

# IMAGING

## Deblur

**Cheikh Ibrahim · Zaid**

Matricola: 0000974909

**Xia · Tian Cheng**

Matricola: 0000975129

Anno accademico  
2021 – 2022

Corso di Calcolo Numerico  
Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Esecuzione preliminare</b>	<b>3</b>
2.1	Determinare il valore di $\lambda$	3
2.2	Prima esecuzione	3
2.2.1	Stima di $\lambda$	3
2.2.2	Risultato	4
2.3	Seconda esecuzione	5
2.3.1	Stima di $\lambda$	5
2.3.2	Risultato	6
<b>3</b>	<b>Confronto tra gradiente coniugato e metodo del gradiente</b>	<b>7</b>
3.1	Prima esecuzione	7
3.2	Seconda esecuzione	8
<b>4</b>	<b>Semi-convergenza</b>	<b>11</b>
4.1	Analisi con rumore	11
4.1.1	Metodo naïve	11
4.1.2	Regolarizzazione di Tikhonov	12
4.1.3	Regolarizzazione tramite variazione totale	13
4.1.4	Risultato	13
4.2	Analisi senza rumore	14
<b>5</b>	<b>Risultati su esecuzioni multiple</b>	<b>16</b>
5.1	Esecuzioni su immagini generate casualmente	16
5.2	Esecuzioni sul dataset	18
<b>6</b>	<b>Risultati su immagini complesse</b>	<b>20</b>
6.1	Notte Stellata	20
6.1.1	Analisi	21
6.2	Cielo stellato	21
6.2.1	Analisi	22
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>23</b>
7.1	Metodo naïve	23
7.2	Regolarizzazione di Tikhonov	23
7.3	Regolarizzazione tramite variazione totale	23

# 1 Introduzione

Il progetto consiste nel ricostruire un'immagine a partire da una sua istanza alterata da uno sfocamento noto e un rumore casuale.

Si tratta di un problema solitamente affrontato elaborando immagini provenienti da un dispositivo di acquisizione che, nel suo processo di formazione, altera la figura originale producendo un risultato diverso dalla realtà.

La soluzione di tale problema viene formulata come problema ai minimi quadrati:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

dove  $A$  è l'operatore di blur,  $x$  l'immagine ricostruita e  $b$  l'immagine acquisita.

Per la risoluzione sono note diverse formulazioni. Quelle impiegate sono:

- Metodo naive, risolvendo il problema in modo diretto. Questo approccio è noto essere mal condizionato.
- Regolarizzazione di Tikhonov:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2$$

- Regolarizzazione tramite variazione totale:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \phi_{TV}(x)$$

Per misurare la qualità dei risultati verranno impiegate due metriche:

- Mean Squared Error (MSE): un valore sempre positivo usato per stimare l'errore tra due oggetti.  
L'impiego del quadrato permette di "esagerare" il risultato ottenuto in presenza di errori elevati e di minimizzarlo in presenza di errori piccoli.
- Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR): una metrica usata per valutare la qualità di ricostruzione di un'immagine o un video. Per due immagini identiche, il  $PSNR = \infty$ , quindi maggiore è il PSNR, maggiore è la vicinanza tra le immagini confrontate. Ci si aspetta, inoltre, che il valore del MSE e PSNR siano correlati, dal momento che la formula per calcolare il PSNR si basa sul valore del MSE.

## 2 Esecuzione preliminare

Per avere una visione sul comportamento delle varie formulazioni, sono state eseguite delle prime sperimentazioni sull'immagine in Figura 1.

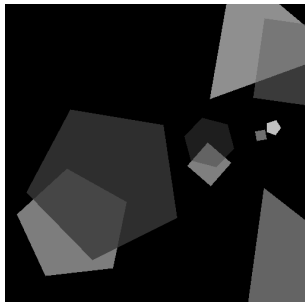


Figura 1: Immagine di test

### 2.1 Determinare il valore di lambda

Prima di eseguire i metodi, è necessario determinare il valore  $\lambda$  del parametro di regolarizzazione dei metodi che lo prevedono.

Esistono condizioni che permettono di determinare un valore di  $\lambda$  accettabile (*es. principio della discrepanza di Morozov*). In questo progetto verrà stimato utilizzando una ricerca iterativa del punto migliore basato sul PSNR (funzione `search_best_lambda` nel sorgente).

### 2.2 Prima esecuzione

La prima esecuzione è stata effettuata con un blur generato da un kernel  $5 \times 5$  con  $\sigma = 0.5$  e rumore gaussiano con deviazione standard 0.05.

#### 2.2.1 Stima di lambda

Il seguente grafico mostra il valore del PSNR al variare di  $\lambda \in [0.01, 1[$  con passo 0.01 per la regolarizzazione di Tikhonov:

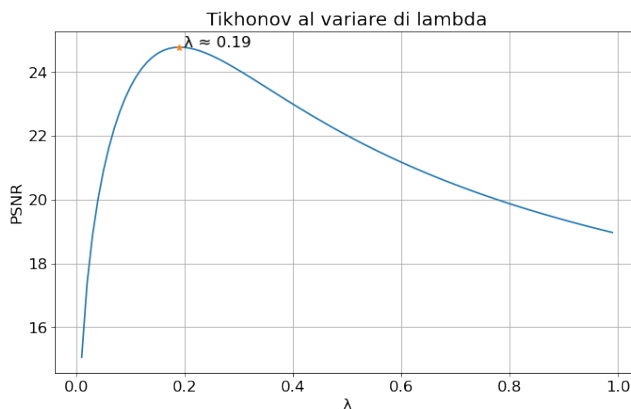


Figura 2:  $\lambda = 0.19$  e  $\text{PSNR} \simeq 24.79$

Analogamente, il seguente grafico mostra la variazione del PSNR per  $\lambda \in [0.01, 1[$  con passo 0.01 per la regolarizzazione tramite variazione totale:

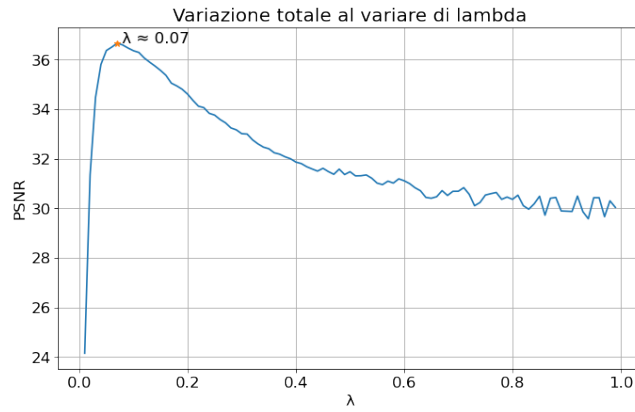


Figura 3:  $\lambda = 0.07$  e  $\text{PSNR} \simeq 36.74$

### 2.2.2 Risultato

Fissati i valori di  $\lambda$ , il risultato ottenuto è il seguente:

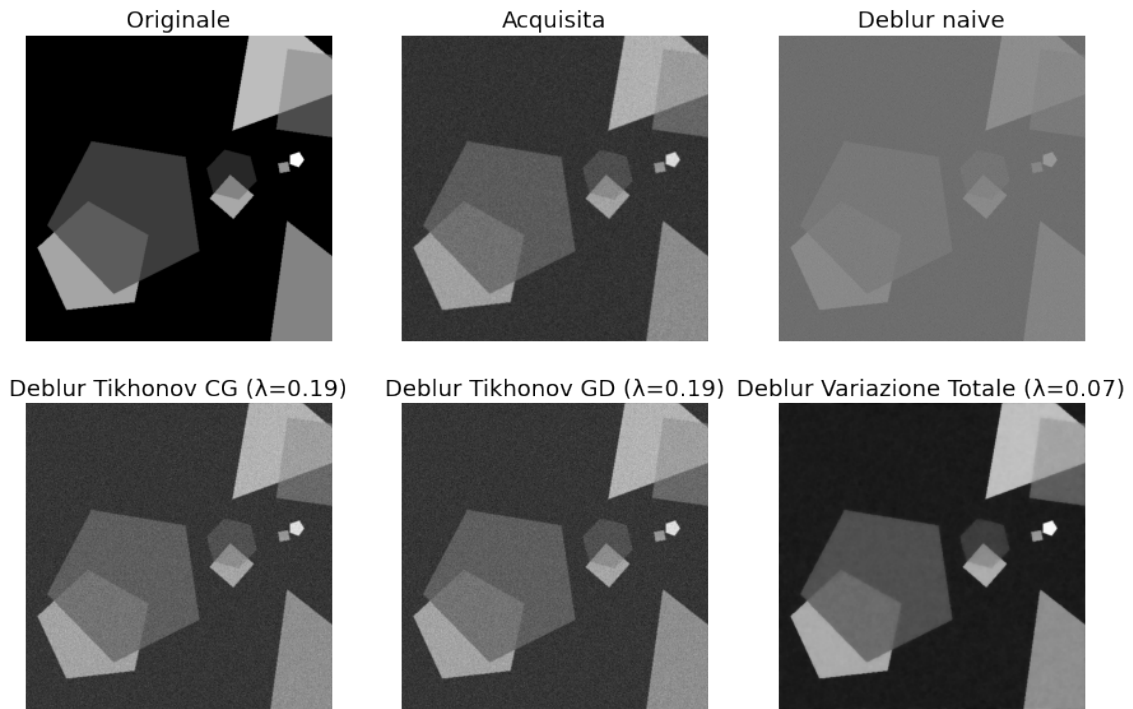


Figura 4: Risultato del processo di deblur

	Acquisita	Naive	Tikhonov CG	Tikhonov GD	Variazione totale
MSE	$0.2699 \cdot 10^{-2}$	$0.2047 \cdot 10^0$	$0.3320 \cdot 10^{-2}$	$0.3320 \cdot 10^{-2}$	$0.2119 \cdot 10^{-3}$
PSNR	25.6878	6.8874	24.7890	24.7890	36.7382
Iter.		140	14	48	14

Come atteso, la ricostruzione ottenuta con la formulazione come problema ai minimi quadrati senza regolarizzazione ha prodotto un'immagine molto distante dall'originale. Utilizzando la regolarizzazione di Tikhonov, si è ottenuto un risultato quasi invariato rispetto all'immagine acquisita, se non addirittura peggiore.

Invece, con la regolarizzazione tramite variazione totale, il risultato ottenuto è migliore rispetto agli altri metodi e visivamente molto vicina all'immagine originale.

A livello di velocità, minimizzare con il metodo del gradiente ha richiesto più iterazioni rispetto al metodo del gradiente coniugato.

Invece, a parità di numero di iterazioni, il metodo regolarizzato con Tikhonov ha richiesto meno tempo rispetto al metodo che utilizza variazione totale. Si tratta di un risultato atteso considerando che il termine di regolarizzazione  $\phi_{TV}$  è molto più articolato rispetto a quello di Tikhonov.

## 2.3 Seconda esecuzione

Per vedere le prestazioni in uno scenario differente, è stata effettuata una seconda esecuzione sulla stessa immagine di partenza con blur ottenuto da un kernel  $25 \times 25$  con  $\sigma = 3$  e rumore con deviazione standard 0.05.

### 2.3.1 Stima di lambda

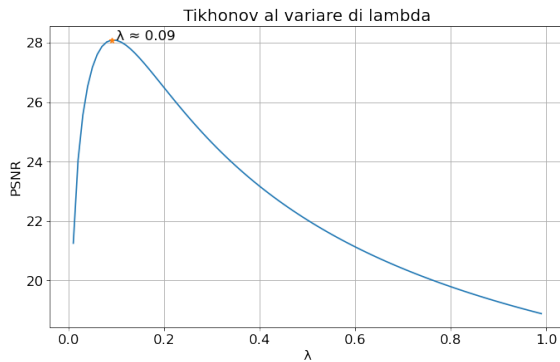


Figura 5:  $\lambda = 0.09$  e  $PSNR \simeq 28.09$

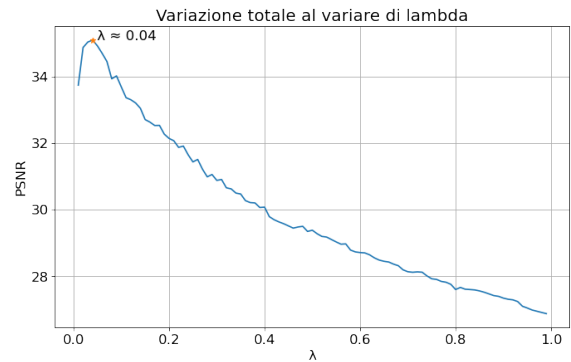


Figura 6:  $\lambda = 0.04$  e  $PSNR \simeq 35.09$

### 2.3.2 Risultato

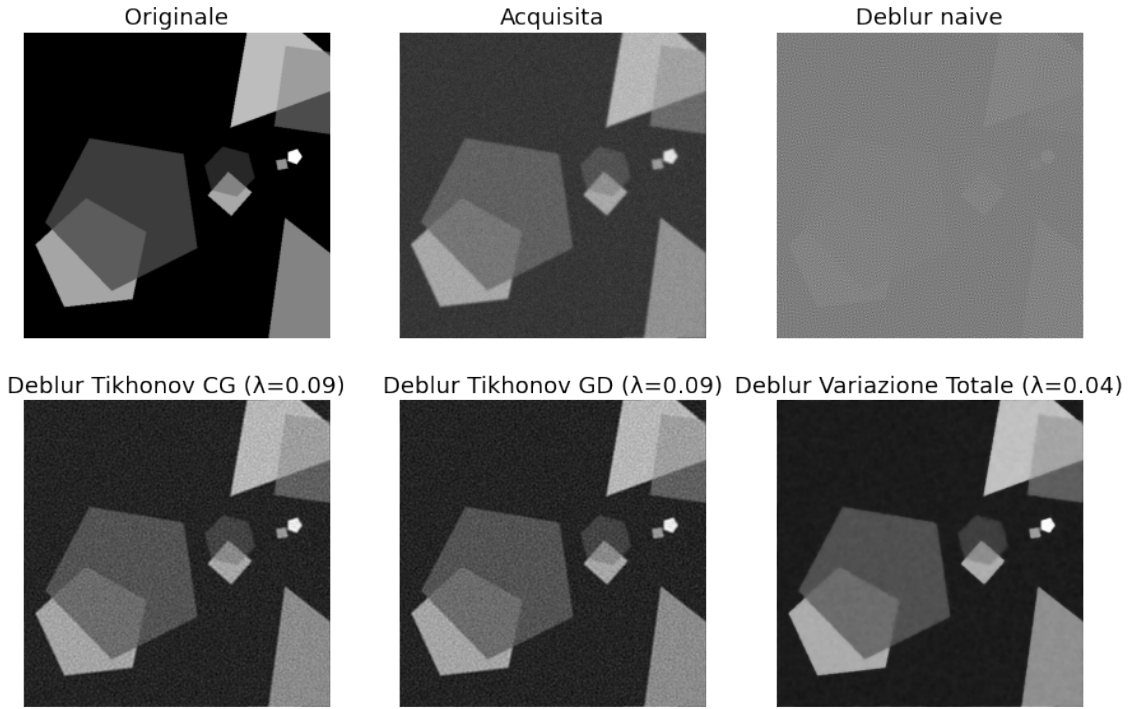


Figura 7: Risultato del processo di deblur

	Acquisita	Naive	Tikhonov CG	Tikhonov GD	Variazione totale
MSE	$0.3204 \cdot 10^{-2}$	$0.5719 \cdot 10^{-1}$	$0.1553 \cdot 10^{-2}$	$0.1553 \cdot 10^{-2}$	$0.3094 \cdot 10^{-3}$
PSNR	24.9437	-7.5735	28.0889	28.0890	35.0944
Iter.		200 (max)	18	99	29

Anche in questo caso, il metodo naive non ha prodotto soluzioni accettabili, mentre la regolarizzazione tramite variazione totale ha prodotto il risultato migliore.

Il metodo regolarizzato con Tikhonov, a differenza dell'esecuzione precedente, ha prodotto un risultato migliore dell'immagine acquisita mentre a livello di velocità, analogamente al caso precedente, minimizzare con il gradiente coniugato ha richiesto meno iterazioni rispetto al metodo del gradiente.

### 3 Confronto tra gradiente coniugato e metodo del gradiente

Si analizzano ora, in modo più approfondito, le prestazioni di Tikhonov utilizzando i due metodi di discesa implementati, focalizzando l'attenzione sulla velocità e precisione.

#### 3.1 Prima esecuzione

Per una prima sperimentazione si è usata la Figura 1 con kernel  $5 \times 5$  con  $\sigma = 0.5$  e rumore gaussiano con deviazione standard 0.05.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

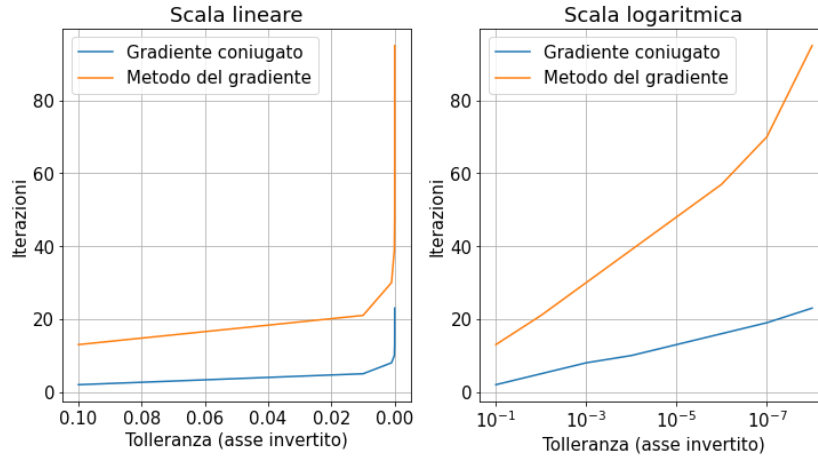


Figura 8: Numero di iterazioni al variare della tolleranza

È immediato notare, in linea con le osservazioni precedenti, che il metodo del gradiente coniugato necessita di meno iterazioni rispetto al metodo del gradiente prima di raggiungere le condizioni di convergenza.

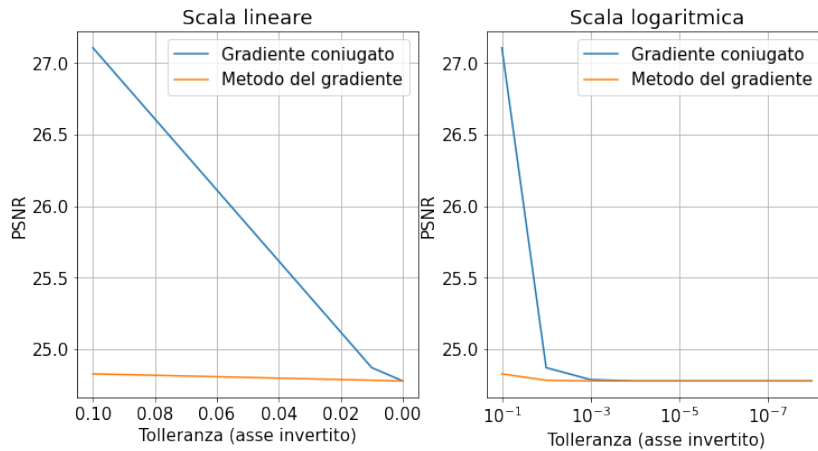


Figura 9: PSNR al variare della tolleranza



A livello di precisione, invece, il risultato ottenuto mostra che i due metodi, al variare della tolleranza, convergono intorno allo stesso risultato.

È però presente un comportamento controintuitivo in vicinanza di valori di tolleranza elevati dove si ottiene un PSNR maggiore. In altri termini, si ottiene un'immagine più fedele all'originale con meno iterazioni, mentre il risultato peggiora nella continuazione dell'esecuzione (tale problematica verrà approfondita nella sezione 4).

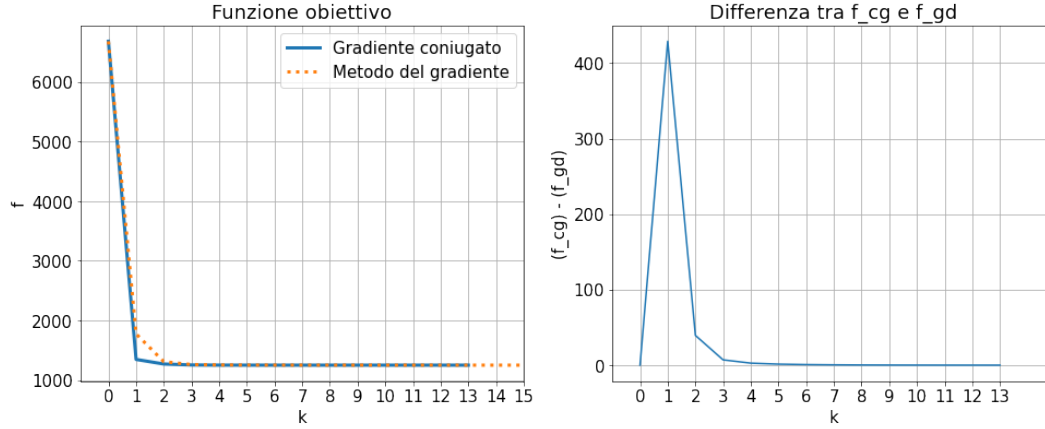


Figura 10: Andamento della funzione obiettivo

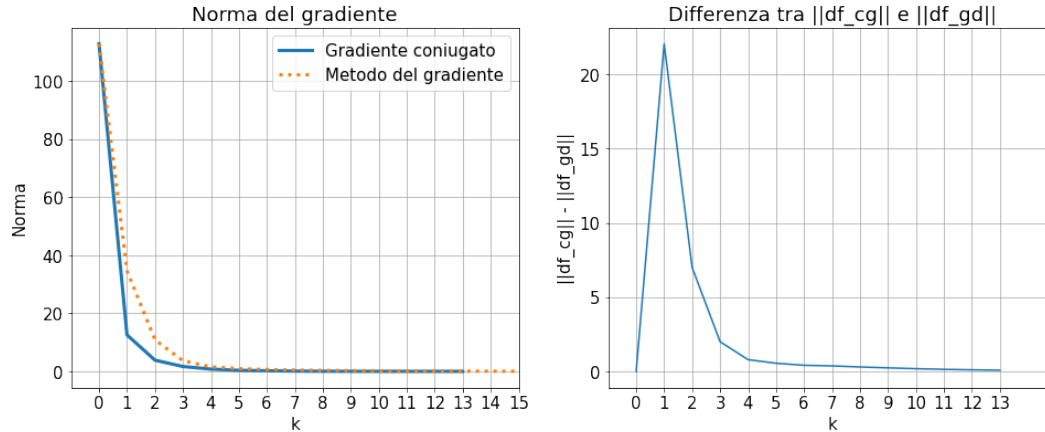


Figura 11: Andamento della norma del gradiente

Infine, come atteso dai risultati precedenti, per il metodo del gradiente coniugato la decrescita della funzione obiettivo è maggiore rispetto al metodo del gradiente. Lo stesso risultato è osservabile con la norma del gradiente che nel caso del gradiente coniugato esegue passi di dimensione maggiore.

### 3.2 Seconda esecuzione

Per una seconda valutazione si è usato un kernel  $25 \times 25$  con  $\sigma = 3$  e rumore gaussiano con deviazione standard 0.05.

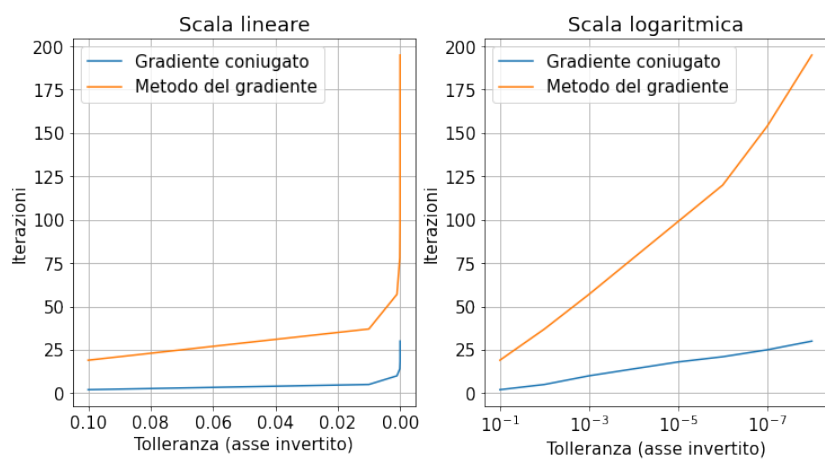


Figura 12: Numero di iterazioni al variare della tolleranza

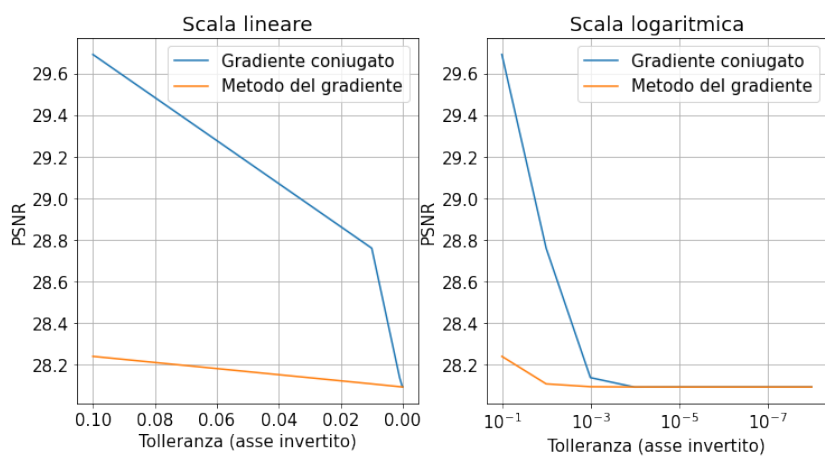


Figura 13: PSNR al variare della tolleranza

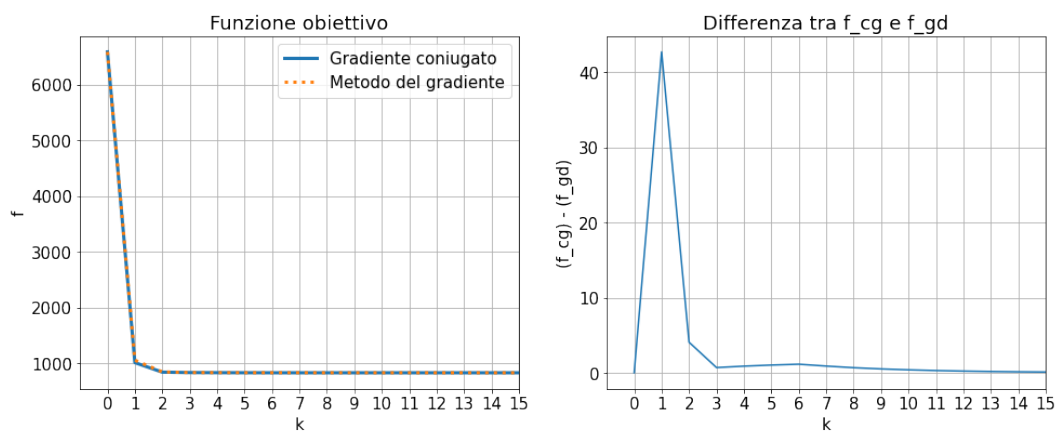


Figura 14: Andamento della funzione obiettivo

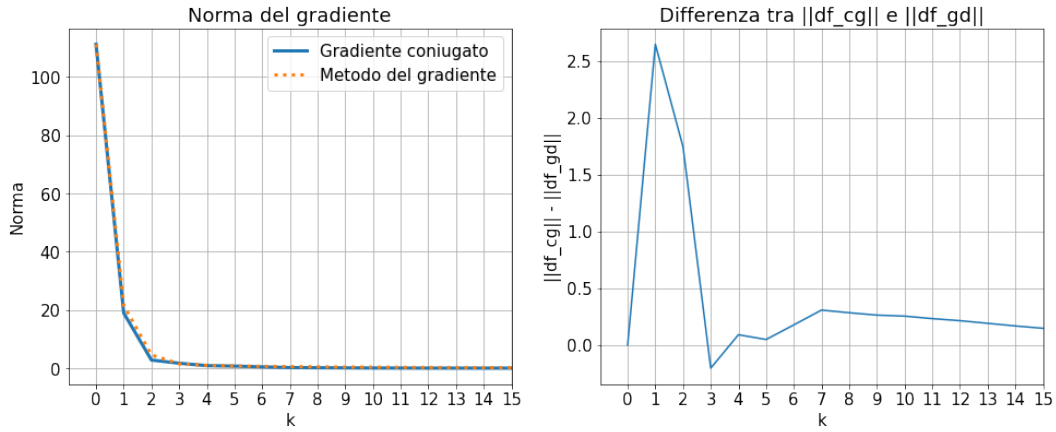


Figura 15: Andamento della norma del gradiente

I risultati ottenuti sono in linea con quelli precedenti ed evidenziano che le prestazioni del gradiente coniugato sono maggiori rispetto a quelle del metodo del gradiente, come atteso dalle analisi teoriche. Infatti, le immagini utilizzate sono a sfondo omogeneo e tendono ad essere molto vicine alla forma di una matrice sparsa per la quale il metodo del gradiente coniugato ha buone prestazioni.

La soluzione calcolata invece, escludendo valori di tolleranza elevati, converge intorno allo stesso valore e per questo motivo è, in generale, indifferente utilizzare l'implementazione del deblur con i due metodi di discesa. Ovviamente per questioni di velocità, si preferisce utilizzare il metodo implementato con il gradiente coniugato.

## 4 Semi-convergenza

Nella sezione 3 è emerso il problema per cui l'immagine ottenuta con meno iterazioni è qualitativamente migliore rispetto a quella ottenuta quando il metodo raggiunge convergenza. Tale problema è noto come semi-convergenza [1][2][3], ovvero quando il raggiungimento dell'ottimo non corrisponde al soddisfacimento delle condizioni di convergenza e per questo le iterazioni successive peggiorano il risultato.

Nel contesto del deblur, il problema di semi-convergenza è causato dal rumore aggiunto all'immagine. È noto che il metodo naive è quello che più viene condizionato dal rumore e per questa ragione vengono introdotti i metodi di regolarizzazione.

Si analizzano quindi i risultati dei vari metodi valutando l'andamento del PSNR rispetto all'iterato  $x_k$ :

### 4.1 Analisi con rumore

#### 4.1.1 Metodo naive

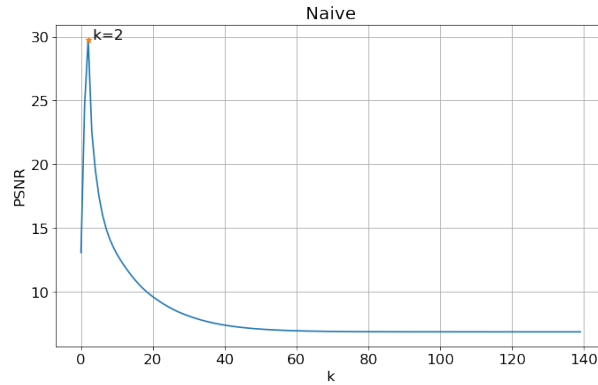


Figura 16: PSNR al variare dell'iterato  $x_k$

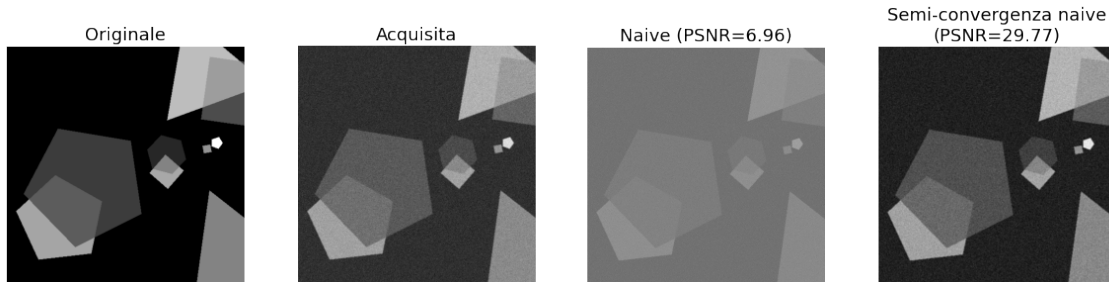


Figura 17: Risultato ottenuto

Come atteso, il risultato viene distorto molto rapidamente e in maniera molto drastica. Quindi, al raggiungimento delle condizioni di convergenza, il risultato ottenuto è inevitabilmente molto distante dall'immagine reale.

Terminando l'esecuzione al punto di massimo invece, il risultato è una buona ricostruzione dell'immagine reale e, in questo caso, anche migliore rispetto alla soluzione del metodo regolarizzato con Tikhonov in sezione 2.

#### 4.1.2 Regolarizzazione di Tikhonov

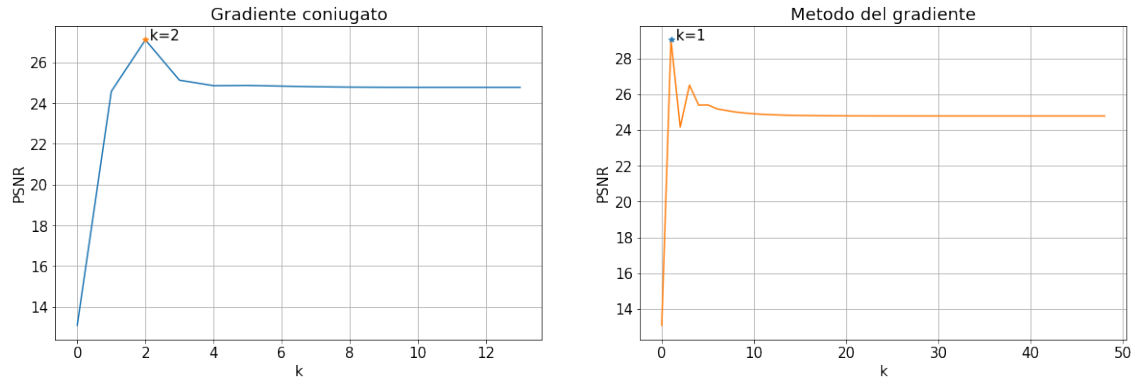


Figura 18: PSNR al variare dell'iterato  $x_k$

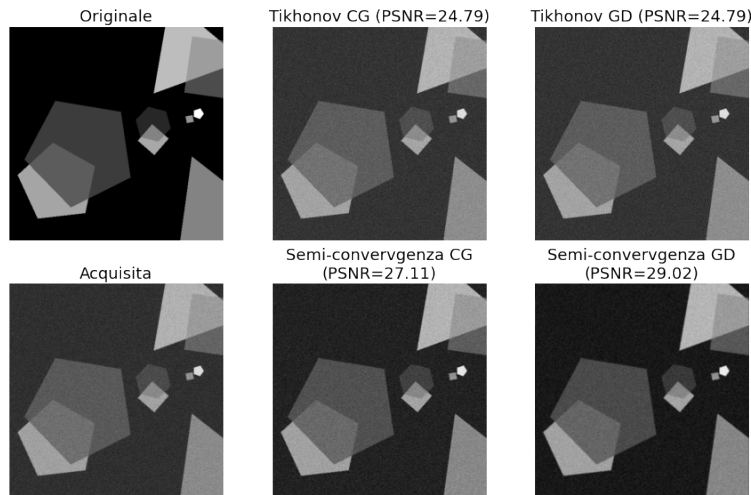


Figura 19: Risultato ottenuto

Con la regolarizzazione di Tikhonov si nota che, nonostante sia ancora presente il problema di semi-convergenza, dopo il punto di ottimo l'errore decresce di una quantità più contenuta rispetto al metodo naïve fino ad assumere un comportamento asintotico.

Anche in questo caso però, confrontando il risultato al punto di semi-convergenza e convergenza si nota, in una forma meno grave rispetto al metodo naïve, una differenza significativa.

### 4.1.3 Regularizzazione tramite variazione totale

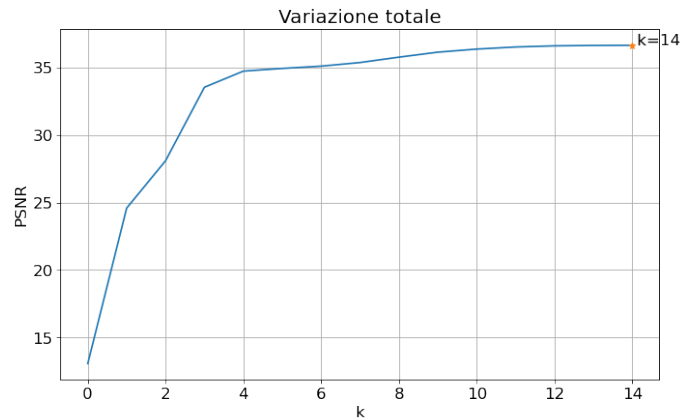


Figura 20: PSNR al variare dell'iterato  $x_k$

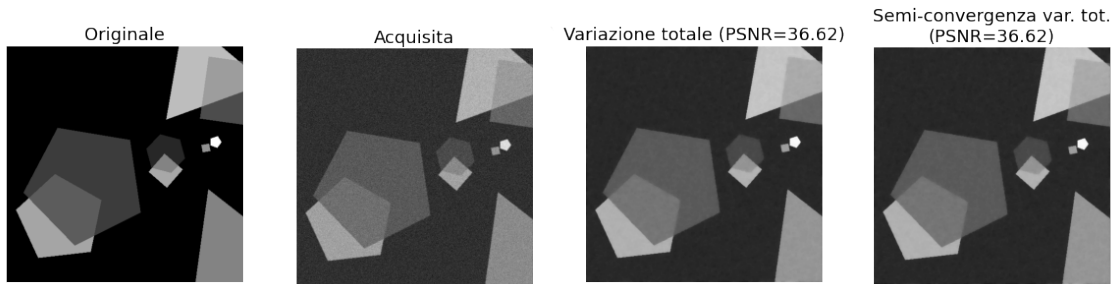


Figura 21: Risultato ottenuto

Regularizzando tramite variazione totale, invece, il problema di semi-convergenza è assente nel caso dell'immagine analizzata e il raggiungimento dell'ottimo avviene contemporaneamente al soddisfacimento delle condizioni di convergenza.

### 4.1.4 Risultato

Le prove precedenti sono state eseguite con kernel  $5 \times 5$  con  $\sigma = 0.5$  e kernel  $25 \times 25$  con  $\sigma = 3$ , entrambi i casi applicando un rumore con deviazione standard 0.05.

La regularizzazione tramite variazione totale si è rivelata la soluzione meno soggetta alla semi-convergenza, mentre Tikhonov, nonostante non restituisca la soluzione del punto ottimo, è in grado di ridurre significativamente il deterioramento della soluzione.

Nel caso generale, non è però possibile risolvere il problema di semi-convergenza interrompendo l'esecuzione quando si rileva un punto di massimo. Un controesempio è il caso del metodo del gradiente in Figura 18, infatti, l'andamento del PSNR può assumere più punti di massimo locale e quindi esisteranno casi in cui il primo massimo raggiunto non sarà necessariamente la soluzione ottima.

## 4.2 Analisi senza rumore

Si eseguono ora gli stessi esperimenti su un'immagine a cui è stato applicato un blur senza aggiungere rumore.

Un aspetto da tenere in considerazione è che la ricerca del parametro di regolarizzazione  $\lambda$  ha prodotto risultati tendenti a 0. Per evitare di annullare il termine di regolarizzazione, riconducendosi al metodo naive, è stato scelto un valore di  $\lambda$  molto piccolo.

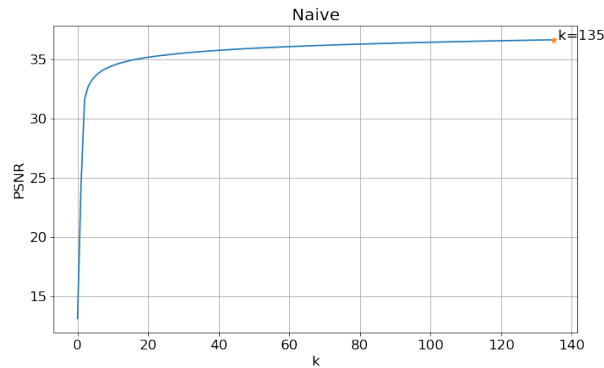


Figura 22: PSNR al variare dell'iterato  $x_k$  con il metodo naive

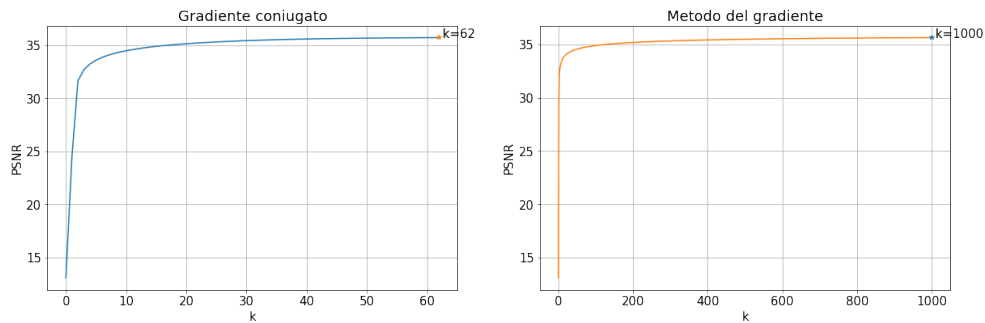


Figura 23: PSNR al variare dell'iterato  $x_k$  con regolarizzazione di Tikhonov

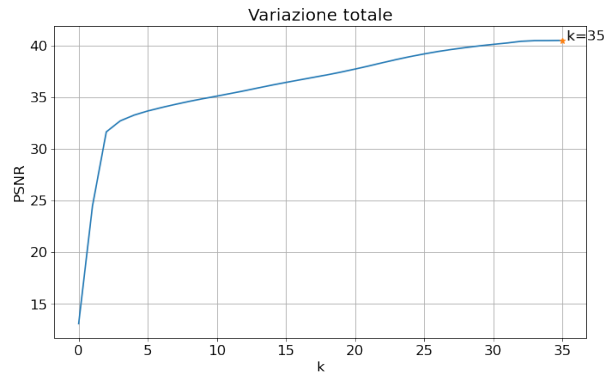


Figura 24: PSNR al variare dell'iterato  $x_k$  con regolarizzazione tramite variazione totale

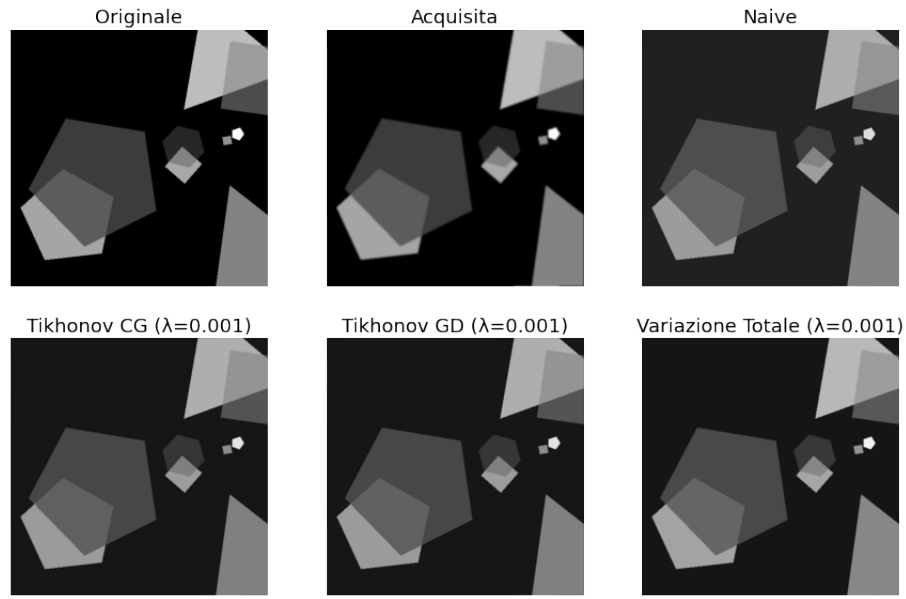


Figura 25: Risultato ottenuto

In questo caso, tutti i metodi hanno raggiunto convergenza e ottimo contemporaneamente e il risultato, in assenza di rumore, si presenta visivamente molto simile indipendentemente dalla formulazione.



## 5 Risultati su esecuzioni multiple

### 5.1 Esecuzioni su immagini generate casualmente

Per una valutazione più generalizzata dei metodi, sono stati eseguiti dei test su un dataset di immagini contenenti poligoni regolari generati casualmente (funzione `generate_image` del sorgente) a cui è stato applicato un blur con kernel  $9 \times 9$  con  $\sigma_{\text{kernel}} = 1.3$  e rumore con  $\sigma_{\text{noise}} = 0.05$ .

Come concluso in sezione 3, verrà utilizzato solamente il metodo del gradiente coniugato poiché produce, in tempo minore, lo stesso risultato del metodo del gradiente.

I risultati ottenuti in forma aggregata su cento esecuzioni sono i seguenti:

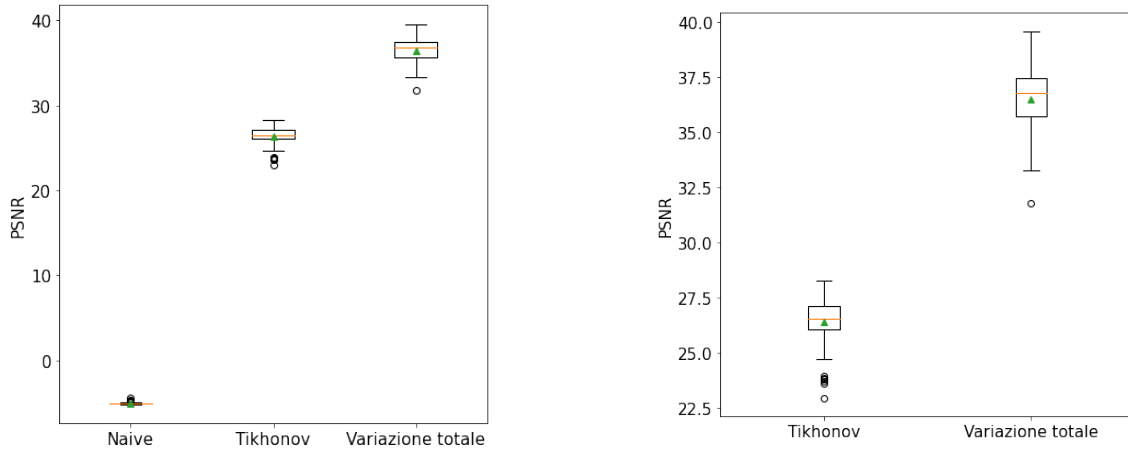


Figura 26: Boxplot per il PSNR

	Tikhonov	Variazione totale
Intervallo ( <i>outlier</i> esclusi)	[26.03, 28.25]	[35.71, 39.58]
Media	26.39	36.49
Mediana	26.53	36.76
Deviazione standard	1.05	1.38

In linea con i risultati precedenti, il metodo naive ha prodotto soluzioni non accettabili, mentre i metodi regolarizzati hanno avuto un comportamento migliore.

È evidente che i risultati ottenuti regolarizzando con variazione totale sono migliori rispetto a quelli ottenuti con Tikhonov. A livello di stabilità però, le soluzioni prodotte tramite variazione totale presentano, anche se di poco, valori di PSNR più sparsi rispetto a quelli di Tikhonov.

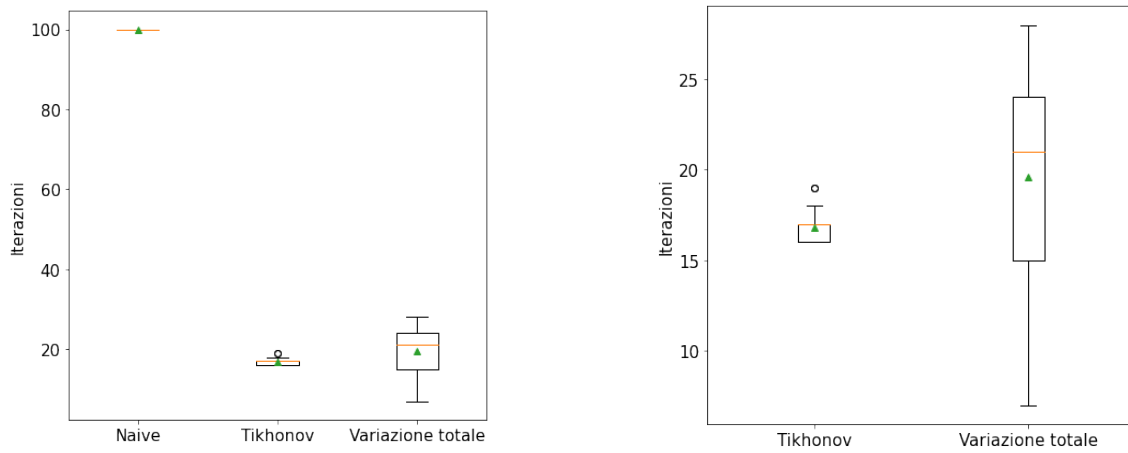


Figura 27: Boxplot per il numero di iterazioni

	Tikhonov	Variazione totale
Intervallo ( <i>outlier</i> esclusi)	[16, 18]	[15, 28]
Media	16.79	19.59
Mediana	17	21
Deviazione standard	0.75	5.47

Anche a livello di numero di iterazioni, il metodo naive ha avuto il risultato peggiore, terminando al raggiungimento del numero massimo di iterazioni.

La regolarizzazione di Tikhonov ha richiesto un numero di iterazioni contenuto e coerente, mentre la regolarizzazione tramite variazione totale ha mostrato dati più diradati e meno prevedibili come testimoniato dal valore della deviazione standard.

In linea di massima, considerando la complessità dei termini di regolarizzazione e gli esperimenti effettuati, il tempo di esecuzione richiesto per la regolarizzazione tramite variazione totale è in generale maggiore rispetto a Tikhonov.

## 5.2 Esecuzioni sul dataset

Rispetto alle otto immagini contenute nel dataset utilizzato, sono state eseguite diverse misurazioni al variare della dimensione del kernel, del valore di  $\sigma_{\text{kernel}}$  e della deviazione standard del rumore. Per tutte le esecuzioni è stato scelto il valore del parametro di regolarizzazione utilizzando lo stesso procedimento iterativo della sezione 2.

I risultati in forma aggregata sono i seguenti:

		MSE			PSNR		
Kernel	Noise	Naive	Tikhonov	Var. tot.	Naive	Tikhonov	Var. tot.
$7 \times 7$ $\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.19 \cdot 10^0$	$0.40 \cdot 10^{-2}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	7.14	24.16	36.94
$7 \times 7$ $\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	$0.24 \cdot 10^{-3}$	-0.16	25.85	36.42
$7 \times 7$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.76 \cdot 10^0$	$0.24 \cdot 10^{-2}$	$0.26 \cdot 10^{-3}$	1.21	26.36	36.07
$7 \times 7$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.12 \cdot 10^1$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.34 \cdot 10^{-3}$	-0.63	27.8	34.88
$9 \times 9$ $\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.19 \cdot 10^0$	$0.40 \cdot 10^{-2}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	7.13	24.16	36.9
$9 \times 9$ $\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	-0.17	25.85	36.42
$9 \times 9$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.76 \cdot 10^0$	$0.24 \cdot 10^{-2}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	1.18	26.35	36.16
$9 \times 9$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.53 \cdot 10^0$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.36 \cdot 10^{-3}$	2.73	27.77	34.68
$25 \times 25$ $\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.42 \cdot 10^0$	$0.37 \cdot 10^{-2}$	$0.19 \cdot 10^{-3}$	3.81	24.48	37.21
$25 \times 25$ $\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.81 \cdot 10^0$	$0.28 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	0.92	25.65	36.45
$25 \times 25$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.78 \cdot 10^0$	$0.25 \cdot 10^{-2}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	1.09	26.21	36.16
$25 \times 25$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.35 \cdot 10^0$	$0.18 \cdot 10^{-2}$	$0.35 \cdot 10^{-3}$	4.58	27.64	34.71
$7 \times 7$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.2$	$0.19 \cdot 10^2$	$0.74 \cdot 10^{-2}$	$0.88 \cdot 10^{-3}$	-12.75	21.46	30.64
$9 \times 9$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.2$	$0.88 \cdot 10^1$	$0.71 \cdot 10^{-2}$	$0.87 \cdot 10^{-3}$	-9.46	21.63	30.7
$25 \times 25$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.2$	$0.53 \cdot 10^1$	$0.71 \cdot 10^{-2}$	$0.90 \cdot 10^{-3}$	-7.2	21.61	30.53
$51 \times 51$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.2$	$0.52 \cdot 10^1$	$0.71 \cdot 10^{-2}$	$0.90 \cdot 10^{-3}$	-7.19	21.63	30.51
$95 \times 95$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.2$	$0.53 \cdot 10^1$	$0.71 \cdot 10^{-2}$	$0.90 \cdot 10^{-3}$	-7.21	21.62	30.55

Come in tutti i casi precedenti, la ricostruzione naive ha prodotto soluzioni completamente distanti dall'immagine reale.

Si nota che, variando la dimensione del kernel fissati  $\sigma_{\text{kernel}}$  e  $\sigma_{\text{noise}}$ , il risultato ottenuto differisce tra i diversi casi di piccole quantità e non appaiono particolari correlazioni.

È evidente, invece, un fenomeno ricorrente nella precisione di ricostruzione per i metodi regolarizzati all'aumentare di  $\sigma_{\text{kernel}}$ : con Tikhonov la fedeltà della soluzione rispetto all'immagine reale è maggiore all'aumentare di  $\sigma_{\text{kernel}}$ , mentre per la variazione totale il fenomeno è inverso, generando una ricostruzione meno accurata.

Kernel	Noise	MSE		PSNR	
		Tikhonov	Var. tot.	Tikhonov	Var. tot.
$9 \times 9$ $\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.40 \cdot 10^{-2}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	24.16	36.9
$9 \times 9$ $\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	25.85	36.42
$9 \times 9$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.24 \cdot 10^{-2}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	26.35	36.16
$9 \times 9$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.36 \cdot 10^{-3}$	27.77	34.68
$9 \times 9$ $\sigma = 4$	$\sigma = 0.05$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.39 \cdot 10^{-3}$	28.14	34.24
$9 \times 9$ $\sigma = 5$	$\sigma = 0.05$	$0.15 \cdot 10^{-2}$	$0.42 \cdot 10^{-3}$	28.31	33.85
$9 \times 9$ $\sigma = 10$	$\sigma = 0.05$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.58 \cdot 10^{-3}$	27.97	32.55
$9 \times 9$ $\sigma = 15$	$\sigma = 0.05$	$0.18 \cdot 10^{-2}$	$0.58 \cdot 10^{-3}$	27.71	32.52
$9 \times 9$ $\sigma = 30$	$\sigma = 0.05$	$0.19 \cdot 10^{-2}$	$0.59 \cdot 10^{-3}$	27.36	32.43
$9 \times 9$ $\sigma = 60$	$\sigma = 0.05$	$0.20 \cdot 10^{-2}$	$0.64 \cdot 10^{-3}$	27.19	32.1
$9 \times 9$ $\sigma = 100$	$\sigma = 0.05$	$0.21 \cdot 10^{-2}$	$0.59 \cdot 10^{-3}$	27.08	32.42
$9 \times 9$ $\sigma = 200$	$\sigma = 0.05$	$0.21 \cdot 10^{-2}$	$0.61 \cdot 10^{-3}$	27.04	32.29

Analizzando più nel dettaglio il fenomeno, fissata una dimensione del kernel e variando il valore di  $\sigma_{\text{kernel}}$ , si nota lo stesso comportamento visto in sezione 2.

Il risultato prodotto da Tikhonov, su immagini a cui è stato applicato un blur di ordini di grandezza contenuti, produce una soluzione molto simile all'immagine acquisita, mentre aumentando il fattore di blur, il risultato tende ad essere migliore fino ad una soglia dopo la quale inizia a decrescere.

Il metodo tramite variazione totale, invece, ha un comportamento più lineare e all'aumentare di  $\sigma_{\text{kernel}}$  decresce la qualità della ricostruzione.

## 6 Risultati su immagini complesse

### 6.1 Notte Stellata

Utilizzando un blur con kernel  $9 \times 9$ ,  $\sigma = 0.5$  e un rumore con deviazione standard 0.05:

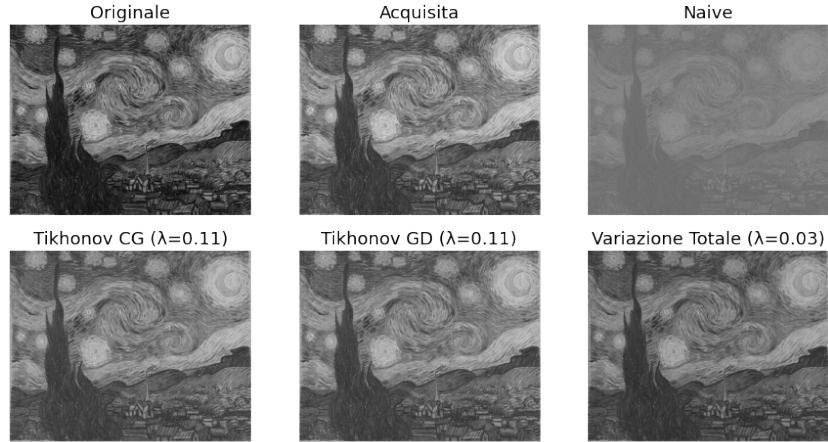


Figura 28: Deblur applicato sulla Notte Stellata

	Acquisita	Naive	Tikhonov	Variazione totale
MSE	$0.531 \cdot 10^{-2}$	$0.204 \cdot 10^0$	$0.712 \cdot 10^{-2}$	$0.502 \cdot 10^{-2}$
PSNR	22.75	6.91	21.47	22.99

Utilizzando un blur con kernel  $25 \times 25$ ,  $\sigma = 3$  e un rumore con deviazione standard 0.1:

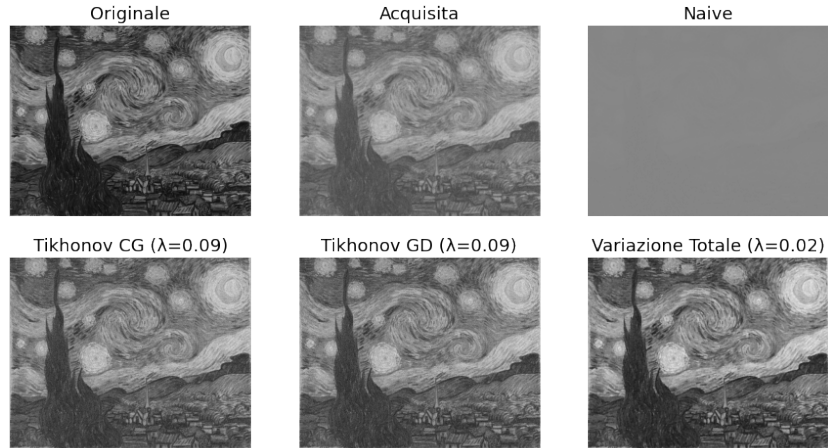


Figura 29: Deblur applicato sulla Notte Stellata

	Acquisita	Naive	Tikhonov	Variazione totale
MSE	$0.173 \cdot 10^{-1}$	$0.212 \cdot 10^2$	$0.105 \cdot 10^{-1}$	$0.818 \cdot 10^{-2}$
PSNR	17.61	-13.26	19.80	20.87

### 6.1.1 Analisi

Come già osservato più volte, il risultato ottenuto con il metodo naive in tutti i casi è molto instabile, mentre con Tikhonov vengono prodotti risultati significativi con valori di  $\sigma_{\text{kernel}}$  non troppo piccoli.

Per la regolarizzazione tramite variazione totale, invece, a differenza dei casi precedentemente analizzati, ha sempre prodotto la soluzione migliore ma con valori di PSNR molto vicini all'immagine corrotta nel primo caso e non troppo distanti da Tikhonov nel secondo. È inoltre possibile osservare il problema di semi-convergenza in una forma molto contenuta:

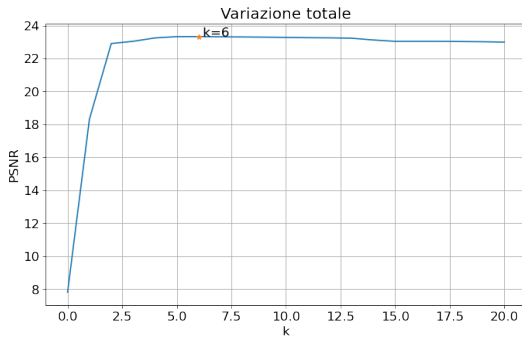


Figura 30: PSNR per la 1<sup>a</sup> esecuzione

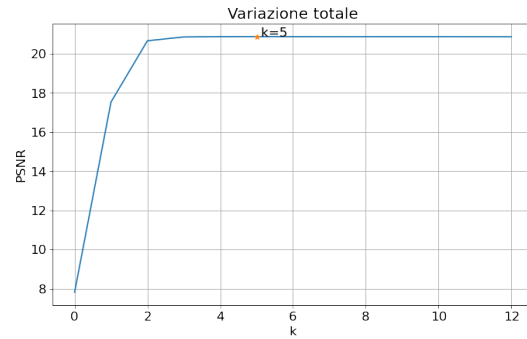


Figura 31: PSNR per la 2<sup>a</sup> esecuzione

## 6.2 Cielo stellato

Utilizzando un blur con kernel  $25 \times 25$ ,  $\sigma = 3$  e un rumore con deviazione standard 0.05:

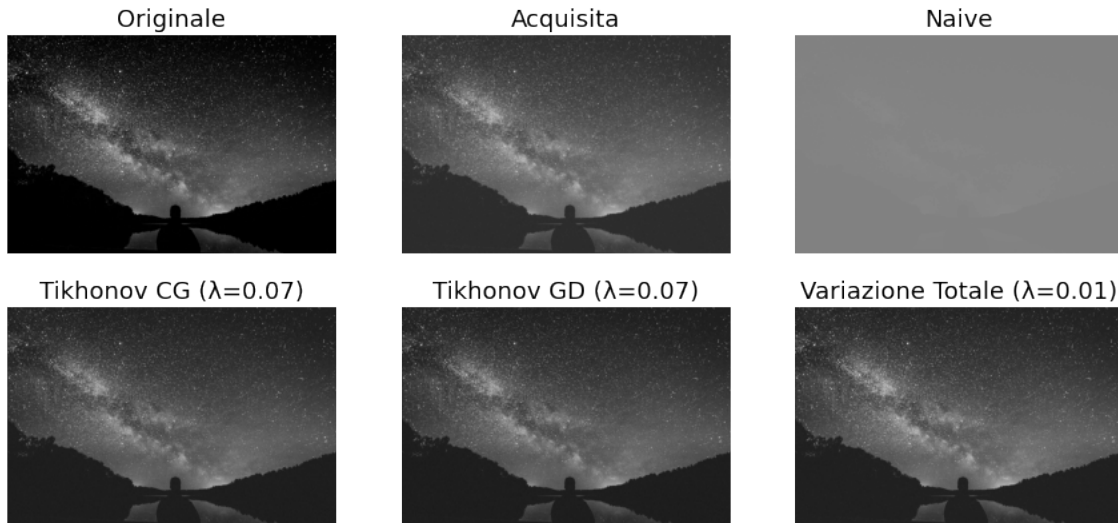


Figura 32: Deblur applicato sul cielo stellato

	Acquisita	Naive	Tikhonov	Variazione totale
MSE	$0.567 \cdot 10^{-2}$	$0.524 \cdot 10^1$	$0.35 \cdot 10^{-2}$	$0.289 \cdot 10^{-2}$
PSNR	22.47	-7.19	24.55	25.39

### 6.2.1 Analisi

Anche in questo caso, il risultato ottenuto è del tutto simile alle analisi precedenti. Non utilizzando più immagini "semplici", i metodi regolarizzati hanno prodotto risultati molto simili, anche se comunque la variazione totale presenta soluzioni migliori. Un aspetto particolare di questa esecuzione è che la semiconvergenza della regolarizzazione di Tikhonov ha assunto un comportamento simile a quello della variazione totale:

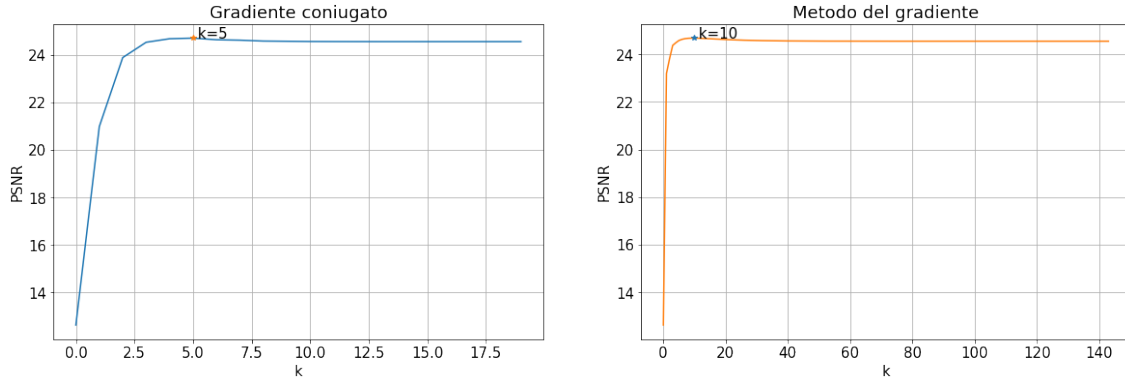


Figura 33: Variazione del PSNR per Tikhonov

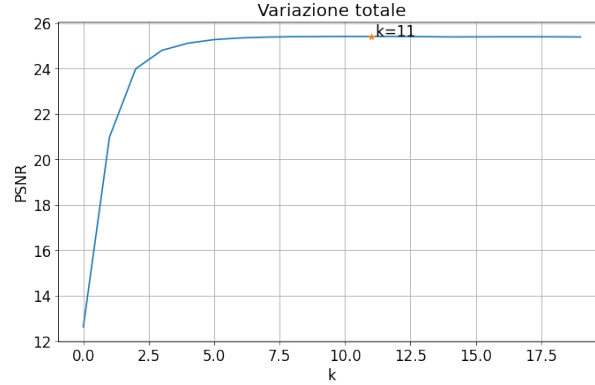


Figura 34: Variazione del PSNR per la variazione totale

## 7 Conclusioni

### 7.1 Metodo naive

Si può confermare che il processo di deblur risolvendo il problema ai minimi quadrati senza regolarizzazione è una soluzione estremamente mal condizionata e inaffidabile che richiede anche un numero di iterazioni molto elevato per raggiungere convergenza.

Utilizzando un'immagine che non è soggetta a rumore, invece, il risultato prodotto è molto vicino a quello reale e tende ad essere un approccio migliore rispetto ai metodi regolarizzati.

### 7.2 Regolarizzazione di Tikhonov

Il metodo di regolarizzazione di Tikhonov si è rivelato utile su immagini con un blur di determinati ordini di grandezza. Infatti, se il blur è molto contenuto, la soluzione prodotta tende ad essere del tutto simile all'immagine acquisita, mentre per valori di blur più elevati si riesce a produrre un risultato più vicino all'immagine reale.

In termini di prestazioni invece, il metodo converge in un numero di iterazioni non troppo variabile e in tempo contenuto.

### 7.3 Regolarizzazione tramite variazione totale

Il metodo di regolarizzazione tramite variazione totale è invece il metodo che, tra quelli utilizzati, produce la soluzione migliore.

A differenza degli altri metodi, si è notato che è soggetto al problema di semi-convergenza in modo molto controllato e produce in tutti i casi analizzati una buona approssimazione dell'immagine reale.

A livello di velocità, il numero di iterazioni richiesto in forma aggregata ha prodotto una deviazione standard abbastanza elevata e per questo tende a non essere prevedibile. Anche sperimentalmente, il tempo di esecuzione è solitamente stato maggiore rispetto a Tikhonov. Bisogna anche ricordare che applicato a immagini più complesse, il metodo ha prodotto ricostruzioni qualitativamente meno vicine alla realtà ed è stato analizzato un caso in cui la soluzione era molto simile a quella prodotta da Tikhonov. Ciò apre a scenari in cui, nonostante la variazione totale produca soluzioni migliori, è potenzialmente più conveniente optare per la regolarizzazione di Tikhonov.



## Bibliografia

- [1] Chiara Gentile. “Metodo del gradiente coniugato per problemi ai minimi quadrati non lineari”. Tesi di Laurea. Università di Bologna, 2016, pp. 10–11. URL: [https://amslaurea.unibo.it/12187/1/Chiara\\_Gentile.pdf](https://amslaurea.unibo.it/12187/1/Chiara_Gentile.pdf).
- [2] Roberto Ferri. “Metodologie per l’identificazione e la regolarizzazione dei carichi esterni su strutture alari a partire da misure di deformazione”. Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2021, p. 57. URL: <https://webthesis.biblio.polito.it/20920/1/tesi.pdf>.
- [3] Silvia Gazzola, Paolo Novati e Maria Rosaria Russo. *On Krylov projection methods and Tikhonov regularization*, p. 2. URL: [https://www.math.unipd.it/~gazzola/Survey\\_Krylov\\_Tikhonov.pdf](https://www.math.unipd.it/~gazzola/Survey_Krylov_Tikhonov.pdf).