Kapitel 2

Quantoren

Ein **Prädikat** ist ein Satz, der Variablen enthält und der für jede Festlegung der Werte dieser Variablen zu einer Aussage wird. Beispiele für Prädikate sind:

$n \geq 5$

n ist gerade.

a ist Großmutter von b.

$n \leq k \Rightarrow n < k + 1$

Hier sind n, a und b, bzw. n und k die Variablen dieser Prädikate. Je nachdem wie die Werte der Variablen gewählt werden, kann die entstehende Aussage wahr oder falsch werden. Sei $P(n)$ das Prädikat $n \geq 5$. Dann ist z.B. die Aussage $P(2)$, also $2 \geq 5$, falsch, die Aussage $P(7)$, also $7 \geq 5$, aber wahr.

Prädikate können, genauso wie Aussagen, mit Hilfe von aussagenlogischen Verknüpfungen wie $\wedge$, $\vee$, $\neg$, ... zu neuen Prädikaten zusammengesetzt werden. So ist z.B.

$$n \geq 5 \wedge n \text{ ist gerade}$$

ein Prädikat das für alle geraden Zahlen größer gleich 5 wahr ist.

Ein **Quantor** erlaubt die Bildung eines neuen Prädikats oder einer neuen Aussage aus einem bereits bestehenden Prädikat, indem er angibt wie mit einer der Variablen zu verfahren ist. Prädikate und Quantoren sind für die Sprache der Mathematik von zentraler Bedeutung, da sie die Bildung allgemeiner Aussagen ermöglichen. Erst dadurch lassen sich viele Zusammenhänge überhaupt erst auf angemessene Weise ausdrücken. Es gibt zwei (für uns wichtige) Quantoren: den Allquantor und den Existenzquantor.

Allquantor. Der Allquantor bedeutet, dass das betrachtete Prädikat für **alle** Werte der betreffenden Variable gelten soll. So können wir mit Hilfe des Allquantors z.B. die folgende Aussage bilden:

$$\text{Für alle } n \text{ gilt } n \geq 5.$$

Eine Kurznotation für den Allquantor ist $\forall$, ein gespiegeltes A. Mit dieser kann diese Aussage als

$$\forall n \; n \geq 5$$

geschrieben werden. Eine Aussage, die mit einem Allquantor beginnt, bezeichnen wir auch als **Allaussage**.

Die Aussage $\forall n\ n \geq 5$ ist wahr genau dann wenn $n \geq 5$ für alle möglichen Werte von n wahr ist. Das ist nicht der Fall. Zwar ist z.B. $8 \geq 5$ oder $9 \geq 5$, nicht aber $3 \geq 5$. Deshalb ist die Aussage $\forall n\ n \geq 5$ falsch. Der Allquantor ist mit der Konjunktion verwandt, da die Aussage $\forall n\ P(n)$, unter der Voraussetzung dass wir für n nur natürliche Zahlen einsetzen wollen, äquivalent zur "unendlichen Aussage" $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots$ ist. Daran sehen wir auch, dass die Verwendung von Wahrheitstafeln für die Bestimmung des Wahrheitswertes einer Allaussage nicht mehr zielführend sein wird, da diese Wahrheitstafel unendlich groß sein müsste.

Existenzquantor. Der zweite wichtige Quantor ist der Existenzquantor. Wenn man auf ein Prädikat einen Existenzquantor anwendet, drückt man dadurch aus, dass das betrachtete Prädikat für (mindestens) **einen** Wert der betreffenden Variable gelten soll. So können wir z.B. die folgenden Aussage bilden:

Es gibt ein n so dass $n \geq 5$.

Die symbolische Kurznotation für den Existenzquantor ist $\exists$, ein gespiegeltes E. Mit dieser können wir die obige Aussage als

$$\exists n\ n \geq 5$$

schreiben. Eine Aussage die mit einem Existenzquantor beginnt bezeichnen wir auch als **Existenzaussage**.

Die Aussage $\exists n\ n \geq 5$ ist wahr, da es ein n gibt, so dass $n \geq 5$, z.B. ist $7 \geq 5$. Dass es mehrere solche n gibt stört hier nicht weiter. Auch wenn es viele n gibt mit $n \geq 5$, so ändert das nichts daran, dass es ein n gibt mit $n \geq 5$. Wir können uns einen Existenzquantor wie eine "unendliche Disjunktion" vorstellen. So ist die Aussage $\exists n\ P(n)$, wiederum unter der Voraussetzung, dass n eine natürliche Zahl sein soll, äquivalent zur "unendlichen Aussage" $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee \cdots$. Da $\vee$ eine inklusive Disjunktion ist bedeutet $\exists n\, P(n)$ dass es mindestens ein n gibt mit $P(n)$.

Mehrere Quantoren. Mit dem Allquantor haben wir bereits oben aus dem Prädikat $n \geq 5$ die Aussage $\forall n\ n \geq 5$ gebildet. Der Allquantor hat also die Variable n **quantifiziert** und die so erhaltene Aussage hängt also nicht mehr von der Variable n ab. Genau so können wir auch mit Prädikaten verfahren, die von mehreren Variablen abhängen. Ist z.B. $P(n, k)$ das Prädikat

$$n \leq k \Rightarrow n < k + 1$$

das von den Variablen n und k abhängt, dann können wir das neue Prädikat $Q(n)$

$$\forall k\, (n \leq k \Rightarrow n < k + 1)$$

erzeugen, das jetzt nur noch von n abhängig ist. In weiterer Folge erzeugen wir die Aussage A

$$\forall n \forall k\, (n \leq k \Rightarrow n < k + 1)$$

durch eine zweite Anwendung eines Allquantors.

Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ sind, genauso wie z.B. die Negation $\neg$, unäre Operatoren und binden dadurch stärker als binäre Operatoren. So ist z.B. $\forall x\, A \Rightarrow B$ eine Abkürzung für $(\forall x\, A) \Rightarrow B$. Soll sich der Quantor $\forall x$ auch auf B beziehen, müssen die Klammern wie in $\forall x\ (A \Rightarrow B)$ gesetzt werden. Gelegentlich wird auch ein Doppelpunkt geschrieben, um auszudrücken dass der Quantor so schwach wie möglich binden soll. Damit ist $\forall x : A \Rightarrow B$ eine andere Schreibweise für $\forall x\ (A \Rightarrow B)$.

Bei der Verwendung mehrerer Allquantoren ist die Reihenfolge irrelevant. So gilt die Äquivalenz

$$\forall n \forall k\, R(n,k) \Leftrightarrow \forall k \forall n\, R(n,k)$$

für jedes beliebige Prädikat $R(n,k)$. Analog gilt für Existenzquantoren auch

$$\exists n \exists k\, R(n,k) \Leftrightarrow \exists k \exists n\, R(n,k).$$

Diese Äquivalenzen können wir auch jederzeit als Rechenregeln anwenden.

Aber Achtung: zwei unterschiedliche Quantoren dürfen nicht vertauscht werden! So kann z.B. der Satz "*Für jeden Topf gibt es einen passenden Deckel.*" formalisiert werden als:

$$\forall T \exists D : D \text{ passt auf } T.$$

Vertauscht man diese beiden Quantoren, erhält man die Aussage

$$\exists D \forall T : D \text{ passt auf } T,$$

also: "*Es gibt einen Deckel, der auf alle Töpfe passt.*", was klarerweise nicht äquivalent ist.

Freie und gebundene Variablen. Wir haben gesehen, dass der Wahrheitswert eines Prädikats von gewissen Variablen bestimmt wird. Diese werden auch als **freie Variablen** des Prädikats bezeichnet. So sind z.B. im Prädikat $k \leq n$ die beiden Variablen k und n frei. Wir drücken das aus, indem wir für dieses Prädikat eine Kurznotation wie $P(k,n)$ verwenden, in dem die beiden freien Variablen explizit angegeben sind. Der Wahrheitswert dieses Prädikat wird also durch k und n bestimmt. Quantoren sind Operatoren, die Variablen **binden**. In dem aus $P(k,n)$ gebildeten Prädikat $\exists n\, k \leq n$ ist k frei, aber n (durch den Quantor $\exists n$) gebunden. Die Variable n wird dann als **gebundene Variable** bezeichnet. Wir verwenden dann für $\exists n\, k \leq n$ eine Kurznotation wie z.B. $Q(k)$ um auszudrücken, dass der Wahrheitswert nur noch von k abhängt.

Es gibt viele andere Operatoren in der Mathematik und der Informatik, die Variablen binden, z.B. den Summenoperator. Im arithmetischen Ausdruck $i(i+1)$ ist die Variable i frei, im Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$ ist i durch $\sum$ gebunden. Das ist analog zum Verhältnis zwischen globalen und lokalen Variablen bzw. zum Geltungsbereich (scope) einer Deklaration in Programmiersprachen. So sind etwa im Code

```
x := x + i
```

die beiden Variablen `x` und `i` frei, in

```
for i := 1 to n {
  x := x + i
}
```

ist nur noch `x` frei, `i` ist durch den Schleifenkopf gebunden.

Im Prinzip kann eine Variable auch frei und gebunden auftreten. Z.B. kommt im Prädikat

$$R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge \exists x\, x^2 = y.$$

die Variable x sowohl frei als auch gebunden vor[1]. Gebundene Variablen dürfen immer umbenannt werden. Damit ist

$$R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge \exists z\, z^2 = y.$$

eine äquivalente Definition von $R(x,y)$. In der Praxis bemüht man sich auch darum, solche Doppelverwendungen zu vermeiden, da sie oft verwirrend sind.

[1] $R(x,y)$ ist genau dann erfüllt, falls y eine Quadratzahl ist, die größer oder gleich x ist.

Die Grundmenge eines Quantors. Damit die Bedeutung eines Quantors eindeutig festgelegt ist, muss klar sein, über welche Menge von Objekten er quantifiziert. Diese Menge nennt man auch **Grundmenge** eines Quantors. So ist zum Beispiel die Aussage $\exists x\,(1 < x \land x < 2)$ wahr, wenn die Grundmenge von $\exists x$ die Menge der rationalen Zahlen ist und falsch, wenn die Grundmenge von $\exists x$ die Menge der ganzen Zahlen ist. Falls die Grundmenge nicht aus dem Kontext heraus ersichtlich ist, dann wird sie explizit angegeben wie z.B. in $\exists x \in \mathbb{Q}\,(1 < x \land x < 2)$ bzw. $\exists x \in \mathbb{Z}\,(1 < x \land x < 2)$.

Ein weiteres gebräuchliches Mittel zur Angabe der Grundmenge eines Quantors ist die Verwendung gewisser Buchstaben für gewisse Arten von Objekten, z.B. steht n oft für eine natürliche Zahl, x für eine reelle Zahl und z für eine komplexe Zahl. Damit ist dann z.B. $\forall n\, P(n)$ eine Abkürzung für $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$. Für diese Abkürzung gilt, so wie für Abkürzungen im Allgemeinen: drücken Sie sich so knapp wie möglich aus aber nicht knapper. Wenn die Gefahr von Missverständnissen besteht, schreiben Sie lieber ausführlicher und verzichten Sie auf Abkürzungen.

Formeln, die sich dieser Notationen bedienen, können auch ohne sie geschrieben werden:

$$\begin{array}{rll} \forall m \in \mathbb{Z}\ P(m) & \text{steht für} & \forall m\,(m \in \mathbb{Z} \Rightarrow P(m)) \\ \exists m \in \mathbb{Z}\ P(m) & \text{steht für} & \exists m\,(m \in \mathbb{Z} \land P(m)) \\ \forall n \geq 1\ P(n) & \text{steht für} & \forall n\,(n \geq 1 \Rightarrow P(n)) \end{array}$$

wobei die Grundmenge der Quantoren auf der rechten Seite alle erwähnten Mengen inkludieren muss. Analoges gilt natürlich auch für Notationen wie z.B. $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$ oder $\forall x > 0\ P(x)$, ...

Warnung 2.1. Verwechseln Sie nicht $\forall m\,(m \in \mathbb{Z} \Rightarrow P(m))$ mit $\forall m\,(m \in \mathbb{Z} \land P(m))$. Ersteres bedeutet "Alle ganzen Zahlen erfüllen P.". Zweiteres bedeutet "Für alle m gilt: $m \in \mathbb{Z}$ und m erfüllt P." und ist in dieser Form fast nie sinnvoll. Eine analoge Warnung gilt für $\exists m\,(m \in \mathbb{Z} \land P(m))$ und $\exists m\,(m \in \mathbb{Z} \Rightarrow P(m))$. Die erste Form kommt häufig vor und bedeutet "Es gibt eine ganze Zahl, die P erfüllt.". Zweiteres ist äquivalent zu $\exists m\,(m \notin \mathbb{Z} \lor P(m))$ und bedeutet also: "Es gibt ein m, das keine ganze Zahl ist oder P erfüllt.". Das ist ebenfalls fast nie sinnvoll.

Prädikatenlogik und natürliche Sprache. Das Teilgebiet der Logik, das sich mit Aussagen beschäftigt, die aus den aussagenlogischen Operationen und den Quantoren aufgebaut sind, bezeichnet man als **Prädikatenlogik**. Einen aus diesen Operationen bestehenden Ausdruck bezeichnet man als **prädikatenlogische Formel**. Dabei müssen die Quantoren nicht immer am Anfang stehen. Wir dürfen, wie z.B. in

$$\forall x \exists y\,(x \leq y \land \exists z\, z^2 = y)$$

aussagenlogische Operationen und Quantoren beliebig ineinander verschachteln. Im Prinzip lassen sich alle mathematischen Aussagen als prädikatenlogische Formeln ausdrücken. In der Praxis verwendet man aber aus Gründen der Lesbarkeit häufig die natürliche Sprache. Bei der Übertragung von Aussagen aus der natürlichen Sprache in die Prädikatenlogik muss man sorgfältig vorgehen. Wir wollen dazu ein Beispiel betrachten. Es seien die folgenden atomaren Prädikate gegeben:

$$\begin{array}{rl} G(x,y) & x \text{ und } y \text{ sind Geschwister} \\ W(x) & x \text{ ist weiblich} \\ L(x,y) & x \text{ lebt in } y \end{array}$$

Damit können wir z.B. die folgenden Übersetzungen deutscher Sätze in die Prädikatenlogik vornehmen. Die Grundmenge der Quantoren soll dabei die Menge aller Menschen sein.

$$\begin{array}{rl} \text{Anna hat eine Schwester in Graz.} & \exists x\ (G(\text{Anna}, x) \land W(x) \land L(x, \text{Graz})) \\ \text{Die Geschwister von Bernhard leben in Wien.} & \forall x\ (G(\text{Bernhard}, x) \Rightarrow L(x, \text{Wien})) \\ \text{Caro hat keine Geschwister.} & \neg\exists x\, G(\text{Caro}, x) \end{array}$$

Warnung 2.2. Prädikate können nicht verschachtelt werden. Ausdrücke wie etwa $G(W(x), y)$ ergeben keinen Sinn, da $W(x)$ ja entweder wahr oder falsch ist und damit $G(W(x), y)$ etwas bedeuten würde wie "falsch und y sind Geschwister" oder "wahr und y sind Geschwister".

Verneinung. Für die Verneinung von quantifizierten Aussagen gelten Rechenregeln, die zu den Regeln von de Morgan analog sind. So gilt für die Verneinung des Allquantors:

$$\neg\forall n\, P(n) \Leftrightarrow \exists n\, \neg P(n).$$

Die Gültigkeit dieser Äquivalenz können wir so einsehen: wenn es nicht so ist, dass für alle n die Aussage $P(n)$ gilt, dann muss es ein n geben, für das $P(n)$ nicht gilt. Und umgekehrt: wenn es ein n gibt, für das $P(n)$ nicht gilt, dann ist es nicht so, dass $P(n)$ für alle n gilt.

Symmetrisch dazu gilt auch

$$\neg\exists n\, Q(n) \Leftrightarrow \forall n\, \neg Q(n)$$

was wir genauso wie oben begründen können, oder, alternativ, durch die folgende Kette von Äquivalenzen

$$\neg\exists n\, Q(n) \Leftrightarrow \neg\exists n \neg\neg Q(n) \Leftrightarrow \neg\neg\forall n \neg Q(n) \Leftrightarrow \forall n \neg Q(n)$$

in der wir im 1. und 3. Schritt die Rechenregel $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ der Aussagenlogik benutzen und im 2. Schritt die obige Äquivalenz $\neg\forall n\, P(n) \Leftrightarrow \exists n\, \neg P(n)$.

Eindeutige Existenz. Manchmal will man auch ausdrücken, dass es genau ein Objekt gibt, das ein gewisses Prädikat erfüllt. Dafür kann man den eindeutigen Existenzquantor, dessen symbolische Notation $\exists!$ ist, benutzen. Die Aussage $\exists! n\ P(n)$ bedeutet dann, dass es genau ein n gibt, so dass $P(n)$ wahr ist. So ist z.B. $\exists! n\ 2 + n = 5$ wahr, aber $\exists! n\ n \geq 5$ ist falsch (wiederum unter der Voraussetzung dass n für eine natürliche Zahl steht). Der eindeutige Existenzquantor $\exists!$ kann durch $\forall$ und $\exists$ wie folgt definiert werden:

$$\exists! x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\, \big(P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \Rightarrow y = x)\big)$$

Die Verneinung des eindeutigen Existenzquantors $\exists! n\, P(n)$ ist etwas komplizierter: $\neg\exists! n\, P(n)$ ist äquivalent zu: es gibt kein n mit $P(n)$ oder es gibt zwei verschiedene n mit $P(n)$. In symbolischer Notation ist das:

$$\neg\exists! x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x\, \neg P(x)) \vee (\exists x_1 \exists x_2 : x_1 \neq x_2 \wedge P(x_1) \wedge P(x_2))$$

Das Wichtigste in Kürze.

- Ein Prädikat ist ein Satz, der Variablen enthält und der für jede Festlegung der Werte dieser Variablen zu einer Aussage wird.
- Prädikate können durch aussagenlogische Verknüpfungen sowie durch den Allquantor $\forall$ und den Existenzquantor $\exists$ zu neuen Prädikaten und Aussagen zusammengesetzt werden.
- Ein Quantor bindet eine vormals freie Variable. Ein durch Quantifizierung erhaltenes Prädikat hat also eine freie Variable weniger als das Ausgangsprädikat. Ein Prädikat ohne freie Variablen ist eine Aussage.
- Für jeden Quantor ist, entweder aus dem Kontext oder durch die Verwendung entsprechender Notation, eindeutig festgelegt, über welche Grundmenge er quantifiziert.