TU WIEN Informatics

Petri-Netze

Grundzüge digitaler Systeme (192.134)

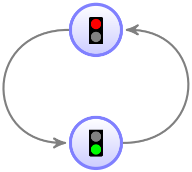
Vortrag von: Gernot Salzer

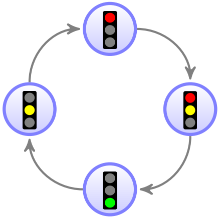
Fakultät für Informatik
TU Wien
E-Mail: gds@list.tuwien.ac.at

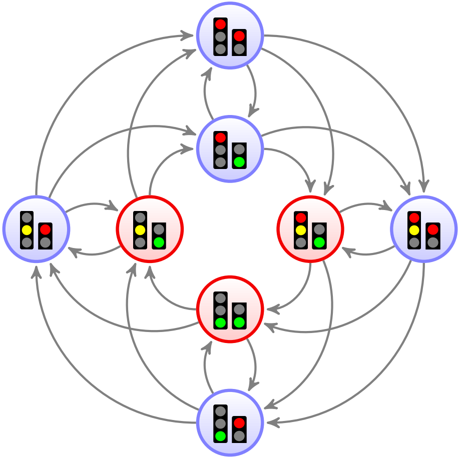
Petri-Netze – Übersicht

1. Motivation
2. Definitionen
3. Modellierung

Fußgängerkreuzung als endlicher Automat



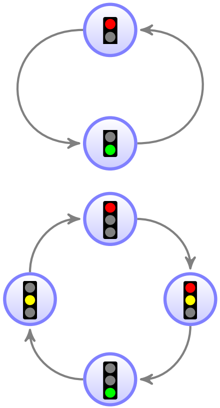


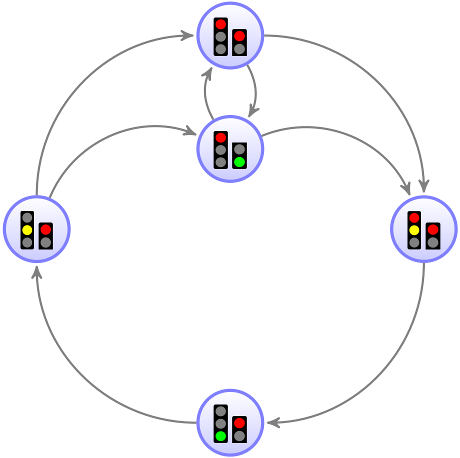


Modellierung des Gesamtsystems durch einen Produktautomaten:

- Bilde alle Kombinationszustände.
- Übergange dort, wo die ursprünglichen Automaten welche hatten.

Fußgängerkreuzung als endlicher Automat





Modellierung des Gesamtsystems durch einen Produktautomaten:

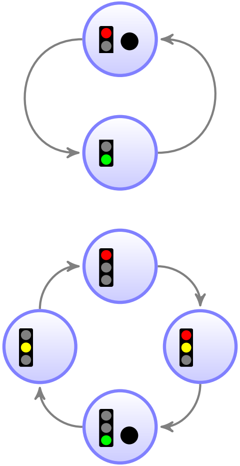
- Bilde alle Kombinationszustände.
- Übergange dort, wo die ursprünglichen Automaten welche hatten.
- Elimination unerwünschter Zustände und Übergänge.

Endliche Automaten ungeeignet für Modellierung verteilter Systeme:

- Anzahl der Kombinationszustände steigt exponentiell mit der Zahl der Komponenten.
- Anzahl der Übergänge steigt exponentiell.
- Es ist schwierig, Änderungen einer Komponente in den Gesamtautomaten zu übertragen.
- Endliche Automaten mit *einem* aktiven Zustand entsprechen nicht der Idee verteilter Systeme mit *vielen* unabhängigen Abläufen nebeneinander, die nur bei Bedarf synchronisiert werden.

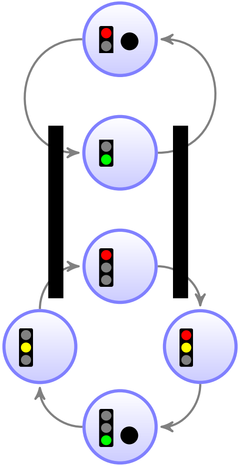
Petri-Netz = Automat mit mehreren aktiven Stellen + Synchronisation

Fußgängerkreuzung als Petri-Netz



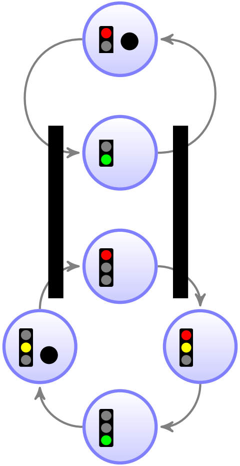
- *Marken* zeigen die aktiven Stellen an.

Fußgängerkreuzung als Petri-Netz



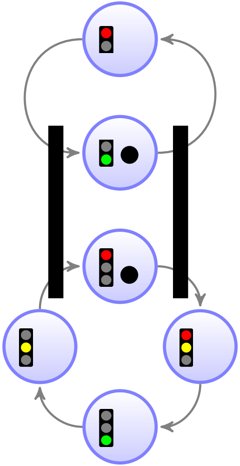
- *Marken* zeigen die aktiven Stellen an.
- *Transitionen* werden nur durchlässig („feuern“), wenn alle Eingangszustände Marken besitzen.
  Marken dürfen nur gleichzeitig weiterwandern.

Fußgängerkreuzung als Petri-Netz



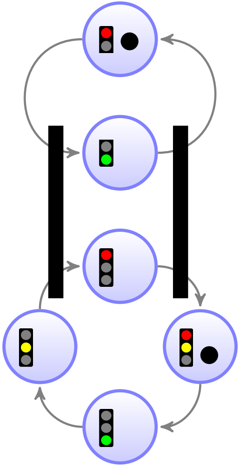
- *Marken* zeigen die aktiven Stellen an.
- *Transitionen* werden nur durchlässig („feuern“), wenn alle Eingangszustände Marken besitzen.
  Marken dürfen nur gleichzeitig weiterwandern.

Fußgängerkreuzung als Petri-Netz



- *Marken* zeigen die aktiven Stellen an.
- *Transitionen* werden nur durchlässig („feuern“), wenn alle Eingangszustände Marken besitzen.
  Marken dürfen nur gleichzeitig weiterwandern.

Fußgängerkreuzung als Petri-Netz



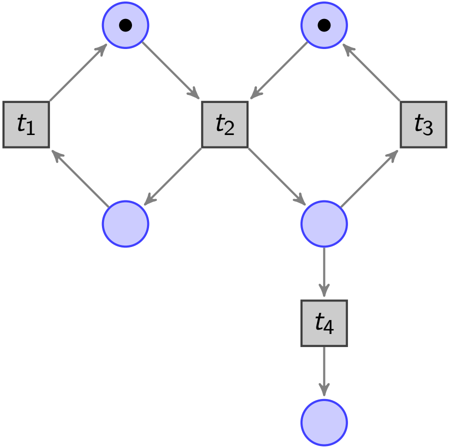
- *Marken* zeigen die aktiven Stellen an.
- *Transitionen* werden nur durchlässig („feuern“), wenn alle Eingangszustände Marken besitzen.
  Marken dürfen nur gleichzeitig weiterwandern.

Petri-Netze: Motivation

Formalismus zur Modellierung von nebenläufigen Systemen (concurrent/parallel systems).

- Bei Systemübergängen können Ressourcen konsumiert und neu erzeugt werden.
- Natürliche Modellierung der räumlichen Verteilung von Ressourcen, Nebenläufigkeit und (Zugriffs-)Konflikten.
- Intuitive graphische Darstellung.
- Weit verbreitet, z.B. Aktivitätsdiagramme (activity diagrams) in UML (Unified Modeling Language).

Petri-Netze: Motivation

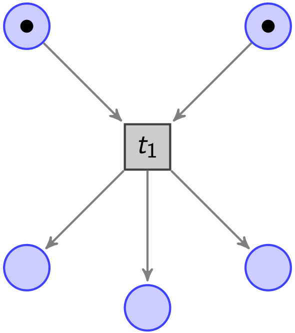


Notation:

- Stellen (dargestellt als Kreise): mögliche Plätze für Ressourcen
- Marken (dargestellt als kleine gefüllte Kreise): Ressourcen
- Transitionen (dargestellt als Rechtecke oder Balken): Systemübergänge

Petri-Netze: Motivation

Darstellung einer *Transition*:

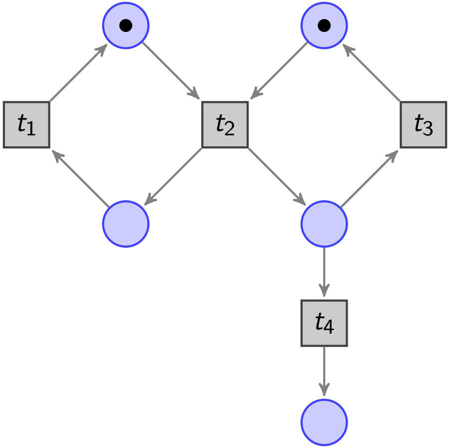


Vorbedingungen sind die Marken, die konsumiert werden

Nachbedingungen sind die Marken, die erzeugt werden

Das Entfernen der Marken der Vorbedingungen und das Erzeugen der Marken der Nachbedingungen nennt man *Schalten* bzw. *Feuern* der Transition.

Petri-Netze: Beispiel



Petri-Netze – Übersicht

Definitionen

M ... Menge der Markierungen, d.h., aller Abbildungen $S \to \mathbb{N}$

Petri-Netz

... wird beschrieben durch ein 5-Tupel $N = \langle S, T, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0 \rangle$, wobei

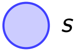
- S ... endliche Menge von Stellen
- T ... endliche Menge von Transitionen
- ${}^\bullet()\colon T \to M$ ... Vorbedingungen
- $()^\bullet\colon T \to M$ ... Nachbedingungen
- $m_0 \in M$ ... Anfangsmarkierung

$m_0 \in M$ legt fest, wieviele Marken zu Beginn in jeder Stelle liegen.

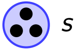
${}^\bullet t \in M$ legt fest, wieviele Marken die Transition t aus jeder Stelle entfernt.

$t^\bullet \in M$ legt fest, wieviele Marken die Transition t zu jeder Stelle hinzufügt.

Graphische Notation

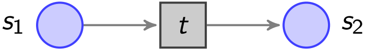
- Stellen $s \in S$: 

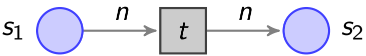
- Transitionen $t \in T$: 

- Anfangsmarkierung m_0, etwa $m_0(s) = 3$: 

- Vorbedingungen ${}^\bullet t$ und Nachbedingungen $t^\bullet$

  ${}^\bullet t(s_1) = 0,\ t^\bullet(s_2) = 0$: 

  ${}^\bullet t(s_1) = 1,\ t^\bullet(s_2) = 1$: 

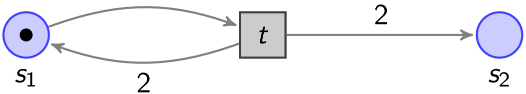
  ${}^\bullet t(s_1) = n,\ t^\bullet(s_2) = n$ für $n > 1$: 

Der Wert ${}^\bullet t(s)$ bzw. $t^\bullet(s)$ wird auch als *Gewicht* bezeichnet.

Beispiel

Petri-Netz $\langle \{s_1, s_2\}, \{t\}, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0 \rangle$ mit

$$
\begin{aligned}
{}^\bullet t &= \{s_1 \mapsto 1, s_2 \mapsto 0\} \\
t^\bullet &= \{s_1 \mapsto 2, s_2 \mapsto 2\} \\
m_0 &= \{s_1 \mapsto 1, s_2 \mapsto 0\}
\end{aligned}
$$



Schalten und Erreichbarkeit

$m, m' \in M$ ... Markierungen

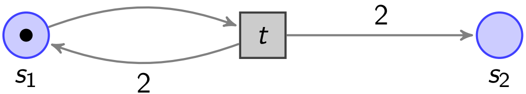
Ordnung: $m \leq m'$ falls $m(s) \leq m'(s)$ für alle $s \in S$
Addition: $m \oplus m' = m''$ falls $m''(s) = m(s) + m'(s)$ für alle $s \in S$.
Subtraktion: $m \ominus m' = m''$ falls $m''(s) = m(s) - m'(s)$ für alle $s \in S$.

- Eine Transition t ist für eine Markierung m *aktiviert*, wenn ${}^\bullet t \leq m$ gilt, d.h., wenn genug Marken vorhanden sind, um die Transition zu schalten.
- Ist die Transition t für die Markierung m aktiviert, kann t *schalten* (*feuern*). Das führt zur neuen Markierung $m' = m \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet$, symbolisch $m[t\rangle m'$.
- Eine Markierung m_n heißt *erreichbar* in einem Netz, falls es eine Folge von Transitionen $t_1, \ldots, t_n$ gibt mit $m_0[t_1\rangle m_1 \ldots m_{n-1}[t_n\rangle m_n$, wobei m_0 die Anfangsmarkierung ist.

Beispiel

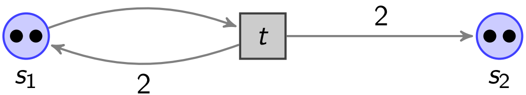
Petri-Netz $\langle \{s_1, s_2\}, \{t\}, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0 \rangle$ mit

$$\begin{aligned} {}^\bullet t &= \{s_1 \mapsto 1, s_2 \mapsto 0\} \\ t^\bullet &= \{s_1 \mapsto 2, s_2 \mapsto 2\} \\ m_0 &= \{s_1 \mapsto 1, s_2 \mapsto 0\} \end{aligned}$$



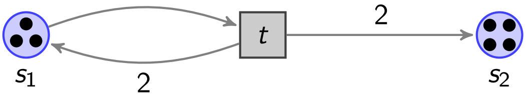
Feuern von t: $m_1 = m_0 \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet$

$$\begin{aligned} m_1(s_1) &= m_0(s_1) - {}^\bullet t(s_1) + t^\bullet(s_1) \\ &= 1 - 1 + 2 = 2 \\ m_1(s_2) &= m_0(s_2) - {}^\bullet t(s_2) + t^\bullet(s_2) \\ &= 0 - 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$



Feuern von t: $m_2 = m_1 \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet$

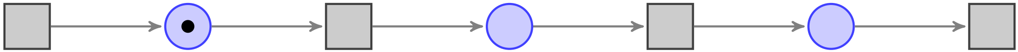
$$\begin{aligned} m_2(s_1) &= m_1(s_1) - {}^\bullet t(s_1) + t^\bullet(s_1) \\ &= 2 - 1 + 2 = 3 \\ m_2(s_2) &= m_1(s_2) - {}^\bullet t(s_2) + t^\bullet(s_2) \\ &= 2 - 0 + 2 = 4 \end{aligned}$$



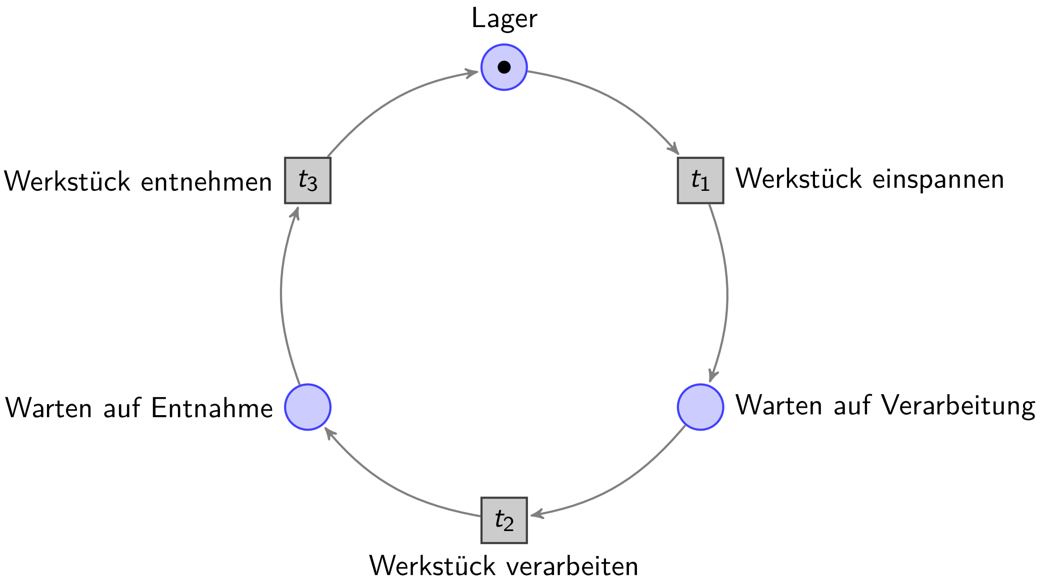
Petri-Netze – Übersicht

Modellierungsmuster: Sequentieller Ablauf

Entspricht den Zustandsübergängen bei endlichen Automaten.

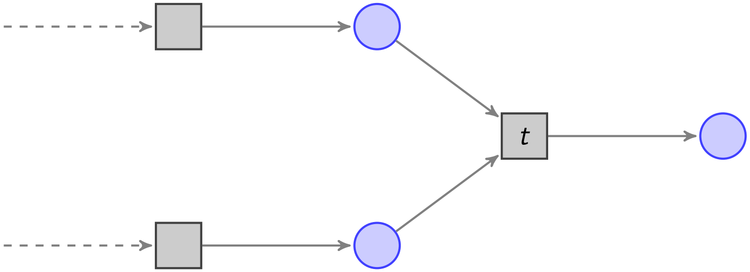


Modellierungsmuster: Zyklen



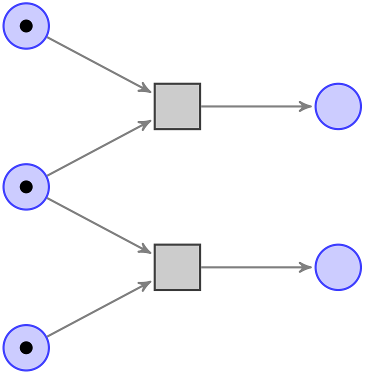
Modellierungsmuster: Abhängigkeiten, Synchronisation

Transition t kann erste feuern, wenn aus beiden Zweigen Marken vorliegen.



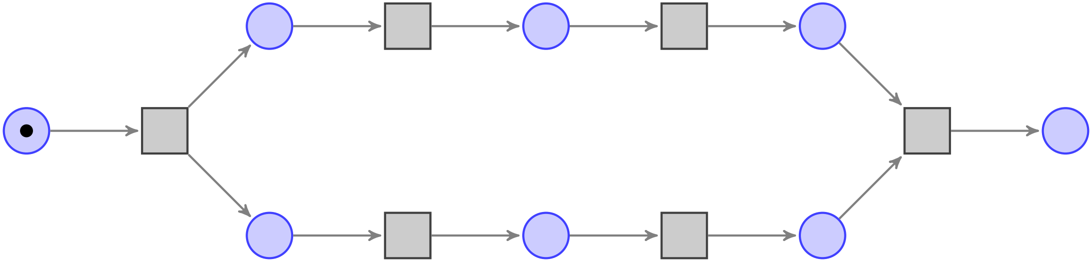
Modellierungsmuster: Entweder – oder

Nur eine der beiden Transitionen kann feuern.



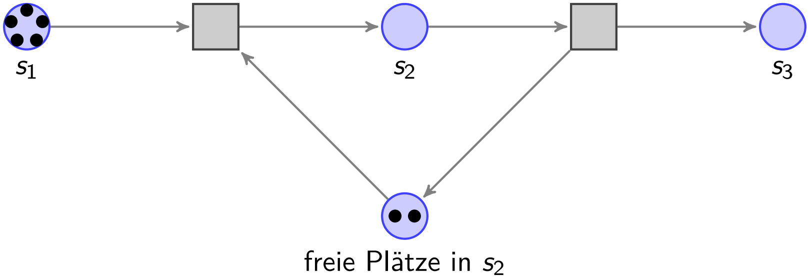
Modellierungsmuster: Parallelität, Nebenläufigkeit

Fork-Join: Zwei sequentielle Abläufe, die gleichzeitig beginnen, dann unabhängig voneinander ablaufen und zuletzt aufeinander warten.



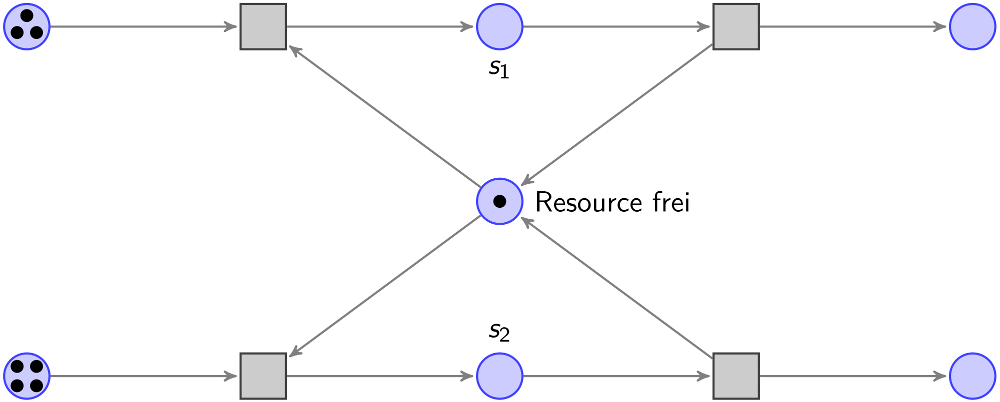
Modellierungsmuster: Markenzahl beschränken

Nicht mehr als zwei Marken in s_2 gleichzeitig möglich.



Modellierungsmuster: geteilte Ressourcen

In den Stellen s_1 und s_2 kann nicht gleichzeitig eine Marke liegen.



Beispiel: Leser-Schreiber-Problem

Leser-Schreiber-Problem

Beim Leser-Schreiber-Problem operieren n Leserprozesse und m Schreiberprozesse auf ein und derselben Datei. Damit die Dateiinhalte nicht inkonsistent werden, müssen die folgenden Bedingungen beachtet werden:

- Es können zur gleichen Zeit mehrere Leserprozesse auf die Datei zugreifen.
- Ein Schreiberprozess darf nur dann auf die Datei zugreifen, wenn gerade kein anderer Prozess (lesend oder schreibend) auf die Datei zugreift.

Modellieren Sie das Leser-Schreiber-Problem als Petri-Netz mit $n = 3$ und $m = 1$. Es können maximal 2 Leserprozesse gleichzeitig die Datei lesen.

Beispiel: Leser-Schreiber-Problem

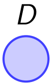
Leser-Schreiber-Problem

Beim Leser-Schreiber-Problem operieren n Leserprozesse und m Schreiberprozesse auf ein und derselben Datei. Damit die Dateiinhalte nicht inkonsistent werden, müssen die folgenden Bedingungen beachtet werden:

- Es können zur gleichen Zeit mehrere Leserprozesse auf die Datei zugreifen.
- Ein Schreiberprozess darf nur dann auf die Datei zugreifen, wenn gerade kein anderer Prozess (lesend oder schreibend) auf die Datei zugreift.

Modellieren Sie das Leser-Schreiber-Problem als Petri-Netz mit $n = 3$ und $m = 1$. Es können maximal 2 Leserprozesse gleichzeitig die Datei lesen.

Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



Beispiel: Leser-Schreiber-Problem

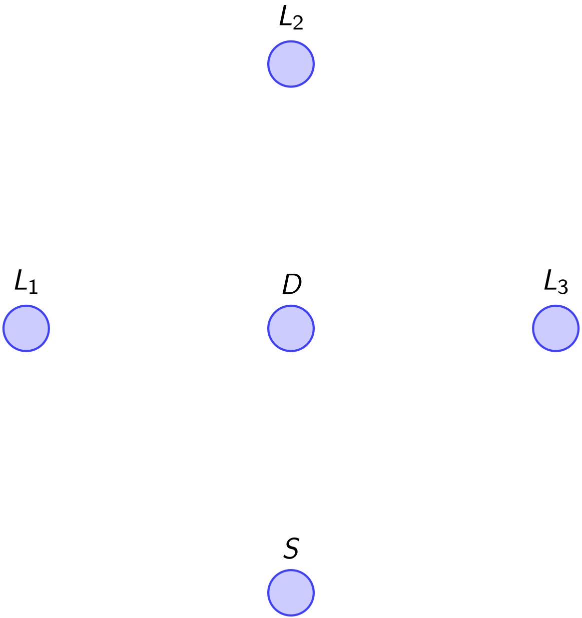
Leser-Schreiber-Problem

Beim Leser-Schreiber-Problem operieren n Leserprozesse und m Schreiberprozesse auf ein und derselben Datei. Damit die Dateiinhalte nicht inkonsistent werden, müssen die folgenden Bedingungen beachtet werden:

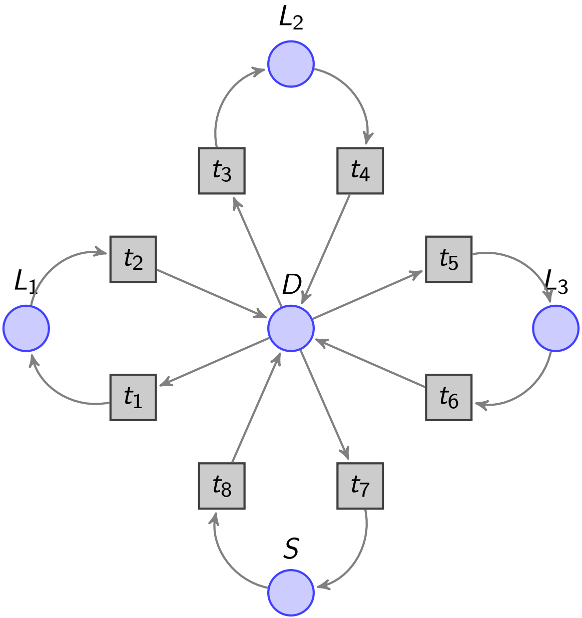
- Es können zur gleichen Zeit mehrere Leserprozesse auf die Datei zugreifen.
- Ein Schreiberprozess darf nur dann auf die Datei zugreifen, wenn gerade kein anderer Prozess (lesend oder schreibend) auf die Datei zugreift.

Modellieren Sie das Leser-Schreiber-Problem als Petri-Netz mit $n = 3$ und $m = 1$. Es können maximal 2 Leserprozesse gleichzeitig die Datei lesen.

Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



Beispiel: Leser-Schreiber-Problem

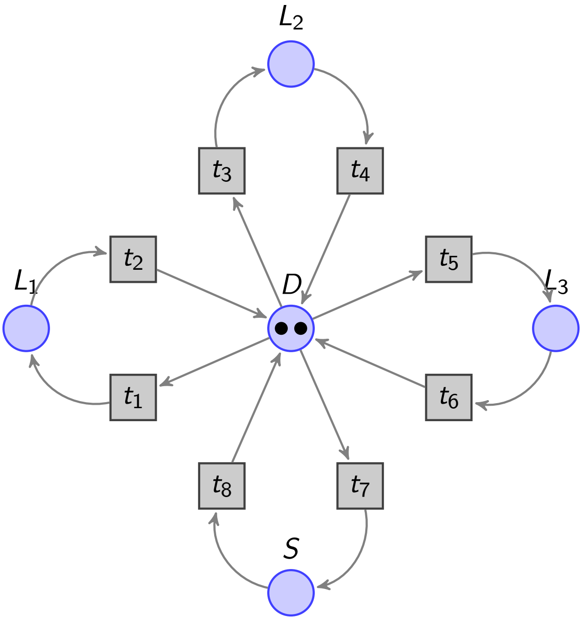
Leser-Schreiber-Problem

Beim Leser-Schreiber-Problem operieren n Leserprozesse und m Schreiberprozesse auf ein und derselben Datei. Damit die Dateiinhalte nicht inkonsistent werden, müssen die folgenden Bedingungen beachtet werden:

- Es können zur gleichen Zeit mehrere Leserprozesse auf die Datei zugreifen.
- Ein Schreiberprozess darf nur dann auf die Datei zugreifen, wenn gerade kein anderer Prozess (lesend oder schreibend) auf die Datei zugreift.

Modellieren Sie das Leser-Schreiber-Problem als Petri-Netz mit $n = 3$ und $m = 1$. Es können maximal 2 Leserprozesse gleichzeitig die Datei lesen.

Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



Beispiel: Leser-Schreiber-Problem

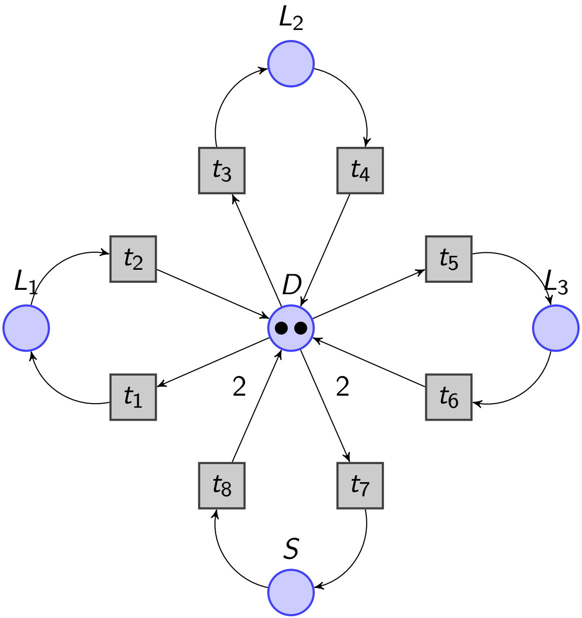
Leser-Schreiber-Problem

Beim Leser-Schreiber-Problem operieren n Leserprozesse und m Schreiberprozesse auf ein und derselben Datei. Damit die Dateiinhalte nicht inkonsistent werden, müssen die folgenden Bedingungen beachtet werden:

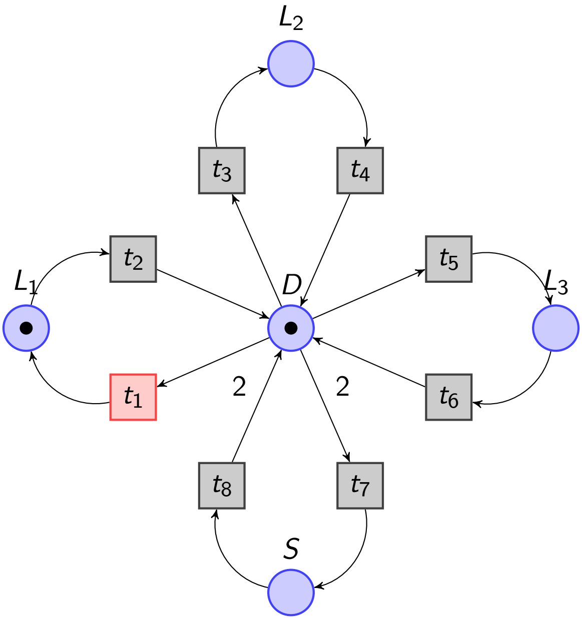
- Es können zur gleichen Zeit mehrere Leserprozesse auf die Datei zugreifen.
- Ein Schreiberprozess darf nur dann auf die Datei zugreifen, wenn gerade kein anderer Prozess (lesend oder schreibend) auf die Datei zugreift.

Modellieren Sie das Leser-Schreiber-Problem als Petri-Netz mit $n = 3$ und $m = 1$. Es können maximal 2 Leserprozesse gleichzeitig die Datei lesen.

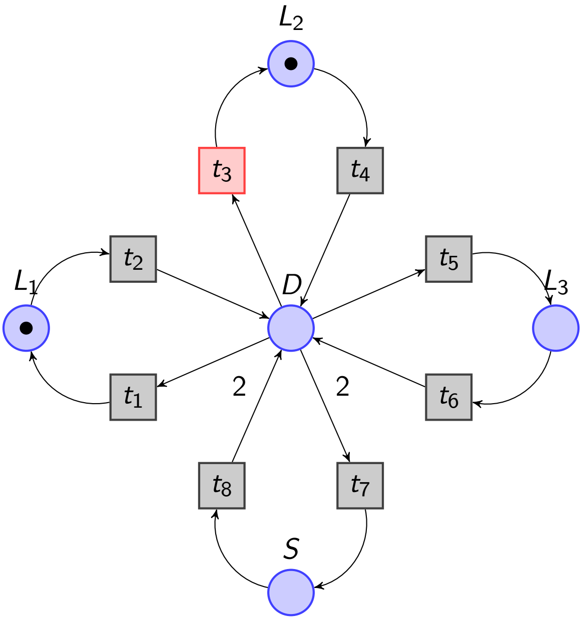
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



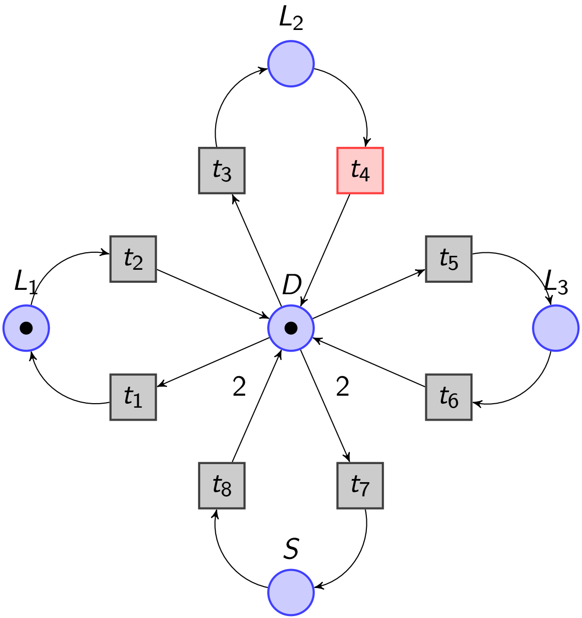
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



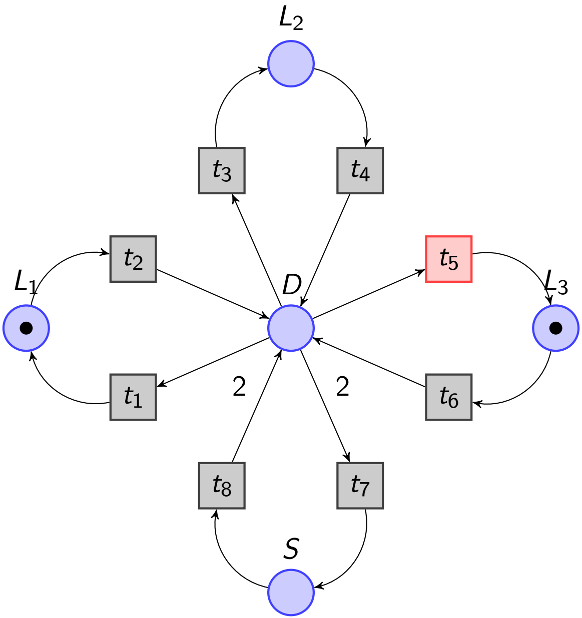
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



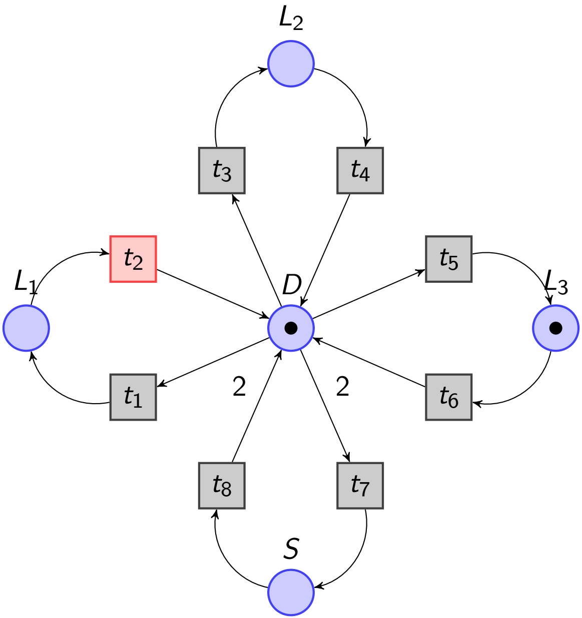
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



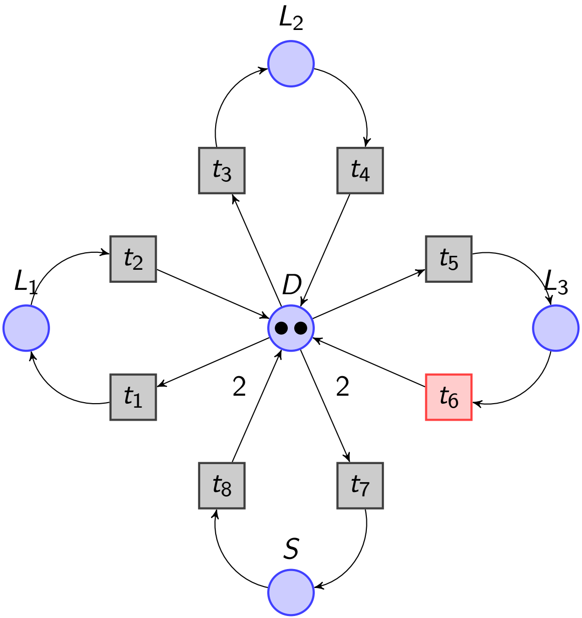
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



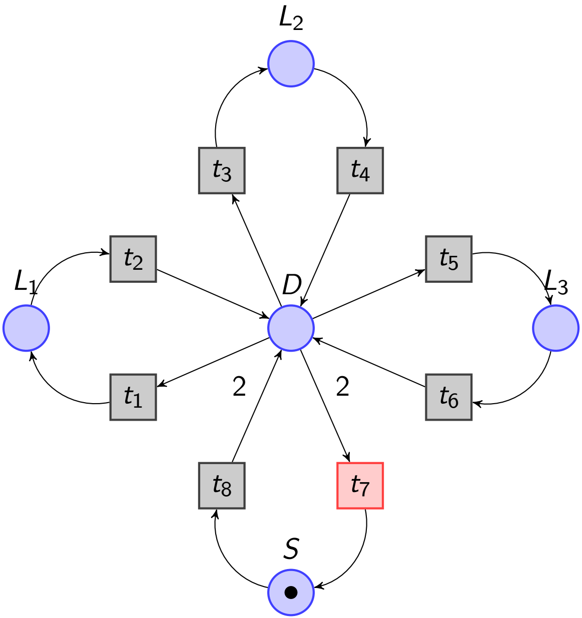
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



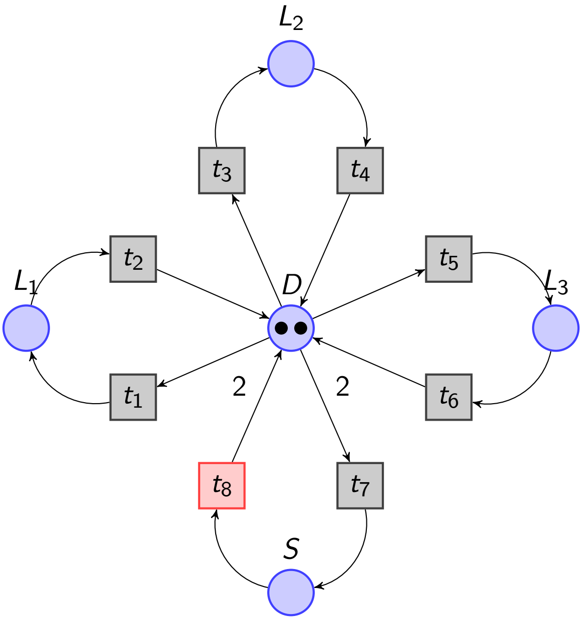
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



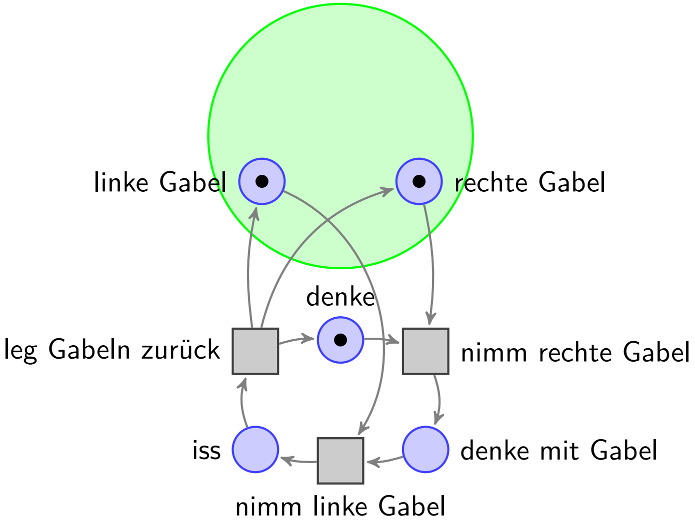
Beispiel: Leser-Schreiber-Problem



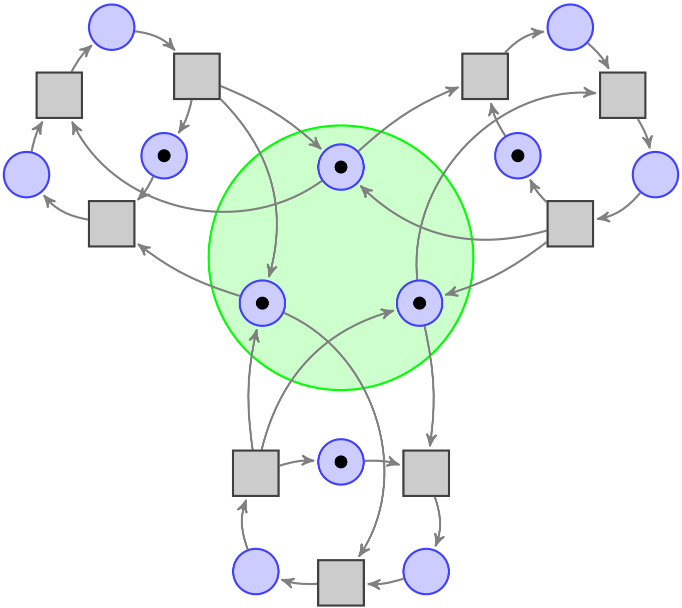
Bei den Philosophen

Tagesablauf:

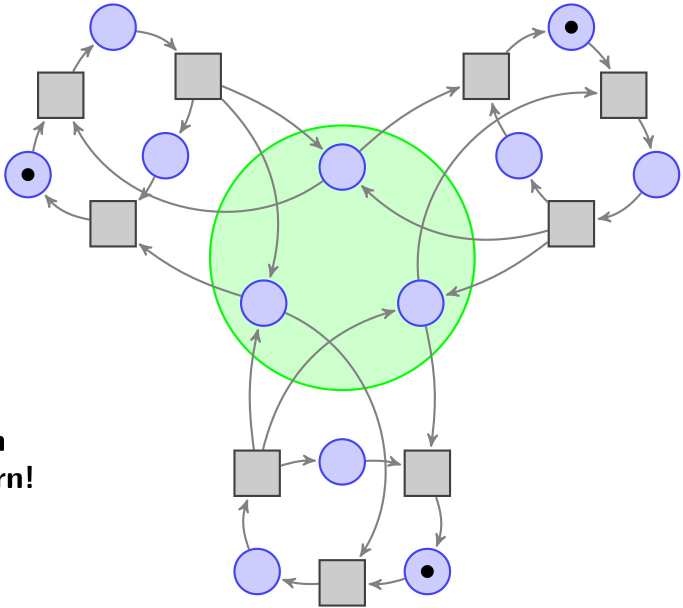
1. Denke.
2. Nimm die rechte Gabel.
3. Denke.
4. Nimm die linke Gabel.
5. Iss.
6. Leg die Gabeln zurück.
7. Beginne von vorne.



Dining Philosophers (Dijkstra, Hoare 1965)



Dining Philosophers (Dijkstra, Hoare 1965)



Deadlock:
Keine Transition kann mehr feuern!

Zusammenfassung

- Petri-Netze eigenen sich gut zur Modellierung verteilter Abläufe
- Standardmuster (geteilte Ressourcen, Parallelverarbeitung, Synchronisation) sind leicht darstellbar
- ausdrucksstärker als reguläre Automaten
- automatisierte Deadlock- und Erreichbarkeitstests