École **S**upérieure **Pri**vée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse numérique

Correction série d'exercices N°1 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Niveau : 3 A & B

Exercice 1

Partie I

1. **a)** *On a*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 32 \neq 0.$$

Alors le système (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.

b)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Étape 1 :

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$$

. Alors

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right)$$

Étape 2 :

$$L_1 \leftarrow L_1,$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2,$$

. Alors,

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Alors, $S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_3 & = & 1 \\ 4x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 4x_3 & = & -4 \end{array}\right.$ *. En utilisant la méthode de remontée on obtient :*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) a)

> **Rappel** *: Soit A une matrice à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées au système $(S) : AX = b$ sont convergentes pour tous $X^{(0)}$.*
>
> *On dit que A est à* **diagonale strictement dominante** *lorsque le module de chaque terme diagonal est supérieur strictement à la somme des modules des autres termes de sa ligne, c-à-d,* $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in [1, n].$

On a ,

$$\begin{cases} |2| > |0| + |1| \\ |4| > |2| + |-1| \\ |3| > |-1| + |1| \end{cases}$$

Ainsi A est à diagonale strictement dominante et par suite les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes pour la résolution du système (S).

2) b) *<u>Schéma itératif de la méthode de Jacobi</u> :* $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1^{(k+1)} + \quad x_3^{(k)} & = & 1 \\ 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} & = & 3 \\ -x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 3x_3^{(k+1)} & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{3 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{-4 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{3} \end{array}\right.$$

<u>Schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel</u> : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1^{(k+1)} + \quad x_3^{(k)} & = & 1 \\ 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} & = & 3 \\ -x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 3x_3^{(k+1)} & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{3 - 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{-4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{3} \end{array}\right.$$

2) c) *Pour un vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(i) *la méthode de Jacobi :*

$$X_J^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) *la méthode de Gauss-Seidel :*

$$X_{G-S}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad X_{G-S}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Partie II

3) $\underline{1^{\text{ère itération}}}$:

$$E_J^{(1)} = ||X_J^{(1)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0,5590.$$

$$E_{G-S}^{(1)} = ||X_{G-S}^{(1)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{18}} = 0,7817.$$

$\underline{2^{\text{ème itération}}}$:

$$E_J^{(2)} = ||X_J^{(2)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,3535.$$

$$E_{G-S}^{(2)} = ||X_{G-S}^{(2)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{162}} = 0,2605.$$

4) *Suite à la première itération, la méthode de Jacobi approche mieux la solution et suite à la deuxième itération, la méthode de Gauss-Seidel approche mieux la solution.*

Exercice 2

1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 - 2).$$

Pour que A soit inversible il faut et il suffit que det(A) $\neq 0$*, or det(A)* $= \alpha(\alpha^2 - 2)$*, donc A est inversible si et seulement si* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2. *Pour que la méthode de Jacobi soit convergente il suffit que A soit à diagonale strictement dominante c-â-d :*

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |\alpha| > 2 \\ |\alpha| > 1 \end{cases}$$

Donc si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$*, alors la méthode de Jacobi est convergente.*

3. *Pour* $\alpha = 3$*, alors* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Étape 1 :

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3$$

. Alors :

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Étape 2 :

$$L_1 \leftarrow L_1,$$
$$L_2 \leftarrow L_2$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{8} L_2,$$

.Alors :

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & \frac{63}{8} \end{array}\right)$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) —

- *Décomposition de Jacobi :*

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1}{3}(5 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1}{3}(10 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{1}{3}(11 - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

- *Itération de Jacobi : Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

  — *Itération 1 :* $X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5-1) \\ \frac{1}{3}(10-1-1) \\ \frac{1}{3}(11-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

  — *Itération 2 :* $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5-\frac{8}{3}) \\ \frac{1}{3}(10-\frac{4}{3}-\frac{10}{3}) \\ \frac{1}{3}(11-\frac{8}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix}$

Exercice 3

Partie I : $\theta = 1$

1. *La matrice associé à* (S_α^1) *est* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$.

   (S_α^1) *admet une unique solution ssi* $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \\ L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2/3 & 5/3 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3(\frac{2}{3}\alpha - \frac{10}{3}) = 2\alpha - 10. \end{aligned}$$

   $\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 5$.
   Conclusion : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$, *le système* (S_α^1) *admet une unique solution.*

2. *On pose* $\alpha = 6$, *Dans ce cas* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

D'abord on peut vérifier facilement que A *admet une unique décomposition* LU, *en effet :*
$A^{(1)} = (3)$; $\det(A^{(1)}) = |3| \neq 0$,
$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$,
$A^{(3)} = A$; $\det(A^{(3)}) = \det(A) = 2 \times 6 - 10 = 2 \neq 0$,
Ainsi toutes les mineurs principaux de A *sont inversibles et par suite* A *admet une unique décomposition* LU.

PREMIÈRE MÉTHODE : PAR LES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

On effectue la réduction de la matrice A *jusqu'à obtenir une forme échelonnée. On calcule au fur et à mesure la matrice triangulaire inférieure* L *(pour la première colonne de* L*, on a* $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$*, pour la deuxième colonne de* L *on a* $l_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}$ *et ainsi de suite pour les colonnes suivantes).*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{2/3} & 5/3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = L$$

DEUXIÈME MÉTHODE : PAR IDENTIFICATION

$A = LU$ *avec* L *matrice triangulaire inférieure de diagonale unité et* U *matrice triangulaire supérieure :*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

Alors par identification :
- $1 \times u_{1,1} = 3 \Rightarrow u_{1,1} = 3$
- $1 \times u_{1,2} = 1 \Rightarrow u_{1,2} = 4$
- $1 \times u_{1,3} = -2 \Rightarrow u_{1,3} = -2$
- $l_{2,1} \times 3 = 1 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{3} \times 4 + 1 \times u_{2,2} = 2 \Rightarrow u_{2,2} = \frac{2}{3}$
- $\frac{1}{3} \times -2 + 1 \times u_{2,3} = 1 \Rightarrow u_{2,3} = \frac{5}{3}$
- $3 \times l_{3,1} = 0 \Rightarrow l_{3,1} = 0$
- $l_{3,2} \times \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow l_{3,2} = 3$
- $3 \times \frac{5}{3} + 1 \times u_{3,3} = 6 \Rightarrow u_{3,3} = 1$

On obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RÉSOLUTION

$AX = b \Longleftrightarrow LUX = b$

Cherchons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *la solution du système linéaire* $LY = b$.

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculer le vecteur Y *il reste à trouver la solution du système linéaire*

$$UX = Y$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient : $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est l'unique solution de* (S_1^6).

3. $A^2X = b \Longleftrightarrow A(AX) = b \Longleftrightarrow \begin{cases} AY = b \\ AX = Y \end{cases}$

Exemple : Pour $\theta = 1$ *et* $\alpha = 6$ *résoudre* $A^2X = b$

$AY = b \Longleftrightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(d'après Q2 partie I)*

$AX = Y \leftrightarrow LUX = Y \leftrightarrow \begin{cases} LZ = Y \\ UX = Z \end{cases}$

Cherchons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ *la solution du système linéaire* $LZ = Y$.

$LZ = Y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Après avoir calculer le vecteur Z *il reste à trouver la solution du système linéaire* $UX = Z$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57/3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

Partie II : $\theta \in \mathbb{R}$

1. *Pour que la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes il suffit que A soit à diagonale strictement dominante c-â-d :*

$$\begin{cases} |3\theta| > 6 \\ |2\theta| > 2 \\ |\alpha| > 2 \end{cases}$$

Donc si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ *et* $\theta \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ *alors la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.*

2. *Pour* $\alpha = 6$ *et* $\theta = 3$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

A est une matrice à diagonale strictement dominante, ainsi, la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss Seidel sont convergentes.

Méthode de Jacobi

- *Décomposition de Jacobi : On pose* $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1 - 4x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}}{9} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{2 - 2x_2^{(k)}}{6} \end{cases}$$

- *Itération de Jacobi : Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

  — *Itération 1 :* $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$

  — *Itération 2 :* $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1851 \\ 0.1851 \\ 0,3888 \end{pmatrix}$

Méthode de Gauss Seidel

- *Décomposition de Gauss-Seidel : On pose* $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1-4x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}}{9} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k+1)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k+1)} - a_{3,2}x_2^{(k+1)}}{a_{3,3}} = \frac{2-2x_2^{(k+1)}}{6} \end{cases}$$

- *Itération de Gauss Seidel : Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
  - *Itération 1 :* $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 1/52 \\ 52/162 \end{pmatrix}$
  - *Itération 2 :* $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1742 \\ -0,0290 \\ 0,3430 \end{pmatrix}$