

Reguleringssteknik

4. udgave

Opgaveløsninger

Ole Jannerup

**Ørsted • DTU
Automation
Danmarks Tekniske Universitet
April 2007**

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

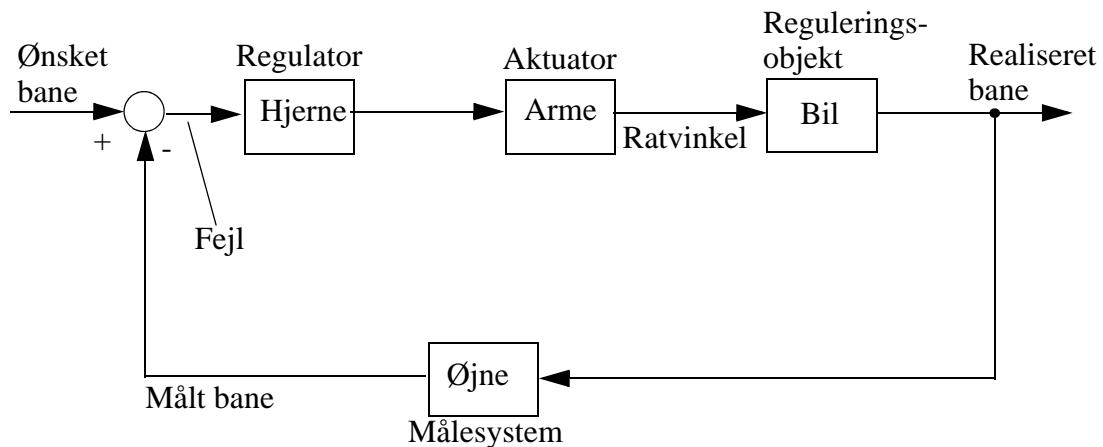
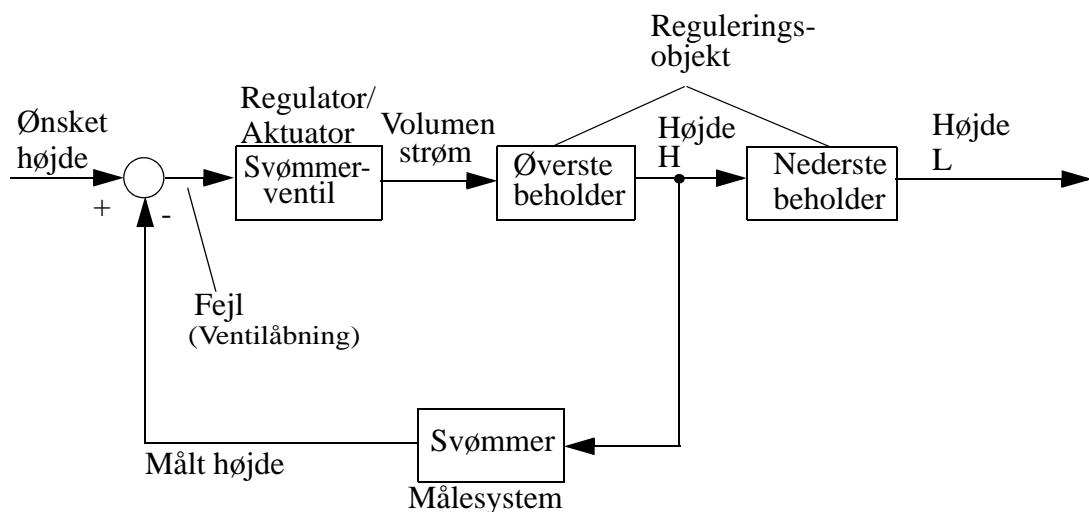
Forord

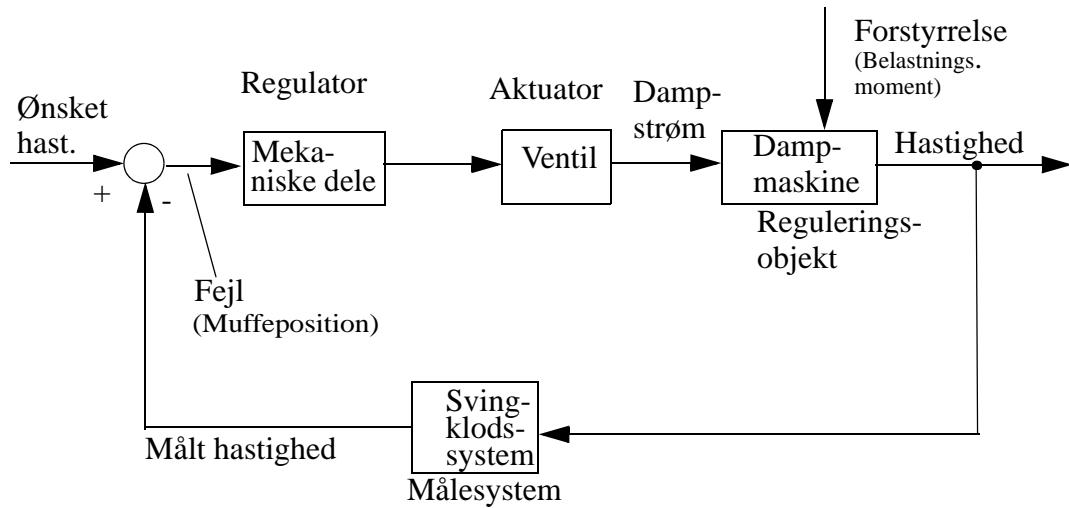
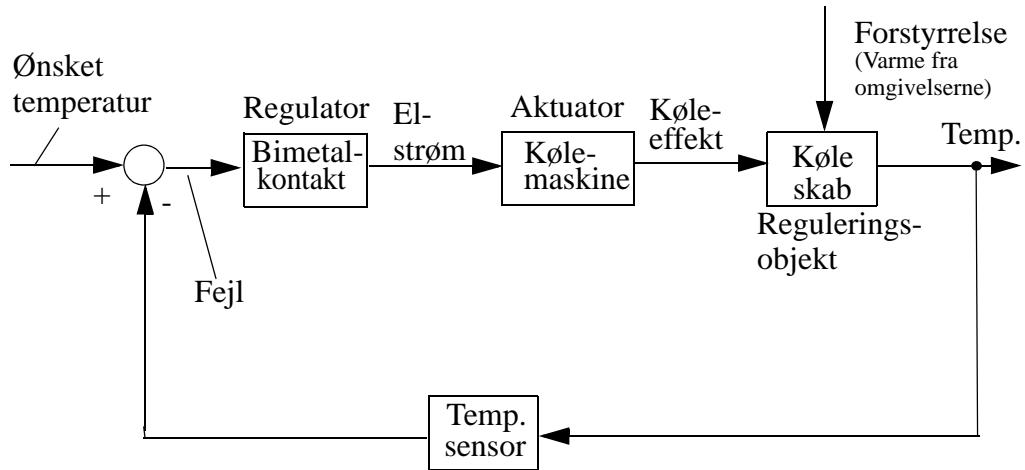
Dette hæfte indeholder løsninger til opgaverne i:

Ole Jannerup og Paul Haase Sørensen: *Reguleringssteknik, 4. udgave, 2006.*

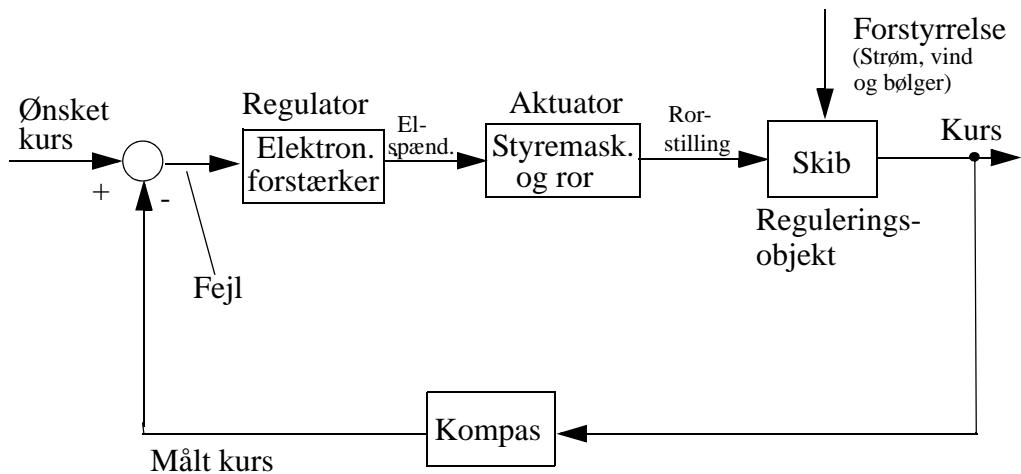
I de fleste løsninger er brugt Matlab ver. 6.5 og/eller Simulink ver. 5, og de viste kurveplots er importeret herfra. Ofte er der dog tilføjet påskrifter og forklarende tekster, ligesom akseindelin-
ger undertiden er ændret for at klargøre detaljer m.m.

Ørsted • DTU Automation, april 2007 OJ

Opgave 1.1**Opgave 1.2**

Opgave 1.3**Opgave 1.4**

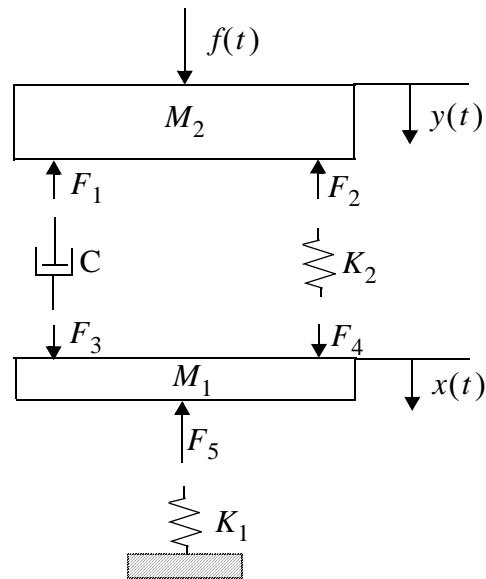
Opgave 1.5



Opgave 2.1

- 1) Skær masserne løs og indfør snitkræfter.
- 2) Vælg en tilstand og indfør fortegnskonvention på alle kræfterne.
- 3) Opstil Newtons 2. lov.

1)



Figur 1.

2) Der vælges $y(t) > x(t) > 0$ og $\dot{y}(t) > \dot{x}(t)$

y og x er valgt til 0 i hvilestilling uden ydre kraft, $f(t) = 0$.

Med dette valg gælder fortægnene som angivet på figuren.

3) For de to masser fås:

$$M_1 \ddot{x} = F_3 + F_4 - F_5 = C(\dot{y} - \dot{x}) + K_2(y - x) - K_1 x$$

$$M_2 \ddot{y} = f - F_1 - F_2 = f - C(\dot{y} - \dot{x}) - K_2(y - x)$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

Opgave 2.2

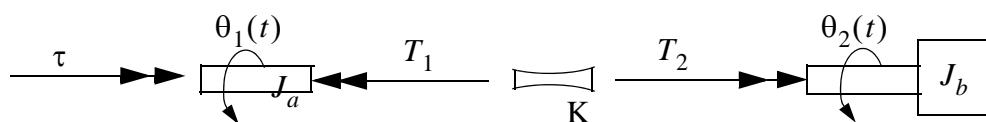
- For strømmen i i ankervindingerne gælder maskeloven

$$v = L_a \frac{di}{dt} + R_a i + K_a \dot{\theta}_1$$

- Motorkonstanten giver sammenhængen mellem ankerstrøm og udviklet moment:

$$\tau = K_m i$$

Den mekaniske del af systemet skæres op ved den fleksible kobling og der indføres en tilstands-konvention at $\theta_1 > \theta_2$, hvorved: $T_1 = T_2 = K(\theta_1 - \theta_2)$



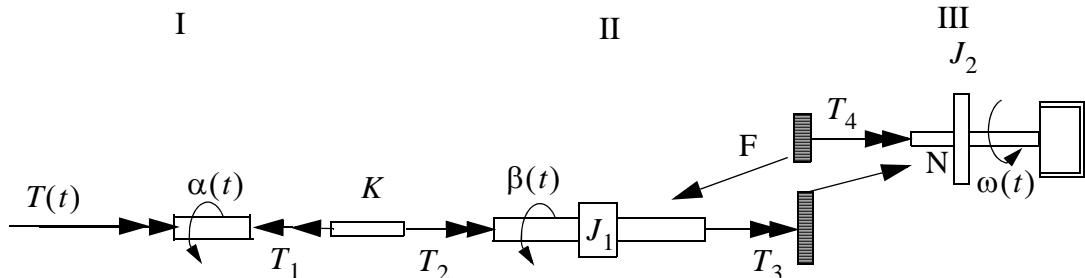
Figur 2.

Bevægelsesligningen for de to inertimomenter er

$$\begin{aligned} J_a \ddot{\theta}_1 &= \tau - T_1 - b_1 \dot{\theta}_1 = \tau - K(\theta_1 - \theta_2) - b_1 \dot{\theta}_1 \\ J_b \ddot{\theta}_2 &= T_2 - b_2 \dot{\theta}_2 = K(\theta_1 - \theta_2) - b_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Opgave 2.3

- a. Systemet skilles ad i tre dele, I, II, III og der indføres snitkræfter efter nedenstående tegning ($\dot{\theta} = \omega$)



Figur 3

Da del I har inertimomentet nul fås, idet det antages, at $\alpha > \beta$:

$$T = T_1 = T_2 = K(\alpha - \beta)$$

For gearet gælder:

$$\frac{\theta}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} = N \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{1}{N}\omega$$

og

$$\left. \begin{array}{l} T_3 = Fr_1 \\ T_4 = Fr_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = \frac{r_1}{r_2} = N$$

hvor r_1 og r_2 er tandhjulsradier.

Med fortegnskonventionen fås:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\beta} &= T_2 + T_3 \\ J_2 \ddot{\theta} &= -T_4 - C\dot{\theta} \end{aligned}$$

Hermed er de beskrivende ligninger opstillet.

b.

Blokdiagrammets udseende vil være afhængigt af hvor mange af de variable man ønsker at medtage. Hvis man Laplacetransformerer de 5 ligninger, får man:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

$$T(s) = T_2(s)$$

$$s\beta(s) = \frac{1}{N}\omega(s)$$

$$\frac{T_3(s)}{T_4(s)} = N$$

$$J_1 s^2 \beta(s) = T_2(s) + T_3(s)$$

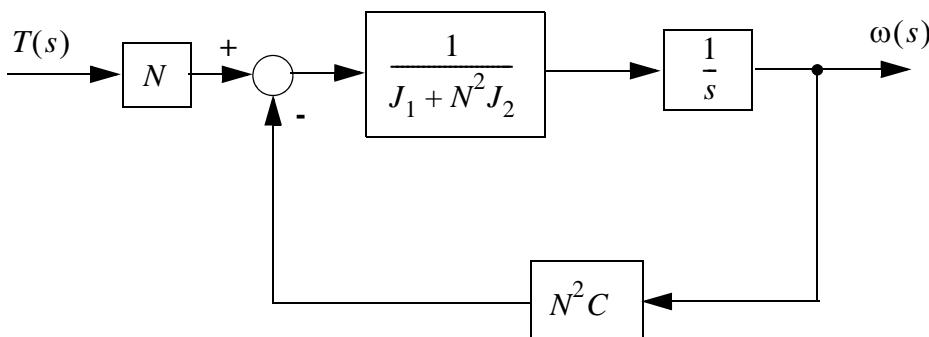
$$J_2 s \omega(s) = -T_4(s) - C\omega(s)$$

og eliminerer man herefter T_2 , T_3 , T_4 og β , når man frem til:

$$(J_1 + N^2 J_2)s\omega(s) = NT(s) - N^2 C\omega(s)$$

hvorefter følgende blokdiagram kan opstilles:

,



Figur 4

c. For overføringsfunktionen fås:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{N}{(J_1 + N^2 J_2)s + N^2 C}$$

Opgave 2.4

Systemet skilles ad i 2 dele og der indføres snitkræfter.

Man får, idet $z > x > y > 0$ og $\dot{x} > \dot{y}$

$$M\ddot{x}(t) = K_3(z - x) - K_2(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}) - K_1x$$

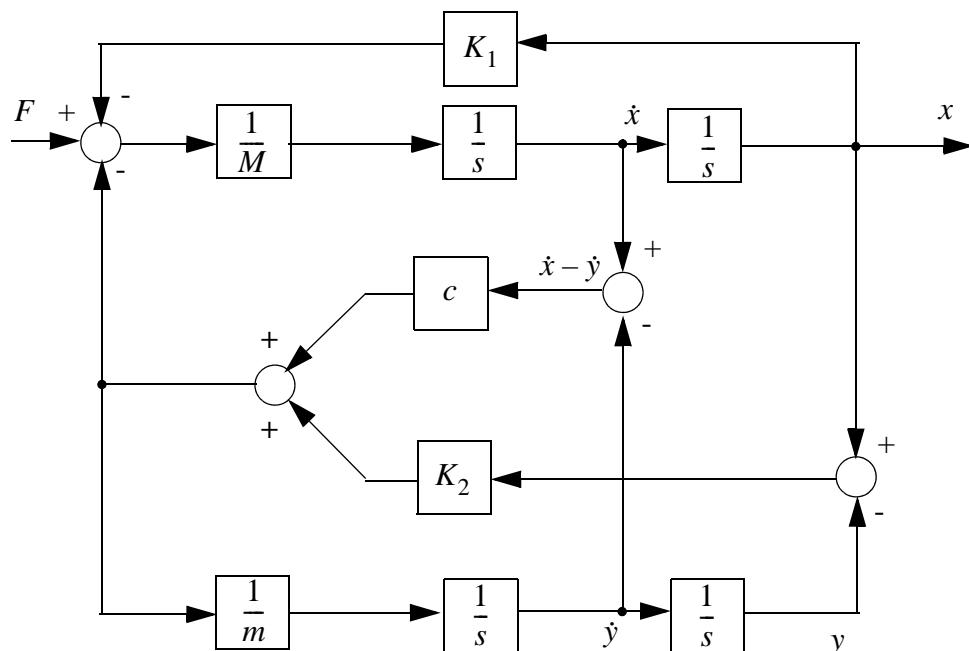
$$m\ddot{y} = K_2(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y})$$

$$F(t) = K_3(z - x)$$

$z(t)$ elimineres:

$$M\ddot{x} = F - K_2(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}) - K_1x$$

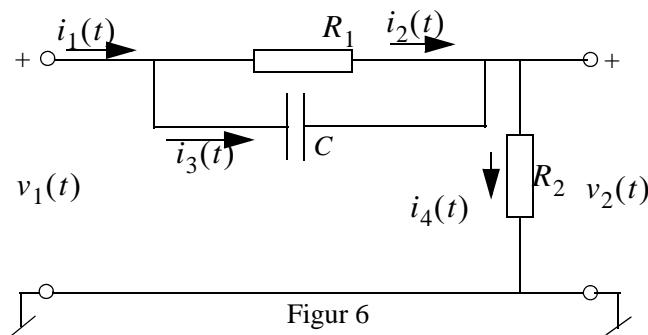
$$m\ddot{y} = K_2(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y})$$



Figur 5

Opgave 2.5

I netværkene indføres strømmme med fortegn:



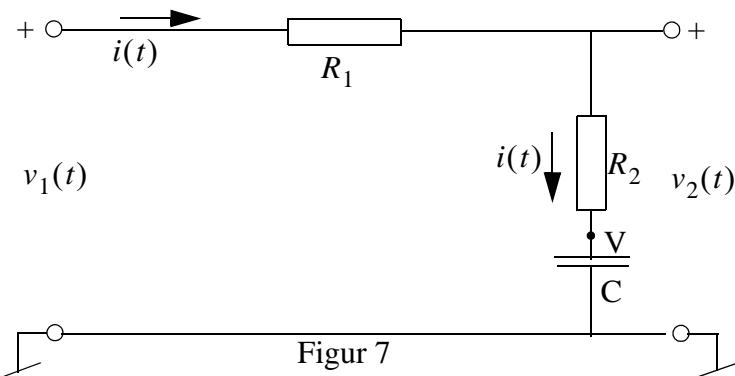
Figur 6

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

$$\left. \begin{array}{l} i_1 = i_4 = i_2 + i_3 \\ i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_1} \\ i_3 = C \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} \\ i_4 = \frac{v_2}{R_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_1} + C\dot{v}_1 - C\dot{v}_2$$



Med Kirchhoff's maskelov fås

$$i = \frac{v_1 - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - v}{R_2} = C\dot{v}$$

 v elimineres:

$$\left. \begin{array}{l} v = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \cdot v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \\ \dot{v} = \frac{1}{R_1 C} (v_1 - v_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \dot{v}_2 - \frac{R_2}{R_1} \dot{v}_1 = \frac{1}{R_1 C} (v_1 - v_2)$$

Ved omskrivning fås:

$$C(R_1 + R_2)\dot{v}_2 + v_2 = CR_2\dot{v}_1 + v_1$$

Opgave 2.6

a.

Beholderens volumen er $V(t) = Ah(t)$, og det kan nu udtrykkes at den tidsaflede af V er lig netto-volumenstrømmen ind i beholderen:

$$\frac{d(Ah(t))}{dt} = A\dot{h}(t) = q_1(t) + q_2(t) - q(t)$$

hvilket giver:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(q_1(t) + q_2(t) - q(t))$$

Energiindholdet i beholderen kan udtrykkes

$$E(t) = Ah(t)\rho cT(t)$$

hvor ρ er masseylden og c er den specifikke varmekapacitet.

Herefter kan vi opstille effektligningen for beholderen:

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(Ah(t)\rho cT(t)) = A\rho c \frac{d(h(t)T(t))}{dt} = P_{q_1}(t) + P_{q_2}(t) - P_q(t)$$

eller

$$A\rho c[\dot{h}(t)T(t) + h(t)\dot{T}(t)] = q_1(t)\rho cT_1(t) + q_2(t)\rho cT_2(t) - q(t)\rho cT(t)$$

I denne ligning forkortes med ρc og $\dot{h}(t)$ indsættes fra volumenligningen ovenfor. Herefter fås de tre ligninger der udgør den samlede matematiske model:

$$\dot{T}(t) = \frac{1}{h(t)A}[q_1(t)T_1 + q_2(t)T_2 - (q_1(t) + q_2(t))T(t)] \quad (1)$$

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(q_1(t) + q_2(t) - q(t)) \quad (2)$$

$$q(t) = k\sqrt{h(t)} \quad (3)$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

b.

Vi lineariserer omkring det stationære driftspunkt givet ved variabelværdierne

$$q_{10}, q_{20}, T_0, q_0, h_0$$

Vi definerer:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_{10} + \Delta q_1(t) \\ q_2(t) &= q_{20} + \Delta q_2(t) \\ q(t) &= q_0 + \Delta q(t) \\ h(t) &= h_0 + \Delta h(t) \\ T(t) &= T_0 + \Delta T(t) \end{aligned}$$

og for det stationære driftspunkt fås hermed af (1), (2) og (3):

$$0 = \frac{1}{h_0 A} [q_{10}T_1 + q_{20}T_2 - (q_{10} + q_{20})T_0] \quad (4)$$

$$0 = \frac{1}{A} (q_{10} + q_{20} - q_0)$$

$$q_0 = k \sqrt{h_0} \quad (5)$$

Vi rækkeudvikler nu (1) idet vi kun medtager leddene af 1. orden:

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \Delta \dot{T}(t) = \frac{1}{h_0 A} [q_{10}T_1 + q_{20}T_2 - (q_{10} + q_{20})T_0] \\ &\quad + \left. \frac{\partial \dot{T}}{\partial h} \right|_0 \Delta h(t) + \left. \frac{\partial \dot{T}}{\partial q_1} \right|_0 \Delta q_1(t) + \left. \frac{\partial \dot{T}}{\partial q_2} \right|_0 \Delta q_2(t) + \left. \frac{\partial \dot{T}}{\partial T} \right|_0 \Delta T(t) \end{aligned}$$

De to første led er nul ifølge (4), og vi får så:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{T}(t) &= \frac{-1}{h_0^2 A} [q_{10}T_1 + q_{20}T_2 - (q_{10} + q_{20})T_0] \Delta h(t) \\ &\quad + \frac{T_1 - T_0}{h_0 A} \Delta q_1(t) + \frac{T_2 - T_0}{h_0 A} \Delta q_2(t) - \frac{q_{10} + q_{20}}{h_0 A} \Delta T(t) \end{aligned}$$

Også i denne ligning er det første led nul og vi ender med:

$$\Delta \dot{T}(t) = \frac{1}{h_0 A} [(T_1 - T_0)\Delta q_1(t) + (T_2 - T_0)\Delta q_2(t) - (q_{10} + q_{20})\Delta T(t)] \quad (6)$$

og dette er en *lineær ligning* i modsætning til (1).

Af (2) får vi umiddelbart:

$$\dot{\Delta h}(t) = \frac{1}{A} (\Delta q_1(t) + \Delta q_2(t) - \Delta q(t)) \quad (7)$$

Ligning (3) lineariseres på samme måde som (1) og vi får:

$$\begin{aligned} q_0 + \Delta q(t) &= k \sqrt{h_0} + \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_0 \Delta h(t) \\ \Rightarrow \Delta q(t) &= \frac{k}{2 \sqrt{h_0}} \Delta h(t) \end{aligned} \quad (8)$$

hvor vi i det sidste udtryk har benyttet (5).

c.

Laplacetransformation af de lineære 1.-ordens differentialligninger (6), (7) og (8) giver:

$$\left(s + \frac{q_{10} + q_{20}}{h_{0A}} \right) \Delta T(s) = \frac{1}{h_0 A} ((T_1 - T_0)\Delta q_1(s) + (T_2 - T_0)\Delta q_2(s))$$

og

$$sA\Delta h(s) = \Delta q_1(s) + \Delta q_2(s) - \frac{k}{2 \sqrt{h_0}} \Delta h(s)$$

Dette kan omskrives til:

$$\Delta T(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} (K_1 \Delta q_1(s) + K_2 \Delta q_2(s))$$

og

$$\Delta h(s) = \frac{K}{\tau_2 s + 1} (\Delta q_1(s) + \Delta q_2(s))$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

hvor

$$\tau_1 = \frac{h_0 A}{q_{10} + q_{20}}$$

$$\tau_2 = 2 \frac{\sqrt{h_0 A}}{k}$$

$$K_1 = \frac{T_1 - T_0}{q_{10} + q_{20}}$$

$$K_2 = \frac{T_2 - T_0}{q_{10} + q_{20}}$$

$$K = 2 \frac{\sqrt{h_0}}{k}$$

d.

Der indføres nu de tilstandsvektorer med de to tilstandvariable:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta T(t) \\ \Delta h(t) \end{bmatrix}$$

Desuden indføres følgende input- og outputvektorer:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \Delta q_1(t) \\ \Delta q_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \Delta T(t) \\ \Delta h(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t)$$

Med brug af disse variable kan de lineære differentilligninger skrives:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \frac{1}{h_0 A} [(T_1 - T_0)u_1(t) + (T_2 - T_0)u_2(t) - (q_{10} + q_{20})x_1(t)]$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{A} \left(u_1(t) + u_2(t) - \frac{k}{2\sqrt{h_0}} x_2(t) \right)$$

eller på matrix-vektor form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{q_{10} + q_{20}}{h_0 A} & 0 \\ 0 & -\frac{k}{2\sqrt{h_0}} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{T_1 - T_0}{h_0 A} & \frac{T_2 - T_0}{h_0 A} \\ \frac{1}{A} & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Opgave 2.7

a.

Bevægelsesligning for raketten:

$$\frac{d}{dt}(m(t)V(t)) = -F_T(t) - F_g(t) - F_L(t) \quad (1)$$

hvor

$$F_T(t) = K\dot{m}(t)$$

$$F_g(t) = \frac{GMm(t)}{(R + h(t))^2}$$

$$F_L(t) = b\dot{h}^2(t) = bV^2(t)$$

Input: $q(t)$ (brændstofsmasseflow)

Output: $h(t)$

Der gælder at:

$$m(t) = m_{\text{start}} - \int_0^t q(\tau)d\tau \quad \text{d.v.s. at } \dot{m}(t) = -q(t) \quad (2)$$

$$V(t) = \dot{h}(t)$$

Bevægelsesligningen kan skrives:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

$$\frac{d}{dt}(m(t)V(t)) = \dot{m}(t)V(t) + m(t)\dot{V}(t) = -K\dot{m}(t) - \frac{GMm}{(R+h)^2} - bV^2(t) \quad (3)$$

eller

$$\frac{d}{dt}(m(t)V(t)) = f(\dot{m}(t), V(t), m(t), \dot{V}(t)) = g(\dot{m}(t), m(t), h(t), V(t))$$

b.

Den stationære tilstand vælges og følgende ligning vil gælde:

$$\dot{m}_0 V_0 + m_0 \dot{V}_0 = -K\dot{m}_0 - \frac{GMm_0}{(r+h_0)^2} - bV_0^2 \quad (4)$$

 \dot{m}_0 og \dot{V}_0 er de stationære værdier af henholdsvis brændselsmasseflov og acceleration.

Bevægelsesligningen (3) lineariseres nu med rækkeudvikling:

$$\begin{aligned} \dot{m}_0 V_0 + m_0 \dot{V}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{m}} \right|_0 \Delta \dot{m}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial V} \right|_0 \Delta V(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_0 \Delta m(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{V}} \right|_0 \Delta \dot{V}(t) \\ = -K\dot{m}_0 - \frac{GMm_0}{(R+h_0)^2} - bV_0^2 + \left. \frac{\partial g}{\partial \dot{m}} \right|_0 \Delta \dot{m}(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial m} \right|_0 \Delta m(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial h} \right|_0 \Delta h(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial V} \right|_0 \Delta V(t) \end{aligned}$$

Indsættes sammenhængen (4) mellem de stationære værdier, bliver kun de partielle afledede tilbage:

$$\begin{aligned} V_0 \dot{\Delta m}(t) + \dot{m}_0 \Delta V(t) + \dot{V}_0 \Delta m(t) + m_0 \dot{\Delta V}(t) \\ = -K \dot{\Delta m}(t) - \frac{GM}{(R+h_0)^2} \Delta m(t) + \frac{2GMm_0}{(R+h_0)^3} \Delta h(t) - 2bV_0 \Delta V(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Af (2) får man

$$\dot{m}(t) = -q(t) \Rightarrow \dot{m}_0 = -q_0 \text{ og } \dot{\Delta m}(t) = -\Delta q(t) \quad (6)$$

Endvidere gælder:

$$\Delta V(t) = \dot{\Delta h}(t) \quad (7)$$

(5), (6) og (7) Laplacetransformereres:

$$\begin{aligned} V_0 s \Delta m(s) + \dot{m}_0 \Delta V(s) + \dot{V}_0 \Delta m(s) + m_0 s \Delta V(s) \\ = -Ks \Delta m(s) - \frac{GM}{(R+h_0)^2} \Delta m(s) + \frac{2GMm_0}{(R+h_0)^3} \Delta h(s) - 2bV_0 \Delta V(s) \end{aligned}$$

$$s \Delta m(s) = -\Delta q(s)$$

$$\Delta V(s) = s \Delta h(s)$$

Af disse tre ligninger elimineres $\Delta m(s)$ og $\Delta V(s)$ og man får:

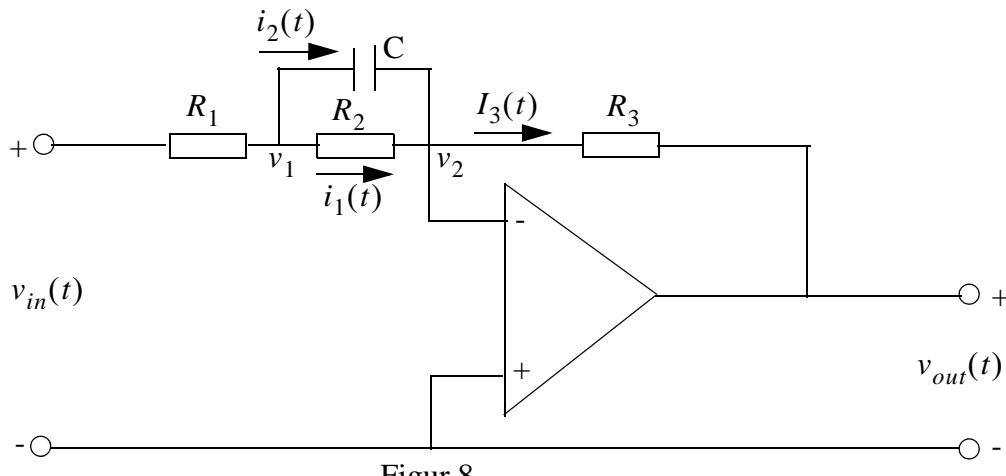
$$\frac{\Delta h(s)}{\Delta q(s)} = \frac{(V_0 + K)s + \dot{V}_0 + \frac{GM}{(R+h_0)^2}}{s \left(m_0 s^2 + (2bV_0 - q_0)s - \frac{2GMm_0}{(R+h_0)^3} \right)}$$

c.

Polerne er løsningen til den karakteristiske ligning:

$$s = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2m_0} \left(q_0 - 2bV_0 \pm \sqrt{(q_0 - 2bV_0)^2 + \frac{8GMm_0^2}{(R+h_0)^3}} \right) \end{cases}$$

Opgave 2.8



Figur 8.

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

Følgende Laplacetransformerede ligningssæt kan opstilles:

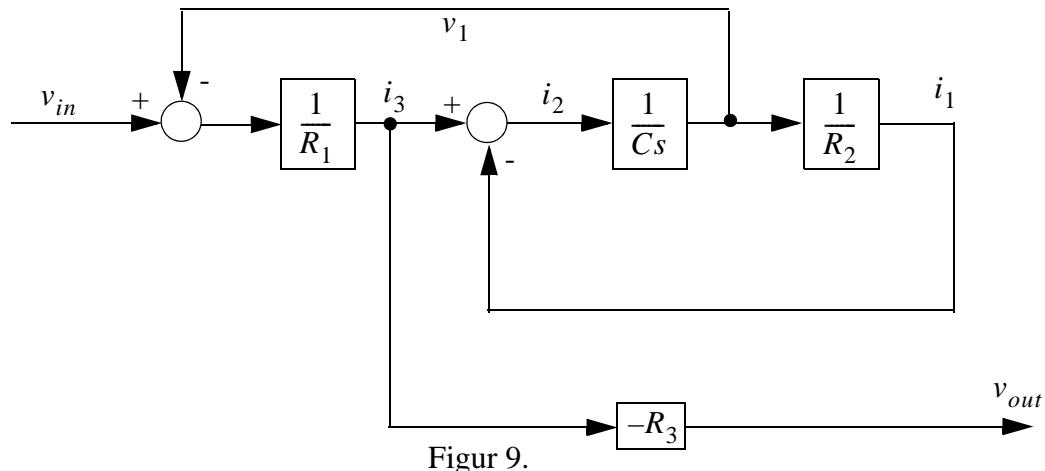
$$v_{in} - v_1 = R_1 i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{1}{R_1} (v_{in} - v_1)$$

$$v_1 = \frac{1}{Cs} i_2 \Rightarrow Cs v_1 = i_3 - i_1$$

$$v_1 = R_2 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{R_2} v_1$$

$$v_{out} = -R_3 i_3$$

Bruger man ligningerne i den nævnte rækkesfølge, får man direkte blokdiagrammet:

**Opgave 2.9**

a. Systemets orden: 4, idet 4 poler i nævneren:

b. Åben sløjfe overføringsfunktion:

$$G_{\hat{a}}(s) = \frac{1+2s}{2s} \frac{s+4}{s^2+4} \frac{1}{s+10} = \frac{(s+4)(1+2s)}{2s(s^2+4)(s+10)}$$

Åben sløjfe poler:

$$s = 0$$

$$s = -10$$

$$s = \pm 2j$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

Åben sløjfe nulpunkter:

$$s = -4$$

$$s = -\frac{1}{2}$$

c. Lukket sløjfe overføringsfunktion:

$$Z(t) = 0 :$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1+2s}{2s} \frac{s+4}{s^2+4}}{1 + \frac{1+2s}{2s} \frac{s+4}{s^2+4} \frac{1}{s+10}} = \frac{(s+10)(1+2s)(s+4)}{2s(s^2+4)(s+10) + (1+2s)(s+4)}$$

$$R(s) = 0 :$$

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{s+4}{s^2+4} \left(Z(s) + \frac{1+2s}{2s} \left(-\frac{1}{s+10} C(s) \right) \right) \\ &\left(1 + \frac{(s+4)(1+2s)}{(s^2+4)2s(s+10)} \right) C(s) = \frac{s+4}{s^2+4} Z(s) \\ \frac{C(s)}{Z(s)} &= \frac{2s(s+4)(s+10)}{2s(s^2+4)(s+10) + (s+4)(1+2s)} \end{aligned}$$

d. Lukket sløjfe poler.

Den karakteristiske ligning er:

$$2s^4 + 20s^3 + 10s^2 + 89s + 4 = 0$$

En numerisk beregning giver

$$s = \begin{cases} -9,9451 \\ -0,0049 \pm 2,110 \cdot j \\ -0,0452 \end{cases}$$

Lukket-sløjfe nulpunkter.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

For overføringsfunktionen fra $R(s)$ fås nulpunkterne som løsning til:

$$(s + 10)(1 + 2s)(s + 4) = 0$$

eller

$$s = \begin{cases} -10 \\ -\frac{1}{2} \\ -4 \end{cases}$$

For overføringsfunktionen fra $Z(s)$ fås nulpunkterne som løsning til:

$$2s(s + 4)(s + 10) = 0$$

eller

$$s = \begin{cases} 0 \\ -4 \\ -10 \end{cases}$$

Opgave 2.10

Lukket sløjfe overføringsfunktion:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_L(s) = \frac{18}{(s^2 + 6s + 17)s + 18}$$

$$(s^3 + 6s^2 + 17s + 18)Y(s) = 18U(s)$$

eller i tidsdomænet:

$$\ddot{y} = 6\dot{y} + 17y + 18u = 18u$$

Vi indfører tilstandsvariable:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \end{aligned}$$

Så at:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -6x_3(t) - 17x_2(t) - 18x_1(t) + 18u(t)$$

Herved bliver tilstandsligningen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -17 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} u(t)$$

For output fås:

$$y(t) = x_1 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Egenværdier af systemmatricen

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 18 & 17 & \lambda + 6 \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^2(\lambda + 6) + 18 + 17\lambda = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 17\lambda + 18 = 0 \end{aligned}$$

Løsningen bliver:

$$\lambda = \begin{cases} -2 \\ 2 \pm j\sqrt{5} \end{cases}$$

Opgave 2.11

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringsteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

Karakteristisk ligning:

$$\det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

↓

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

↓

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

Dobbeltpol i 1.

For den tilsvarende overføringsfunktion fås:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{C(sI - A) + B}{(s - I)^2} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ +1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s - 1)^2} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 \\ s \end{bmatrix}}{(s - 1)^2} = \frac{s}{(s - 1)^2} \end{aligned}$$

Nulpunkt i 0.

Opgave 2.12

Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

egenværdier

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = +\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Opgave 2.13

$$\dot{v} = Ap - v \quad ; \quad \dot{p} = q - Av \quad ; \quad q = \sqrt{pu} \quad (1)$$

Stationær tilstand $\dot{v} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} Ap_0 - v_0 = 0 \\ q_0 - Av_0 = 0 \\ q_0 = \sqrt{p_0 u_0} \end{array} \right\} \quad (2)$$

For en valgt u_0 får vi så:

$$\left. \begin{array}{l} p_0 = \frac{u_0^2}{A^4} \\ q_0 = \frac{u_0^2}{A^2} \\ v_0 = \frac{u_0^2}{A^3} \end{array} \right\}$$

Vi definerer:

$$u = u_0 + \Delta u; \quad v = v_0 + \Delta v; \quad q = q_0 + \Delta q; \quad p = p_0 + \Delta p$$

Rækkeudvikling af (1):

$$\begin{aligned} q &\equiv q_0 + \left. \frac{\partial q}{\partial p} \right|_0 \Delta p + \left. \frac{\partial q}{\partial u} \right|_0 \Delta u = q_0 + \frac{u_0}{2\sqrt{p_0}} \Delta p + \sqrt{p_0} \Delta u \\ &\Rightarrow q - q_0 = a \Delta p + b \Delta u \Rightarrow \Delta q = a \Delta p + b \Delta u \end{aligned} \quad (3)$$

Af de to lineære differentialligninger får vi:

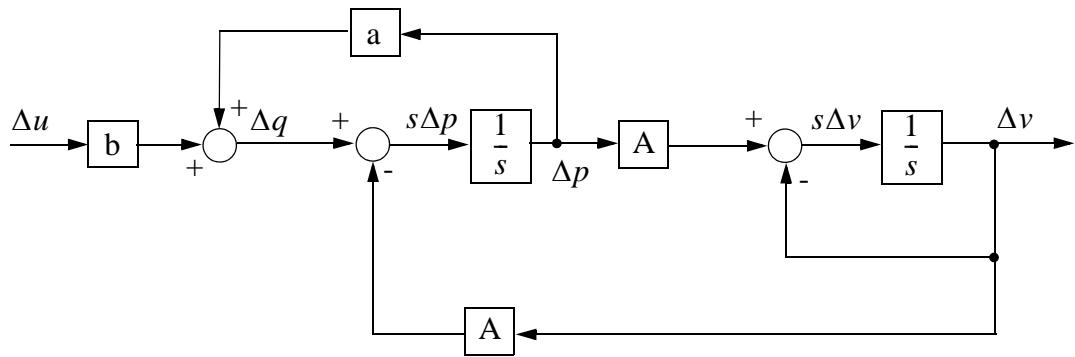
$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{v} = A(p_0 + \Delta p) - (v_0 + \Delta v) = Ap_0 - v_0 + A\Delta p - \Delta v \\ \dot{p} &= \dot{p} = q_0 + \Delta q - A(v_0 + \Delta v) = q_0 - Av_0 + \Delta q - A\Delta v \end{aligned}$$

eller, på grund af (2):

$$\dot{\Delta v} = A\Delta p - \Delta v \quad (4)$$

$$\dot{\Delta p} = \Delta q - A\Delta v \quad (5)$$

Blokdiagram:



Overføringsfunktion fra Δu til Δv :

(3) og (5) giver:

$$s\Delta p + A\Delta v = a\Delta p + b\Delta u \Rightarrow \Delta p = -\frac{A}{s-a}\Delta v + \frac{b}{s-a}\Delta u$$

Indsætning i (4) giver:

$$\begin{aligned} s\Delta v &= -\frac{A^2}{s-a}\Delta v + \frac{bA}{s-a}\Delta u - \Delta v \\ \Rightarrow s(s-a)\Delta v &= -A^2\Delta v + bA\Delta u - (s-a)\Delta v \\ \Rightarrow (s^2 - as + A^2 + s - a)\Delta v &= bA\Delta u \\ \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta u} &= \frac{bA}{s^2 + (1-a)s + A^2 - a} \end{aligned}$$

Opgave 3.1

a.

$$K_{stat} = G(0) = \frac{4K}{0,5 \cdot 1 \cdot 4} = 2K$$

b.

I dette tilfælde får man at $G(s) \rightarrow \infty$ for $s \rightarrow 0$, og derfor eksisterer der ingen statisk forstærkning.

Opgave 3.2

a.

$$G(s) = \frac{\frac{s}{2} + 1}{\left(\frac{s}{40} + 1\right)\left(\left(\frac{s}{4}\right)^2 + \frac{s}{4} + 1\right)} = \frac{\frac{s}{2} + 1}{D(s)}$$

Nulpunkt: $s = -2$

$$\text{Poler: } s = \begin{cases} -40 \\ -2 \pm j2\sqrt{3} \end{cases} \text{ d.v.s. } \begin{cases} \tau = 0,025 \\ \omega_n = 4 \text{ rad/sek}, \zeta = 0,5 \end{cases}$$

b.

Idet vi lader input være et enhedstrin, d.v.s. $x(s) = 1/s$, kan vi for output skrive:

$$y(s) = G(s)x(s) = \frac{s/2 + 1}{s(s/40 + 1)((s/4)^2 + s/4 + 1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s/40 + 1} + \frac{cs + d}{(s/4)^2 + s/4 + 1}$$

hvor

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

$$a = \frac{s/2 + 1}{(s/40 + 1)((s/4)^2 + s/4 + 1)} \Big|_{s=0} = 1$$

$$b = \frac{s/2 + 1}{s((s/4)^2 + s/4 + 1)} \Big|_{s=-40} = 0,00522$$

$$cs + d \Big|_{s = -2 + j2\sqrt{3}} = \frac{s/2 + 1}{s(s/40 + 1)} \Big|_{s = -2 + j2\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} c = -0,07555 \\ d = 0,2198 \end{cases}$$

Systemets enhedstrinresponse kan hermed skrives:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{0,00522}{\frac{s}{40} + 1} + \frac{-0,07555s + 0,2198}{\left(\frac{s}{4}\right)^2 + \frac{s}{4} + 1} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{0,209}{s + 40} + 1,209 \left[1,417 \frac{2\sqrt{3}}{(s+2)^2 + (2\sqrt{3})^2} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \right] \end{aligned}$$

Omvendt laplacetransformation giver ifølge tabellen:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) + 0,209e^{-40t} + 1,209(1,417e^{-2t} \sin 2\sqrt{3}t - e^{-2t} \cos 2\sqrt{3}t) \\ &= h(t) + 0,209e^{-40t} + 1,209e^{-2t}(1,417 \sin 2\sqrt{3}t - \cos 2\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

Man kan, f.eks. ved hjælp af Euler's formler, vise at

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi), \text{ hvor } \tan \phi = \frac{b}{a}$$

Anvendes dette på udtrykket for $y(t)$, får man:

$$y(t) = 1 + 0,209e^{-40t} + 2,097e^{-2t} \sin(2\sqrt{3}t - 35,2^\circ)$$

c.

For overføringsfunktionen $G(s)$ kan man skrive

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{D(s)} + \frac{1}{2} \frac{s}{D(s)} \\ \Rightarrow y(s) &= \frac{1}{D(s)} x(s) + \frac{1}{2} \frac{s}{D(s)} x(s) \end{aligned}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

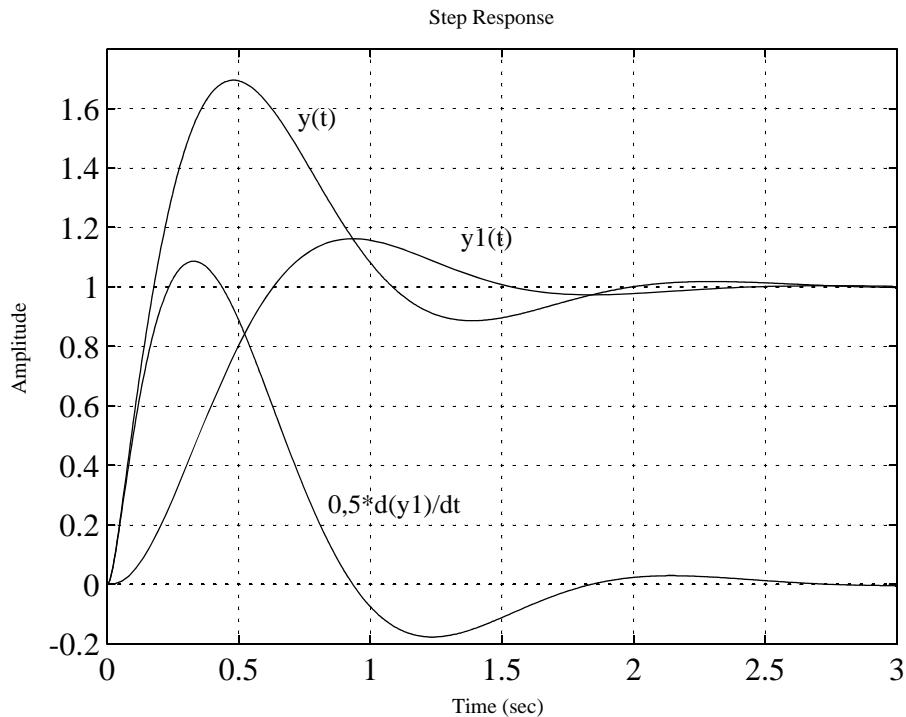
Hvis vi betegner $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{D(s)}x(s)\right\}$, så får vi den for $y(t)$, jvf. bogens afsnit 3.2.7:

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{2} \frac{dy_1(t)}{dt}$$

Nedenfor er vist plot af $y_1(t)$, $\frac{1}{2} \frac{dy_1(t)}{dt}$ og $y(t)$.

Det fremkommer ved brug af flg. Matlab-kommandoer:

```
>>d=conv([.025 1],[1/16 .25 1]);
>> step(1,d)
>> hold on,step([.5 1],d)
>> hold on,step([1 0],2*d),grid on
```



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

Opgave 3.3

Overgangsmatricen bliver:

$$e^{At} = [sI - A]^{-1}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Egenværdierne findes af $|sI - A| = 0$:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow s = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

man får så:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

hvilket giver for e^{At}

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Responset bliver

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(t)d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 d\tau$$

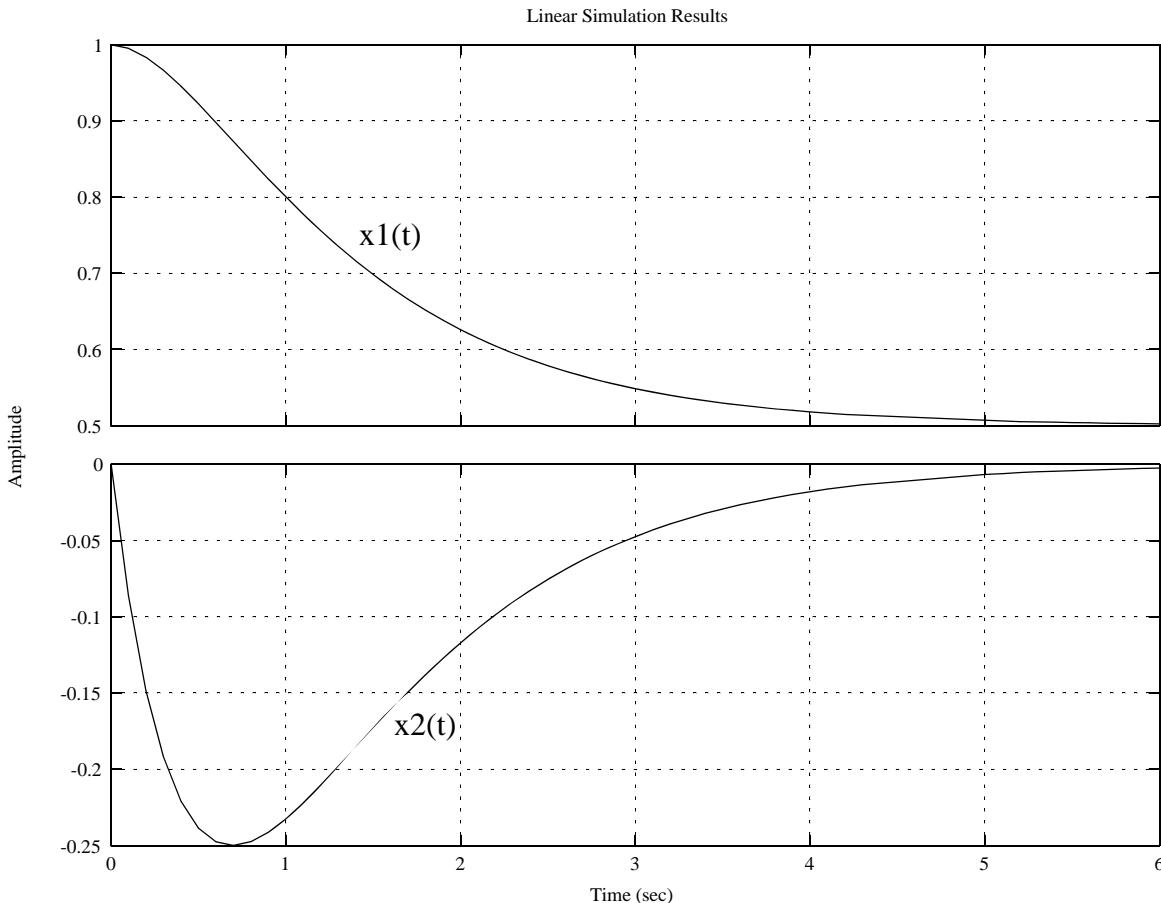
eller

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

I Matlab er det let at beregne tidsresponset som graf. Det gøres med kommandoerne:

```
>> a=[0 1;-2 -3];b=[0 1]';c=eye(2,2);d=0;x0=[1 0]';
>> t=0:.1:6;u=ones(length(t),1);
>> lsim(sys,u,t,x0),grid on
```

Resultatet ses nedenfor.



Opgave 3.4

a. $a(s) = s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100$

Opgaven løses lettest v.h.a. Matlab. Brug af funktionen roots giver følgende resultat:

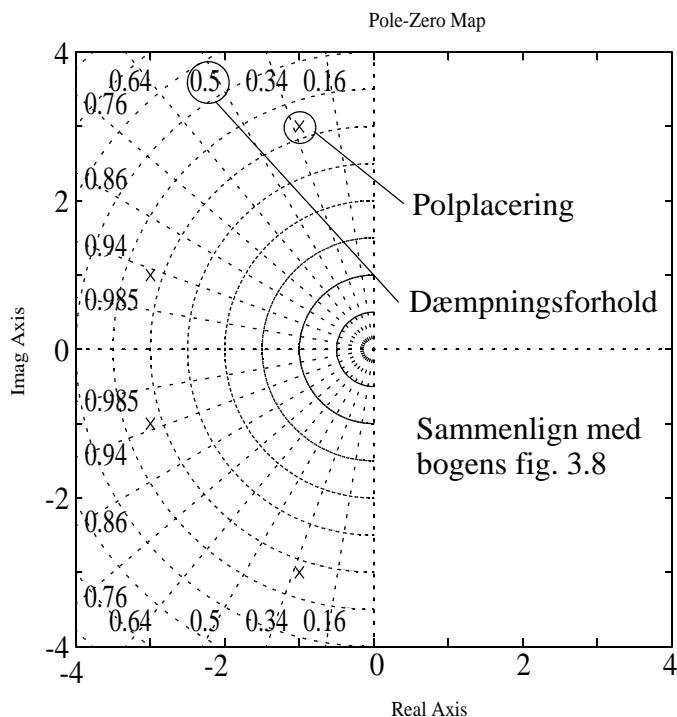
```
>> roots([1 8 32 80 100])
```

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

```
ans =
-1.0000 + 3.0000i
-1.0000 - 3.0000i
-3.0000 + 1.0000i
-3.0000 - 1.0000i
```

Bruger man:

```
pzmap([1 8 32 80 100]),grid on
får man følgende plot:
```



Man kan også bruge funktionen damp:

```
>> damp([1 8 32 80 100])
```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-1.00e+000 + 3.00e+000i	3.16e-001	3.16e+000
-1.00e+000 - 3.00e+000i	3.16e-001	3.16e+000
-3.00e+000 + 1.00e+000i	9.49e-001	3.16e+000
-3.00e+000 - 1.00e+000i	9.49e-001	3.16e+000

Alle poler ligger i venstre halvplan og systemet er stabilt.

b. $a(s) = s^5 + 10s^4 + 30s^3 + 80s^2 + 344s + 480$

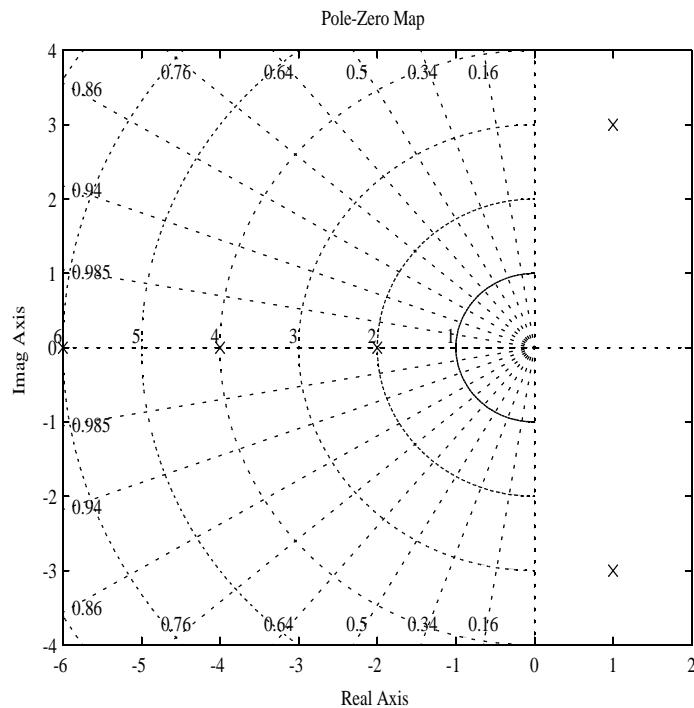
ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

```
>> damp([1 10 30 80 344 480])
```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
1.00e+000 + 3.00e+000i	-3.16e-001	3.16e+000
1.00e+000 - 3.00e+000i	-3.16e-001	3.16e+000
-2.00e+000	1.00e+000	2.00e+000
-4.00e+000	1.00e+000	4.00e+000
-6.00e+000	1.00e+000	6.00e+000



Systemet har to komplekst konjugerede poler i højre halvplan og det er derfor ustabilt. Bemærk at dæmpningsforholdet for disse poler er negativt. For de tre reelle poler angiver Matlab - lidt ulogisk - at dæmpningsforholdet er 1.

$$\text{c. } a(s) = s^4 + 2s^3 + 7s^2 - 2s + 8$$

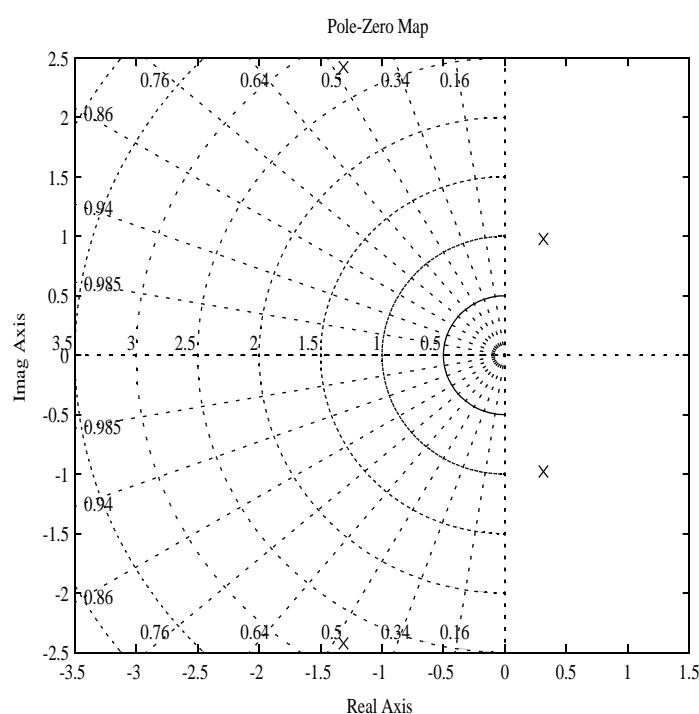
Én af koefficienterne i det karakteristiske polynomium er negativ, og det betyder at systemet ikke er stabilt.

Det bekræftes af de øvrige undersøgelser.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

>> damp([1 2 7 -2 8])

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
3.14e-001 + 9.77e-001i	-3.06e-001	1.03e+000
3.14e-001 - 9.77e-001i	-3.06e-001	1.03e+000
-1.31e+000 + 2.42e+000i	4.77e-001	2.76e+000
-1.31e+000 - 2.42e+000i	4.77e-001	2.76e+000



d. $a(s) = s^4 + s^3 + 20s^2 + 78s$

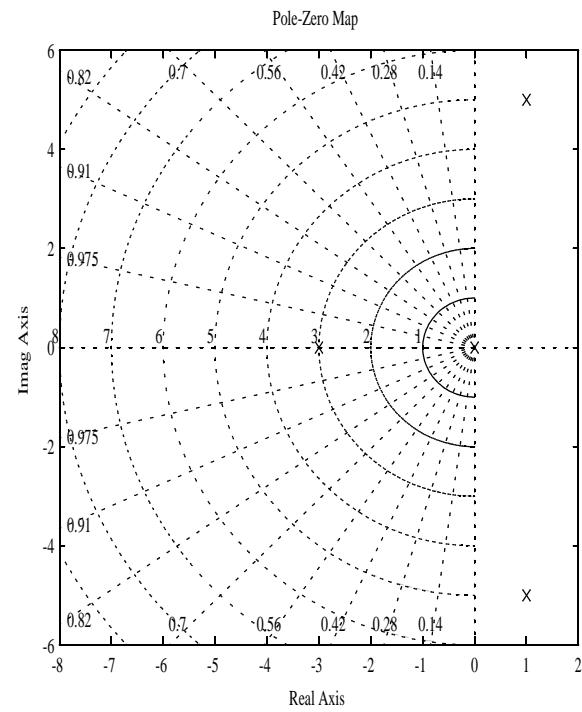
>> damp([1 1 20 78 0])

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
1.00e+000 + 5.00e+000i	-1.96e-001	5.10e+000
1.00e+000 - 5.00e+000i	-1.96e-001	5.10e+000
0.00e+000	-1.00e+000	0.00e+000
-3.00e+000	1.00e+000	3.00e+000

ØRSTED • DTU AUTOMATION

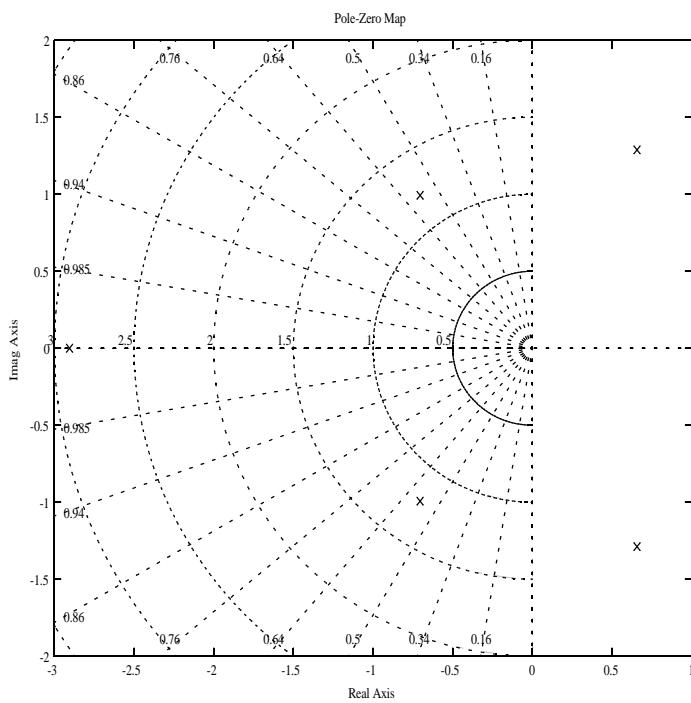
Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger



Systemet har to poler i højre halvplan og er derfor ustabil. Det har en reel pol i origo.

$$\text{e. } a(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$



ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringssteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

>> damp([1 3 2 6 6 9])

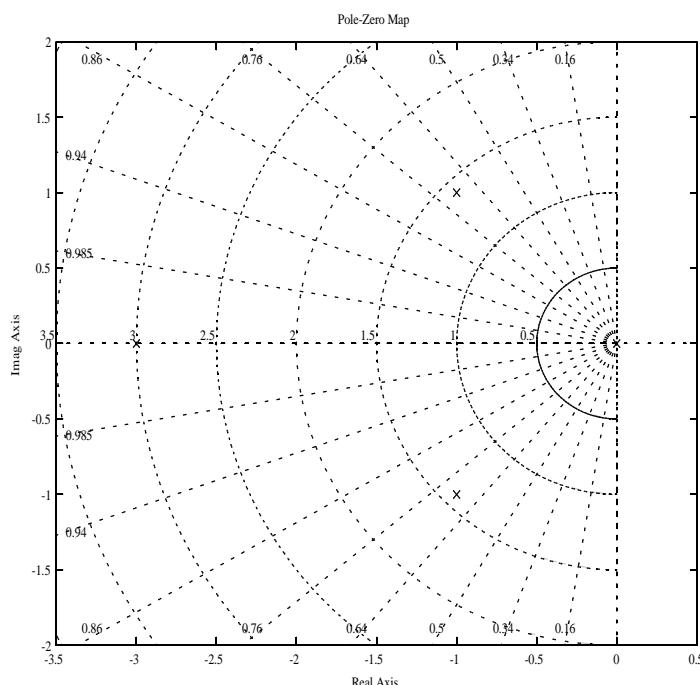
Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
6.57e-001 + 1.29e+000i	-4.54e-001	1.45e+000
6.57e-001 - 1.29e+000i	-4.54e-001	1.45e+000
-7.05e-001 + 9.93e-001i	5.79e-001	1.22e+000
-7.05e-001 - 9.93e-001i	5.79e-001	1.22e+000
-2.90e+000	1.00e+000	2.90e+000

Systemet er ustabilt.

$$\text{f. } a(s) = s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s$$

>> damp([1 5 8 6 0])

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
0.00e+000	-1.00e+000	0.00e+000
-1.00e+000 + 1.00e+000i	7.07e-001	1.41e+000
-1.00e+000 - 1.00e+000i	7.07e-001	1.41e+000
-3.00e+000		



Systemet har en pol i origo og er derfor marginalt stabilt.

Opgave 3.5

Systemets karakteristiske ligning er: $1 + G(s) = 0$

hvor

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s[(s+0,5)(s+1)(s^2+0,4s+4)]}$$

Den karakteristiske kan så skrives:

$$\begin{aligned} s[(s+0,5)(s+1)(s^2+0,4s+4)] + K(s+4) &= 0 \\ \Rightarrow s^5 + 1,9s^4 + 5,1s^3 + 6,2s^2 + 2s + Ks + 4K &= 0 \\ \Rightarrow s^5 + 1,9s^4 + 5,1s^3 + 6,2s^2 + (K+2)s + 4K &= 0 \end{aligned}$$

Man kan umiddelbart se at en nødvendig betingelse for stabilitet er at $4K > 0$ og $K+2 > 0$ d.v.s. samlet $K > 0$

Den hurtigste - omend ikke den mest elegante - metode til bestemmelse af grænserne for K er at prøve sig frem ved brug af Matlab, f.eks. ved at starte med kommandoen:

```
>> K=1;damp([1 1.9 5.1 6.2 K+2 4*K])
```

Ved nogle få forsøg når man frem til at den øvre stabilitetsgrænse er $K \approx 0,779$, og man kan konkludere at systemet er stabilt for:

$$0 < K < 0,779$$

En fiksere metode er at bruge rodkurver, se kapitel 4.

Opgave 3.6

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{3}{s^2 + 2s - 3}$$

Enhedstrinfunktion: $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + 2s - 3} \cdot \frac{1}{s}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

Formelt kan man beregne den statiske forstærkning ved i $G(s)$ at sætte $s = 0$:

$$\Rightarrow K = \frac{3}{-3} = -1$$

men:

Systemet har polerne $s = 1$ og $s = -3$ og ved dekomposition får man:

$$Y(s) = \frac{3}{s(s-1)(s+3)} = -\frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{4}}{s-1} + \frac{\frac{1}{4}}{s+3}$$

Enhedstrinresponset bliver så:

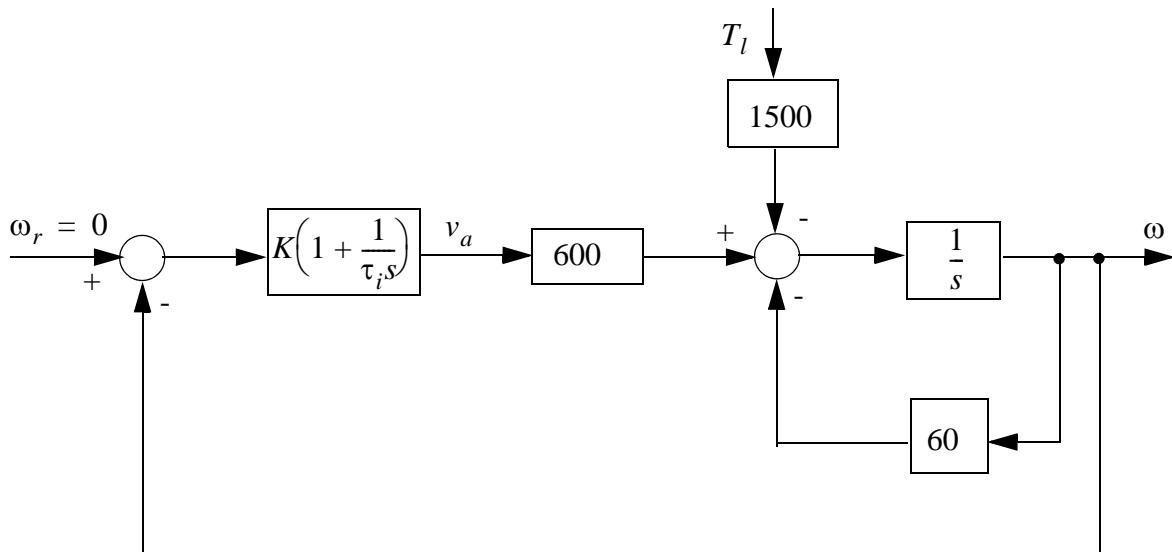
$$y(t) = -1 + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-3t} \rightarrow \infty \quad \text{for } t \rightarrow \infty$$

Da systemet har en pol i højre halvplan er det ustabilt, og det er derfor uden mening at tale om en statisk forstærkning. Se bemærkningen i afsnit 3.2.3.

Opgave 3.7

a.

Blokdiagram:



b.

Regulatorens overføringsfunktion:

$$v_a = -K \left(\omega + \frac{1}{\tau_i s} \omega \right) = -K \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \omega$$

Af blokdiagrammet fås:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{s} (-60\omega - 1500T_l + 600K \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) (-\omega)) \\ \Rightarrow \frac{\omega(s)}{T_l(s)} &= \frac{-1500\tau_i s}{\tau_i s^2 + 60(1 + 10K)\tau_i s + 600K} \end{aligned}$$

c.

Karakteristisk ligning:

$$s^2 + 60(1 + 10K)s + \frac{600}{\tau_i}K = 0$$

Poler:

$$s = -30(1 + 10K) \pm \sqrt{900(1 + 10K)^2 - \frac{600K}{\tau_i}}$$

$$\text{Realdel: } -30(1 + 10K) = -60 \Rightarrow K = 0,1$$

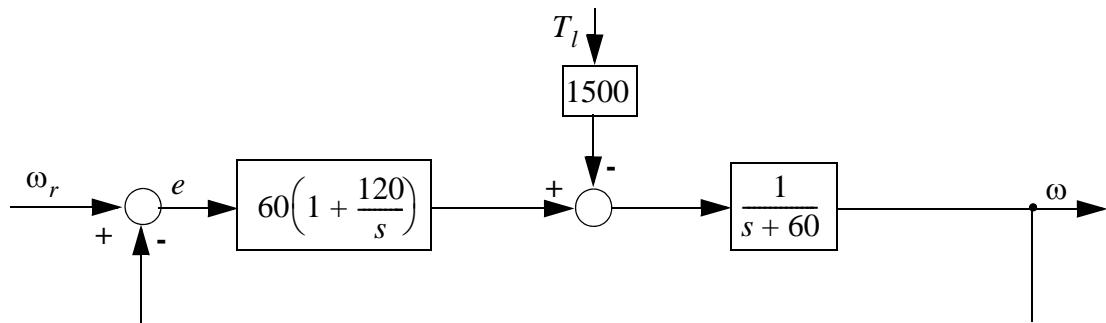
$$\text{Imaginær del: } 900(1 + 10K)^2 - \frac{600K}{\tau_i} = -3600 \Rightarrow \tau_i = 0,00833$$

Opgave 3.8

a.

Blokdiagram (talværdierne fra opgave 3.7 benyttes):

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



Fejlen e findes direkte af blokdiagrammet:

$$e = \omega_r - \frac{1}{s+60} \left(-1500T_l + 60 \left(1 + \frac{120}{s} \right) e \right)$$

Af denne ligning bestemmes e :

$$\begin{aligned} e &= \frac{s(s+60)}{s(s+60) + 60(s+120)} \omega_r + \frac{1500s}{s(s+60) + 60(s+120)} T_l \\ &= G_1(s) \omega_r + G_2(s) T_l \end{aligned}$$

$$T_l = 0, \omega_r = \frac{1}{s}$$

Slutværdisætningen bruges:

$$e_{r,ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G_1(s) = 0$$

b.

$$T_l = 0, \omega_r = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{r,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} G_1(s) = \frac{1}{120}$$

c.

$$T_l = \frac{1}{s}, \omega_r = 0$$

$$e_{d,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G_2(s) = 0$$

d.

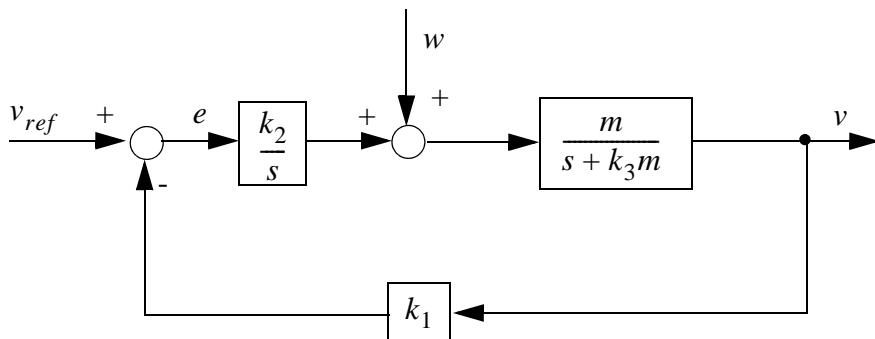
$$T_l = \frac{1}{s^2}, \omega_r = 0$$

$$e_{d,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} G_2(s) = \frac{1500}{120 \cdot 60} = 0,208$$

Opgave 3.9

a.

Reduktion af blokdiagrammet giver:



Af blokdiagrammet fås:

$$\begin{aligned} v &= \frac{m}{s + mk_3} \left(w + \frac{k_2}{s} (v_{ref} - k_1 v) \right) \\ \Rightarrow (s^2 + k_3 ms + k_1 k_2 m)v &= msw + k_2 m v_{ref} \end{aligned}$$

For $v_{ref} = 0$ får man:

$$\frac{v(s)}{w(s)} = \frac{ms}{s^2 + k_3 ms + k_1 k_2 m} = G_1(s)$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

b.

Orden: 2, Type: 1

c.

 $w = \frac{1}{s^2}$ (Enhedsrampeinput):

$$v_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} G_1(s) = \frac{1}{k_1 k_2}$$

d.

 $w = 0$

$$e = v_{ref} - k_1 \frac{k_2 m}{s(s + k_3 m)} e$$

$$\Rightarrow e = \frac{s(s + k_3 m)}{s^2 + k_3 m s + k_1 k_2 m} v_{ref}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s + k_3 m)}{s^2 + k_3 m s + k_1 k_2 m} V_{ref}$$

Enhedstrin: $v_{ref} = \frac{1}{s}$: $e_{ss} = 0$ Enhedsrampe: $v_{ref} = \frac{1}{s^2}$:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{s(s + k_3 m)}{s^2 + k_3 m s + k_1 k_2 m} = \frac{k_3}{k_1 k_2}$$

Man kan også benytte udtrykkene i tabel 3.1. For rampeinputtet ($k = 1$) får man af tabellen (da $N = 1$):

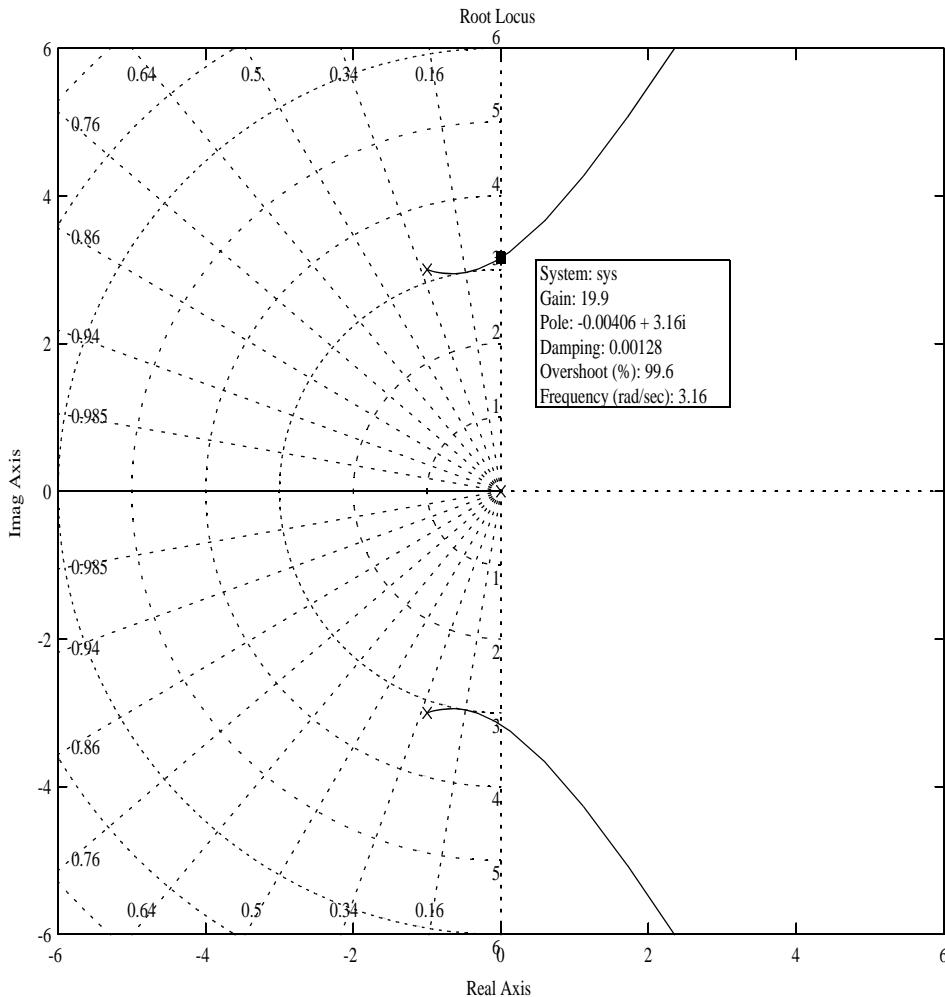
$$e_{ss} = \frac{1}{K_0} = \frac{1}{\frac{k_1 k_2 m}{m k_3}} = \frac{k_3}{k_1 k_2}$$

Opgave 4.1

Matlab-kommandoen

```
>>rlocus(1,[1 2 10 0]), grid on
```

resulterer i flg. rodkurveplot:



Åben-sløjfepolerne er afsat som krydser:

$$s = \begin{cases} 0 \\ -1 \pm j3 \end{cases}$$

og de tre kurvegræne starter for $K = 0$ i disse poler (regel 1).

Den negative del af realaksen er rodkurve (se regel 2).

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringsteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

Der er ingen åben-sløjfe nulpunkter, og derfor går alle tre kurvegrene ud i det uendelige langs asymptoter som skærer hinanden i $s = -0,67$ og danner vinklerne 60° , 180° og 300° med realaksen (se regel 3).

Peger man på rodkurvens skæringspunkt med imaginæraksen med venstre museknap nedtrykket, får man de oplysninger som er vist i tekstdokumentet: For $K = 19,9$ er lukket-sløjfesystemet marginalt stabilt. Det punkt der peges på markeres med en lille firkant. Se regel 4. Bemærk at denne markering angives med den nøjagtighed som figuren på skærmen tillader. Den korrekte værdi for den kritiske forstærkning er $K = 20$.

Der findes ingen forgreningspunkter.

Opgave 4.2

Matlabkommando:

```
>>rlocus([1 0 1],[1 0 4 0]),grid on
```

Rodkurveplottet ses nedenfor.

Åben-sløjfesystemet har én reel og to imaginære poler (\times) og to imaginære nulpunkter (\circ).

De tre kurvegrene starter i åben-sløjfe polerne for $K = 0$ (regel 1).

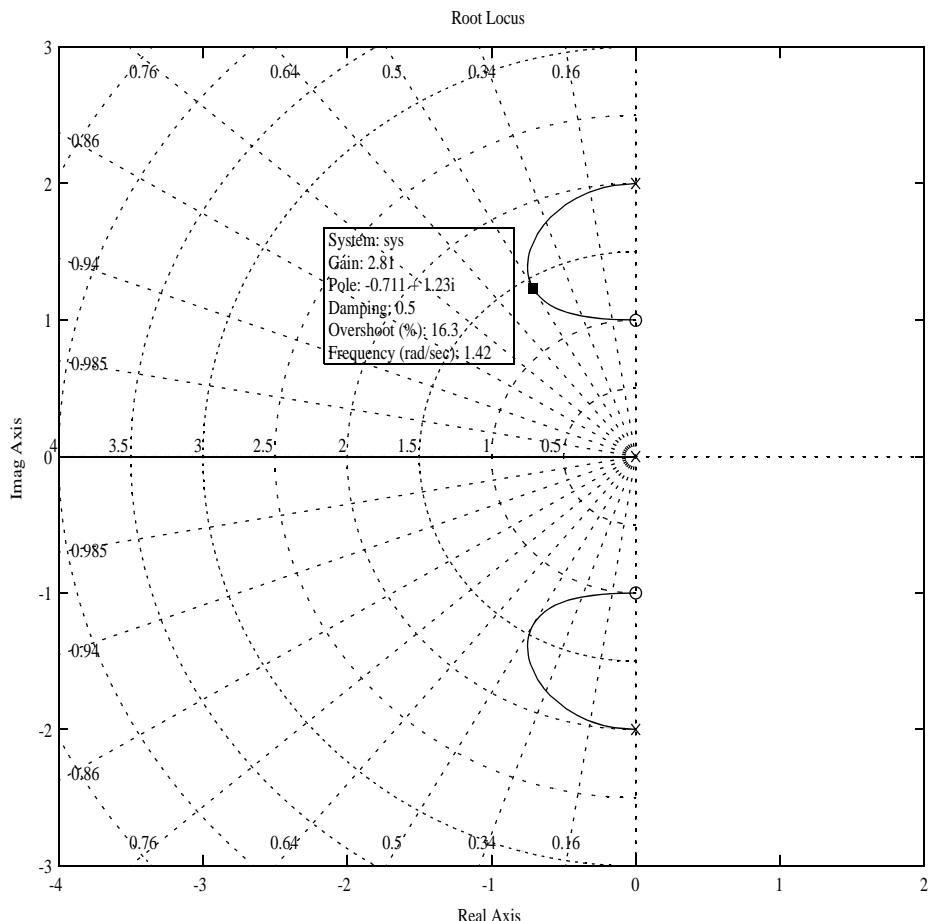
Den negative del af realaksen er rodkurve (regel 2).

To af de tre kurvegrene slutter i åben-sløjfe nulpunkterne for $K \rightarrow \infty$, og den tredie slutter i det uendelig fjerne langs en asymptote (regel 3).

Lukket-sløjfesystemet bliver ikke ustabilt for nogen værdi af K , men det er marginalt stabilt for $K = 0$ og for $K \rightarrow \infty$ (regel 4).

Der er ingen forgreningspunkter.

Den maksimale dæmpning for de komplekse poler får man for $K \approx 2,8$. Her bliver dæmpningsforholdet $\zeta = 0,5$. (Sammenlign med bogens figur 3.8). Punktet på rodkurven er bestemt ved pegning på skærbilledet med venstre museknap nedtrykket.

**Opgave 4.3**

Matlabkommando:

```
>> rlocus([1 1],conv([1 -1 0],[1 2 5])),grid on
```

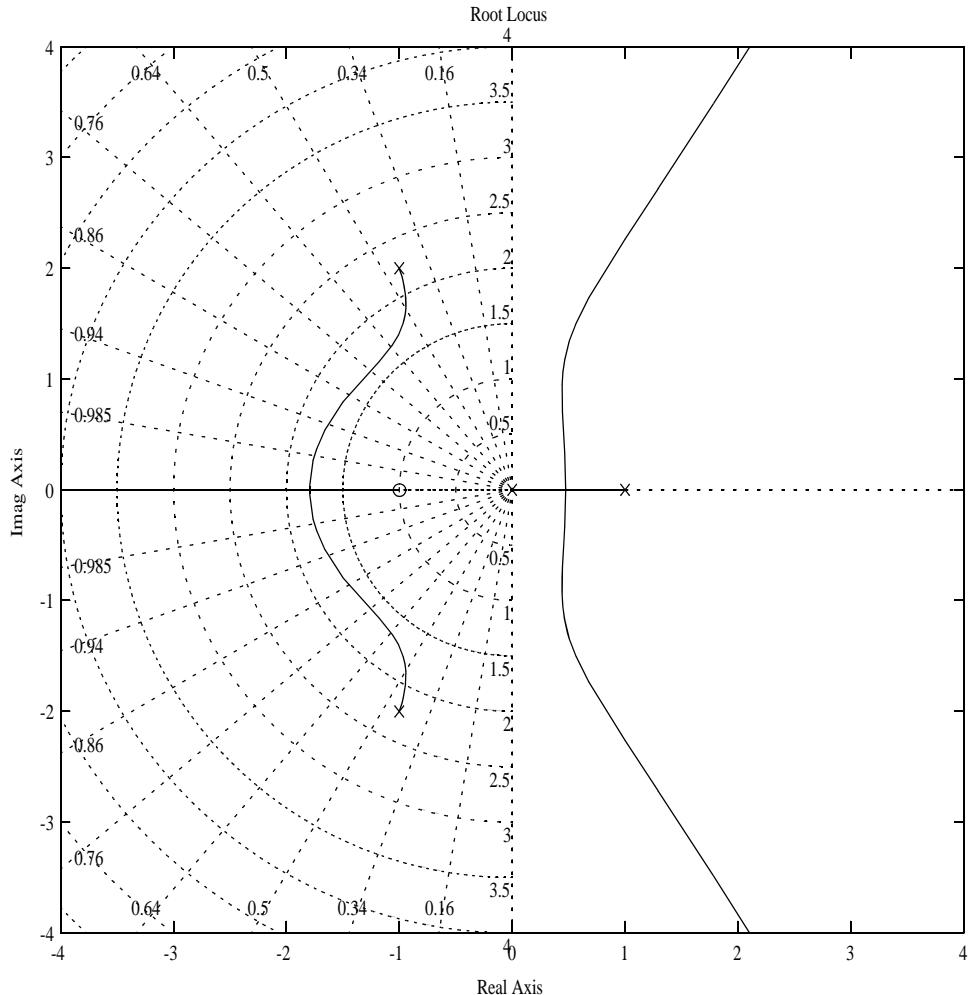
giver rodkurvebildet nedenfor.

De fire kurvegrene starter for $K = 0$ i åben-sløjfepolerne (regel 1):

$$s = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \pm j2 \end{cases}$$

Realaksedelene for $-\infty < s \leq -1$ og $0 \leq s \leq 1$ er rodkurve (regel 2).

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringssteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



Én kurvegren slutter for $K \rightarrow \infty$ i åbensløjfe nulpunktet $s = -1$ og de øvrige kurvegrene slutter i det uendelig fjerne langs asymptoter (regel 3).

Det ses at systemet er ustabil for alle $K > 0$ fordi de to kurvegrene for alle positive K befinner sig i højre halvplan.

Der findes to forgreningspunkter. De kan ifølge regel 5 findes af ligning (4.13).

$$a(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 - 5s$$

$$b(s) = s + 1$$

og dermed:

$$(s^4 + s^3 + 3s^2 - 5s) \cdot 1 - (s + 1)(4s^3 + 3s^2 + 6s - 5) = 0$$

eller:

$$-3s^4 - 6s^3 - 6s^2 - 6s + 5 = 0$$

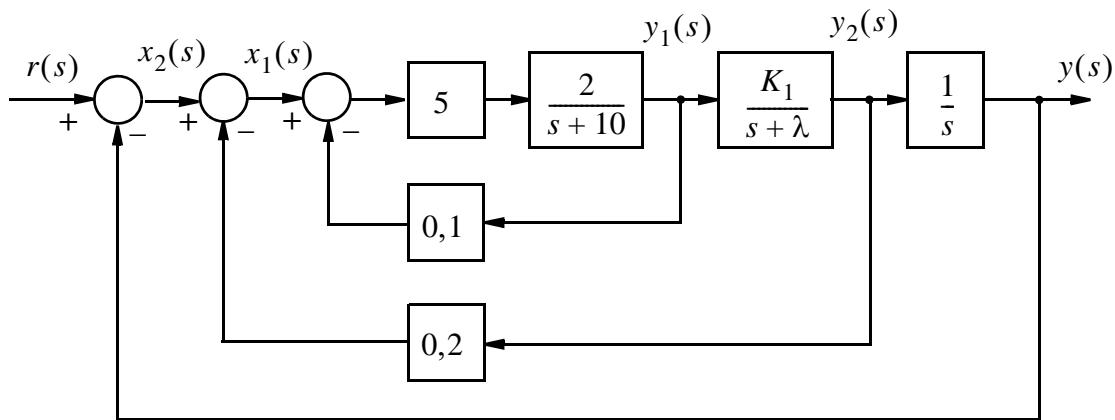
Løsningen bliver:

$$s = \begin{cases} -1,795 \\ -0,34 \pm j1,356 \\ 0,475 \end{cases}$$

Kun de to reelle løsninger er forgreningspunkter.

Opgave 4.4

Blokdiagrammet modificeres til:



Den inderste sløjfe reduceres til overføringsfunktionen:

$$\frac{y_1(s)}{x_1(s)} = \frac{10}{s+11}$$

og derefter reduceres den næste sløjfe til:

$$\frac{y_2(s)}{x_2(s)} = \frac{10K_1}{(s+11)(s+\lambda) + 2K_1}$$

Åben-sløjfe overføringsfunktionen bliver da:

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

$$G_{\dot{a}}(s) = \frac{10K_1}{s((s+11)(s+\lambda)+2K_1)}$$

Overføringsfunktionen har ikke standardformen (4.5) hverken for variation af K_1 eller λ .

Lukket-sløjfesystemets karakteristiske ligning er:

$$1 + G_{\dot{a}}(s) = 0 \Rightarrow s(s+11)(s+\lambda) + 2K_1s + 10K_1 = 0$$

a.

For variation af K_1 omformes til:

$$s(s+11)(s+\lambda) + K_1(2s+10) = 0$$

Ud fra ligning (4.16) kan man se at:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= s(s+11)(s+\lambda) \\ \beta(s) &= 2s + 10\end{aligned}$$

$\lambda = 2$:

Matlab-kommandoen

```
>> rlocus([2 10],conv([1 11 0],[1 2])),grid on
```

giver rodkurveplottet vist nedenfor.

Sammenlign med reglerne 1-5.

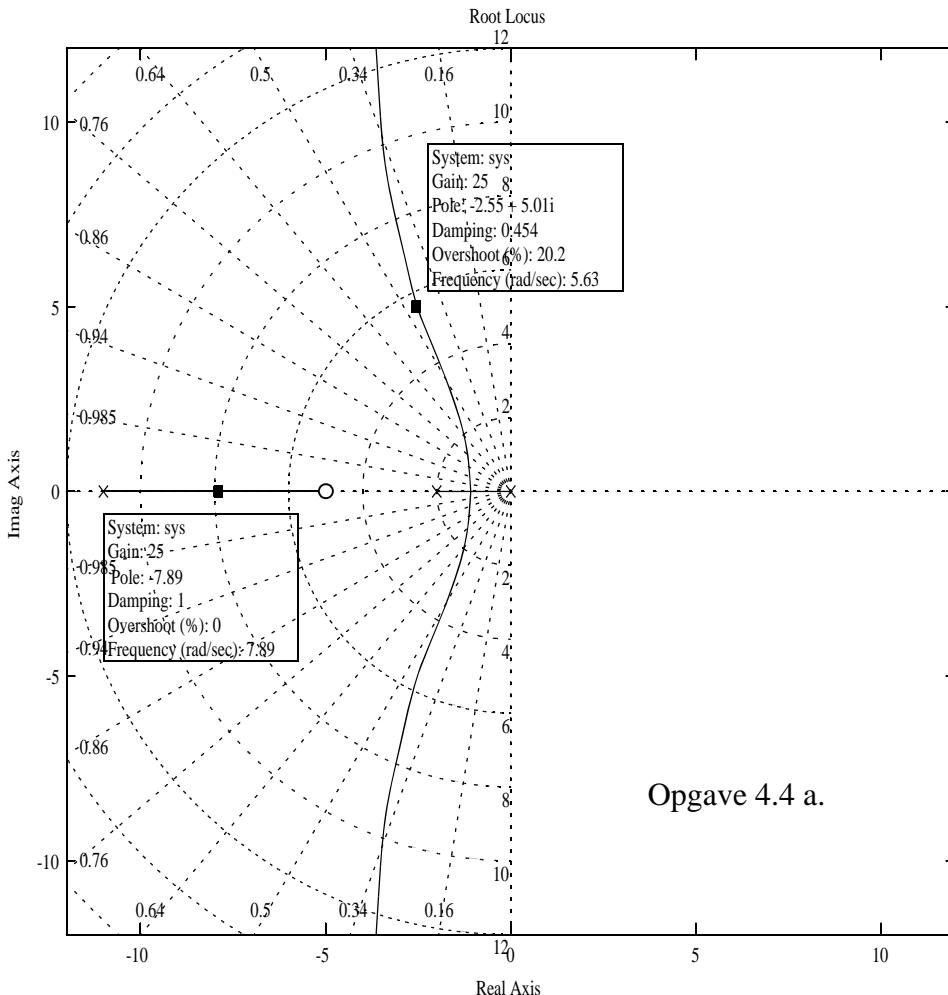
Med venstre museknap nedtrykket kan man finde, at dæmpningsforholdet for de komplekse poler bliver $\zeta = 0,454$ for $K_1 = 25$. Ved søgning på den reelle rodkurvegren finder man der reelle pols beliggenhed for samme forstærkning. Af oplysningerne i de to tekstboxe kan man se at lukket-sløjfesystemets poler for $K_1 = 25$ er:

$$s = \begin{cases} -7,89 \\ -2,55 \pm j5,01 \end{cases}$$

b.

$\lambda = 2$:

Matlab-kommandoen:



```
>> rlocus([2 10],conv([1 11 0],[1 5])).grid on
giver rodkurveplottet på næste side.
```

Sammenlign med reglerne 1-5.

Systemet er nu blevet reduceret til et 2.-ordenssystem. Det skyldes at åben-sløjfesystemet har et sammenfaldende pol/nulpunktpar, nemlig i $s = -5$. Det ses også på plottet.

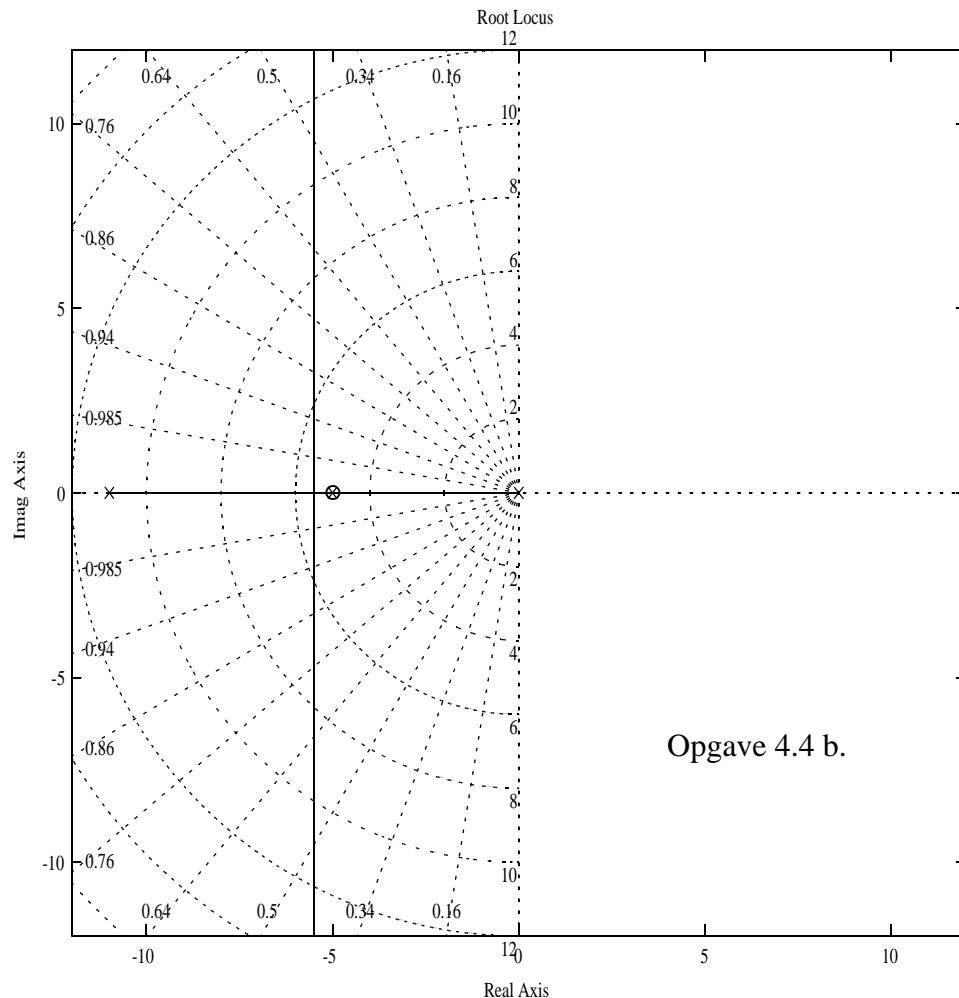
c.

For variation af λ og $K_1 = 2$ omformes lukket-sløjfesystemets karakteristiske ligning til:

$$s^3 + 11s^2 + 4s + 20 + \lambda(s^2 + 11s) = 0$$

hvilket vil sige at:

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger



$$\alpha(s) = s^3 + 11s^2 + 4s + 20$$

$$\beta(s) = s^2 + 11s$$

Matlabkommandoen

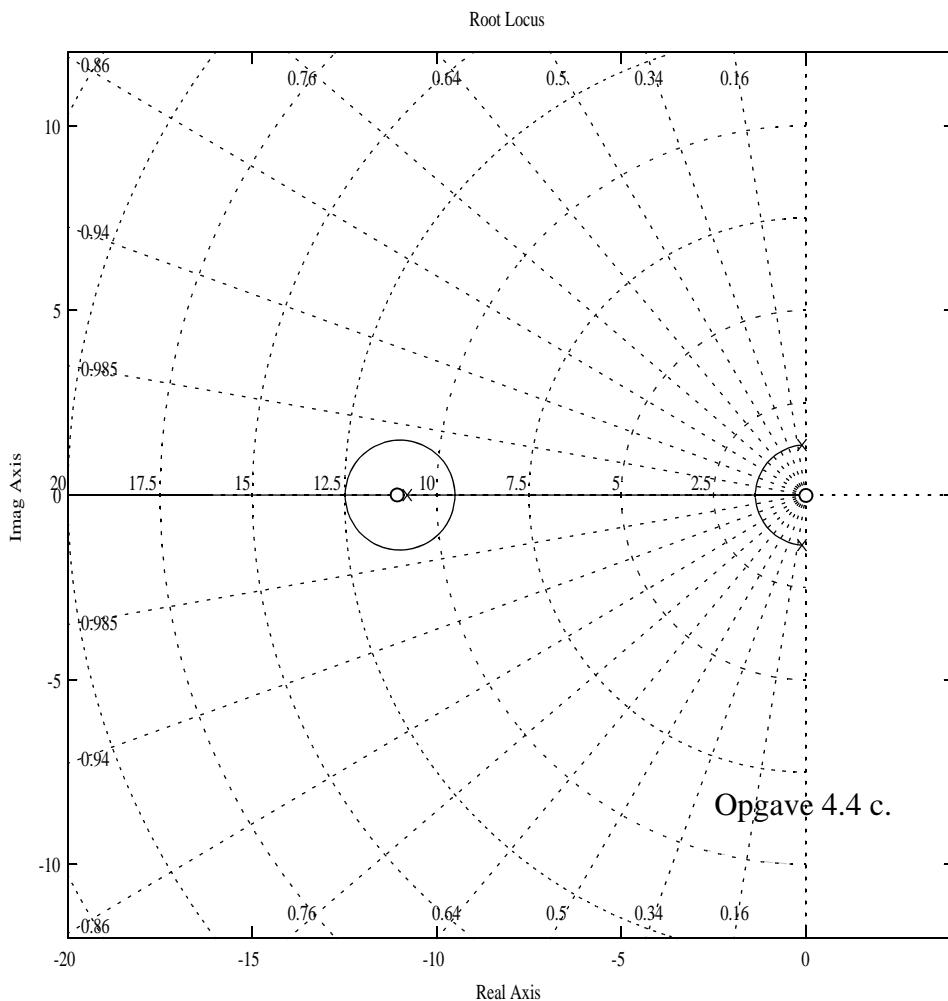
```
>>rlocus([1 11 0],([1 11 4 20])),grid on
```

Fører til plottet nedenfor.

Sammenlign med reglerne 1-5.

De tre rodkurvergrene starter for $\lambda = 0$ i det “syntetiske” åben-sløjfesystems poler (rødderne i $\alpha(s)$):

$$s = \begin{cases} -10,8 \\ -0,0994 \pm j1,357 \end{cases}$$



Rodkurverne slutter for $\lambda \rightarrow \infty$ i åben-sløjfe nulpunkterne (rødderne i $\beta(s)$):

$$s = \begin{cases} 0 \\ -11 \end{cases}$$

Bemærk at en åben-sløjfepol ligger tæt på et af nulpunkterne.

Opgave 4.5

a.

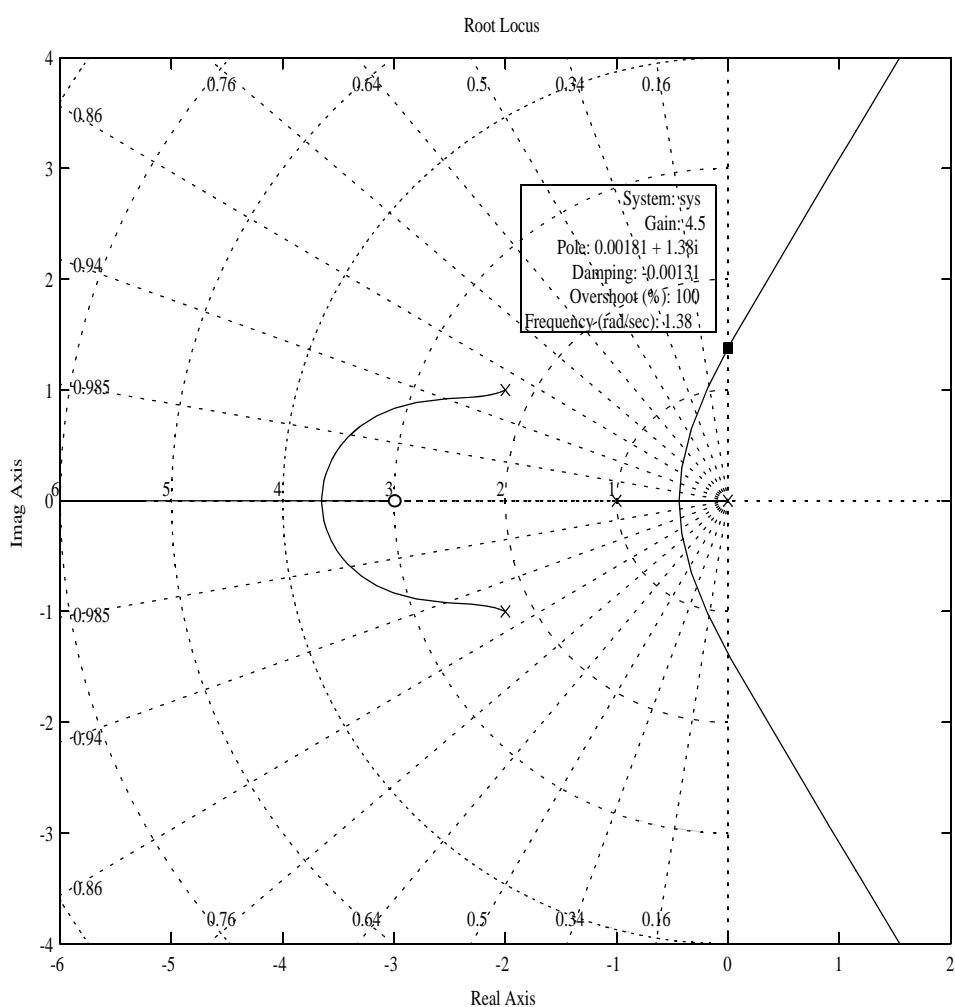
Åben-sløjfesystemets overføringsfunktion er:

$$G_a(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2 + 4s + 5)}$$

Rodkurverne kan tegnes med Matlabkommandoen:

```
>> rlocus([1 3],conv([1 1 0],[1 4 5])),grid on
```

Resultatet bliver:



b.

Søgning langs rodkurven med venstre museknap nedtrykket giver oplysningerne i tekstboxen. Systemet bliver marginalt stabilt for $K \approx 4,5$. Af rodkurvebilledet ses endvidere at forstærkningen skal være positiv, og konklusionen er at lukket-sløjfesystemet er stabilt for:

$$0 < s < 4,5$$

Opgave 4.6

a.

Med den angivne enhed x bliver systemets åben-sløjfe overføringsfunktion:

$$G_{\text{å}}(s) = \frac{K(s + 4x)}{s(s + 2x)(s + x)} = K \frac{b(s)}{a(s)}$$

og lukket-sløjfesystemets karakteristiske ligning bliver:

$$a(s) + Kb(s) = s^3 + 3xs^2 + (2x^2 + K)s + 4Kx = 0 \quad (1)$$

Ved skæring med imaginæraksen bliver to af lukket-sløjfepolerne imaginære:

$$s = j\omega \quad (2)$$

hvor ω er reel.

Denne værdi kan aflæses på rodkurveplottet til

$$\omega = 2,83x \quad (3)$$

Indsættes (2) i (1) sammen med $K = 1,5$ får man:

$$-j\omega^3 + -3x\omega^2 + j(2x^2 + 1,5)\omega + 6x = 0 \quad (4)$$

Den reelle del af denne ligning bliver med (3) indsatt:

$$-24,03x^3 + 6x = 0$$

Den relevante løsning til denne ligning bliver:

$$x \approx 0,5$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringssteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

Hermed fås:

$$a = 1; b = 0,5; c = 2$$

Åben-sløjfesystemet har én pol i origo, og dermed er:

$$N = 1$$

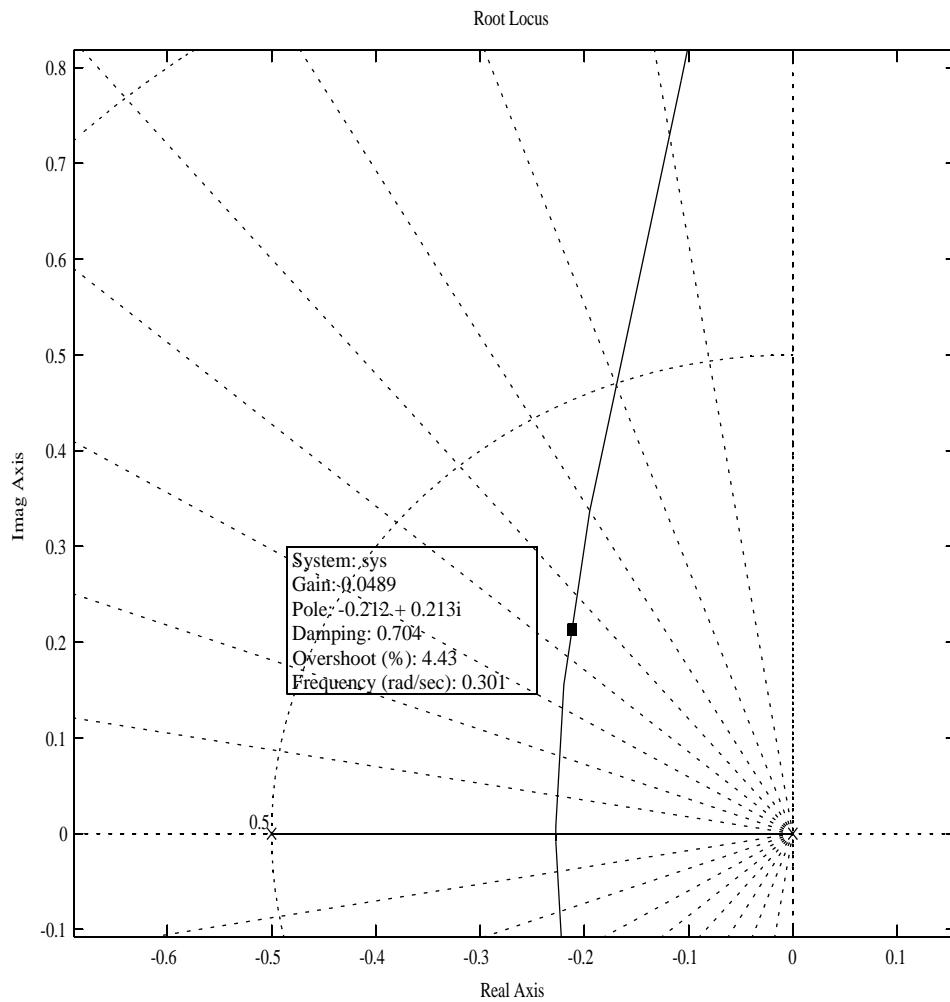
b.

Af (3) får man de imaginære lukket-sløjfe poler: $s = \pm j1,41$

Matlabkommandoen:

```
>> rlocus([1 2],conv([1 1 0],[1 .5])),grid on
```

giver rodkurveplottet hvoraf et udsnit er vist nedenfor.



Søgning langs kurven med venstre museknap nedtrykket giver oplysningerne i teksten.

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

Forstærkningen for det ønskede dæmpningsforhold bliver $K \approx 0,049$.

Ifølge regel 3 er de to asymptoteres vinkler med realaksen:

$$\Phi = \frac{180^\circ + q \cdot 360^\circ}{3-1} = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}$$

og deres fælles skæringspunkt med realaksen er:

$$\alpha = \frac{0 - 0,5 - 1 + 2}{3-1} = 0,25$$

Ifølge regel 5 findes forgreningspunkterne som løsninger til ligningen:

$$(s^3 + 1,5s^2 + 0,5s) \cdot 1 - (s+2)(3s^2 + 3s + 0,5) = 0 \\ \Rightarrow 2s^3 + 7,5s^2 + 6s + 1 = 0$$

Ligningen løses med Matlab:

```
>> roots([2 7.5 6 1])
```

```
ans =
```

```
-2.7117
-0.8110
-0.2274
```

Sammenlignes med rodkurveplottet ses det at kun løsningen $s = -0,2274$ er forgreningspunkt.

c.

For $K = 0,2$ bliver den karakteristiske ligning:

$$s^3 + 1,5s^2 + 0,7s + 0,4 = 0$$

Løsningen findes f.eks. med Matlabfunktionen damp:

```
>> damp([1 1.5 .7 .4])
```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
------------	---------	---------------

-1.53e-001 + 5.58e-001i	2.64e-001	5.79e-001
-------------------------	-----------	-----------

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

$$\begin{array}{cccc} -1.53e-001 & -5.58e-001i & 2.64e-001 & 5.79e-001 \\ -1.19e+000 & & 1.00e+000 & 1.19e+000 \end{array}$$

Den dæmpede egenfrekvens fås til:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 0,558 \text{ rad/sek}$$

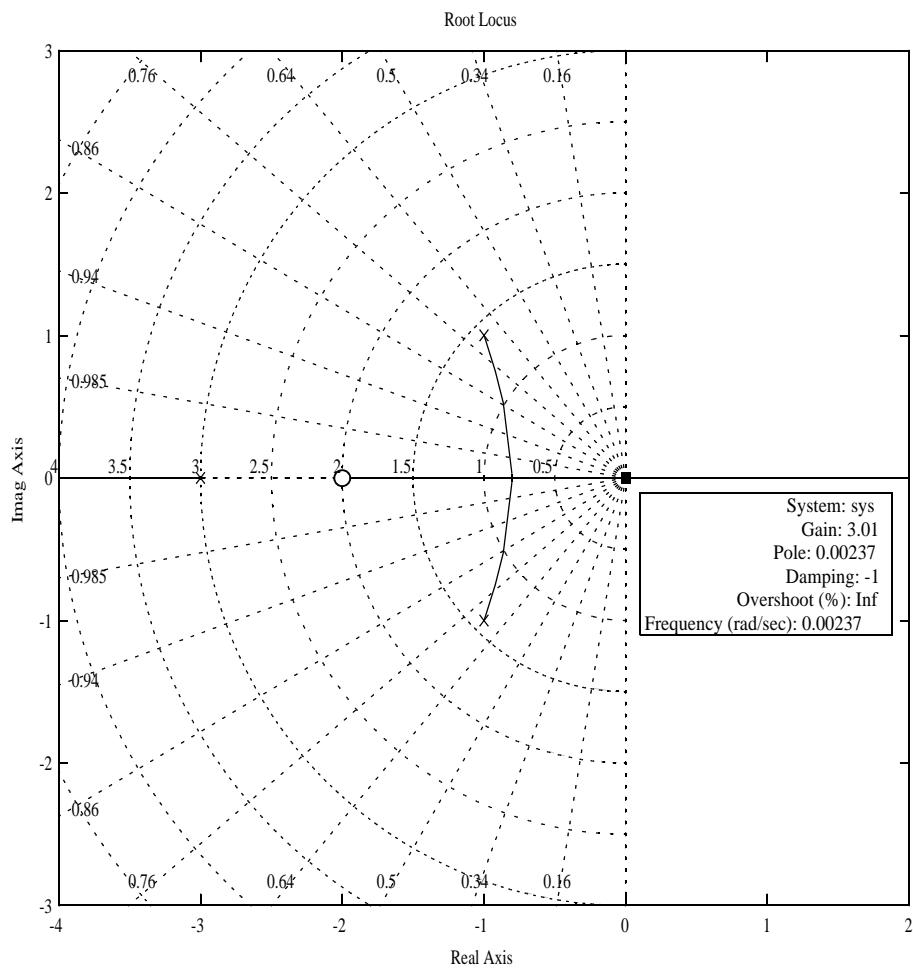
Opgave 4.7

a.

Rodkurverne for $K \leq 0$ får man lettest ved at skifte fortegn på b -polynomiet. Udfører man Matlabkommandoen:

```
rlocus([-1 2],conv([1 3],[1 2 2])),grid on
```

får man rodkurvebilledet:



Man skal bemærke at regelsættet 1-5 som beskrevet på side 154-158 kun gælder for $K \geq 0$. For negative forstærkninger bliver vinkelbetingelsen derimod:

$$\text{Arg } G(s) = 0^\circ + q \cdot 360^\circ$$

og det betyder at rodkurvedelene på realaksen placeres omvendt af hvad regel 2 siger!

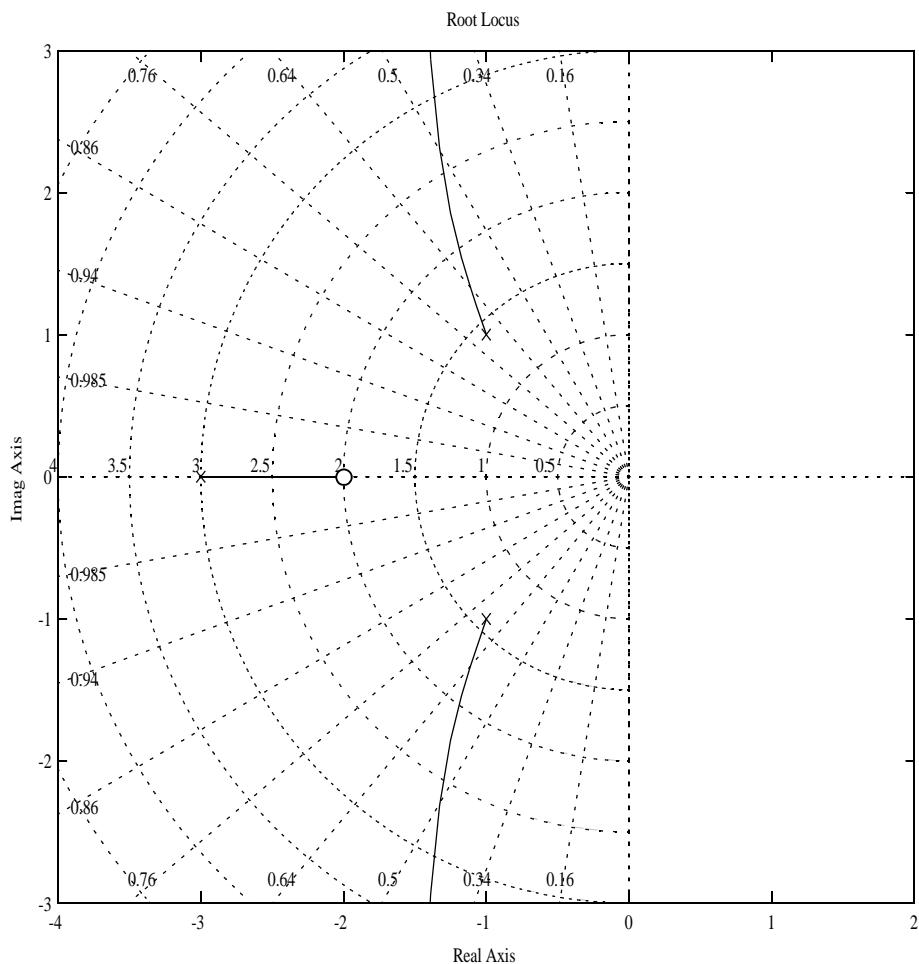
Ved søgning langs den reelle del af rodkurven med venstre museknap nedtrykket viser at lukket-sløjfe systemet er stabilt for $K > -3$ (se tekstdobbelten).

b.

Her bruges Matlabkommandoen:

```
>>rlocus([1 2],conv([1 3],[1 2 2])),grid on
```

giver plottet nedenfor. Det kan konstateres at de sædvanlige regler 1-5 gælder i dette tilfælde.

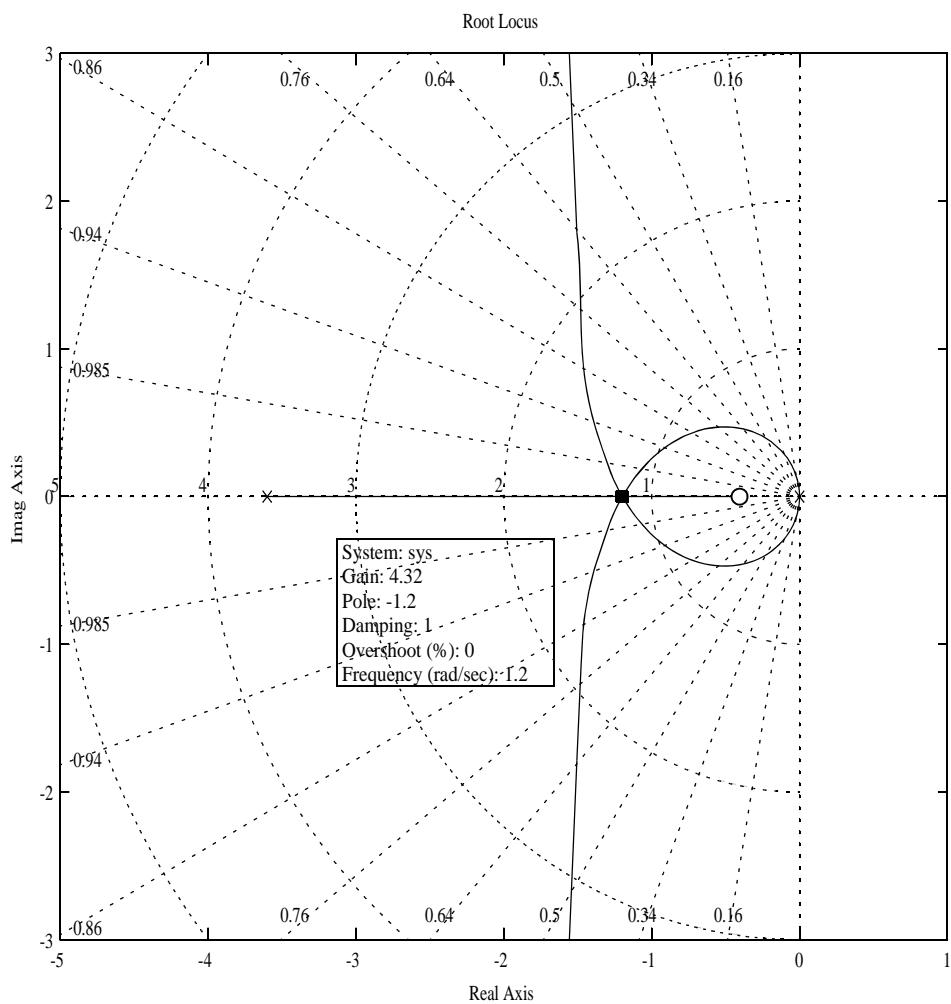


Opgave 4.8

Matlab-kommandoen:

```
>> rlocus([1 .4],[1 3.6 0 0]),grid on
```

giver rodkurveplottet:



Pegning på tripelpunktet med venstre museknap nedtrykket giver oplysningerne i teksten. Tripelpolen ligger i $s = -1,2$ for $K = 4,32$.

Ifølge regel 5 er kurvernes skæringsvinkler med hinanden i tripelpunktet:

$$\gamma = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

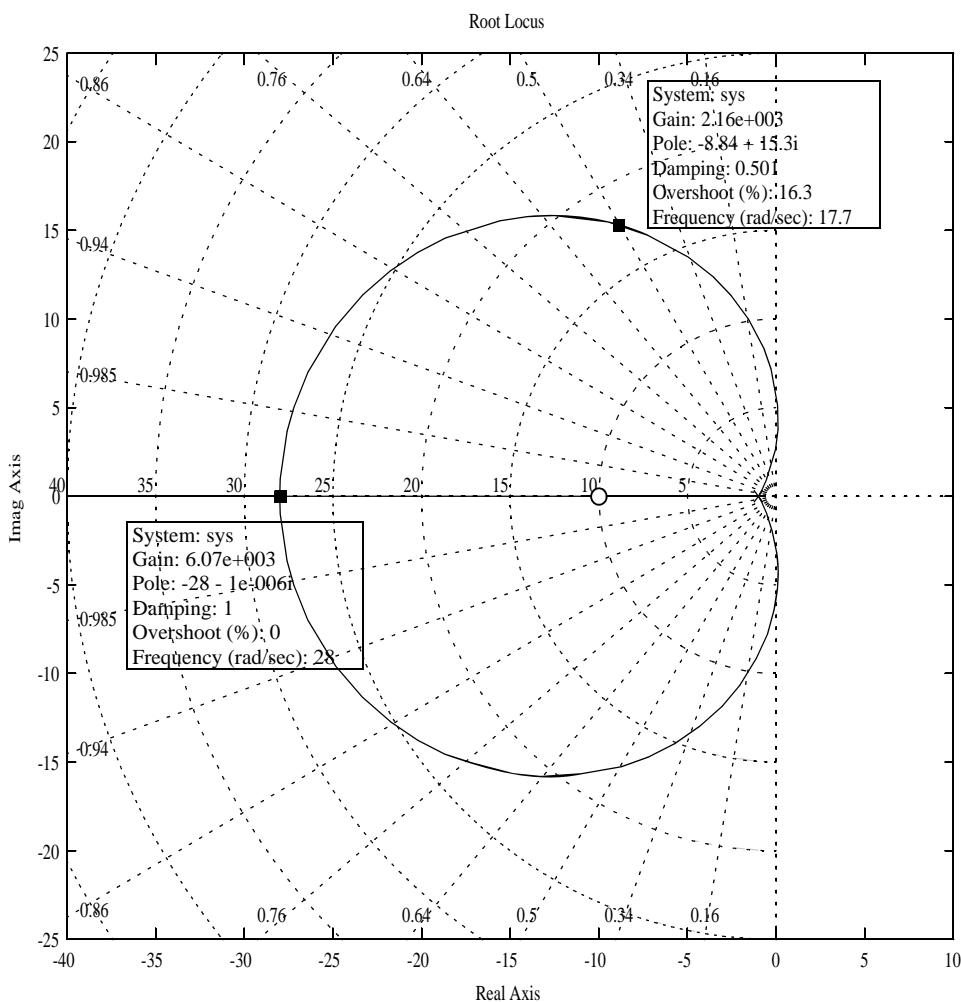
Bemærk at to rodkurvegrene starter for $K = 0$ i den dobbelte åben-sløjfepol i origo.

Opgave 4.9

Matlabkommando:

```
>>rlocus(conv([.1 1],[.1 1]),conv([1 1],conv([1 1],[1 1])),grid on
```

Rodkurveplot:



Åben-sløjfesystemet har tre sammenfaldende poler i $s = -1$, og derfor starter alle tre kurvegrenene her for $K = 0$. To kurvegrenene slutter i det dobbelte åben-sløjfenulpunkt $s = -10$ for $K \rightarrow \infty$.

Forgreningspunkterne kan findes ved løsning af ligning (4.13), men det er naturligvis lettere at pege på forgreningspunktet med venstre museknap nedtrykket. Det giver resultatet vist i den nederste tekstbox:

$$s = -28 \text{ for } K = 6070$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

Samtlige poler for denne forstærkning findes ved at løse lukket-sløjfesystemets karakteristiske ligning:

$$a(s) + Kb(s) = 0,01s^4 + 0,4s^3 + 3,57s^2 + 5,98s + 2,8 = 0$$

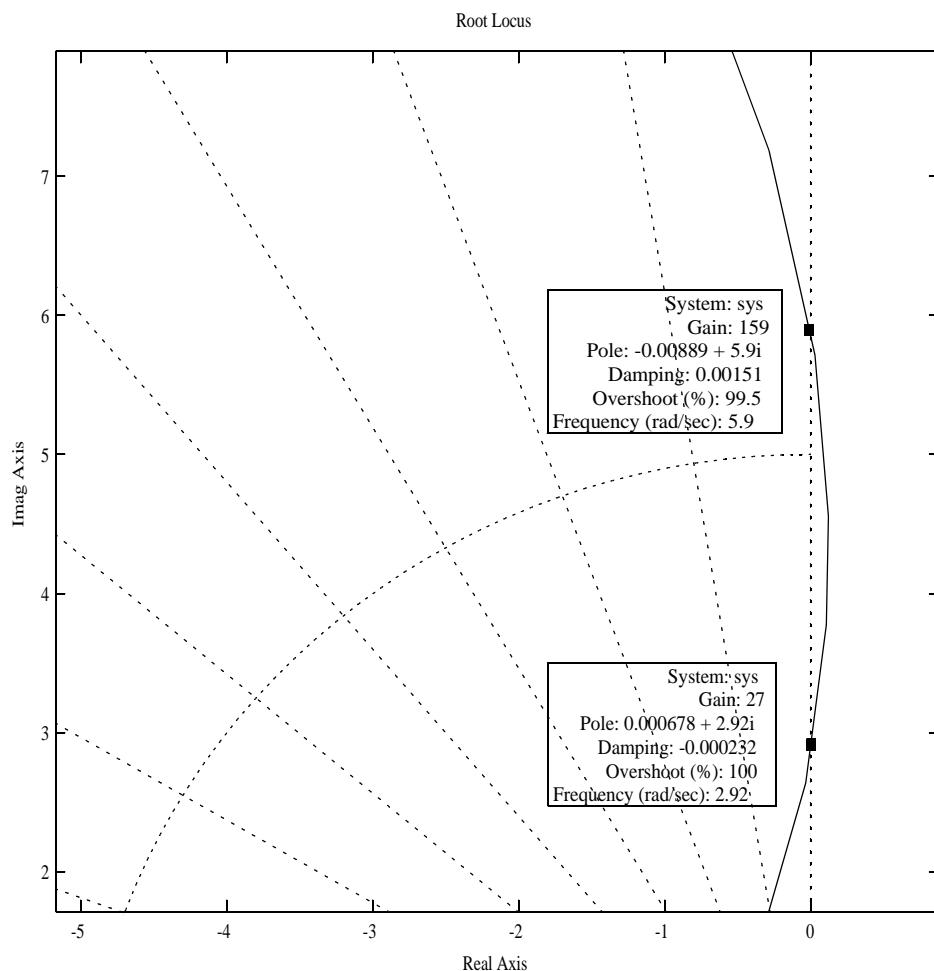
Matlab-beregning giver samtlige polers placering.

```
>> roots([.01 .4 3.57 5.98 2.8])
```

```
ans =
```

```
-28.0000
-10.0000
-1.0000 + 0.0000i
-1.0000 - 0.0000i
```

Et udsnit af rodkurveplottet er vist på følgende figur:



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

Pegning på de to skæringspunkter giver de viste oplysninger. I dette tilfælde er skæringspunkterne ret upræcist bestemt på grund af figurens begrænsede nøjagtighed. En undersøgelse af lukket-sløjfesystemets karakteristiske ligning med Matlabs roots-kommando giver de nøjagtige værdier:

$$K = 25$$

$$s = \begin{cases} -3,25 \\ \pm j2,828 \end{cases}$$

og:

$$K = 160$$

$$s = \begin{cases} -4,6 \\ \pm j5,916 \end{cases}$$

På det første kurveplot ses de komplekse poler for dæmpningsforholdet $\zeta = 0,5$. For den opgivne forstærkning $K = 2159,1 \cong 2160$ findes løsningen til den karakteristiske ligning:

$$s = \begin{cases} -6,91 \\ -8,84 \pm j15,3 \end{cases}$$

For $K = 1,2507$ får man:

$$s = \begin{cases} -1,93 \\ -0,539 \pm j0,934 \end{cases}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

Opgave 5.1

Der genereres Matlab-systemobjekter:

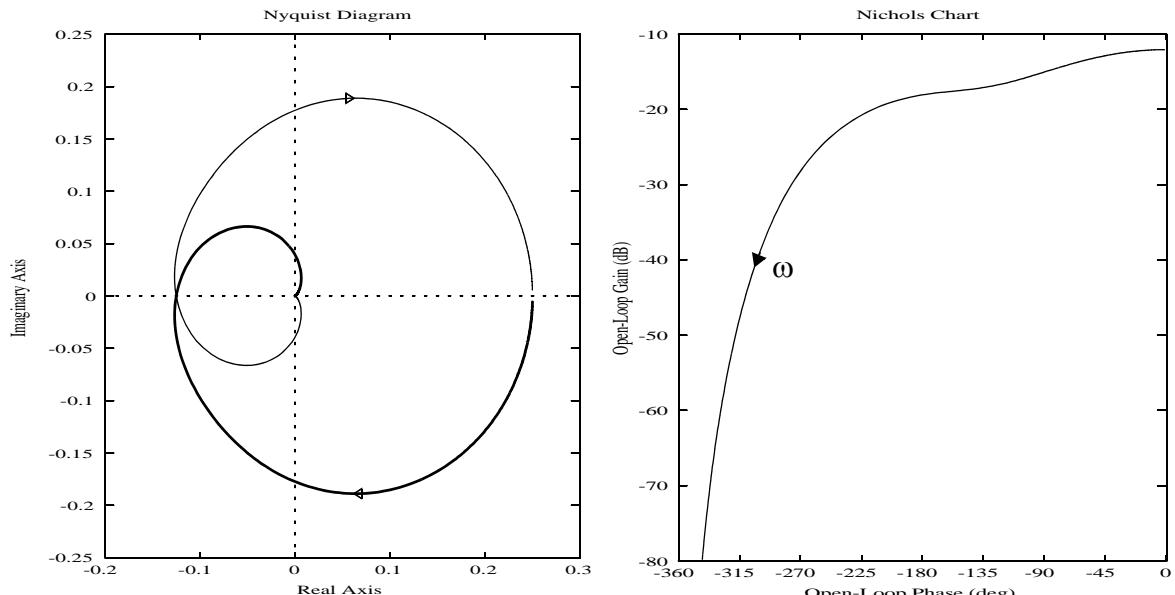
```
>> sys1=tf(1,[1 2 1]);
>> sys2=tf(1,[1 1 4]);
```

Herefter kan generere en frekvensvektor med logaritmisk fordelte værdier:

```
>>w=logspace(-2,1,400);
```

Herefter kan Nyquistplot (polarplot) og Nicholsplot tegnes:

```
>> subplot(121),Nyquist(sys1*sys2,w),axis([-2 .3 -.25 .25])
>> subplot(122),Nichols(sys1*sys2,w)
```



Bemærk at ikke blot polarkurven men også dens spejlbillede i realaksen tegnes. Spejlbilledet bruges i forbindelse med Nyquist's stabilitetskriterium (se appendiks B).

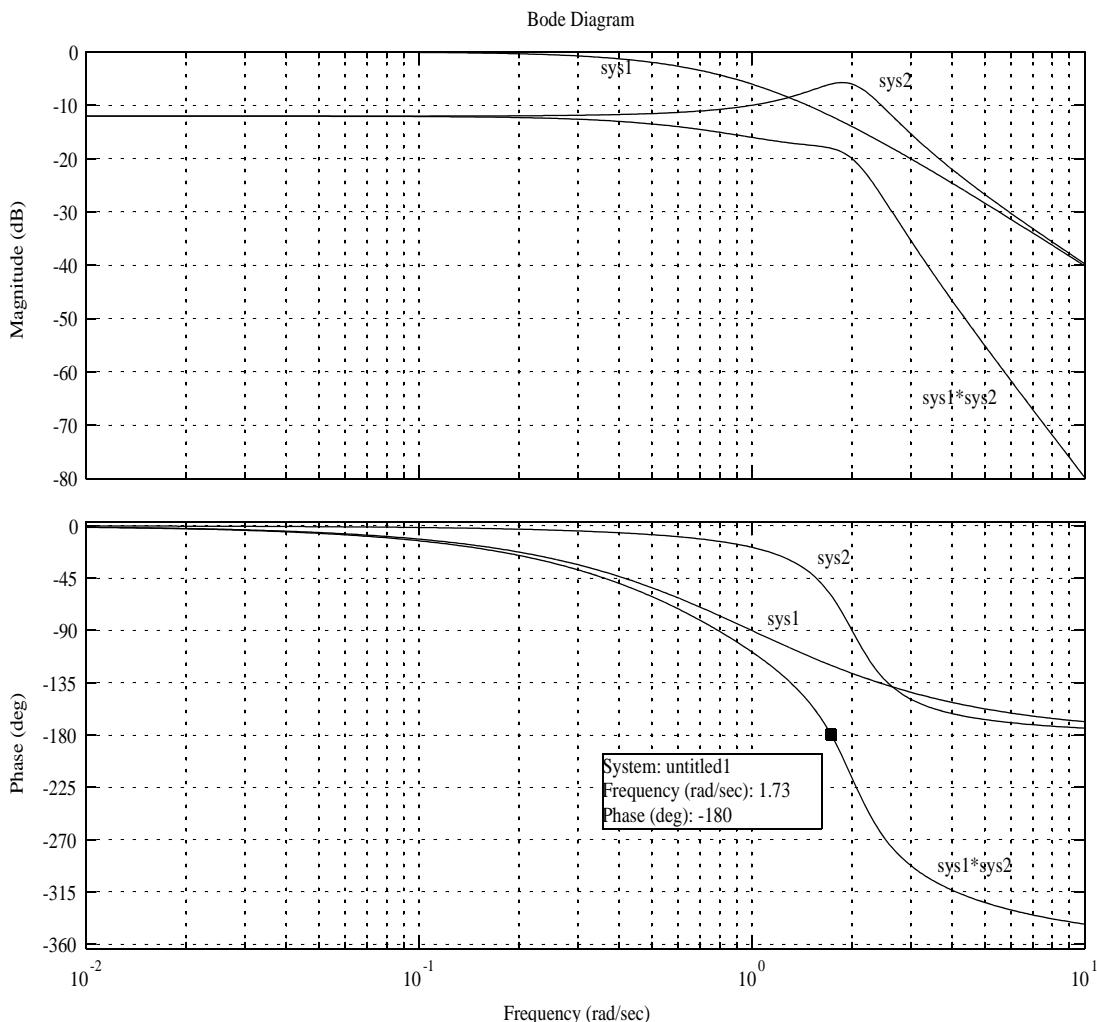
Bodeplottene tegnes med kommandoen:

```
>> bode(sys1,sys2,sys1*sys2,w),grid on
```

Resultatet ses på næste side.

Bemærk at man på denne måde kan tegne responserne både for de to delsystemer og for produktet, d.v.s. for det totale system.

Ved at pege på en af kurverne med venstre museknap nedtrykket får man oplysninger om kurvernes data som vist i tekstdokumentet. F.eks. kan man se at totalsystemet har phasedrejningen $\varphi = -180^\circ$ ved frekvensen $\omega = 1,73$ rad/sek.



Opgave 5.2

Overføringsfunktionen kan f.eks. deles op i flg. to Matlab-systemobjekter:

```
>> sys1=tf([1 0],[1 11 10]);
>> sys2=tf(1,[1 5 2500]);
```

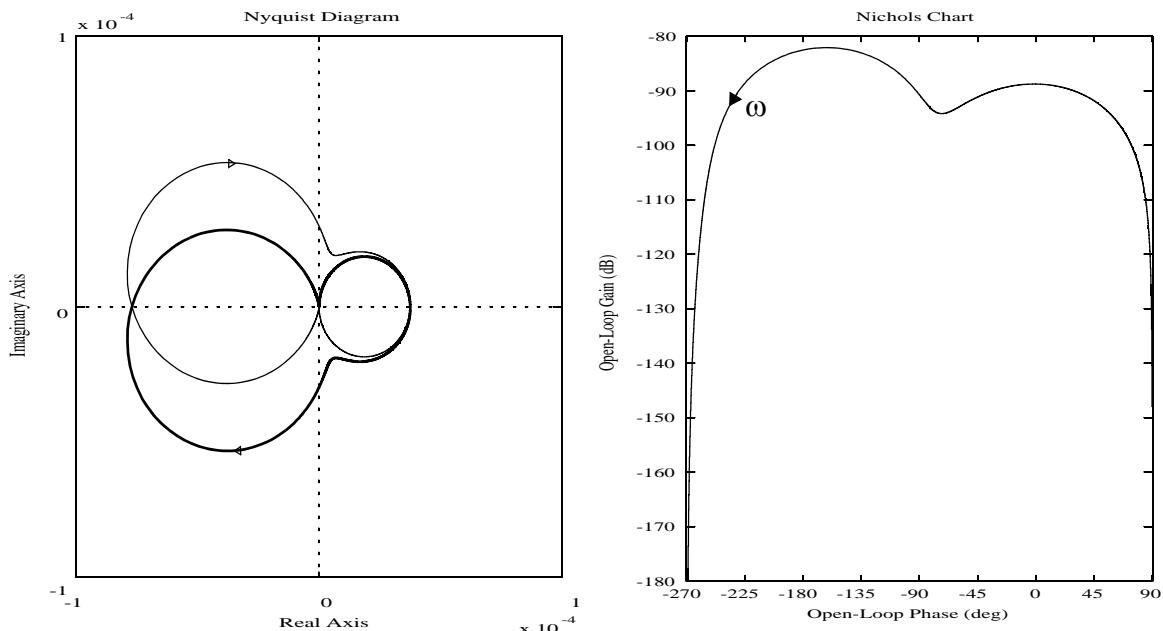
Herefter kan generere en frekvensvektor med logaritmisk fordelte værdier:

```
>> w=logspace(-3,3,1000);
```

Herefter kan Nyquistplot (polarplot) og Nicholsplot tegnes:

```
>> subplot(121),nyquist(sys1*sys2,w),axis([-1e-4 1e-4 -1e-4 1e-4])
>> subplot(122),nichols(sys1*sys2,w)
```

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Regulerings teknik 4.udgave
Opgaveløsninger



Bodeplottene tegnes med kommandoerne:

```
>> w=logspace(-1,3,500);
>> bode(sys1,sys2,sys1*sys2,w),grid on
```

Plottet ses på næste side.

Opgave 5.3

Overføringsfunktionen kan f.eks. deles op i flg. to Matlab-systemobjekter::

```
>> sys1=tf([1 1],[1 8 64]);
>> sys2=tf(1000,[1 2 0]);
```

Herefter kan generere en frekvensvektor med logaritmisk fordelte værdier:

```
>>w=logspace(-1,2,200);
```

Herefter kan Nyquistplot (polarplot) og Nicholsplot tegnes:

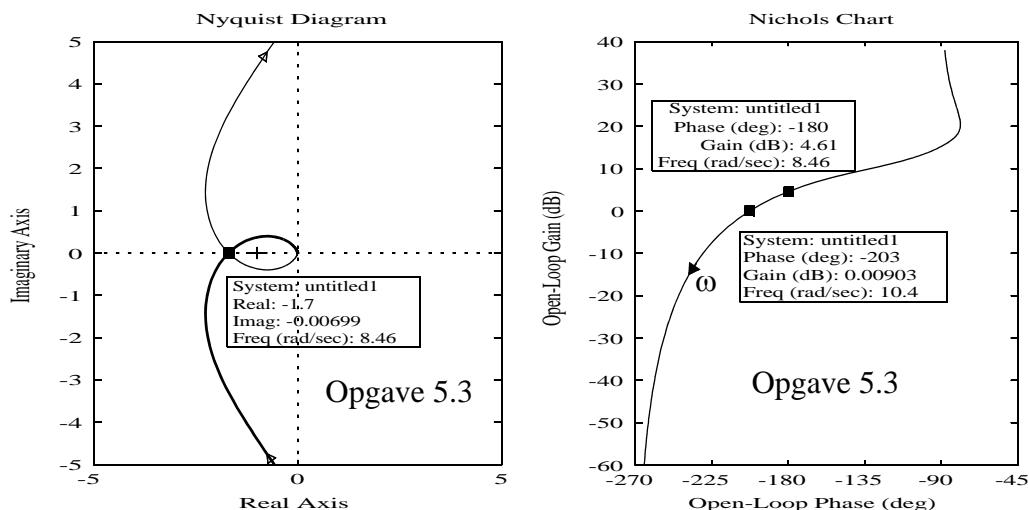
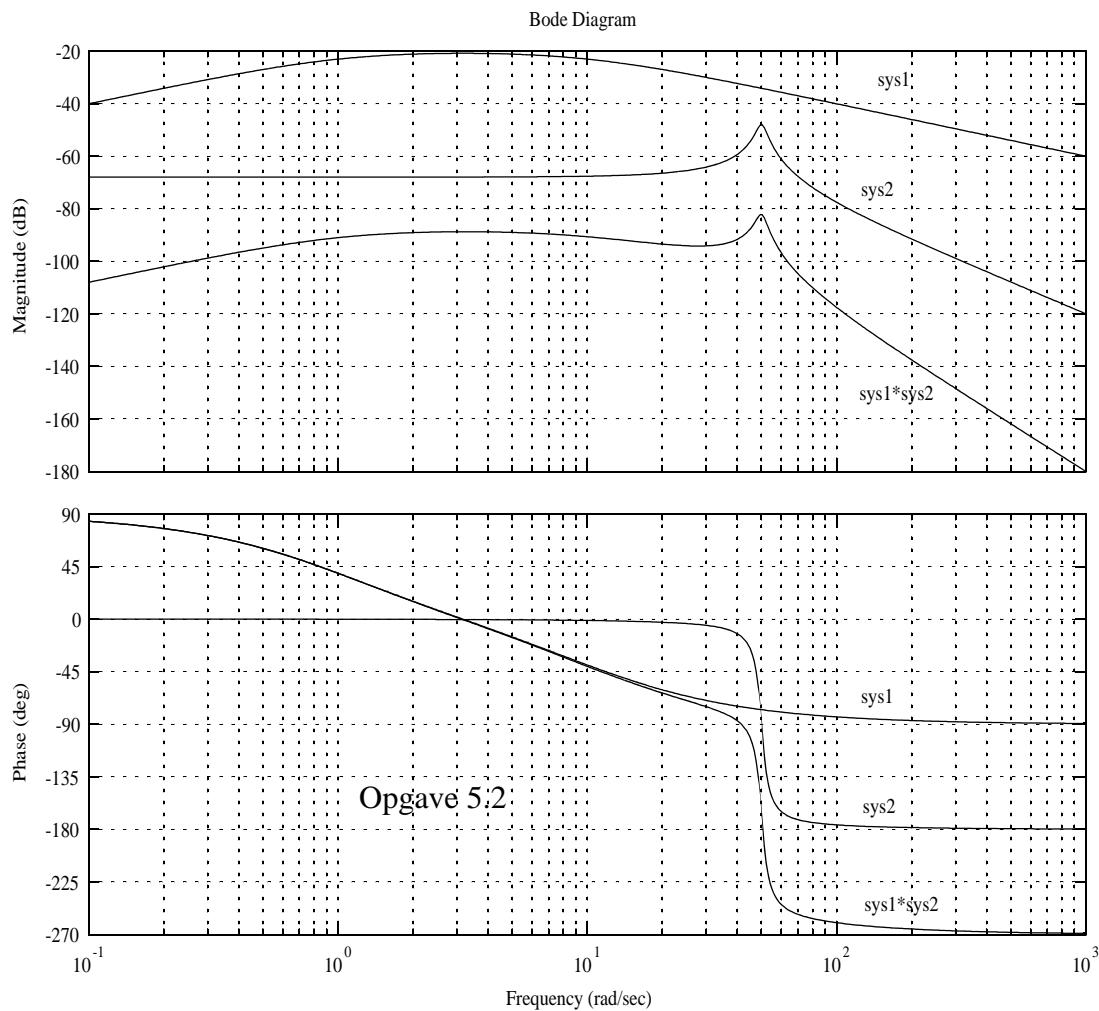
```
>> subplot(121),nyquist(sys1*sys2,w),axis([-5 5 -5 5])
>> subplot(122),nichols(sys1*sys2,w)
```

Ved søgning langskurverne (venstre museknap) kan man få oplysningerne som er vist i tekstdoksene. Bemærk afmærkningen på de to kurver af punkter hvor phasedrejningen er $\varphi = -180^\circ$ for frekvensen $\omega = 8,46$ rad/sek. Se plot næste på side.

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

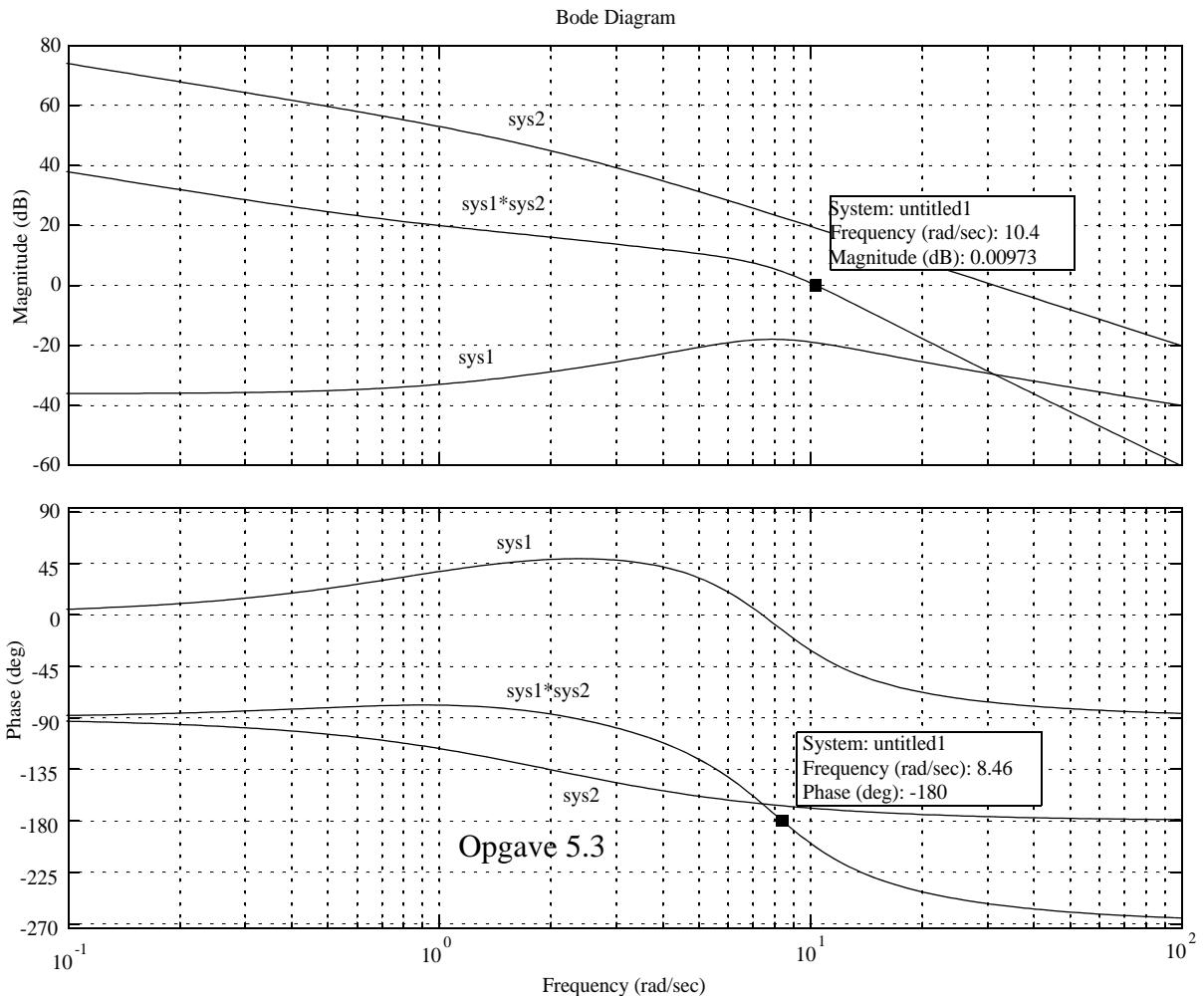
Opgaveløsninger



Bodeplottene tegnes med kommandoerne:

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

>> bode(sys1,sys2,sys1*sys2,w),grid on
 og resultatet bliver:



Se de afmærkede punkter på kurverne og sammenligne med de tilsvarende punkter på polar- og Nicholsplottet.

Opgave 5.4

a.

Instrumentets bevægelsesligning (Newton's 2. lov):

$$I\ddot{\theta} = T - k\theta - b\dot{\theta} \Rightarrow I\ddot{\theta} = K_M v - k\theta - b\dot{\theta}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

hvor b er en viskos dæmpekoefficient.

Laplacetransformation:

$$(Is^2 + bs + k)\theta(s) = K_M v(s)$$

Overføringsfunktion:

$$\frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{K_M}{Is^2 + bs + k} = \frac{\frac{K_M}{k}}{\frac{I}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}$$

Den udæmpede egenfrekvens kan ses at være:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-5}}} = 0,316 \text{ rad/sek}$$

b.

Oversving 10% betyder at dæmpningsforholdet er $\zeta = 0,6$ (se figur 3.13).

Dæmpet egenfrekvens:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 0,253 \text{ rad/sek}$$

c. Det største udslag får man ved resonansfrekvensen:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 0,167 \text{ rad/sek}$$

d.

Ved meget lave frekvenser - d.v.s. for $\omega \ll \omega_n$ - vil visningen være korrekt, og amplitudeforholdet vil da være lig overføringsfunktionens statiske forstærkning $A_{if} = K_M/k$.

Ved en inputamplitude på 1 volt får man altså en outputamplitude (vinkelamplitude) på $\theta_{1volt} = K_M/k$.

Ifølge formel (5.31) er amplitudeforholdet som funktion af frekvensen:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

$$A(\omega) = \frac{\theta_{1volt}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

For $\omega = 2$, d.v.s. $\frac{\omega}{\omega_n} = 6,33$, og $\zeta = 0,6$ får man:

$$A(2) = \frac{\theta_{1volt}}{39,8} = 0,0251 \cdot \theta_{1volt}$$

Voltmeteret vil med andre ord vise en spændingsamplitude på 25,1 mv.

e.

Fasedrejningen er ifølge formel (5.32):

$$\varphi = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = -169^\circ$$

Opgave 5.5

Nyquistplottet (polarplottet) tegnes lettest med Matlabkommandoerne:

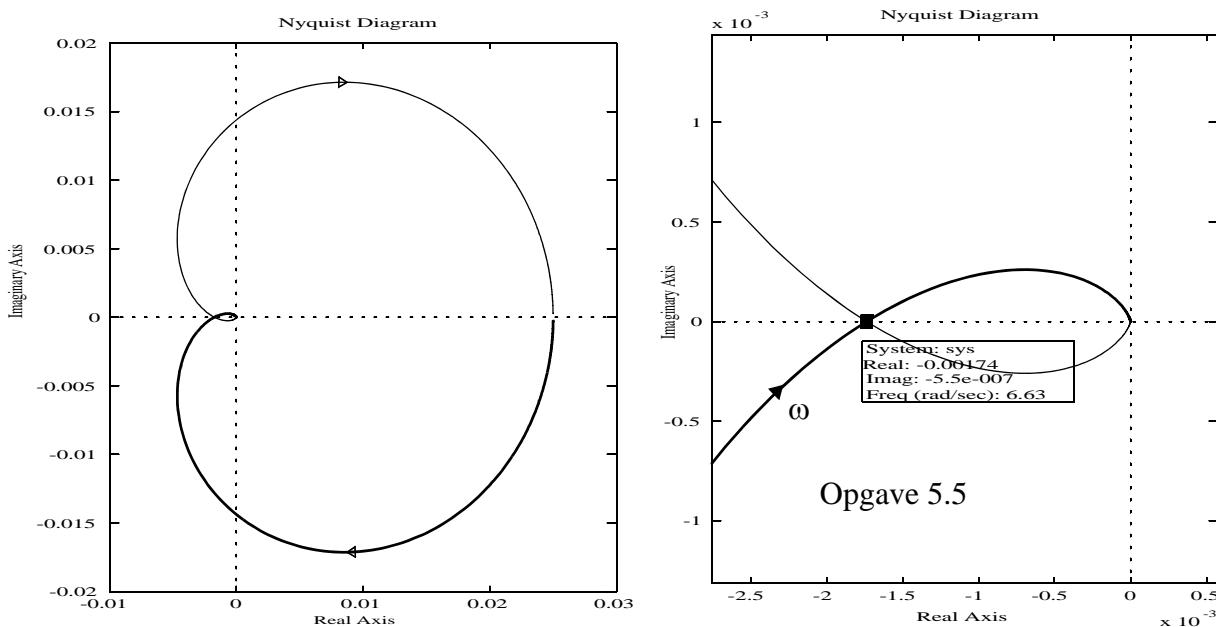
```
>>w=logspace(-2,3,500);
>>subplot(121),nyquist(1,conv([1 10],[1 4 4]),w),axis([-0.01 .03 -0.02 .02])
```

Der er valgt $K = 1$.

Resultatet ses på næste side. Den højre figur viser et udsnit omkring kurvens skæring med realaksen.

På den højre figur er der peget på skæringspunktet med venstre museknap nedtrykket, og i tekstdobbeltskærm ses at her - for fasedrejningen $\varphi = -180^\circ$ - har amplitudeforholdet $|G(j\omega)| = 0,00174$ ved frekvensen $\omega = 6,63$ rad/sek. Polarkurven forstørres eller formindskes lineært hvis K henholdsvis øges eller reduceres. Lukket-sløjfesystemet er stabilt hvis åben-sløjfe polarkurven passerer realaksen til højre for punktet -1 , d.v.s. hvis amplitudeforholdet er mindre end 1 ved fasedrejningen -180° . Skæringspunktet rykker altså til venstre når K øges, og det passerer punktet -1 når K når værdien:

$$K_{max} = \frac{1}{0,00174} = 575$$



Hvis K er negativ bliver polarkurven spejlet omkring imaginæraksen fordi:

$$KG(j\omega) = a \pm jb \Rightarrow -KG(j\omega) = -a \pm jb$$

Ved samme argument som ovenfor kan herefter ses at lukket-sløjfestabilitet kræver at K er større end :

$$K_{min} = -\frac{1}{0,025} = -40$$

Rodkurveplot for $K > 0$ og $K < 0$ tegnes med Matlabkommandoerne:

```
>> subplot(121),rlocus(1,conv([1 10],[1 4 4])),axis([-8 8 -8 8])
>> subplot(122),rlocus(-1,conv([1 10],[1 4 4])),axis([-8 2 -5 5])
```

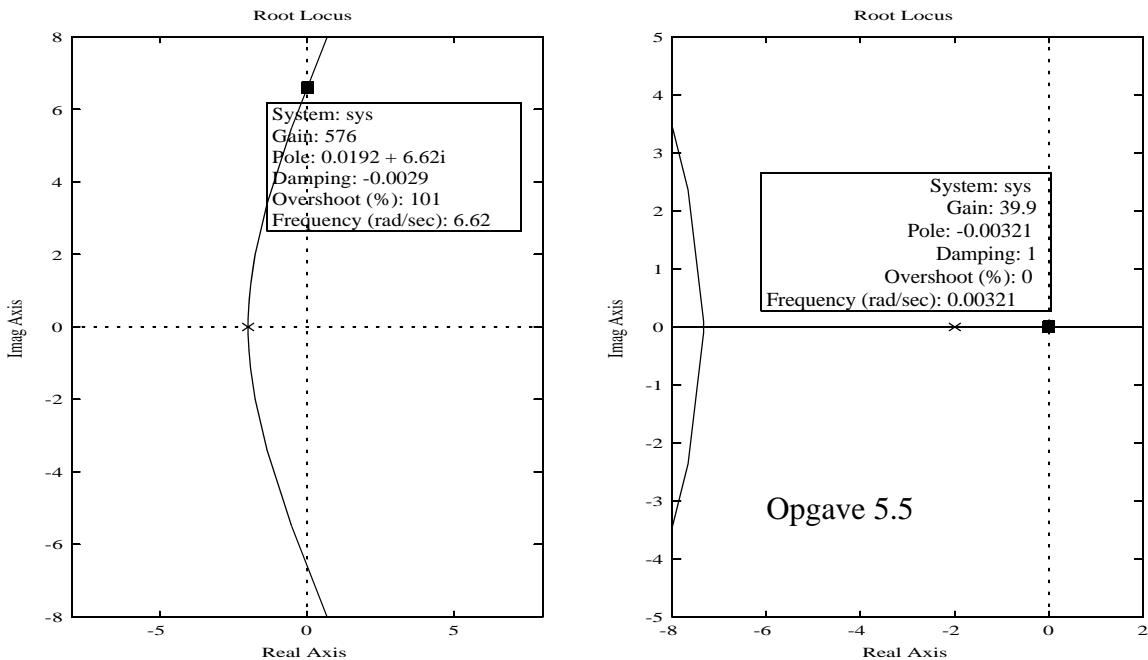
og resultatet bliver som vist på næste side.

Resultatet:

$$-40 < K < 576$$

ses at stemme overens med frekvensanalyseresultatet.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringssteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

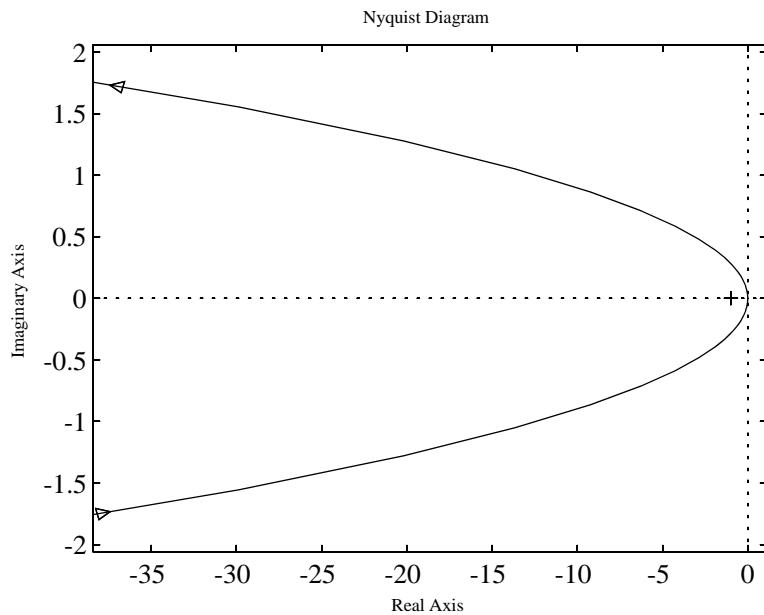


Opgave 5.6

De to Matlab-kommandoer:

```
>>sys=tf([1 1],[1 10 0 0]);
>>nyquist(sys)
```

giver resultatet på følgende figur (som altså gælder for $K = 1$):



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

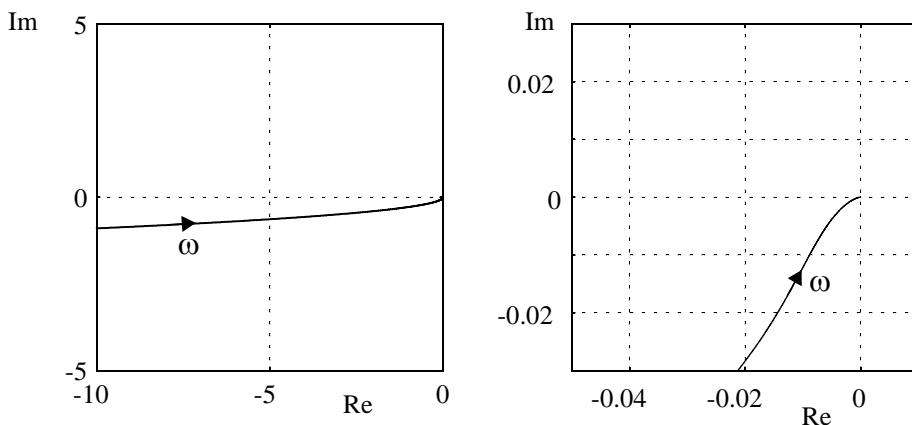
Opgaveløsninger

Matlab har valgt frekvensområdet 0,035-1000 rad/sek.

Hvis man bruger kommandoen freqresp er man lidt friere stillet m.h.t. til plottets udseende:

```
>>w=logspace(-2,3,500);
>>h=freqresp(sys,w);
>>subplot(121),plot(squeeze(h)),axis([-10 0 -5 5]),axis square
>>subplot(122),plot(squeeze(h)),axis([-0.05 0.01 -0.03 0.03]),axis square
```

Får man følgende resultat:



squeeze-funktionen er nødvendig fordi freqresp producerer en 3-dimensional matrix som ikke kan bruges i forbindelse med plot-kommandoen.

Af det sidste plot ses at fasedrejningen går mod -180° for høje frekvenser. Af overføringsfunktionen ses det også at gælde for lave frekvenser:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s+1}{s+10} \quad (1)$$

Den sidste faktor har fasedrejningen $\varphi \rightarrow 0^\circ$ både for $\omega \rightarrow 0$ og for $\omega \rightarrow \infty$. Det ses lettest af Bode-plottet (se evt. bogens figur 6.27). Kun den dobbelte integrator bidrager altså til fasedrejningen i "enderne" af frekvensområdet, og dennes fasedrejning er jo -180° for alle frekvenser.

Den højre faktor i (1) har positiv fasedrejning for alle frekvenser, og maksimum er 55° (tegn Bode-plottet eller se figur 6.28).

Systemets største fase fasedrejning (eller mindste *negative* fasedrejning; opgaveteksten er lidt tvetydig her!) bliver derfor $\varphi_{max} = -180^\circ + 55^\circ = -125^\circ$.

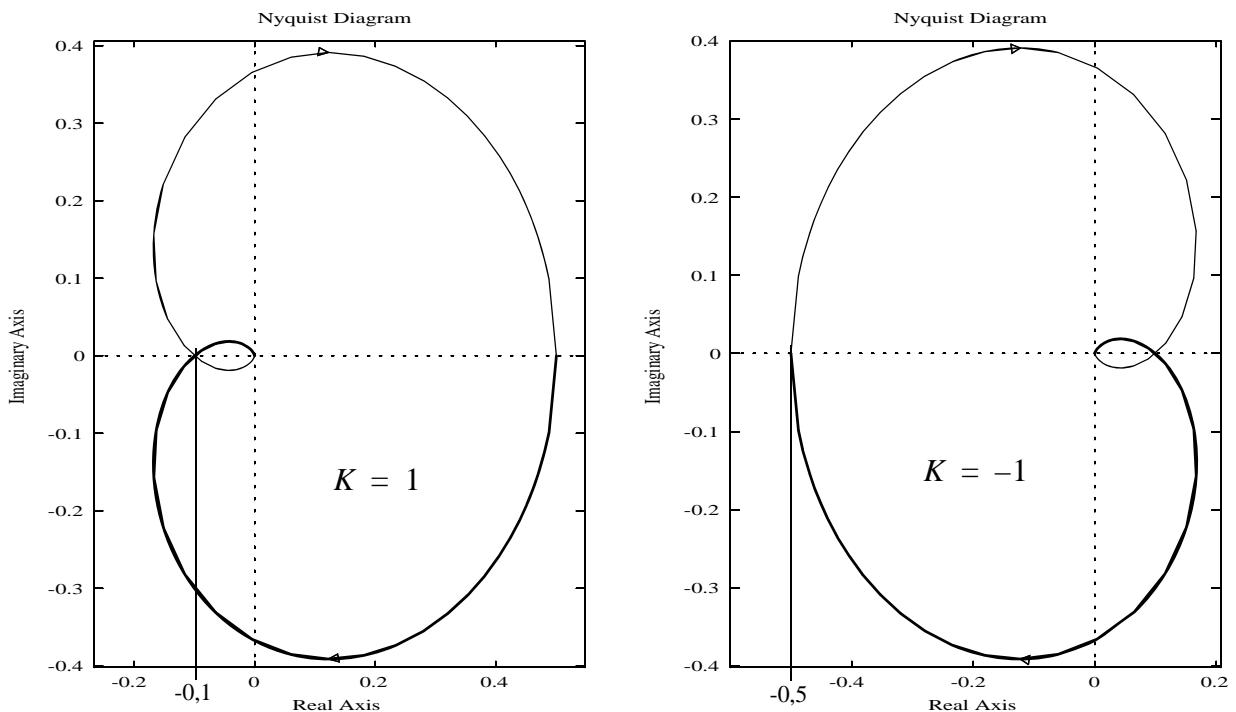
Da man har at $\varphi > -180^\circ$ for alle frekvenser og for alle positive K , vil lukket-sløjfesystemet være stabilt for alle $K > 0$. Det kan også ses ved at rodkurverne tegnes.

Opgave 5.7

Polarkurven (Nyquistplottet) tegnes med Matlab-kommandoerne:

```
>> sys=tf(1,conv([1 2 2],[1 1]));
>> subplot(121)
>> nyquist(sys)
>> subplot(122)
>> nyquist(-sys)
```

Den sidste kommando tegner kurven for $K = -1$.



Som det ses af det venstre plot vil kurvens skæringspunkt med den negative realakse flytte til punktet $(-1,0)$ hvis man multiplicerer K med 10. $K = 10$ er altså den øvre grænse for K hvis lukket-sløjfesystemet skal være stabilt. På samme måde ses af det højre plot at den nedre grænse er $K = -2$.

Lukket-sløjfesystemet er dermed stabilt for:

$$-2 < K < 10$$

Opgave 5.8

Systemets Bodeplot tegnes med Matlab-kommandoerne:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

```
>>sys=tf(100*[.1 1],conv([1 -1 0],[.001 1]))
```

Transfer function:

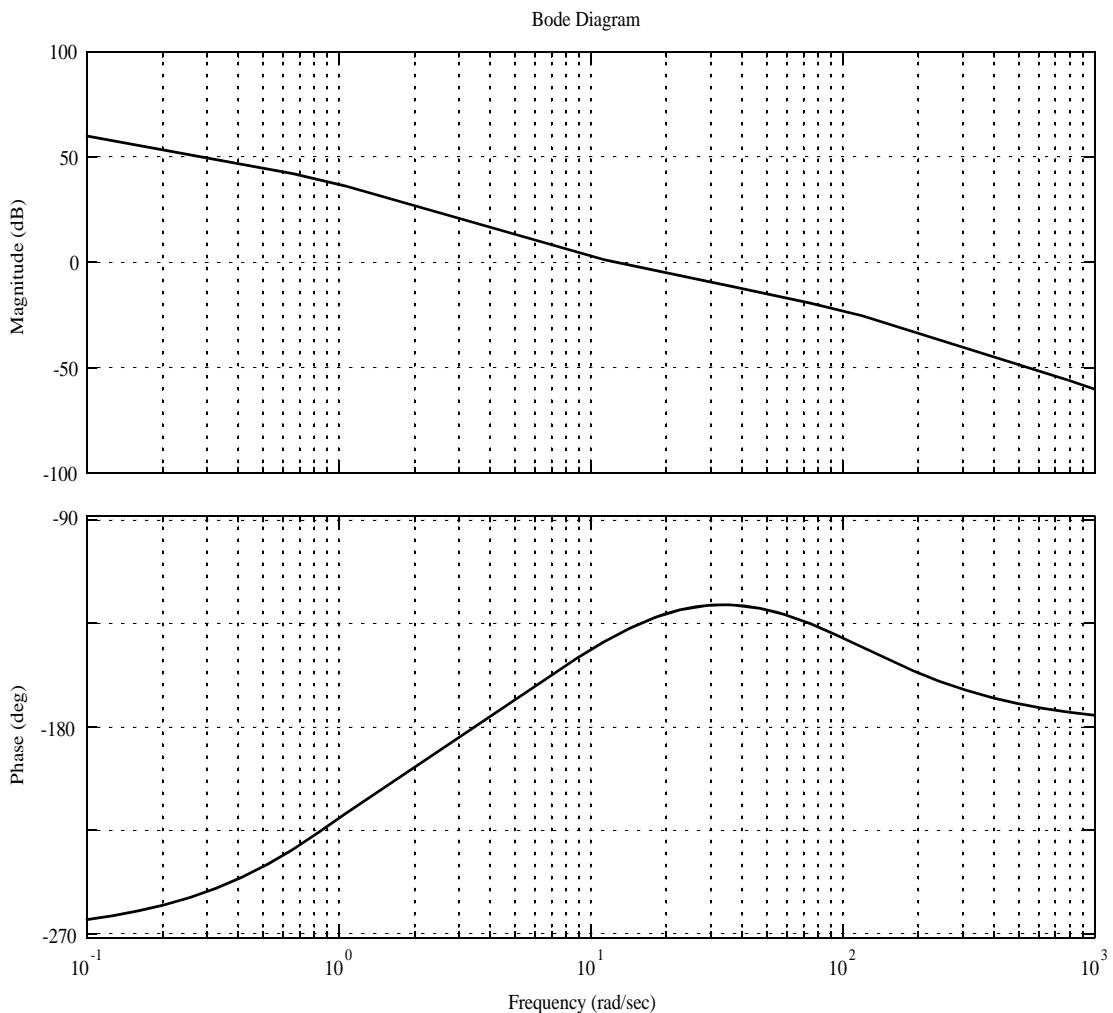
$$\frac{10 s + 100}{0.01 s^3 + 0.99 s^2 - s}$$

```
>> bode(sys)
```

Bemærk at også Matlabs svar på den første kommando er vist (intet semikolon!).

Resultatet bliver følgende.

Åben-sløjfesystemet har en pol i højre halvplan ($s = 1$) og det er derfor ustabilt. Derfor ser fasedrejning også usædvanlig ud. Den starter for lave frekvenser med $\varphi \approx -270^\circ$ og slutter ved høje frekvenser med $\varphi \approx -180^\circ$.



Man får af overføringsfunktionen:

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

$$G(s) \rightarrow -\frac{1}{s} \text{ for } \omega \rightarrow 0$$

$$G(s) \rightarrow \frac{1}{s^2} \text{ for } \omega \rightarrow \infty$$

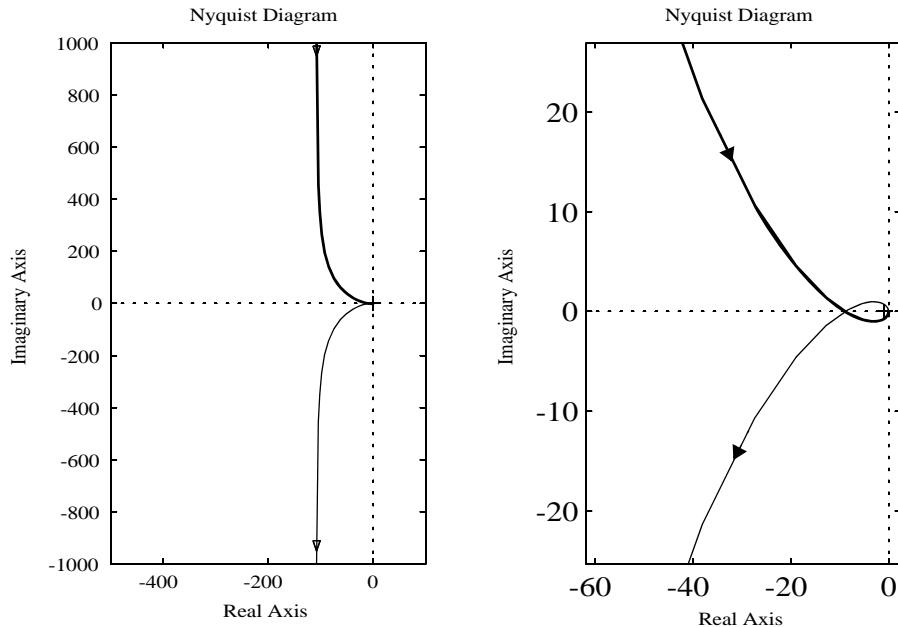
En integrator ($G_i(s) = \frac{1}{s}$) giver en fasedrejningen -90° . Minus-tegnet for lave frekvenser giver yderligere -180° d.v.s. ialt -270° .

For høje frekvenser kan systemet tilnærmes med en dobbelt integrator med fasedrejningen -180°

Brug af Matlab-kommandoerne:

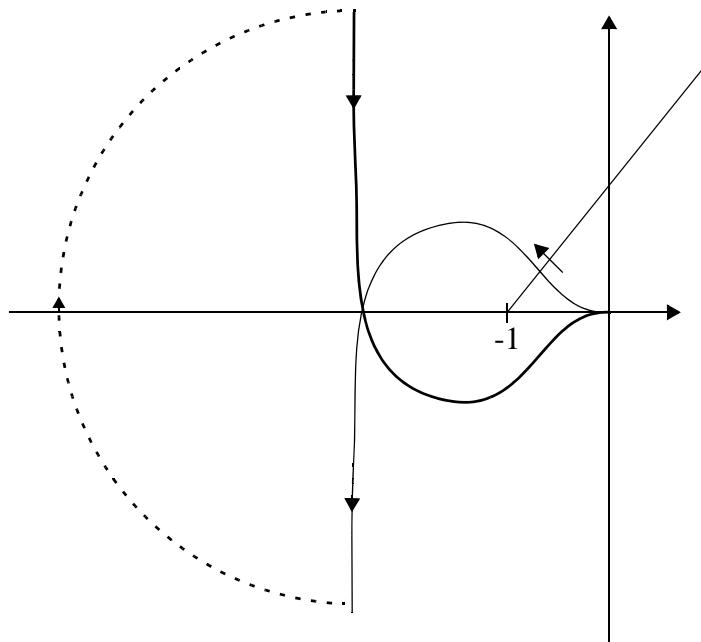
```
>> subplot(121)
>> nyquist(sys)
>> subplot(121)
>> nyquist(sys)
```

giver, efter redigering og justering af akserne, resultatet:



Et forvrænget, men kvalitativt korrekt, billede ses på figuren nedenfor.

Ved brug af liniemetoden (se bogen side 427) ses at billedkurven omkredser punktet $(-1,0)$ én gang mod uret, d.v.s. at $\Phi = -1$.



Nyquistkriteriet (B.4 på side 423) giver så:

$$P_{hh}(G_L) = P_{hh}(G_{\hat{a}}) + \Phi = 1 - 1 = 0$$

Lukket-sløjfesystemet er derfor stabilt.

Bemærk at denne konklusion er uafhængig af om tilbagekoblingen har enhedsforstærkning eller ikke!

Opgave 5.9

Matlab-kommandoerne:

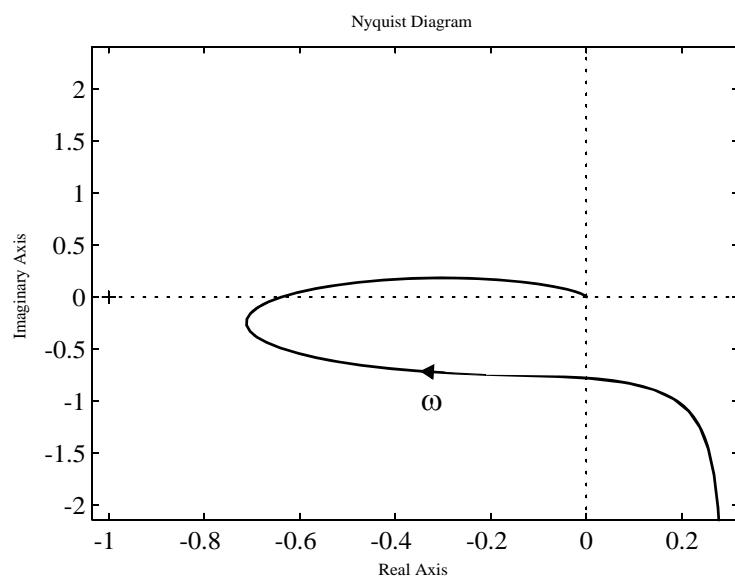
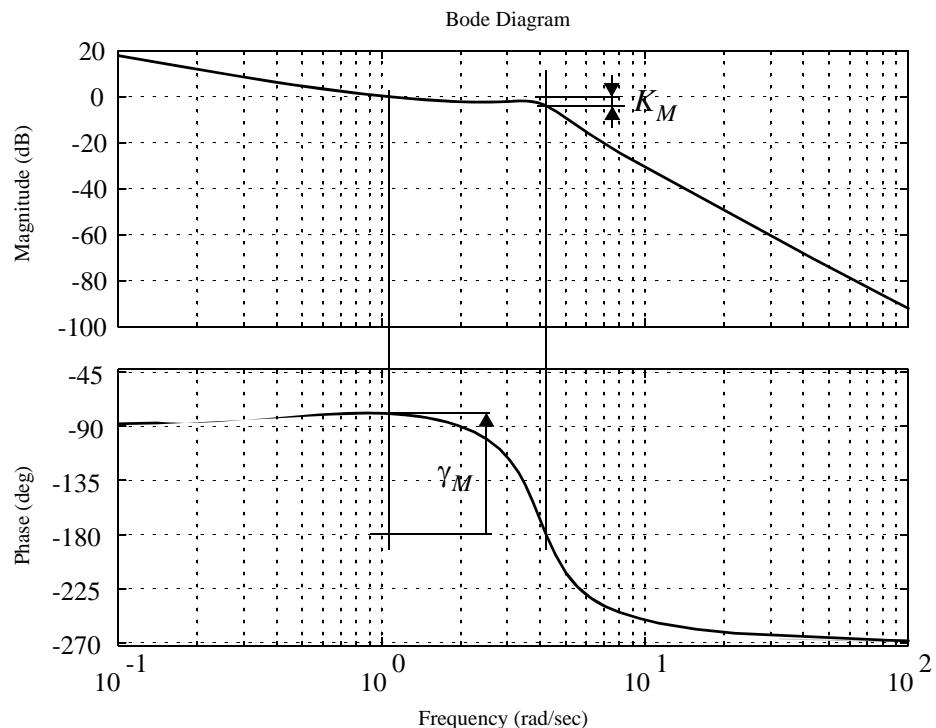
```
>> sys=tf(25*[1 1],conv([1 2 0],[1 2 16]));
>> figure(1),bode(sys)
>> figure(2),nyquist(sys)
```

giver figurerne nedenfor (efter redigering).

Polarcurven skærer den negative del af realaksen til højre for punktet (-1,0), og lukket-sløjfesystemet er derfor stabilt.

Det ses også af Bode-plottet. Både fasemargin og forstærkningsmargin er positive.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

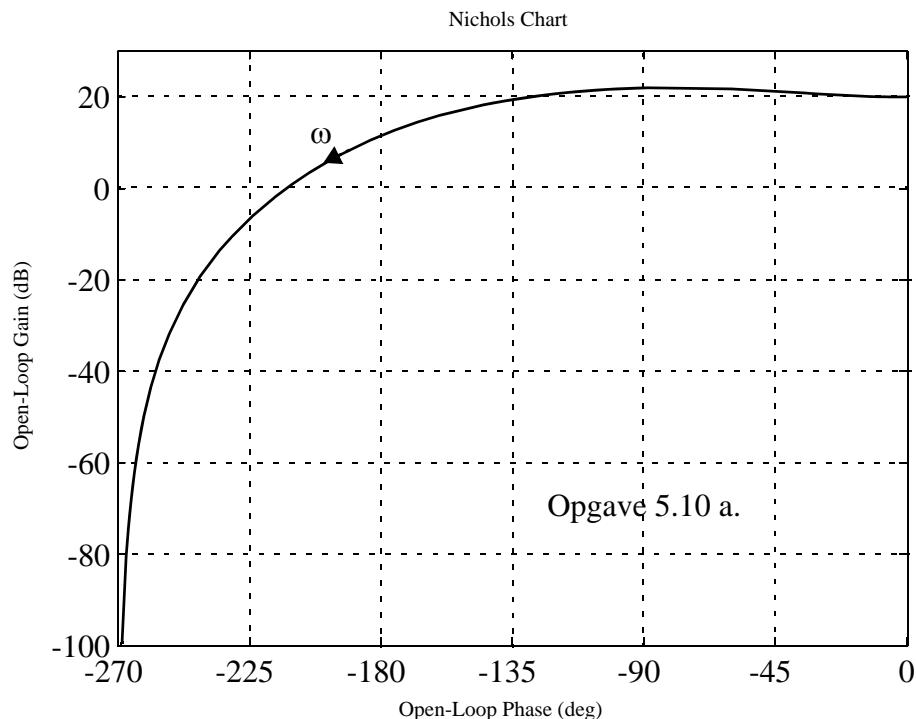


Opgave 5.10

a.

Matlab-kommandoerne

```
>> sys=tf(1,conv([.25 1],[.25 .4 1]));
>> nichols(10*sys)
```

giver φ -dB-plottet:

b.

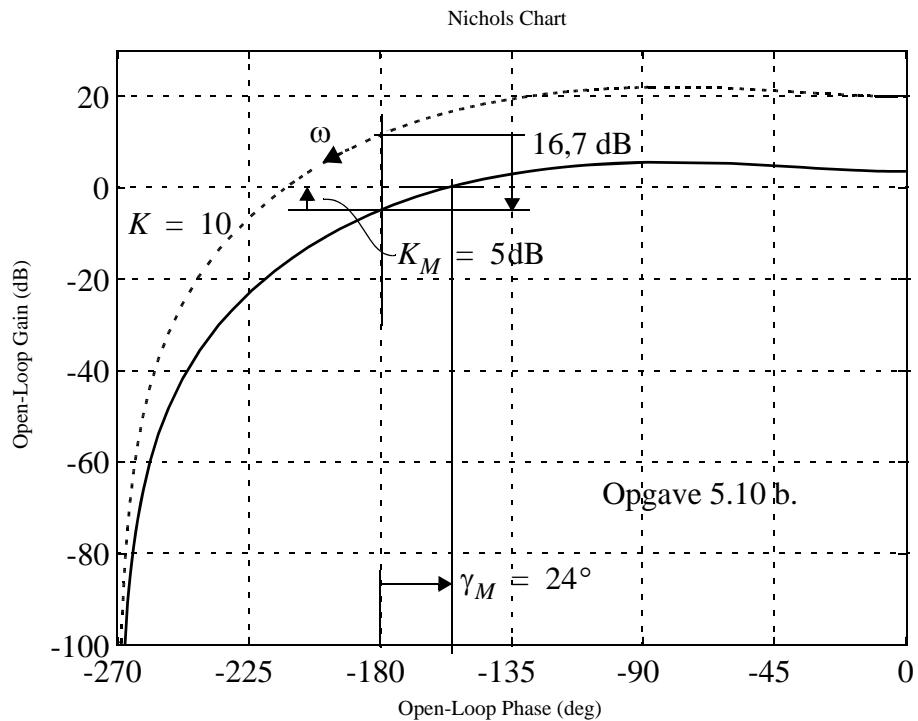
På figuren nedenfor er kurven forskudt nedad så forstærkningsmarginen bliver 5 dB. En forskydning på -16,7 dB er nødvendig. det betyder at forstærkningen skal reduceres til:

$$K = 10 \cdot 10^{-\frac{16,7}{20}} = 1,46$$

Ved denne forstærkning bliver fasemarginen:

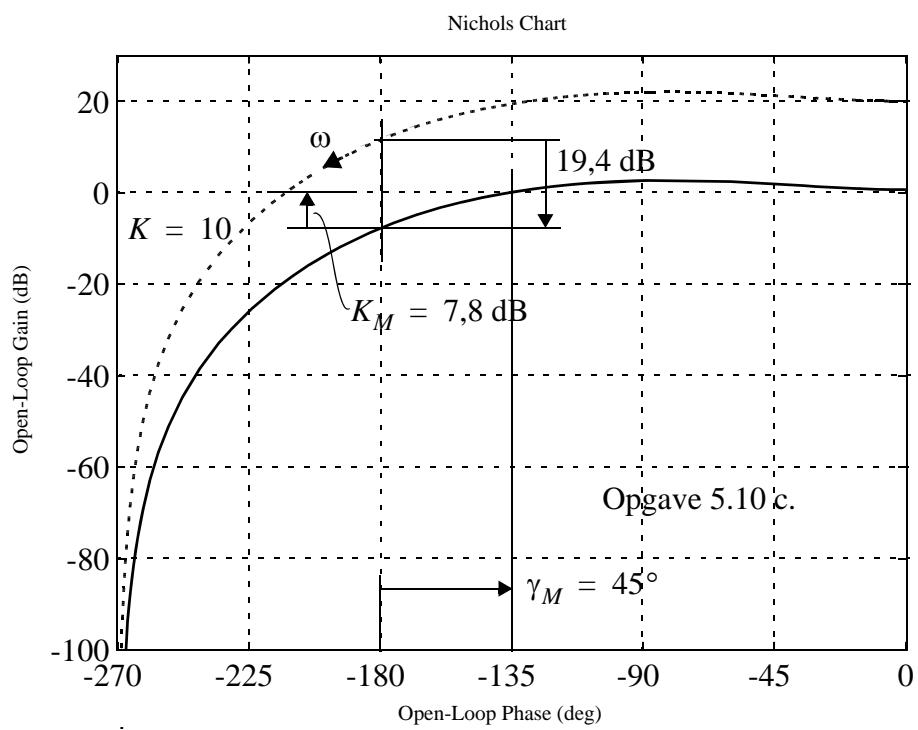
$$\gamma_M = 24^\circ$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



c.

På figuren nedenfor ses tilsvarende svaret på dette spørgsmål.

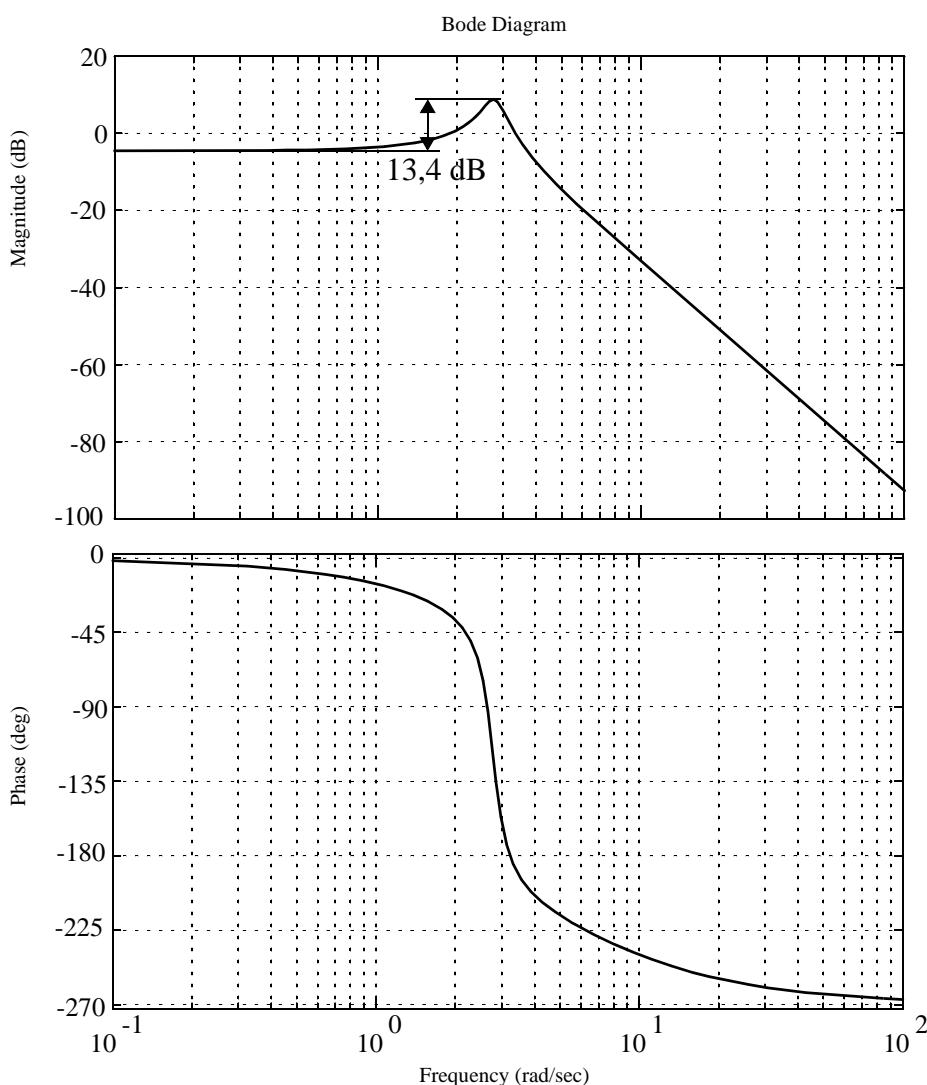


d.

Man kan f.eks. bruge Matlab-kommandoerne:

```
>> systilb=tf(1,1);
>> sysls=feedback(1.45*sys,systilb);
>>bode(sysls)
```

Resultatet bliver:



Bemærk at lukket-sløjfesystemet har en temmelig høj resonanstopp på 13,4 dB. Den har sammenhæng med den lille fasemargin på kun 24° . Konsekvensen er at systemets trinresponse bliver meget oscillatorisk.

Opgave 5.11

a.

Systemet har en dobbeltpol i $s = -1$, altså i venstre halvplan. Systemet er derfor stabilt.

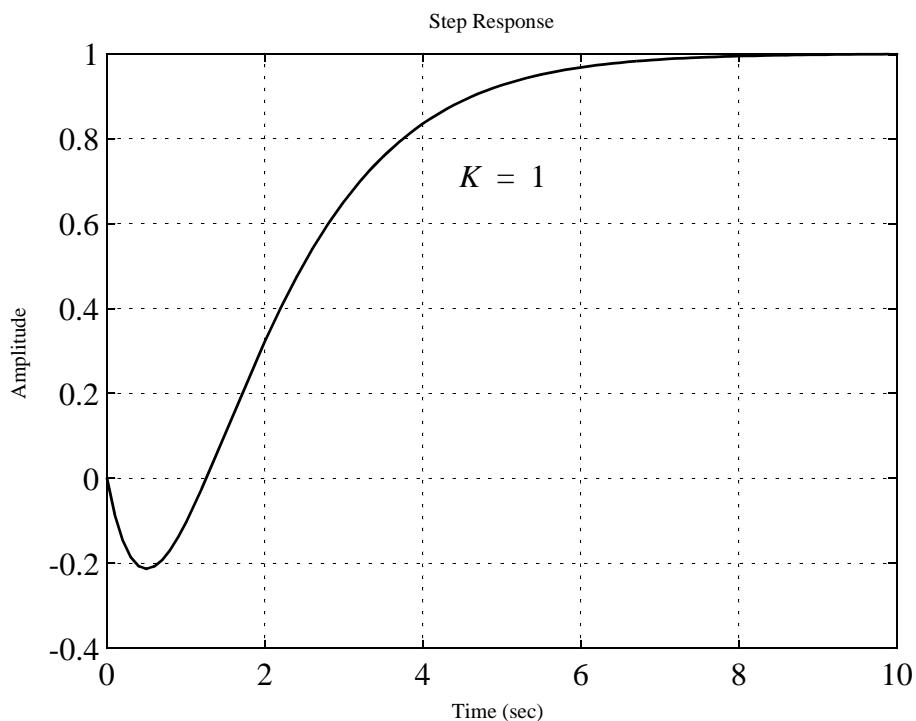
Det har et nulpunkt i højre halvplan (i $s = 1$), og det er derfor et ikke-minimumfase-system.

b.

Trinresponset findes lettest med Matlab-kommandoerne:

```
>>sys=tf([-1 1],[1 2 1]);
>>step(sys)
```

Resultatet bliver:



Læg mærke til at responset starter med at svinge ud til den "forkerte" side. Det ses ofte ved ikke-minimumfase-systemer.

c.

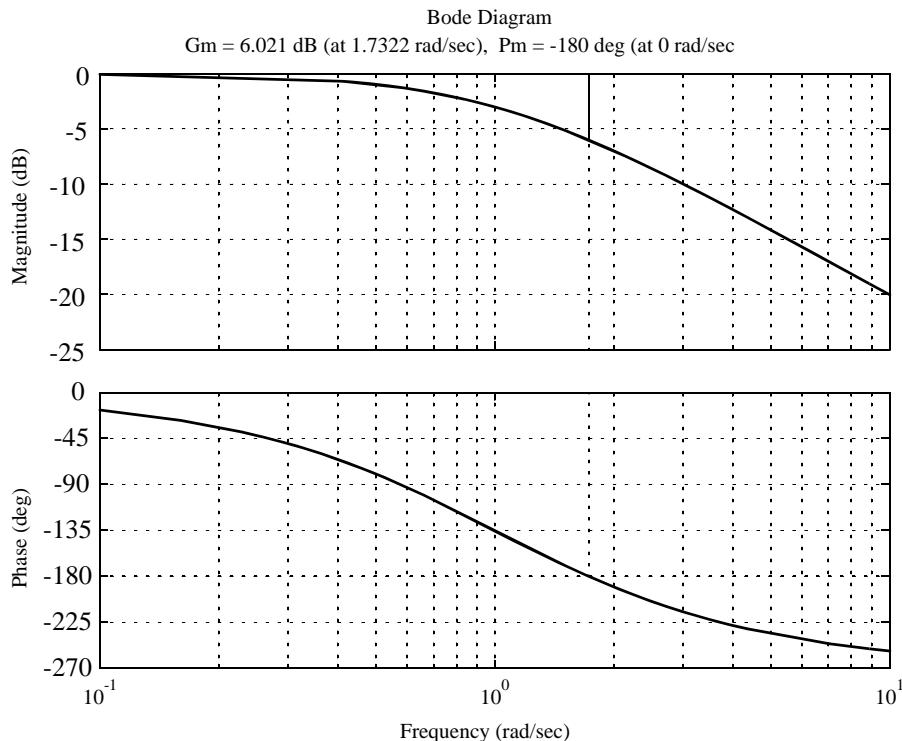
Kommandoen:

```
>>margin(sys)
```

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

giver Bode-plottet for $K = 1$:

Det angives øverst på plottet af forstærkningsmarginen er 6 dB. Hvis den skal øges til 12 dB, må amplitudeforholdskurven sænkes 6 dB hvilket er ensbetydende med at K skal reduceres med faktoren 2, d.v.s. at man får $K = 0.5$.

d.

For $K = 4$ hæves amplitudeforholdskurven 12 dB. Det betyder at forstærkningsmarginen bliver -6 dB, og lukket-sløjfesystemet bliver altså ustabilt.

e.

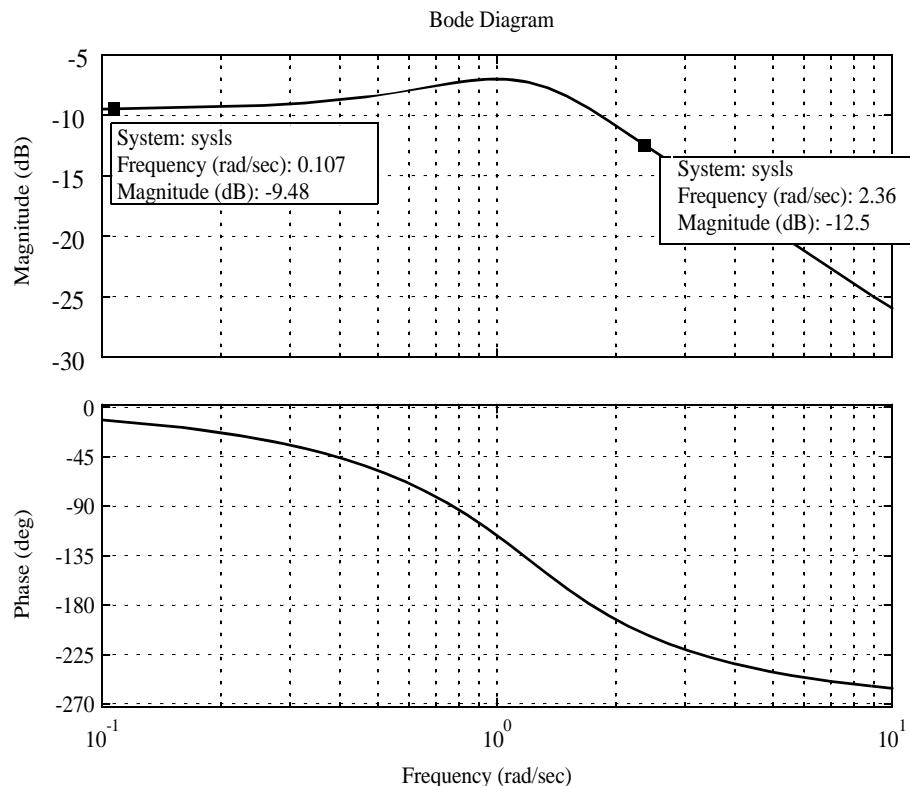
Man kan bruge kommandoerne:

```
>>syslrb=tf(1,1);
>>sysls=feedback(.5*sys,syslrb);
>>bode(sysls)
```

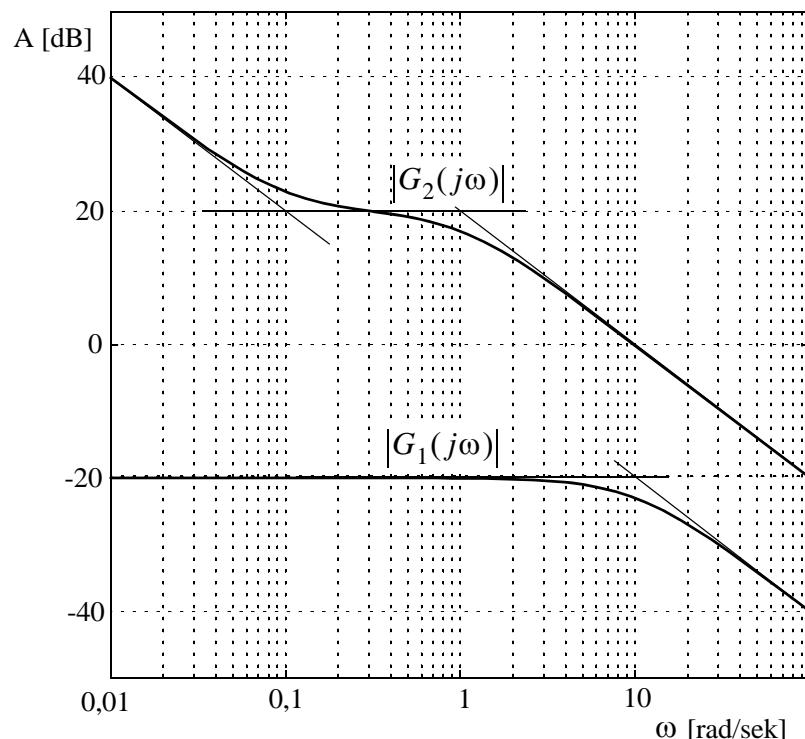
Og man får nedenstående plot.

Peger man på amplitudeforholdskurven med venstre museknap nedtrykket, får man oplysningerne som vist. Båndbredden ses at blive $\omega_B = 2,36$ rad/sek .

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



Opgave 5.12



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

a.

Asymptoterne er indtegnet på figuren ovenfor. Alle de skrå asymptoter har hældningen -20 dB/dek.

Heraf kan man se at:

$$G_1(s) = \frac{0,1}{0,1s + 1}$$

fordi den statiske forstærkning er -20dB og knækfrekvensen er $\omega_k = 10$ rad/sek.

Endvidere ses at:

$$G_2(s) = \frac{10s + 1}{s(s + 1)}$$

b.

Åben-sløjfesystemets overføringsfunktion bliver herefter:

$$G_{\text{å}}(s) = \frac{0,1(10s + 1)}{s(s + 1)(0,1s + 1)}$$

Overføringsfunktionen har standardformen (3.65), og den statiske sløjfeforstærkning kan derfor direkte aflæses til $K_0 = 0,1$.

c./d.

Med Matlab-kommandoerne:

```
>> sys=tf([10 1],conv([1 1 0],[.1 1]));
>> margin(sys)
```

kan man tegne plottet nedenfor.

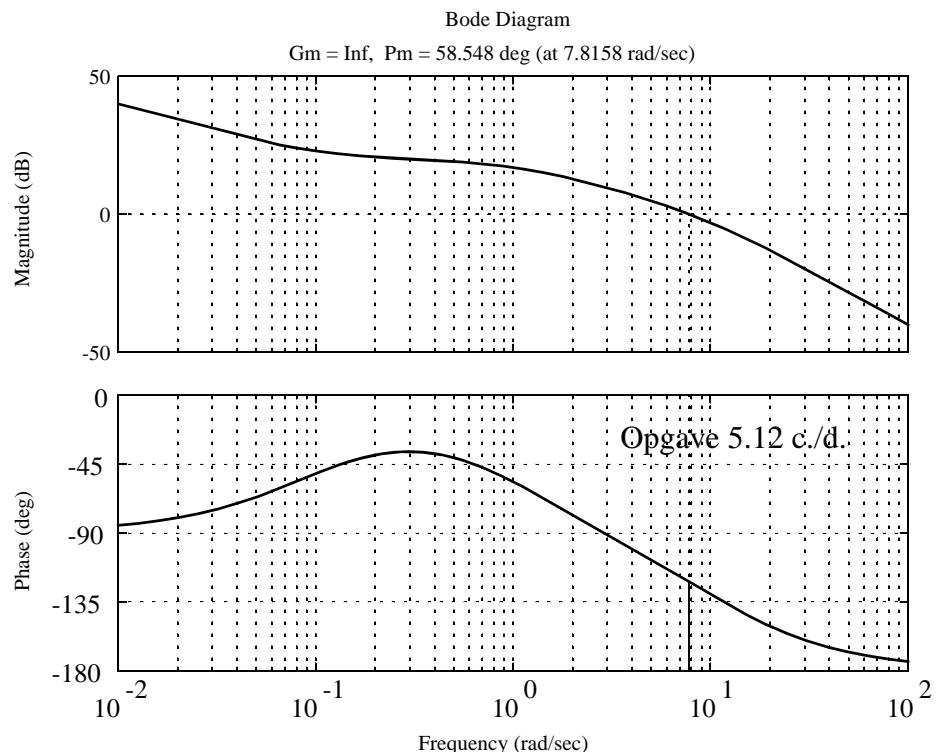
Fasedrejningen når aldrig under -180° , og derfor er forstærkningsmarginen ikke defineret ($G_m=\text{Inf}$).

Fasemarginen kan aflæses til $\gamma_M = 58,5^\circ$.

e.

Her kan man bruge kommandoerne:

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

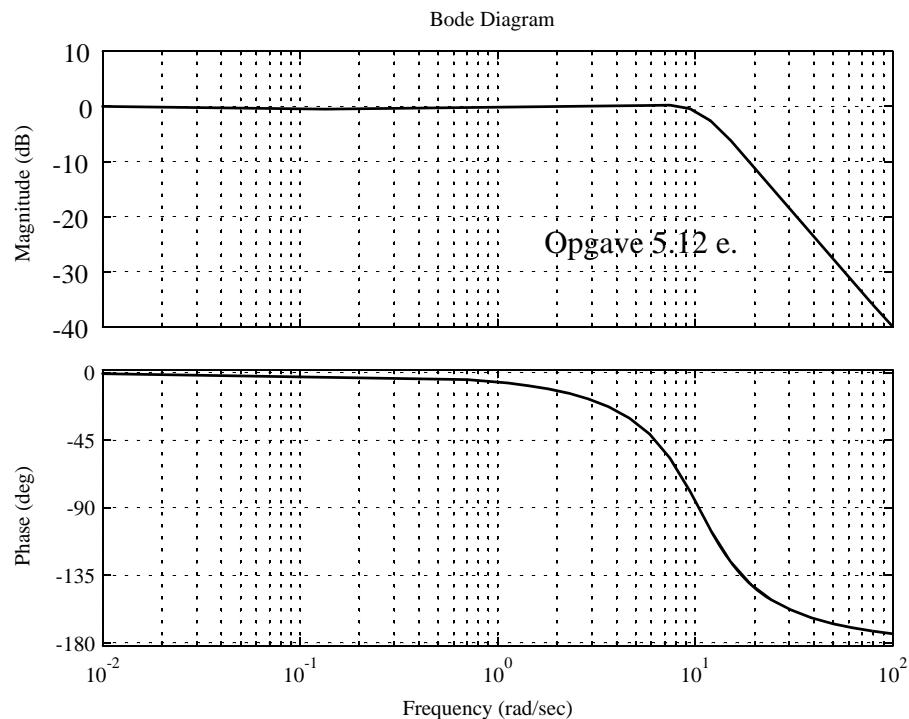


```
>> systilb=tf(1,1);
>> sysl=feedback(sys,systilb)
Transfer function:

$$\frac{10 s + 1}{0.1 s^3 + 1.1 s^2 + 11 s + 1}$$

>> bode(sysl)
```

Hvilket resulteres i Bodeplottet nedenfor.



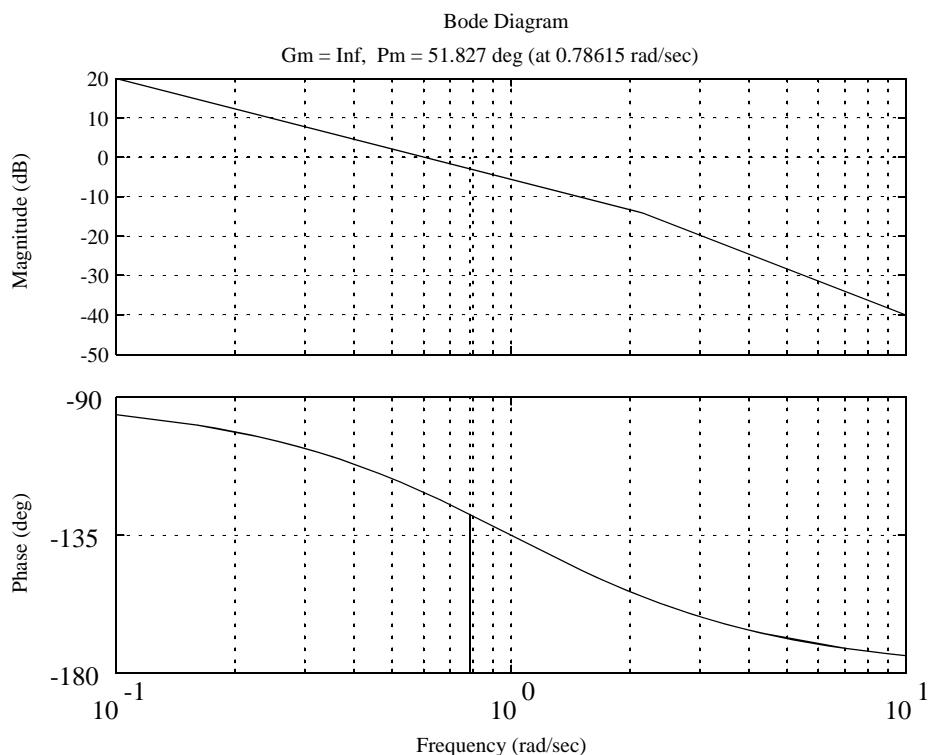
Opgave 6.1

a.

Matlabkommandoerne:

```
>>sys=tf(1,[1 1 0])
>>margin(sys)
```

giver Bode-plottet:



Da fasedrejningen ligger over -180° for alle frekvenser er forstærkningsmarginen ikke defineret.

b.

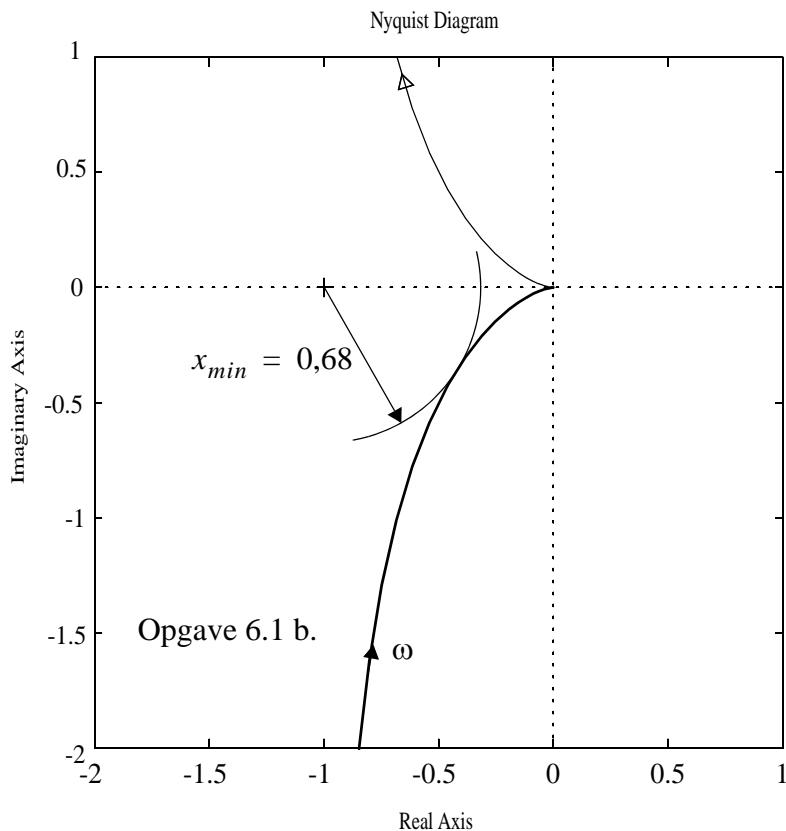
Med Matlabkommandoen

```
>>nyquist(sys)
```

tegnes polarplottet nedenfor.

Ved måling direkte på plottet fås:

$$x_{min} = 0,68$$



c.

$$S(s) = \frac{1}{G(s) + 1} = \frac{s^2 + s}{s^2 + s + 1}$$

$$\Sigma(s) = \frac{G(s)}{G(s) + 1} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Man genererer de to overføringsfunktioner med flg. Matlabkommandoer:

```
>> sysS=1/(sys+1)
```

Transfer function:

$$\frac{s^2 + s}{s^2 + s + 1}$$

```
>> sysSigma=sys/(sys+1)
```

Transfer function:

$$\frac{s^2 + s}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

Bemærk at den beregnede sysSigma har sammenfaldende nulpunkter og poler. Hvis det ønskes kan de forkortes bort med:

```
>> sysSigma=minreal(sysSigma)
```

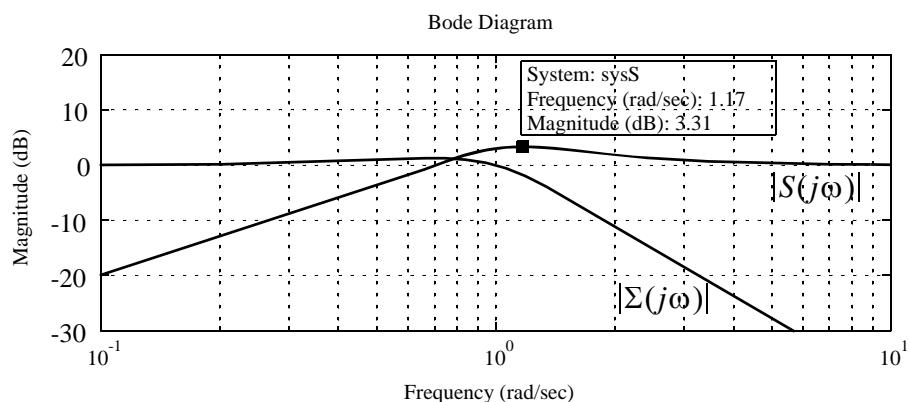
Transfer function:

$$\frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Herefter kan de to Bodeplots tegnes med:

```
>>bode(sysS,sysSigma)
```

Amplitudeforholdene $|S(j\omega)|$ og $|\Sigma(j\omega)|$ er vist nedenfor.



d.

Ved pegning på $|S(j\omega)|$ -kurven med venstre museknap nedtrykket kan man finde:

$$\max|S(j\omega)| = 3,31 \text{ dB} \sim 1,46$$

og dermed:

$$x_{min} = \frac{1}{\max|S(j\omega)|} = 0,68$$

Opgave 6.2

Åben-sløjfesystemets amplitudeforhold er $-5,2$ dB ved fasedrejningen -140° (det ses lettest ved at tegne Bodeplottet med Matlab).

$$\gamma_M = 40^\circ \text{ opnås derfor med } 20\log K_p = 5,2 \text{ dB} \Rightarrow K_p = 1,82$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

Systemet er type 1, og den stationære fejl for et rampeinput er iflg. tabel 3.1:

$$e_{r,ss} = \frac{1}{K_0}$$

Da man har $K_0 = 4K_p$ bliver den stationære fejl:

$$e_{r,ss} = \frac{1}{4K_p} = 0,137$$

b.

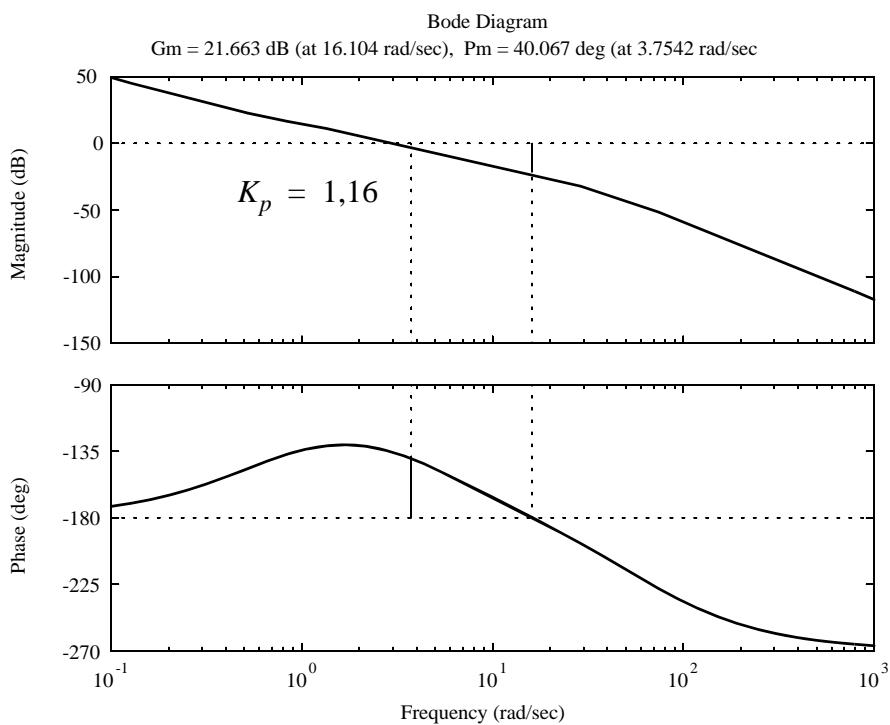
Hvis man som et første gæt sigter efter krydsfrekvensen $\omega_c = 5$ rad/sek og vælger:

$$\omega_k = \frac{1}{8}\omega_c = 0,625 \text{ rad/sek} \Rightarrow \tau_i = \frac{1}{\omega_k} = 1,6 \text{ sek}$$

PI-regulatorens overføringsfunktion er hermed bestemt til:

$$G_{PI}(s) = K_p \frac{1,6s + 1}{1,6s}$$

Et Bodeplot tegnet med Matlabs margin-funktion ses nedenfor.



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

Som det ses giver $K_p = 1,16$ netop fasemarginen $\gamma_M = 40^\circ$.

Krydsfrekvensen bliver $\omega_c = 3,75$ rad/sek hvilket opfylder det stillede krav.

c.

Lag-kompensatorens overføringsfunktion er:

$$G_{lag}(s) = K_p \frac{\tau_i s + 1}{\beta \tau_i s + 1}, \quad \beta > 1$$

og derfor er den statiske sløjfeforstærkning stadig $K_0 = 4K_p$.

Med den krævede grænse for den stationære fejl må man derfor have at:

$$K_0 \geq 100 \Rightarrow K_p \geq 25$$

Hvis man vælger $\tau_i = 1,6$ sek som ved PI-regulatoren, får de to regulatorer stort set samme fasedrejning for $\omega > 1$ rad/sek uanset hvad β er.

Det betyder at den samme fasemargin kan opnås hvis lagkompensatorens højfrekvensforstærkning er det samme som for PI-regulatoren, d.v.s. 1,16.

Lagkompensatorens forstærkning ved lave frekvenser skal være 25 (p.gr. af kravet til den stationære fejl).

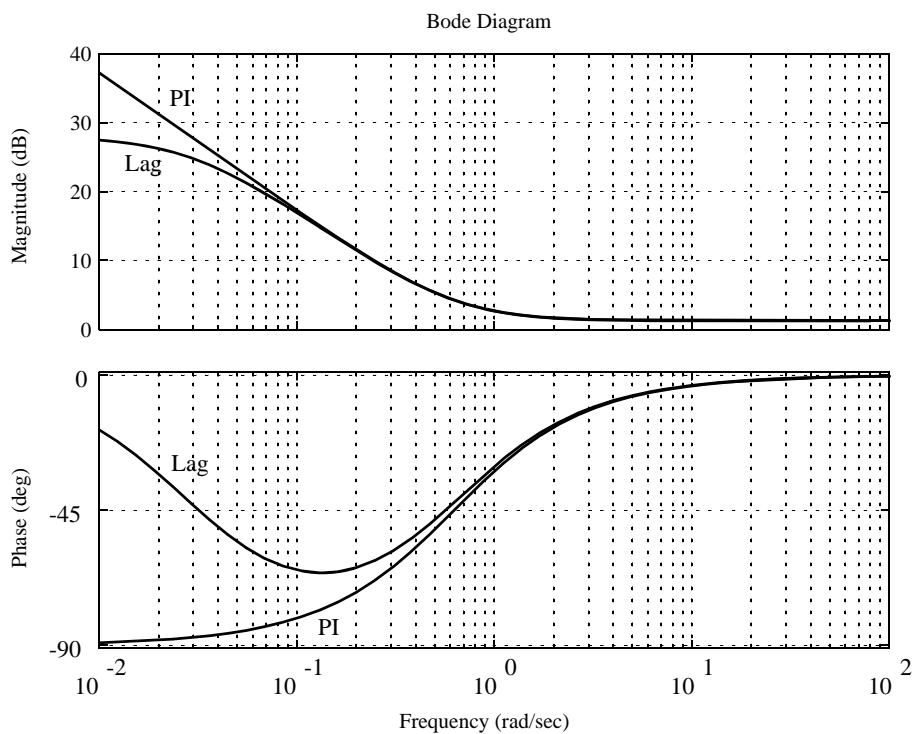
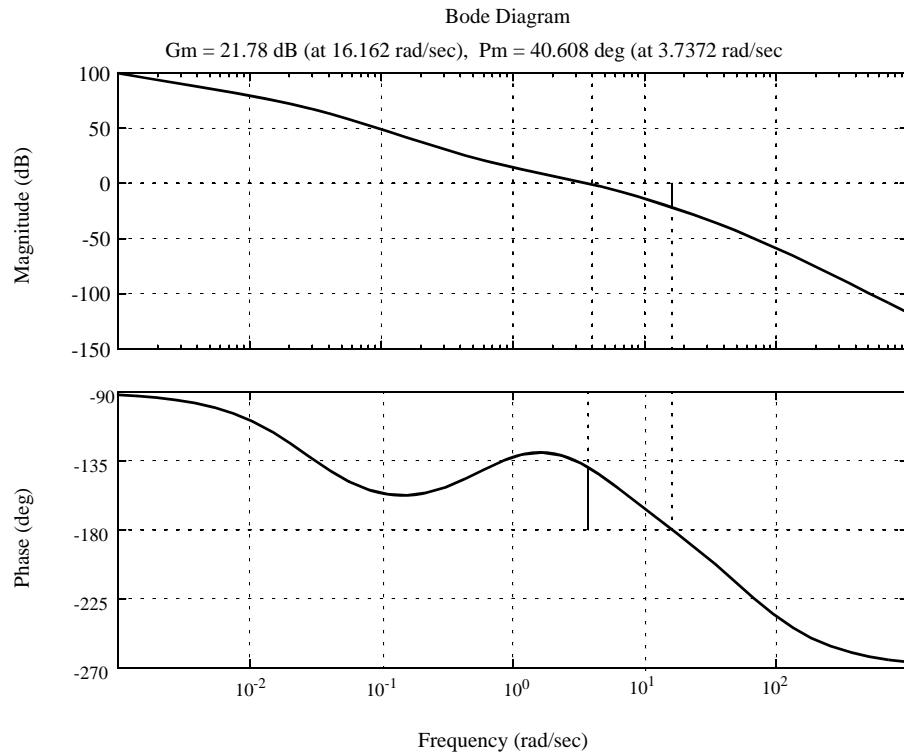
Da lagkompensatorens forstærkning ved lave og høje frekvenser er henholdsvis K_p og K_p/β må kompensatorens forstærkningsreduktion være $25/1,16 = 21,7 = \beta$.

Overføringsfunktionen bliver så:

$$G_{lag}(s) = 25 \frac{1,6s + 1}{34,7s + 1}$$

Åben-sløjfesystemets Bodeplot (tegnet med Matlabs margin-funktion) ses nedenfor. Fasemarginen ses at være tæt på de ønskede 40° .

Også Bodeplottet af de to regulatorer er vist.



Opgave 6.3

a.

For $r = 0$ fås af blokdiagrammet:

$$e(s) = -\frac{1}{s} \left(d(s) + \frac{12}{0,06s + 1} G_c(s) e(s) \right)$$

Heraf får man:

$$e(s) = -\frac{0,06s + 1}{0,06s^2 + s + 12G_c(s)} d(s)$$

For den stationære fejl får man:

$$e_{r,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-s \frac{\frac{0,06s + 1}{0,06s^2 + s + 12K_p \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}} \frac{1}{s}}{1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{\tau_i s}{12K_p(\tau_i s + 1)} \right) = 0$$

Svaret er ja. (Forudsat at systemet er stabilt. Dette afklares under b.).

b.

Med den (forsøgsvis) ønskede krydsfrekvens kan man f.eks. vælge integrationstiden ud fra:

$$\omega_k = \frac{1}{4} \cdot 35 = 8,75 \Rightarrow \tau_i = \frac{1}{\omega_k} \approx 0,11 \text{ sek}$$

 K_p kan bestemmes ved brug af Matlabs margin-funktion. Der er valgt $K_p = 6,6$ hvilket omtentligt giver den ønskede krydsfrekvens $\omega_c = 35$ rad/sek.Fasemarginen bliver $\gamma_M = 11,4^\circ$ hvilket er uantageligt.

c.

Den ønskede fasemargin er 50° og den nødvendige forbedring i forhold til resultatet i b. er altså $\Delta\gamma_M \approx 39^\circ$. Hvis man bruger bogens formel (6.26) med $c_m = 1$ får man (se side 271):

$$\varphi_m \approx 39^\circ \Rightarrow \alpha \approx 0,23$$

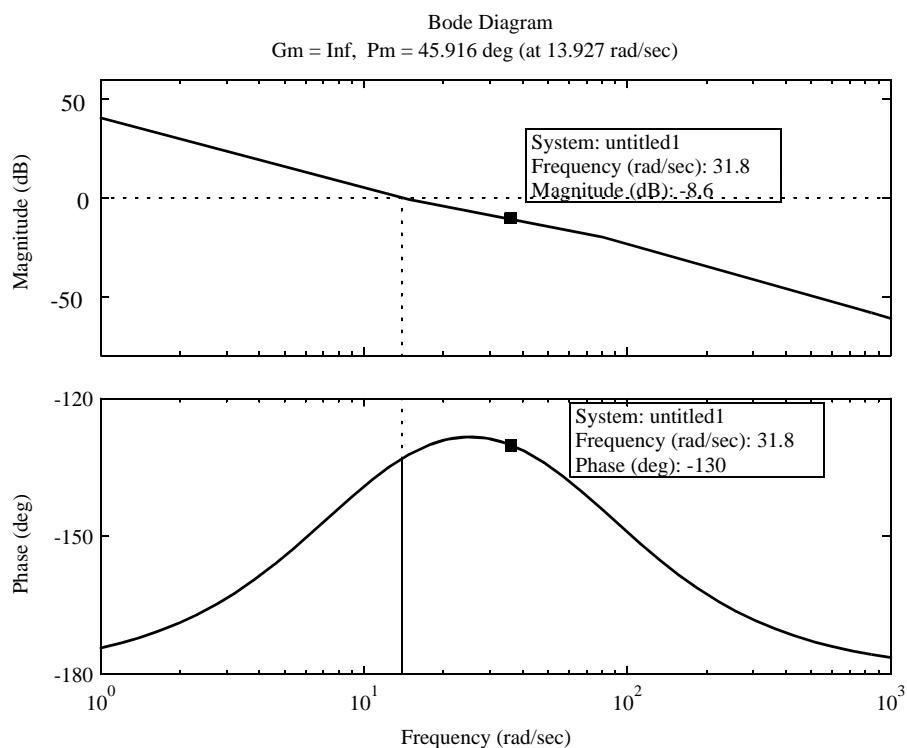
Hvis man sætter $\omega_m = \omega_c = 35$ rad/sek kan man finde:

$$\tau_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_m} = 0,06 \text{ sek}$$

Den samlede regulator bliver herefter:

$$G_c(s) = K_p \frac{0,11s + 1}{0,11s} \cdot \frac{0,06s + 1}{0,014s + 1}$$

Med $K_p = 1$ får man det samlede åben-sløjfe Bodeplot som vist nedenfor:



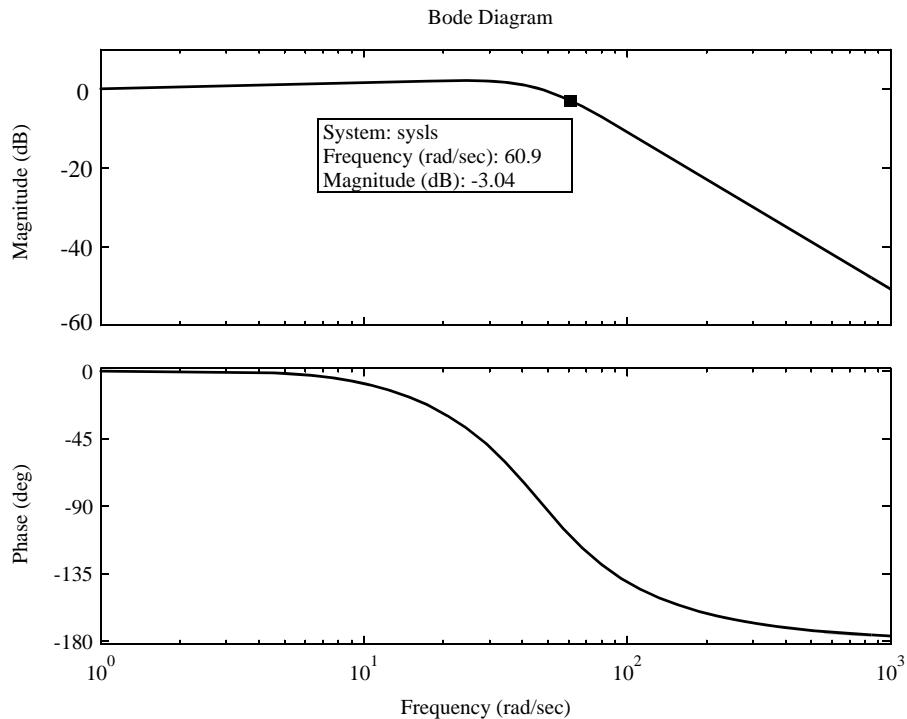
Søgning langs kurverne viser at man opnår fasemarginen 50° hvis amplitudeforholdskurven hæves 8,6 dB, d.v.s. hvis man sætter $K_p = 2,7$.

Bemærk at del er muligt at opnå denne fasemargin ved to forskellige krydsfrekvenser, $\omega_c = 20,6$ rad/sek og $\omega_c = 31,8$ rad/sek. Den højeste af disse opfylder det stillede krav.

Med denne forstærkning kan beregne lukket-sløjfe Bodeplottet v.hj. af Matlab-funktionerne feedback og bode. Resultatet ses nedenfor.

Kravet $\omega_B \geq 50$ ses at være fint opfyldt.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringssteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



Opgave 6.4

a.

$$G_{\hat{a}}(s) = G_c(s) \frac{k_1 k_2 k_s}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{G_c(s)}{k_1 k_2} \frac{k_1 k_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}}{1 + G_c(s) \frac{k_1 k_2 k_s}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}} = \frac{G_c(s) k_1 k_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + G_c(s) k_1 k_2 k_s}$$

$$\begin{aligned} e(s) &= -k_s \left(d(s) + G_c(s) \frac{k_1 k_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e(s) \right) \\ \Rightarrow \frac{e(s)}{d(s)} &= \frac{-k_s (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + G_c(s) k_1 k_2 k_s} \end{aligned}$$

b.

Det forudsættes at systemet er stabilt.

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

Enhedstrin ($d(s) = \frac{1}{s}$):

$$e_{d,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{-k_s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + G_c(s) k_1 k_2 k_s} \frac{1}{s} \right) = \frac{-k_s}{1 + K_p k_1 k_2 k_s}$$

Enhedsrampe ($d(s) = \frac{1}{s^2}$):

$$e_{d,ss} \rightarrow -\infty$$

c.

Af b. ser man at for $G_s(s) = K_p$, d.v.s. hvis systemet bliver type 0, får man en uendelig stationær fejl for en rampe på d -indgangen. Ud fra tabel 3.1 kan man se at en stationær fejl på nul vil kræve at systemet skal være type 2, altså at regulatoren skal indeholde to integratorer.

Da systemet ikke indeholder nulpunkter, må regulatoren have mindst ét nulpunkt da åben-sløjfesystemets fasedrejning ellers bliver mindre end -180° for alle frekvenser, og lukket-sløjfesystemet vil derfor blive ustabilit.

Man kan så forsøge med:

$$G_c(s) = K \frac{\tau_i s + 1}{s^2}$$

Indsættelse af denne regulator som i b. viser at den stationære fejl faktisk bliver nul som krævet.

d.

$$G_c(s) = \frac{K_p}{s} \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = K_p \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s^2}$$

Åben-sløjfesystemets overføringsfunktion (excl. regulator) bliver:

$$G(s) = \frac{0,375}{(s+1)(5s+1)}$$

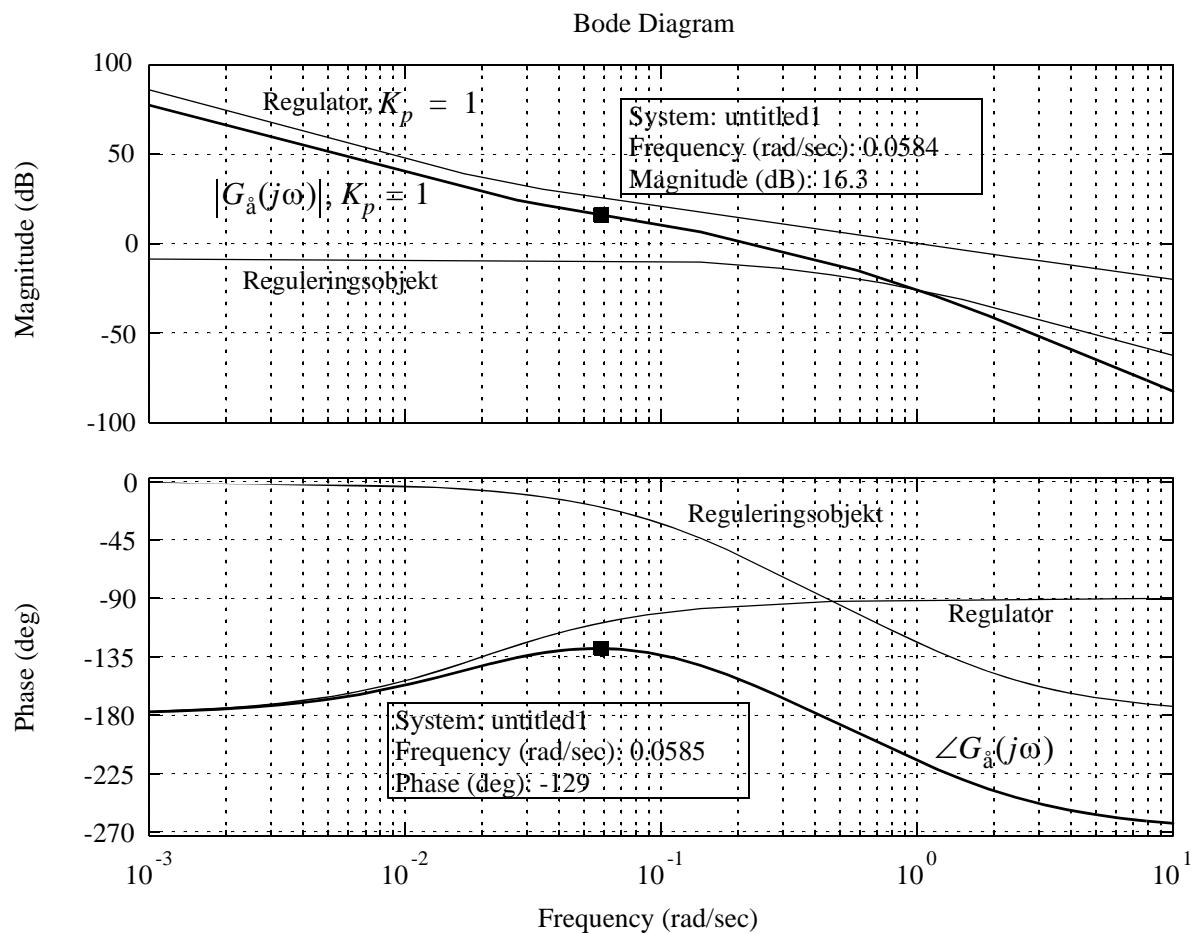
Den mindste knækfrekvens er $\omega_{k1} = \frac{1}{5} = 0,2$ sek. Regulatorenens knækfrekvens skal så være:

$$\omega_{kr} = 0,02 = \frac{1}{\tau_i} \Rightarrow \tau_i = 50 \text{ sek.}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

Ved dette valg placeres regulatorens største negative fasedrejning væsentligt lavere end reguleringssobjektets knækfrekvenser, d.v.s. lavt i forhold til det frekvensområde hvor systemets krydsfrekvens formodes at skulle ligge.

Bodeplottene nedenfor tegnes v.hj. af Matlabs bode-funktion for $K_p = 1$.



Ved søgning langs kurverne med venstre museknap nedtrykket ses det at den største fasemargin der kan opnås er 51° ved krydsfrekvensen $\omega_c = 0,0585$ rad/sek. Den kan opnås hvis proportionalforstærkningen reduceres 16,3 dB, d.v.s. for $K_p = 0,153$.

Opgave 6.5

a.

For $L_a = 0$ får man af blokdiagrammet på figur 2.46:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{\frac{K_m}{R_a}}{\frac{Js + b}{K_m K_a} + \frac{R_a}{Js + b}} \Rightarrow \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{\frac{K_m}{R_a J}}{\frac{bR_a + K_m K_a}{bR_a + K_m K_a} s + 1} = \frac{K_s}{\tau s + 1}$$

Heraf ses at:

$$K_s = \frac{K_m}{bR_a + K_m K_a} = 43,9$$

$$\tau = \frac{R_a J}{bR_a + K_m K_a} = 0,0246$$

b.

$$G_c(s) = K_p \frac{\tau_d s + 1}{\alpha \tau_d s + 1} = K_p \frac{0,0246 s + 1}{0,00492 s + 1}$$

Bodeplottene for reguleringsobjekt, regulator og det samlede åben-sløjfesystem kan findes med Matlabs bode-funktion. Resultatet ses nedenfor for $K_p = 1$.

Det ses ved søgning langs kurverne, at fasedrejningen -135° , og dermed $\gamma_m = 45^\circ$, opnås ved krydsfrekvensen $\omega_c = 202$ rad/sek når proportionalforstærkning øges 2,3 dB, d.v.s. for $K_p = 1,3$.

c.

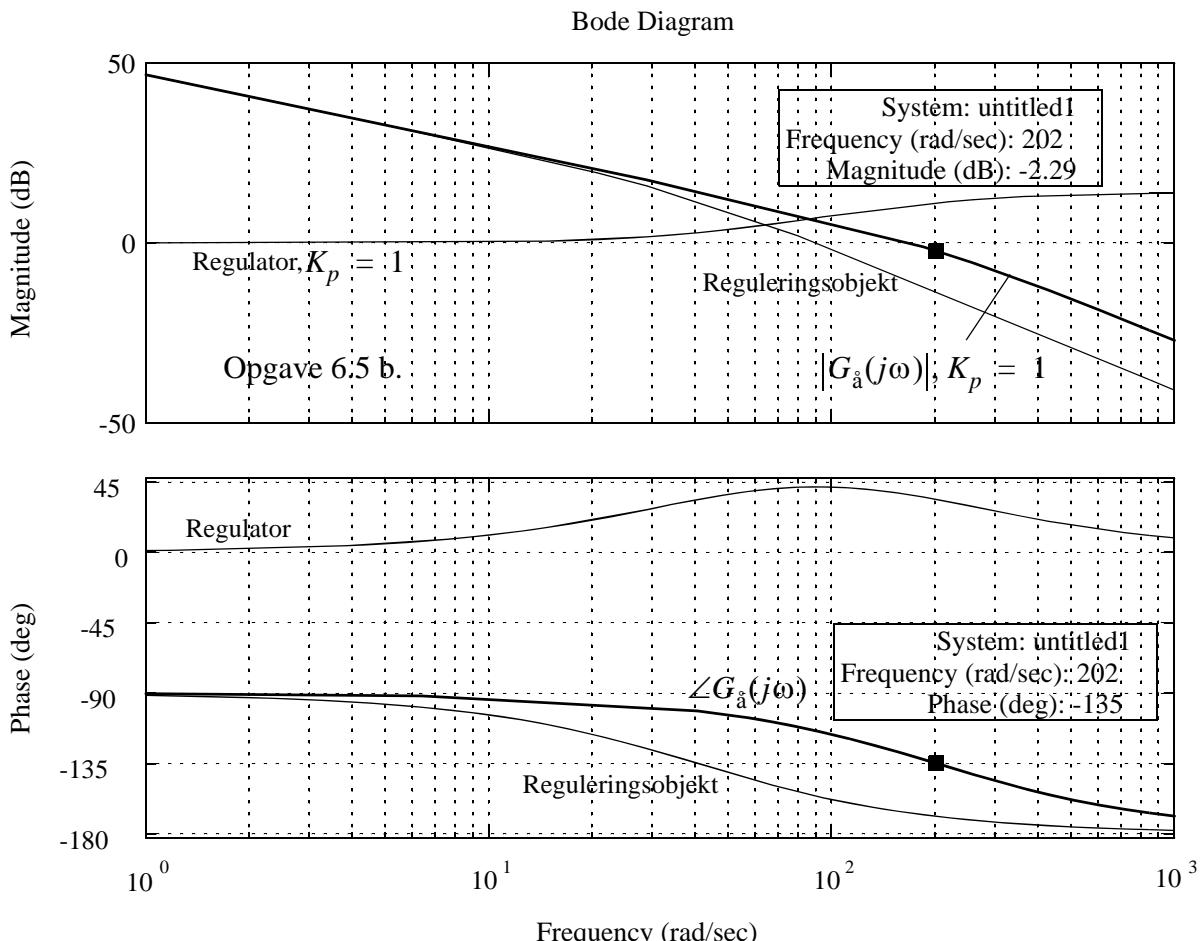
Af Bodeplottene nedenfor ses på samme måde som i b. at for $G_c(s) = K_p$ får man fasemarginen 45° ved $\omega_c = 40,6$ rad/sek for $K_p = 0,263$.

Lukket-sløjfesystemernes overføringsfunktioner kan bestemmes med Matlabs feedback-funktion. De bliver i de to tilfælde:

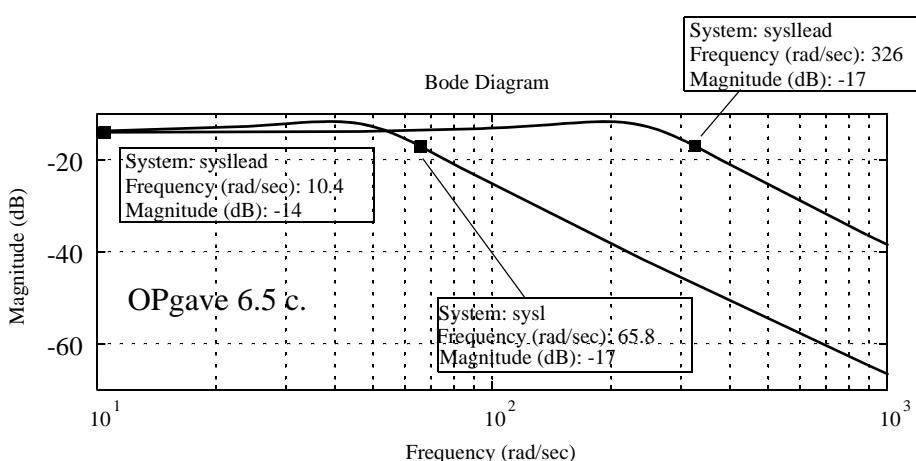
$$G_l(s) = \frac{11,55}{0,0246 s^2 + s + 57,73} \text{ med } G_c = K_p$$

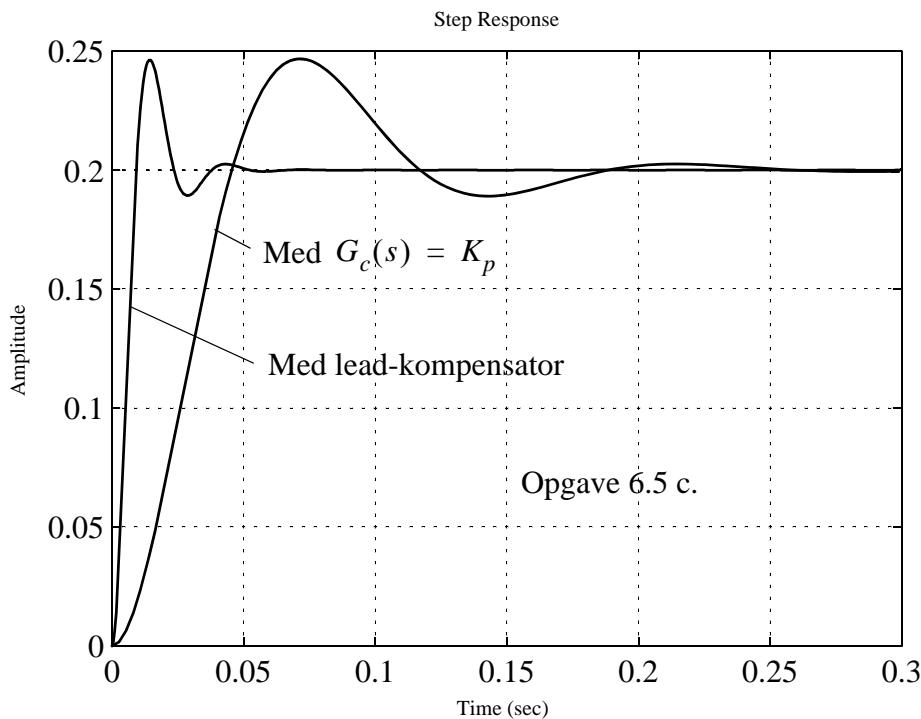
$$G_l(s) = \frac{1,404 s + 57,07}{0,000121 s^3 + 0,0295 s^2 + 8,02 s + 285,4} \text{ med lead-kompensator}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringssteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



Lukket-sløjfesystemernes amplitudeforholdscurver og trinresponser er vist på de næste plot. De er frembragt ved brug af Matlabs bode- og step-funktioner.





Med lead-kompensatoren bliver båndbredden ca. 5 gange større og indsvingningstiden ca. 5 gange mindre end uden kompensator.

d.

Overføringsfunktionen fra referencesignalet $r(t)$ til styresignalet $m(t)$ kan findes af blokdiagrammet:

$$m(s) = G_c(s) \left(r(s) - \frac{k_s K_s}{s(\tau s + 1)} m(s) \right)$$

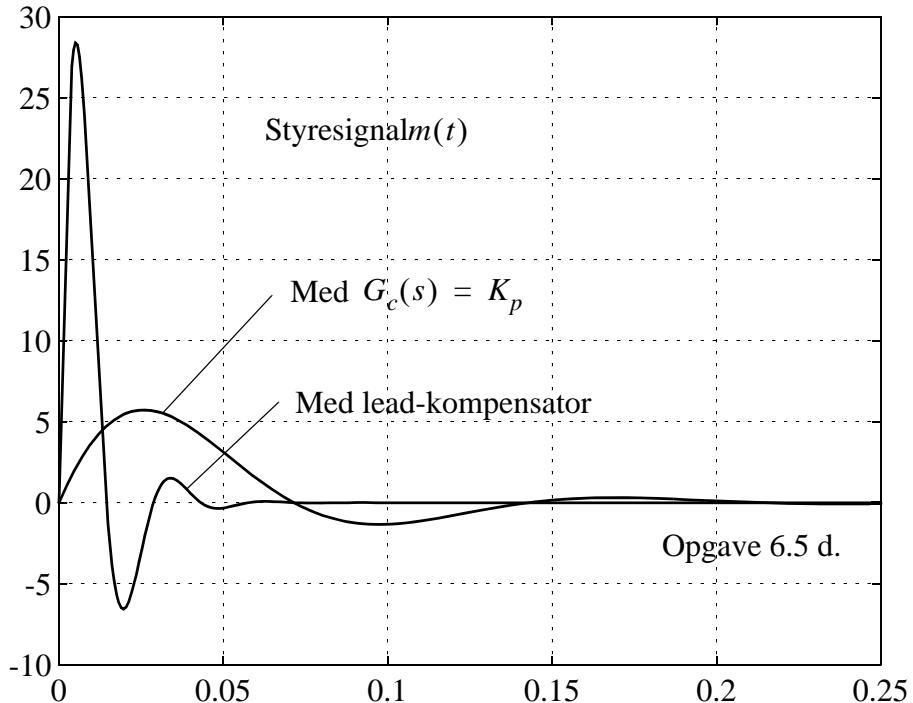
eller:

$$\frac{m(s)}{r(s)} = G_c(s) \frac{s(\tau s + 1)}{\tau s^2 + s + K_s k_s}$$

Med indsatte talværdier og regulatorer kan man herefter beregne $m(t)$ med Matlabs step-funktion. Resultatet ses nedenfor.

Signalets maksimumværdi er ca. 5 gange større med lead-kompensatoren end uden.

Det hurtige respons betales med et stort styresignal.

**Opgave 6.6**

a.

Den parallelle PID-regulators overføringsfunktion (6.32) kan skrives:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \frac{\tau_d s}{\alpha \tau_d s + 1} \right) = K_p \frac{(\alpha + 1)\tau_i \tau_d s^2 + (\tau_i + \alpha \tau_d)s + 1}{\tau_i s (\alpha \tau_d s + 1)}$$

Med de indsatte talværdier får man:

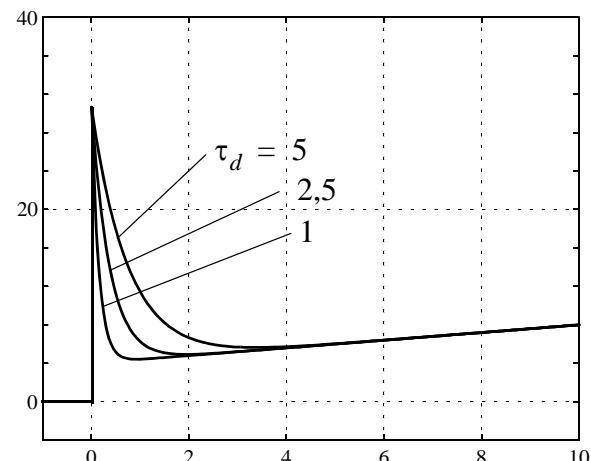
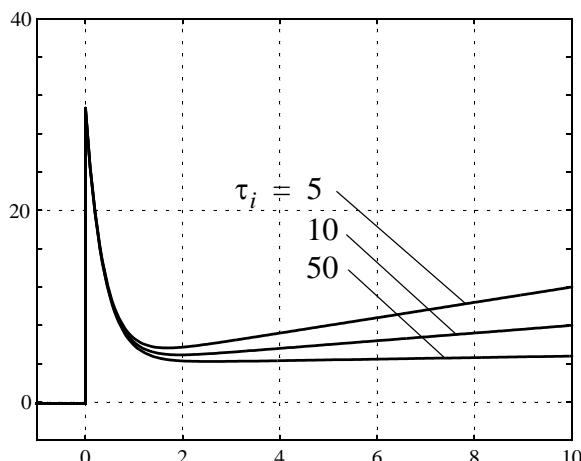
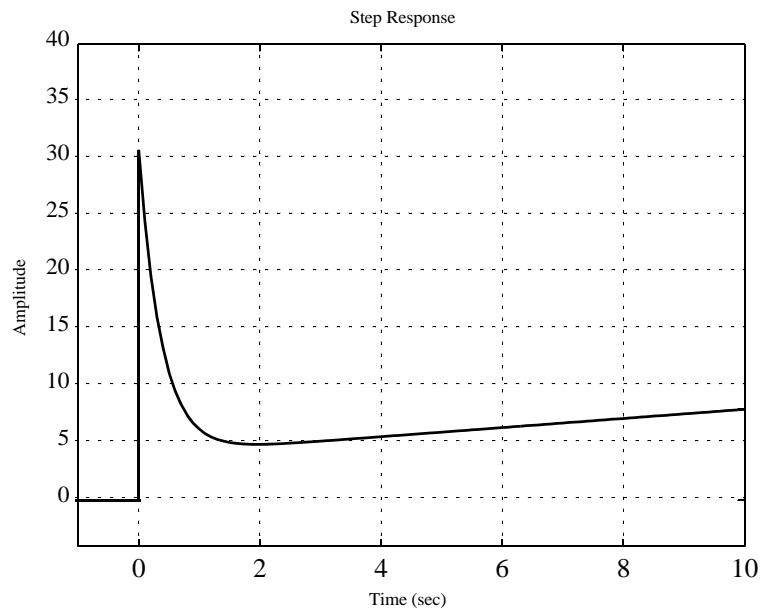
$$G_c(s) = 4 \frac{28,75s^2 + 10,375s + 1}{10s(0,375s + 1)} \quad (1)$$

Regulatorens enhedstrinrespons ses nedenfor.

På det næste plot er vist virkningen af ændrede værdier for τ_i og τ_d .

Jo større τ_i , jo langsommere integreres fejlen (input), og jo længere vil regulatoren generelt være om at fjerne en stationær fejl.

Jo mindre τ_d , jo smallere vil "differential"-pulsen være.



b.

Serie-PID-regulatorens overføringsfunktion (6.33) kan skrives:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \frac{\tau_d s + 1}{\alpha \tau_d s + 1} = K_p \frac{\tau_i \tau_d s^2 + (\tau_i + \tau_d)s + 1}{\tau_i s (\alpha \tau_d s + 1)}$$

Med de indsatte talværdier får man:

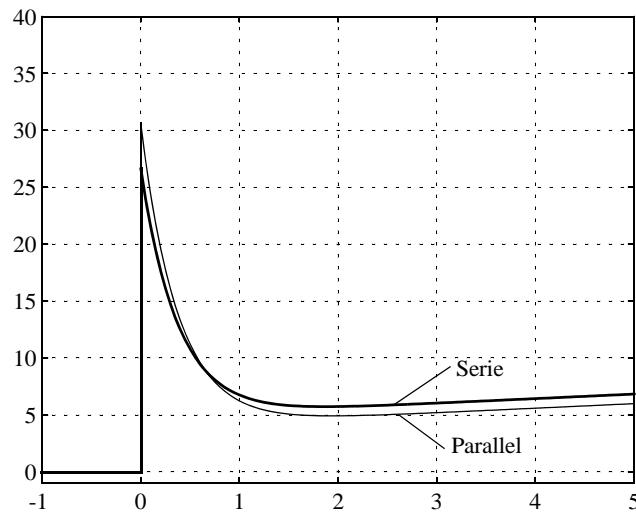
$$G_c(s) = 4 \frac{25s^2 + 12.5s + 1}{10s(0.375s + 1)} \quad (2)$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

De to regulatorer (1) og (2) har samme nævner, d.v.s. samme poler, hvorimod de to tællere afviger lidt fra hinanden. De to regulatorers trinresponser på plottet nedenfor viser at forskellen er beskeden. For parallel-kompensatorens vedkommende kan responssets udseende sammenlignes med bogens figur 6.37

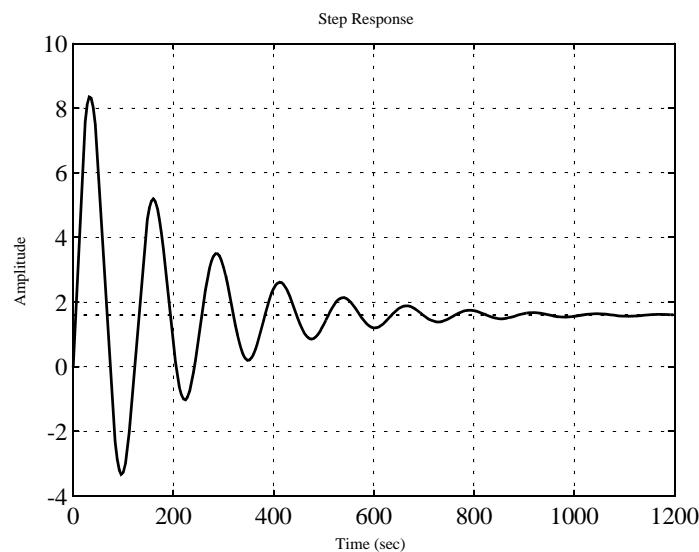
**Opgave 6.7**

a.

Matlab-kommandoerne:

```
>>sysg=tf(20*[1 .02],[1 .01 .0025]);
>> step(.02*sysg),grid on
```

giver plottet:



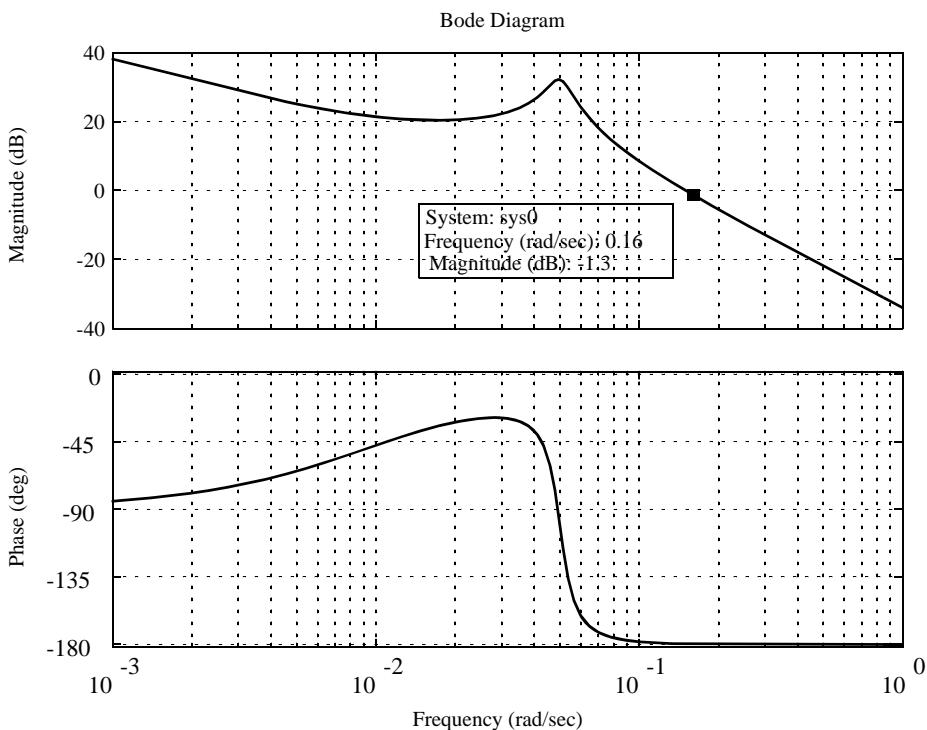
d.v.s. et stærkt oscillatorisk respons som følge af de dårligt dæmpede komplekse poler ($\zeta = 0,1$).

b.

Matlab-kommandoerne:

```
>> sys0=tf(.001*20*[1 .01],[1 .01 .0025 0])
>> bode(sys0)
```

giver Bode-plottet nedenfor:



c.

Ved søgning langs kurverne på Bode-plottet findes at krydsfrekvensen $\omega_c = 0,16$ rad/sek opnås hvis forstærkningen øges 1,3 dB, d.v.s. for $K = 1,16$.

Fasemarginen bliver næsten nul men dog positiv, d.v.s. lukket-sløjfesystemet er stabilt, men meget tæt ved stabilitetsgrænsen.

d.

Nyquistplottet tegnes f.eks. med Matlabkommandoerne:

```
>> subplot(121),nyquist(sys0),axis([-50 50 -50 50])
```

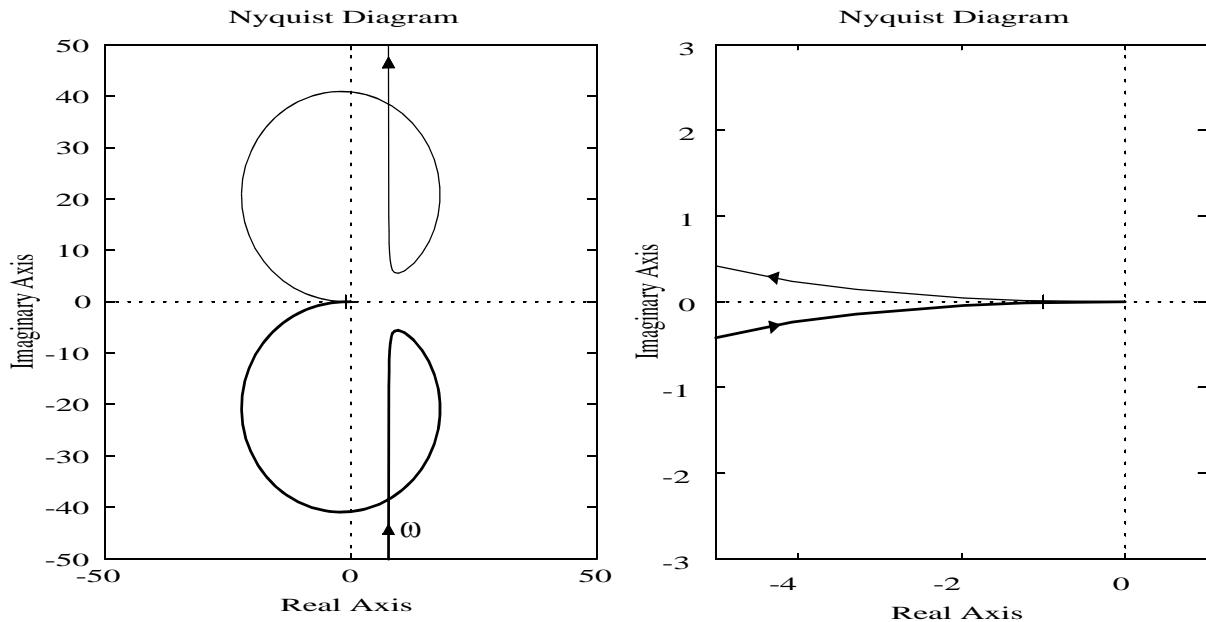
ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

```
>> subplot(122),nyquist(sys0),axis([-5 1 -3 3])
```

og resultatet bliver:



Resultatet fra Bode-plottet bekræftes her. På det højre plot ses at man både har amplitudeforholdet 1 og fasedrejningen $\approx -180^\circ$.

e.

Der er behov for en forøgelse af fasemarginen på ca. 50° . Kompensatorens maksimale positive fasedrejning skal normalt være noget større end denne værdi, se side 272. Det vil næppe være tilrådeligt at vælge $\alpha < 0,1$. Ved denne værdi får vi iflg. figur 6.28 $\varphi_m = 56^\circ$.

Hvis man ønsker krydsfrekvensen 0,16 rad/sek vil det være fornuftigt at lade denne være kompensatorens midtfrekvens, og dermed fås:

$$\tau_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_m} \approx 20 \text{ sek} \Rightarrow G_c(s) = K \frac{20s + 1}{2s + 1}$$

Med Matlabkommandoerne:

```
>> sysc=tf([20 1],[2 1])
>> bode(sys0*sysc)
```

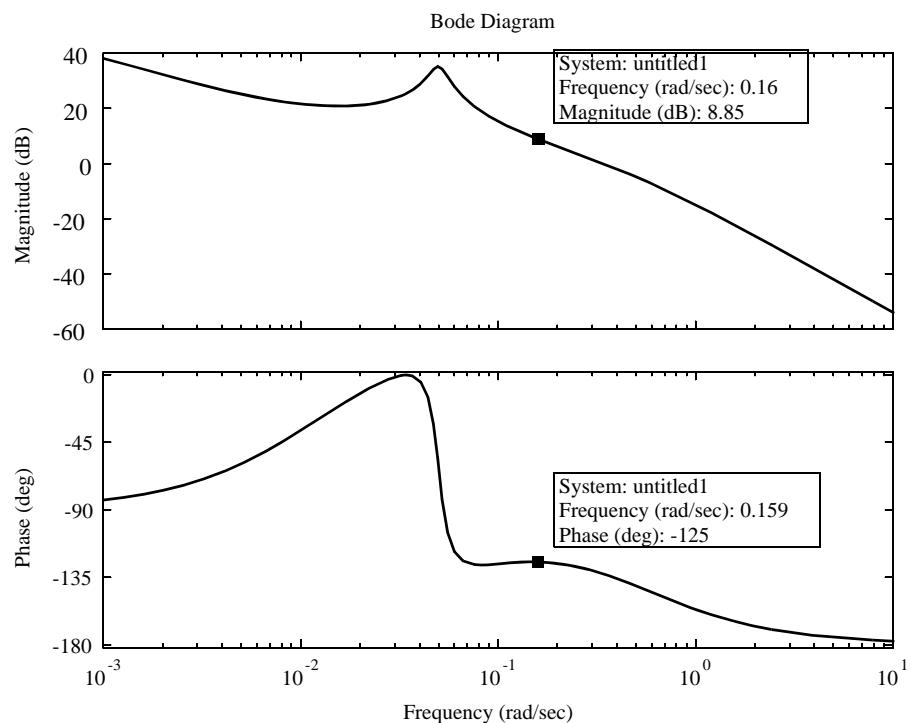
kan man tegne det samlede åben-sløjfe Bodeplot vist nedenfor for $K = 1$.

Ved søgning langs kurverne ses det at krydsfrekvensen 0,16 rad/sek og fasemarginen 55° kan opnås hvis forstærkningen reduceres 8,85 dB, d.v.s. for $K = 0,36$.

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

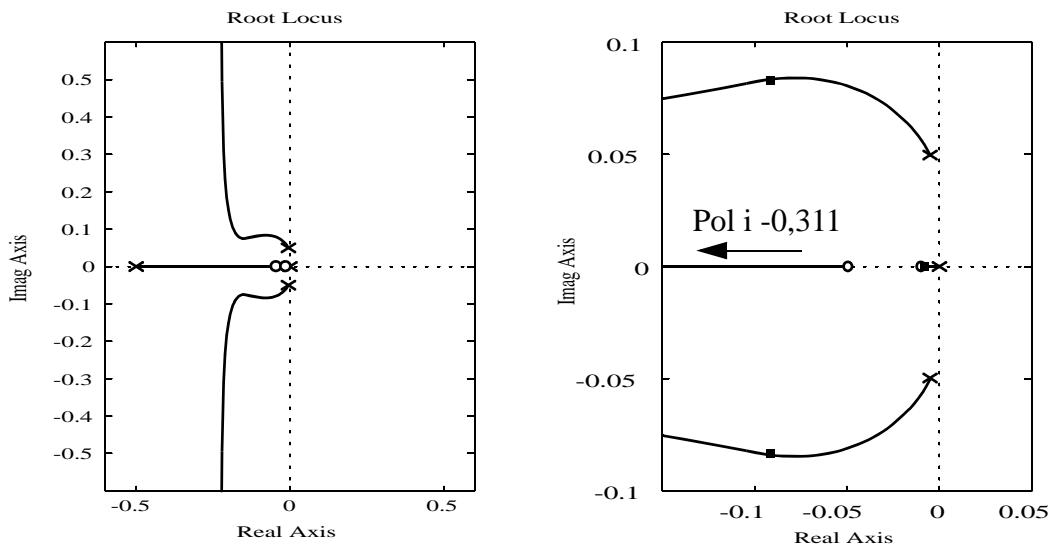


i.

Rodkurverne tegnes med Matlab-kommandoen:

```
>>rlocus(sysg*sysc)
```

Resultat:



Lukket-sløjfe-polerne kan f.eks findes med Matlab-kommandoerne:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

```
>> sysl=feedback(.36*1000*sys0*sysc,tf(.001,1))
```

Transfer function:

$$\frac{144 s^2 + 8.64 s + 0.072}{2 s^4 + 1.02 s^3 + 0.159 s^2 + 0.01114 s + 7.2e-005}$$

```
>> damp(sysl)
```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-7.16e-003	1.00e+000	7.16e-003
-9.61e-002 + 8.33e-002i	7.56e-001	1.27e-001
-9.61e-002 - 8.33e-002i	7.56e-001	1.27e-001
-3.11e-001	1.00e+000	3.11e-001

Polerne er afsat på det højre rodkurveplot ovenfor.

f.

Systemet er type 1 og den stationære fejl for en enhedsrampe er derfor (tabel 3.1):

$$e_{r,ss} = \frac{1}{K_0} = \frac{1}{\frac{20 \cdot 0,01 \cdot 0,001 \cdot 0,36}{0,0025}} = 34,7$$

g.

Med Matlabs bode-kommandoen kan man bestemme lukket-sløjfe Bodeplottet af sysl fra spørgsmål i.

Plottet er vist nedenfor. Ved søgning langs amplitudeforholds kurven finder man $\omega_B = 0,243$ rad/sek.

En højdeændring på 100 m kræver en referencetrinshøjde på 0,1 (p. gr. af transducerkonstanten).

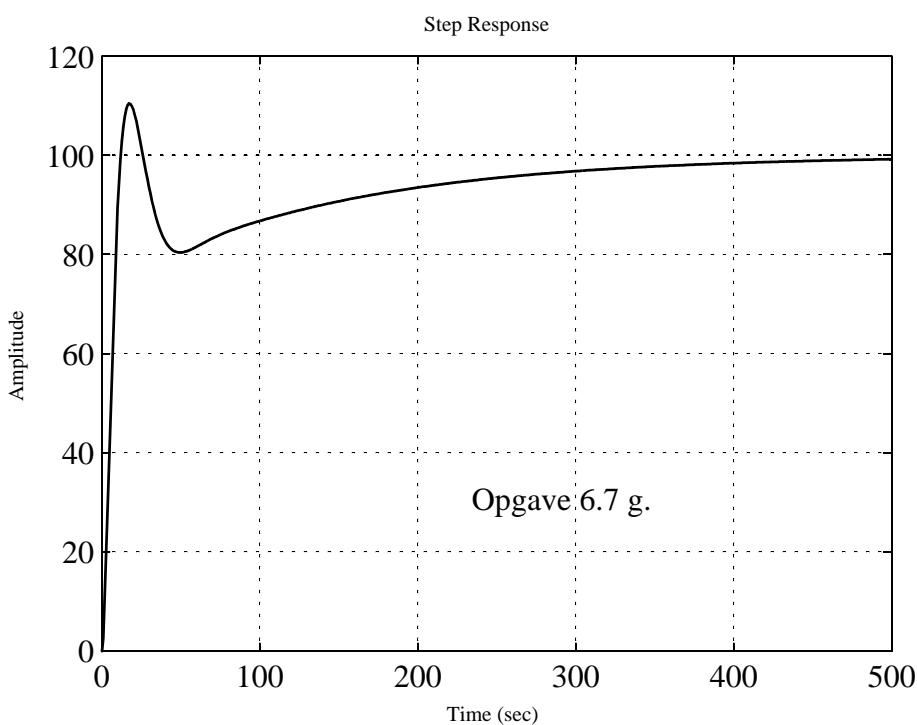
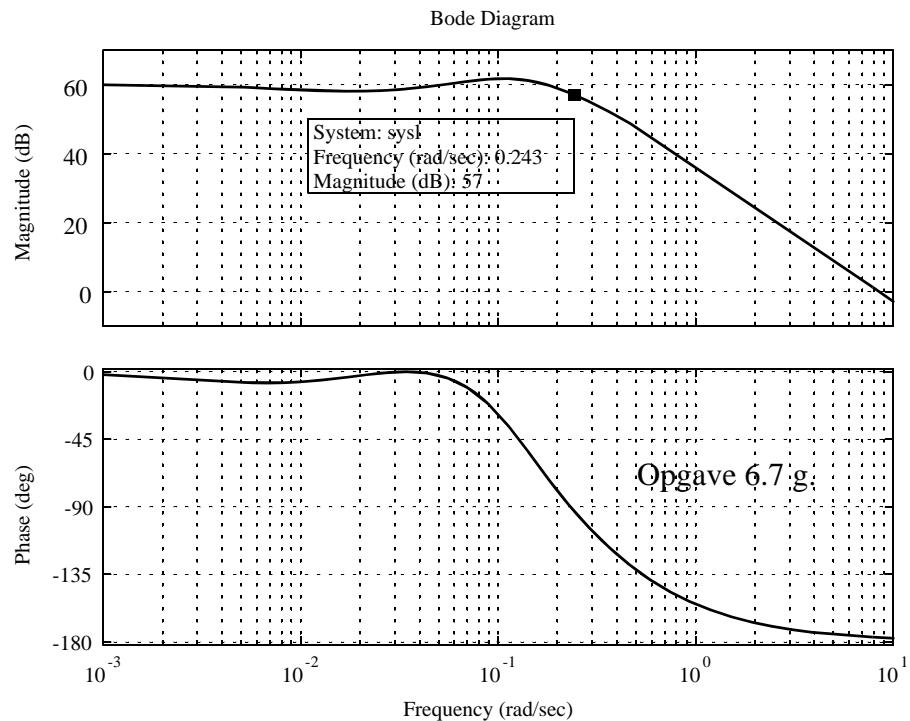
Matlab-kommmandoen

```
>>step(.1*sysl),grid on
```

giver responset vist på næste side. Responset kan måske se lidt ubehageligt ud de første 100 sek. Men man skal tænke på at trinresponsundersøgelser primært bruges til at afdække systemets dynamiske egenskaber. I praksis ville man næppe drømme om at udsætte et fly for en trinpåvirkning!

h.

Hvis det er tilstrækkeligt blot at reducere den stationære fejl vil en lag-kompensator være et nærliggende valg.



ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

Lag-komsatoren har overføringsfunktionen:

$$G_{c1}(s) = K_1 \frac{\tau_i s + 1}{\beta \tau_i s + 1} , \quad \beta > 1$$

Kompensatoren må helst ikke øge åben-sløjfeforstærkningen ved krydsfrekvensen og derover, og derfor må man sætte:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{c1}(j\omega) = 1 \Rightarrow K_1 = \beta$$

Hvis man f.eks. sætter $\beta = 10$ vil kompensatorens statiske forstærkning også være 10 (se bogens figur 6.23), og den stationære fejl vil blive reduceret med samme faktor. Enhedsrampefejlen fra f. vil altså blive $e_{r,ss} = 3,47$.

Kompensatorens negative fasedrejning må kun være meget beskeden ved krydsfrekvensen og derover, og derfor må man sætte den kompensatorens højeste knækfrekvens til en væsentlig lavere værdi, f.eks.

$$\omega_{k1} = \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{5} \omega_c = 0,032 \Rightarrow \tau_i \approx 31 \text{ sek}$$

og dermed:

$$\beta \tau_i = 310 \text{ sek}$$

Hvis man kræver at den stationære rampefejl skal være nul, må systemets type øges til 2, d.v.s. en PI-regulator må indsættes. Knækfrekvensen kan vælges som ved lag-kompensatoren (d.v.s. $\tau_i = 31$ sek). Proportionalforstærkningen skal herefter fastlægges så fasemarginen på over 50° bibeholdes.

Opgave 6.8

a.

Åben-sløjfe overføringsfunktion:

$$G_a(s) = K_p \frac{10}{(2s+1)(3s+1)(s+1)} \Rightarrow K_0 = 10K_p$$

Stationær fejl (tabel 3.1):

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

$$e_{r,ss} = \frac{1}{1 + K_0} = \frac{1}{1 + 10K_p} < 0,05 \Rightarrow K_p > 1,9$$

Lukket-sløjfesystemets karakteristiske ligning:

$$(2s + 1)(3s + 1)(s + 1) + 10K_p = 0 \\ \Rightarrow 6s^3 + 11s^2 + 6s + 20 = 0$$

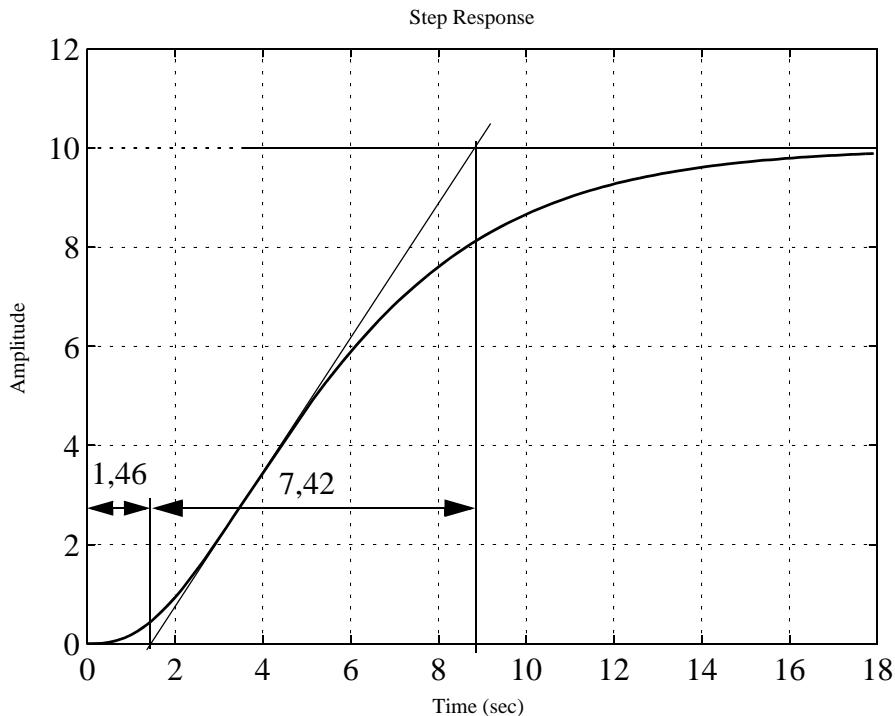
Matlabs roots-funktion giver:

```
>> roots([6 11 6 20])
ans =
-2.1087
0.1377 + 1.2497i
0.1377 - 1.2497i
```

Systemet har med denne forstærkning poler i højre halvplan og er altså ustabilt.

Derfor er svaret nej.

b. Åben-sløjfesystemets trinrespons er vist nedenfor. Efter indlægning af vendetangenten kan

man aflæse $T_1 = 1,46$ sek og $T_2 = 7,42$ sek.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

Herefter fås:

$$K = \frac{10}{1} = 10$$

$$R = \frac{7,42}{1,46} = 5,1$$

Af tabel 6.1 får man regulatorparametrene:

PI-regulator: $K_p = 0,41$ $\tau_i = 4,4$ sek

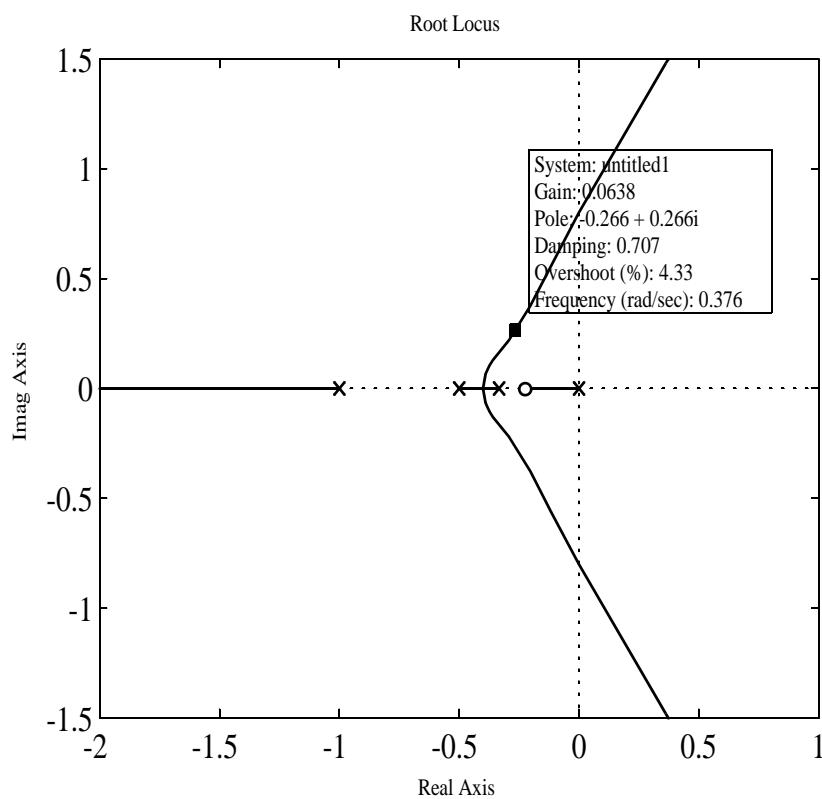
PID-regulator: $K_p = 0,61$ $\tau_i = 3,6$ sek $\tau_d = 0,87$ sek

c.-d.

Åben-sløjfesystemet og rodkurverne genereres med Matlab-kommandoerne:

```
>>sys=tf(10,conv([6 5 1],[1 1]);
>>syspi=tf([4.4 1],[4.4 0]);
>>sys0=sys*syspi;
>>rlocus(sys0)
```

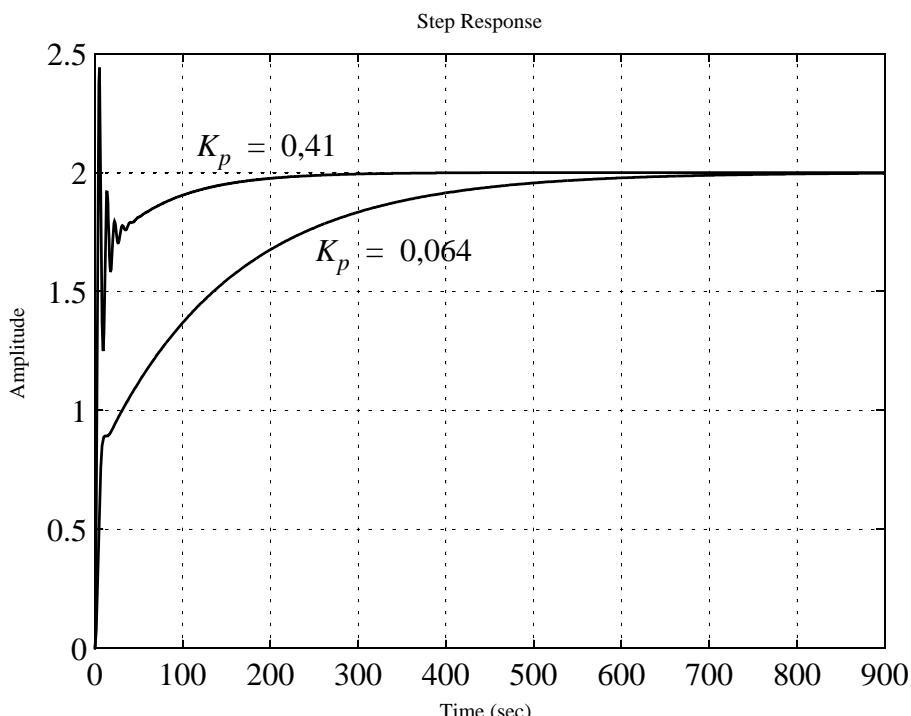
Resultatet ses nedenfor:



Ved søgning langs kurverne får man dæmpningsforholdet $\zeta = 0,707$ for $K_p = 0,064$.

e.

Med Matlabs feedback- og step-kommandoer kan man finde trinresponserne for de to værdier af K_p :



Med $K_p = 0,41$ bliver systemet stærkt oscillatorisk. for $K_p = 0,064$ er oscillationerne forsvundet, men systemet er blevet meget landsomt.

De to lukket-sløjfe systemer har en dominerende tidskonstant på henholdsvis 74 sek og 150 sek, og det er overraskende i betragtning af åben-sløjfesystemets langt mindre tidskonstanter.

Det må konstateres at en PI-regulator er et dårligt valg til dette system.

Opgave 6.9

a.

Man sætter $T_1 = T = 2$ sek og $T_2 = \tau = 4$ sek .

D.v.s. at $R = T_2/T_1 = 2$. Da endvidere $K = 1$, får man af tabel 6.1 $K_p = 2$.

b.-c.

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

Åben-sløjfe Bodeplottet kan tegnes med Matlab-kommandoerne:

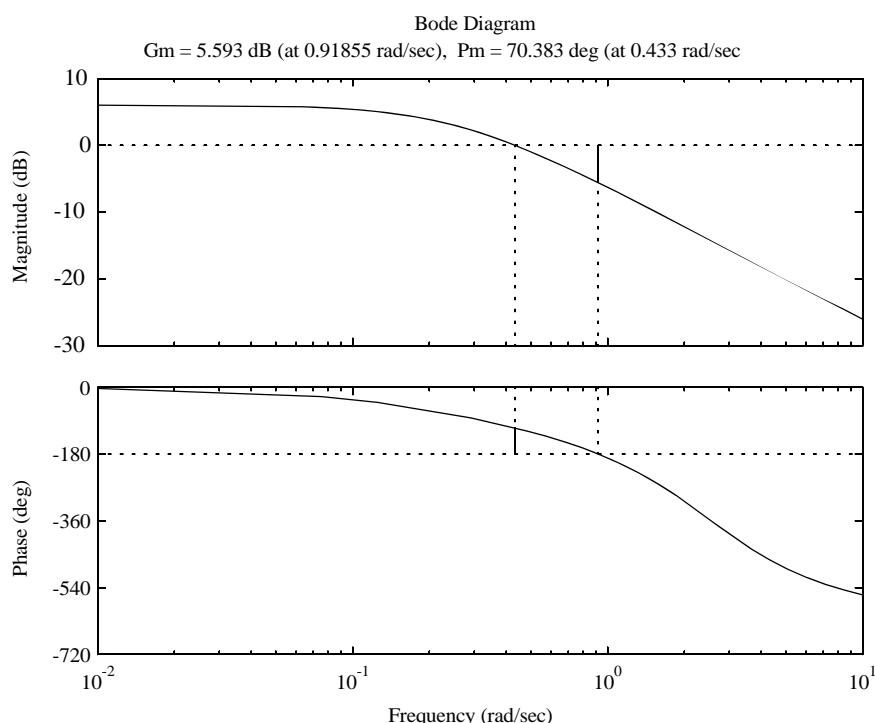
```
>> sys=tf(1,[4 1]);
>> w=logspace(-2,1,200);
>> [af,fi]=bode(2*sys,w);
>> subplot(211),semilogx(w,20*log10(squeeze(af))),grid on
>> fi1=squeeze(fi)-(2*w')*180/pi;
>> subplot(212),semilogx(w,fi1),grid on,axis([.01 10 -200 0])
```

Det er noget enklere at bruge den rationale padéapproksimation:

```
>> sys=tf(1,[4 1]);
>> [np,dp]=pade(2,3);syspade=tf(np,dp)
Transfer function:
-s^3 + 6 s^2 - 15 s + 15
-----
s^3 + 6 s^2 + 15 s + 15
>> margin(2*sys*syspade)
```

Resultatet af den sidste sekvens ses nedenfor. Der er anvendt en 3.-ordens approksimation. Sammenlign med bogen formel (5.51)

Man kan let overbevise sig om at fasedrejningen for denne approksimation stort set er identisk med fasedrejningen for den eksakte tidsforsinkelse (bogens formel 5.48) i det relevante frekvensområde.



Opgave 6.10

a.

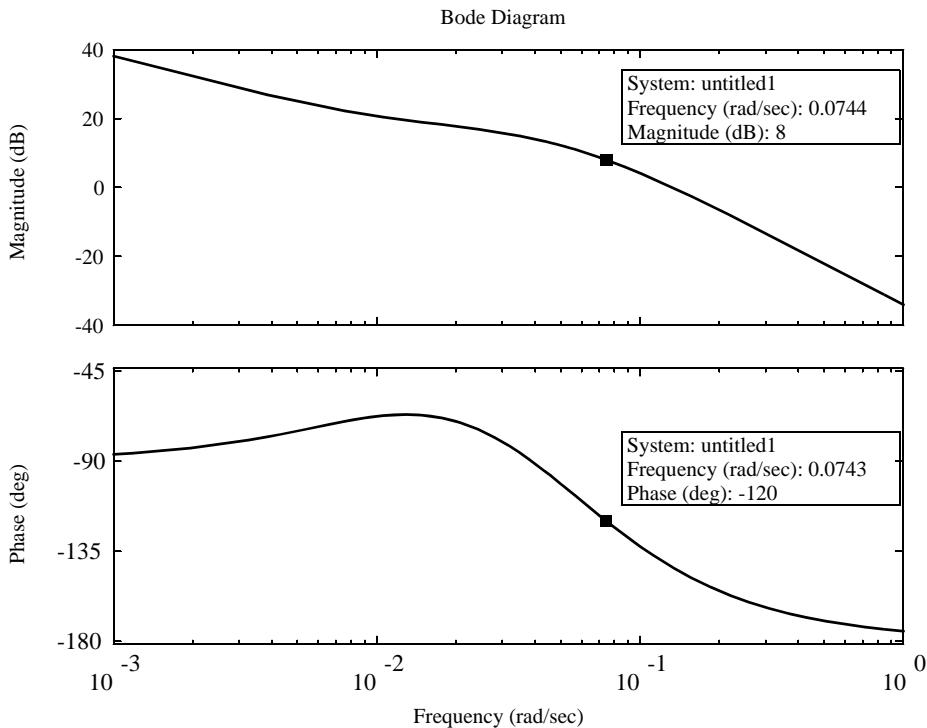
Den ønskede regulator bliver:

$$G_c(s) = K_p \frac{s^2 + 0,01s + 0,0025}{(s + 0,05)(s + 0,05)} = K_p \frac{s^2 + 0,01s + 0,0025}{s^2 + 0,1s + 0,0025}$$

Proportionalforstærkningen kan bestemmes med Matlab-kommandoerne:

```
>> sys0=tf(.001*20*[1 .01],[1 .01 .0025 0]);
>> sysc=tf([1 .01 .0025],[1 .1 .0025]);
>>bode(sys0*sysc)
```

Plottet ses nedenfor:

Fasemarginen 60° opnås hvis forstærkningen reduceres 8 dB, d.v.s. til $K_p = 0,4$.

b.

Lukket-sløjfesystemets overføringsfunktion $G_l(s) = h(t)/h_{ref}(s)$ og trinresponset bestemmes med:

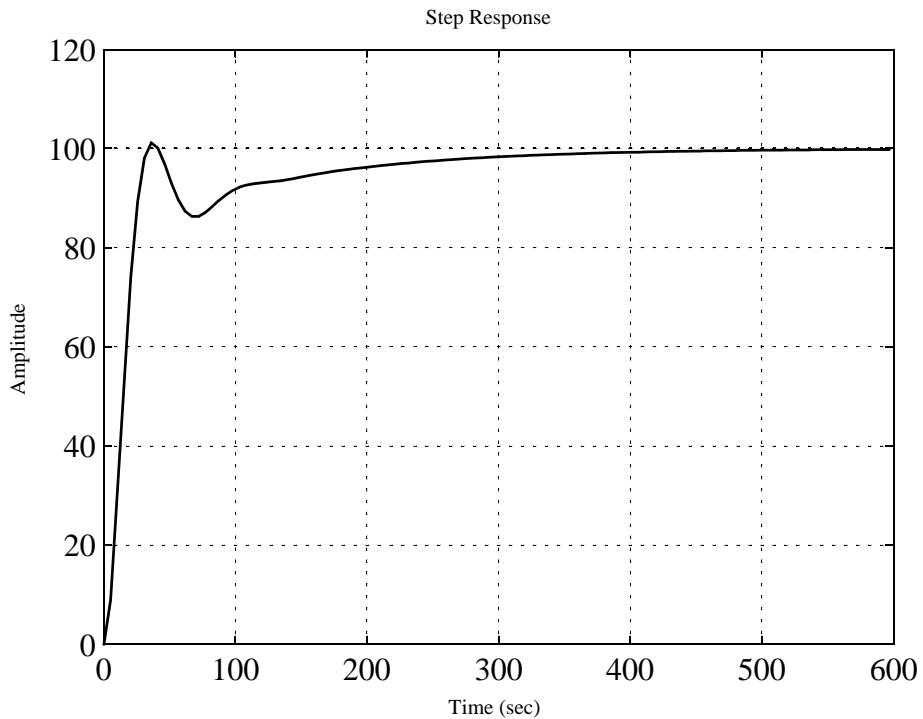
ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

```
>> sysl=feedback(.4*1000*sys0*sysc,tf(.001,1));
>>step(.1*sysl),grid on
```

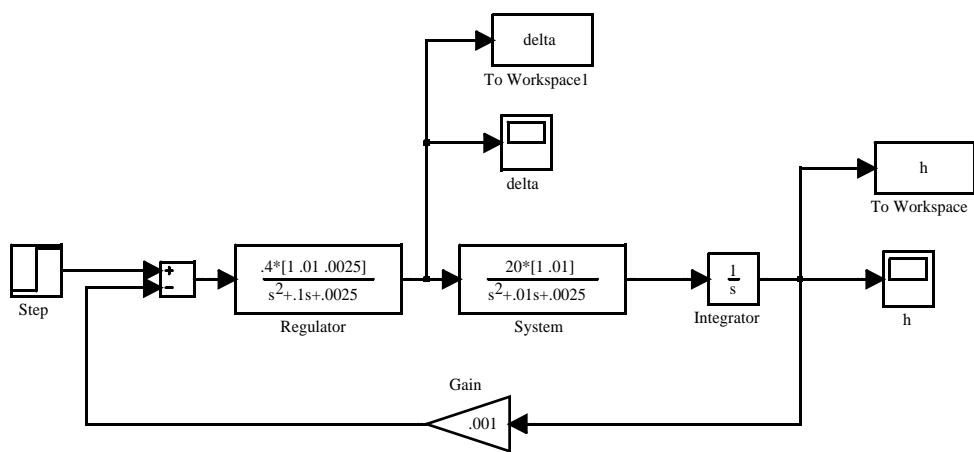
og resultatet bliver:



Responset bliver noget nænere end det der blev opnået i opgave 6.7

For at bestemme højderorsvinklen $\delta(t)$ kan man naturligvis finde overføringsfunktionen fra $h_{ref}(s)$ til $\delta(t)$ ud fra blokdiagrammet på figur 6.125 og derefter bruge step-funktionen.

Et alternativ er at programmere en Simulink-model som vist herunder.



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

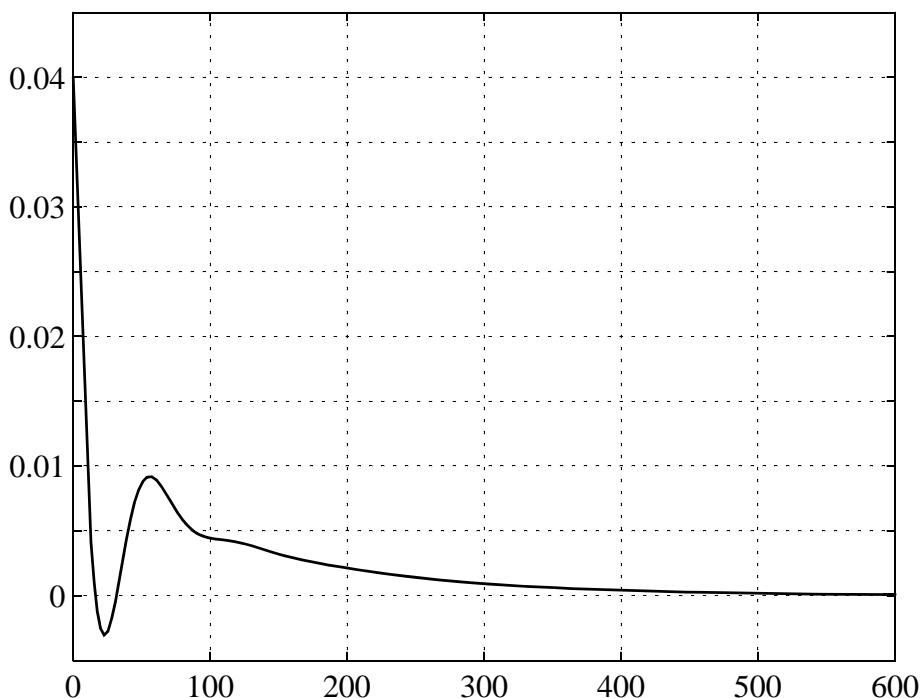
Opgaveløsninger

Her kan man “måle” responser overalt på modellen og plotte resultatet.

Hvis f.eks. det viste step-blok sættes til en trinfunktion af højden 0,1, så kan responset plottes efter en simulering med kommandoen:

```
>>plot(tout,delta),grid on
```

tout et tidsvektoren som Simulink gemmer under simuleringen. Resultatet ses nedenfor:



Man ser at højderorsvinklen største værdi bliver:

$$\delta_{max} \approx 0,04 \text{ rad} = 2,3$$

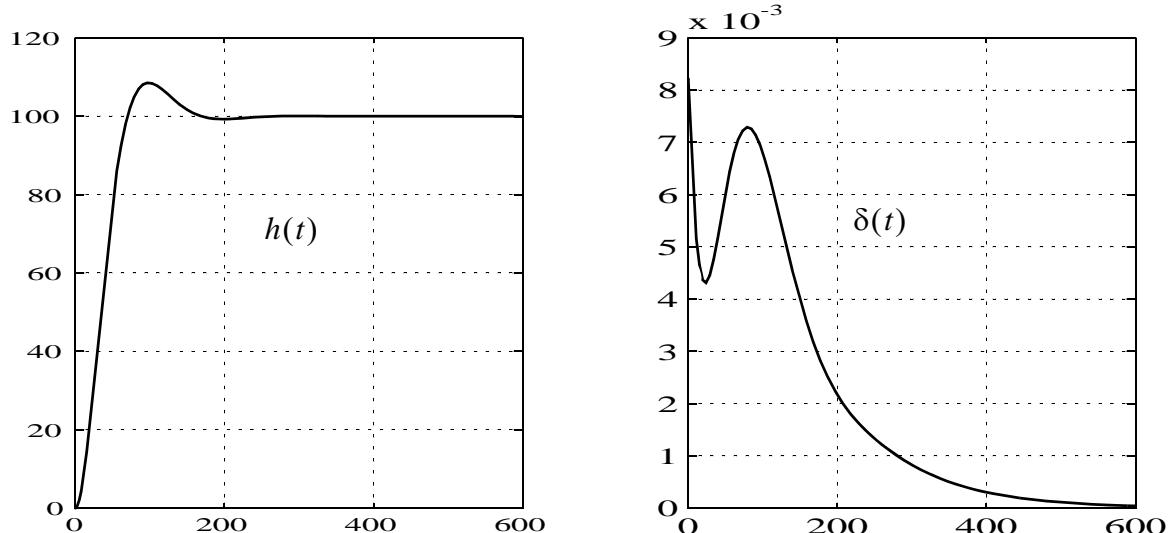
c.-d.

Regulatoren ændres til

$$G_c(s) = K_p \frac{s^2 + 0,01s + 0,0025}{(s + 0,05)(s + 0,01)} = K_p \frac{s^2 + 0,01s + 0,0025}{s^2 + 0,06s + 0,0005}$$

og beregningerne af K_p og responserne fra b. gentages, evt. v.hj. af Simulinkmodellen. Man får $K_p = 0,0822$ for $\gamma_M = 60^\circ$. Responserne ses nedenfor. Højderesponset er betydeligt mere hensigtsmæssigt end før. Bemærk især at indsvingningstiden er reduceret fra ca. 500 sek til ca. 220 sek.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

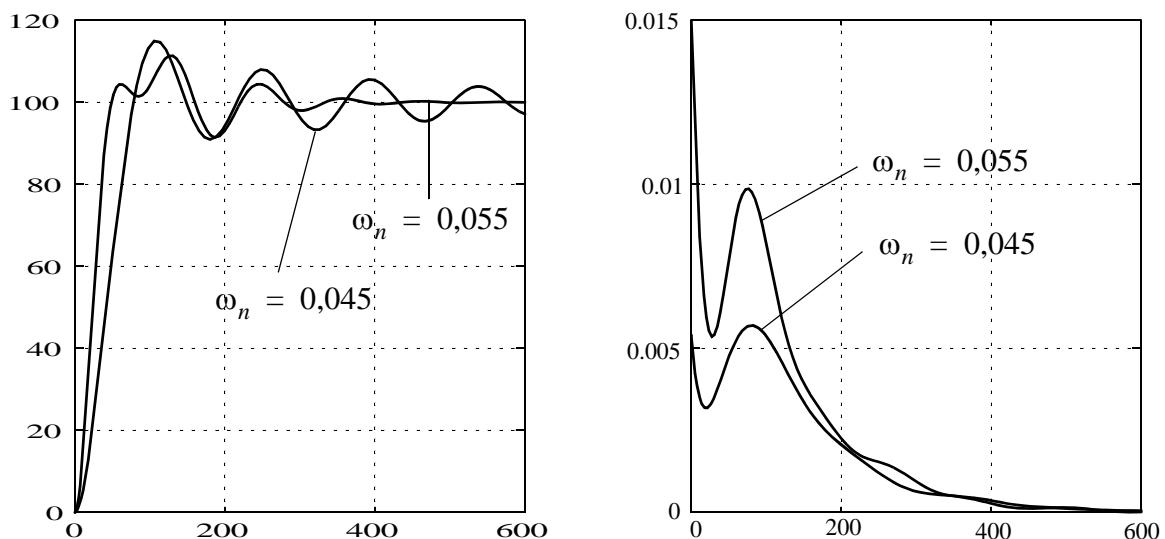


e.

Den udæmpede egenfrekvens i $G(s)$ er $\omega_n = 0,05$ rad/sek.

Hvis denne ændres til henholdsvis 0,045 og 0,055 rad/sek kan man gentage undersøgelsen ovenfor. En sådan ændring kan meget vel forekomme hvis flyet flyer ændrer højde eller hastighed, og den må altså betragtes som en usikkerhed i systemmodellen.

Hvis man bruger den samme regulator som under c. - dog med opretholdelse af fasemarginen på 60° - vil responserne se ud som vist nedenfor. Systemets egenskaber er blevet klart forringet, især for $\omega_n = 0,045$ rad/sek hvor responset er alt for oscillatorisk.



Det må konstateres at en polplomberingsregulator kan være problematisk hvis systemmodellen ikke er præcis.

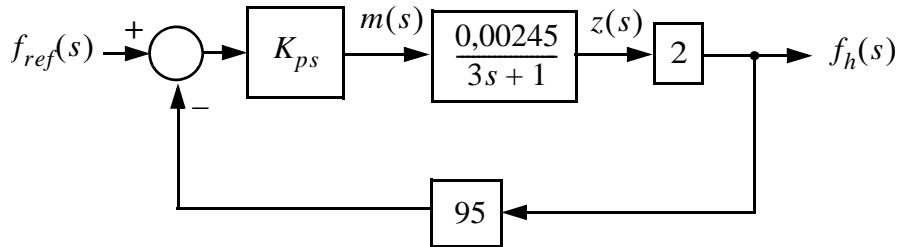
Man kan også konstatere at selv en så stor fasemargin som 60° kan give et meget oscillatorisk system under uheldige omstændigheder.

I forbindelse med flystyring (autopiloter) vil man som regel bruge såkaldt *gain-scheduling*, hvor regulatorens parametre ændres i overensstemmelse med den ændrede systemmodel. Dette kræver naturligvis at sådanne modelændringer er kendt på forhånd. Det vil de normalt være for fly.

Opgave 6.11

a.

Af bogens figurer 6.92 og 6.99 ses blokdiagrammet af flowsløjfen at være:



hvor den sekundære PI-regulator i eks. 6.21 er erstattet med proportionalforstærkningen K_{ps} .

Lukket-sløjfe overføringsfunktionen er:

$$\frac{f_h(s)}{f_{ref}(s)} = \frac{2K_{ps} \frac{0,00245}{3s+1}}{1 + 2K_{ps} 95 \frac{0,00245}{3s+1}} = \frac{\frac{0,0049K_{ps}}{1 + 0,466K_{ps}}}{\frac{3}{1 + 0,466K_{ps}}s + 1} \quad (1)$$

For et 1.-ordenssystem er båndbredden lig med knækfrekvensen og man får derfor til bestemmelse af forstærkningen:

$$\omega_k = \frac{1}{\tau} = \frac{1 + 0,466K_{ps}}{3} = \omega_B = 1 \Rightarrow K_{ps} = 4,29$$

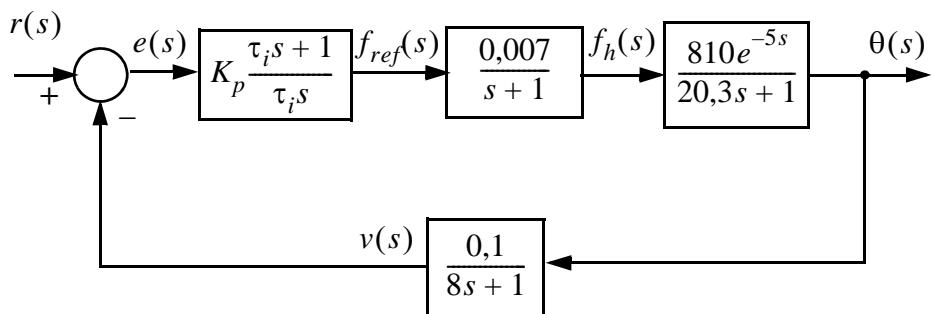
b.

Blokdiagrammet for det samlede system er vist nedenfor. Flowsløjfesystemet er reduceret til en enkelt blok med overføringsfunktionen (1).

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

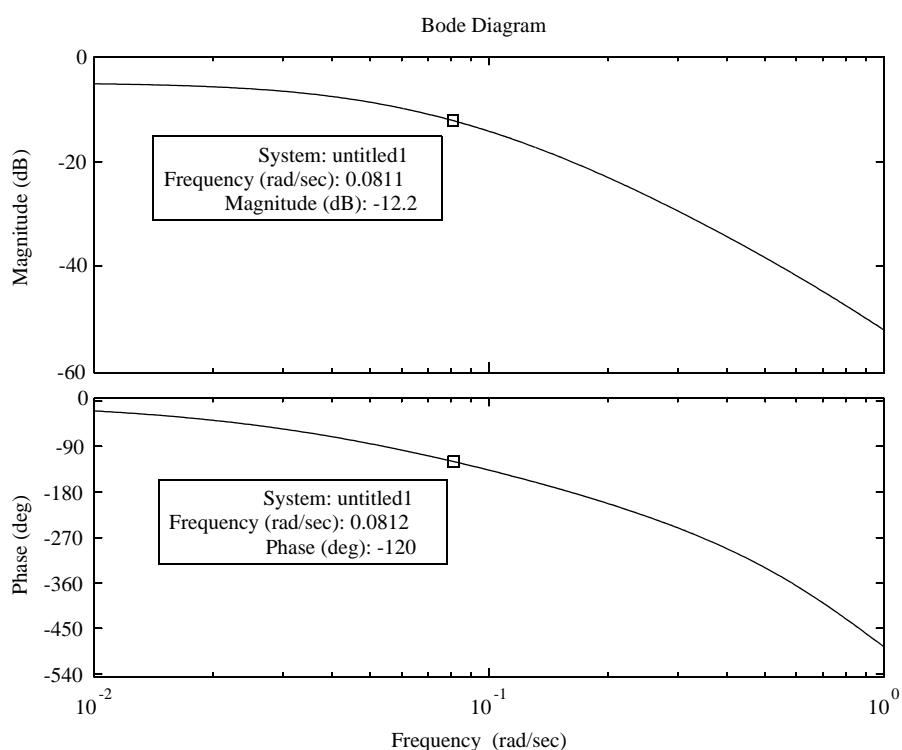


Hvis man - som i eksempel 6.21 - bruger en 3.-ordens Padé-approksimation for tidsforsinkelsen, kan systemets åben-sløjfe Bodeplot uden PI-regulator tegnes med Matlab-kommandoerne:

```

>> [nT,dT]=pade(5,3);sysT=tf(nT,dT)
Transfer function:
-s^3 + 2.4 s^2 - 2.4 s + 0.96
-----
s^3 + 2.4 s^2 + 2.4 s + 0.96
>> sys=tf(810,[20.3 1]);
>> sysf=tf(.007,[1 1]);
>> syss=tf(.1,[8 1]);
>> w=logspace(-2,0,300);
>> bode(sys*sysf*syss*sysT,w)
  
```

Resultatet bliver:



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

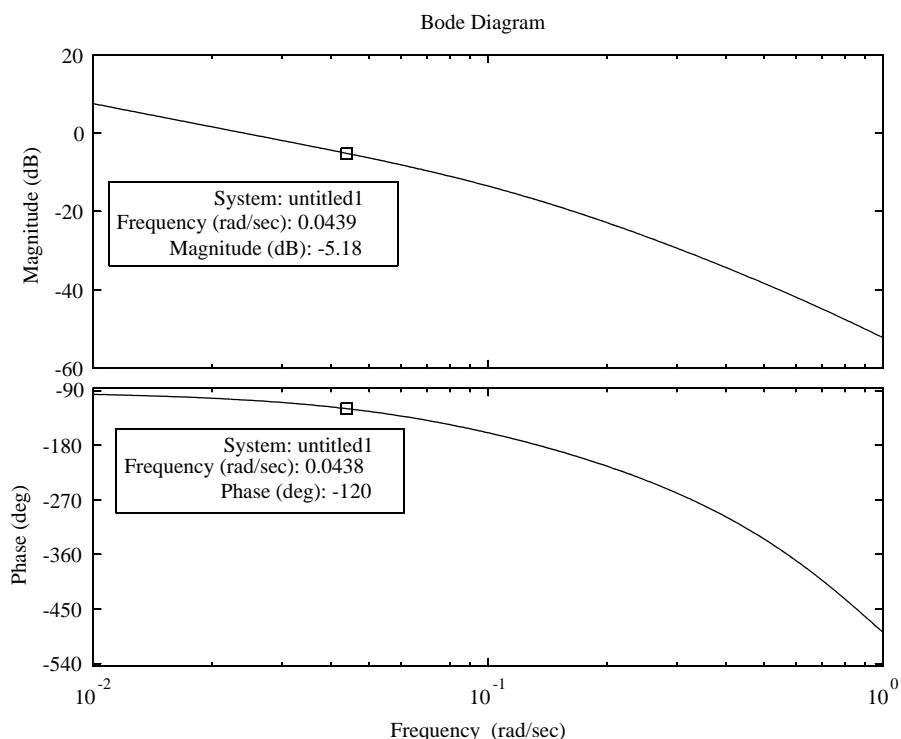
Hvis man lader dette P-regulerede system med fasemarginen 60° være udgangspunkt for dimensioneringen af PI-regulatoren, man man (i dette tilfælde) vælge regulatorens knækfrekvens til halvdelen af krydsfrekvensen for systemet på plottet ovenfor. Det giver:

$$\omega_k = 0,0406 \Rightarrow \tau_i \approx 24 \text{ sek}$$

Med Matlab-kommandoerne :

```
>> sysc=tf([24 1],[24 0]);
>> bode(sysc*sysf*syss*sysT*sysc,w)
```

får man plottet:



Krydsfrekvensen 0,044 rad/sek opnås for $K_p = 1,8$.

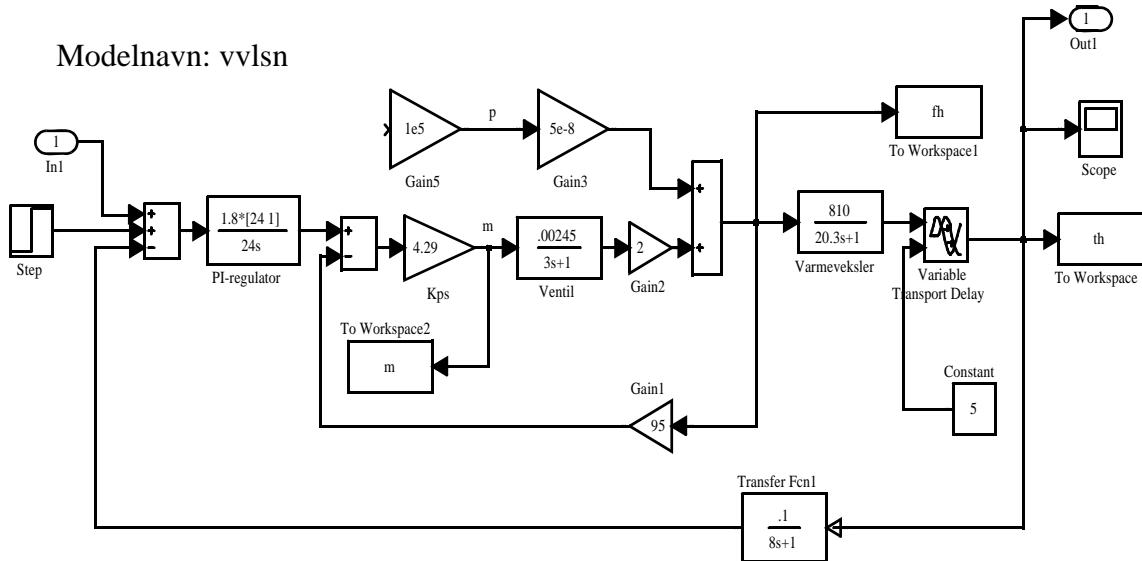
c.

En Simulinkmodel af det samlede system kan se ud som vist nedenfor.

Det er nu meget enkelt både at simulere tidsresponser og at beregne overføringsfunktioner.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringssteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

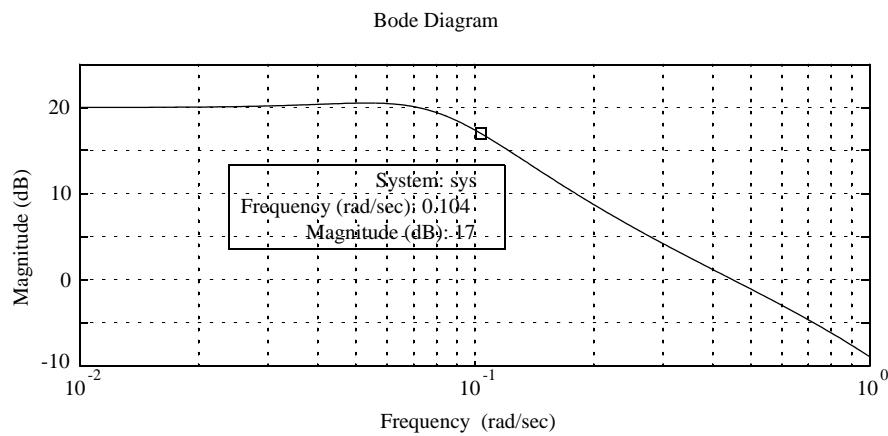
Modelnavn: vvlsn



Med de viste In- og Out-porte kan man beregne lukket-sløjfe overføringsfunktionen fra referencen $r(s)$ til temperaturafvigelsen $\theta(s)$. Bodeplottet kan derefter tegnes:

```
>>[nr,dr]=linmod('vvlsn');
>>bode(nr,dr)
```

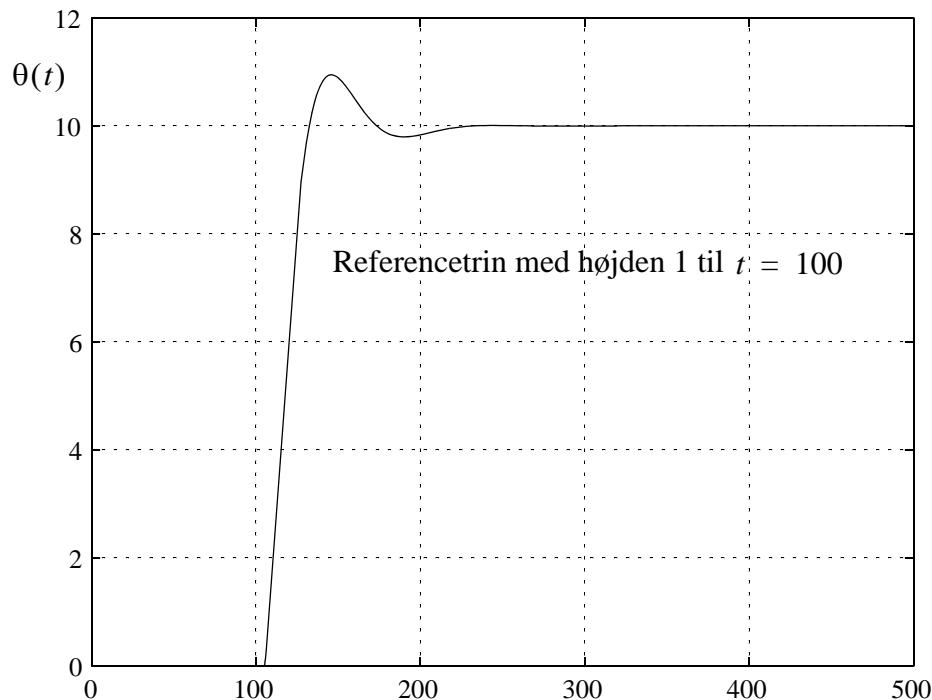
Plottet ses nedenfor. Det viser at båndbredden bliver $\omega_B = 0,104$ rad/sek.



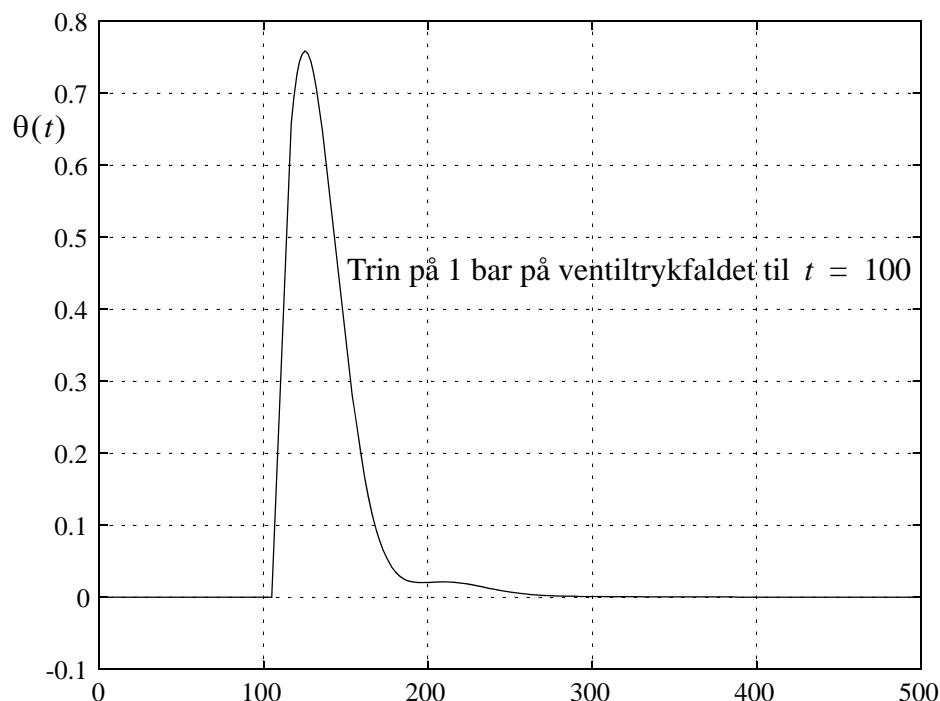
En simulering over 500 sek giver resultatet nedenfor efter brug af Matlab-kommandoen:

```
>>plot(tout,th),grid on
```

Både referencetrintriresponsen og Bodeplottet viser at systemet ikke afviger meget fra systemet i eksempel 6.21 (sammenlign med bogens figurer 6.91 og 6.93).



Hvis en trinfunktionsblok sættet på Gain5-blokkens indgang, kan man simulere systemets respons på en trinformed ændring i ventiltrykfaldet. Resultatet bliver:

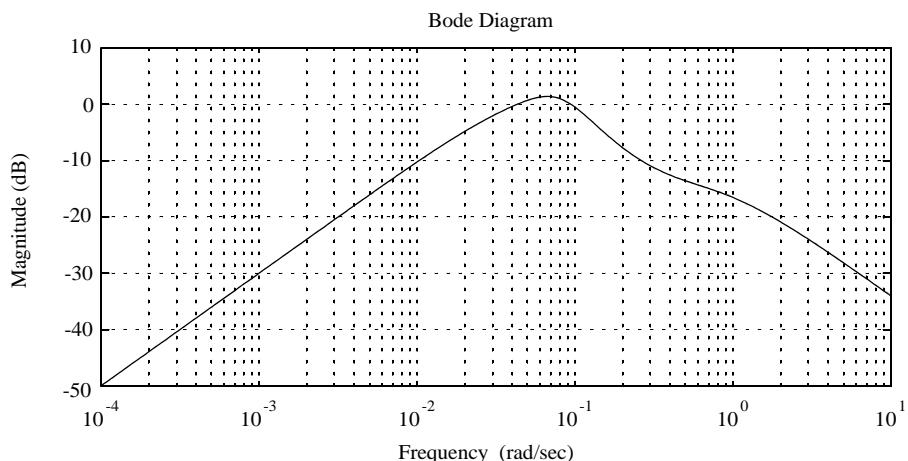


ØRSTED • DTU AUTOMATION

Regulerings teknik 4.udgave

Opgaveløsninger

Hvis In-porten flyttes til Gain5-blokvens indgang, kan man på samme måde beregne systemets sensitivitetskurve $\left| \frac{\theta(j\omega)}{p(j\omega)} \right|$, jvf. bogens figur 6.102. Resultatet bliver:



Her ses det at systemet er noget bedre end systemet uden flowsløjfe men klart ringere end eksemplets system med en sekundær PI-regulator.

Ved frekvenser omkring 0,1 rad/sek er følsomheden omkring 20 dB (10 gange) større end på bogens figur 6.102.

Systemet kan dog let gøres bedre. Båndbredden for flowsløjfen kan uden videre øges til 3-5 rad/sek og krydsfrekvensen for det samlede kan derefter øges væsentligt. Selv med en god fasemargin på 60° vil det være muligt at opnå et mere gunstigt forløb for følsomhedskurven.

Opgave 7.1

$$x(s) = \frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right)$$

$$x(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT}) z^{-k} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-k} - e^{-akT} z^{-k}) \\ &= \frac{1}{a} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots - 1 - e^{-aT} z^{-1} - e^{-2aT} z^{-2} - \dots) \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT} z^{-1}} \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right) \\ &\quad \left(\text{fordi } \sum y^k = \frac{1}{1-y} \right) \end{aligned}$$

$$x(z) = \frac{z(z - e^{-aT}) - z(z-1)}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

Opgave 7.2

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{z(1 - e^{-0,2})}{(z-1)(z - e^{-0,2})} \\ &= z \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-0,2}} \right) \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-0,2}} \\ &\Rightarrow x(k) = 1 - e^{-0,2kT} \end{aligned}$$

Den kontinuerte tidsfunktion sås i opgave 7.1 at være:

$$x(t) = 1 - e^{-0,2t}$$

og de to funktioner ses at være sammenfaldende til samletidspunkterne, d.v.s. for $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Opgave 7.3

a.

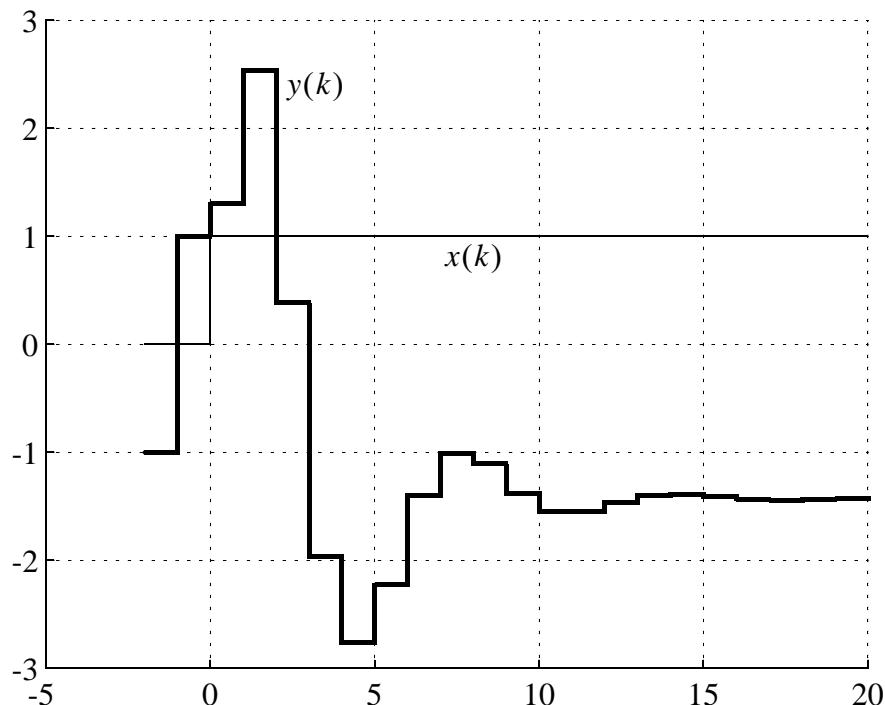
Fejl i opgaveteksten. Linie tre skal lyde:

Find sekvensen $y(k)$ for $k = 0, 1, 2, \dots, 20$ når x er et enhedstrin og når:

En Matlab .m-fil kan f.eks. se ud som følger:

```
x(1)=0;x(2)=0;x(3:23)=1;
y(2)=1;y(1)=-1;
for k=0:20
    y(k+3)=2*x(k+2)-3*x(k+1)+.8*y(k+2)-.5*y(k+1);
end
t=-2:20;
hold on,stairs(t,y),hold on,stairs(t,x),grid on
```

Udførelsen af filen giver resultatet:



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

Bemærk at man i Matlab's vektorer og matricer ikke kan bruge negative indices. Derfor må beregningen gennemføres med positive tidsargumenter og plottet må forskydes to sampleperioder bagud ved plotningen.

b.

$$y(k) - 0,8y(k-1) + 0,5y(k-2) = 2x(k-1) - 3x(k-2)$$

Ligningen Z-transformeres:

$$y(z) - 0,8y(z)z^{-1} + 0,5y(z)z^{-2} = 2x(z)z^{-1} - 3x(z)z^{-2}$$

eller:

$$(1 - 0,8z^{-1} + 0,5z^{-2})y(z) = (2z^{-1} - 3z^{-2})x(z)$$

hvoraf man får:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{2z^{-1} - 3z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,5z^{-2}} = \frac{2z - 3}{z^2 - 0,8z + 0,5}$$

Matlab-kommandoerne:

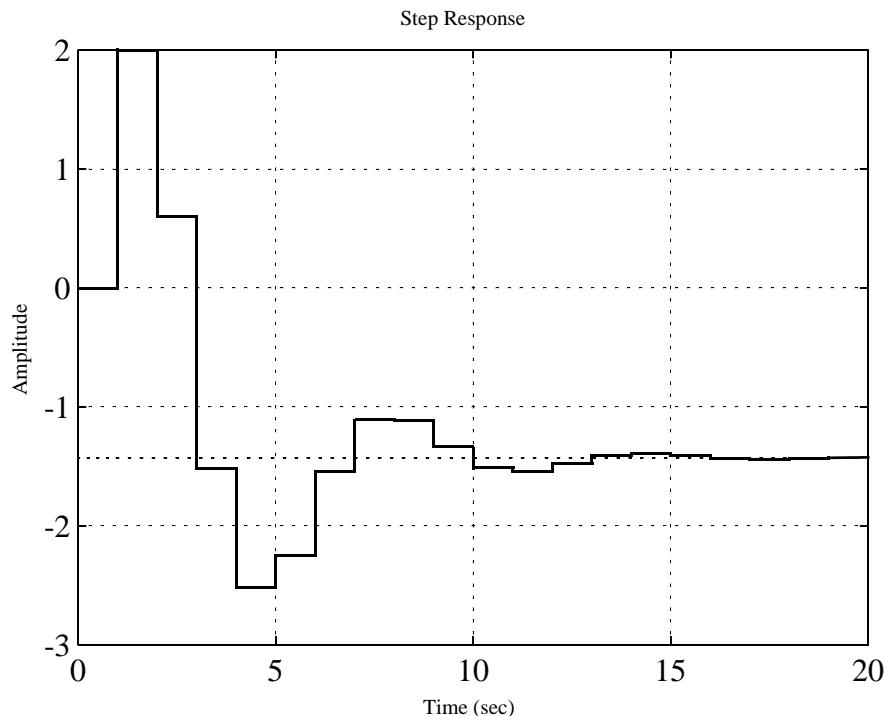
```
>> num=[2 -3],den=[1 -.8 .5]
>> dstep(num,den,20)
```

giver plottet nedenfor.

Bemærk at aksepåskriften "Time (sec)" er misvisende. Der burde stå "Sample number".

Hvis .m-filen i spørgsmål a. udføres igen men med $y(2)=0;y(1)=0$, så får man samme resultat som med dstep-kommendoen.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringssteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



Opgave 7.4

$$H_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{0,2s+1}{s(s + 0,6s + 0,5)}\right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,2s+1}{s(s + 0,6s + 0,5)} &= \frac{2}{s} - \frac{2s+1}{s^2 + 0,6s + 0,5} = \frac{2}{s} - \frac{2s+1}{(s+0,3)^2 + 0,6403^2} \\ &= \frac{2}{s} - 0,6246 \frac{0,6403}{(s+0,3)^2 + 0,6403^2} - 2 \frac{s+0,3}{(s+0,3)^2 + 0,6403^2} \end{aligned}$$

Tabellen i Appendiks C (række 3, 13 og 14) giver den Z-transformerede:

$$H_1(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{0,03878z}{z^2 - 1,9369z + 0,9418} - \frac{2z^2 - 1,9369z}{z^2 - 1,9369z + 0,9418}$$

og den samlede Z-transformerede bliver:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

$$\begin{aligned} H_{ZOH}(z) &= 2 - \frac{0,03878(z-1)}{z^2 - 1,9369z + 0,9418} - \frac{(2z-1,9369)(z-1)}{z^2 - 1,9369z + 0,9418} \\ &= \frac{0,02432z - 0,01452}{z^2 - 1,9369z + 0,9418} \end{aligned}$$

Det er lettere at bruge Matlabs c2dm-funktion:

```
>> num=[.2 1];den=[1 .6 .5];
>> [numd,dend]=c2dm(num,den,.1,'zoh')
numd =
0    0.024295   -0.014593

dend =
1    -1.9369    0.94176
```

De to resultater ses at være ens på nær mindre numeriske afvigelser som er uden betydning.

b.

Man kan bruge Matlab-kommandoerne:

```
>> subplot(121)
>> hold off,step(num,den)
>> yd=dstep(numd,dend);
>> t=0:.1:20;
>> hold on,stairs(t,yd)
>> subplot(122)
>> hold off,step(num,den)
>> hold on,stairs(t,yd)
```

og resultatet kan ses nedenfor. Det højre plot er en forstørrelse af det venstre. Bemærk at de to responser stemmer overens til sampletidspunkterne.

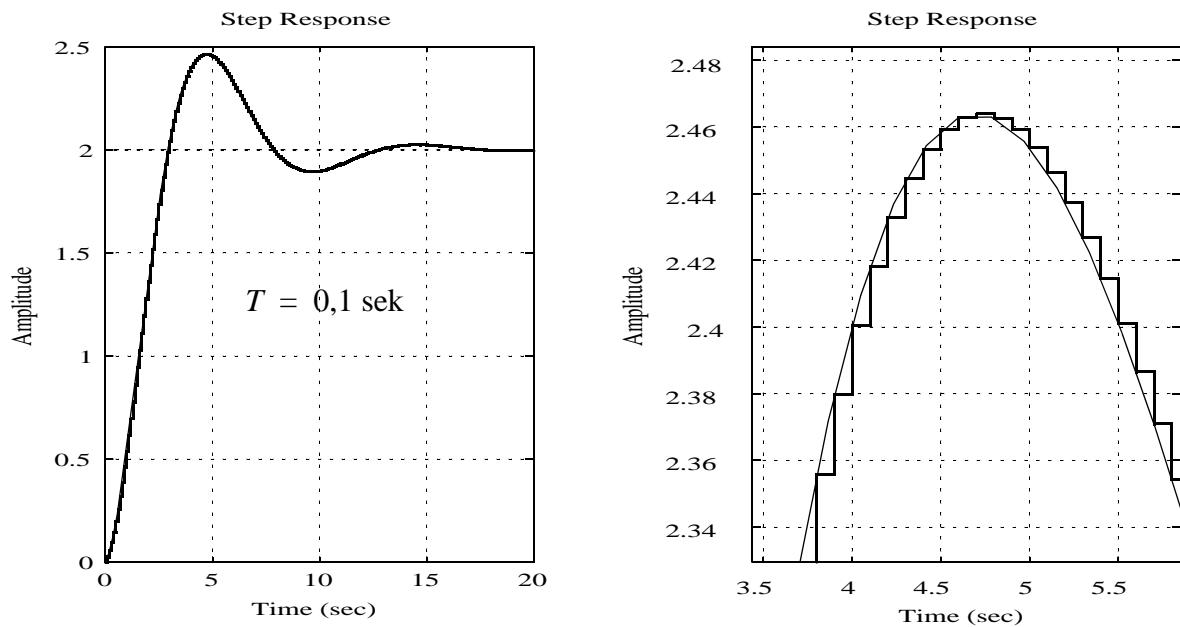
c.

Proceduren ovenfor gentages med $T = 1$ sek.

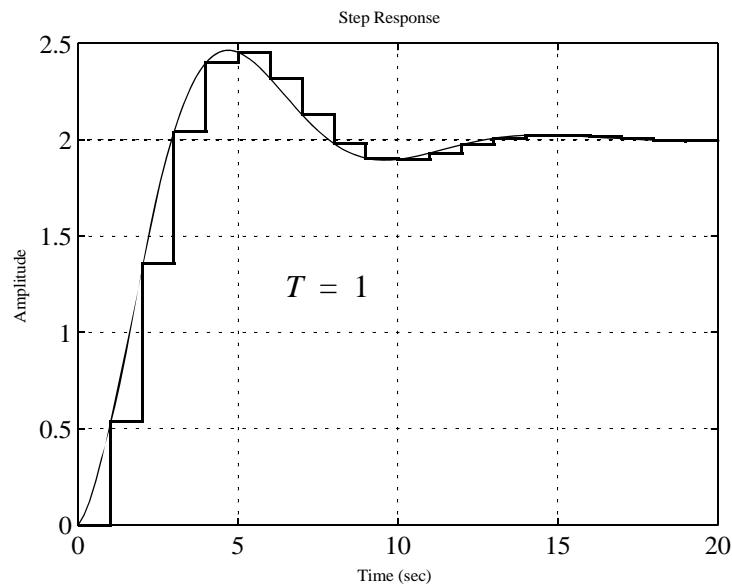
Man får nu:

$$H_{ZOH}(z) = \frac{0,5354z - 0,18597}{z^2 - 1,1881z + 0,5488}$$

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



De to responser ser nu ud som følger:



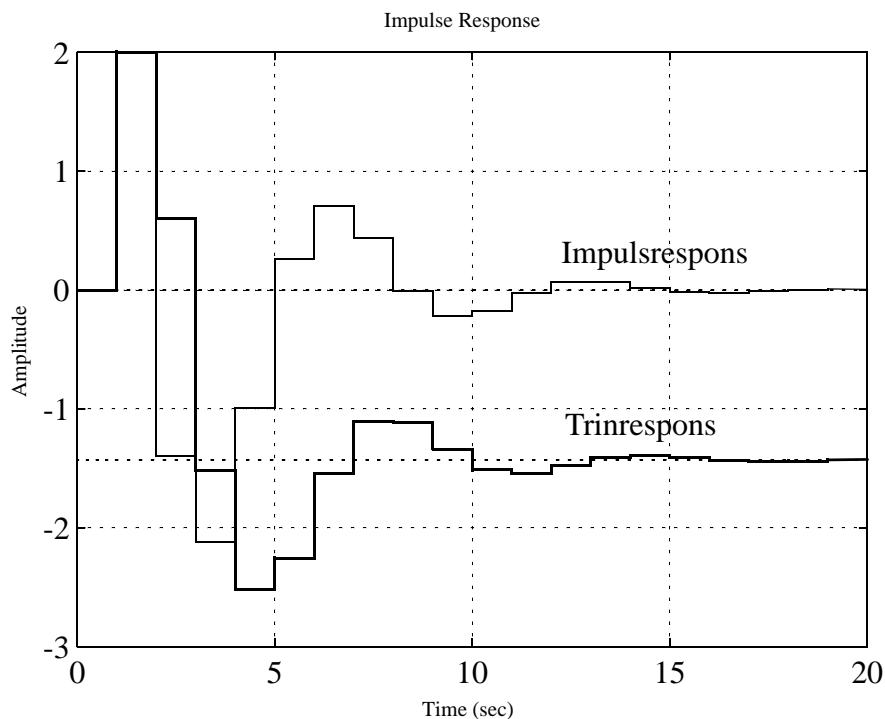
Opgave 7.5

a.

Responserne tegnes med Matlabkommandoerne:

```
>> num=[2 -3];den=[1 -.8 .5];
```

```
>> hold off,dstep(num,den,20)
>> hold on,dimpulse(num,den,20)
```



Den statiske forstærkning fås af formel 7.40:

$$K_{stat} = H(1) = -1,42$$

b.-c.

Tilsvarende plots for de øvrige b -værdier ses på næste side.

Systemet har et nulpunkt i $z = 1,5$, d.v.s. uden for enhedscirklen.

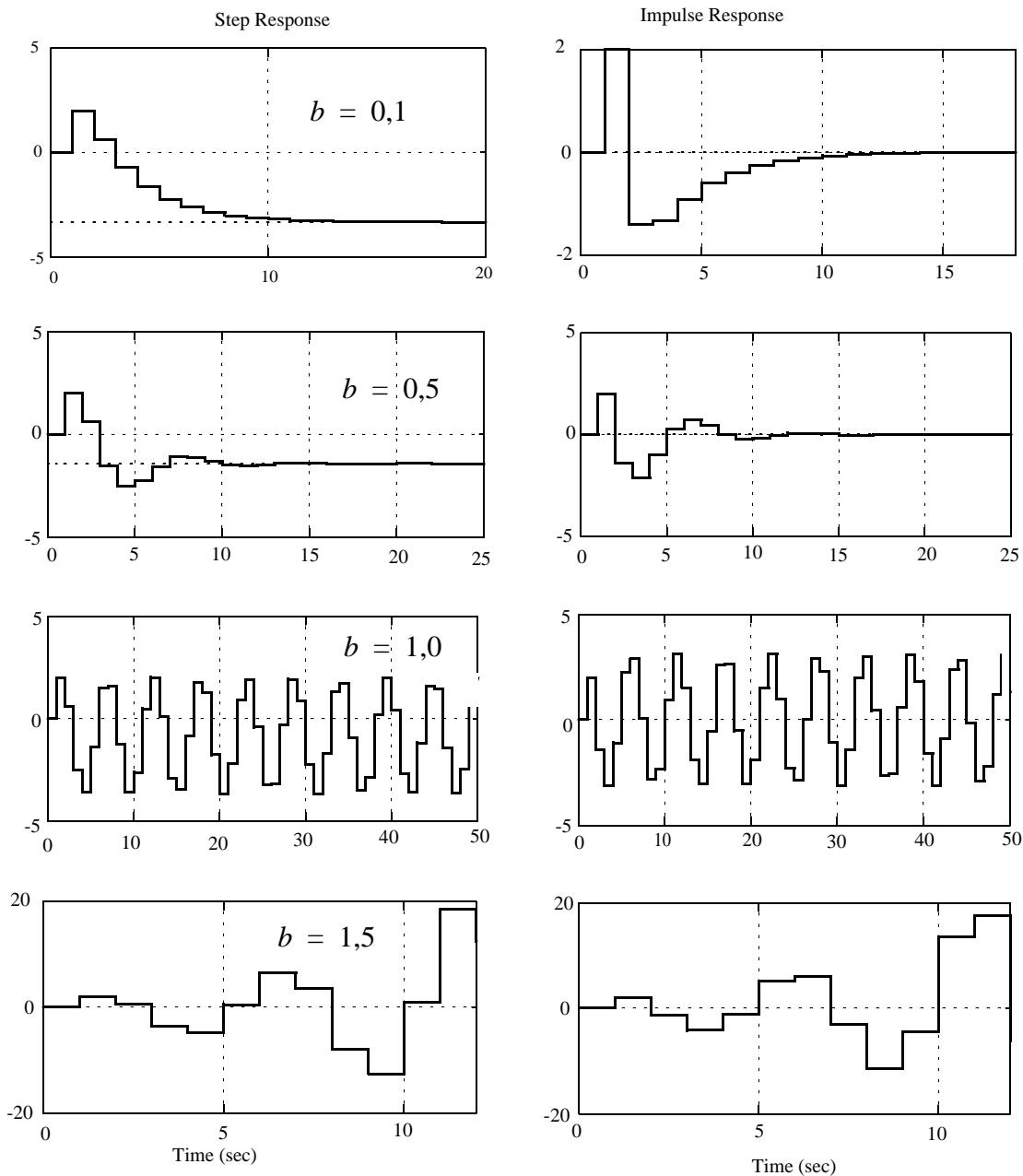
Ud fra formlerne på bogens side 388 kan man bestemme det diskrete systems poler og dermed den ækvivalente kontinuerte systems poler og øvrige data.

Resultaterne er vist i tabellen på side 128.

For $b = 0,1$ er polerne reelle, og det gælder derfor også for de ækvivalente kontinuerte poler, se formel (7.42). Tidskonstanterne kan findes af bogens side 112.

I de øvrige tilfælde er polerne komplekst konjugerede. De kontinuerte ækvivalenter kan findes af formel (7.46), og udæmpt egenfrekvens og dæmpningsforhold kan derefter bestemmes af f.eks. figur 3.8.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



For $b = 1$ ligger de diskrete poler på enhedscirklen, de kontinuerte på imaginæraksen, og systemet er altså marginalt stabilt og dæmpningsforholdet er nul.

For $b = 1,5$ ligger de diskrete poler uden for enhedscirklen, de kontinuerte poler ligger i højre halvplan, og følgelig er systemet ustabilt og dæmpningsforholdet er negativt.

Dette kan også ses af trin- og impulsresponserne.

b	Poler	Poler (kont.)	τ	ω_n	ζ
0,1	0,6449 0,1551	-0,439 -1,864	2,28 sek 0,536 sek		
0,5	$0,4 \pm j0,5831$	$-0,347 \pm j0,9651$		1,03	0,34
1	$0,4 \pm j0,9165$	$\pm j1,159$		1,159	0
1,5	$0,4 \pm j1,158$	$0,2027 \pm j1,238$		1,255	-0,161

Opgave 7.6

a.

Overføringsfunktionerne genereres med Matlab-kommandoerne:

```
>> num=[.2 1];den=[1 .6 .5 0];
>> [numd1,dend1]=c2dm(num,den,.1,'zoh')
numd1 =
0 0.001144 0.00062732 -0.00080118
dend1 =
1 -2.9369 2.8787 -0.94176
>> [numd10,dend10]=c2dm(num,den,1,'zoh')
numd10 =
0 0.22043 0.46153 0.039396
dend10 =
1 -2.1881 1.7369 -0.54881
```

b.

Nyquistfrekvenser:

$$T = 0,1 \Rightarrow \omega_N = \frac{\pi}{0,1} = 31,4 \text{ rad/sek}$$

$$T = 1 \Rightarrow \omega_N = \frac{\pi}{1} = 3,14 \text{ rad/sek}$$

Bode-plottene tegnes med kommandoerne:

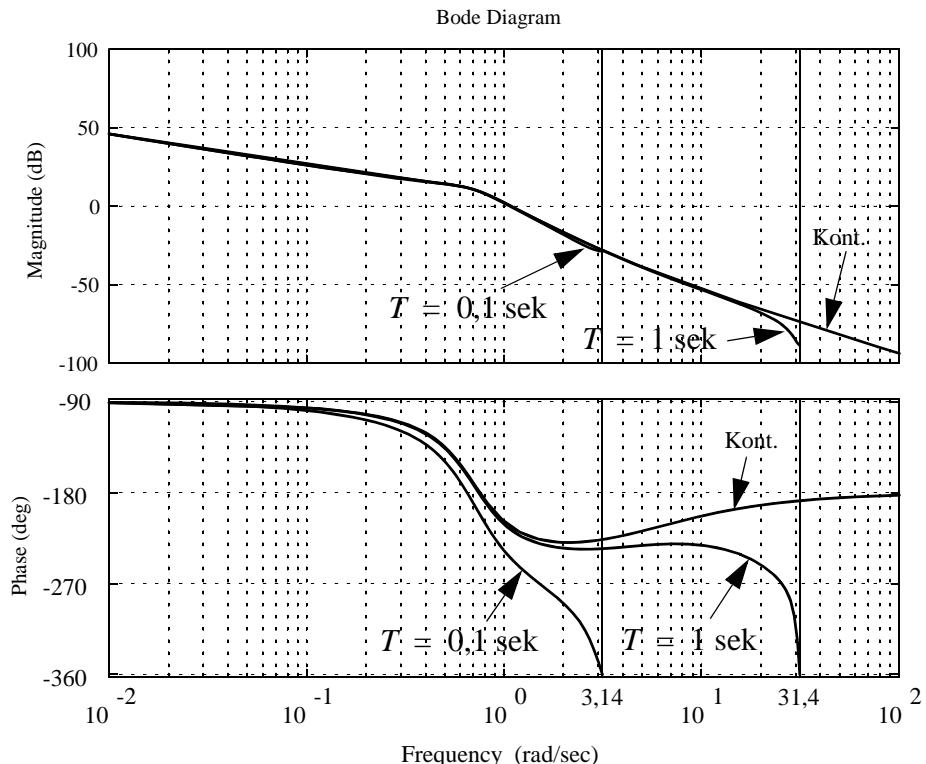
```
>> bode(num,den)
>> hold on, dbode(numd1,dend1,.1); hold on, dbode(numd10,dend10,1)
```

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

og resultatet ses nedenfor:



Den største negative fasedrejning bliver:

$$\text{Kontinuert: } \varphi_{min} = -229^\circ$$

$$T = 0,1 \text{ sek: } \varphi_{min} = -360^\circ$$

$$T = 1 \text{ sek: } \varphi_{min} = -360^\circ$$

Opgave 7.7

a.

Man kan bruge Matlab-kommandoerne:

```
>> num=[.5 1];den=[1 .6 .8 .1];
>> damp(den)
Eigenvalue          Damping   Freq. (rad/s)
-1.36e-001          1.00e+000  1.36e-001
-2.32e-001 + 8.27e-001i  2.70e-001  8.58e-001
-2.32e-001 - 8.27e-001i  2.70e-001  8.58e-001
```

Bemærk at for reelle poler anføres dæmpningsforholdet til 1. Det giver ingen mening.

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger

Systemets tidskonstant er $\tau = -\frac{1}{-0,136} = 7,35$ sek.

Systemets nulpunkt er $s = -2$.

b.

Her kan man bruge:

```
>> [numd,dend]=c2dm(num,den,1,'zoh');
>> sysd=tf(numd,dend,1)
```

Transfer function:

$$\frac{0.3324 z^2 + 0.4265 z - 0.05548}{z^3 - 1.947 z^2 + 1.566 z - 0.5488}$$

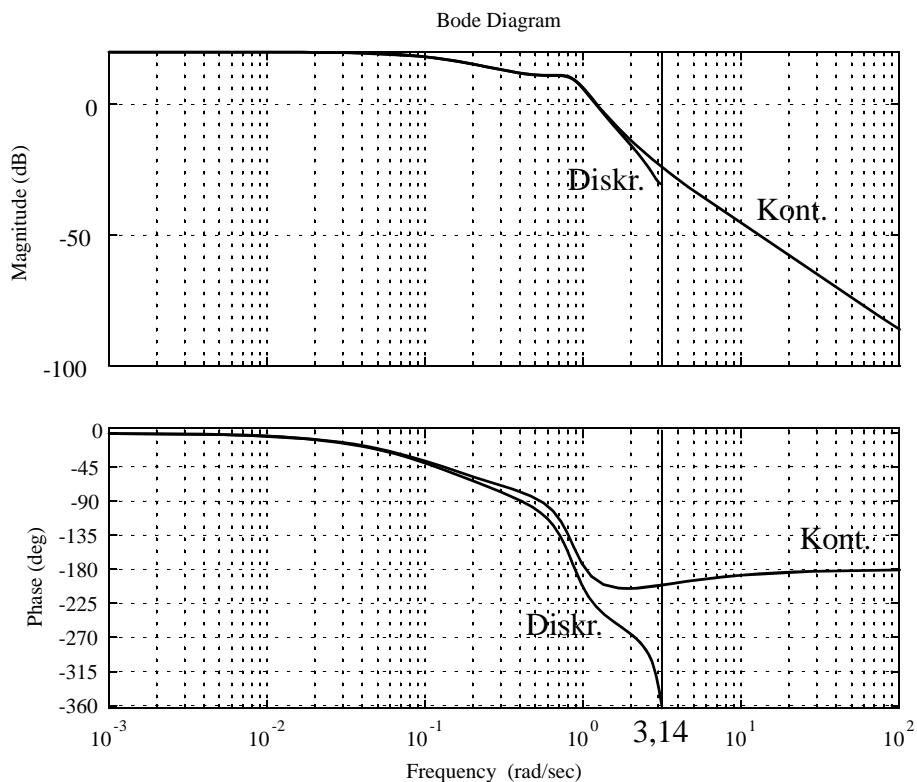
Nyquistfrekvensen bliver $\omega_N = \frac{\pi}{1} = 3,14$ rad/sek.

c.

Kommandoerne

```
>> bode(num,den)
>> hold on, dbode(numd,dend,1)
```

giver Bodeplottene nedenfor:



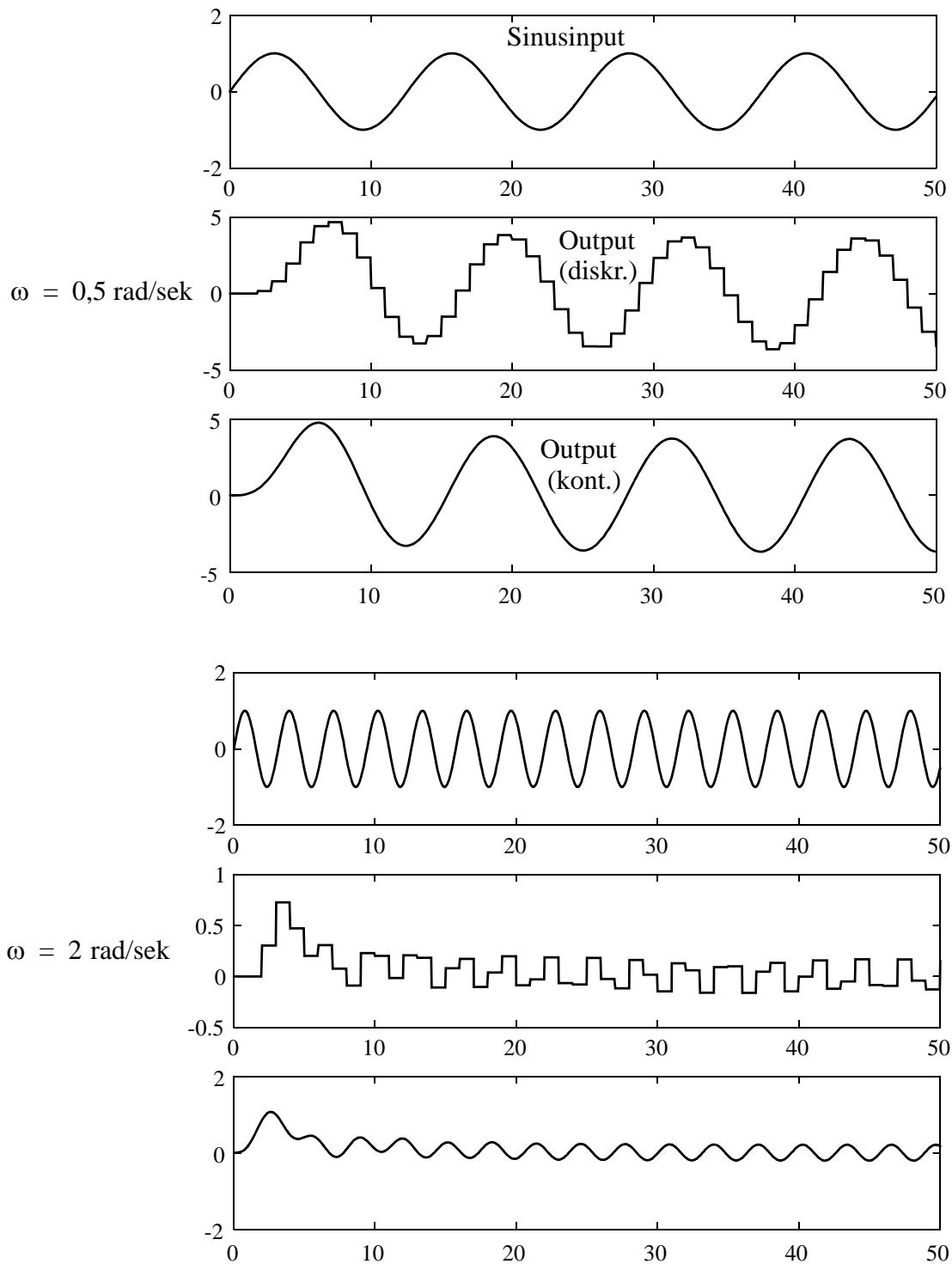
ØRSTED • DTU AUTOMATION

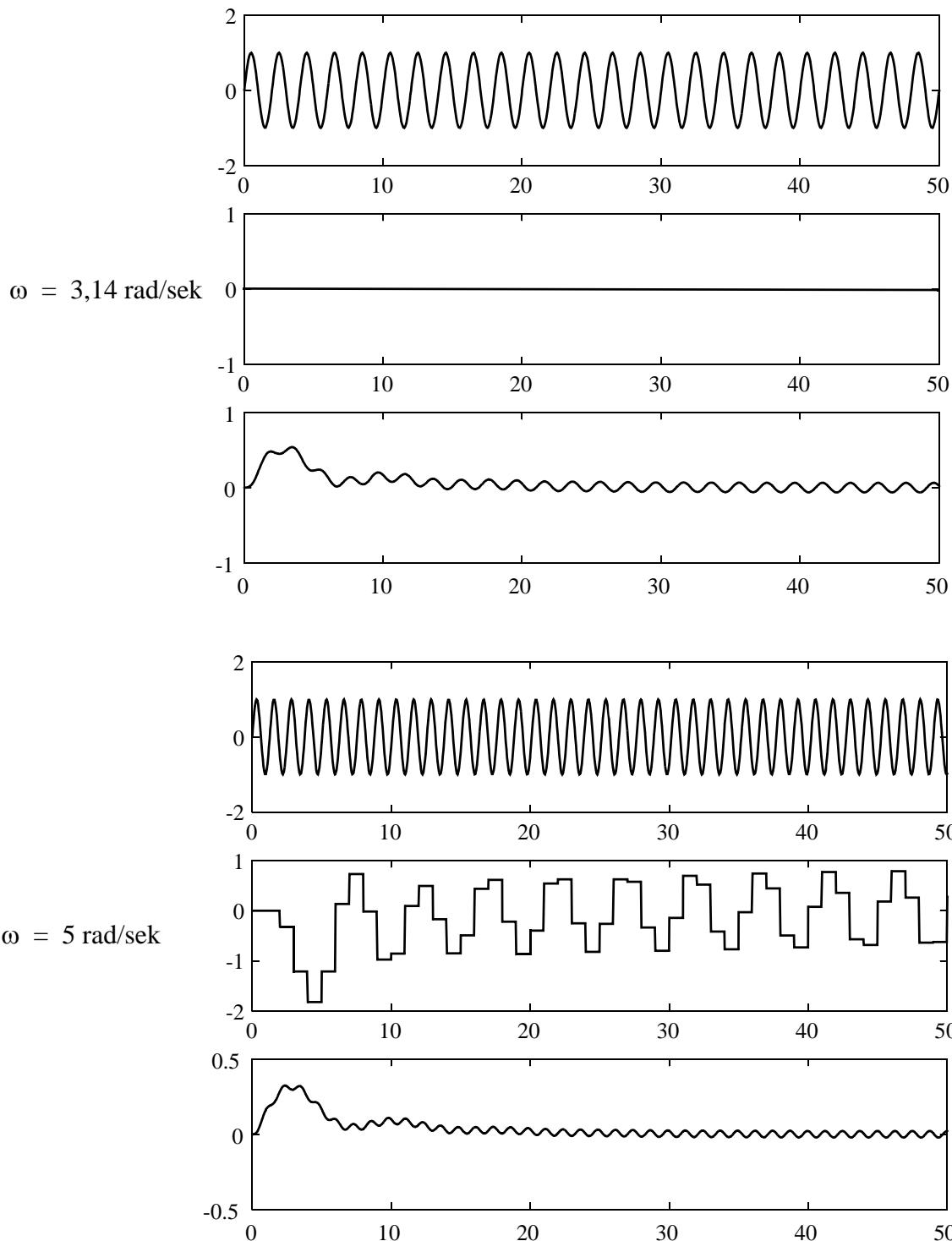
Reguleringssteknik 4.udgave

Opgaveløsninger

d.

Resultatet af simuleringerne ses på de følgende plots.





For $\omega < \omega_N$ stemmer begge systemers amplitudeforhold og fasedrejning overens med Bodeplottet, omend det kan være lidt vanskeligt at afgøre for det diskrete system ved $\omega = 2 \text{ rad/sek}$.

For $\omega = \omega_N$ giver simuleringen ikke noget meningsfuldt resultat.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
Reguleringsteknik 4.udgave
Opgaveløsninger

For $\omega > \omega_N$ får det diskrete systems output tydeligvis en frekvens som ikke længere er lig inputtets frekvens. Se også bogens figur 7.11.

Opgave 7.8

a.-b.

Overføringsfunktionerne $H_{ZOH}(z)$, $H_T(z)$ og $H_{TM}(z)$ findes med Matlab-kommandoerne:

```
>> num=[.5 1];den=[1 .6 .8 .1];
>> [numz,denz]=c2dm(num,den,1,'zoh')
>> [numt,dent]=c2dm(num,den,1,'tustin')
>> numtm=2*deconv(numt,[1 1])
>> sysz=tf(numz,denz,1)
Transfer function:
0.3324 z^2 + 0.4265 z - 0.05548
-----
z^3 - 1.947 z^2 + 1.566 z - 0.5488
>> syst=tf(numt,dent,1)
Transfer function:
0.1653 z^3 + 0.3306 z^2 + 0.1653 z
-----
z^3 - 2.025 z^2 + 1.678 z - 0.5868
>> sysm=tf(numtm,dent,1)
Transfer function:
0.3306 z^2 + 0.3306 z
-----
z^3 - 2.025 z^2 + 1.678 z - 0.5868
```

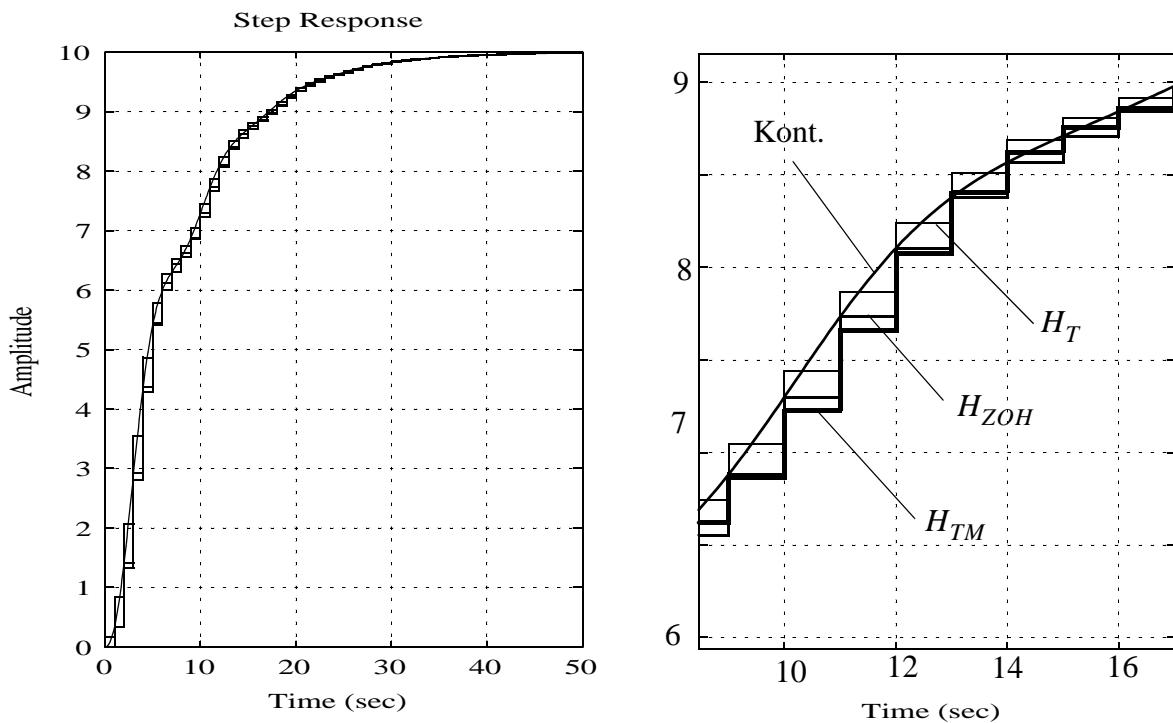
Bemærk at $H_T(z)$ og $H_{TM}(z)$ har samme nævner, men at $H_T(z)$ har to nulpunkter i $z = -1$ hvoimod $H_{TM}(z)$ kun har et nulpunkt i $z = -1$.

c.

De fire trinresponser kan plottes med kommandoerne:

```
>> dstep(numz,denz,50)
>> hold on,dstep(numt,dent,50)
>> hold on,dstep(numtm,dent,50)
>> t=0:.1:50;size(t)
>> y=step(num,den,t);
```

Resultatet se nedenfor.



På det forstørrede udsnit til højre ses at responset for $H_{ZOH}(z)$ stemmer overens med det kontinuerte respons til sampletidspunkterne. For $H_T(z)$ og $H_{TM}(z)$ kan konstateres de samme forhold som det ses på bogens figurer 7.22 og 7.23.

d.

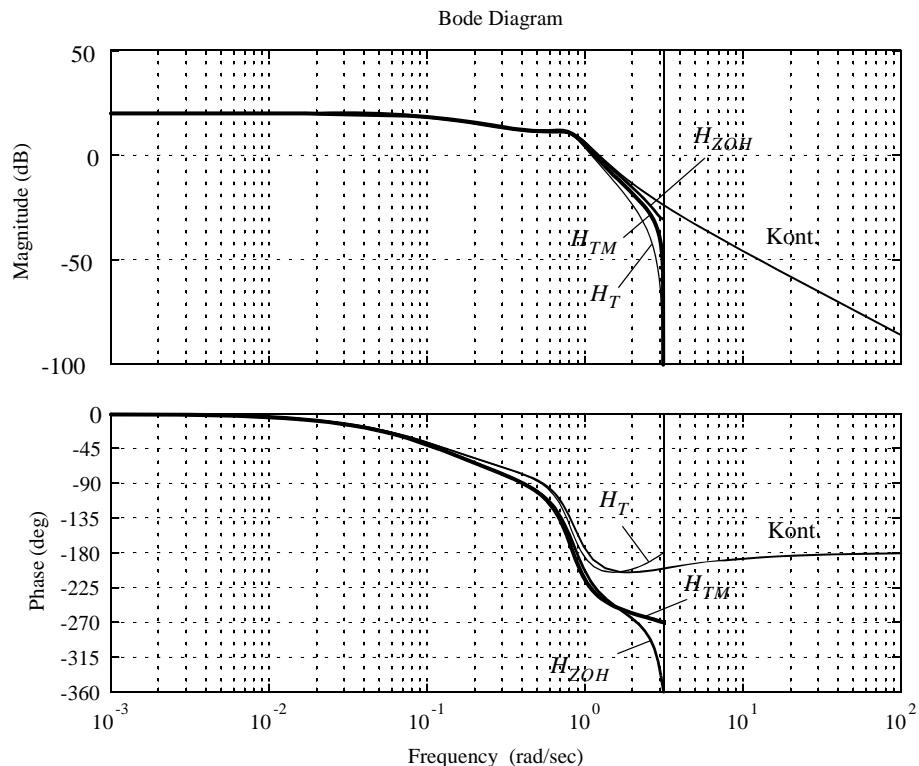
Bodeplottene tennes med:

```
>> dbode(numz,denz,1)
>> hold on,dbode(numt,dent,1)
>> hold on,dbode(numtm,dent,1)
>> hold on,bode(num,den)
```

og resultatet bliver som vist nedenfor.

For fasedrejningen ses det - ligesom på bogens figur 7.24 - at $H_T(z)$ ligger nærmest på det kontinuerte systems fasedrejning. Både $H_{ZOH}(z)$ og $H_{TM}(z)$ har væsentlig større fasedrejning ved høje frekvenser, d.v.s. for frekvenser større end ca. $0,3\omega_N$.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



Opgave 7.9

a.

Man kan bruge Matlab-kommandoerne:

```
>> num=.1;den=[.4 .8 1 0];
>> [numz,denz]=c2dm(num,den,.5,'zoh')
numz =
0  0.004012  0.012325  0.0024258
denz =
1  -1.9926    1.3605   -0.36788
>> sysz=tf(numz,denz,.5)
Transfer function:
0.004012 z^2 + 0.01232 z + 0.002426
-----
z^3 - 1.993 z^2 + 1.361 z - 0.3679
```

b.

Her bruges:

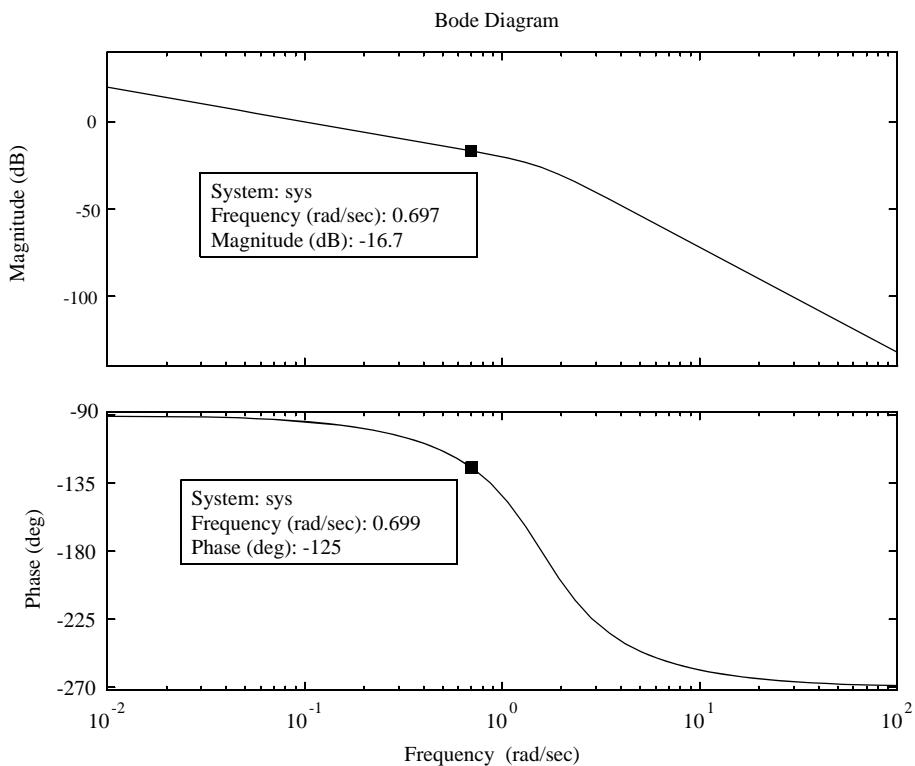
```
>>bode(num,den)
```

og resultatet bliver:

ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger



Søgning langs kurverne viser at fasemarginen bliver 55° hvis forstærkningen øges 16,7 dB, d.v.s. for $K = 6,84$

c.

Det diskrete systems Bodeplot med denne forstærkning kan tegnes med:

```
>>dbode(6.84*numz,denz,.5)
```

Plottet ses på næste side.

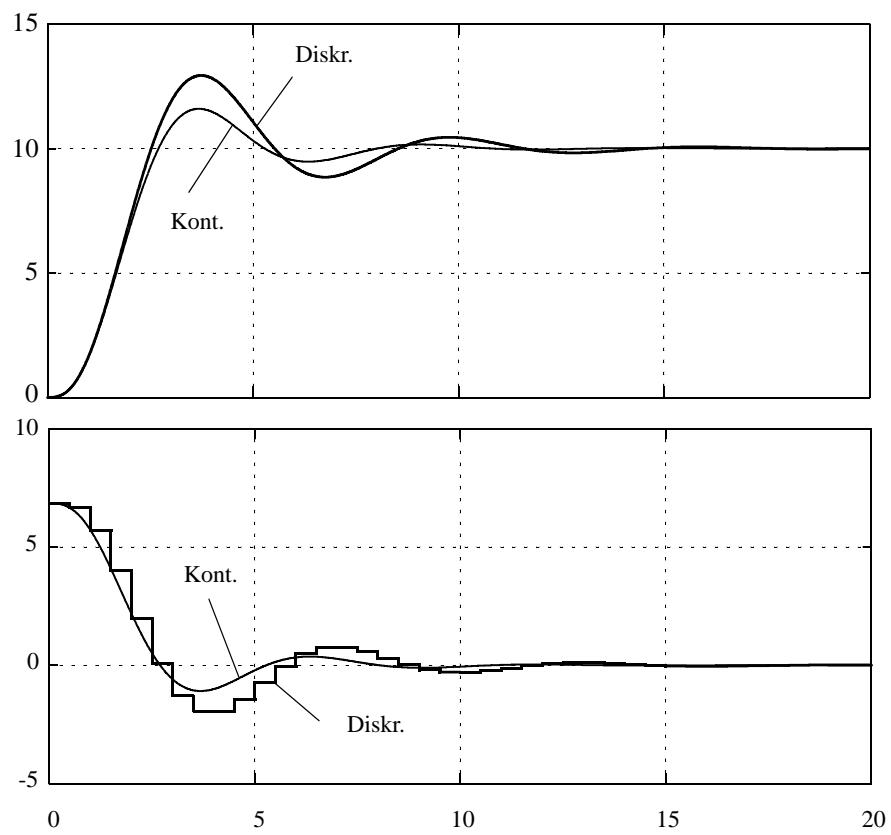
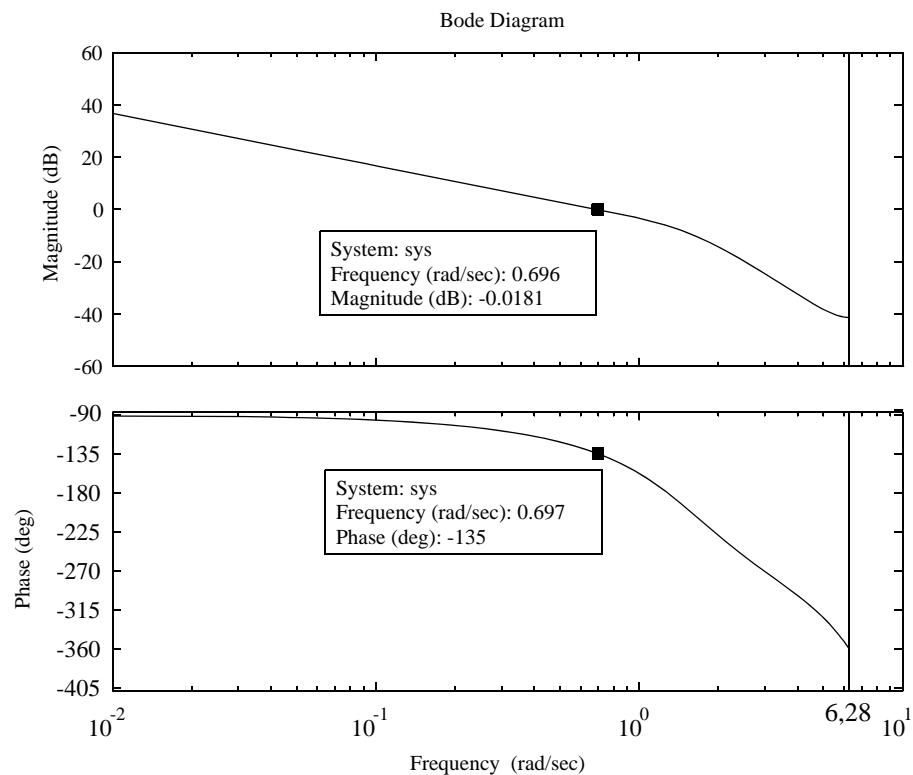
Ved søgning langs kurverne kan man konstatere at fasemarginen for det hybride system er reduceret til 45° . Dette skyldes naturligvis at den diskrete overføringsfunktion giver større fasedrehning end den kontinuerte overføringsfunktion som var udgangspunkt for regulatorordimensioneringen.

d.

Trinresponserne ses på plottet nedenfor. Foruden outputtet er også vist styresignalet, d.v.s. det signal som er input til reguleringsobjektet.

Man kan se at det diskrete system er lidt mere oscillatorisk end det kontinuerte, hvilket man også kunne forvente eftersom fasemarginen er mindre for det diskrete system.

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger



ØRSTED • DTU AUTOMATION

Reguleringsteknik 4. udgave

Opgaveløsninger**Opgave 7.10**

a.

For fremkoblingsgrenen han man finde de diskrete overføringsfunktioner med kommandoerne:

```
>> num=1;den=[.4 .8 1 0];
>> [numz,denz]=c2dm(num,den,.5,'zoh')
>> [numt,dent]=c2dm(num,den,.5,'tustin');
```

```
>> sysz=tf(numz,denz)
Transfer function:
0.04012 s^2 + 0.1232 s + 0.02426
-----  
s^3 - 1.993 s^2 + 1.361 s - 0.3679
```

```
>> syst=tf(numt,dent)
Transfer function:
0.02358 s^3 + 0.07075 s^2 + 0.07075 s + 0.02358
-----  
s^3 - 2.019 s^2 + 1.415 s - 0.3962
```

b.

Lukket-sløjfesystemernes overføringsfunktioner kan findes med:

```
>> [nlz,dlz]=feedback(7*numz,denz,.1,1);
>> [nlt,dlt]=feedback(7*numt,dent,.1,1);
```

```
>> syslz=tf(nlz,dlz,.5)
Transfer function:
0.2808 z^2 + 0.8627 z + 0.1698
-----  
z^3 - 1.965 z^2 + 1.447 z - 0.3509
```

```
>> syslt=tf(nlt,dlt,.5)
Transfer function:
0.1651 z^3 + 0.4953 z^2 + 0.4953 z + 0.1651
-----  
1.017 z^3 - 1.969 z^2 + 1.465 z - 0.3797
```

ØRSTED • DTU AUTOMATION
 Reguleringsteknik 4.udgave
 Opgaveløsninger

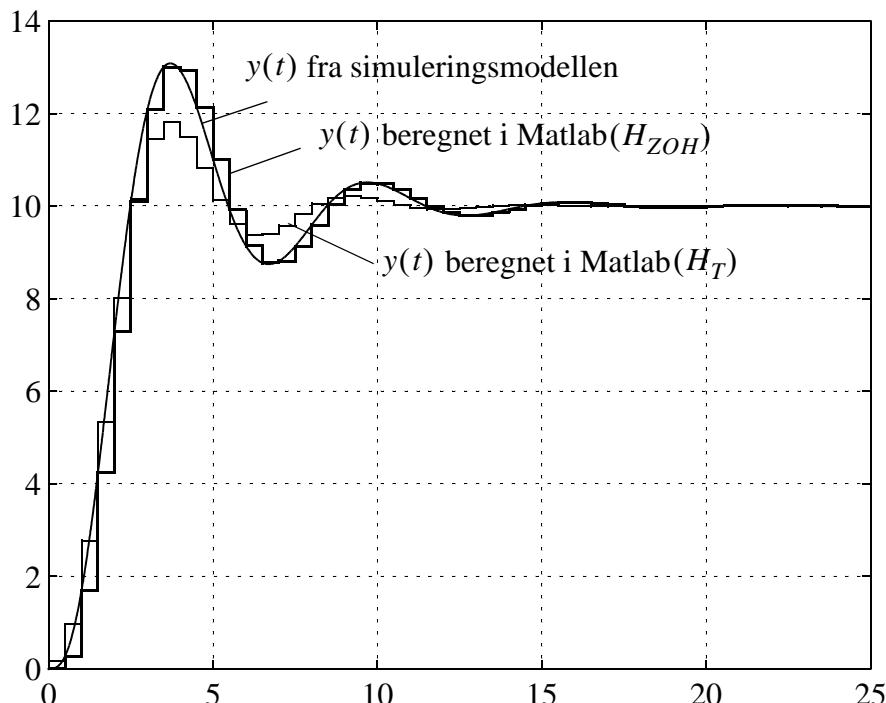
c.

Trinresponserne kan beregnes og plottes med kommandoerne:

```
>> tt=0:.5:25;
>> yz=dstep(nlz,dlz,51);
>> yt=dstep(nlt,dlt,51);
>> stairs(tt,yz)
>> hold on,stairs(tt,yt)
>> hold on,plot(tout,y),grid on
```

Den sidste plot-kommando plotter simuleringsdata fra Simulinkmodellen. Simuleringsmodellens tid hedder tout.

Plottet ses nedenfor.



De to responser der er beregnet i Matlab er resultatet af beregninger på diskrete overføringsfunktioner (`syslz` og `syslt`), og derfor fremtræder de to responser som trappekurver. Outputtet fra simuleringsmodellen er derimod output fra en kontinuert overføringsfunktion og er derfor en funktion af kontinuert tid.

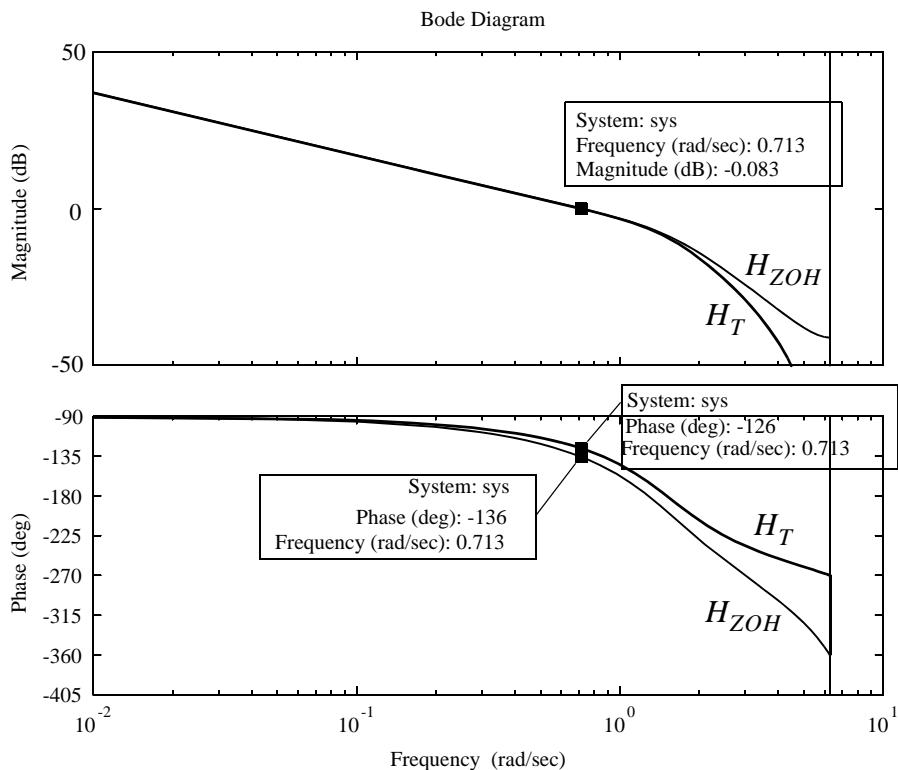
Det ses iøvrigt at simuleringsmodellens output stemmer præcist overens med outputtet fra overføringsfunktionen $H_{ZOH}(z)$ til samletidspunkterne. Outputtet fra $H_T(z)$ afviger noget fra de to andre, hvilket også måtte forventes eftersom Tustin-overføringsfunktionen jo er en tilnærrelse til den korrekte diskrete overføringsfunktion $H_{ZOH}(z)$.

d.

De to åben-sløjfe Bodeplots tegnes med:

```
>>dbode(7*.1*numz,denz,.5)
>>hold on, dbode(7*.1*numt,dent,.5)
```

og resultatet bliver:



De to overføringsfunktioner har praktisk talt samme krydsfrekvens, $\omega_c \approx 0,713$ rad/sek. Da $H_T(z)$ har den mindste negative fasedrejning ved høje frekvenser, får den også den største fasemargin, 54° mod 44° for $H_{ZOH}(z)$. Det stemmer med resultaterne fra lukket-sløjfe trinresponserne.