)$ Funktionssymbole
- Infixnotation für manche binären $(n = 2)$ Funktionssymbole
- Klammerneinsparungen durch Prioritäten

Beispiele für Terme

$3 \cdot \sin(x+2)$ bzw. $\cdot(3, \sin(+(x,2)))$

$s(s(s(0)))$ Darstellung der Zahl $3 = 1 + (1 + (1 + 0))$

$f(a, f(b, f(c, nil)))$ Darstellung der Liste $[a, b, c]$

$g(f(a), g(a, (f(x))))$ ist ein Term, falls $a/0, f/1, g/2 \in \mathcal{F}$ und $x \in \mathcal{V}$.

$$\dfrac{g/2 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{f/1 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{a/0 \in \mathcal{F}}{a \in \mathcal{T}}\,\text{t2}}{f(a) \in \mathcal{T}}\,\text{t3} \qquad \dfrac{g/2 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{a/0 \in \mathcal{F}}{a \in \mathcal{T}}\,\text{t2} \qquad \dfrac{f/1 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}}\,\text{t1}}{f(x) \in \mathcal{T}}\,\text{t3}}{g(a, (f(x))) \in \mathcal{T}}\,\text{t3}}{g(f(a), g(a, (f(x)))) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})}\,\text{t3}$$

Die Menge der Terme, $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, ist die kleinste Menge, sodass:

(t1) $v \in \mathcal{T}$, falls $v \in \mathcal{V}$.

(t2) $f \in \mathcal{T}$, falls $f/0 \in \mathcal{F}$.

(t3) $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$, falls $f/n \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.

Die Aussagenlogik ist eine Termsprache.

Sei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \ldots\}$ und $\mathcal{F} = \{\top/0, \bot/0, \neg/1, \wedge/2, \vee/2, \ldots\}$.

Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ die Menge der aussagenlogischen Formeln
(unter Verwendung der Infixnotation für binäre Operatoren).

$(A \wedge B) \Rightarrow C$ entspricht $\Rightarrow(\wedge(A, B), C)$.

$A \wedge (B \Rightarrow C)$ entspricht $\wedge(A, \Rightarrow(B, C))$.

So ziemlich alles lässt sich als Term auffassen ...

Semantik von Termsprachen

Variablensymbole: Wert abhängig von momentaner Wertebelegung

Konstanten- und Funktionssymbole:

- Vordefinierte Symbole: feste, unveränderliche Bedeutung (fix eingebaut in Termsemantik)
- Freie Symbole: Interpretation als Konstante bzw. Funktionen

Interpretation

Eine Interpretation I über einem Wertebereich $\mathcal{U}$ ordnet jedem Funktionssymbol aus $\mathcal{F}$ eine Funktion wie folgt zu:

$$\begin{array}{ll} I(f) \in \mathcal{U} & \text{für } f/0 \in \mathcal{F} \\ I(f) : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U} & \text{für } f/n \in \mathcal{F},\ n > 0 \end{array}$$

Arithmetische Ausdrücke (wie etwa `(x+1)*(x+1+1)`)

$\mathcal{F} = \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{+}, \texttt{-}, \texttt{*}\}$

$\mathcal{U} = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	$I(\texttt{+}) = +$ (Addition)
$I(\texttt{0}) = 0$	$I(\texttt{-}) = -$ (Subtraktion)
$I(\texttt{1}) = 1$	$I(\texttt{*}) = \cdot$ (Multiplikation)

Aussagenlogik

$\mathcal{F} = \{\top/0, \bot/0, \neg/1, \wedge/2, \vee/2, \ldots\}$

$\mathcal{U} = \mathbb{B} = \{0, 1\}$	$I(\top) = 1$	$I(\neg) = \text{not}$	$\ldots$
	$I(\bot) = 0$	$I(\wedge) = \text{and}$	

$\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{U} \ldots$ Wertebelegung für die Variablensymbole

Semantik von Termen

Der Wert eines Terms in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\mathrm{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

(v1) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(v) = \sigma(v)$ für $v \in \mathcal{V}$;

(v2) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(f) = I(f)$ für $f/0 \in \mathcal{F}$;

(v3) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(f(t_1, \ldots, t_n)) = I(f)(\mathrm{val}_{I,\sigma}(t_1), \ldots, \mathrm{val}_{I,\sigma}(t_n))$ für $f/n \in \mathcal{F}$, $n > 0$.

Wert von `(x+1)*(x+1+1)` für $\sigma(x) = 0$

Arithmetik: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, $I_1(1) = 1$, $I_1(+) = +$, $I_1(*) = \cdot$

$\mathrm{val}_{I_1,\sigma}(\texttt{(x+1)*(x+1+1)}) = (0 + 1) \cdot (0 + 1 + 1) = 2$

Aussagenlogik: $\mathcal{U} = \mathbb{B}$, $I_2(1) = 1$, $I_2(+) = \mathrm{or}$, $I_2(*) = \mathrm{and}$

$\mathrm{val}_{I_2,\sigma}(\texttt{(x+1)*(x+1+1)}) = \mathrm{and}\ (\mathrm{or}\ (0, 1), \mathrm{or}\ (0, \mathrm{or}\ (1, 1))) = 1$

Prädikatenlogik als Spezifikationssprache – Übersicht

Prädikatenlogik – Syntax

$\mathcal{V}$ ... Individuenvariablensymbole
$\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ ... Funktions- bzw. Prädikatensymbole mit Stelligkeiten
$(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ ... „Signatur“

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Die Menge $\mathcal{PF}$ der prädikatenlogischen Formeln über der Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

(p1) $P \in \mathcal{PF}$, wenn $P/0 \in \mathcal{P}$;

(p2) $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{PF}$, wenn $P/n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$;

(p3) $\top, \bot \in \mathcal{PF}$;

(p4) $\neg F \in \mathcal{PF}$, wenn $F \in \mathcal{PF}$;

(p5) $(F * G) \in \mathcal{PF}$, wenn $F, G \in \mathcal{PF}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \Leftrightarrow, \not\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow\}$.

(p6) $\forall x\, F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

(p7) $\exists x\, F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

P, $P(t_1, \ldots, t_n)$ ... „Atomformeln“

$\forall x\ (Mensch(x) \Rightarrow Sterblich(x))$ ist eine Formel

$Mensch/1$ und $Sterblich/1$ sind Prädikatensymbole.

$$
\dfrac{x \in \mathcal{V} \qquad \dfrac{\dfrac{Mensch/1 \in \mathcal{P} \qquad \dfrac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}}\,t1}{Mensch(x) \in \mathcal{PF}}\,p2 \qquad \dfrac{Sterblich/1 \in \mathcal{P} \qquad \dfrac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}}\,t1}{Sterblich(x) \in \mathcal{PF}}\,p2}{(Mensch(x) \Rightarrow Sterblich(x)) \in \mathcal{PF}}\,p5}{\forall x\ (Mensch(x) \Rightarrow Sterblich(x)) \in \mathcal{PF}}\,p6
$$

Quiz: Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien die Prädikatensymbole mit intendierter Bedeutung:

$\mathit{Pokemon}(x)$	… x ist ein Pokemon	$\mathit{Typ}(x, y)$	… x hat Typ y
$\mathit{Trainiert}(x, y)$	… x ist Trainer_in von y	$\mathit{Effektiv}(x, y)$	… x gewinnt gegen y

Außerdem seien noch die folgenden Konstantensymbole gegeben:

feuer, eis	Pokemon-Typen
ash, pikachu	Ash, Pikachu

Welche der folgenden Formeln sind syntaktisch korrekt und passen zu dieser Signatur?

$\mathit{Pokemon}(\mathit{pikachu})$	$\mathit{Pokemon}(\mathit{eis})$	$\mathit{Trainiert}(\mathit{misty})$
$\mathit{Trainiert}(\mathit{pikachu}, \mathit{ash})$	$\mathit{Trainiert}(\mathit{misty}, \mathit{Pokemon}(x))$	$\mathit{Typ}(\mathit{glumanda}, \mathit{feuer})$
$\forall x \exists y \mathit{Trainiert}(x, y)$	$\exists x \forall y \land \mathit{Trainiert}(x, y)$	$\forall x(\mathit{Pokemon}(x) \Rightarrow \exists \mathit{Typ}(x, y))$

Quiz: Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien die Prädikatensymbole mit intendierter Bedeutung:

$\mathit{Pokemon}(x)$	... x ist ein Pokemon	$\mathit{Typ}(x,y)$	... x hat Typ y
$\mathit{Trainiert}(x,y)$	... x ist Trainer_in von y	$\mathit{Effektiv}(x,y)$	... x gewinnt gegen y

Außerdem seien noch die folgenden Konstantensymbole gegeben:

feuer, eis	Pokemon-Typen
ash, pikachu	Ash, Pikachu

Welche der folgenden Formeln sind syntaktisch korrekt und passen zu dieser Signatur?

$\mathit{Pokemon}(\mathit{pikachu})$	✓	$\mathit{Pokemon}(\mathit{eis})$	✓	$\mathit{Trainiert}(\mathit{misty})$	✗
$\mathit{Trainiert}(\mathit{pikachu}, \mathit{ash})$	✓	$\mathit{Trainiert}(\mathit{misty}, \mathit{Pokemon}(x))$	✗	$\mathit{Typ}(\mathit{glumanda}, \mathit{feuer})$	✗
$\forall x \exists y \mathit{Trainiert}(x,y)$	✓	$\exists x \forall y \wedge \mathit{Trainiert}(x,y)$	✗	$\forall x(\mathit{Pokemon}(x) \Rightarrow \exists \mathit{Typ}(x,y))$	✗

Prädikatenlogik als Spezifikationssprache – Übersicht

Prädikatenlogik – Semantik

Prädikatensymbole: repräsentieren Relationen bzw. Elementaraussagen

- Vordefinierte Symbole wie $\top$ und $\bot$: feste, unveränderliche Bedeutung (fix eingebaut in Formelsemantik)
- Freie Symbole: Interpretation durch Relationen bzw. Wahrheitswerte

(Prädikatenlogische) Interpretation

Eine Interpretation I über einem Wertebereich $\mathcal{U}$ ordnet jedem Symbol der Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ eine Funktion bzw. Relation wie folgt zu:

$$
\begin{array}{ll}
I(f) \in \mathcal{U} & \text{für } f/0 \in \mathcal{F} \\
I(f) \colon \mathcal{U}^n \to \mathcal{U} & \text{für } f/n \in \mathcal{F},\ n > 0 \\
 & \\
I(P) \in \{0,1\} & \text{für } P/0 \in \mathcal{P} \\
I(P) \subseteq \mathcal{U}^n & \text{für } P/n \in \mathcal{P},\ n > 0 \\
I(P) \colon \mathcal{U}^n \to \{0,1\} & \text{(alternative Sichtweise)}
\end{array}
$$

Nullstellige Prädikatensymbole = Aussagenvariablen

Zwei Interpretationsmöglichkeiten für $P/0 \in \mathcal{P}$: $I(P) = 0$ oder $I(P) = 1$.

Einstellige Prädikatensymbole = Typen, Klassen

Sei $Mann/1, Frau/1 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \{\text{Andrea}, \text{Anna}, \text{Hans}, \text{Maria}, \text{Tom}\}$.

$I(Mann)$ und $I(Frau)$ als Mengen:

$$I(Mann) = \{\text{Andrea}, \text{Hans}, \text{Tom}\}$$
$$I(Frau) = \{\text{Andrea}, \text{Anna}, \text{Maria}\}$$

... oder als Funktionen:

x	$I(Mann)(x)$	$I(Frau)(x)$
Andrea	1	1
Anna	0	1
Hans	1	0
Maria	0	1
Tom	1	0

Mehrstellige Prädikatensymbole = Relationen, Beziehungen

Sei $</2 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. $I(<)$ als Menge:

$$I(<) = \{\, (m,n) \mid m < n \,\} = \{(0,1),\ (0,2),\ (1,2),\ (0,3),\ (1,3), \dots\}$$

... oder als Funktion:

$$I(<)(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $Plus/3 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. $I(Plus)$ als Menge:

$$\begin{aligned} I(Plus) &= \{\, (k,l,m) \mid k + l = m \,\} \\ &= \{(0,0,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (2,0,2)\,(1,1,2)\,(0,2,2), \dots\} \end{aligned}$$

... oder als Funktion:

$$I(Plus)(k,l,m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k + l = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Der Wert einer Formel in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\mathrm{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

(v1) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(P) = I(P)$ für $P/0 \in \mathcal{P}$;

(v2) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(P(t_1, \ldots, t_n)) = I(P)(\mathrm{val}_{I,\sigma}(t_1), \ldots, \mathrm{val}_{I,\sigma}(t_n))$ für $P/n \in \mathcal{P}$;

(v3) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\top) = 1$ und $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\bot) = 0$;

(v4) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\neg F) = \mathrm{not}\,\mathrm{val}_{I,\sigma}(F)$;

(v5) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\,(F * G)\,) = \mathrm{val}_{I,\sigma}(F) \circledast \mathrm{val}_{I,\sigma}(G)$,
wobei $\circledast$ die logische Funktion zum Operator $*$ ist;

(v6) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\,\forall x\, F\,) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathrm{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(v7) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\,\exists x\, F\,) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathrm{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für mind. ein } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\sigma \overset{x}{\sim} \sigma'$ ... $\sigma(v) = \sigma'(v)$ für alle $v \in \mathcal{V}$ mit $v \neq x$

(σ und σ' sind identisch, nur $\sigma(x)$ und $\sigma'(x)$ können verschieden sein.)

Beispiel für $\overset{x}{\sim}$ mit zwei Variablen

- $\mathcal{U} = \{23, 42\}$, $\mathcal{V} = \{x, y\}$
- Mögliche Variablenbelegungen:

	x	y
σ_1	23	23
σ_2	23	42
σ_3	42	23
σ_4	42	42

- Äquivalenz bis auf einen Variablenwert:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 \overset{x}{\sim} \sigma_1 & \qquad & \sigma_1 \overset{y}{\sim} \sigma_1 \\ \sigma_1 \overset{x}{\not\sim} \sigma_2 & & \sigma_1 \overset{y}{\sim} \sigma_2 \\ \sigma_1 \overset{x}{\sim} \sigma_3 & & \sigma_1 \overset{y}{\not\sim} \sigma_3 \\ \sigma_1 \overset{x}{\not\sim} \sigma_4 & & \sigma_1 \overset{y}{\not\sim} \sigma_4 \\ \sigma_2 \overset{x}{\sim} \sigma_2 & & \sigma_2 \overset{y}{\sim} \sigma_2 \\ \sigma_2 \overset{x}{\not\sim} \sigma_3 & & \sigma_2 \overset{y}{\not\sim} \sigma_3 \\ \sigma_2 \overset{x}{\sim} \sigma_4 & & \sigma_2 \overset{y}{\not\sim} \sigma_4 \\ \sigma_3 \overset{x}{\not\sim} \sigma_4 & & \sigma_3 \overset{y}{\sim} \sigma_4 \end{array}$$

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist falsch

... falls wir $\mathcal{U} = \{23, 42\}$, $I(s)(23) := 23$, $I(s)(42) := 23$ und $I(P)(m, n) := (m = n)$ wählen (Variablenbelegungen σ beliebig):

$$\mathrm{val}_{I,\sigma}(\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))) = 1$$

$$\iff \mathrm{val}_{I,\sigma'}(\exists y\, P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

Fall $\sigma'(x) = 23$:

$\Rightarrow \mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad$ für mind. ein $\sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$

möglich für $\sigma''(y) = 23$: $\mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 1$

Fall $\sigma'(x) = 42$:

$\Rightarrow \mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad$ für mind. ein $\sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$

unmöglich: sowohl für $\sigma''(y) = 23$ als auch $\sigma''(y) = 42$ ist $\mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 0$

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist wahr

... falls wir $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $I(s)(n) := n - 1$ und $I(P)(m, n) := (m = n)$ wählen (Variablenbelegungen σ beliebig):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}_{I,\sigma}(\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))) = 1 \\
\iff\ & \mathrm{val}_{I,\sigma'}(\exists y\, P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ & \mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ & I(P)(\mathrm{val}_{I,\sigma''}(x), \mathrm{val}_{I,\sigma''}(s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ & \sigma''(x) = \sigma''(y) - 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma
\end{aligned}$$

Wir wählen jene Variablenbelegung σ'', für die $\sigma''(y) = \sigma''(x) + 1$ gilt:

$\sigma''(x) = (\sigma''(x) + 1) - 1 \quad \text{für alle } \sigma''(x) = \sigma'(x) \in \mathbb{N}$

Gilt, daher ist $\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ wahr in dieser Interpretation.

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist falsch

... falls wir $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $I(s)(n) := n + 1$ und $I(P)(m, n) := (m = n)$ wählen (Variablenbelegungen σ beliebig):

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{val}_{I,\sigma}(\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))) = 1 \\
\iff\ & \mathrm{val}_{I,\sigma'}(\exists y\, P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ & \mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ & I(P)(\mathrm{val}_{I,\sigma''}(x), \mathrm{val}_{I,\sigma''}(s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ & \sigma''(x) = \sigma''(y) + 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma
\end{aligned}
$$

Problem: Für $\sigma''(x) = \sigma'(x) = 0$ besitzt die Gleichung keine Lösung in $\mathbb{N}$:

$$\sigma''(x) \neq \sigma''(y) + 1 \quad \text{für alle } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$$

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist daher falsch in dieser Interpretation.

Quiz: Evaluieren von Formeln (1)

Betrachten Sie die Interpretation I:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Pikachu}, \text{Turtok}, \text{Lapras}, \text{Glumanda}, \text{Mauzi}, \text{Ash}, \text{Misty}, \text{Jessie}, \\
&\qquad \text{Feuer}, \text{Wasser}, \text{Elektro}, \text{Eis}, \text{Normal}\} \\
I(\mathit{Pokemon}) &= \{\text{Pikachu}, \text{Turtok}, \text{Lapras}, \text{Glumanda}, \text{Mauzi}\} \\
I(\mathit{Trainiert}) &= \{(\text{Ash}, \text{Pikachu}), (\text{Misty}, \text{Lapras}), (\text{Ash}, \text{Glumanda}), (\text{Jessie}, \text{Mauzi})\} \\
I(\mathit{Typ}) &= \{(\text{Pikachu}, \text{Elektro}), (\text{Turtok}, \text{Wasser}), (\text{Glumanda}, \text{Feuer}), \\
&\qquad (\text{Mauzi}, \text{Normal}), (\text{Lapras}, \text{Wasser}), (\text{Lapras}, \text{Eis})\} \\
I(\mathit{Effektiv}) &= \{(\text{Wasser}, \text{Feuer}), (\text{Elektro}, \text{Wasser}), (\text{Feuer}, \text{Eis}))\} \\
I(\mathit{pikachu}) &= \text{Pikachu}, I(\mathit{ash}) = \text{Ash}, I(\mathit{eis}) = \text{Eis}
\end{aligned}
$$

Sind die folgenden Formeln wahr oder falsch in I?

- $\neg\exists x \mathit{Trainiert}(\mathit{pikachu}, x)$
- $\forall x \neg \mathit{Effektiv}(x, x)$
- $\forall x \exists y (\mathit{Trainiert}(x, y) \vee \mathit{Trainiert}(y, x))$
- $\forall x (\mathit{Pokemon}(x) \Rightarrow \exists y \mathit{Typ}(x, y))$

Lösung

- $\neg\exists x \mathit{Trainiert}(\mathit{pikachu}, x)$ ✓
  $I(\mathit{pikachu}) =$ Pikachu und Pikachu kommt nie als erstes Element von $I(\mathit{Trainiert})$ vor. Darum ist $\exists x \mathit{Trainiert}(\mathit{pikachu}, x)$ falsch und $\neg\exists x \mathit{Trainiert}(\mathit{pikachu}, x)$ wahr.
- $\forall x \neg \mathit{Effektiv}(x, x)$ ✓
  Weder $(\text{Pikachu}, \text{Pikachu})$ noch $(\text{Turtok}, \text{Turtok})$, $(\text{Lapras}, \text{Lapras})$, $(\text{Glumanda}, \text{Glumanda})$, $(\text{Mauzi}, \text{Mauzi})$, (Ash, Ash), $(\text{Misty}, \text{Misty})$, $(\text{Jessie}, \text{Jessie})$, $(\text{Feuer}, \text{Feuer})$, $(\text{Wasser}, \text{Wasser})$, (Eis, Eis) oder $(\text{Normal}, \text{Normal})$ kommen in $I(\mathit{Effektiv})$ vor.
- $\forall x \exists y (\mathit{Trainiert}(x, y) \vee \mathit{Trainiert}(y, x))$ ✗
  Beispielsweise ist weder (Normal, v) noch (v, Normal) für irgendein $v \in \mathcal{U}$ in $I(\mathit{Trainiert})$ enthalten.

  Achtung: Ein Beispiel für $\exists x$ / Gegenbeispiel für $\forall x$ muss ausreichen!
- $\forall x (\mathit{Pokemon}(x) \Rightarrow \exists y \mathit{Typ}(x, y))$ ✓
  Für jedes $p \in I(\mathit{Pokemon})$ muss es ein $t \in \mathcal{U}$ geben, sodass $(p, t) \in I(\mathit{Typ})$:
  - $(\text{Pikachu}, \text{Elektro}) \in I(\mathit{Typ})$
  - $(\text{Turtok}, \text{Wasser}) \in I(\mathit{Typ})$,
  - $(\text{Lapras}, \text{Wasser}) \in I(\mathit{Typ})$,
  - $(\text{Glumanda}, \text{Feuer}) \in I(\mathit{Typ})$,
  - $(\text{Mauzi}, \text{Normal}) \in I(\mathit{Typ})$

Quiz: Evaluieren von Formeln (2)

Betrachten Sie die Interpretation $\underline{I}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Pikachu, Turtok, Lapras, Glumanda, Mauzi, Ash, Misty, Jessie,}\\
&\qquad \cancel{\text{Feuer, Wasser, Elektro, Eis,}}\text{Normal}\}\\
\underline{I}(Pokemon) &= \{\text{Pikachu, Turtok, Lapras, Glumanda, Mauzi}\}\\
\underline{I}(Trainiert) &= \{(\text{Ash, Pikachu}), (\text{Misty, Lapras}), (\text{Ash, Glumanda}), (\text{Jessie, Mauzi}),\\
&\qquad \textbf{(Normal, Turtok)} \}\\
\underline{I}(Typ) &= \{(x, \text{Normal}) | x \in \{\text{Pikachu, Turtok, Lapras, Glumanda, Mauzi}\}\}\\
\underline{I}(Effektiv) &= \{\cancel{(\text{Wasser, Feuer}), (\text{Elektro, Wasser}), (\text{Feuer, Eis})}\}\\
\underline{I}(pikachu) &= \textbf{Ash}, \underline{I}(ash) = \text{Ash}, \underline{I}(eis) = \text{Eis}
\end{aligned}
$$

Sind die folgenden Formeln wahr oder falsch in $\underline{I}$?

- $\neg\exists x Trainiert(pikachu, x)$
- $\forall x \neg Effektiv(x, x)$
- $\forall x \exists y (Trainiert(x, y) \vee Trainiert(y, x))$
- $\forall x (Pokemon(x) \Rightarrow \exists y Typ(x, y))$

Lösung

- $\neg\exists x Trainiert(pikachu, x)$ ✗
  $\underline{I}(pikachu) = \text{Ash und zB. (Ash, Glumanda)} \in \underline{I}(Trainiert)$.
  Deshalb ist $\exists x Trainiert(pikachu, x)$ wahr und $\neg\exists x Trainiert(pikachu, x)$ falsch.
- $\forall x \neg Effektiv(x, x)$ ✓
  $\underline{I}(Effektiv)$ ist die leere Menge, also wird $Effektiv(x, y)$ nie wahr. Deshalb erst recht auch nicht $Effektiv(x, x)$.
- $\forall x \exists y (Trainiert(x, y) \lor Trainiert(y, x))$ ✓
  Nachweise für die möglichen Belegungen von x:
  - (Ash, Pikachu) (für beide)
  - (Misty, Lapras) (für beide)
  - (Ash, Glumanda) (für Glumanda, Nachweis für Ash schon erledigt)
  - (Jessie, Mauzi) (für beide)
  - (Normal, Turtok) (für beide)
- $\forall x (Pokemon(x) \Rightarrow \exists y Typ(x, y))$ ✓
  Selbes Argument wie für I (mit Normal als zweites Argument).

Auf dem Spielplatz

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{Vater/1, Kind/1, SpieltMit/2\} \\
\mathcal{F} &= \{albrecht/0, frieda/0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Albrecht}, \text{Bogdan}, \text{Erich}, \text{Frieda}, \text{Kathrin}, \text{Nina}, \text{Tamara}\} \\
I(Vater) &= \{\text{Bogdan}, \text{Erich}\} \\
I(Kind) &= \{\text{Albrecht}, \text{Frieda}, \text{Nina}\} \\
I(SpieltMit) &= \{(\text{Albrecht}, \text{Frieda}), (\text{Bogdan}, \text{Albrecht}), \\
&\quad (\text{Erich}, \text{Albrecht}), (\text{Erich}, \text{Frieda}), \\
&\quad (\text{Frieda}, \text{Nina}), (\text{Frieda}, \text{Kathrin}), (\text{Frieda}, \text{Albrecht}), (\text{Nina}, \text{Frieda}), \\
&\quad (\text{Tamara}, \text{Erich}), (\text{Tamara}, \text{Bogdan}), (\text{Tamara}, \text{Albrecht})\}, \\
I(albrecht) &= \text{Albrecht} \\
I(frieda) &= \text{Frieda}
\end{aligned}
$$

$\forall x\,(Vater(x) \Rightarrow \exists y\,(Kind(y) \wedge SpieltMit(x, y)))$

„Alle Väter spielen mit (mindestens) einem Kind.“

Wahr in I, da Vater Bogdan mit Kind Albrecht und Vater Erich mit Kind Frieda spielt.

Auf dem Spielplatz

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{\mathit{Vater}/1, \mathit{Kind}/1, \mathit{SpieltMit}/2\} \\
\mathcal{F} &= \{\mathit{albrecht}/0, \mathit{frieda}/0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Albrecht}, \text{Bogdan}, \text{Erich}, \text{Frieda}, \text{Kathrin}, \text{Nina}, \text{Tamara}\} \\
I(\mathit{Vater}) &= \{\text{Bogdan}, \text{Erich}\} \\
I(\mathit{Kind}) &= \{\text{Albrecht}, \text{Frieda}, \text{Nina}\} \\
I(\mathit{SpieltMit}) &= \{(\text{Albrecht}, \text{Frieda}), (\text{Bogdan}, \text{Albrecht}), \\
&\quad (\text{Erich}, \text{Albrecht}), (\text{Erich}, \text{Frieda}), \\
&\quad (\text{Frieda}, \text{Nina}), (\text{Frieda}, \text{Kathrin}), (\text{Frieda}, \text{Albrecht}), (\text{Nina}, \text{Frieda}), \\
&\quad (\text{Tamara}, \text{Erich}), (\text{Tamara}, \text{Bogdan}), (\text{Tamara}, \text{Albrecht})\}, \\
I(\mathit{albrecht}) &= \text{Albrecht} \\
I(\mathit{frieda}) &= \text{Frieda}
\end{aligned}$$

$\forall x\, (\mathit{Vater}(x) \land \mathit{SpieltMit}(x, \mathit{albrecht}))$

„Alle sind Väter und spielen mit Albrecht.“

Falsch in I, da etwa Albrecht kein Vater ist.

Auf dem Spielplatz

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{\mathit{Vater}/1, \mathit{Kind}/1, \mathit{SpieltMit}/2\} \\
\mathcal{F} &= \{\mathit{albrecht}/0, \mathit{frieda}/0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Albrecht}, \text{Bogdan}, \text{Erich}, \text{Frieda}, \text{Kathrin}, \text{Nina}, \text{Tamara}\} \\
I(\mathit{Vater}) &= \{\text{Bogdan}, \text{Erich}\} \\
I(\mathit{Kind}) &= \{\text{Albrecht}, \text{Frieda}, \text{Nina}\} \\
I(\mathit{SpieltMit}) &= \{(\text{Albrecht}, \text{Frieda}), (\text{Bogdan}, \text{Albrecht}), \\
&\quad (\text{Erich}, \text{Albrecht}), (\text{Erich}, \text{Frieda}), \\
&\quad (\text{Frieda}, \text{Nina}), (\text{Frieda}, \text{Kathrin}), (\text{Frieda}, \text{Albrecht}), (\text{Nina}, \text{Frieda}), \\
&\quad (\text{Tamara}, \text{Erich}), (\text{Tamara}, \text{Bogdan}), (\text{Tamara}, \text{Albrecht})\}, \\
I(\mathit{albrecht}) &= \text{Albrecht} \\
I(\mathit{frieda}) &= \text{Frieda}
\end{aligned}$$

$\exists x\, (\mathit{Kind}(x) \wedge \forall y\, (\mathit{Kind}(y) \Rightarrow \mathit{SpieltMit}(x, y)))$

„Es gibt (mindestens) ein Kind, das mit allen Kindern spielt."

Falsch in I, da Albrecht nicht mit Nina, Frieda nicht mit Frieda und Nina nicht mit Albrecht spielt.

Auf dem Spielplatz

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{\mathit{Vater}/1, \mathit{Kind}/1, \mathit{SpieltMit}/2\}\\
\mathcal{F} &= \{\mathit{albrecht}/0, \mathit{frieda}/0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Albrecht}, \text{Bogdan}, \text{Erich}, \text{Frieda}, \text{Kathrin}, \text{Nina}, \text{Tamara}\}\\
I(\mathit{Vater}) &= \{\text{Bogdan}, \text{Erich}\}\\
I(\mathit{Kind}) &= \{\text{Albrecht}, \text{Frieda}, \text{Nina}\}\\
I(\mathit{SpieltMit}) &= \{(\text{Albrecht}, \text{Frieda}), (\text{Bogdan}, \text{Albrecht}),\\
&\quad\ (\text{Erich}, \text{Albrecht}), (\text{Erich}, \text{Frieda}),\\
&\quad\ (\text{Frieda}, \text{Nina}), (\text{Frieda}, \text{Kathrin}), (\text{Frieda}, \text{Albrecht}), (\text{Nina}, \text{Frieda}),\\
&\quad\ (\text{Tamara}, \text{Erich}), (\text{Tamara}, \text{Bogdan}), (\text{Tamara}, \text{Albrecht})\},\\
I(\mathit{albrecht}) &= \text{Albrecht}\\
I(\mathit{frieda}) &= \text{Frieda}
\end{aligned}
$$

$\forall x\,(\mathit{SpieltMit}(x, \mathit{frieda}) \not\Leftrightarrow \mathit{SpieltMit}(x, \mathit{albrecht}))$

„Alle spielen entweder mit Frieda oder Albrecht (aber nicht mit beiden)."

Falsch in I, da Erich sowohl mit Frieda als auch mit Albrecht spielt.

Eine Formel F heißt

- *erfüllbar*, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für mindestens ein I und ein σ (I und σ nennt man *Modell* von F);
- *widerlegbar*, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 0$ für mindestens ein I und ein σ (I und σ nennt man *Gegenbeispiel* oder *Gegenmodell* zu F);
- *unerfüllbar*, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 0$ für alle I und alle σ;
- *(allgemein)gültig*, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für alle I und alle σ (F nennt man in diesem Fall auch *Tautologie*).

Äquivalenz, Konsequenz und Gültigkeit

Semantische Äquivalenz

Zwei Formeln F und G heißen *äquivalent*, geschrieben $F = G$, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = \mathrm{val}_{I,\sigma}(G)$ für alle I und alle σ gilt.

$F_1, \ldots, F_n \models_{I,\sigma} G$:
„Aus $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F_1) = \cdots = \mathrm{val}_{I,\sigma}(F_n) = 1$ folgt $\mathrm{val}_{I,\sigma}(G) = 1$."

Logische Konsequenz

$F_1, \ldots, F_n \models G$: $F_1, \ldots, F_n \models_{I,\sigma} G$ gilt für alle I und σ.

Die Formeln F und G sind äquivalent ($F = G$) genau dann, wenn $F \Leftrightarrow G$ eine gültige Formel ist.

$F_1, \ldots, F_n \models G$ genau dann, wenn $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow G$ gültig.

Wichtige Äquivalenzen

Neben den aussagenlogischen Äquivalenzen gelten auch noch folgende:

$\neg\forall x\, F = \exists x\, \neg F$	Dualität von $\forall$ und $\exists$
$\neg\exists x\, F = \forall x\, \neg F$	
$\forall x\, F[x] = \forall y\, F[y]$	Umbenennung gebundener Variablen
$\exists x\, F[x] = \exists y\, F[y]$	(sofern y nicht bereits in F vorkommt)
$\forall x\, \forall y\, F = \forall y\, \forall x\, F$	Vertauschung gleichartiger Quantoren
$\exists x\, \exists y\, F = \exists y\, \exists x\, F$	
$\forall x\, (F \wedge G) = \forall x\, F \wedge \forall x\, G$	Distributivität $\forall/\wedge$
$\exists x\, (F \vee G) = \exists x\, F \vee \exists x\, G$	Distributivität $\exists/\vee$

Falls x nicht frei in F vorkommt, gilt außerdem:

$\forall x\, F = F \qquad \exists x\, F = F$

$\forall x\, (F \vee G) = F \vee \forall x\, G$	Distributivität $\forall/\vee$
$\exists x\, (F \wedge G) = F \wedge \exists x\, G$	Distributivität $\exists/\wedge$

Das Lügner-Paradoxon

Ich behaupte: „Ich lüge!“ – Sage ich die Wahrheit?

Wenn ich die Wahrheit sage, ist “Ich lüge“ richtig,
d.h., ich sage nicht die Wahrheit. – Widerspruch!

Wenn ich nicht die Wahrheit sage, ist „Ich lüge“ falsch,
d.h., ich sage die Wahrheit. – Widerspruch!

Das Kreter-Halbparadoxon

Der Kreter Epimenides behauptet: „Alle Kreter lügen!“.
Sagt Epimenides die Wahrheit?

Wenn ja, lügen alle Kreter, also auch er. – Widerspruch!

Wenn nein, ist es falsch, dass alle Kreter lügen.
Trugschluss: „Alle Kreter sagen die Wahrheit!“ (Also auch Epimenides?)
Richtig: Es gibt mindestens einen aufrichtigen Kreter. Kein Widerspruch.

Falsch: $\neg\forall = \forall\neg$ Richtig: $\neg\forall = \exists\neg$

Logische Inferenzen in der Prädikatenlogik (1)

Wie zeigen wir, dass die Regel

$$\frac{\forall x P(x)}{P(t)}$$

für beliebige Formeln P und Terme t gültig ist?

- Wir müssen also $\forall x P(x) \models P(t)$ prüfen.
- D.h. $\forall x P(x) \models_{I,\sigma} P(t)$ muss für eine beliebige Interpretation I und Variablenbelegung σ gelten.
- Wir bestimmen den Wert von t in I und σ als $v_t = \mathrm{val}_{I,\sigma}(t)$.
- $\mathrm{val}_{I,\sigma'}(\forall x P(x)) = 1$ genau dann wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma'}(P(x)) = 1$ in allen Variablenbelegungen $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$.
- Das gilt auch für $\sigma'(u) = \begin{cases} v_t & \text{wenn u die Variable x ist} \\ \sigma(u) & \text{ansonsten} \end{cases}$
- Damit gilt auch $\mathrm{val}_{I,\sigma}(P(t)) = 1$.

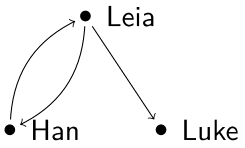
Logische Inferenzen in der Prädikatenlogik (2)

Wie zeigen wir, dass die Regel

$$\frac{\forall y \exists x\ \mathit{MedailleAn}(x, y)}{\exists x \forall y\ \mathit{MedailleAn}(x, y)}$$

nicht gültig ist?

- Wir müssen $\forall y \exists x\ \mathit{MedailleAn}(x, y) \not\models \exists x \forall y\ \mathit{MedailleAn}(x, y)$ zeigen.
- D.h. wir suchen eine Interpretation I und Variablenbelegung σ sodass $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\forall y \exists x\ \mathit{MedailleAn}(x, y)) = 1$ und $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\exists x \forall y\ \mathit{MedailleAn}(x, y)) = 0$.
- Wähle Wertebereich $\mathcal{U} = \{\mathit{han}, \mathit{luke}, \mathit{leia}\}$, $I(\mathit{MedailleAn}) = \{(\mathit{leia}, \mathit{han}), (\mathit{leia}, \mathit{luke}), (\mathit{han}, \mathit{leia})\}$ und $\sigma = \{\}$.



Logische Inferenzen in der Prädikatenlogik (2)

$\mathcal{U} = \{han, luke, leia\}$, $I(MedailleAn) = \{(leia, han), (leia, luke), (han, leia)\}$ und $\sigma = \{\}$.

- $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\forall y \exists x\ MedailleAn(x, y)) = 1$:
  Für jede Belegung von x muss es eine Belegung für y geben, sodass $I(MedailleAn)(x, y) = 1$ ist:
  $$(leia, han) \in I(MedailleAn)$$
  $$(leia, luke) \in I(MedailleAn)$$
  $$(han, leia) \in I(MedailleAn)$$
- $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\exists x \forall y\ MedailleAn(x, y)) = 0$:
  Egal wie x belegt wird, wird $\mathrm{val}_{I,\sigma'}(\forall y\ MedailleAn(x, y)) = 0$. Gegenbeispiele:
  $$(han, han) \notin I(MedailleAn)$$
  $$(luke, han) \notin I(MedailleAn)$$
  $$(leia, leia) \notin I(MedailleAn)$$

Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik

Gültigkeitsproblem

Gegeben: prädikatenlogische Formel F
Frage: Ist F gültig, d.h., gilt $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für alle I und σ?

Viele praktische Aufgaben lassen sich als Probleme der Prädikatenlogik formulieren, wie z.B.

- Verifikation von Software
- Wissensrepräsentation

Die meisten prädikatenlogischen Fragen lassen sich als Gültigkeitsproblem formulieren.

Problem: Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Das bedeutet:

- Ist die Formel gültig, lässt sich mit verschiedenen Methoden ein Beweis finden (kann allerdings beliebig lange dauern).
- Ist die Formel nicht gültig, lässt sich das mit keiner Methode zuverlässig feststellen. Beweiser terminieren in diesem Fall oft nicht.

Prädikatenlogik als Spezifikationssprache – Übersicht

Wahl der Prädikatenstelligkeit

Max liest Zeitung.

Nullstelliges Prädikat (Aussagenvariable):

$Max\_liest\_Zeitung$

Einstelliges Prädikat:

$Liest\_Zeitung(max)$

Zweistelliges Prädikat:

$Liest(max, zeitung)$

Die beste Wahl hängt von den Umständen ab.

Wähle ein eigenes Symbol für Satzteile, die öfter auftreten (können).

Zeit-, Eigenschafts- und Hauptwörter

Sokrates ist sterblich.

Möglichkeit 1: Hauptwort wird zum Prädikat.

$Sokrates\_ist(sterblich)$

Möglichkeit 2: Zeit-/Eigenschaftswort wird zum Prädikat.

$Ist\_sterblich(sokrates)$

Die zweite Möglichkeit ist fast immer die richtige.

Mache Zeitwörter bzw. Eigenschaften zu Prädikatensymbole und Hauptwörter zu ihren Argumenten.

Fürwörter (Pronomen)

Persönliche Fürwörter (ich, du, er, sie, es, ...) oder *bezügliche Fürwörter* (der, welcher, ...) vermeiden Wiederholungen und stellen Bezüge her.

Mia sieht Max, der wiederum sie sieht.

Umformung in

Mia sieht Max und Max sieht Mia.

ergibt die Formel

$$Sieht(mia, max) \wedge Sieht(max, mia)$$

Ersetze Fürwörter durch Namen. Wiederhole Satzteile, die durch Fürwörter ersetzt wurden.

Unbestimmte Fürwörter wie „nichts“ ziehen Subjekt/Objekt und Negation zusammen.

Nichts währt ewig.

Trenne Verneinung und Subjekt:

Es existiert nicht etwas, das ewig währt.

Ergibt die Formel

$\neg\exists x\ Währt\_ewig(x)$

Ich kann nichts sehen.
$\neg\exists x\ Kann\_sehen(martin, x)$

Führe Variablen für unbestimmte Fürwörter ein.
Mache Negationen explizit.

Fürwörter und Bindewörter

Vor mir ist etwas Großes, und es ist hungrig.

Die zwei Teilsätze können nicht getrennt behandelt werden: „es“ bezieht sich auf „etwas Großes“. Die entsprechende Variable muss überall dieselbe sein.

Es gibt etwas, das vor mir ist, das groß ist, und das hungrig ist.
$\exists x\,(\mathit{Befindet\_sich\_vor(x,martin)} \land \mathit{Groß}(x) \land \mathit{Hungrig}(x))$

Erstrecken sich die Bezüge von Fürwörtern über Bindewörter hinweg, behandle die Fürwörter vor den Bindewörtern.

Quantoren, Typen und Beziehungen

Jede_r Studierende ist jünger als irgendein_e Professor_in.

Verwende $\forall$-Quantoren für „alle"/„jede" und $\exists$-Quantoren für „es gibt"/„jemand"/„irgendein".

$$\forall x\, (Stud(x) \Rightarrow \exists y\, (Prof(y) \wedge Jünger(x, y)))$$

Für alle Individuen x gilt:
  Falls x ein_e Student_in ist, gibt es mindestens ein Individuum y,
    sodass y Professor_in ist und x jünger als y ist.

Quantoren in der Mathematik

Mengeneinschränkungen

- „Für alle x in der Menge M gilt $F\dots$“: $\forall x(M(x) \Rightarrow F(x))$
  „Alle geraden Zahlen sind Zahlen.“

  Funktioniert auch, wenn F eine komplexere Formel ist:
  „Alle Pokemon haben einen Typ.“
  „Für alles, was ein Pokemon ist, gibt es einen Typ, den es hat.“
  $\forall x(Pokemon(x) \Rightarrow \exists y Typ(x, y))$

- „Es gibt ein x in der Menge M, das die Eigenschaft F hat.“: $\exists x(M(x) \land F(x))$
  „Es gibt ein Pokemon, das von jemandem trainiert wird .“
  $\exists x(Pokemon(x) \land \exists y Trainiert(y, x))$

Quantoren mit unintuitiver Übersetzung

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$:
  „Alles ist P und Q gleichzeitig."
- $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))$:
  Lasst sich auch als $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$ schreiben.
  „Es gibt etwas, das kein P ist oder es ist ein Q."

Funktionssymbole

Jedes Kind ist jünger als seine Mutter.

„x ist ein Kind“ $\Rightarrow$ $\mathit{Kind}(x)$
„y ist Mutter von x“ $\Rightarrow$ $\mathit{Mutter}(y, x)$

$\forall x\, \forall y((\mathit{Kind}(x) \wedge \mathit{Mutter}(y, x)) \Rightarrow \mathit{J\ddot{u}nger}(x, y))$

Diese Formalisierung berücksichtigt nicht, dass jedes Kind *genau eine* genetische Mutter hat.

Besser: Fasse „Mutter“ als Funktion auf, die jedem Kind seine eindeutig bestimmte Mutter zuordnet.

„Mutter von x“ $\Rightarrow$ $\mathit{mutter}(x)$

$\forall x\, (\mathit{Kind}(x) \Rightarrow \mathit{J\ddot{u}nger}(x, \mathit{mutter}(x)))$

Alternierende Quantoren

Vergleichen Sie:

$\forall x\, \exists y\, \mathit{Mutter}(y, x)$	$\exists y\, \forall x\, \mathit{Mutter}(y, x)$
„Jeder hat eine Mutter."	„Jemand ist die Mutter von allen."
y hängt vom gewählten x ab.	y ist unabhängig vom gewählten x.

Vertauschung unterschiedlicher Quantoren ändert die Bedeutung!

Quantoren und Eigenschaften

Alle vernünftigen Leute verabscheuen Gewalt.

$\forall$ vernünftige x (x verabscheut Gewalt) (Zwischenschritt, ist keine Formel!)

$\forall x\,(\mathit{Vernünftig}(x) \Rightarrow \mathit{Verabscheut}(x, \mathit{gewalt}))$

Eigenschaften $\forall$-quantifizierter Variablen werden zu Prämissen einer Implikation.

Manche vernünftige Leute verabscheuen Gewalt.
Es gibt vernünftige Leute, die Gewalt verabscheuen.

$\exists$ vernünftige x (x verabscheut Gewalt) (Zwischenschritt, ist keine Formel!)

$\exists x\,(\mathit{Vernünftig}(x) \wedge \mathit{Verabscheut}(x, \mathit{gewalt}))$

Eigenschaften $\exists$-quantifizierter Variablen werden zu Teilen einer Konjunktion.

Beispiel: Sport

$\mathcal{P} = \{Mensch/1, Sportart/1, Anstrengend/1, Betreibt/2\}$
$\mathcal{F} = \{handball/0, laufen/0\}$

Alle Menschen betreiben eine anstrengende Sportart.

Zu jedem Menschen x gibt es eine Sportart,
die anstrengend ist und von x betrieben wird.

Zu jedem Menschen x gibt es eine Sportart y,
sodass y anstrengend ist und x y betreibt.

„Zu jedem Menschen x …“ $\forall x(Mensch(x) \Rightarrow \cdots)$
„Es gibt eine Sportart y …“ $\exists y(Sportart(y) \wedge \cdots)$
„y ist anstrengend und x betreibt y“ $Anstrengend(y) \wedge Betreibt(x, y)$

$\forall x(Mensch(x) \Rightarrow \exists y(Sportart(y) \wedge Anstrengend(y) \wedge Betreibt(x, y)))$
$\forall x \exists y(Mensch(x) \Rightarrow (Sportart(y) \wedge Anstrengend(y) \wedge Betreibt(x, y)))$

Beispiel: Sport

$\mathcal{P} = \{Mensch/1, Sportart/1, Anstrengend/1, Betreibt/2\}$
$\mathcal{F} = \{handball/0, laufen/0\}$

Es gibt anstrengende Menschen, die Handball und Laufen betreiben.

Es gibt (mindestens) einen Menschen x,
der anstrengend ist, Handball betreibt und Laufen betreibt.

Es gibt (mindestens) einen Menschen x,
sodass x anstrengend ist, x Handball betreibt und x Laufen betreibt.

„Es gibt einen Menschen x“	$\exists x(Mensch(x) \wedge \cdots)$
„x ist anstrengend“	$Anstrengend(x)$
„x betreibt Handball“	$Betreibt(x, handball)$
„x betreibt Laufen“	$Betreibt(x, laufen)$

$$\exists x(Mensch(x) \wedge Anstrengend(x) \wedge Betreibt(x, handball) \wedge Betreibt(x, laufen))$$

Quiz: Formeln für natürlichsprachige Formulierungen

Was sind mögliche Formeln für die folgenden Aussagen?

- „Pikachu ist ein Pokemon."
- „Feuer ist effektiv gegen alles."
- „Jedes Pokemon hat eine_n Trainer_in."
- „Es gibt ein Pokemon, das von allen trainiert wird."
- „Alle trainieren ein Pokemon, das effektiv gegen ein anderes ist."

Lösung

Was sind mögliche Formeln für die folgenden Aussagen?

- „Pikachu ist ein Pokemon."
  $Pokemon(pikachu)$
- „Feuer ist effektiv gegen alles."
  $\forall x Effektiv(feuer, x)$
- „Jedes Pokemon hat eine_n Trainer_in."
  $\forall x Pokemon(x) \Rightarrow \exists y Trainiert(y, x)$
- „Es gibt ein Pokemon, das von allen trainiert wird."
  $\exists x Pokemon(x) \land \forall y Trainiert(y, x)$
- „Alle trainieren ein Pokemon, dessen Typ effektiv gegen den eines anderen ist."
  $\forall x \exists y \exists z \exists u \exists v (Trainiert(x, y) \land Pokemon(y) \land Pokemon(z) \land Typ(y, u) \land Typ(z, v) \land Effektiv(u, v))$

Quiz: Formeln in natürlicher Sprache ausdrücken

Was sind mögliche Übersetzungen der folgenden Formeln?

- $\neg\exists x\,Trainiert(pikachu, x)$
- $\forall x \neg Effektiv(x, x)$
- $\forall x \exists y (Trainiert(x, y) \lor Trainiert(y, x))$
- $\forall x Pokemon(x) \Rightarrow \exists y\, Typ(x, y)$

Lösung

Was sind mögliche Übersetzungen der folgenden Formeln?

- $\neg\exists x \mathit{Trainiert}(\mathit{pikachu}, x)$
  „Pikachu trainiert niemanden."
- $\forall x \neg \mathit{Effektiv}(x, x)$
  „Nichts ist gegen sich selbst effektiv."
- $\forall x \exists y (\mathit{Trainiert}(x, y) \vee \mathit{Trainiert}(y, x))$
  „Alles trainiert oder wird trainiert."
- $\exists y \forall x \mathit{Pokemon}(x) \Rightarrow \mathit{Typ}(x, y)$
  „Alle Pokemon haben denselben Typ."

Fooling people

„You can fool some of the people all of the time,
and all of the people some of the time,
but you cannot fool all of the people all of the time.“

(zugeschrieben Abraham Lincoln, 16. Präsident der USA, 1809–1865)

$\mathit{FoolAt}(x, y)$	... you can fool x at time y
$\mathit{Person}(x)$	... x is a person / x is one of the people
$\mathit{PointInTime}(y)$	... y is a point in time

$$\begin{aligned}
&\quad\ \exists x(\mathit{Person}(x) \land \forall y(\mathit{PointInTime}(y) \Rightarrow \mathit{FoolAt}(x, y))) \\
&\land \quad \forall x(\mathit{Person}(x) \Rightarrow \exists y(\mathit{PointInTime}(y) \land \mathit{FoolAt}(x, y))) \\
&\land \neg\forall x(\mathit{Person}(x) \Rightarrow \forall y(\mathit{PointInTime}(y) \Rightarrow \mathit{FoolAt}(x, y)))
\end{aligned}$$