

# IMAGING

Deblur

Relazione

**Cheikh Ibrahim · Zaid**

Matricola: 0000974909

**Xia · Tian Cheng**

Matricola: 0000975129

Anno accademico

2021 — 2022

Corso di Calcolo Numerico

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

# 1 Introduzione

Il progetto consiste nel ricostruire un'immagine a partire da una sua istanza alterata da uno sfocamento noto e un rumore casuale.

Si tratta di un problema solitamente affrontato elaborando immagini provenienti da un dispositivo di acquisizione che nel suo processo di cattura deve digitalizzare un segnale analogico.

La soluzione di tale problema viene formulata come problema ai minimi quadrati:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

dove  $A$  è l'operatore di blur,  $x$  l'immagine ricostruita e  $b$  l'immagine acquisita.

Per la risoluzione sono note diverse formulazioni. Quelle impiegate sono:

- Metodo naive  $\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ . Questo approccio è noto essere mal condizionato.
- Regolarizzazione di Tikhonov  $\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2$
- Regolarizzazione tramite variazione totale  $\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \phi_{TV}(x)$

Per misurare la qualità dei risultati verranno impiegate due metriche:

- Mean Squared Error (MSE) è un valore sempre positivo che può essere usato per stimare una misura qualitativa.  
La presenza del quadrato permette di "esagerare" il valore ottenuto in presenza di errori elevati e di minimizzare in presenza di errori piccoli.
- Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) è una metrica usata per valutare la qualità di ricostruzione di un'immagine o un video.  
Se due immagini sono identiche, il  $PSNR = \infty$ . Quindi maggiore è il PSNR, maggiore è la vicinanza tra le immagini confrontate.

## 2 Esecuzione preliminare

Per avere una visione sul comportamento delle varie formulazioni, è stata eseguita una prima sperimentazione sull'immagine in Figura 1

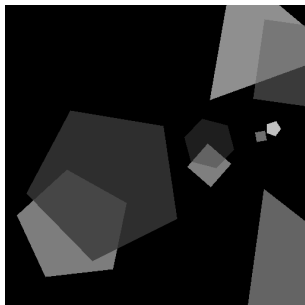


Figura 1: Immagine di test

### 2.1 Prima esecuzione

La prima esecuzione è stata effettuata con un blur generato da un kernel  $5 \times 5$  con  $\sigma = 0.5$  e rumore gaussiano con deviazione standard 0.05.

#### 2.1.1 Stima di lambda

Per eseguire i metodi regolarizzati è necessario prima determinare il valore  $\lambda$  del parametro di regolarizzazione.

Esistono condizioni che permettono di determinare se un valore di  $\lambda$  sia accettabile o meno. In questo progetto verrà determinato utilizzando una ricerca iterativa del punto migliore.

Il seguente grafico mostra il valore del PSNR al variare di  $\lambda \in [0.01, 1]$  con passo 0.01 per Tikhonov:

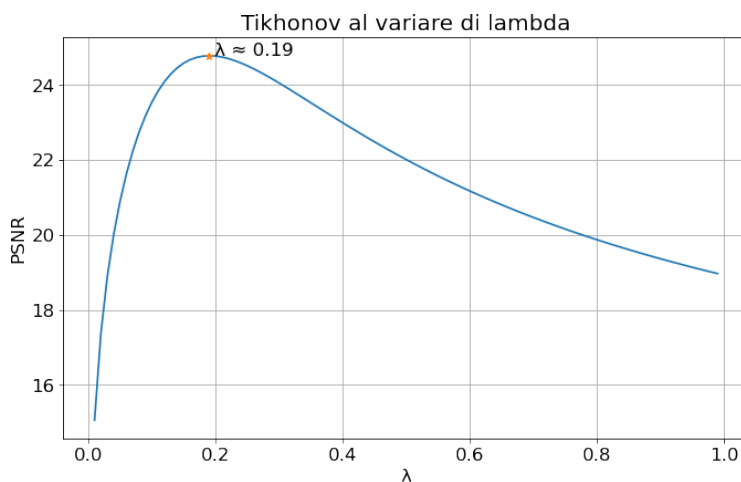


Figura 2:  $\lambda = 0.19$  e  $\text{PSNR} \simeq 24.79$

Analogamente, il seguente grafico mostra la variazione del PSNR per  $\lambda \in [0.01, 1]$  con passo 0.01 per la variazione totale:

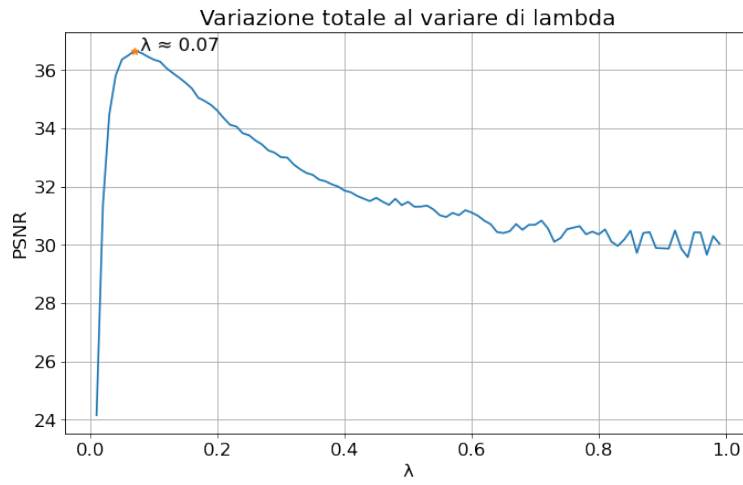


Figura 3:  $\lambda = 0.07$  e  $\text{PSNR} \simeq 36.74$

### 2.1.2 Risultato

Fissati i valori di  $\lambda$ , il risultato ottenuto è il seguente:

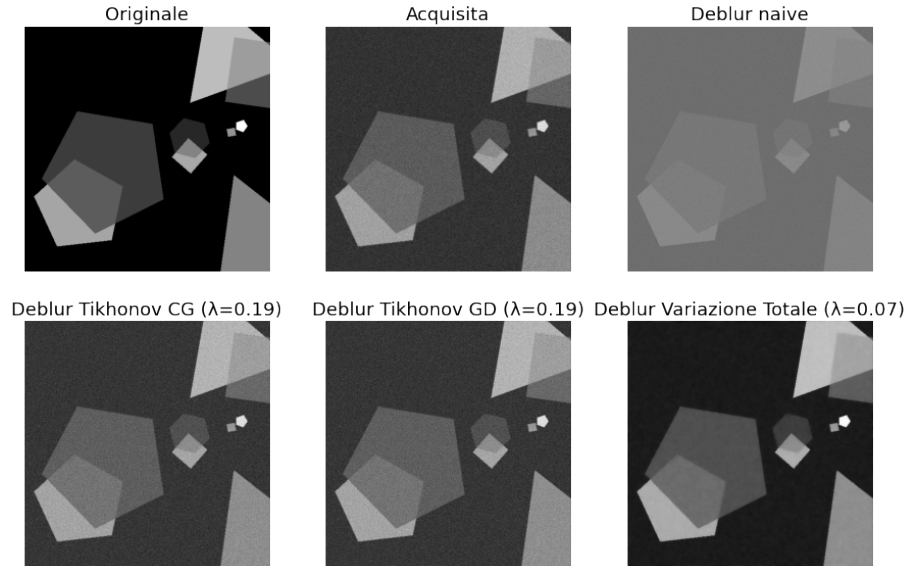


Figura 4: Risultato del processo di deblur

	Acquisita	Naive	Tikhonov CG	Tikhonov GD	Variazione totale
MSE	$0.2699 \cdot 10^{-2}$	$0.2047 \cdot 10^0$	$0.33197 \cdot 10^{-2}$	$0.3320 \cdot 10^{-2}$	$0.2119 \cdot 10^{-3}$
PSNR	25.6878	6.8874	24.7890	24.7890	36.7382
Iter.		140	14	48	14

Come atteso, la ricostruzione ottenuta con la formulazione come problema ai minimi quadrati senza regolarizzazione ha prodotto un'immagine molto distante dall'originale. Utilizzando la regolarizzazione di Tikhonov, si è ottenuto un risultato quasi invariato rispetto all'immagine acquisita se non addirittura peggiore, mentre, a livello di velocità, il metodo del gradiente ha richiesto più iterazioni rispetto al metodo del gradiente coniugato. Con la regolarizzazione tramite variazione totale, il risultato ottenuto è invece migliore rispetto agli altri metodi e visivamente molto vicina all'immagine originale.

## 2.2 Seconda esecuzione

Per vedere le prestazioni di Tikhonov in uno scenario differente, è stata effettuata una seconda esecuzione sulla stessa immagine di partenza con blur ottenuto da un kernel  $25 \times 25$  con  $\sigma = 3$  e rumore con deviazione standard 0.05.

### 2.2.1 Stima di lambda

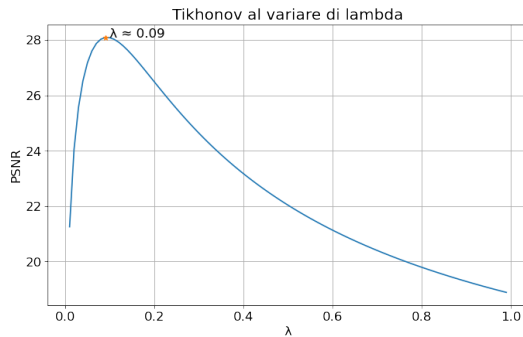


Figura 5:  $\lambda = 0.09$  e  $\text{PSNR} \simeq 28.09$

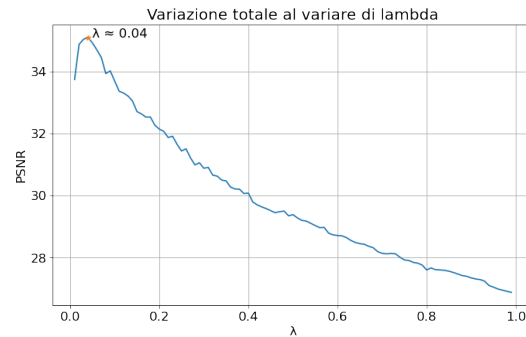


Figura 6:  $\lambda = 0.04$  e  $\text{PSNR} \simeq 35.09$

### 2.2.2 Risultato

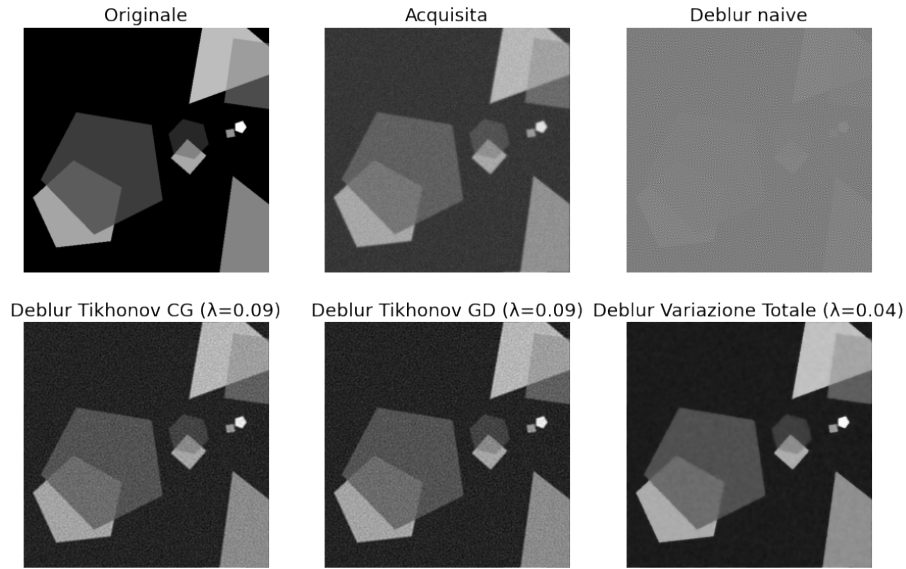


Figura 7: Risultato del processo di deblur

	Acquisita	Naive	Tikhonov CG	Tikhonov GD	Variazione totale
MSE	$0.3204 \cdot 10^{-2}$	$0.5719 \cdot 10^{-1}$	$0.1553 \cdot 10^{-2}$	$0.1553 \cdot 10^{-2}$	$0.3094 \cdot 10^{-3}$
PSNR	24.9437	-7.5735	28.0889	28.0890	35.0944
Iter.		200 (max)	18	99	29

Anche in questo caso, il metodo naive non ha prodotto soluzioni accettabili, mentre la regolarizzazione tramite variazione totale ha prodotto il risultato migliore. Il metodo regolarizzato con Tikhonov, a differenza dell'esecuzione precedente, ha prodotto un risultato migliore dell'immagine acquisita e, analogamente, il numero di iterazioni del metodo che minimizza con il gradiente coniugato è minore rispetto al metodo del gradiente.

## 3 Confronto tra gradiente coniugato e metodo del gradiente

Si analizzano ora le prestazioni di Tikhonov utilizzando i due metodi di discesa implementati, focalizzando l'attenzione sulla velocità e precisione.

### 3.1 Prima esecuzione

Per una prima sperimentazione si è usata la Figura 1 con kernel  $5 \times 5$  con  $\sigma = 0.5$  e rumore gaussiano con deviazione standard 0.05.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

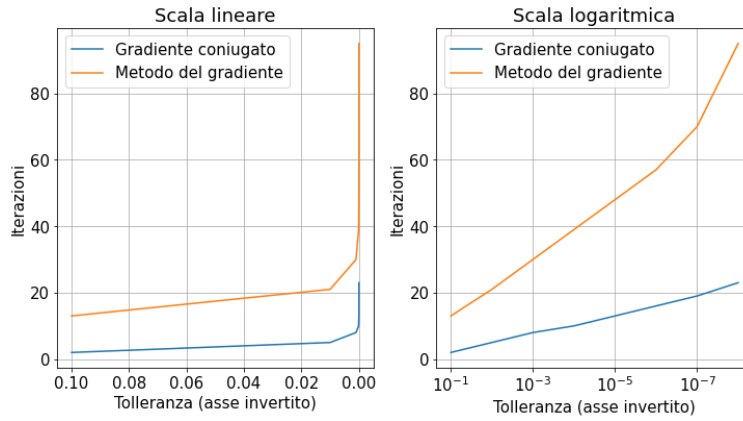


Figura 8: Numero di iterazioni al variare della tolleranza

È immediato notare che il metodo del gradiente coniugato necessita di meno iterazioni rispetto al metodo del gradiente prima di raggiungere le condizioni di convergenza.

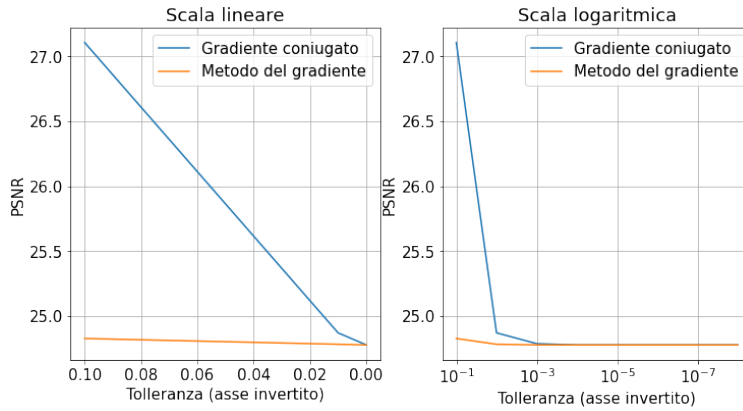


Figura 9: PSNR al variare della tolleranza

A livello di precisione, il risultato ottenuto mostra che i due metodi, al variare della tolleranza, convergono allo stesso risultato.

È però presente un comportamento controintuitivo in vicinanza di valori di tolleranza elevati. Infatti si ottiene un PSNR maggiore in corrispondenza di tali valori, in altri termini, si ottiene un'immagine più fedele all'originale con meno iterazioni, mentre il risultato peggiora nella continuazione dell'esecuzione (tale problematica verrà approfondita nella sezione 4).

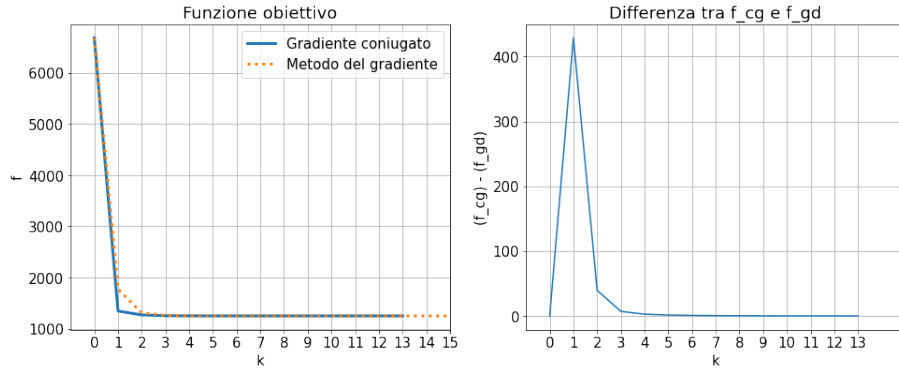


Figura 10: Andamento della funzione obiettivo

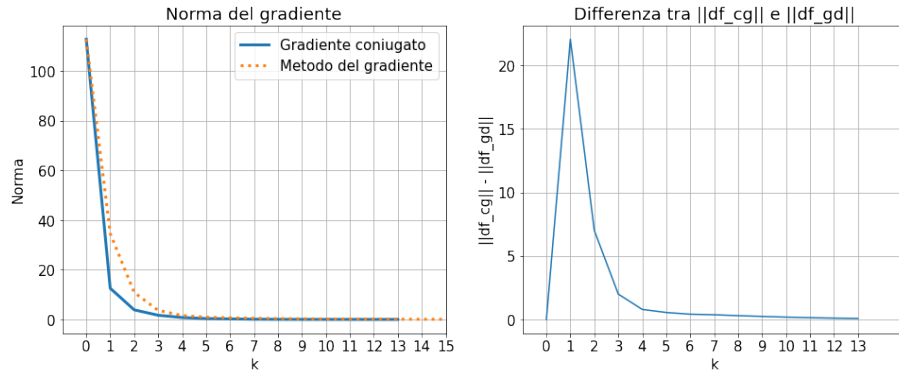


Figura 11: Andamento della norma del gradiente

Infine, come atteso dai risultati precedenti, per il metodo del gradiente coniugato la decrescita della funzione obiettivo è maggiore rispetto al metodo del gradiente. Lo stesso risultato è osservabile con la norma del gradiente che nel caso del gradiente coniugato esegue passi di dimensione maggiore.

### 3.2 Seconda esecuzione

Per una seconda valutazione si è usato un kernel  $25 \times 25$  con  $\sigma = 3$  e rumore gaussiano con deviazione standard 0.05.



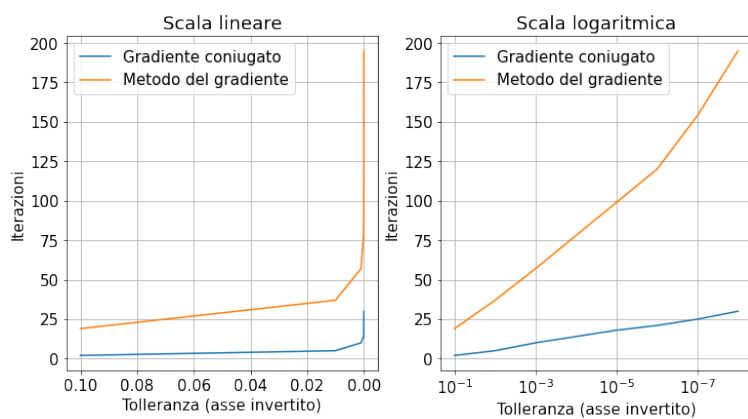


Figura 12: Numero di iterazioni al variare della tolleranza

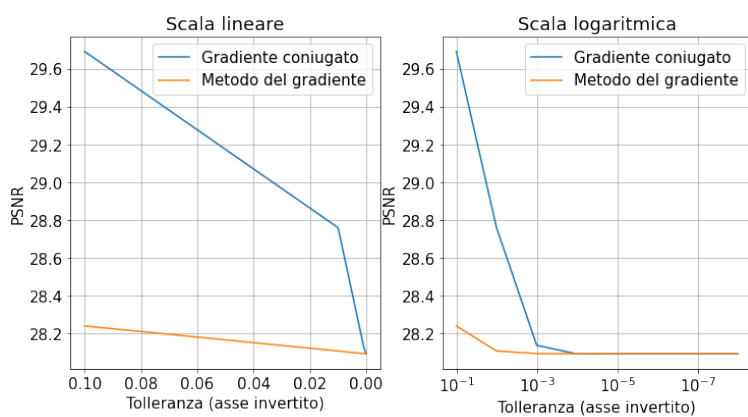


Figura 13: PSNR al variare della tolleranza

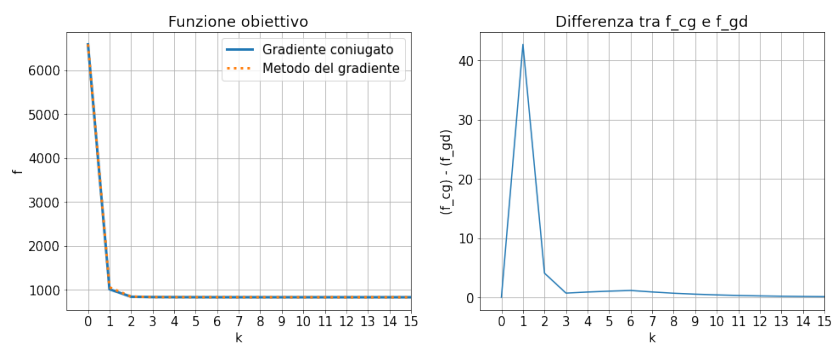


Figura 14: Andamento della funzione obiettivo

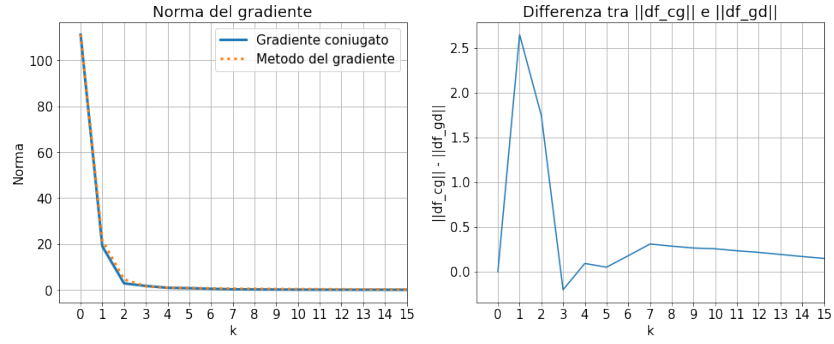


Figura 15: Andamento della norma del gradiente

I risultati ottenuti sono in linea con quelli precedenti ed evidenziano che le prestazioni del gradiente coniugato sono maggiori rispetto a quelle del metodo del gradiente, come atteso dalle analisi teoriche. Infatti le immagini utilizzate sono a sfondo omogeneo e tendono ad essere molto vicine alla forma di una matrice sparsa per la quale il metodo del gradiente coniugato ha buone prestazioni.

La soluzione calcolata invece, escludendo valori di tolleranza elevati, converge intorno allo stesso valore e per questo motivo è, in generale, indifferente utilizzare l'implementazione del deblur con i due metodi di discesa. Ovviamente per questioni di velocità, si preferisce utilizzare il metodo implementato con il gradiente coniugato.

## 4 Semi-convergenza

Nella sezione 3 è emerso il problema per cui l'immagine ottenuta con meno iterazioni è migliore rispetto a quella ottenuta quando il metodo raggiunge convergenza. Tale problema è noto come semi-convergenza [1][2][3], ovvero quando il raggiungimento dell'ottimo non corrisponde al soddisfacimento delle condizioni di convergenza e per questo le iterazioni successive peggiorano il risultato.

Nel contesto del deblur, il problema di semi-convergenza è causato dal rumore aggiunto all'immagine. È noto che il metodo naive è quello che più viene condizionato dal rumore e per questa ragione vengono introdotti i metodi di regolarizzazione.

Si analizza quindi il risultato dei vari metodi valutando l'andamento del PSNR rispetto all'iterato  $x_k$ :

## 4.1 Analisi con rumore

### 4.1.1 Metodo naïve

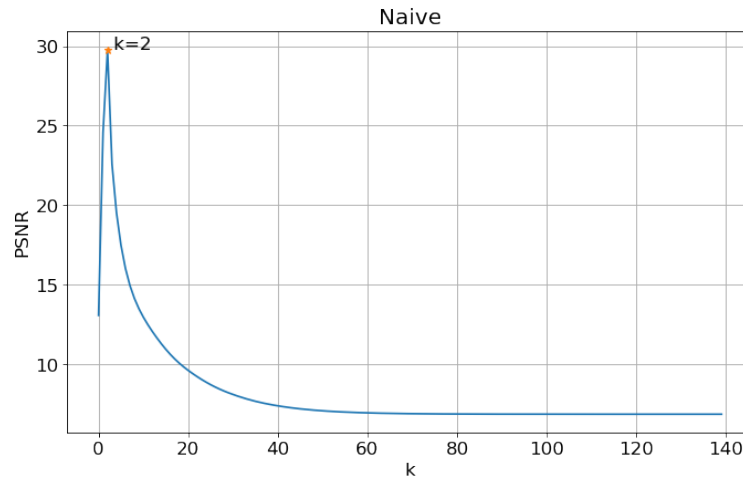


Figura 16: PSNR al variare del numero delle iterazioni

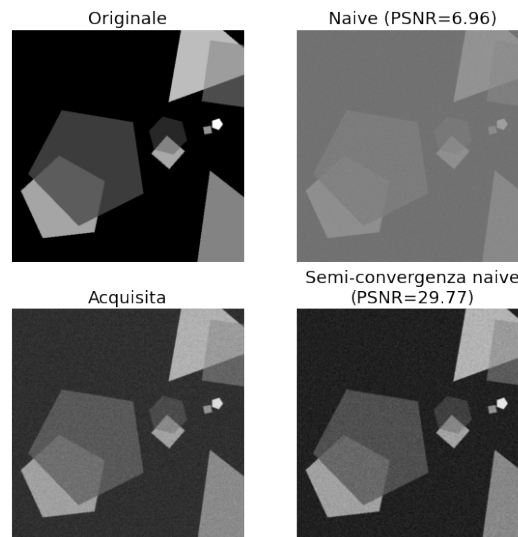


Figura 17: Risultato ottenuto

Come atteso, il risultato viene distorto molto rapidamente e non viene raggiunta convergenza nel punto ottimo.

### 4.1.2 Regolarizzazione di Tikhonov

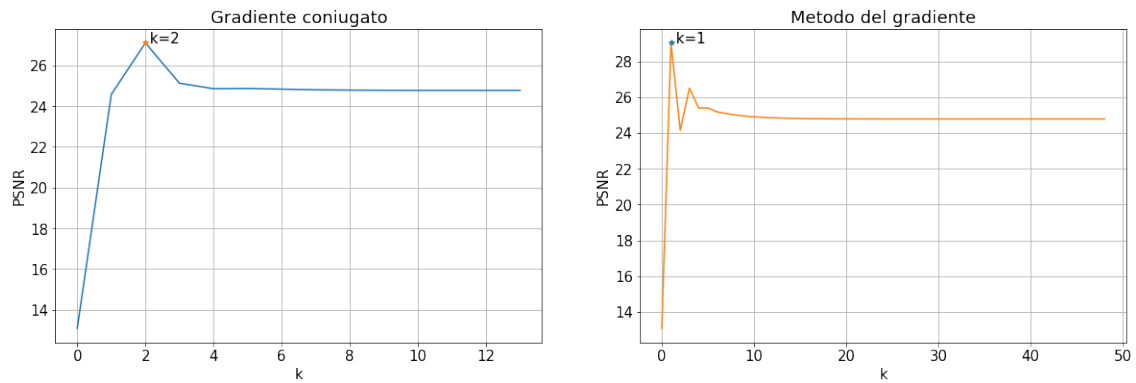


Figura 18: PSNR al variare del numero delle iterazioni

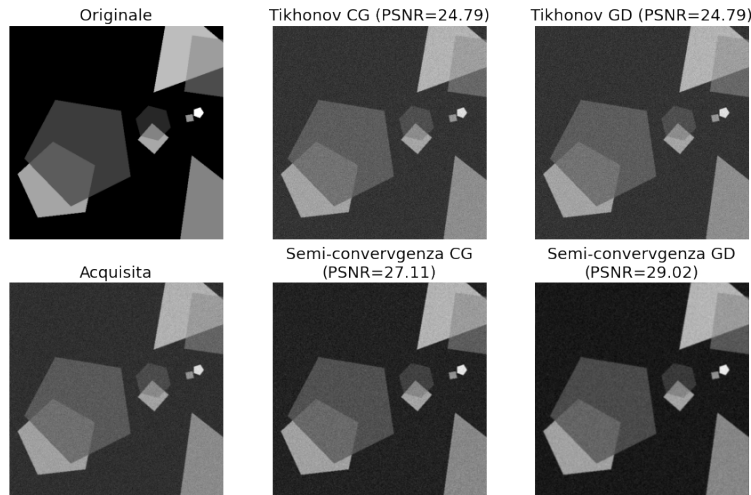


Figura 19: Risultato ottenuto

La regolarizzazione di Tikhonov viene introdotta per ridurre l'impatto del rumore sul risultato finale. Infatti si nota che, nonostante sia ancora presente il problema di semi-convergenza, dopo il punto di ottimo l'errore decresce di una quantità più contenuta rispetto al metodo naive fino ad assumere un comportamento asintotico.

### 4.1.3 Regolarizzazione tramite variazione totale

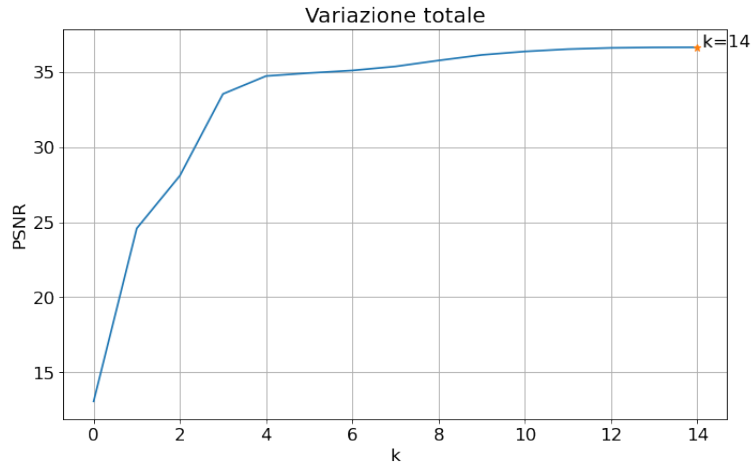


Figura 20: PSNR al variare del numero delle iterazioni

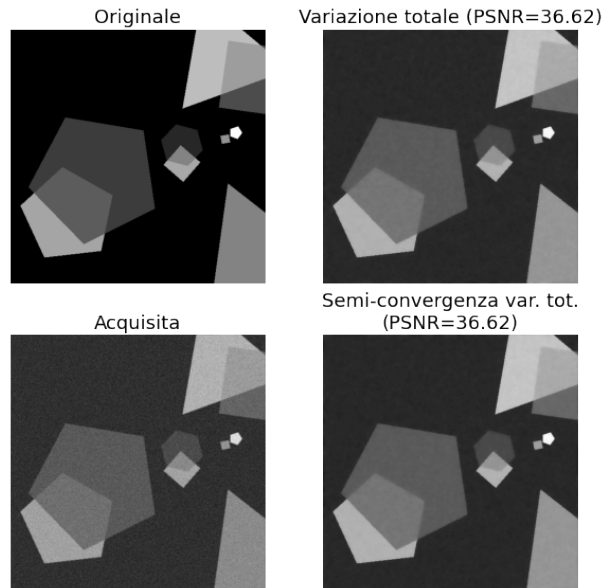


Figura 21: Risultato ottenuto

Regolarizzando tramite variazione totale invece, il problema di semi-convergenza è assente nel caso dell'immagine analizzata e il raggiungimento dell'ottimo avviene contemporaneamente al soddisfacimento delle condizioni di convergenza.

### 4.1.4 Considerazioni finali

Le prove precedenti sono state eseguite con kernel  $5 \times 5$  con  $\sigma = 0.5$  e kernel  $25 \times 25$  con  $\sigma = 3$ , entrambi i casi con rumore con deviazione standard 0.05.

Nel caso generale, non è possibile risolvere il problema di semi-convergenza interrompendo l'esecuzione quando si rileva un punto di massimo. Un controesempio è il caso del metodo del gradiente in Figura 18, infatti, l'andamento del PSNR può assumere più punti di massimo locale e quindi esisteranno casi in cui il primo massimo raggiunto non sarà necessariamente la soluzione ottima.

## 4.2 Analisi senza rumore

Si eseguono ora gli stessi esperimenti su un'immagine a cui è stato applicato un blur senza aggiungere rumore.

Un aspetto da tenere in considerazione è che la ricerca del parametro di regolarizzazione  $\lambda$  ha prodotto risultati tendenti a 0. Per evitare di annullare il termine di regolarizzazione, riconducendosi al metodo naive, è stato scelto un valore di  $\lambda$  molto piccolo.

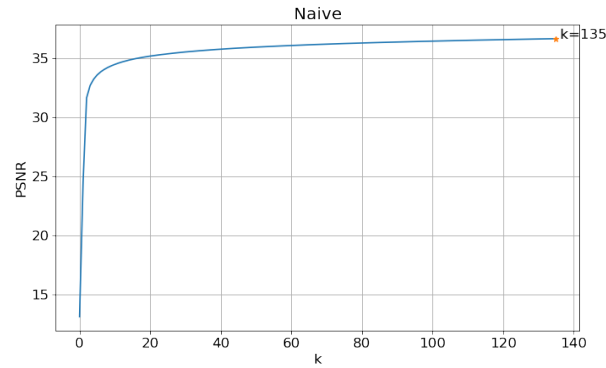


Figura 22: PSNR al variare del numero delle iterazioni con il metodo naive

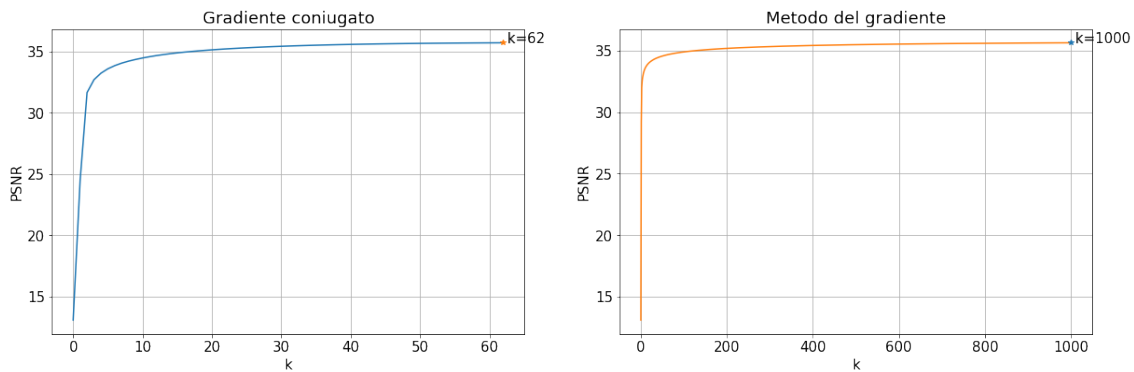


Figura 23: PSNR al variare del numero delle iterazioni con regolarizzazione di Tikhonov

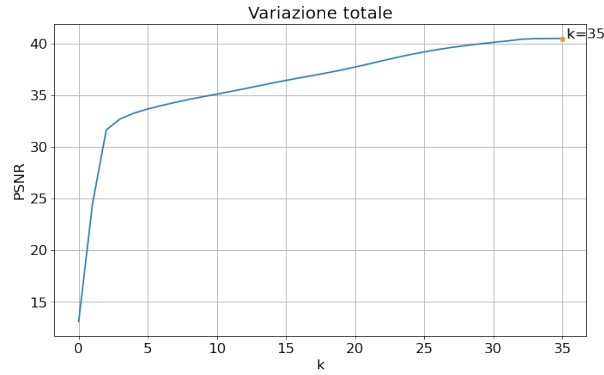


Figura 24: PSNR al variare delle iterazioni con regolarizzazione tramite variazione totale

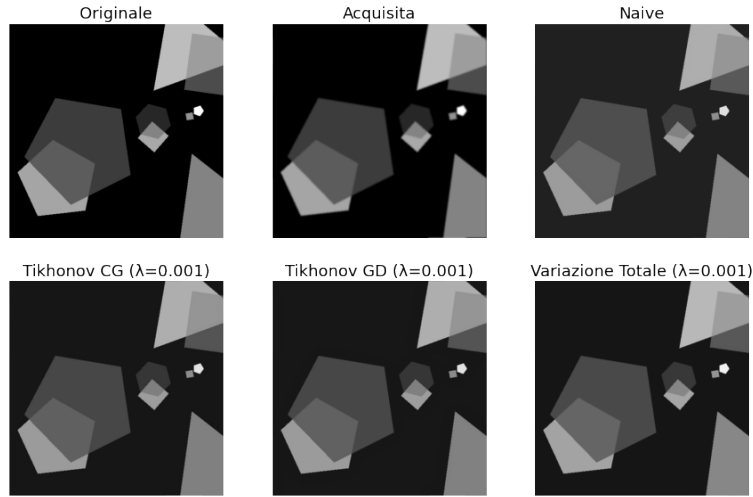


Figura 25: Risultato ottenuto

Tutti i metodi hanno raggiunto convergenza e ottimo contemporaneamente. Il risultato, in assenza di rumore, si presenta visivamente molto simile indipendentemente dalla formulazione.

## 5 Risultati su esecuzioni multiple

### 5.1 Esecuzioni su un dataset generato casualmente

Per una valutazione più generalizzata dei metodi, sono stati eseguiti dei test su un dataset di immagini contenenti poligoni regolari generati casualmente a cui è stato applicato un blur con kernel  $9 \times 9$  con  $\sigma_{blur} = 1.3$  e rumore con  $\sigma_{noise} = 0.05$ .

Come concluso in sezione 3, verrà utilizzato solamente il metodo del gradiente coniugato poiché produce, in tempo minore, lo stesso risultato del metodo del gradiente.

I risultati sono i seguenti:

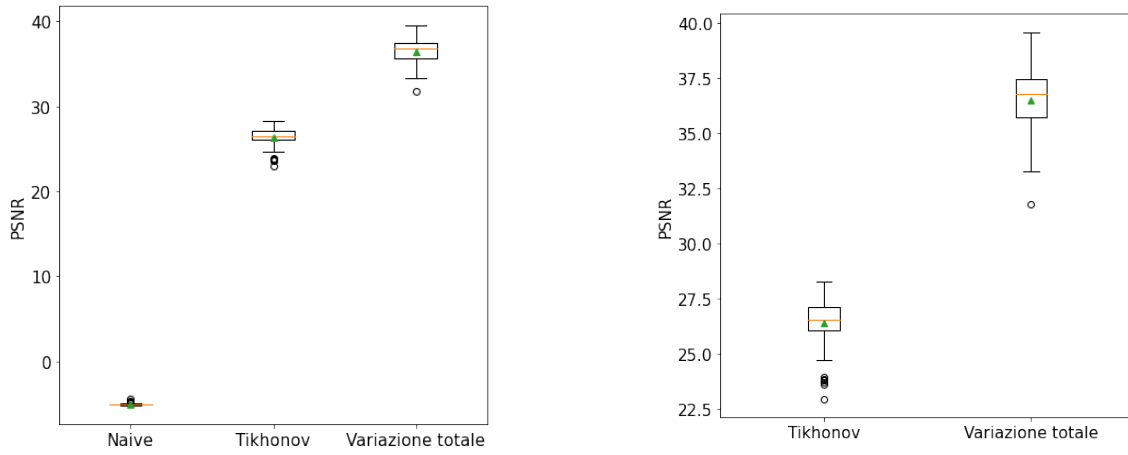


Figura 26: Boxplot al variare del PSNR

	Tikhonov	Variazione totale
Intervallo ( <i>outlier</i> esclusi)	[26.03, 28.25]	[35.71, 39.58]
Media	26.39	36.49
Mediana	26.53	36.76
Deviazione standard	1.05	1.38

In linea con i risultati precedenti, il metodo naive ha prodotto soluzioni non accettabili, mentre i metodi regolarizzati hanno un comportamento migliore ed è evidente che i risultati ottenuti regolarizzando con variazione totale sono migliori rispetto a quelli ottenuti con Tikhonov.

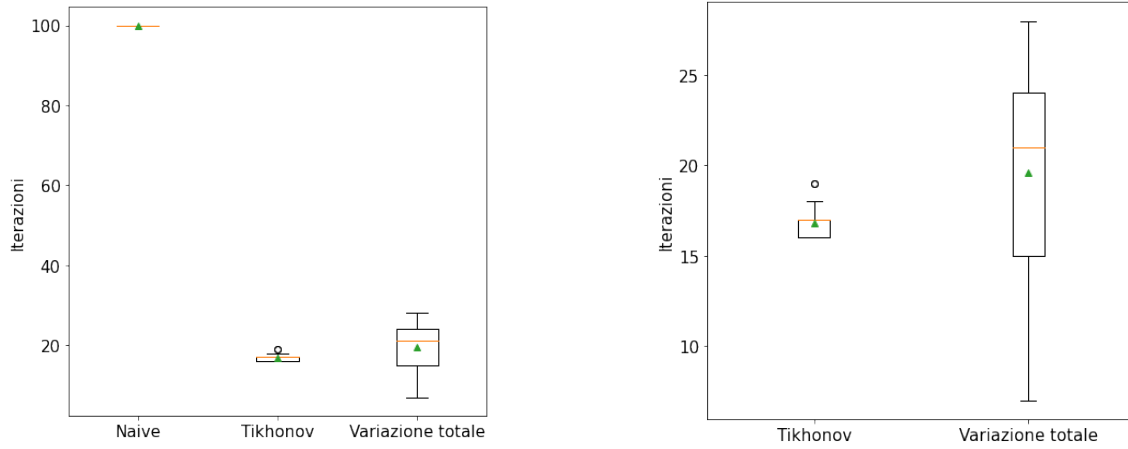


Figura 27: Boxplot al variare del numero di iterazioni

	Tikhonov	Variazione totale
Intervallo ( <i>outlier</i> esclusi)	[16, 18]	[15, 28]
Media	16.79	19.59
Mediana	17	21
Deviazione standard	0.75	5.47



Anche a livello di numero di iterazioni, il metodo naive ha avuto il risultato peggiore, terminando al raggiungimento del numero massimo di iterazioni.

La regolarizzazione di Tikhonov ha richiesto un numero di iterazioni contenuto e coerente, mentre la regolarizzazione tramite variazione totale ha mostrato dati più diradati e meno prevedibili.

In linea di massima, sperimentalmente si è notato che il tempo di esecuzione richiesto con il metodo tramite variazione totale è stato in generale maggiore rispetto a Tikhonov.

## 5.2 Esecuzioni sul dataset

Rispetto al dataset utilizzato, sono state eseguite diverse misurazioni al variare della dimensione del kernel, del valore di  $\sigma_{\text{kernel}}$  e della deviazione standard del rumore. Per tutte le esecuzioni è stato scelto il valore del parametro di regolarizzazione utilizzando lo stesso procedimento iterativo della sezione 2.

I risultati in forma aggregata sono i seguenti:

Kernel	Noise	MSE			PSNR		
		Naive	Tikhonov	Var. tot.	Naive	Tikhonov	Var. tot.
$7 \times 7$ $\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.19 \cdot 10^0$	$0.40 \cdot 10^{-2}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	7.14	24.16	36.94
$7 \times 7$ $\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	$0.24 \cdot 10^{-3}$	-0.16	25.85	36.42
$7 \times 7$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.76 \cdot 10^0$	$0.24 \cdot 10^{-2}$	$0.26 \cdot 10^{-3}$	1.21	26.36	36.07
$7 \times 7$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.12 \cdot 10^1$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.34 \cdot 10^{-3}$	-0.63	27.8	34.88
$9 \times 9$ $\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.19 \cdot 10^0$	$0.40 \cdot 10^{-2}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	7.13	24.16	36.9
$9 \times 9$ $\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	-0.17	25.85	36.42
$9 \times 9$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.76 \cdot 10^0$	$0.24 \cdot 10^{-2}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	1.18	26.35	36.16
$9 \times 9$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.53 \cdot 10^0$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.36 \cdot 10^{-3}$	2.73	27.77	34.68
$25 \times 25$ $\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.42 \cdot 10^0$	$0.37 \cdot 10^{-2}$	$0.19 \cdot 10^{-3}$	3.81	24.48	37.21
$25 \times 25$ $\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.81 \cdot 10^0$	$0.28 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	0.92	25.65	36.45
$25 \times 25$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.78 \cdot 10^0$	$0.25 \cdot 10^{-2}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	1.09	26.21	36.16
$25 \times 25$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.35 \cdot 10^0$	$0.18 \cdot 10^{-2}$	$0.35 \cdot 10^{-3}$	4.58	27.64	34.71
$9 \times 9$ $\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.1$	$0.31 \cdot 10^1$	$0.51 \cdot 10^{-2}$	$0.42 \cdot 10^{-3}$	-4.87	23.07	33.85
$25 \times 25$ $\sigma = 3$	$\sigma = 0.1$	$0.14 \cdot 10^1$	$0.36 \cdot 10^{-2}$	$0.53 \cdot 10^{-3}$	-1.51	24.63	32.88

Come in tutti i casi precedenti, la ricostruzione naive ha prodotto soluzioni completamente distanti dall'immagine reale.

Si nota, invece, un fenomeno ricorrente nella precisione di ricostruzione per i metodi regolarizzati all'aumentare di  $\sigma_{\text{kernel}}$ . Con Tikhonov la fedeltà della soluzione rispetto all'immagine reale è maggiore all'aumentare di  $\sigma_{\text{kernel}}$ , mentre per la variazione totale, il fenomeno è inverso, generando una ricostruzione meno accurata.

			MSE			PSNR		
Kernel		Noise	Naive	Tikhonov	Var. tot.	Naive	Tikhonov	Var. tot.
$9 \times 9$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	$0.19 \cdot 10^0$	$0.40 \cdot 10^{-2}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	7.13	24.16	36.9
$9 \times 9$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.05$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	-0.17	25.85	36.42
$9 \times 9$	$\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.05$	$0.76 \cdot 10^0$	$0.24 \cdot 10^{-2}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	1.18	26.35	36.16
$9 \times 9$	$\sigma = 3$	$\sigma = 0.05$	$0.53 \cdot 10^0$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.36 \cdot 10^{-3}$	2.73	27.77	34.68
$9 \times 9$	$\sigma = 4$	$\sigma = 0.05$	$0.12 \cdot 10^1$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.39 \cdot 10^{-3}$	-0.79	28.14	34.24
$9 \times 9$	$\sigma = 5$	$\sigma = 0.05$	$0.12 \cdot 10^1$	$0.15 \cdot 10^{-2}$	$0.42 \cdot 10^{-3}$	-0.91	28.31	33.85
$9 \times 9$	$\sigma = 10$	$\sigma = 0.05$	$0.85 \cdot 10^0$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.58 \cdot 10^{-3}$	0.72	27.97	32.55
$9 \times 9$	$\sigma = 15$	$\sigma = 0.05$	$0.99 \cdot 10^0$	$0.18 \cdot 10^{-2}$	$0.58 \cdot 10^{-3}$	0.06	27.71	32.52
$9 \times 9$	$\sigma = 30$	$\sigma = 0.05$	$0.14 \cdot 10^1$	$0.19 \cdot 10^{-2}$	$0.59 \cdot 10^{-3}$	-1.55	27.36	32.43
$9 \times 9$	$\sigma = 60$	$\sigma = 0.05$	$0.16 \cdot 10^1$	$0.20 \cdot 10^{-2}$	$0.64 \cdot 10^{-3}$	-2.12	27.19	32.1
$9 \times 9$	$\sigma = 100$	$\sigma = 0.05$	$0.17 \cdot 10^1$	$0.21 \cdot 10^{-2}$	$0.59 \cdot 10^{-3}$	-2.29	27.08	32.42
$9 \times 9$	$\sigma = 200$	$\sigma = 0.05$	$0.17 \cdot 10^1$	$0.21 \cdot 10^{-2}$	$0.61 \cdot 10^{-3}$	-2.38	27.04	32.29

Analizzando più nel dettaglio, fissata una dimensione del kernel e variando il valore di  $\sigma_{\text{kernel}}$ , si nota lo stesso fenomeno visto in sezione 2. Il risultato prodotto da Tikhonov, su immagini a cui è stato applicato un blur di ordini di grandezza contenuti, produce una soluzione molto simile all'immagine acquisita, mentre aumentando il fattore di blur, il risultato tende ad essere migliore fino ad una soglia dopo la quale inizia a decrescere. Il metodo tramite variazione totale, invece, ha un comportamento più lineare e e all'aumentare di  $\sigma_{\text{kernel}}$  decresce la qualità dell'immagine.

## 6 Applicazione su immagini complesse

### 6.1 Notte stellata 1

Utilizzando un blur con kernel  $9 \times 9$ ,  $\sigma = 0.5$  e un rumore con deviazione standard 0.05.

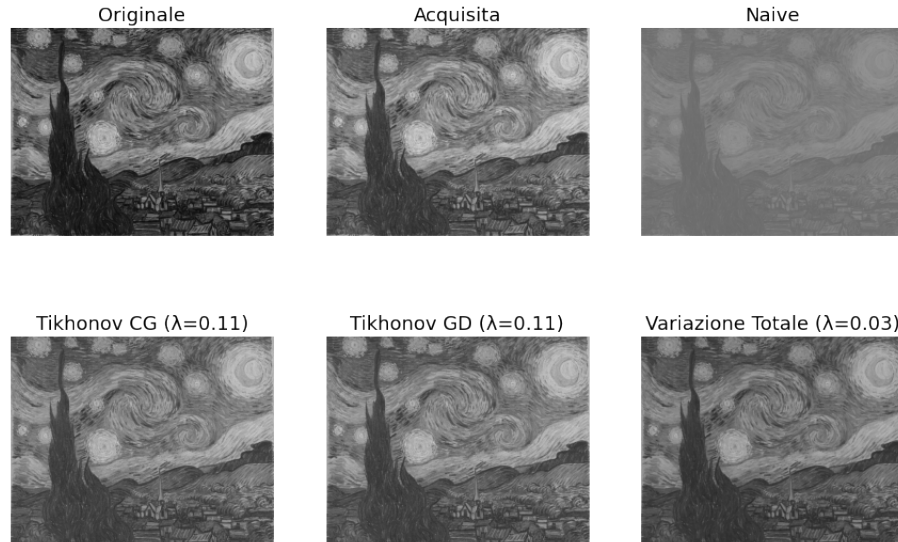


Figura 28: Deblur applicato sulla Notte Stellata

	Acquisita	Naive	Tikhonov	Variazione totale
MSE	$0.531 \cdot 10^{-2}$	$0.204 \cdot 10^0$	$0.712 \cdot 10^{-2}$	$0.502 \cdot 10^{-2}$
PSNR	22.75	6.91	21.47	22.99

## 6.2 Notte stellata 2

Utilizzando un blur con kernel  $25 \times 25$ ,  $\sigma = 3$  e un rumore con deviazione standard 0.1.

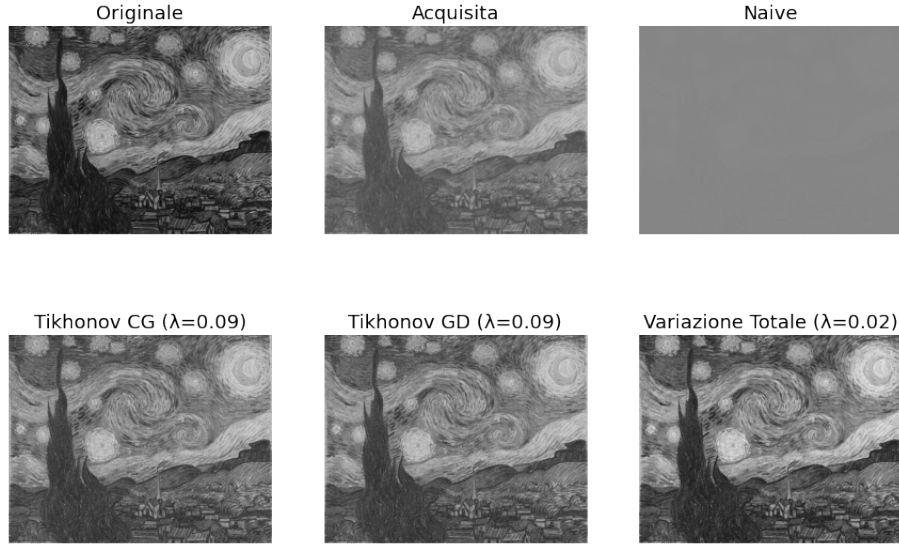


Figura 29: Deblur applicato sulla Notte Stellata

	Acquisita	Naive	Tikhonov	Variazione totale
MSE	$0.173 \cdot 10^{-1}$	$0.212 \cdot 10^2$	$0.105 \cdot 10^{-1}$	$0.818 \cdot 10^{-2}$
PSNR	17.61	-13.26	19.80	20.87

## 7 Conclusioni

### 7.1 Metodo naive

Si può confermare che il processo di deblur risolvendo il problema ai minimi quadrati senza regolarizzazione è una soluzione estremamente mal condizionata e inaffidabile.

Utilizzando un'immagine che non è soggetta a rumore, invece, il risultato prodotto è molto vicino a quella reale e tende ad essere migliore rispetto ai metodi regolarizzati

### 7.2 Regolarizzazione di Tikhonov

Il metodo di regolarizzazione di Tikhonov si è rivelato utile su immagini con un blur di determinati ordini di grandezza. Infatti, se il blur è molto contenuto, la soluzione prodotta tende ad essere del tutto simile all'immagine acquisita, mentre per valori di blur più elevati si riesce a produrre un risultato più vicino all'immagine reale.

In termini di prestazioni invece, il metodo converge in un numero di iterazioni non troppo variabile e in tempo contenuto.

### 7.3 Regolarizzazione tramite variazione totale

Il metodo di regolarizzazione tramite variazione totale è invece il metodo che, tra quelli utilizzati, produce la soluzione migliore.

A differenza degli altri metodi, si è notato che non è soggetto al problema di semi-convergenza e produce in tutti i casi analizzati una buona approssimazione dell'immagine reale.

A livello di velocità, il numero di iterazioni richiesto tende a non essere "prevedibile" e anche il tempo di esecuzione è solitamente stato maggiore rispetto a Tikhonov.

## Bibliografia

- [1] Chiara Gentile. “Metodo del gradiente coniugato per problemi ai minimi quadrati non lineari”. Tesi di Laurea. Università di Bologna, 2016, pp. 10–11. URL: [https://amslaurea.unibo.it/12187/1/Chiara\\_Gentile.pdf](https://amslaurea.unibo.it/12187/1/Chiara_Gentile.pdf).
- [2] Roberto Ferri. “Metodologie per l’identificazione e la regolarizzazione dei carichi esterni su strutture alari a partire da misure di deformazione”. Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2021, p. 57. URL: <https://webthesis.biblio.polito.it/20920/1/tesi.pdf>.
- [3] Silvia Gazzola, Paolo Novati e Maria Rosaria Russo. *On Krylov projection methods and Tikhonov regularization*, p. 2. URL: [https://www.math.unipd.it/~gazzola/Survey\\_Krylov\\_Tikhonov.pdf](https://www.math.unipd.it/~gazzola/Survey_Krylov_Tikhonov.pdf).