Kapitel 1

Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem man einen objektiven Wahrheitswert zuweisen kann, der entweder *wahr* oder *falsch* ist. Wir identifizieren den Wahrheitswert *wahr* mit der Zahl 1 und *falsch* mit 0. Einige Beispiele von Aussagen und ihren Wahrheitswerten sind:

Aussage	Wahrheitswert
Wale sind Säugetiere.	1
$2+2=4$	1
10 *ist eine Primzahl.*	0
4 *ist größer als* 3.	1

Bei einer Aussage muss es sich also um einen ganzen Satz, z.B. der deutschen Sprache, handeln. So ist etwa "*Zwei plus zwei ist fünf.*" eine Aussage, "*zwei plus zwei*" aber nicht.

"*Hoffentlich regnet es bald.*" oder "*Lesen Sie das Skriptum.*" sind zwar Sätze der deutschen Sprache, aber keine Aussagen in unserem Sinn da ihnen kein Wahrheitswert zugewiesen werden kann.

Ein weiteres wichtiges Element dieser Definition ist die Objektivität. Es gibt zwar viele interessante Aussagen denen kein objektiver Wahrheitswert zugewiesen werden kann, wie z.B. "*Avocado schmeckt gut.*", aber solche Aussagen sind nicht Gegenstand der Mathematik und deshalb schließen wir sie hier aus.

Weiters ist es für die Frage ob ein Satz eine Aussage ist unerheblich ob der Wahrheitswert bekannt ist. So ist z.B. auch der folgende Satz eine Aussage

"*Jede gerade Zahl die größer gleich* 4 *ist kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.*"

Diese Aussage ist auch als Goldbachsche Vermutung bekannt. Es ist in der Mathematik nicht bekannt ob diese Aussage wahr oder falsch ist. Eine Aussage ist es trotzdem weil ihr ein objektiver Wahrheitswert zugewiesen werden kann, auch wenn niemand weiß welcher es ist.

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten um Aussagen zu verknüpfen und daraus neue Aussagen zu erhalten.

Konjunktion (und-Verknüpfung). Falls A und B Aussagen[1] sind, so ist auch $A \wedge B$ (ausgesprochen als "A und B") eine Aussage. Wir sagen auch dass $A \wedge B$ die Konjunktion von A und B ist und dass die Aussagen A und B die Konjunkte von $A \wedge B$ sind. Die Aussage $A \wedge B$ ist wahr genau dann

[1] In der Mathematik verwendet man gerne Buchstaben die daran erinnern wofür sie stehen, z.B. $A, B, \ldots$ für Aussagen weil das Wort "Aussage" mit einem A beginnt.

wenn sowohl A wahr ist als auch B wahr ist. Die Bedeutung der Konjunktion kann durch die folgende **Wahrheitstafel** definiert werden. Auf der linken Seite werden alle (vier) Möglichkeiten für die Wahrheitswerte von A und B eingetragen. Auf der rechten Seite wird, für jede dieser Möglichkeiten, der Wahrheitswert von $A \wedge B$ eingetragen.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Warnung 1.1. Das Symbol $\wedge$ darf nicht auf naive Weise als Abkürzung des Wortes "und" benutzt werden. So kann z.B. die Aussage "*x und y sind größer als* 0" nicht geschrieben werden als $x \wedge y > 0$ da $x \wedge y$ keine Zahl ist. Richtig ist stattdessen: $x > 0 \wedge y > 0$. Ähnliches gilt für die im Weiteren vorgestellten Verknüpfungen auch.

Disjunktion (oder-Verknüpfung). Falls A und B Aussagen sind, so ist auch $A \vee B$ (ausgesprochen als "A oder B") eine Aussage[2]. Die Aussage $A \vee B$ heißt Disjunktion von A und B und die Aussagen A und B heißen Disjunkte von $A \vee B$. Die Aussage $A \vee B$ ist wahr genau dann wenn A wahr, wenn B wahr ist oder wenn sowohl A als auch B wahr sind. Durch eine Wahrheitstafel kann das wie folgt dargestellt werden:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Es handelt sich dabei also um eine inklusive Disjunktion, d.h. falls beide Disjunkte wahr sind ist auch die Disjunktion wahr. Bei einer exklusive Disjunktion wäre in diesem Fall die Disjunktion falsch. In der Alltagssprache wird das Wort "oder" sowohl für inklusive als auch für exklusive Disjunktion verwendet wie der folgende Dialog veranschaulicht:

> *Kellner: Wollen Sie Kaffee oder Tee? (exklusives oder)*
>
> *Gast: Kaffee bitte.*
>
> *Kellner: Wollen Sie Zucker oder Milch dazu? (inklusives oder)*
>
> *Gast: Beides, danke.*

In der Mathematik werden wir mit "oder" immer das inklusive oder meinen.

Negation (Verneinung). Falls A eine Aussage ist, dann ist auch $\neg A$ (ausgesprochen als "nicht A") eine Aussage. Die Aussage $\neg A$ heißt auch Negation oder Verneinung von A und ist wahr wenn A falsch ist und umgekehrt, siehe folgende Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
0	1
1	0

[2] Das Symbol $\vee$ kommt vom lateinischen Wort *vel* (oder).

Die Verneinung wird dabei in einem streng logischen Sinn verstanden. Sei z.B. A die Aussage "*Die Wand ist weiß*". Dann ist die Verneinung $\neg A$ von A die Aussage "*Die Wand ist nicht weiß*", nicht aber die Aussage "*Die Wand ist schwarz*". Die Verneinung ist also nicht dasselbe wie das Gegenteil.

Implikation. Sind A und B Aussagen, dann ist auch $A \Rightarrow B$ (ausgesprochen als "A impliziert B", "wenn A dann B, "aus A folgt B", ...) eine Aussage. Ein Beispiel für eine Implikation ist die Aussage "*Falls es regnet, dann ist die Straße nass.*" Man beachte dass die Implikation (anders als Konjunktion und Disjunktion) nicht kommutativ ist, d.h. $A \Rightarrow B$ hat eine andere Bedeutung als $B \Rightarrow A$. Falls die Straße nass ist, bedeutet das nicht dass es regnet; sie könnte auch gerade gewaschen worden sein. Die Interpretation von Implikationen wird durch die folgende Wahrheitstafel definiert.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Falls also A wahr ist, dann hat $A \Rightarrow B$ den Wahrheitswert von B. Falls A falsch ist dann ist es egal was rechts steht, $A \Rightarrow B$ hat immer den Wahrheitswert wahr. Man beachte dass dadurch $A \Rightarrow B$ auch wahr ist wenn sowohl A als auch B falsch sind. Z.B. ist die Aussage "*Falls der Mond aus Käse ist, dann ist* $2+2=5$." wahr. Das ist etwas unintuitiv, da das Material des Mondes nichts mit den Wert von $2+2$ zu tun hat. In der Mathematik spielt dieses Phänomen aber praktisch keine Rolle da man typischerweise solche Implikationen betrachtet wo 1. die Voraussetzung etwas mit der Folgerung zu tun hat und 2. die Voraussetzung wahr ist.

Äquivalenz. Die letzte Verknüpfung von Aussagen die wir betrachten wollen ist die logische Äquivalenz. Sind A und B Aussagen so ist auch $A \Leftrightarrow B$ (ausgesprochen als "A genau dann wenn B" oder "A dann und nur dann wenn B") eine Aussage. Die Wahrheitstafel für die Äquivalenz ist:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Formeln. Eine Aussage kann also durch die **Konnektive** $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ aus einfacheren Aussagen zusammengesetzt werden. Diese bezeichnet man auch als **atomare Aussagen** der zusammengesetzten Aussage. So sind z.B. A und B die atomaren Aussagen der zusammengesetzten Aussage $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$. Wie Sie es vom Rechnen mit Zahlen gewöhnt sind gibt es auch hier Klammersetzungsregeln: am stärksten bindet die Negation $\neg$, dann kommen die "Punktrechnungen" $\wedge$ und $\vee$ vor den "Strichrechnungen" $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Damit kann die obige Aussage auch geschrieben werden als $\neg A \vee B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ oder als $((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.

Ist der Wahrheitswert der atomaren Aussagen bekannt so kann daraus der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage berechnet werden. Damit können auch für komplexere zusammengesetzte Aussagen Wahrheitstafeln erstellt werden. Ein Beispiel für eine Wahrheitstafel ist:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Beim Erstellen einer Wahrheitstafel ist es oft praktisch auch die Wahrheitswerte von Teilaussagen als Zwischenergebnisse zu berechnen (wie das hier für z.B. für $\neg A \vee B$ gemacht wurde).

Eine Aussage heißt **erfüllbar** wenn es eine Wahrheitswertbelegung ihrer atomaren Aussagen gibt die sie wahr macht, d.h. wenn es eine Zeile in der Wahrheitstafel gibt die 1 ergibt. Eine Aussage heißt **unerfüllbar** wenn das nicht der Fall ist, d.h. wenn alle Zeilen der Wahrheitstafel 0 ergeben. Eine Aussage heißt **gültig** wenn sie unter allen Wahrheitswertbelegungen ihrer atomaren Aussagen wahr ist, d.h. wenn alle Zeilen ihrer Wahrheitstafel 1 ergeben. So ist etwa im obigen Beispiel die Aussage $A \Rightarrow B$ erfüllbar und die Aussage $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ gültig.

Das Teilgebiet der Logik, das sich mit Aussagen beschäftigt die aus atomaren Aussagen durch Operationen wie diesen zusammengesetzt sind, bezeichnet man als **Aussagenlogik**. Eine zusammengesetzte Aussage bezeichnet man auch als **aussagenlogische Formel**.

Rechenregeln. Innerhalb einer zusammengesetzten Aussage kann man, wie beim Rechnen mit Gleichungen, eine Teilaussage durch eine andere äquivalente Teilaussage ersetzen ohne ihre Bedeutung zu verändern. Z.B. wissen wir aufgrund obiger Wahrheitstafel dass $\neg A \vee B$ und $A \Rightarrow B$ für alle Aussagen A und B äquivalent sind. Daraus folgt z.B. dass die Aussagen

$$F \Rightarrow ((C \wedge D) \Rightarrow E) \quad \text{und} \quad F \Rightarrow (\neg(C \wedge D) \vee E)$$

ebenfalls äquivalent sind. Für Aussagen gelten die folgenden Rechenregeln:

Kommutativität:	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
Assoziativität:	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
Idempotenz:	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	$A \vee A \Leftrightarrow A$
Distributivität:	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Regeln von de Morgan:	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
Zur Implikation:	$\neg A \vee B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
Doppelnegation:	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	

All diese Rechenregeln können durch Wahrheitstafeln bewiesen werden.

Das Wichtigste in Kürze.

- Eine Aussage ist ein Satz, dem man einen objektiven Wahrheitswert zuweisen kann, der entweder wahr oder falsch ist.

- Aussagen werden durch Verknüpfungen, wie z.B. $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, zu neuen Aussagen zusammengesetzt.

- Mit einer Wahrheitstafel kann festgestellt werden, ob eine gegebenen Aussage (un)erfüllbar oder (un)gültig ist.

- Gültige Äquivalenzen können wie Rechenregeln verwendet werden.