École **S**upérieure **Pr**ivée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse numérique

Correction série d'exercices N°1 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Niveau : 3 A & B

Exercice 1

Introduction

Ce chapitre met l'accent sur des méthodes numériques permettant de résoudre un système d'équations linéaires sans avoir à calculer l'inverse d'une matrice, ce qui les rend plus efficaces et moins coûteuses en termes de calcul. Toutefois, cela ne signifie pas que le calcul de l'inverse d'une matrice est totalement inutile, car il reste important dans certains cas spécifiques.
Dans ce contexte, pour renforcer vos compétences en analyse matricielle, considérons deux matrices inversibles A et B, c'est-à-dire que A^{-1} et B^{-1} existent. Une question naturelle se pose alors : peut-on affirmer directement que l'inverse de $A^{-1}+B^{-1}$ existe également ? La réponse est non ! C'est précisément l'objectif de cet exercice.

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ deux matrices inversibles telles que $A+B$ est également inversible. Montrons que $A^{-1}+B^{-1}$ est inversible et que l'on a :

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A = A(A+B)^{-1}B.$$

Commençons par factoriser A à gauche et B à droite :

$$A^{-1}+B^{-1} = A^{-1}\left(I_n + AB^{-1}\right) = A^{-1}(B+A)B^{-1}.$$

Étant donné que A, B et $A+B$ sont inversibles, on en déduit que :

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = (A^{-1}(B+A)B^{-1})^{-1}.$$

Or, on a :

$$(A^{-1}(B+A)B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.$$

Ce qui donne :

$$\boxed{(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.}$$

Pour prouver la deuxième égalité, nous procédons de manière analogue en factorisant A^{-1} à droite et B^{-1} à gauche, ce qui nous conduit à :

$$\boxed{(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B.}$$

Exercice 2

On considère le système d'équations linéaires (S), dont l'écriture matricielle est donnée par $AX = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Partie I

1. **a)** *Montrer que (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.*
   On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 32 \neq 0.$$

   Alors le système (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.

   b) *Résoudre (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss.*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

   Étape 1 :

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$$

   . Alors

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right)$$

   Étape 2 :

$$L_1 \leftarrow L_1,$$
$$L_2 \leftarrow L_2$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2,$$

. Alors,

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Alors, $S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_3 & = & 1 \\ 4x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 4x_3 & = & -4 \end{array}\right.$ *. En utilisant la méthode de remontée on obtient :*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) a) *Justifier la convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système* (S)*.*

Rappel *: Soit* A *une matrice à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées au système* $(S) : AX = b$ *sont convergentes pour tous* $X^{(0)}$*.*
On dit que A *est à* **diagonale strictement dominante** *lorsque le module de chaque terme diagonal est supérieur strictement à la somme des modules des autres termes de sa ligne, c-à-d,* $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in [1, n]$.

On a ,

$$\left\{\begin{array}{l} |2| > |0| + |1| \\ |4| > |2| + |-1| \\ |3| > |-1| + |1| \end{array}\right.$$

Ainsi A est à diagonale strictement dominante et par suite les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes pour la résolution du système (S)*.*

2) b) *Écrire les schémas itératifs des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système* (S)*.*

Schéma itératif de la méthode de Jacobi : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1^{(k+1)} + \quad x_3^{(k)} & = & 1 \\ 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} & = & 3 \\ -x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 3x_3^{(k+1)} & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{3 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{-4 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{3} \end{array}\right.$$

Schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1^{(k+1)} + \quad x_3^{(k)} & = & 1 \\ 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} & = & 3 \\ -x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 3x_3^{(k+1)} & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{3 - 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{-4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{3} \end{array}\right.$$

2) c) *Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *donner les résultats des deux premières itérations en utilisant*

(a) la méthode de Jacobi.

(b) la méthode de Gauss-Seidel.

Pour un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(i) *la méthode de Jacobi :*

$$X_J^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) *la méthode de Gauss-Seidel :*

$$X_{G-S}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad X_{G-S}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Partie II

3) *En considérant l'erreur* $E = ||X - X^{(k)}||_2$, *avec* X *la solution exacte,* $X^{(k)}$ $(k \in \{1, 2\})$ *une solution approchée par l'une des deux méthodes et* $||\,.\,||_2$ *la norme euclidienne définie par*

$$||X||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

calculer les erreurs commises par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux premières itérations.

$1^{\text{ère}}$ itération :

$$E_J^{(1)} = ||X_J^{(1)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0,5590.$$

$$E_{G-S}^{(1)} = ||X_{G-S}^{(1)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{18}} = 0,7817.$$

$\underline{2^{ème} \text{ itération}}$:

$$E_J^{(2)} = ||X_J^{(2)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,3535.$$

$$E_{G-S}^{(2)} = ||X_{G-S}^{(2)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{162}} = 0,2605.$$

4) *Comparer alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en terme de précision pour les deux premières itérations pour la résolution du système (S).*
Suite à la première itération, la méthode de Jacobi approche mieux la solution et suite à la deuxième itération, la méthode de Gauss-Seidel approche mieux la solution.

Exercice 3

On considère le systéme d'équations linéaires (S_α) : $A_\alpha X = b$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad et\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs de α pour lesquelles A_α est inversible.*

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 - 2).$$

   Pour que A_α soit inversible il faut et il suffit que $det(A_\alpha) \neq 0$, or $det(A\alpha) = \alpha(\alpha^2 - 2)$, donc A_α est inversible si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2. *Déterminer une condition suffisante sur α assurant la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution du système (S_α).*
   Pour que la méthode de Jacobi soit convergente il suffit que A soit à diagonale strictement dominante c-â-d :

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |\alpha| > 2 \\ |\alpha| > 1 \end{cases}$$

   Donc si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, alors la méthode de Jacobi est convergente.

3. *Pour $\alpha = 3$,*

(a) *Résoudre (S_3) par la méthode du pivot de Gauss.*

Pour $\alpha = 3$*, alors* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Étape 1 :

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3$$

. Alors :

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Étape 2 :

$$L_1 \leftarrow L_1,$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{8} L_2,$$

.Alors :

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & \frac{63}{8} \end{array}\right)$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) *Donner le schéma itératif de la méthode de Jacobi.* *Décomposition de Jacobi :*

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2} x_2^{(k)} - a_{1,3} x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1}{3}(5 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1} x_1^{(k)} - a_{2,3} x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1}{3}(10 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1} x_1^{(k)} - a_{3,2} x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{1}{3}(11 - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

(c) *Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Jacobi pour la résolution du* (S_3) .

Itération de Jacobi : Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

— *Itération 1 :* $X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5-1) \\ \frac{1}{3}(10-1-1) \\ \frac{1}{3}(11-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

— *Itération 2 :* $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5-\frac{8}{3}) \\ \frac{1}{3}(10-\frac{4}{3}-\frac{10}{3}) \\ \frac{1}{3}(11-\frac{8}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix}$

On considère la suite numérique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{cases} X_0 = b \\ A_3^n X_n = b \end{cases}$$

1. *Vérifier l'existence de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour montrer l'existence de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *il suffit de vérifier que le système*
   $$A_3^n X_n = b$$
   admet une unique solution pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *Cela revient à prouver que la matrice* A_3^n *est inversible, c'est-à-dire que son déterminant est non nul :*
   $$\det(A_3^n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
   Puisque la matrice A_3 *est inversible, alors son déterminant est non nul :*
   $$\det(A_3) \neq 0.$$
   On utilise la propriété suivante des déterminants :
   $$\det(A_3^n) = (\det(A_3))^n.$$
   Or, puisque $\det(A_3) \neq 0$, *il en découle que :*
   $$\det(A_3^n) = (\det(A_3))^n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
   Ainsi, A_3^n *est bien inversible pour tout* n, *et par conséquent, le système* $A_3^n X_n = b$ *admet une unique solution pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Cela garantit l'existence et l'unicité de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*; A_3 X_n = X_{n-1}$.
   Raisonnement par récurrence
   — ***pour*** $n = 1$
   $$A_3 X_1 = b$$
   $$X_0 = b$$
   $$\Rightarrow \boxed{A_3 X_1 = X_0}$$

— ***Soit*** $n \in \mathbb{N}^*$***, supposons que*** $A_3 X_n = X_{n-1}$
— ***Montrons que*** $A_3 X_{n+1} = X_n$ *On a*

$$A_3^{n+1} X_{n+1} = b \Leftrightarrow A_3^n \underbrace{A_3 X_{n+1}}_{Y} = b.$$

On pose $Y = A_3 X_{n+1}$, *on obtient :* $A_3^n Y = b$, *or* A_3^n *est inversible, alors* $Y = X_n$ *; ainsi :*

$$\boxed{A_3 X_{n+1} = X_n}$$

3. *Pour* $n = 2$ *donner un raisonnement (sans faire le calcul de* A_3^2*) pour la résolution du système*

$$A_3^2 X = b$$

On a X_2 *est l'unique solution du système* $A^2 X = b$ *; en utilisant la question précédente, on a :*

$$AX_2 = X_1.$$

On peut utiliser la méthode LU *pour résoudre ce problème :*

$$AX_2 = X_1 \iff \begin{cases} LZ = X_1 \\ UX_2 = Z \end{cases}$$

Exercice 4

On considère le système linéaire suivant :

$$Ax = b$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad et \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. *Trouver les matrices* L *et* U *telles que* $A = LU$*, où :*
   — L *est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1.*
   — U *est triangulaire supérieure.*

   A *est à diagonale strictement dominante, donc elle admet une factorisation* $A = LU$ *avec*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

On détermine les coefficients de L *et* U *par identification. La première ligne de* U *est directement celle de* A*, donc :*

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

— *Calcul de l_{21} et l_{31} :*

$$A_{21} = l_{21}u_{11} \Rightarrow 2 = l_{21} \cdot 4 \Rightarrow l_{21} = \frac{2}{4} = 0.5.$$

$$A_{31} = l_{31}u_{11} \Rightarrow 2 = l_{31} \cdot 4 \Rightarrow l_{31} = \frac{2}{4} = 0.5.$$

Ainsi :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

— *Calcul de u_{22} :*

$$A_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} \Rightarrow 6 = (0.5 \times 2) + u_{22}.$$

$$u_{22} = 6 - 1 = 5.$$

$$A_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23} \Rightarrow 2 = (0.5 \times 2) + u_{23}.$$

$$u_{23} = 2 - 1 = 1.$$

Mise à jour de U :

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

— *Calcul de l_{32} :*

$$A_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \Rightarrow 2 = (0.5 \times 2) + l_{32} \times 5.$$

$$2 = 1 + 5l_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Mise à jour de L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}.$$

— *Calcul de u_{33} :*

$$A_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \Rightarrow 5 = (0.5 \times 2) + (0.2 \times 1) + u_{33}.$$

$$5 = 1 + 0.2 + u_{33} \Rightarrow u_{33} = 3.8.$$

Mise à jour finale de U :

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3.8 \end{bmatrix}.$$

Décomposition LU obtenue

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3.8 \end{bmatrix}.$$

2. *Résoudre $Ax = b$ en utilisant cette décomposition.* *Nous allons résoudre ce système en deux étapes :*

   (a) ***Résolution de $Ly = b$ (descente avant)***
   Nous cherchons y tel que :$Ly = b$ Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} y_1 = 2, \\ 0.5y_1 + y_2 = 3, \\ 0.5y_1 + 0.2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

   En résolvant :

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = -2.4.$$

   Ainsi :

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2.4 \end{bmatrix}.$$

   (b) ***Résolution de $Ux = y$ (remontée arrière)***
   Nous cherchons x tel que :$Ux = y$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_2 + x_3 = 2, \\ 3.8x_3 = -2.4. \end{cases}$$

   En résolvant :

$$x_3 = -0.6316, \quad x_2 = 0.5263, \quad x_1 = 0.5526.$$

   La solution finale est :

$$x = \begin{bmatrix} 0.5526 \\ 0.5263 \\ -0.6316 \end{bmatrix}.$$

Nous allons explorer une autre décomposition de A, en recherchant cette fois une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux ne sont pas nécessairement égaux à 1.

$$A = LL^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure, et L^T sa transposée.

3. *Déterminer les coefficients de L.* *Nous cherchons une matrice triangulaire inférieure L sous la forme :*

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

   telle que :

$$A = LL^T.$$

En multipliant L par sa transposée L^T, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 4, \\ l_{11}l_{21} = 2, \\ l_{11}l_{31} = 2, \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = 6, \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 2, \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 5. \end{cases}$$

En résolvant ce système :

$$l_{11} = 2, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = 1.$$

$$l_{22} = 2,236, \quad l_{32} = 0,447, \quad l_{33} = 1,949.$$

Ainsi, la matrice L est :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2,236 & 0 \\ 1 & 0,447 & 1,949 \end{bmatrix}.$$

4. *Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant cette nouvelle décomposition.*

   (a) ***Résolution de $Ly = b$ (descente avant)***

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,894 \\ -1,231 \end{bmatrix}.$$

   (b) ***Résolution de $L^T x = y$ (remontée arrière)***

$$x = \begin{bmatrix} 0,553 \\ 0,526 \\ -0,632 \end{bmatrix}.$$

5. *Comparer la solution obtenue avec les deux méthodes, que peut-on remarquer ?*

   Les deux méthodes aboutissent au même résultat. Le choix entre elles dépend souvent des caractéristiques de la matrice A et de l'efficacité recherchée dans le calcul.