Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

Kursusuge 4

Plan

- Egenskaber i Laplace domæne
  - Statisk gain, krydsfrekvens og tidskonstant
- Poler og nulpunkter i s-plan
  - S-plan, pol og nulpunkt placering
- Tidsanalyse
  - 2. orden systemer
- Øvelse fortsat fra sidst

DTU Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering

Egenskaber i laplace-domænet
Statisk forstærkning (gain)

$$H(s) = \frac{h_0}{s}$$

$$H(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow X(s)$$

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

$$X(s) = \frac{h_0}{s} \, \frac{b}{a} \, \frac{a}{s+a}$$

$$\lim_{t \to \infty} (1 - e^{-at}) = 1$$

$$X(t) = h_0 \frac{b}{a} \left(1 - e^{-at}\right)$$

$$\frac{b}{a} = K_{stat} = \text{DC gain af G}$$

$$h_0 = \text{DC value of input}$$

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$Af(t)$	$AF(s)$

Statisk forstærkning (steady state gain) for overføringsfunktion:

$$K_{stat} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

- gælder kun stabile systemer

Egenskaber i laplace-domænet
Knækfrekvens – tidskonstant (et led)

$$H(s) = \frac{h_0}{s}$$

$$H(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow X(s)$$

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

$$X(s) = \frac{h_0}{s}\,\frac{b}{a}\,\frac{a}{s+a}$$

$$X(t) = h_0 \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$Af(t)$	$AF(s)$

$$G(s) = K_{stat}\,\frac{\omega_n}{s+\omega_n}$$

ω_n = knækfrekvens [rad/sek]

$$G(s) = K_{stat}\,\frac{1}{\frac{1}{\omega_n}s+1}$$

$$\frac{1}{\omega_n} = \tau = \text{tidskonstant}$$ [sek]

$$G(s) = K_{stat}\,\frac{1}{\tau s+1}$$

Egenskaber i laplace-domænet
Tidskonstant

$$M(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow X(s)$$

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

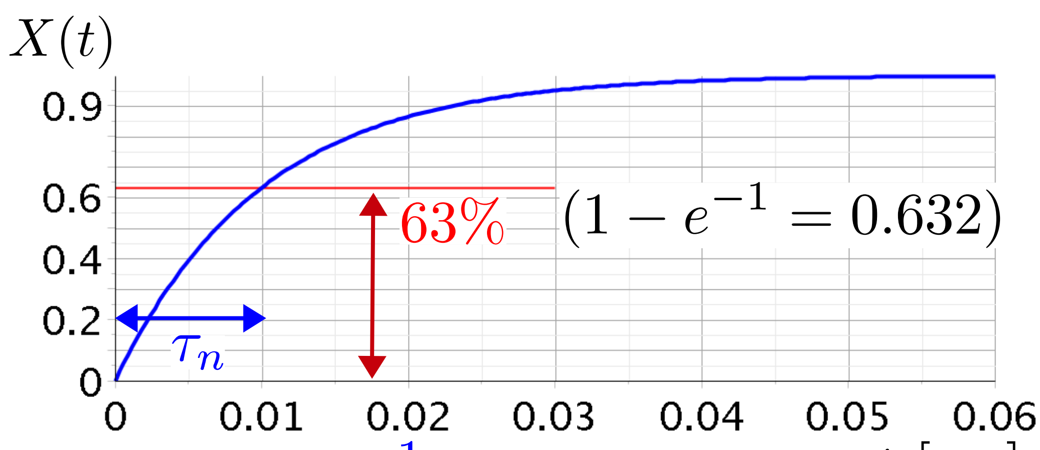
$$X(s) = \frac{h_0}{s} K_{stat} \frac{\omega_n}{s+\omega_n}$$

$$X(t) = h_0 K_{stat} \left(1 - e^{-\omega_n t}\right)$$

$$e^{-\omega_n t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$Af(t)$	$AF(s)$

$$t = \tau \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-1} = 0.3679$$



$$(1 - e^{-1} = 0.632)$$

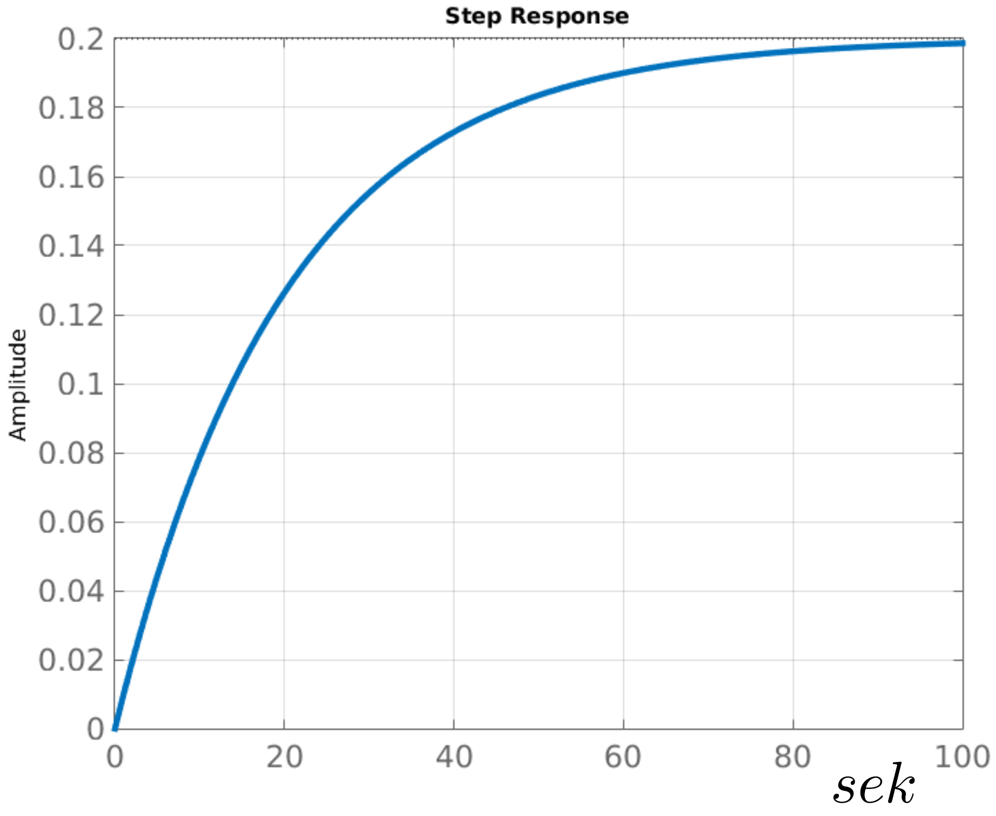
tidskonstant $\tau = \frac{1}{a}$

$(h_0 = 1,\ K_{stat} = 1,\ \omega_n = 100)$

Laplacedomæne
Kontrolspørgsmål

1) for overføringsfunktion $G(s) = \dfrac{100}{3s+30}$
   hvad er
   - a) statisk forstærkning?
   - b) knækfrekvens?

2) Plot til højre viser output
   for et enhedsstep input til
   en overføringsfunktion, som
   antages kun at have en pol.
   Hvad er:
   - a) Statisk gain?
   - b) knækfrekvens?
   - c) overføringsfunktionen?



Laplacedomæne Kontrolspørgsmål

1) for overføringsfunktion $G(s) = \dfrac{150}{3s+30}$
hvad er

a) statisk forstærkning?

$$K_{stat} = \lim_{s \to 0} \frac{150}{3s+30}$$

$$K_{stat} = 5$$

b) knækfrekvens?

$$G(s) = K_{stat}\,\frac{\omega_n}{s+\omega_n}$$

$\omega_n = \text{knækfrekvens}$

$$G(s) = \frac{15}{3s+30} = 5\,\frac{10}{s+10}$$

$$\omega_n = 10\ \text{rad/sek}$$

Laplacedomæne Kontrolspørgsmål

$$h_0 = 1$$

2) Plot til højre viser output for et enhedsstep input til en overføringsfunktion, som antages kun at have en pol. Hvad er:

$$G(s) = K_{stat}\frac{\omega_n}{s+\omega_n}$$

a) Statisk gain?

$$K_{stat} = \frac{y_{stat}}{h_0} = 0.2$$

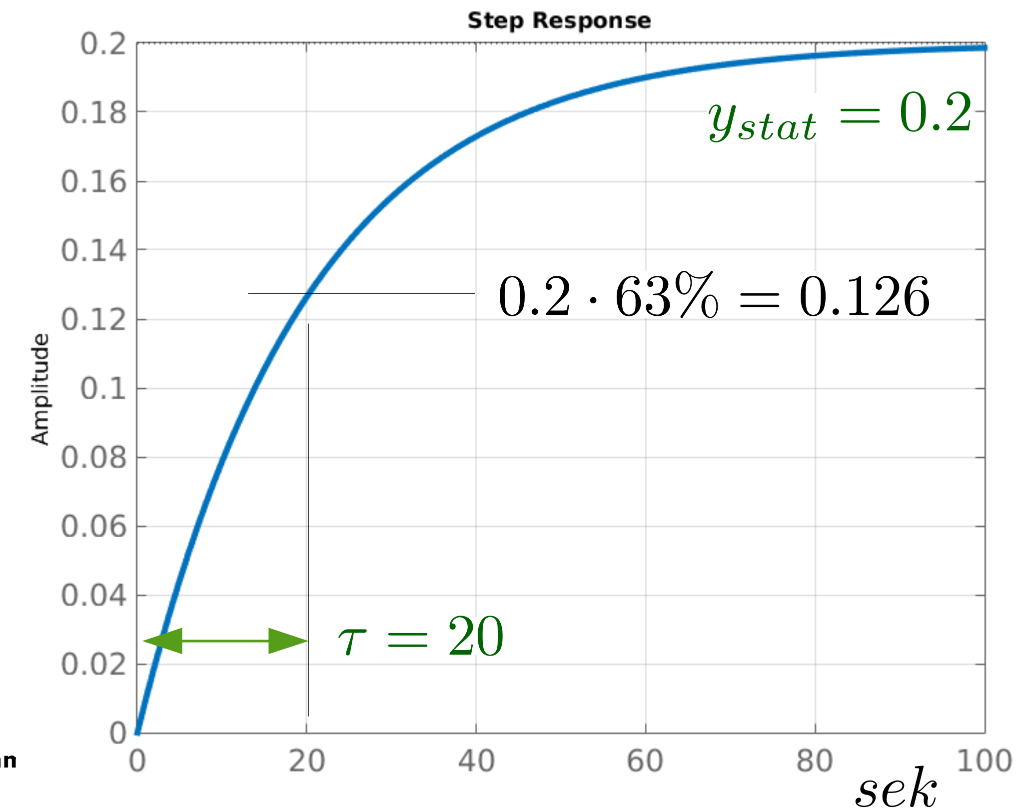
b) knækfrekvens?

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega_n = 0.05 \text{ rad/s}$$

c) overføringsfunktionen?

$$G(s) = 0.2\frac{0.05}{s+0.05}$$

$$G(s) = 0.2\frac{1}{20s+1}$$



Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

Kursusuge 4

Plan

- Egenskaber i Laplace domæne
  - Statisk gain, krydsfrekvens og tidskonstant
- Poler og nulpunkter i s-plan
  - S-plan, pol og nulpunkt placering
- Tidsanalyse
  - 2. orden systemer

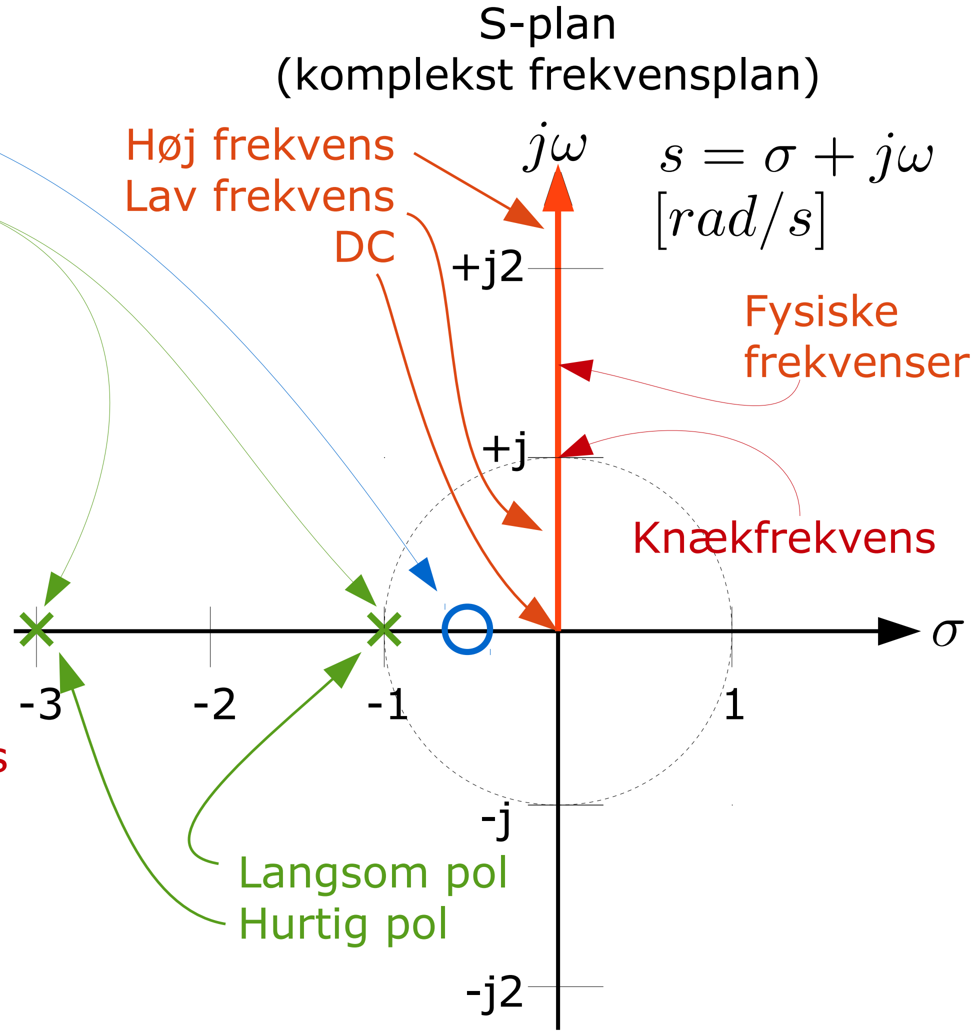
DTU Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering

Poler og nulpunkter
s-plan

$$G(s) = \frac{s+0.5}{(s+1)(s+3)}$$

× pol: $|G(s)| = \infty$

○ nulpunkt: $|G(s)| = 0$



$$G(s) = \frac{\omega_0}{(s+\omega_0)}$$

knækfrekvens

$$G(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}$$

tidskonstant

Poler (1. orden)

konsekvens for y(t)

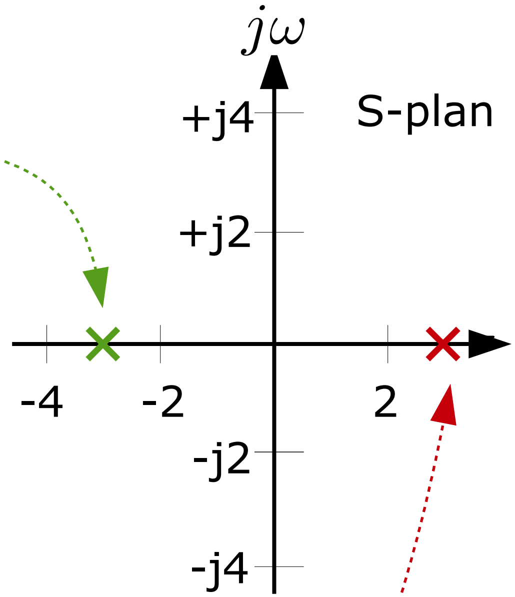
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

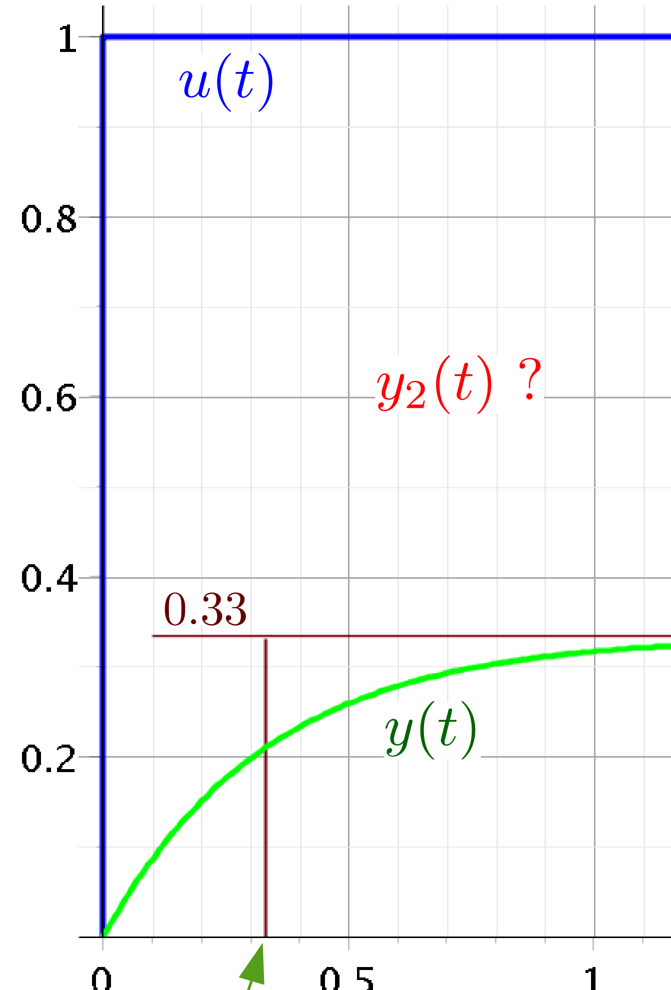
F.eks. $U(s) = \text{step} = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = U(s)\frac{1}{s+3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{3}{s(s+3)}$$

$$y(t) = 0.33(1 - e^{-3t})$$





Hvad så med

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-3}$$

$y_2(t)$?

$\tau = \frac{1}{3}$

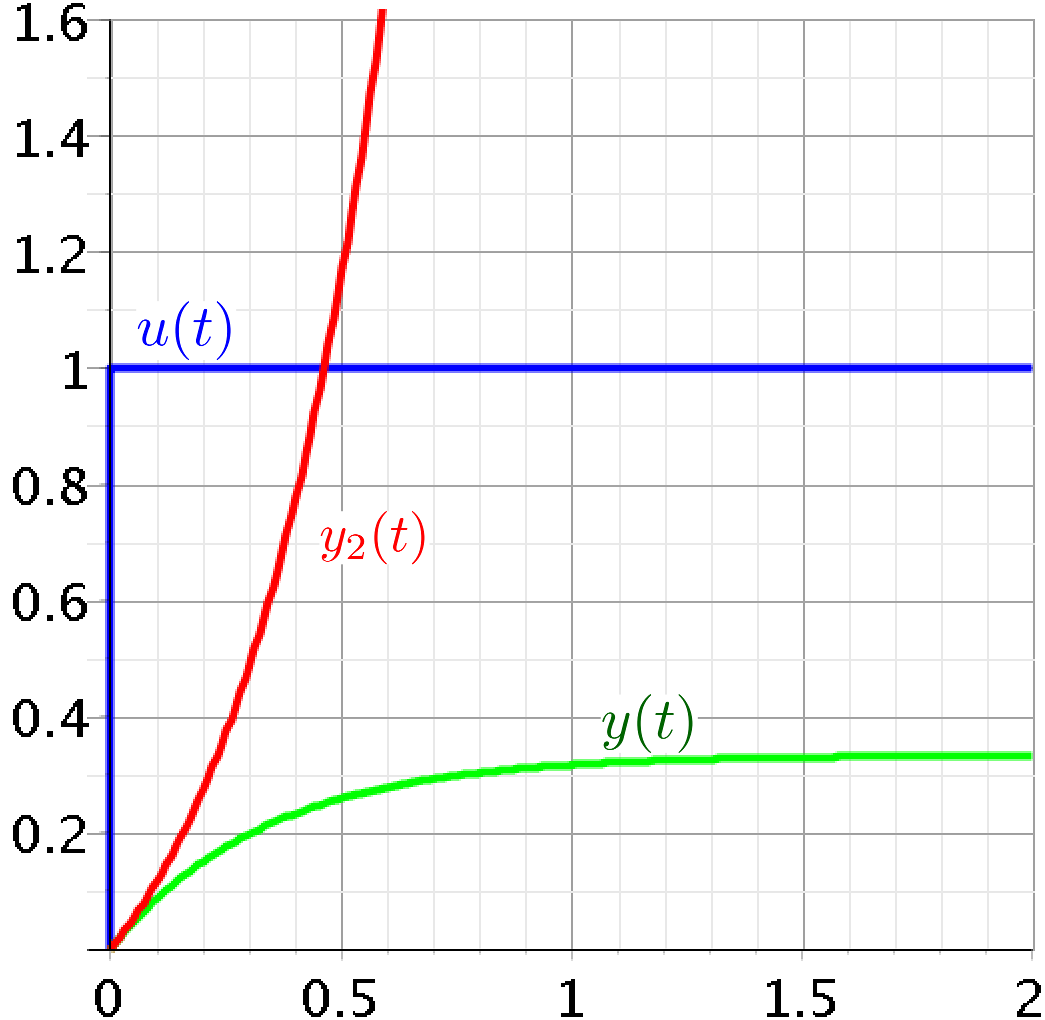
Poler i højre halvplan

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-3}$$

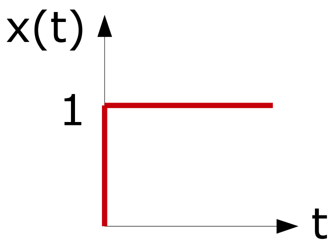
$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$y_2(t) = 0.33(1 - e^{+3t})$$



Poler i højre halvplan betyder at overførinsfunktion er ustabil.
ustabil: output bliver aldrig stabilt for stabilt input
(på nær 0-input)

2. orden med reelle poler – step respons



$$x(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y(s)$$

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$x(s) \rightarrow \boxed{G_1(s)} \rightarrow \boxed{G_2(s)} \rightarrow y(s)$$

$$G_1(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)} \qquad G_2(s) = \frac{1}{(\tau_2 s + 1)}$$

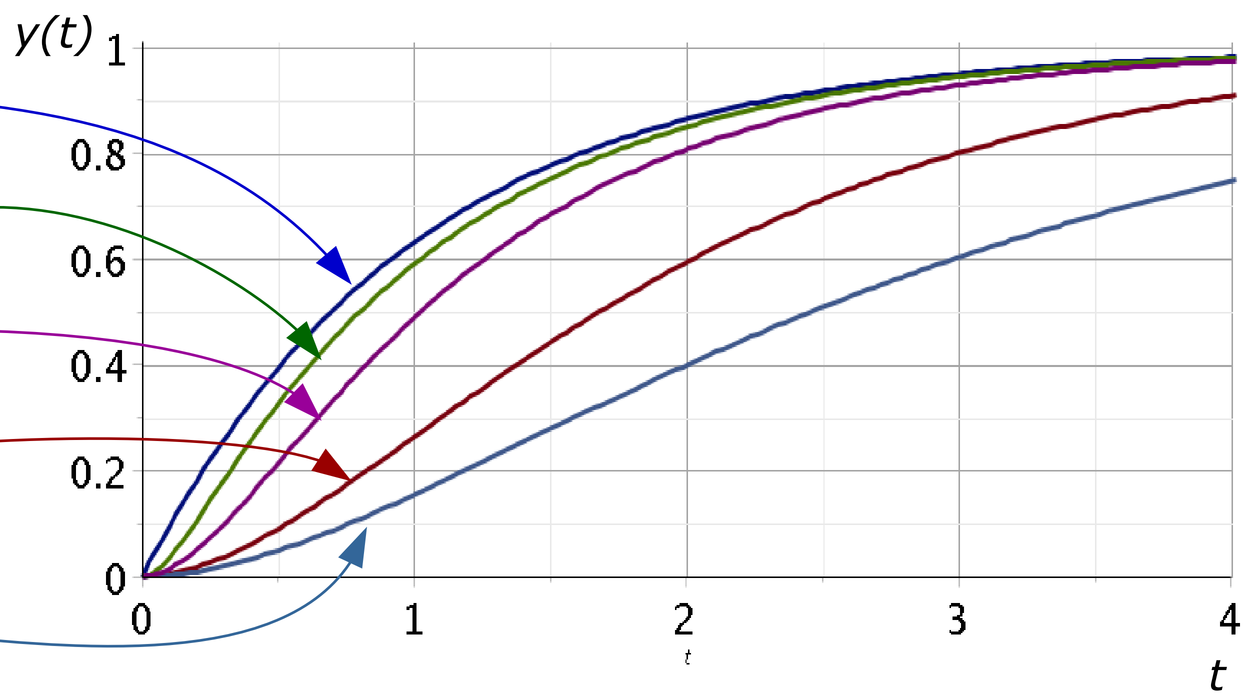
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G(s) = \frac{1}{(0.1s+1)(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(0.3s+1)(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

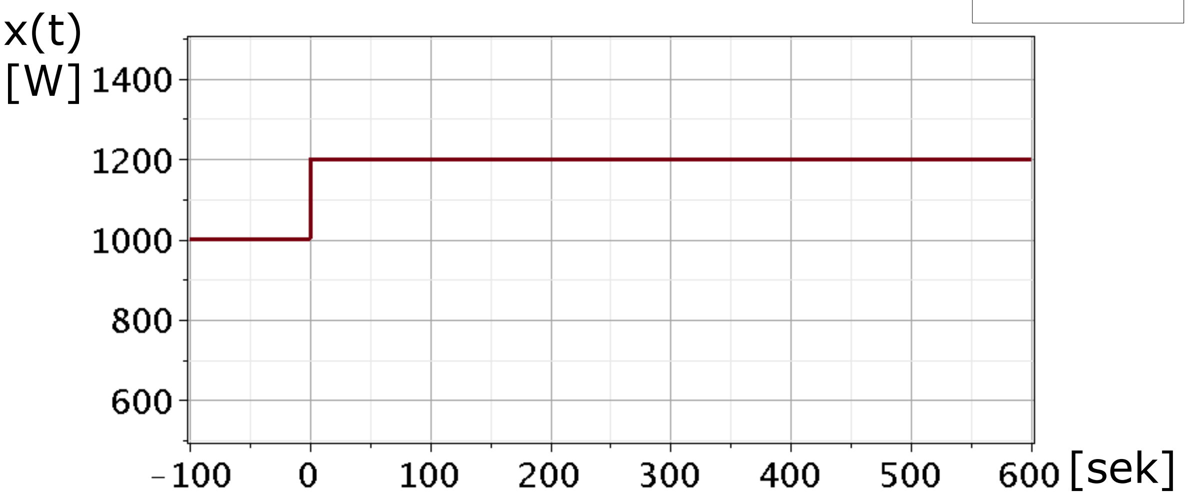
$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(s+1)}$$

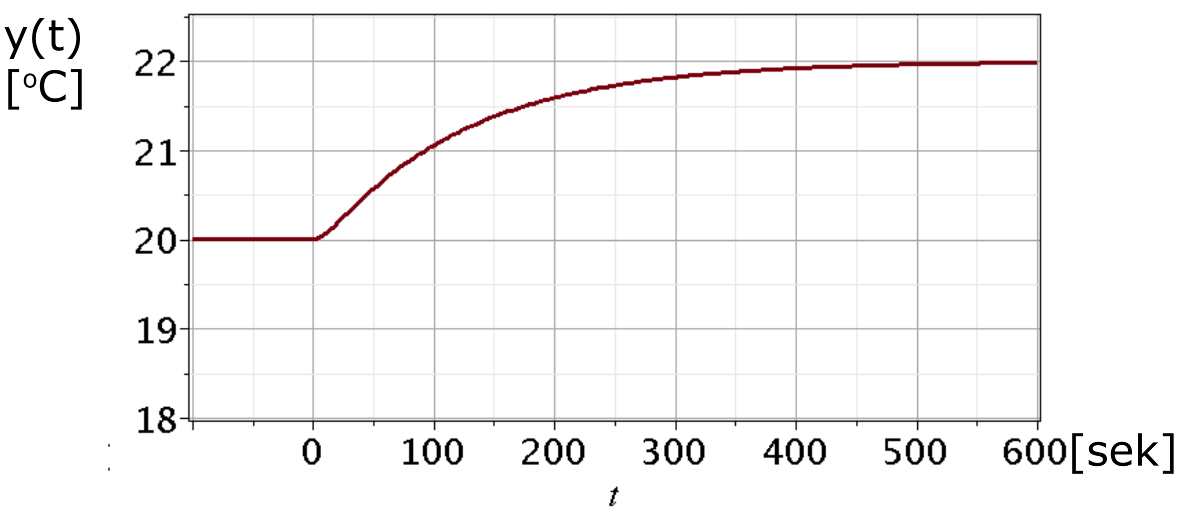


Modellering

Radiator effekt [W] | Lokale med radiator | Rumtemperatur [^{o}C]

$$x(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(s)$$





Tegn et blokdiagram, hvor arbejdspunkt er 1000 W og 20^{o}C ?

Hvad er statisk gain:

$$G(0) = ?$$

Hvad er:

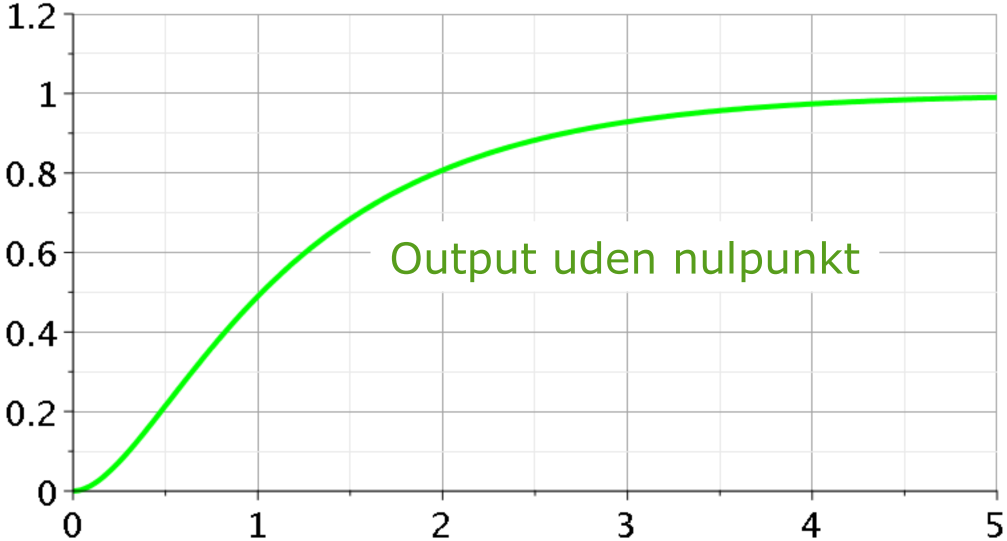
$$G(s) = ?$$

Nulpunkter (1. orden)

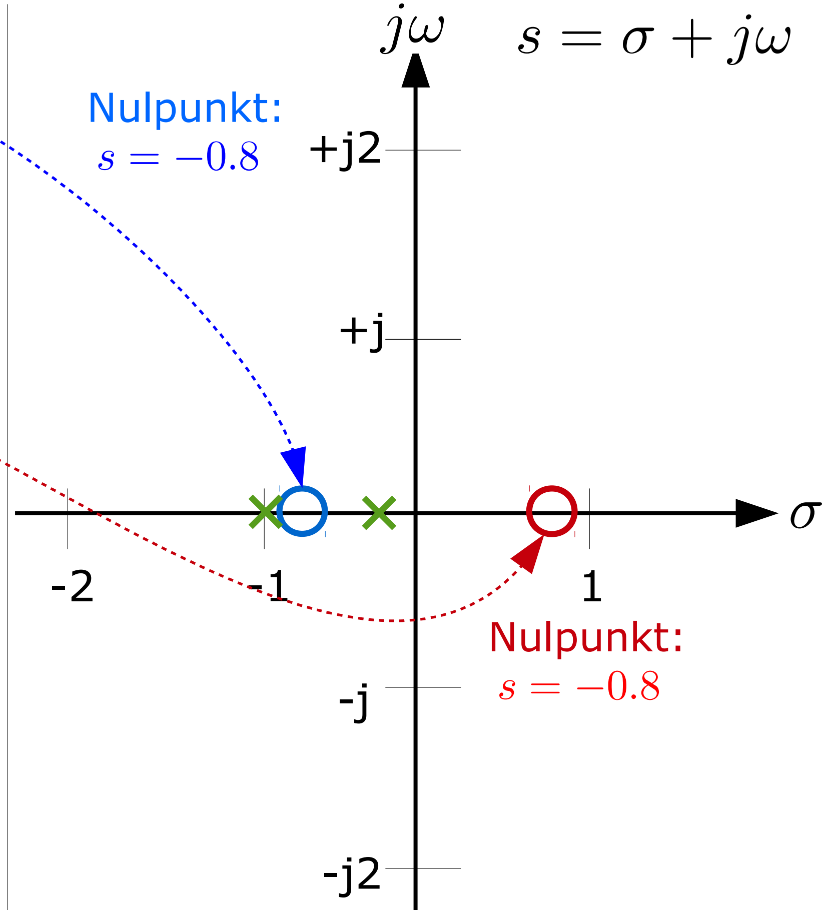
konsekvens for y(t)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(1.25s+1)}{(0.3s+1)(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(-1.25s+1)}{(0.3s+1)(s+1)}$$



S-plan
(komplekst frekvensplan)

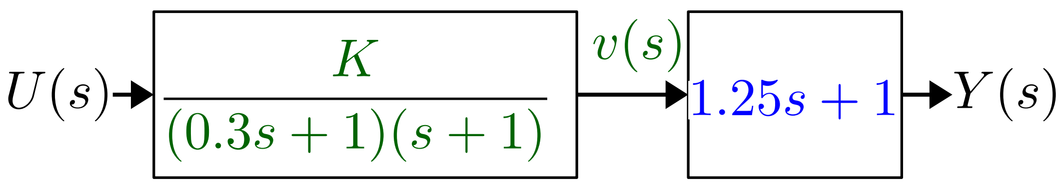


Hvad gør nulpunkt?

Nulpunkter (1. orden – venstre halvplan)

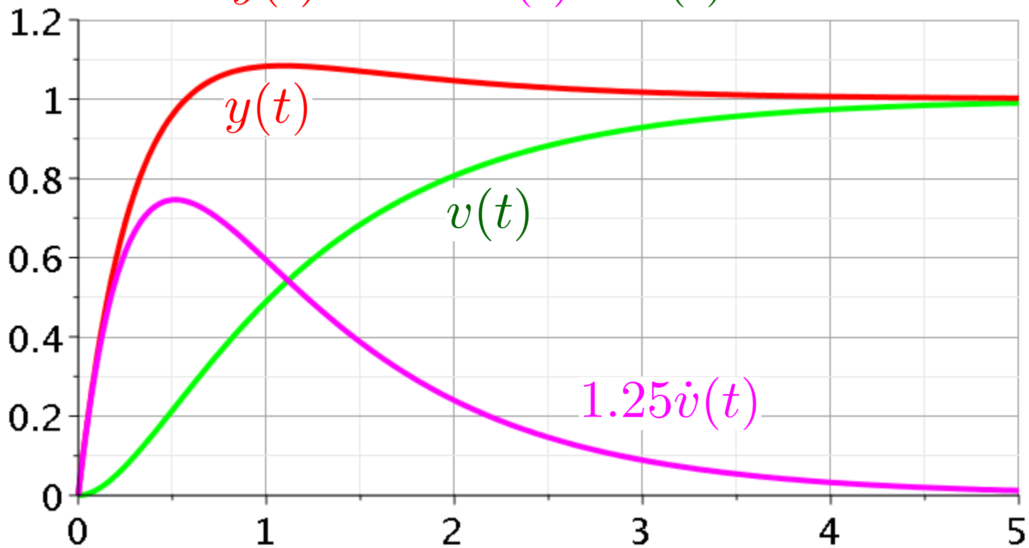
konsekvens for y(t)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(1.25s+1)}{(0.3s+1)(s+1)}$$

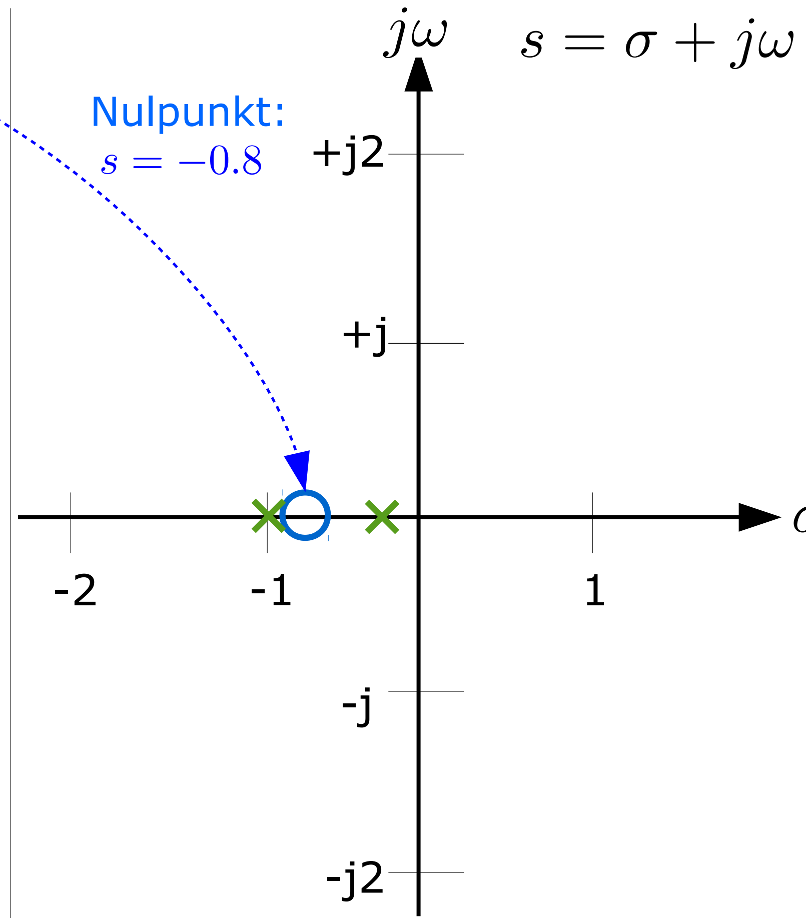


$$Y(s) = 1.25sv(s) + v(s)$$

$$y(t) = 1.25\dot{v}(t) + v(t)$$



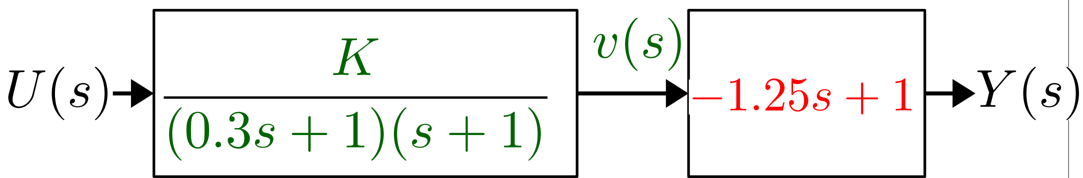
S-plan
(komplekst frekvensplan)



Nulpunkter (1. orden – højre halvplan)

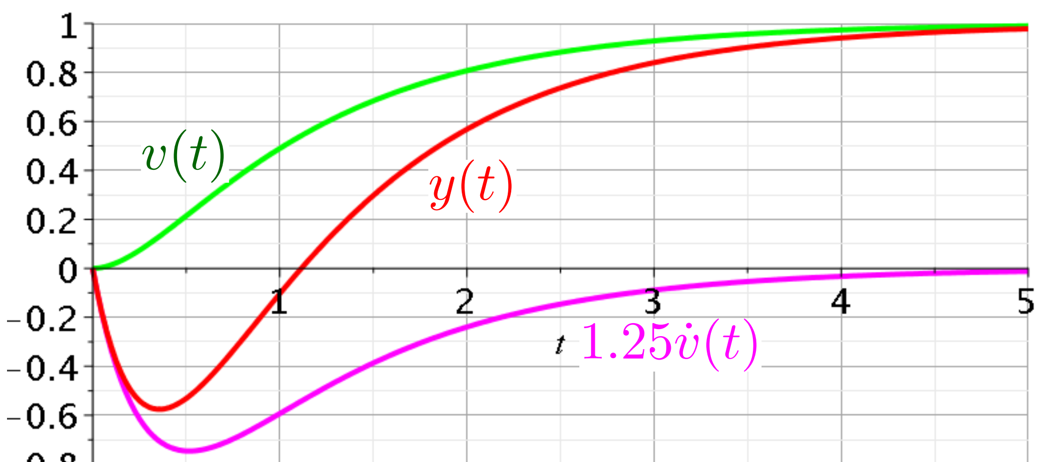
konsekvens for y(t)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(-1.25s+1)}{(0.3s+1)(s+1)}$$



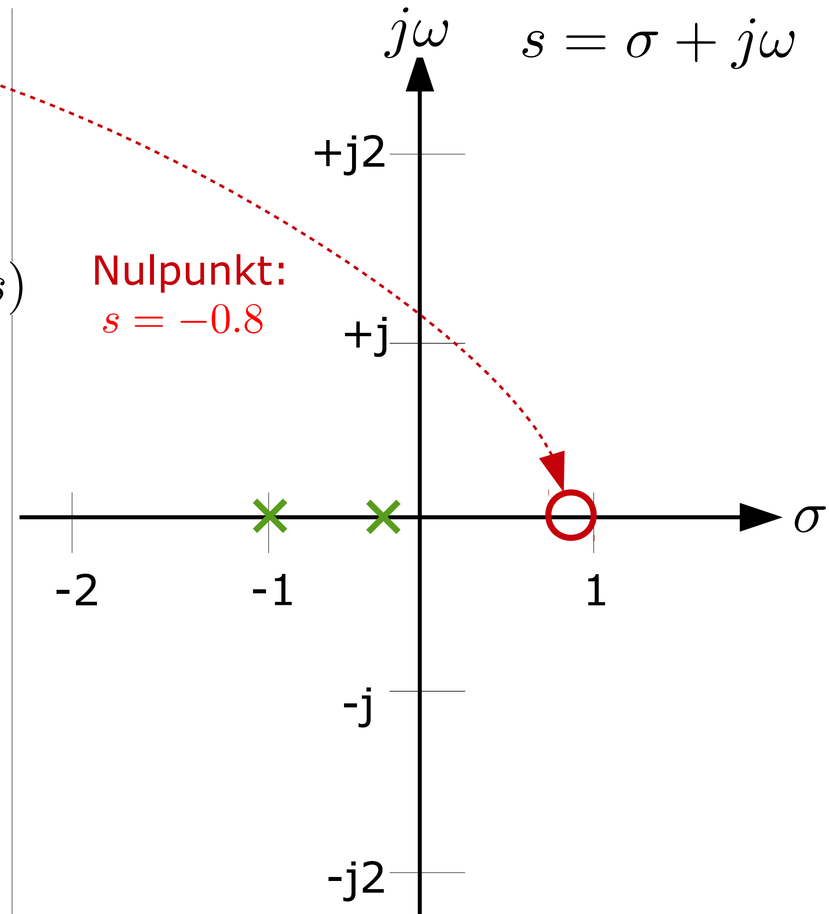
$$Y(s) = -1.25sv(s) + v(s)$$

$$y(t) = -1.25\dot{v}(t) + v(t)$$



S-plan

(komplekst frekvensplan)



Kontrolspørgsmål
s-plan

1) Et system har en overføringsfunkion med 2 reelle poler

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 7s + 10}$$

a) Hvor er disse poler?
b) Er systemet stabilt?

2) Et andet system

$$H(s) = \frac{s - 2}{0.5s - 2}$$

a) Hvad er statisk gain?
b) Hvor har systemet poler og nulpunkter?
c) Er systemet stabilt?

Kontrolspørgsmål
s-plan

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$x = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

1) Et system har en overføringsfunkion med 2 reelle poler

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 7s + 10}$$

a) Hvor er disse poler?

Faktoropdeling (rødder) af nævner:

$$s^2 + 7s + 10 = 0$$

$$s = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2}$$

$$\text{poler: } s = -7 \ \vee s = -2$$

b) Er systemet stabilt?

ja

Kontrolspørgsmål
s-plan

2) Et andet system

$$H(s) = \frac{s-2}{0.5s-2}$$

a) Hvad er statisk gain?

$$K_{stat} = \lim_{s\to 0} H(s)$$

$$K_{stat} = 1$$

b) Hvor har systemet poler og nulpunkter?

$$\text{pol: } s = \frac{2}{0.5} = +4$$

$$\text{nulpunkt: } s = +2$$

c) Er systemet stabilt?

Nej, der er en pol i højre halvplan

Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

Kursusuge 4

Plan

- Egenskaber i Laplace domæne
  - Statisk gain, krydsfrekvens og tidskonstant
- Poler og nulpunkter i s-plan
  - S-plan, pol og nulpunkt placering
- Tidsanalyse
  - 2. orden systemer

DTU Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering

2. orden system step respons

$$x = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\text{reel:}\ \ B^2 - 4AC >= 0$$

Komplekse poler:

$$G(s) = \left. \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \right|_{a_1^2 < 4a_0}$$

$$G(s) = K_{stat} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta < 1 \Rightarrow (2\zeta\omega_n)^2 < 4\omega_n^2$$
$$\Rightarrow \text{komplekse rødder}$$

$$\omega_n = \text{resonansfrekvens [rad/s]}$$

$$\zeta(\text{zeta}) = \text{dæmpningsfaktor}$$

Filterteknik:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

$$Q = \text{Quality factor}$$

$$\zeta = \frac{1}{2Q}$$

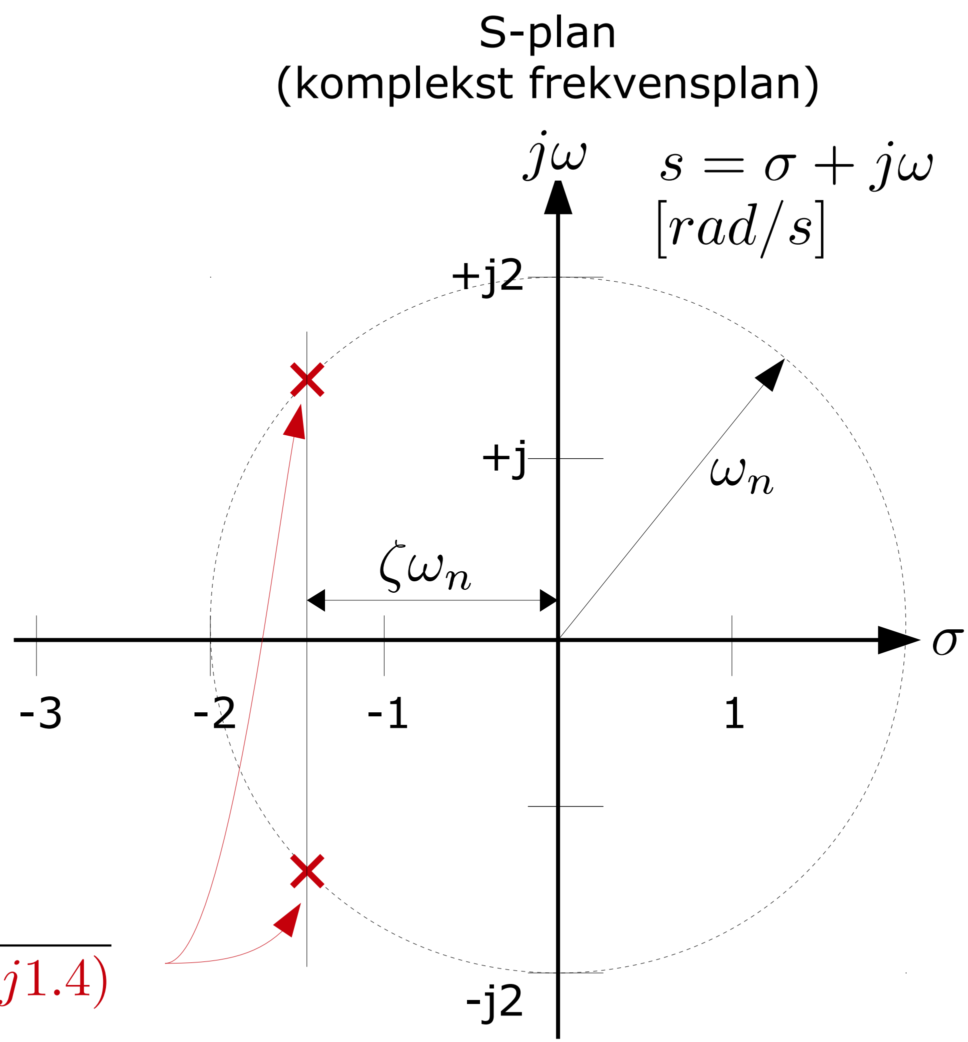
Komplekse poler

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta = 0.707$$
$$\omega_n = 2\ [rad/s]$$

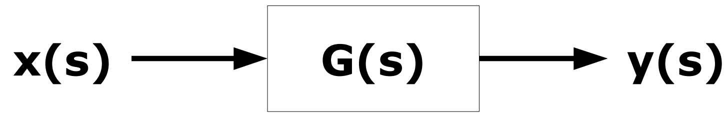
$$G(s) = \frac{4}{(s^2 + 2 \cdot 0.707 \cdot 2s + 4)}$$

$$G(s) = \frac{4}{(s + 1.4 + j1.4)(s + 1.4 - j1.4)}$$



(2. orden poler kommer altid i komplekst konjugerede par)

2. orden system step respons



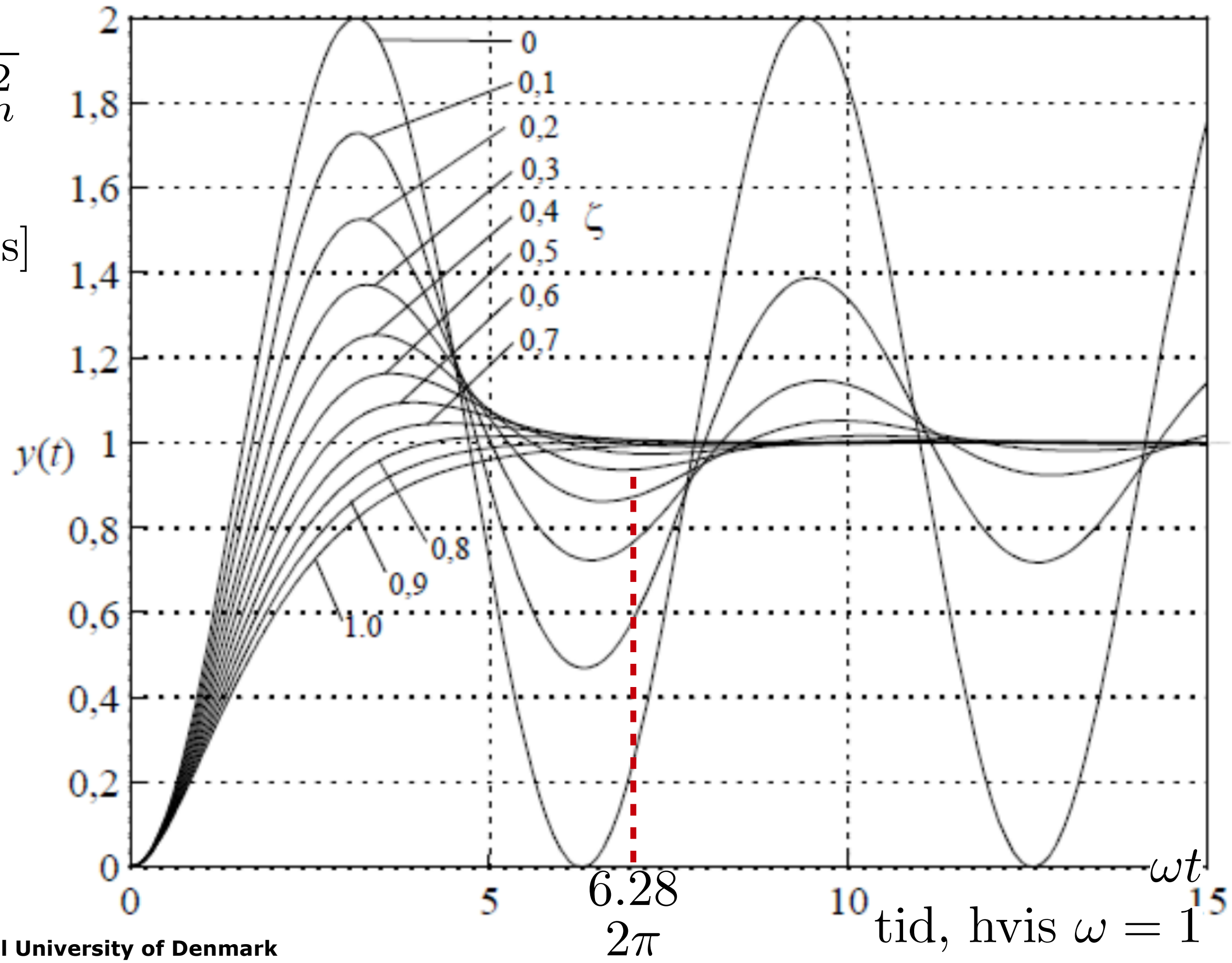
Reguleringsteknik:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta(\text{zeta}) = \text{dæmpningsfaktor}$$

$$\omega_n = \text{resonansfrekvens [rad/s]}$$

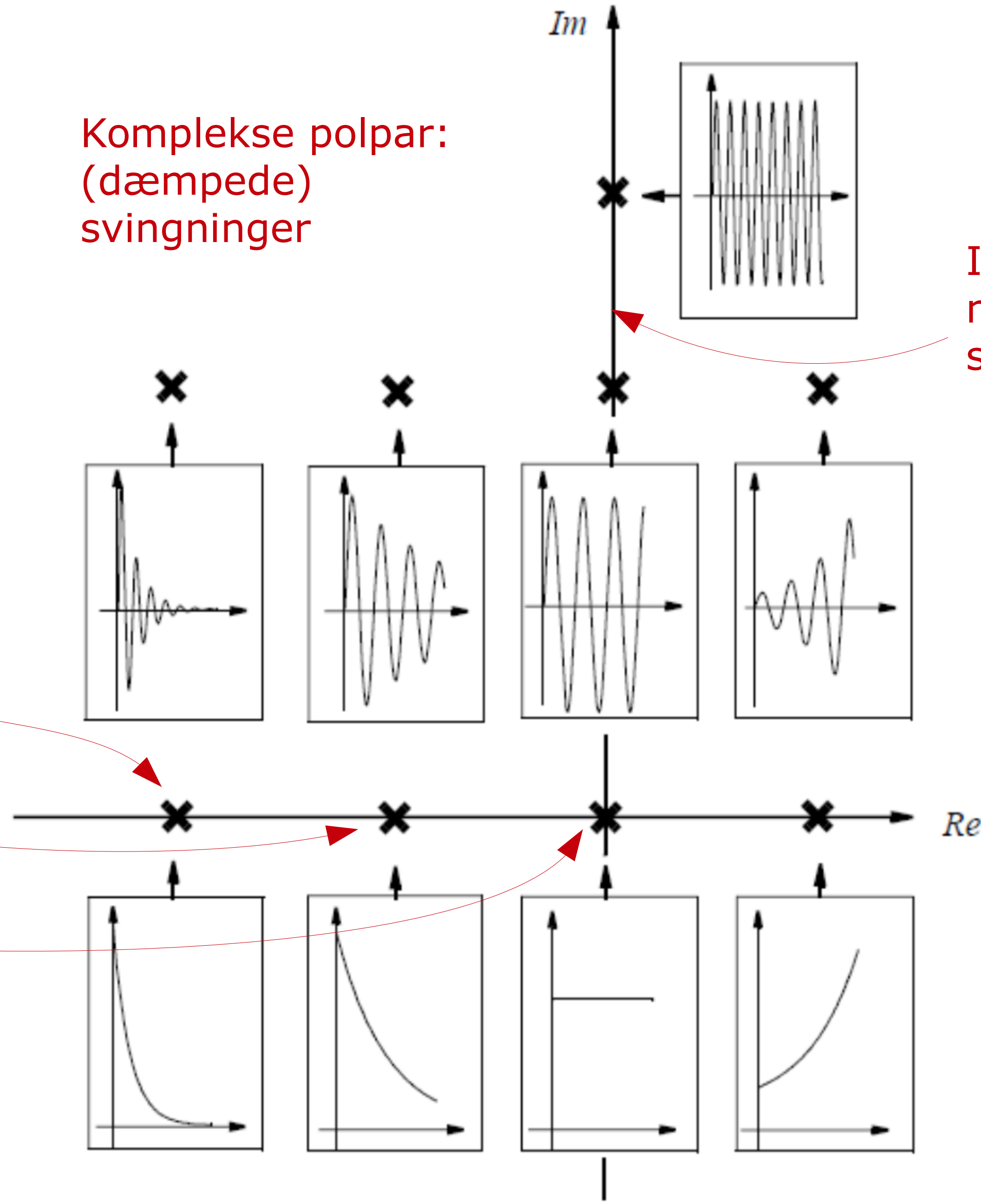
Unit step responce



Pol-placeringer

Output af system med pol/ polpar som vist med en impuls som input.

Komplekse polpar: (dæmpede) svingninger



Imaginærakse: marginalt stabil

Hurtig

Langsom

DC

Højre halvplan: ustabil

Kontrolspørgsmål

1) To system har følgende overføringsfunktioner

$$G_1(s) = \frac{10}{s + 100} \qquad\qquad G_2(s) = \frac{1000}{s^2 + 14s + 100}$$

Hvilket system er det hurtigste?

2) Har dette system

$$G_2(s) = \frac{1000}{s^2 + 10s + 100}$$

a) komplekse poler?
b) hvad er resonansfrekvens?
c) hvad er dæmpningsfaktor?
d) Hvor stort er oversving i %, når input er et enhedsstep?

Kontrolspørgsmål

1) To system har følgende overføringsfunktioner

$$G_1(s) = \frac{10}{s+100} \qquad G_2(s) = \frac{1000}{s^2+14s+100}$$

Hvilket system er det hurtigste?

System G1 en reel pol

$$s = -100$$

system G2 komplekse poler

$$s = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 100}}{2}$$

$$s = -7 \pm 7.14j$$

Så system G1 er hurtigst (langsommste pol er hurtigere for G1)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$x = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Kontrolspørgsmål

2) Har dette system

$$G_2(s) = \frac{1000}{s^2 + 10s + 100}$$

a) komplekse poler?

Ja: $s = -7 \pm 8.6j$

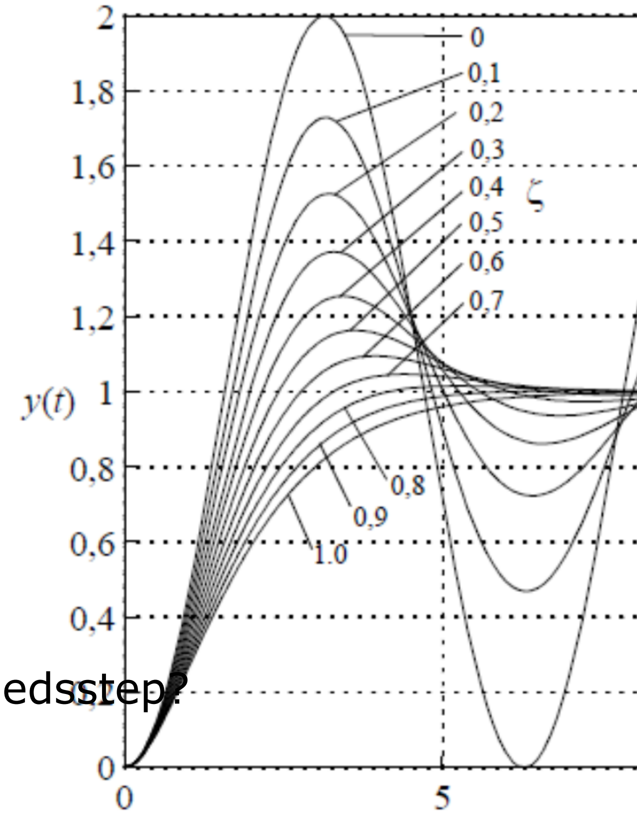
b) hvad er resonansfrekvensen?

$$\omega_n = \sqrt{100} = 10$$

c) hvad er dæmpningsfaktor?

$$2\zeta\omega_n = 10 \Rightarrow \quad \zeta = \frac{10}{2\omega_n} \Rightarrow \zeta = 0.5$$

d) Hvor stort er oversving i %, når input er et enhedsstep?



Ud fra graf: 17%