31300 og 31301 Reguleringsteknik 1
Forslag til løsningsmetode for
eksamenssæt forår 2015

1 Side

$$A\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + 3C\left(-3\frac{dy(t)}{dt}\right) + 12y(t) + \frac{A}{B}\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \tag{1}$$

1.1 Opgave 1

Find $y(s)/x(s)$

Laplace transformer og split i hvad der er relevant for $y(s)$:

$$\begin{aligned}
Ays^2 + Bys + 3C(-3ys) + 12y + \tfrac{A}{B}xs &= x \\
y(As^2 + Bs - 9Cs + 12) &= x(1 - \tfrac{A}{B}s) \\
\frac{y}{x} &= \frac{1 - \frac{A}{B}s}{As^2 + Bs - 9Cs + 12} \qquad (2) \\
\frac{y}{x} &= \frac{1 - \frac{A}{B}s}{As^2 + (B - 9C)s + 12}
\end{aligned}$$

svar 2

2 Side

Step responce, starter ved 0.4 sekund, og ligner et 2. ordenssystem med en kort og en lang tidskonstant.

2.1 Spørgsmål 1

Find overføringsfunktion for dynamik i arbejdspunkt.

Der er tydeligt et arbejdspunkt, som giver værdien 7 uden input, der er altså tale om ændringer i forhold til dette arbejdspunkt.

Løsninger omhandler kun poler, en eller to.

Kurven er lidt præget af støj, men i store træk en steady state gain på $7.5 - 7.0 = 0.5$, det efterlader svarmulighed 1 og 4.

$$
\begin{aligned}
1 : G(s) &= 0.5 \\
4 : G(s) &= \frac{0.5}{(0.2s+1)(0.05s+1)}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Svarmulighed 4 har 2 poler, en med en tidskonstant på 0.05 sekund, som passer nogenlunde med indsvingning lige efter 0.4 sekund (den må være kortere end 0.1 sekund).
Den anden pol har en tidskonstant på 0.2 sekund. Efter 1 tidskonstant skal signalet være nået ca. 64% at steady state værdien, det bliver $7 + 0.5 \cdot 0.64 = 7.32$, som er ca. 0.2 sekund efter starttidspunkt med et bidrag af ca. 0.05 sekund fra den første pol.

Svar 4

2.2 Spørgsmål 2

Tidsforsinkelse.

Hele kurveforløbet kan forklares med dynamikken i forrige spørgsmål, så ingen synlig forsinkelse.

Svar 4.

3 Side

Et blokdiagram med 2 output $x(s)$ og $y(s)$

Der er kun 1 sløjfe, som består af C, G_1 og G_x.

3.1 Spørgsmål 1

Fra $r(s)$ til $y(s)$

Ignorer $d(s)$, så er fremad-grenen C og G_1, efterfulgt af en isoleret funktion G_y, derfor må overføringsfunktion være:

$$
B(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{CG_1G_y}{1 + CG_1G_x} \tag{4}
$$

Svar 3

3.2 Spørgsmål 2

Forstyrrelsen påvirker 2 steder i sløjfen, og kan udregnes som summen af de 2 bidrag, da systemet er lineært.

$$
\begin{aligned}
D(s) = \frac{y(s)}{d(s)} &= \frac{-G_d G_1 G_y}{1 + C G_1 G_x} + \frac{G_x(-C) G_1 G_y}{1 + C G_1 G_x} \\
D(s) &= \frac{G_1 G_y(-G_d - G_x C)}{1 + C G_1 G_x}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

svar 3

4 Side

Regulereing efter Ziegler Nichols metoden.

iflg side 302: Relæ-amplitude $q = 1$, og output i steady state.
Output amplitude $y \approx 7$, og da der er enhedstilbagekobling ($H(s) = 1$) må $e_0 = y = 7$.
Periodetiden $T_0 \approx 0.13$ sek.

Den ækvivalente forstærkning $K_e = \frac{4q}{\pi e_0}$, og med tal:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 0.13 \\
K_{p,krit} = K_e &= \frac{4q}{\pi e_0} = 0.1819
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Ifølge tabel på side 296 skal K_P for en P-regulator være $K_P = 0.5 K_{p,krit}$

$$
K_P = 0.5 K_{p,krit} = 0.091 \tag{7}
$$

svar 1

5 Side

Bodeplot

5.1 Spørgsmål 1

Overføringsfunktion - poler nulpunkter:

Fra $\omega = 10^{-1}$ til $\omega = 10^0$ falder amplitude med 20 dB/dekade og fasedrejning er -90^o, altså en pol i $\omega = 0$.
Ved $\omega \approx 4$ rad/sec flader kurcen ud - et knæk opad - dvs. et nulpunkt, men fasen drejer ned, så et nulpunkt i højre halvplan.
Og et knæk ned ved $\omega \approx 1000$ rad/sek - en normal pol.

Opsummeret

$$G(s) = \frac{k(-s+3)}{s(s+1000)} \tag{8}$$

ved $\omega = 100$ er amplitude $|G(j\omega)| = 10$ dB, dvs:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{k(-s+3)}{s(s+1000)}\right|_{s=j100} &= 10^{10/20} \\
\left|\frac{k(-j100+3)}{j100(j100+1000)}\right| &= 3.16 \\
\left|\frac{k(-j100)}{j100(1000)}\right| &\approx 3.16 \\
k &\approx 3160
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
G(s) &\approx \frac{3160(-s+3)}{s(s+1000)} \\
G(s) &\approx \frac{3.16(-s+3)}{s(0.001s+1)}
\end{aligned} \tag{10}$$

svar 2

5.2 Spørgsmål 2

$K_P = 0.18 = -15$ dB - giver fasemargin på ca. $\gamma_M = 60^o$ og derved pænt stabilt.
$K_P = 0.33 = -9$ dB - giver negativ fasemargin, men kan ikke godt aflæses på bodeplot, så det tæller som rigtigt.
$K_P > 0.33$ gør kun sagen værre.

svar 1.

6 Side

Design en PI regulator ud fra bodeplot.

6.1 Spørgsmål 1

$$\gamma_m = 60 \text{ og } N_i = 2 \tag{11}$$

Det betyder at I-leddet giver en negativ fasedrejning ved ω_C på

$$
\begin{aligned}
\varphi_i &= \arctan \frac{-1}{N_i} \\
\varphi_i &= -26.6^o
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Den nye krydsfrekvens bør derfor ligge hvor fasen:

$$
\begin{aligned}
\angle G(j\omega_C) &= -180^o - \varphi_i - \gamma_m = -93.4^o \\
\omega_C &\approx 0.6 \text{ rad/s}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

svar 2

6.2 Spørgsmål 2

Nu er $K_P = 0.3$

Stationær fejl er - for et system uden integratorer og for et step-input:

$$
e_{r,ss} = \frac{1}{1 + K_0}
\tag{14}
$$

Hvor K_0 er gain ved DC. For systemet er DC gain ≈ 17 dB, og K_0:

$$
\begin{aligned}
K_0 &= K_P 10^{17/20} \\
K_0 &= 2.12 \\
e_{r,ss} &= \tfrac{1}{1+K_0} = 0.32
\end{aligned}
\tag{15}
$$

svar 2

6.3 Spørgsmål 3

Valg af regulatortype

Hvilken af følgende regulatortyper ville være et godt valg for syststemet, når der prioriteres lille stationær fejl og stor båndbredde.

Stationær fejl peger på et I-led, og båndbredde kan normalt øges med et lead-led Så en PI-Lead bør være et godt valg.

svar 5.

7 Side

Der er vist step-respons og lukket sløjfe bodeplot for et reguleret system.

7.1 Spørgsmål 1

Et forfilter skal undertrykke oversving (resonanstop i lukket sløjfe)

et 1. ordens forfilter kan som udgangspunkt have en tidskonstant:

$$\tau_f = \frac{2}{\omega_{top}} \tag{16}$$

hvor ω_{top} er vinkelfrekvensen for resonanstoppen.

$\omega_{top} \approx 45$ rad/sek og forfilter bliver derfor:

$$\begin{aligned} G_f(s) &= \frac{1}{\tau_f s + 1} \\ G_f(s) &= \frac{1}{\tau_f s + 1} \\ \tau_f &= 0.044 \\ G_f(s) &= \frac{1}{0.044s + 1} \end{aligned} \tag{17}$$

svar 3

7.2 Spørgsmål 2

Som alternativ til forfilter vil

Et I-led og et lag-led give mindre fasemargin - med samme K_P, hvilket typisk fører til mere oversving.

Et Lead-led med uændret fasemargin vil typisk føre til mere oversving.

En større fasemargin er derfor svaret:

svar 3

8 Side

Et system med stor tidsforsinkelse.

8.1 Spørgsmål 1

P-regulator og stabilitet.

Med en gain på mindre end -10 dB (0.32) vil amplituden aldrig nå 1, og derfor ikke nå -1 punktet i et polarplot, og vil derfor være stabilt.

svar 5

8.2 Spørgsmål 2

En I-regulator tilføjes

$$C(s) = \frac{k_i}{s} \tag{18}$$

Fasemargin på $\gamma_m = 45^o$

Da regulatoren i sig selv giver 90^o negativ fasedrejning, vil den nye krydsfrekvens være der hvor systemet i sig selv har 45^o fasedrejning, så:

$$\omega_C \approx 0.35 \text{ rad/sek} \tag{19}$$

Her er gain +10 dB, ergomå regulator give -10 dB (0.32):

$$\begin{aligned} 0.32 &= \left|\frac{k_i}{j\omega_C}\right| \\ k_i &= 0.1 \end{aligned} \tag{20}$$

svar 5

9 Side

Blokdiagram med forstyrrelse og fremkobling af forstyrrelse for et PI reguleret system.

9.1 Spørgsmål 1

Overføringsfunktion fra forstyrrelse til udgang .

Sløjfen er CG_1, så nævner bliver $1 + CG_1$. Da der er 2 veje bliver det en sum af 2 led med samme nævner.

Fremkoblingsgrenen for den direkte vej er 1, fremkobling for den anden gren er $G_d(-1)G_1$ og den samlede overføringsfnktion er derfor:

$$D(s) = \frac{1 - G_d G_1}{1 + CG_1} \tag{21}$$

svar 2

9.2 Spørgsmål 2

Bodeplot uden G_f er vist

Ved 5 Hz = 31.4 rad/sek er amplituden ca. 0 dB - aflæst.

svar 2

9.3 Spørgsmål 3

Bedre undertrykkelse end 0 dB ved 5 Hz kan fås ved at gøre båndbredde større. Det kan ske ved at øge K_P (som godt nok giver mindre fasemargin) eller ved at tilføje et Lead-led.

Af de nævnte muligheder er det svar 1

9.4 Spørgsmål 4

Undertrykkelse ved fremkobling.

Fra spørgsmål 1 haves

$$D(s) = \frac{1 - G_d G_1}{1 + C G_1} \tag{22}$$

Det vil sige at hvis $G_d = \frac{1}{G_1}$ er al forstyrrelse undertrykt, dvs optimalt

$$G_d = \frac{s^2 + 170s + 2500}{190} \tag{23}$$

Men den kan ikke implementeres, men så kan vi enten undlade de differentierende led s^2 og s, men det giver kun en forbedring ved steady-state og lave frekvenser. Og 5 Hz er tæt på egenfrekvensen ω_0 for G_1 så der skal nok mere til.

Alternativet er at tage flere led med og tilføje et tilsvarende antal poler med en højere knækfrekvens således at funktionen kan implementeres.

knækfrekvensen for 2. ordensleddet er ca $\omega_0 \approx sqrt 2500$ og $\zeta = 1.7$ så det er faktisk 2 reelle poler og ikke et 2. ordensled. Men det er uden betydning her, polerne skal placeres betydeligt højere end 50 rad/sek.

Svar 2 og 3 har en polplacering der er på 1/1.7=0.6 rad/sek, og kan derfor ikke bruges.

Tilbage er der kun svar 4, der opfylder alle kravene - hele tælleren og 2 poler i 1000 rad/s

svar 4

10 Side

10.1 Spørgsmål 1

Et system der giver forskelligt respons - dvs. ikke proportionalt med input - er ulineært.

Alle de nævnte forklaringer er mulige.

svar 5

10.2 Spørgsmål 2

Step respons for en overføringsfunktion

$$G(s) = 5\,\frac{2s+1}{2s} \tag{24}$$

Her kan man tænke på en PI regulator (side 261), eller bruge start- og slutværdi-sætningen for Laplace:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{s\to\infty} s\mathbf{F}(s) \\ \lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} s\mathbf{F}(s)\end{aligned} \tag{25}$$

Og da input er et step ($u(t) = \frac{1}{s}$) forsvinder s'et, og der fås:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{s\to\infty} 5\,\frac{2s+1}{2s} = 5 \\ \lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} 5\,\frac{2s+1}{2s} = \infty\end{aligned} \tag{26}$$

og det må give svar 5

(slut)