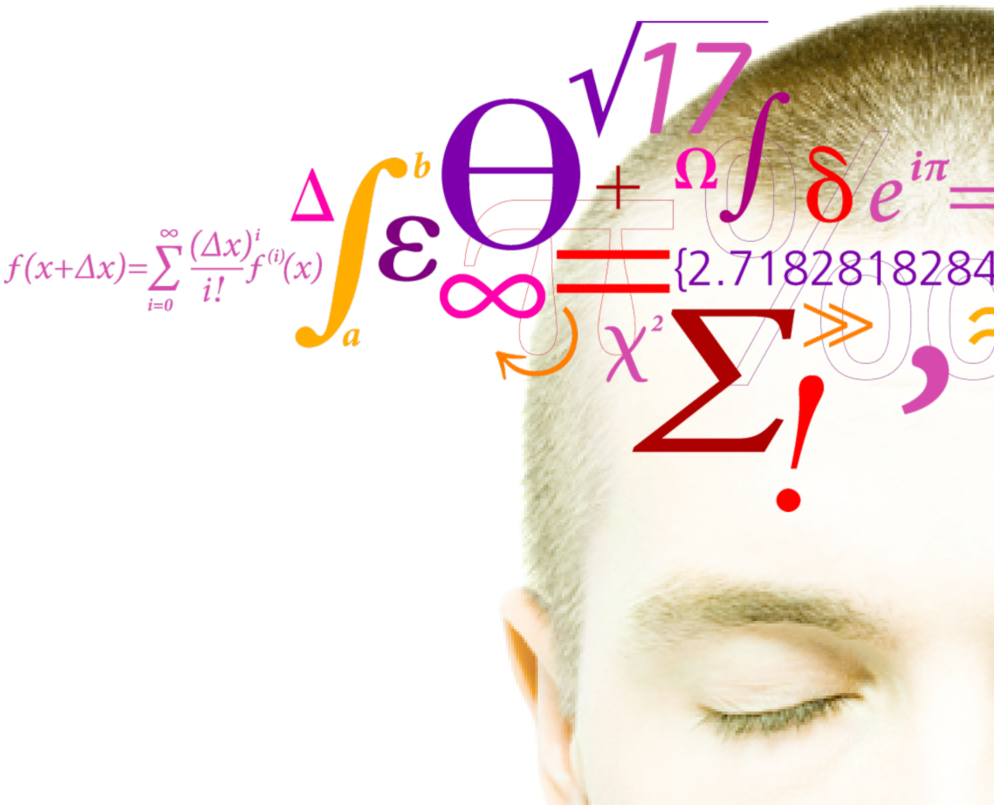
Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

Reeksamen august 2017

- Forslag til opnåelse af svar.



Question 1

Find den lineære overføringsfunktion fra inputspænding V(t) til temperaturen T(t),
når det ulineære udtryk for temperatur for et 3D printer extruderhoved er beskrevet ved:

$$T(t) = T_{start} + \frac{1}{C_{th}} \int_0^t \frac{1}{R} V^2(\tau) - k_1(T(\tau) - k_2) - k_3(T^4(\tau) - k_4) d\tau$$

hvor k_1, k_2, k_3, k_4, R og C_{th} er konstanter

Arbejdspunket er steady state punkt, hvor $T_0 = 265^o$ og $V_0 = 9\,V$

Laplacetransformer

$$T(s) = T_{start} + \frac{1}{C_{th} s} \left(\frac{1}{R} V^2(s) - k_1(T(s) - k_2) - k3(T^4(s) - k_4) \right)$$

Lineariser ved at anvende 1. ordensled i en taylor række, for input og outputvariable

$$C_{th} s T(s) = \frac{1}{R} 2\, V_0 V(s) - k_1 T(s) - k_3\, 4\, T_0^3 T(s)$$

$$T(s) \left(C_{th} s + k_1 + 4 k_3 T_0^3 \right) = \frac{2 V_0}{R} V(s)$$

$$\frac{T(s)}{V(s)} = \frac{2 V_0}{R \left(C_{th} s + k_1 + 4 k_3 T_0^3 \right)}$$

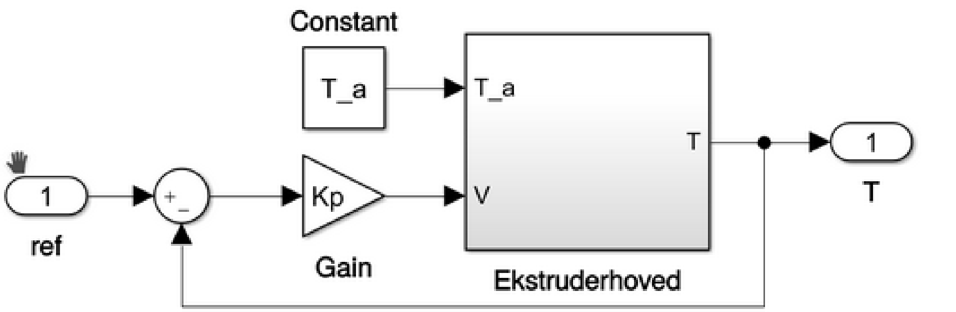
Og med tal

$$\frac{T(s)}{V(s)} = \frac{18}{R \left(C_{th} s + k_1 + 74438500 k_3 \right)}$$

- $\frac{T(s)}{V(s)} = \frac{18}{R(C_{th} s + k_1 + 74 \cdot 10^6 k_3)}$
- $\frac{T(s)}{V(s)} = \frac{9}{R(C_{th} s + k_1 + 4k_3)}$
- $\frac{T(s)}{V(s)} = \frac{9}{R(C_{th} s + k_1 + 1060 k_3)}$
- $\frac{T(s)}{V(s)} = \frac{18}{R(C_{th} s + k_1 + k_1 k_2 + 74 \cdot 10^6 k_3 + k_3 k_4)} + 265$

Question 2

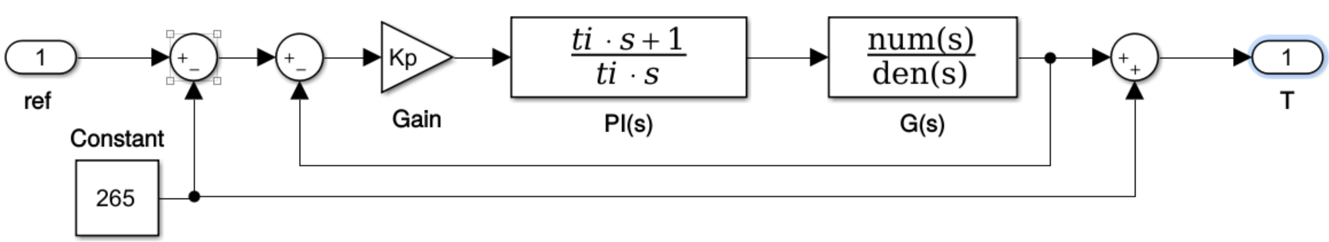
Hvilken lineariseret model svarer til denne ulineære model?



Den ulineære blok (Ekstruderhoved) lineariseres til overføringsfunktion G(s) i arbejdspunktet hvor input V er 9V, T_a er 30 grader og output T er 265 grader.

Lineariseret model G(s) giver kun afvigelser I forhold til arbejdspunkt, så
For at den lineære model akal arbejde omkring 0 ved arbejdspunktet, kan
Arbejdspunkt (for output) trækkes fra og lægges til uden om det simulerede system.

Så svar må være:



Question 3

Et elektrisk RCL er beskrevet ved følgende ligninger:

$$v_C = \frac{1}{C}\int i_C\,dt$$

$$v_L = L\frac{d}{dt}i_L$$

$$i_c = i_L = \frac{v - v_C - v_L}{R}$$

hvor v er input, v_L er output, R, C og L er konstanter.

Hvad er overføringsfunktionen?

- [ ] $\frac{v_L}{v} = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1}$
- [ ] $\frac{v_L}{v} = \frac{s^2}{LCs^2 + RCs + 1}$
- [ ] $\frac{v_L}{v} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$
- [ ] $\frac{v_L}{v} = \frac{RCs}{s^2 + RCs + \frac{1}{LC}}$
- [ ] $\frac{v_L}{v} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$

Laplace transformer og løs

$$v_C = \frac{1}{C}\frac{1}{s}i_C \qquad v_L = Lsi_L$$

$$i = i_L = i_C = \frac{v - v_C - v_L}{R}$$

$$Ri = v - \frac{1}{Cs}i - Lsi$$

$$i\left(R + \frac{1}{Cs} + Ls\right) = v$$

$$i = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs} + Ls}v$$

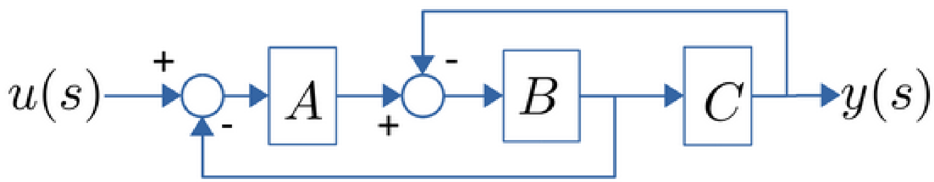
$$i = \frac{Cs}{RCs + 1 + LCs^2}v$$

$$v_L = Ls\frac{Cs}{RCs + 1 + LCs^2}v$$

$$\frac{v_L}{v} = \frac{LCs^2}{RCs + 1 + LCs^2}$$

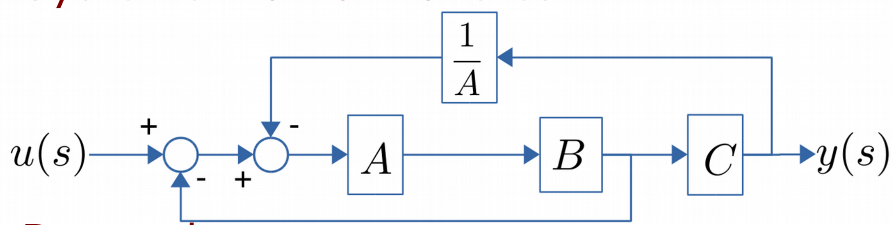
Question 4

Hvad er overføringsfunktionen for dette lineære system?

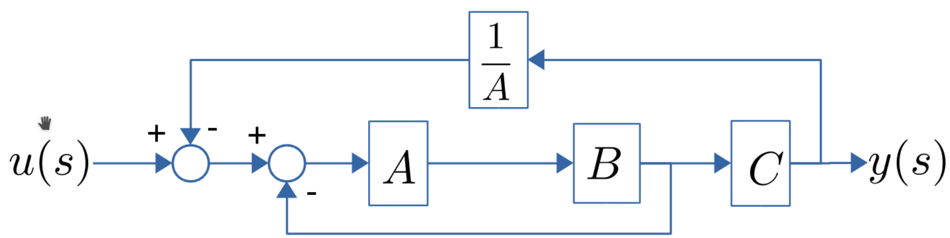


- $\frac{y}{u} = \frac{ABC}{1+AB+BC}$
- $\frac{y}{u} = \frac{ABC}{1+ABC}$
- $\frac{y}{u} = \frac{AB^2C}{1+AB^2C}$
- $\frac{y}{u} = \frac{A^2BC}{A+AB+BC}$
- $\frac{y}{u} = \frac{ABC}{1+AB^2C}$

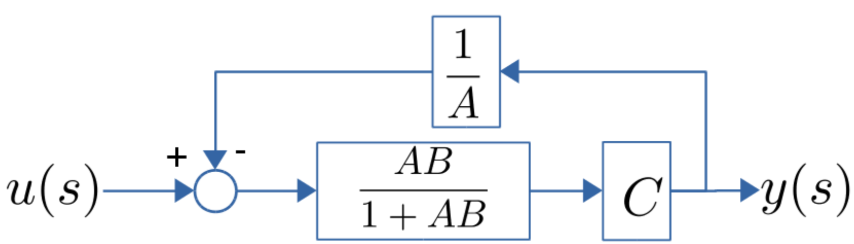
Systemet kan omrokeres til



Der er det samme som (input til A er sum af 3 signaler)



Som kan reduceres til



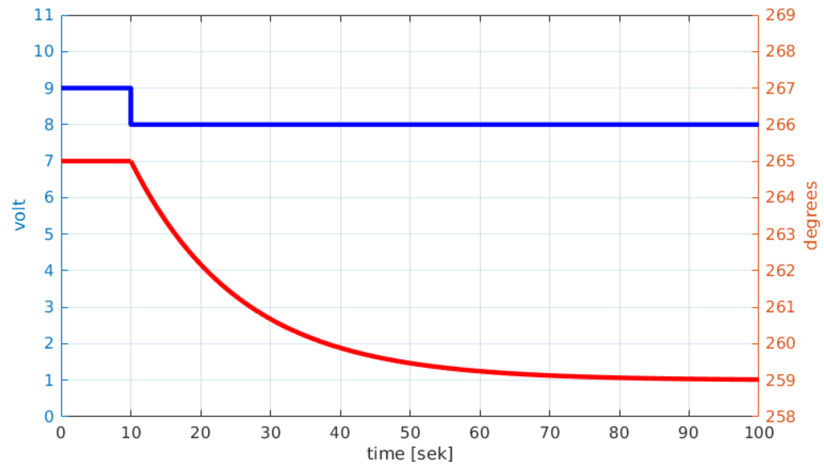
Og igen reduceres til

$$\frac{u}{y} = \frac{ABC}{(1+AB)\left(1+\frac{ABC}{1+AB}\frac{1}{A}\right)}$$

$$\frac{u}{y} = \frac{ABC}{1+AB+BC}$$

Question 5

Hvad er den lineære overføringsfunktion G(s) fra input til output ud fra dette step respons?



Den blå kurve er input (venstre y-akse) og den røde kurve er output (højre y-akse).

Systemet er ulineært.

- $G(s) = \frac{30}{20s+1}$
- $G(s) = \frac{6}{15.5s+1}$
- $G(s) = \frac{512}{s+16}$
- $G(s) = \frac{-0.38}{s+0.064}$
- $G(s) = \frac{-6}{26s+1}$

- Linear del består af en statisk gain og en dynamisk del (poler og nulpunkter).
- Her ligner dynamik del en 1. ordens pol.

$$G(s) = \frac{K_{ss}}{\tau s + 1}$$

- Efter 63% af afstand fra startværdi 265 til slutværdi 259 er

$$V_{63} = 0.63(259 - 265) + 265 = 261.2^o$$

Som nås efter ca. 26 sekunder, eller 16 efter step, => tau=16

$$G(s) = \frac{K_{ss}}{16s + 1}$$

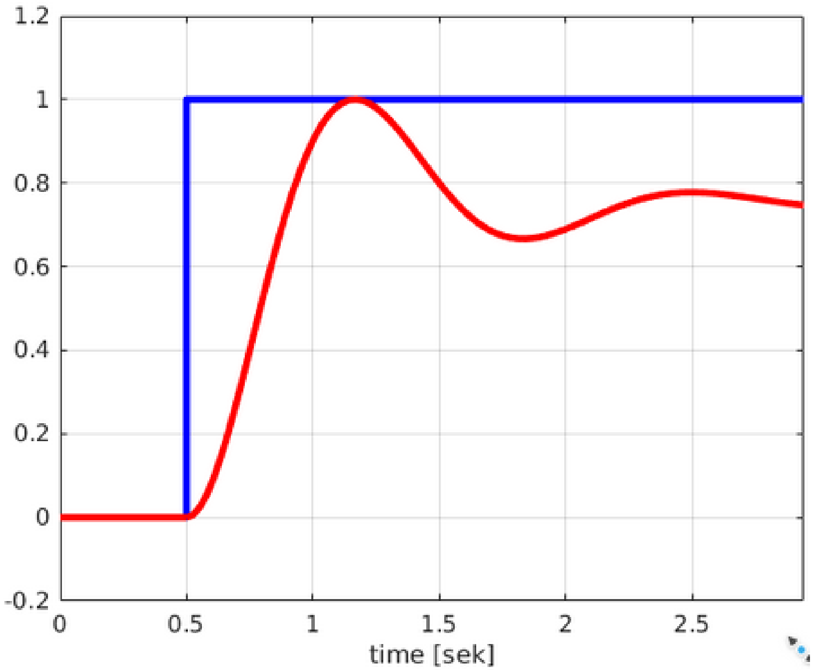
Statisk gain Kss

$$K_{ss} = \frac{\Delta out}{\Delta in} = \frac{259 - 265}{8 - 9} = 6$$

$$G(s) = \frac{6}{16s + 1}$$

Question 6

Hvad kan der udledes af et system med dette steprespons?



Den blå kurve er step og den røde kurve er respons.

- Systemet har en gain på under 1, svingningerne må skyldes støj.
- Overføringsfunktionen består af 2 reelle poler og et nulpunkt i højre halvplan.
- Oveføringsfunktionen har et komplekst polpar med en resonansfrekvens på ca. 0.8 Hz, og en stationær gain på ca. 0.75.
- Overføringsfunktioen har en steady state gain på netop 1 og 2 reelle poler.
- Overføringsfunktionen har et komplekst polpar med en resonansfrekvens på ca. 1.3 rad/s og en dæmpningsfaktor på ca. 0.3.

- Svingninger forårsages af input.
- Svingninger fås kun hvis der er et komplekst polpar.
- Svingningsfrekvensen for en dæmpet svingning er lidt lavere frekvens end ω_n

- Periodetiden er ca. 1.3 sekunder, eller en frekvens på 1/1.3 = 0.77 Hz (eller ω_n ca. 4.8 rad/s).

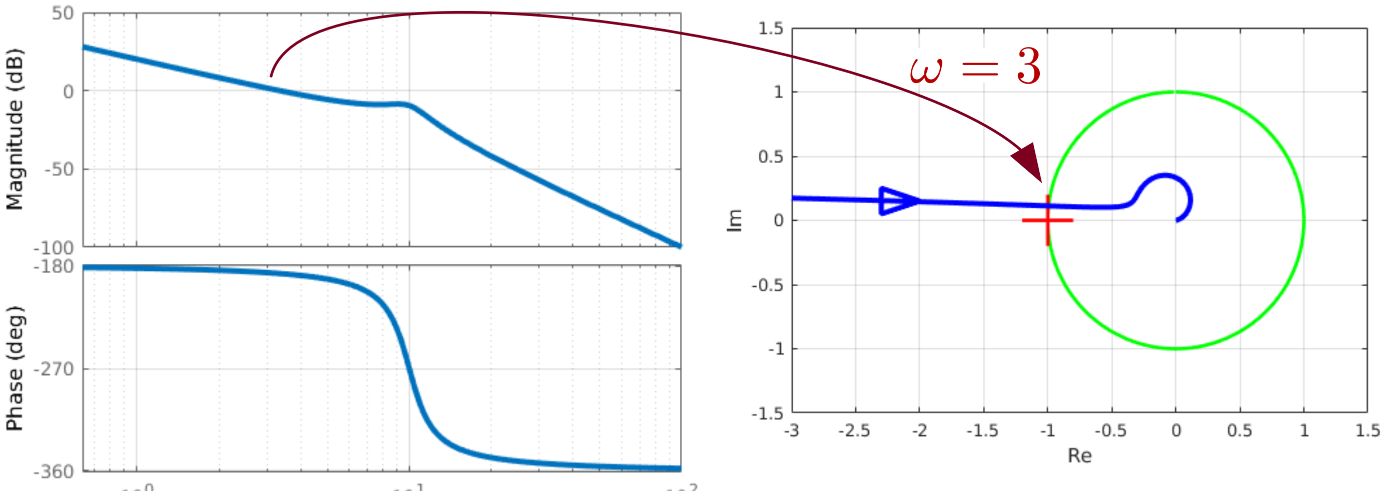
- Steady state gain

$$K_{ss} = \frac{\Delta out}{\Delta in} = \frac{0.75}{1} = 0.75$$

Frekvensanalyse

$$G(s) = \frac{100}{0.01s^4 + 0.03s^3 + s^2}$$

Et system uden poler i højre halvplan har følgende Bode og Nyquist plot



Question 7

Hvis systemet forsøges reguleret med en P-regulator med Kp=1,

vil systemet så være stabilt?

Ja

Nej

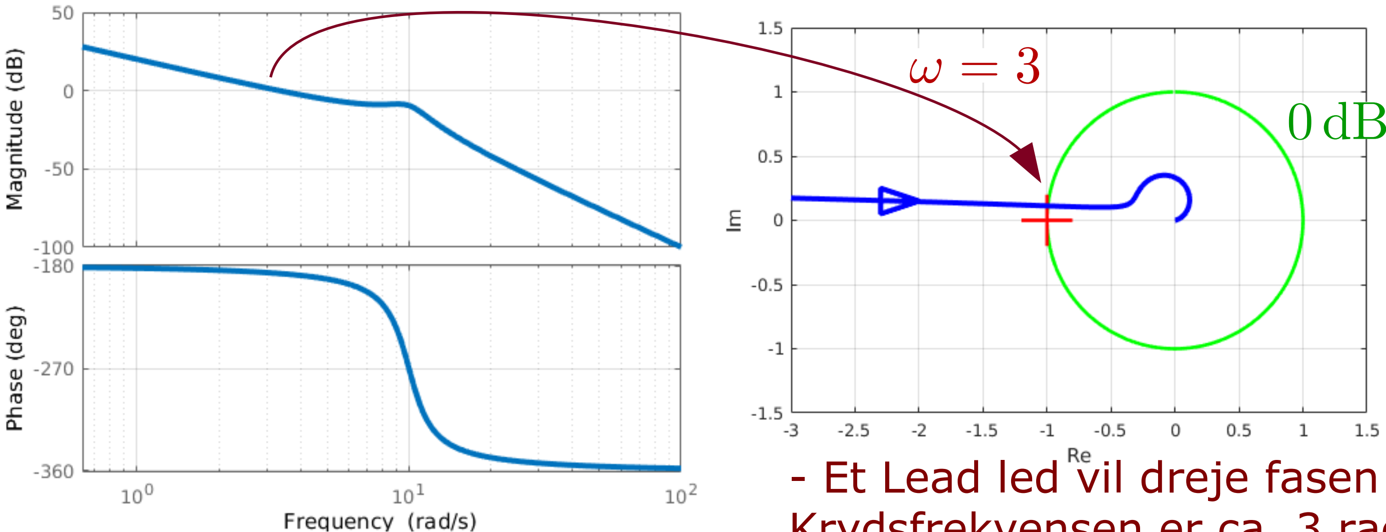
- Systemet er ustabilt, Nyquist plot viser negativ fasemargin og passerer -1 på den forkerte (ustabile) side

En P-regulator vil ikke kunne stabilisere det.

Frekvensanalyse

$$G(s) = \frac{100}{0.01s^4 + 0.03s^3 + s^2}$$

Et system uden poler i højre halvplan har følgende Bode og Nyquist plot



- Et Lead led vil dreje fasen i positiv retning
Krydsfrekvensen er ca. 3 rad/s, og det viste Lead led har netop centerfrekvens her.

Question 8

Det overvejes i stedet at anvende P-Lead regulator,

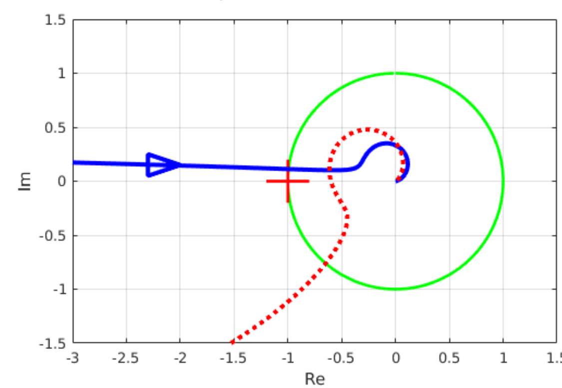
$$C = K_P \frac{s+1}{0.1s+1}$$

Og en Kp der sikrer at krydsfrekvensen er uændret.

Hvad kan det gøre ved Nyquist plottet og lukket sløjfe stabilitet?

- Bringe kurven længere væk fra -1 punktet (mod mere stabilitet)
- Bringe systemet nærmere ustabilitet eller dybere ind i ustabilitet.
- Vil ikke have betydning for lukket sløjfe stabilitet

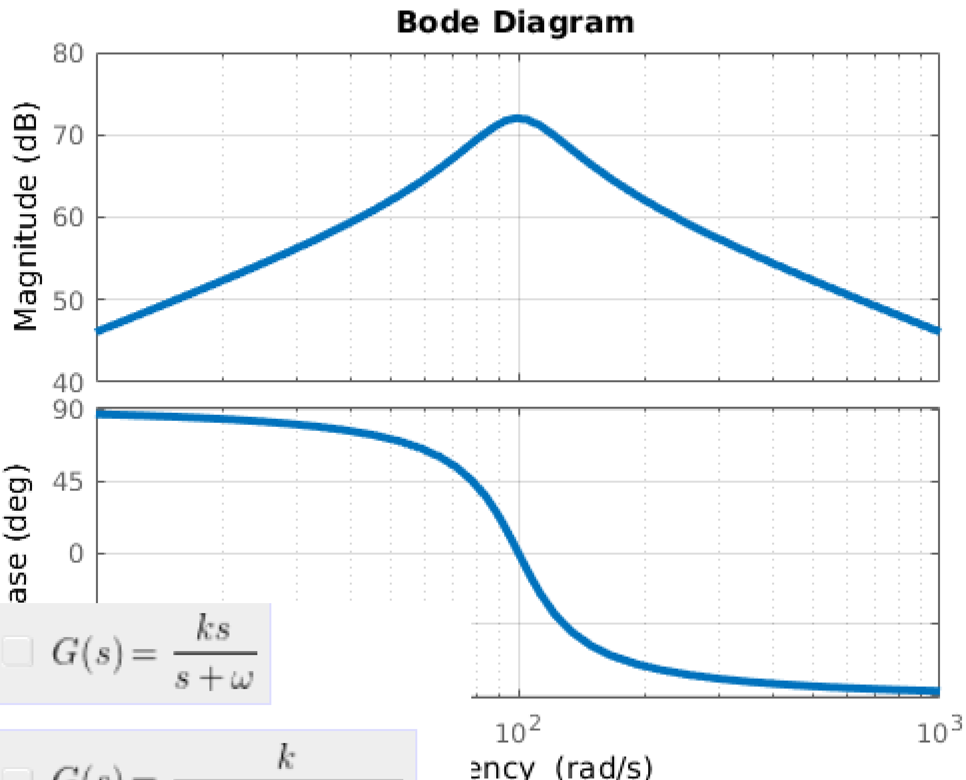
Med en passende Kp (Kp = 0.25) fås et Nyquist plot som vist stiplet herunder, som vil give stabil lukket sløjfe



Question 9

$$G(s) = \frac{200000s}{s^2 + 50s + 10000}$$

Hvilken form har overføringsfunktionen for et system med dette bodeplot?



- [ ] $G(s) = \frac{ks}{s+\omega}$
- [ ] $G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$
- [ ] $G(s) = k\frac{s+\omega_1}{s+\omega_2}$
- [ ] $G(s) = k\frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2}$
- [ ] $G(s) = \frac{ks}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$

Amplituden starter stigende med +20dB/dekade, det betyder et nulpunkt ved en lav frekvens eventuelt 0.
Amplituden stiger (stejlere) op til 100 rad/sek, og falder derefter med -20 db/dekade, Det må betyde 2 poler ved omkring 100 rad/s, som kan være komplekse.

Derfor må formen være:
Et nulpunkt i 0 og et (komplekst) polpar

Question 10

Hvad er fasedrejningen for denne overføringsfunktion?

$$G(s) = \frac{s+30}{s^2+30s+1}$$

ved netop frekvensen $\omega = 1$

- $\angle G(\omega = 1) = -178$ grader
- $\angle G(\omega = 1) = -88$ grader
- $\angle G(\omega = 1) = +88$ grader
- $\angle G(\omega = 1) = +178$ grader
- $\angle G(\omega = 1) = -2$ grader

Erstat s med $s = j\omega$
og $\omega = 1$

Så fås

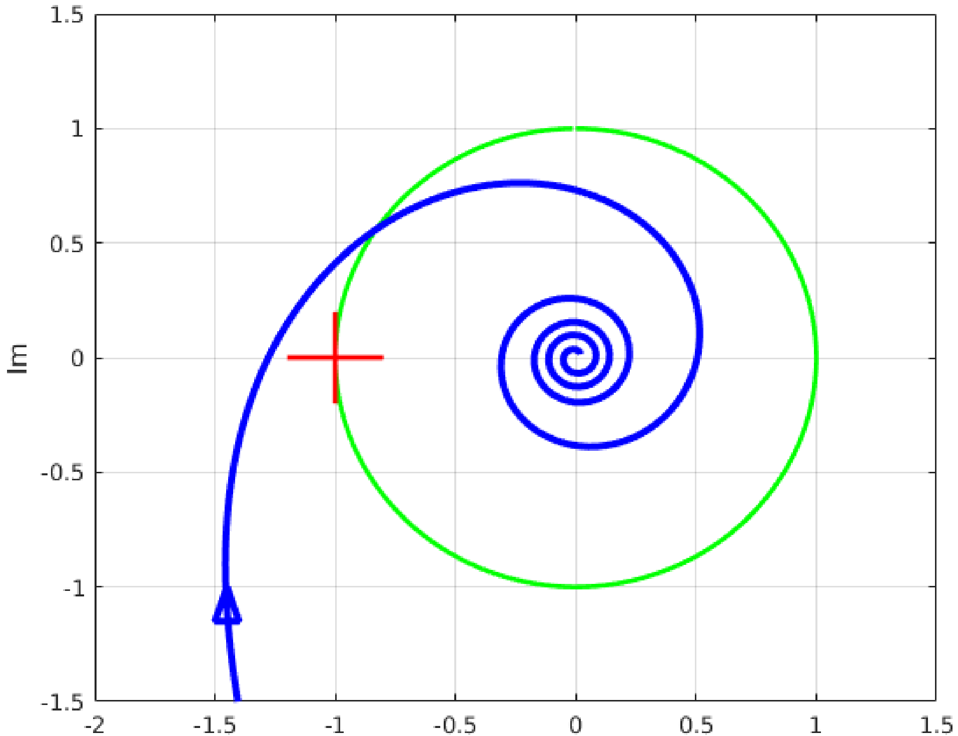
$$G(\omega = 1) = \frac{j1 + 30}{-1 + j30 + 1}$$

Nævneren bliver til +j30, som er -90 grader,
og i tælleren er den komplekse del
meget mindre end den reelle, og derfor
tæt på fasedrejning 0 grader.

Samlet ca. -90 grader.

Question 11

Vil en P-regulator gøre dette system stabilt - ud fra den viste del af dette Nyquist plot?



Der er er ikke poler i højre halvplan.

Den blå kurve viser kun positive frekvenser og frekvensen er stigende i pilens retning.

- [ ] En P-regulator kan ikke gøre lukket sløjfe stabil.
- [ ] Enhver P regulator med Kp < 0.75 vil gøre lukket sløjfe stabil.
- [ ] Enhver P-regulator med Kp > 0.75 vil gøre lukket sløjfe stabil.
- [ ] Enhver P-regulator vil gøre lukket sløjfe stabil.

Ingen poler I højre halvplan,

Så skal -1 ligge til venstre for kurven (for positive frekvenser).
Det gør den ikke her,

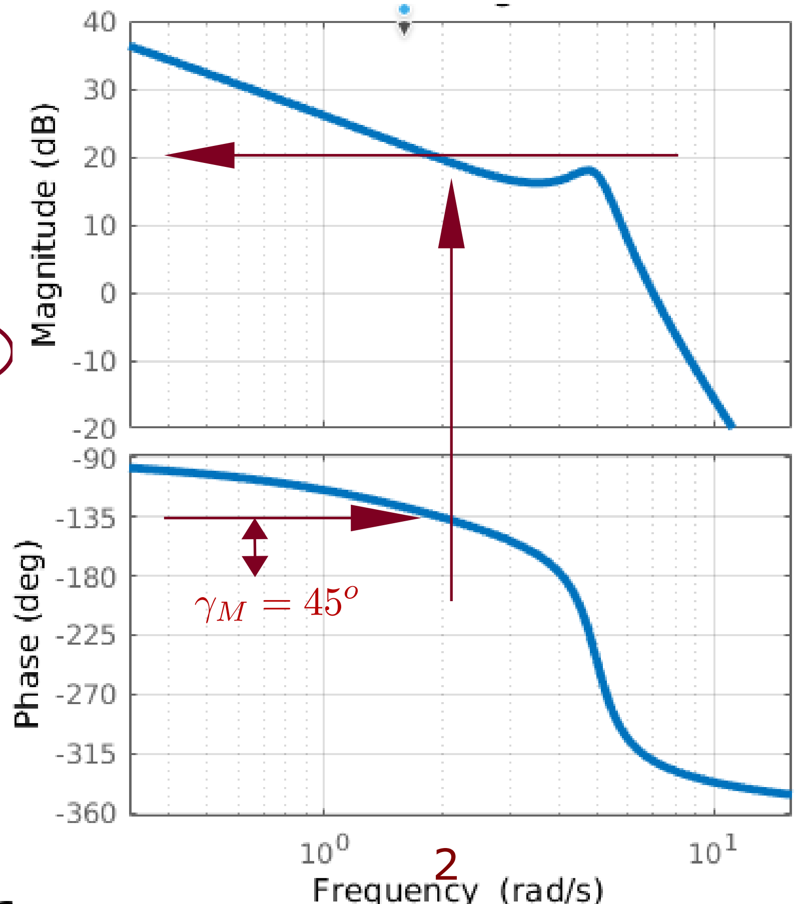
men med en Kp mindre end lidt under 1 skulle lukket sløjfe være stabil

Kp < 1/1.3
Kp < 0.75
gør systemet stabilt

Question 12

Design en P-regulator, så der opnås en fasemargin på 45 grader.

- Kp=20
- Kp = 10
- Kp = 1
- Kp = 0.1
- Kp = 0.02



Fasemargin 45 grader betyder at krydsfrekvens skal være ved -135 grader.

Som giver

$$\omega_c = 2 \text{ rad/sek}$$

Hvor amplituden er

$$|G(\omega_c)| = 20 \text{ dB}$$

Så Kp skal være -20 dB:

$$K_P = 10^{-\frac{20}{20}} = 0.1$$

Question 13

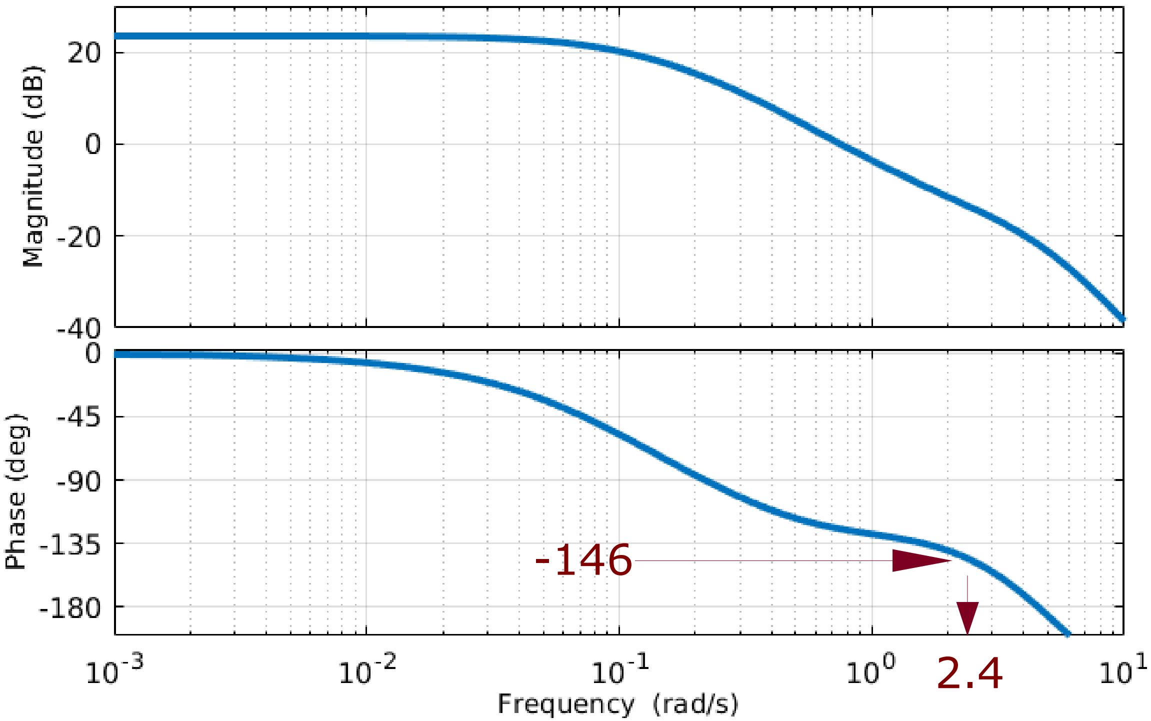
Vil den designede P-regulator give anledning til stationær fejl for et step input?

- Ja
- Nej

Bodeplot viser at der er en Integrator i overføringsfunktionen, hvilket Betyder at et step input ikke giver statisk fejl.

Question 14

Der skal designes en PI-Lead regulator til et system med følgende bodeplot



Der vælges en et PI-led med med et nulpunkt der ligger ved 2.5 gange lavere frekvens end krydsfrekvensen (Ni=2.5),
der vælges et Lead led med en $\alpha = 0.15$, og
der ønskes en fasemargin på 60 grader.

Hvad bliver den nye krydsfrekvens?

- $\omega_c = 0.75$ rad/sek
- $\omega_c = 2.4$ rad/sek
- $\omega_c = 0.1$ rad/sek
- $\omega_c = 4.5$ rad/sek

En PI-lead regulator.
Der skal findes en krydsfrekvens,
hvor fasedrejning passer med
de valgte parametre:
I-led fasedrejning:

$$Ni = 2.5 \Rightarrow \varphi_i = \arctan\frac{1}{-Ni} = -22^o$$

Lead led fasedrejning

$$\alpha = 0.2 \Rightarrow \varphi_M = \arcsin\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 48^o$$

$$\gamma_M = 60^o$$

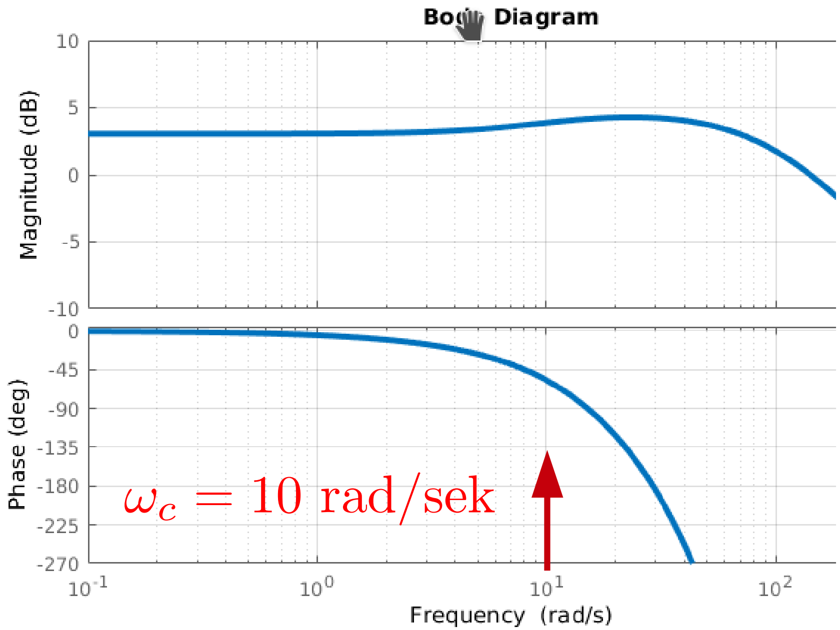
Derfor skal ω_c placeres ved:

$$\angle G(\omega_c) = -180 + \gamma_M - \varphi_i - \varphi_M$$

$$\angle G(\omega_c) = -180 + 60 + 22 - 48 = -146^o$$

Der ligger ved ca. 2.4 rad/s

Opgave 15



Ved 10 rad/s er der mere end 90 grader fasemargin, og derfor fasemæssigt plads til et I-led. Et I-led vil desuden kunne gøre amplitudekurven monotomt faldende, hvis nulpunktet placeres, så den lille pukkel på amplituden forsvinder.
- derfor en PI regulator med et nulpunkt i nærheden af puklens top, f.eks. 10 rad/s.
- ligger nulpunkt ved for lav frekvens Forsvinder puklen ikke, og dermed ingen mulighed for krydsfrekvens ved 10 rad/s

En P-Lead regulator, hvor lead led centreres omkring $\omega_c = 10$, og f.eks. med $\alpha = 0.2$

Lead led får så følgende overføringsfunktion

$$C_d(s) = \frac{0.22s + 1}{0.044s + 1}$$

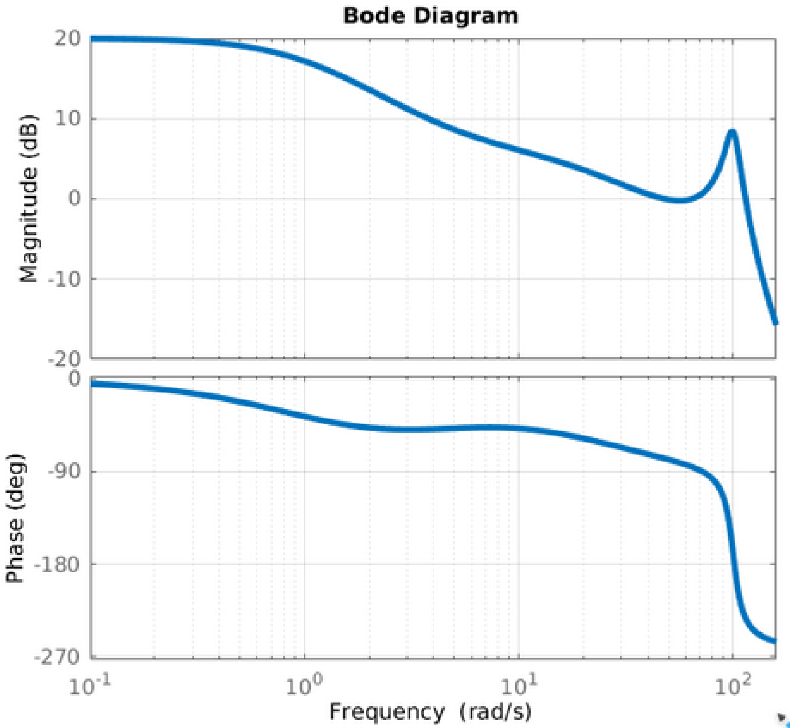
En PI-regulator, hvor nulpunkt ligger ved en frekvens over 10 rad/sek.

En PI regulator, hvor nulpunkt ligger ved 2 rad/sek (Ni = 5).

En P-regulator med Kp = -4 dB (Kp = 0.63)

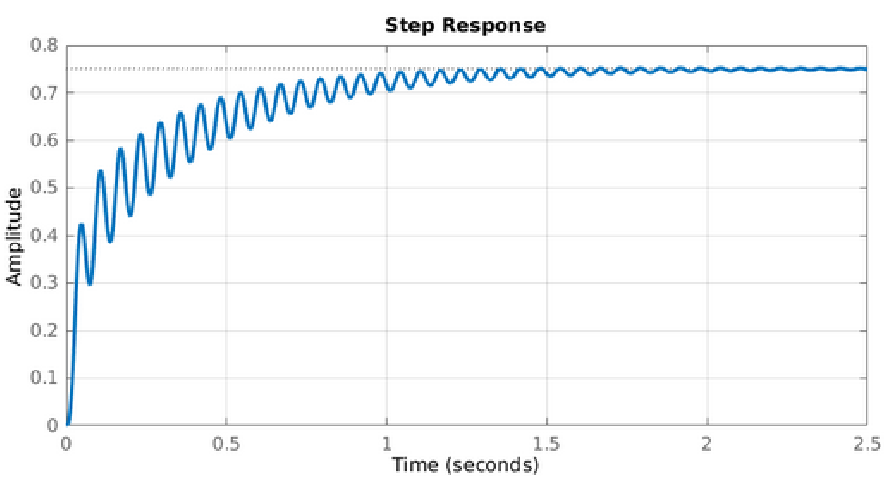
Regulator design 3

Et system har følgende overføringsfunktion med følgende bodeplot



Der designes en P-regulator Kp = 0.3 der giver en krydsfrekvens på 4 rad/sek.

Lukket sløjfe giver så følgende enhedsstep-respons:



Question 16

Overføringsfunktionen var

$$G(s) = \frac{2s + 10}{5 \cdot 10^{-6} s^4 + 0.00018 s^3 + 0.05168 s^2 + 1.052 s + 1}$$

Question 16

Hvad kan gøres for at give hurtigere indsvingningstid - uden at gøre den stationære fejl større?

- [ ] Ændre til en PI-regulator med et nulpunkt ved ca. 100 rad/sek
- [ ] Øge Kp til 1
- [ ] Mindske Kp til 0.1.
- [ ] Tilføje et Lead-led (P-Lead regulator) med en centerfrekvens på ca. 100 rad/s og $\alpha = 0.1$ $Cd(s) = \frac{0.03s + 1}{0.003s + 1}$ Lead-leddet placeres i fremkoblingsgrenen, og Kp reduceres til 0.1.

Øge Kp til 1 vil gøre systemet ustabilt, mindske Kp (uanset Lead) vil øge den stationære fejl.

En PI vil, relativt til lavere frekvenser, mindske resonans ved 100 rad/s og give mulighed for en højere krydsfrekvens – og dermed hurtigere indsvingningstid.

$$G(s) = \frac{2s+10}{5\cdot 10^{-6}s^4 + 0.00018s^3 + 0.05168s^2 + 1.052s + 1}$$

Question 17

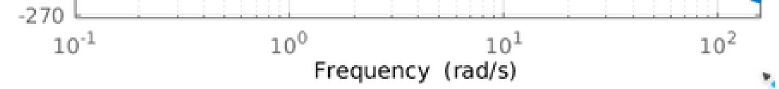
Hvis det vigtigste er at reducere de hurtige svingninger til under en trediedel,
uden at gøre den stationære fejl større,
hvad kan så gøres?

- Tilføge et I-led med et nulpunkt ved ca. 100 rad/sek og bevare krydsfrekvensen på 4 rad/s
- Øge Kp til 1
- Mindske Kp til 0.1.
- Tilføje et Lead-led (P-Lead regulator) med en centerfrekvens på 100 rad/s og $\alpha = 0.1$

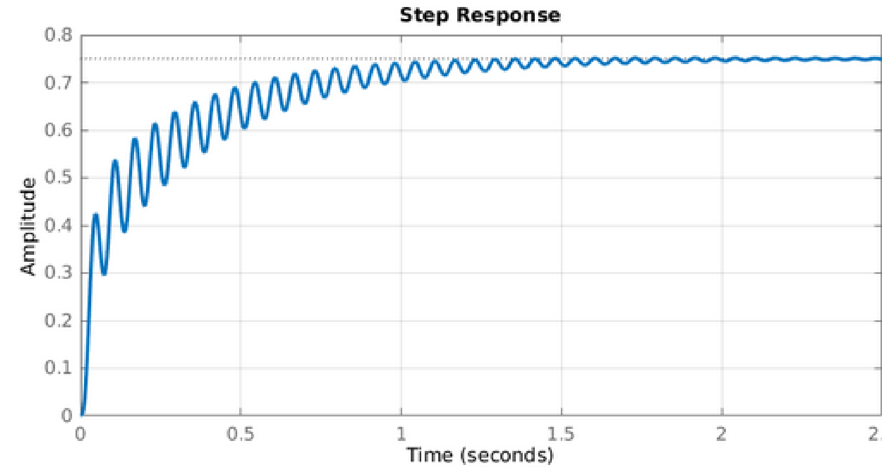
  $$Cd(s) = \frac{0.03s+1}{0.003s+1}$$

  Lead-leddet placeres i fremkoblingsgrenen, og Kp reduceres til 0.1.
- Indføre et forfilter med følgende overføringsfunktion og bevare Kp

  $$G_f = \frac{1}{0.01s+1}$$

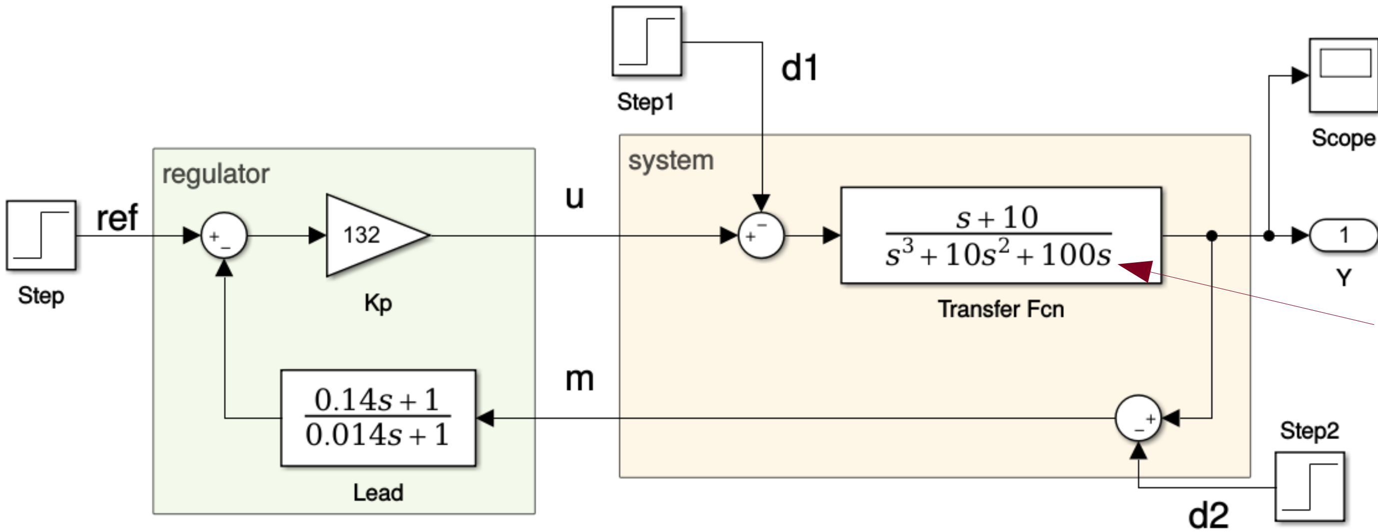


Der designes en P-regulator Kp = 0.3 der giver en krydsfrekvens på 4 rad/sek.
Lukket sløjfe giver så følgende enhedsstep-respons:



Reducere svingninger alene kunne pege på et forfilter, men det foreslåede har en knækfrekvens på 100 rad/s.
Step respons viser 16 svingninger på 1 s, eller 16 Hz eller netop 100 rad/s.
Det valgte forfilter vil derfor kun dæmpe 3dB ved 100 rad/s, og altså ikke nok.

Det bedste bud må stadig være PI regulatoren, som her ikke har øget krydsfrekvensen.



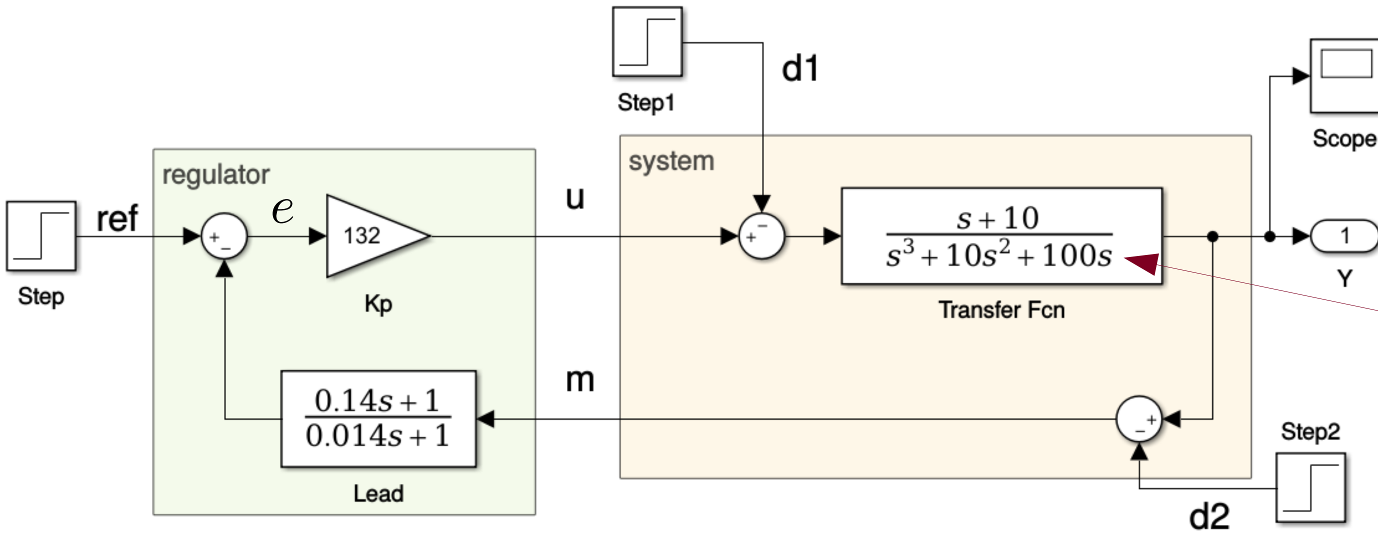
Indeholder integrator

Question 18

Med et step på referenceindgang (**ref**) vil der så være en stationær fejl på udgang (**Y**)?

- Ja
- Nej

En integrator I open loop vil sikre mod stationær fejl for et step på referenceinput.



Indeholder integrator

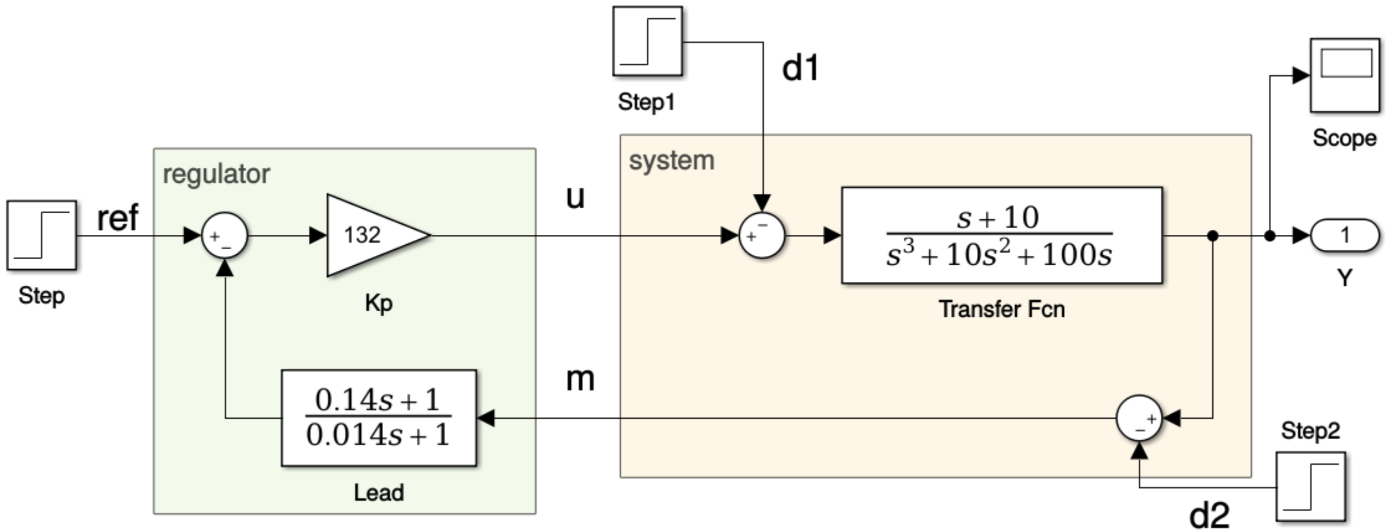
Question 19

Med et enhedsstep på forstyrrelsesindgang **d1**, hvad bliver så den stationære fejl på udgang (**Y**)?

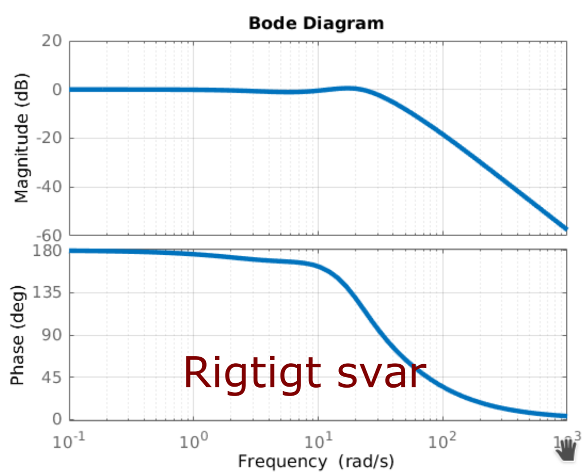
- 0
- ∞
- 1.32
- 0.1
- 0.0075

Step på d1: indgang af integrator er 0 i steady state, så en værdi på d1 må modsvares af en stationær værdi på u. Det betyder at steady state u må være 1.

Det betyder at e må være 1/132 = 0.0075, som igen må Betyde at y må være 0.9925 i steady state med d1=1 (og ref=0)



Opgave 20



Input er D2 output Y, så overføringsfunktion (komplementær sensitivitetsfunktion) er

$$S_{d2} = \frac{-G_{å}}{1 + G_{å}}$$

Og starter (typisk) ved 0dB