Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

Kursusuge 3

Plan

- Laplace intro
- Blokdiagram manipulering
- Phasor

Øvelse

- Modellering af robot

DTU Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering

Laplace transformation

Laplace transformation

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Egenskaber

- Intet om $f(t)$ for $t < 0$
- Gør en differentialligning til et polynomium (enkle regneregler)
- s kan tolkes som en frekvens $s = \sigma + j\omega$

Invers Laplace transformation

$$\mathscr{L}{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st}dt$$

For elektro litteratur betegner *j* imaginær del af et tal (da *i* betegner strøm)

Laplace regneregler

$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$	Operation
$Af(t)$	$A\mathbf{F}(s)$	Skalering
$f_1(t) + f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s)$	Addition
$f_1(t) - f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s) - \mathbf{F}_2(s)$	Subtraktion
$\frac{d}{dt}f(t)$	$s\mathbf{F}(s) - f(0)$	Differentiering
$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$	$s^2\mathbf{F}(s) - sf(0) - f'(0)$	
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\mathbf{F}(s)$	

Startværdi

$$\lim_{t \to 0} f(t) \qquad \lim_{s \to \infty} s\mathbf{F}(s)$$

Slutværdi (steady state)

$$\lim_{t \to \infty} f(t) \qquad \lim_{s \to 0} s\mathbf{F}(s)$$

(kun poler i venstre halvplan)

Laplace og signaler

Eksempel:

$$f(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow f_2(t) \ ?$$

$$f(t) = 2$$

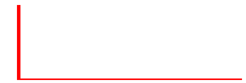
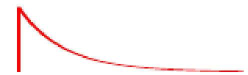
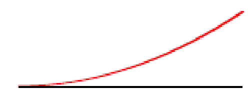
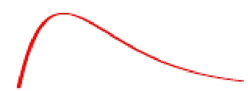
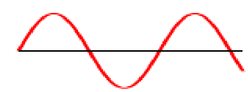
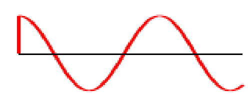
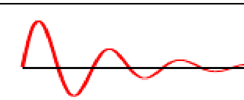
$$f_2(t) = \frac{1}{m}\int f(t)dt$$

$$F(s) = 2\frac{1}{s}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{m}\frac{1}{s}F(s)$$

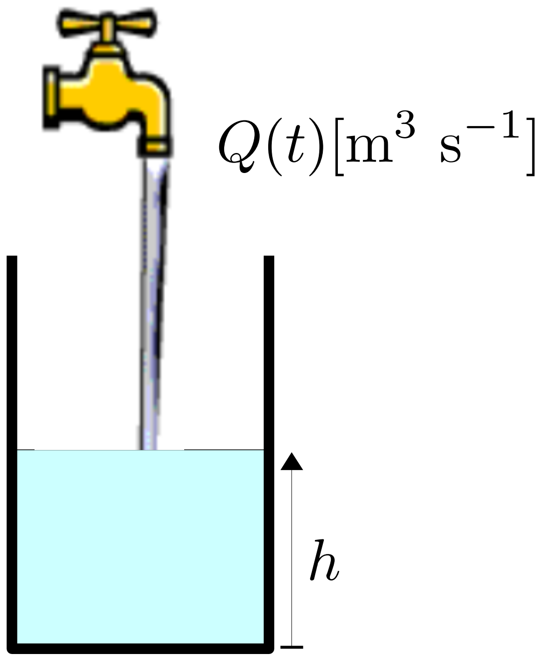
$$F_2(s) = \frac{2}{m}\ \frac{1}{s^2}$$

$$f_2(t) = \frac{2}{m}t$$

$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$	beskrivelse af $f(t)$	
$\delta(t)$	1		Enheds impuls
$u(t)$	$\frac{1}{s}$		Enheds trin (step)
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$		[1]) Eksponentiel
t	$\frac{1}{s^2}$		
t^2	$\frac{2}{s^3}$		
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$		[1])
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$		Sinus
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$		Cosinus
$e^{-at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$		[1])

[1]) $a > 0$ for kurve

Overføringsfunktion h som funktion af Q



Rundt kar, radius r

$A = r^2\pi$

Laplace

$$h(t) =$$

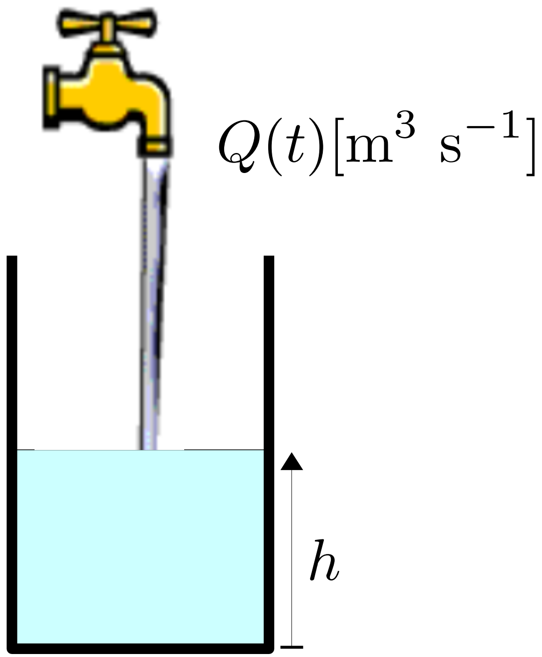
$$H(s) =$$

Overføringsfunktion

$$\frac{H(s)}{Q(s)} =$$

Blokdiagram

Overføringsfunktion
H som funktion af Q



Rundt kar, radius r

$$A = r^2\pi$$

$$h(t) = \frac{1}{A}\int_0^t Q(t)dt$$

Laplace

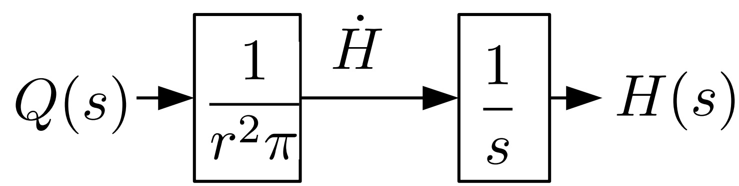
$$h(t) = \frac{1}{r^2\pi}\int_0^t Q(t)dt$$

$$H(s) = \frac{1}{r^2\pi}\frac{1}{s}Q(s)$$

Overføringsfunktion

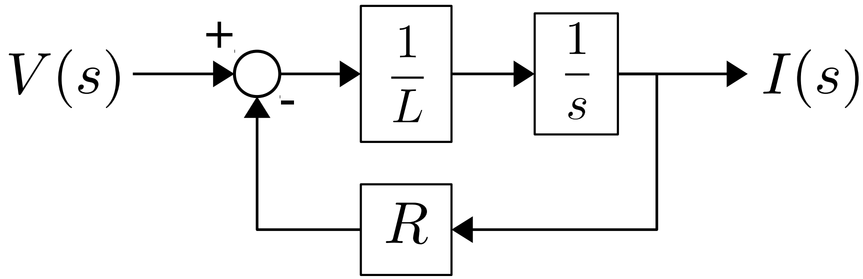
$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{r^2\pi s}$$

Blokdiagram



Eksempel

Overføringsfunktionen fra spænding V(s) til strøm I(s) for et kredsløb er modelleret som følger:



Hvad bliver overføringsfunktionen, hvis L gøres mindre:

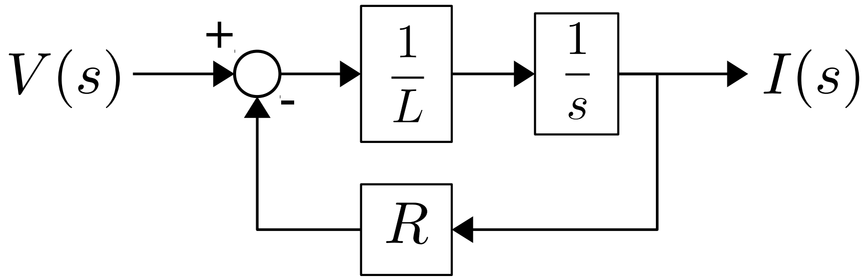
$$\lim_{L \to 0} \frac{I(s)}{V(s)} =$$

Hvad bliver steady state output for et step input (på A Volt)?

$$I_{ss} = \lim_{t \to \infty} I(t) =$$

Eksempel

Overføringsfunktionen fra spænding V(s) til strøm I(s) for et kredsløb er modelleret som følger:



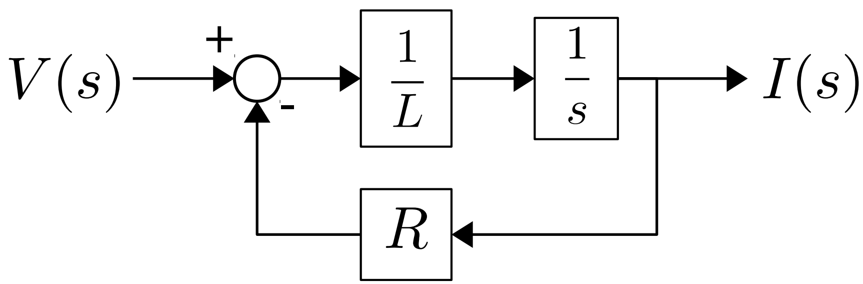
Hvad bliver overføringsfunktionen, hvis L gøres mindre:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls(1+\frac{1}{Ls}R)} = \frac{1}{Ls+R}$$

$$\lim_{L\to 0}\frac{I(s)}{V(s)} = \lim_{L\to 0}\frac{1}{Ls+R} = \frac{1}{R}$$

Eksempel

Overføringsfunktionen fra spænding V(s) til strøm I(s) for et kredsløb er modelleret som følger:



$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls + R}$$

Hvad bliver steady state output for et step input (på A Volt)?

$$V(s) = \frac{A}{s}$$

$$I_{ss} = \lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{A}{s} \frac{1}{Ls + R}$$

$$I_{ss} = \frac{A}{R}$$

Kontrolspørgsmål

1) Et model består af en blok med overføringsfunktionen G(s), input er en konstant spænding $v(t) = 5$ og output er en hastighed $\dot{x}(t)$

   – Hvordan udtrykkes spændingen i Laplace domænet $V(s) =$?

   a)Hvad er $\dot{x}(s)$, hvis $G(s) = \dfrac{s}{s+10}$?

   b)Hvad er $\dot{x}(t)$?

2) Hvis $v(t) = e^{-3t}$, hvad bliver så $\dot{x}(t)$?

Kontrolspørgsmål – svar 1)

1) Et model består af en blok med overføringsfunktionen G(s), input er en konstant spænding $v(t) = 5$ og output er en hastighed $\dot{x}(t)$

a)Hvordan udtrykkes spændingen i Laplace domænet $V(s) =$?

Da v(t)=0 for t<0 er spændingen et step:

$$V(s) = \frac{5}{s}$$

b)Hvad er $\dot{x}(s)$, hvis $G(s) = \dfrac{s}{s+10}$?

$$\dot{x}(s) = V(s)G(s) = \frac{5}{s}\frac{s}{s+10}$$

$$\dot{x}(s) = \frac{5}{s+10}$$

c)Hvad er $\dot{x}(t)$? $\dot{x}(t) = 5e^{-10t}$

2) Hvis $v(t) = e^{-3t}$, hvad bliver så $\dot{x}(t)$?

Kontrolspørgsmål – svar 2)

1) Et model består af en blok med overføringsfunktionen G(s), input er en konstant spænding $v(t) = 5$ og output er en hastighed $\dot{x}(t)$

$$G(s) = \frac{s}{s+10}$$

2) Hvis $v(t) = e^{-3t}$, $\dot{x}(t)$?

$$v(t) = e^{-3t} \Rightarrow V(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$\dot{X}(s) = \frac{1}{s+3}\frac{s}{s+10}$$

$$\dot{X}(t) = 1.43e^{-10t} - 0.43e^{-3t)}$$

Maple

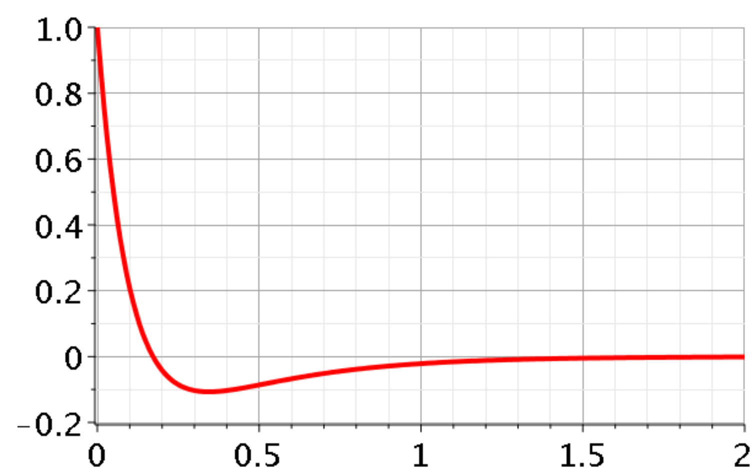
```
> with(inttrans):
> Xs := 1/(s+3) * s/(s+10);
```

$$Xs := \frac{s}{(s+3)\,(s+10)}$$

```
>
> Xt:=invlaplace(Xs,s,t);
```

$$Xt := \frac{10}{7}\,e^{-10\,t} - \frac{3}{7}\,e^{-3\,t}$$

```
> plot(Xt,t=0..2,font=[Helvetica,roman,20],thickness=4,
  color=red,labelfont=[Roman,roman,20],gridlines=true,view=
  [0..2,-0.2..1.0]);
```



Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

Kursusuge 3

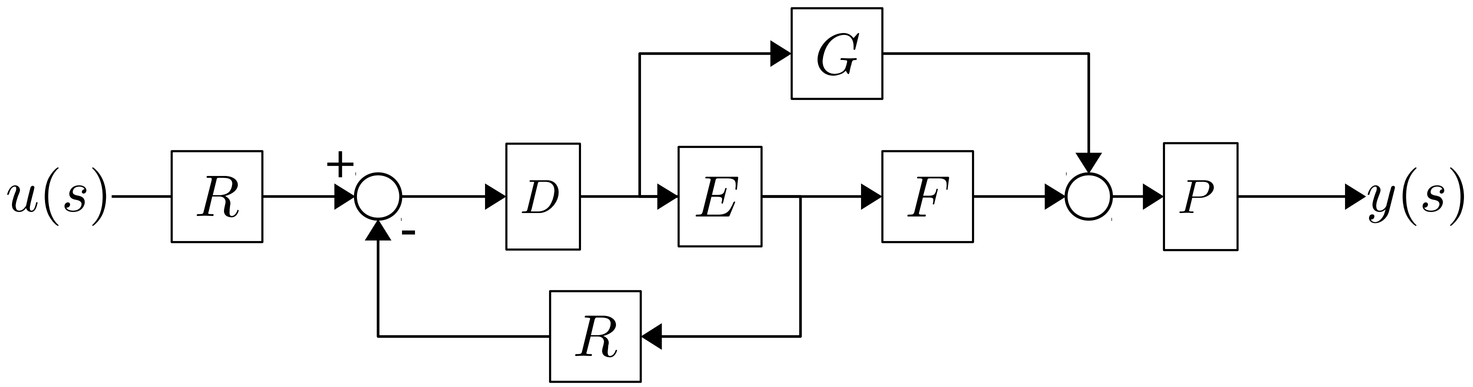
Plan

- Laplace intro
- Blokdiagram manipulering
- Phasor

Øvelse

- Modellering af robot

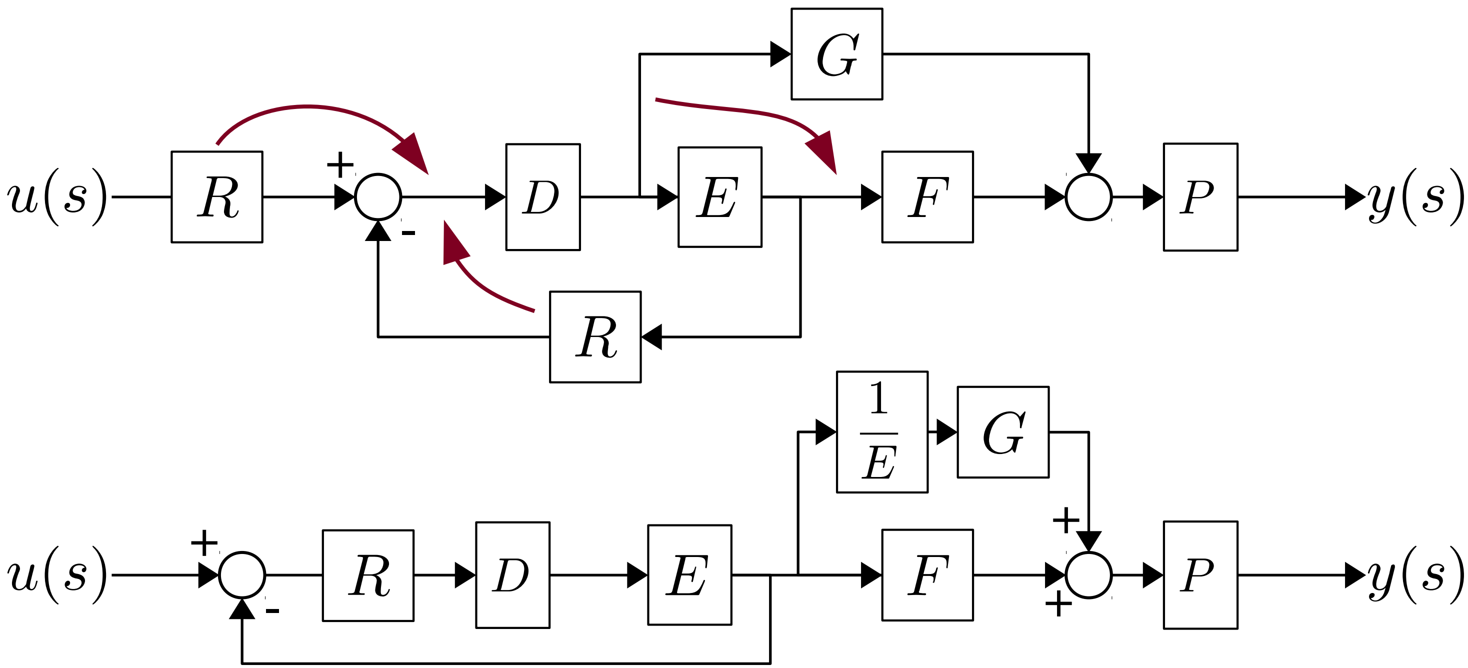
Blokdiagram manipulation



Overføringsfunktion?

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = ?$$

Blokdiagram manipulation



$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{RDE}{1+RDE}\left(\frac{G}{E} + F\right)P$$

Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

Kursusuge 3

Plan

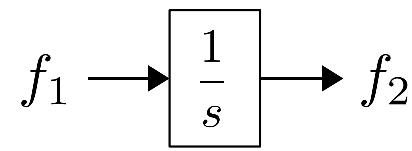
- Laplace intro
- Blokdiagram manipulering
- Phasor

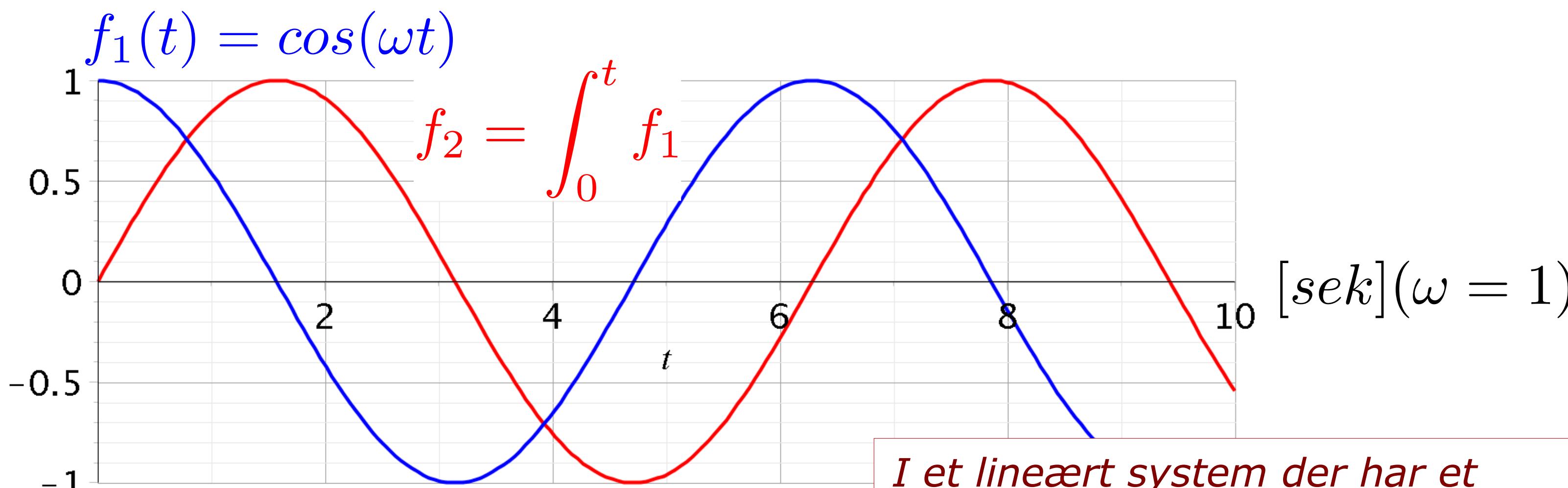
Øvelse

- Modellering af robot

DTU Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering

Frekvens – Phasor

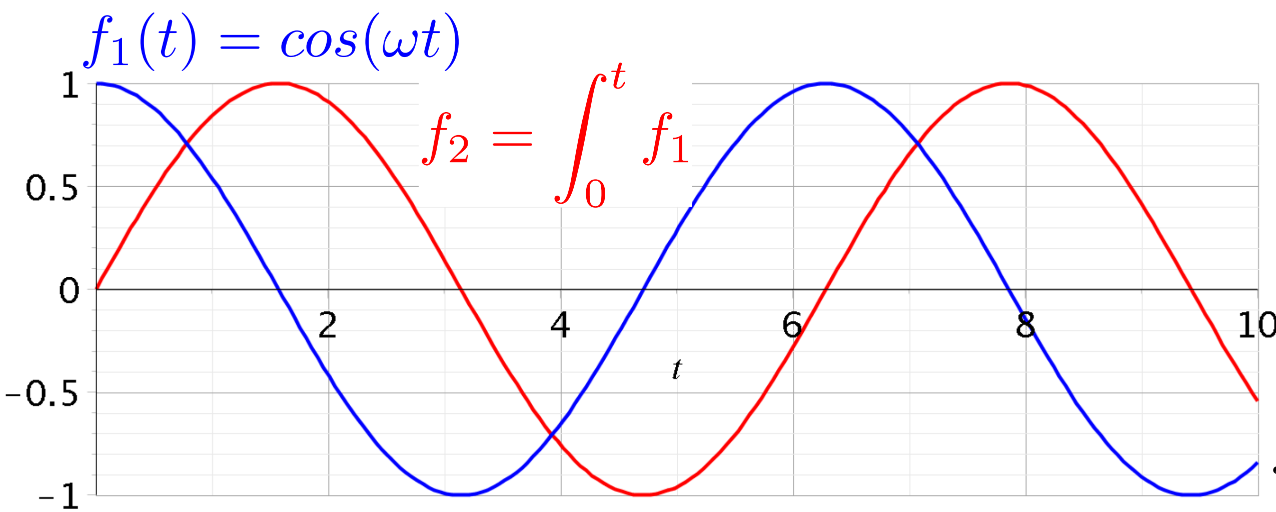




$$\omega \text{ [rad } s^{-1}\text{] (vinkelfrekvens)}$$
$$\omega = 2\pi f$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ [Hz]}$$

I et lineært system der har et sinusformet signal ind vil have et sinusformet signal ud med samme frekvens,
men fase og amplitude kan være ændret.

Forbindelse frekvens – Laplace



$$f_1(t) \longrightarrow \boxed{k \int_0^t} \longrightarrow f_2(t)$$

$$f_1(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{s}} \longrightarrow f_2(s)$$

$$f_2(\omega, t) = k \int_0^t f_1(\omega, t) dt$$

Forstærkning og fasedrejning

Laplace:

$$F_2(s) = \frac{k}{s} F_1(s)$$

Phasor:

$$F_2(j\omega) = \frac{k}{j\omega} F_1(j\omega)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Phasor er subset af Laplace

Laplace-udtryk kan tolkes som Phasor, når

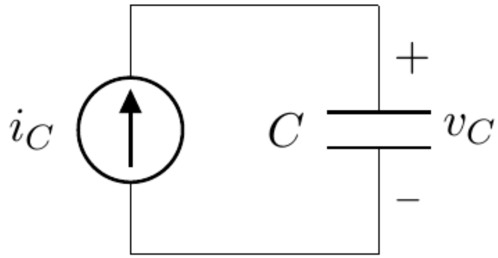
$$s = \sigma + j\omega \Big| \begin{matrix} \sigma = 0, \\ \omega > 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow s = j\omega$$

Dvs. forstærkning og fasedrejning ved en frekvens ω kan udledes direkte i Laplace domænet

Kontrolspørgsmål
Elektronikkomponenter og Laplace

For en kondensator med kapaciteten C (i Farad) er relationen mellem spænding og strøm således:



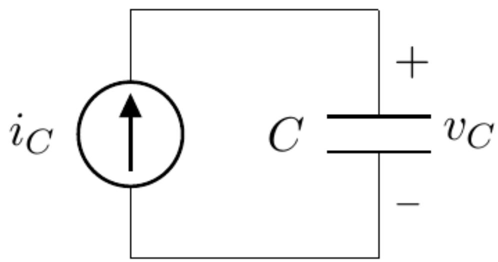
$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau$$

Udtryk $V(s)$

Hvad er overføringsfunktionen fra strøm til spænding?

Kontrolspørgsmål - svar
Elektronikkomponenter og Laplace

For en kondensator med kapaciteten C (i Farad) er relationen mellem spænding og strøm således:



$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau$$

Udtryk $V(s)$

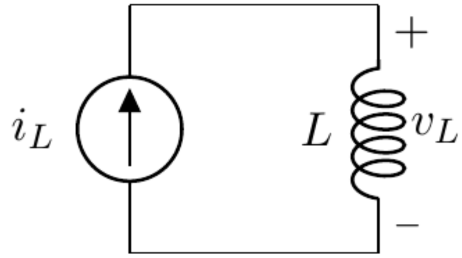
$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s)$$

Hvad er overføringsfunktionen fra strøm til spænding?

$$Z(s) = \frac{V_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC}$$

Kontrolspørgsmål Elektronikkomponenter og Laplace

For en spole med induktansen L (i Henry) er relationen mellem spænding og strøm i Laplacedomænet således:



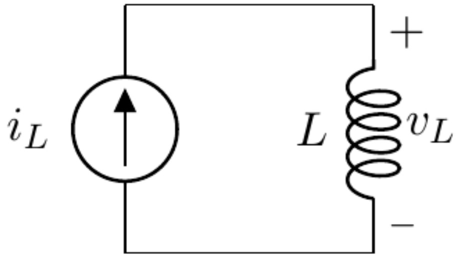
$$V_L(s) = sLI(s)$$

Hvad er overføringsfunktionen fra strøm til spænding?

Udtryk $v_L(t)$ i tidsdomænet

Kontrolspørgsmål - svar
Elektronikkomponenter og Laplace

For en spole med induktansen L (i Henry) er relationen mellem spænding og strøm i Laplacedomænet således:



$$V_L(s) = sLI(s)$$

Hvad er overføringsfunktionen fra strøm til spænding?

$$Z_L(s) = \frac{V_L(s)}{I(s)} = sL$$

Udtryk $v_L(t)$ i tidsdomænet

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

Kontrolspørgsmål
Laplace og Phasor

Et kredsløb med overføringsfunktionen

$$G(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{10}{s + 312}$$

Hvad er så overføringsfunktionen som gain M og fasedrejning φ ved frekvensen $\omega = 628 \text{ rad/s}$ og $u(t) = cos(\omega t)$?

$$G(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{u(j\omega)} = Me^{j\varphi}$$

Kontrolspørgsmål - Svar
Laplace og Phasor

Et kredsløb med overføringsfunktionen
Audregning er forkert

$$G(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{10}{s+312}$$

Hvad er så overføringsfunktionen som gain M og fasedrejning φ ved frekvensen $\omega = 628 \text{ rad/s}$ og $u(t) = cos(\omega t)$?

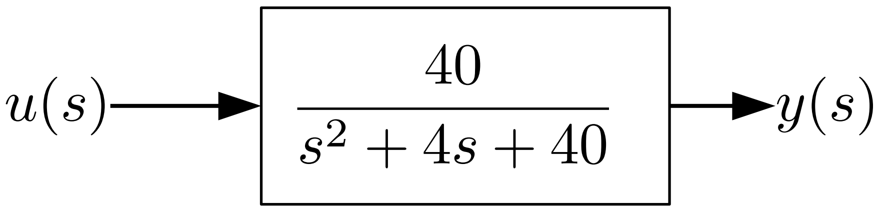
$$G(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{10}{j\omega + 312}$$

$$G(M, \varphi) = \frac{10e^{j0}}{Ae^{j\phi}},\ A = \sqrt{\omega^2 + 312^2)},\ \phi = \arctan\frac{\omega}{312}$$

$$M = \frac{10}{A} = 0.0413 \qquad \varphi = 0 - \phi = -1.11 \text{ rad} = -63.6^o$$

Ny opgave / eksempel

Et system har følgende overføringsfunktion:



a) Hvis er et step med størrelsen 1, hvad er så output som funktion af tiden?

b) Hvis u er en cosinus med amplituden 1: $u(t) = \cos(\omega t)$

hvad bliver så amplituden og fasedrejning af $y(t)$ når:

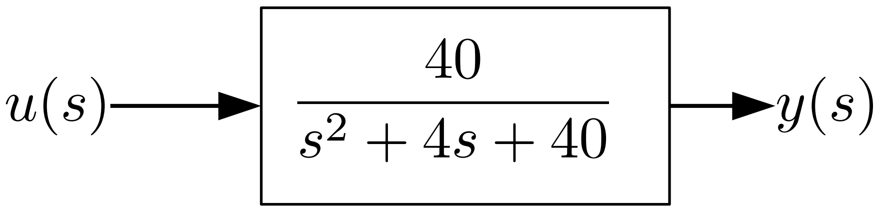
$$\omega = 1$$

$$\omega = 1000$$

$$\omega = \sqrt{40}$$

Phasor

Et system har følgende overføringsfunktion:



b) Hvis u er en cosinus med amplituden 1: $u(t) = \cos(\omega t)$

hvad bliver så amplituden og fasedrejning af $y(t)$ når:

$$G(\omega) = \frac{40}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 40}$$

$\omega = 0.1 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow G(w) \approx 1\angle 0^o$

$\omega = 1000 \quad \Rightarrow G(w) \approx 40 \cdot 10^{-6} \angle -180^o$

$\omega = \sqrt{40} \quad \Rightarrow G(w) \approx 1.4\angle -90^o$

Step input

Et system har følgende overføringsfunktion:

$$u(s) \longrightarrow \boxed{\frac{40}{s^2 + 4s + 40}} \longrightarrow y(s)$$

a) Hvis er et step med størrelsen 1, hvad er så output som funktion af tiden?

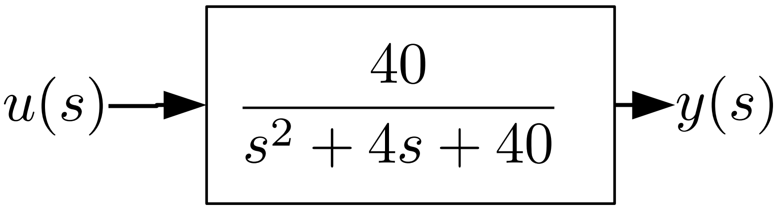
Maple?

MATLAB ?

Simulink ?

Maple

Et system har følgende overføringsfunktion:



a) Hvis er et step med størrelsen 1, hvad er så output som funktion af tiden?

Maple:

```
> with(inttrans);
```

[*addtable*, *fourier*, *fouriercos*, *fouriersin*, *hankel*, *hilbert*, *invfourier*, *invhilbert*, *invlaplace*, *invmellin*, *laplace*, *mellin*, *savetable*]

```
>
> G := 40 /(s^2 + 4*s + 40);
```

$$G := \frac{40}{s^2 + 4\,s + 40}$$

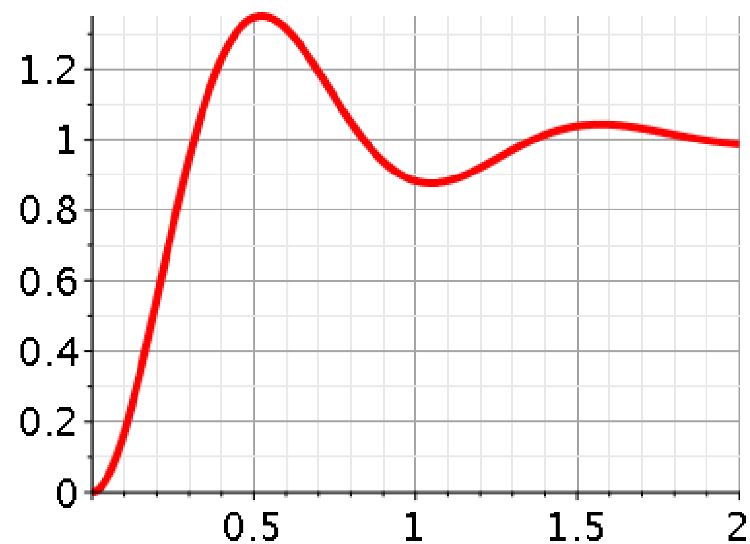
```
> u := 1/s;
```

$$u := \frac{1}{s}$$

```
> v2t := invlaplace(u*G,s,t);
```

$$v2t := 1 - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,(3\cos(6\,t) + \sin(6\,t))$$

```
> plot(v2t, t=0..2, font=[Helvetica,roman,16],thick
  color=red,gridlines=true);
```



MATLAB

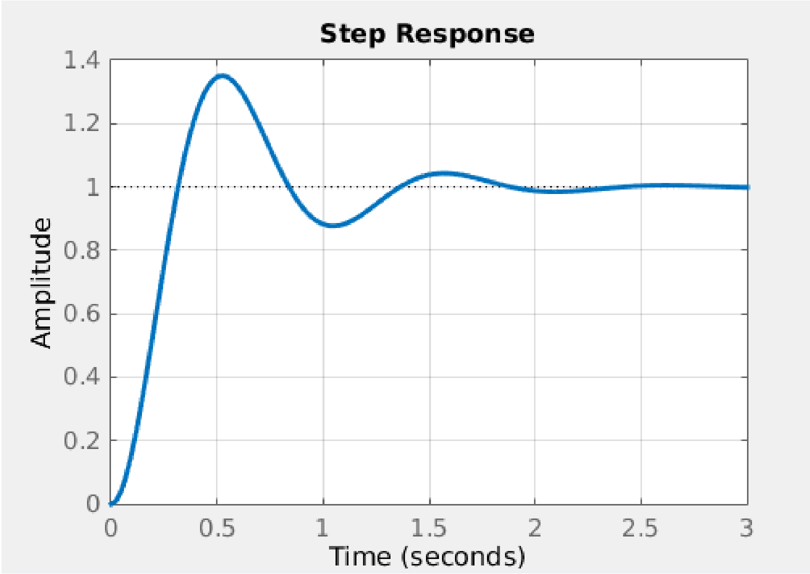
Et system har følgende overføringsfunktion:

$$u(s) \longrightarrow \boxed{\frac{40}{s^2+4s+40}} \longrightarrow y(s)$$

a) Hvis er et step med størrelsen 1, hvad er så output som funktion af tiden?

MATLAB:

```
figure(7)
G=tf([40],[1 4 40])
step(G)
grid
```

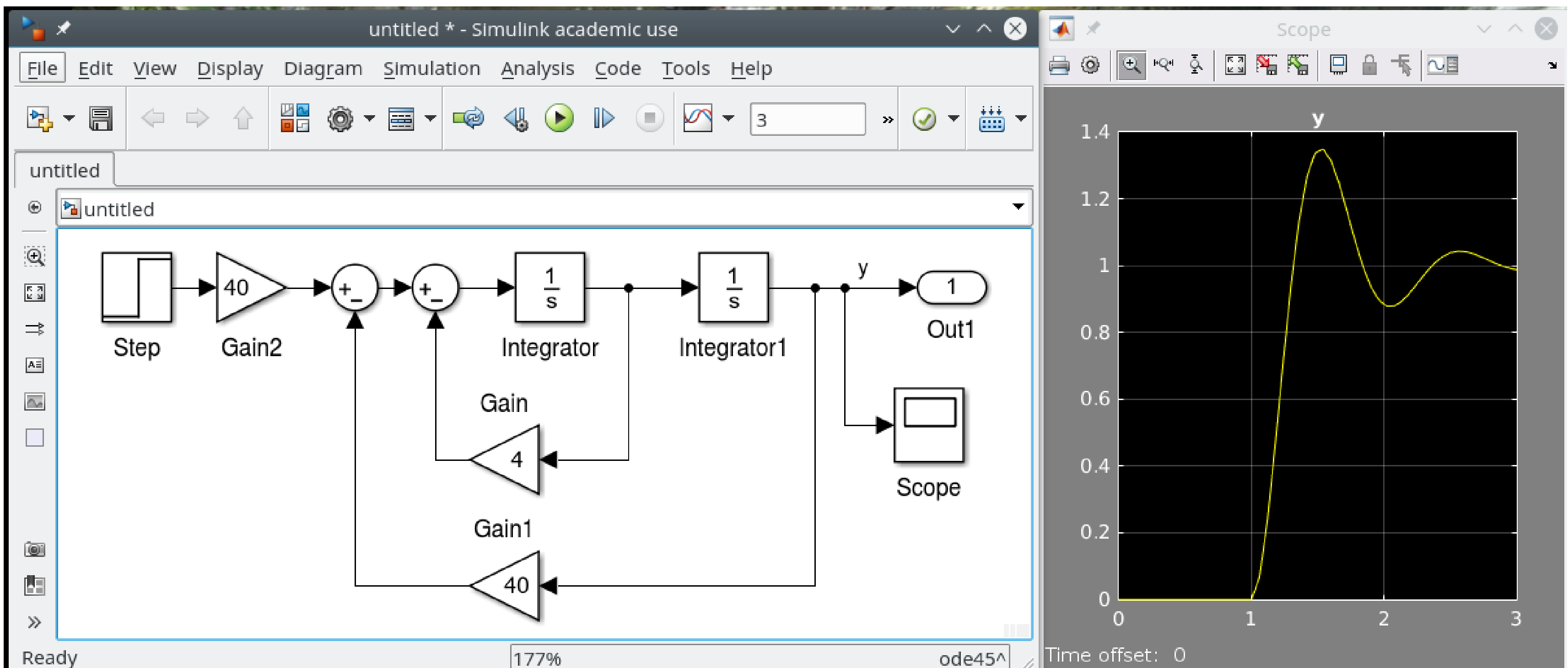


MATLAB Simulink

Et system har følgende overføringsfunktion:

$$u(s) \longrightarrow \boxed{\frac{40}{s^2+4s+40}} \longrightarrow y(s)$$

a) Hvis er et step med størrelsen 1, hvad er så output som funktion af tiden?



Grupperegning og øvelse

- Modellering øvelse (gælder 2 øvelsesgange)
  - Motor model i Simulink (motor, gear og hjul)
  - Parameterestimering ud fra måling på robot
  - Robot med hjul på gulv (tilføjelse af robottens masse)
- Peer review af rapport 1