Laplace i elektronik

(rev 0.9)

Jens Christian Andersen
Thomas Taul
DTU Elektro

2014

Indhold

Kapitel 1

Laplace

1.1 Introduktion

Laplace transformationen er en lineær operation, hvor en funktion $f(t)$ med et reelt argument t ($t \geq 0$), transformeres til en funktion $\mathbf{F}(s)$ med et komplekst argument $s = \sigma + j\omega$. Denne transformation er bijektiv for de fleste praktiske anvendelser.

Det Laplace transformerede udtryk har den nyttige egenskab, at mange relationer og transaktioner i den originale $f(t)$ svarer til enklere relationer og operationer i det transformerede system, $\mathbf{F}(s)$.

Det antages her at Laplacetransformation grundlæggende allerede er kendt, ligesom læseren antages at være bekendt med Kirchhoffs ligninger (KCL og KVL) med phasorer ($j\omega$ beregninger) for kredsløb med passive komponenter - modstande, kondensatorer og spoler - samt spænding- og strømkilder.

Dette kapitel udvidder Phasor beregningerne til Laplace domænet ved at tillade at en fysisk frekvens ω også kan udtrykkes med en kompleks frekvens $s = \sigma + j\omega$. Det gør at spændinger og strømme ikke behøver at være sinusformede, og det er især de transiente spændinger og strømme der behandles her.

Overføringsfunktioner (i s eller $j\omega$) giver et kredsløbs opførsel i frekvensdomænet - som ofte opsummeres i et Bode-plot. Med en given frekvens som input giver overføringsfunktionen amplitude og fase af output (relativt til input).

Men Laplace kan mere end det. Input behøver ikke at være en frekvens, men kan være enhver kurveform (f.eks. step eller rampe) der kan Laplacetransformeres. Det betyder når det Laplacetransformerede input multipliceres med overføringsfunktionen fås umiddelbart den Laplacetransformerede af output. Kurveformen af output fås så efter en invers Laplace transformation.
Dette er emnet for denne note

1.2 Laplace transformation

1.2.1 Definition

Laplacetransformation af en funktion $f(t)$, defineret for alle reelle tal $t \geq 0$, er en funktion $\mathbf{F}(s)$, defineret ved:

$$\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} f(t)\ e^{-st} dt, \tag{1.1}$$

hvor parameteren s er et komplekst tal $s = \sigma + j\omega$, og der integreres fra $t = 0$ til $t = \infty$, funktionen $f(t)$ antages derfor at have $f(t) = 0$ for $t < 0$.

Den inverse Laplace transformation er tilsvarende defineret som:

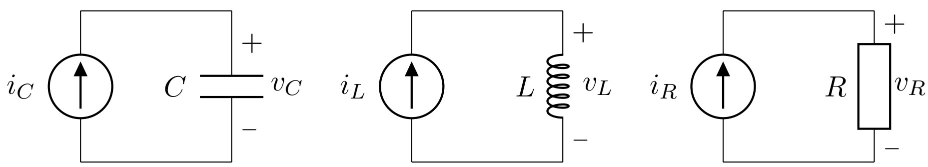
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{F}(s)\right\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \mathbf{F}(s)\ e^{st} ds \tag{1.2}$$

1.2.2 Regneregler for Laplace udtryk

Regneregler for Laplace udtryk $\mathbf{F}(s)$ er opsummeret i tabel 1.1. Disser regneregler er ikke i konflikt med regnereglerne for Phasor udtryk.

1.3 Fra Phasor til Laplace

Phasor anvender en notation med amplitude og fase $\mathbf{V} = V_m \angle\theta$ (eller med Euler notation $\mathbf{V} = V_m e^{j\theta}$) for en given frekvens ω, som udtrykker at $V(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$. Både med Phasor og med Laplace kan spændingen over og strømmen gennem kondensatorer og spoler udtrykkes, og forholdet mellem spænding og strøm kan udtrykkes som komponentens impedans $Z = \mathbf{V}/\mathbf{I}$. Med Phasor udregning udtrykkes impedansen af kondensatorer og spoler som funktion af $j\omega$.



Ligning:	$v_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_C(\tau) d\tau$	$v_L(t) = L\dfrac{d}{dt} i_L(t)$	$v_R(t) = R i_R(t)$
Laplace:	$\mathbf{V}_C(s) = \dfrac{1}{sC}\mathbf{I}_C(s)$	$\mathbf{V}_L(s) = sL\mathbf{I}_L(s)$	$\mathbf{V}_R(s) = R\mathbf{I}_R(s)$
Phasor:	$\mathbf{V}_C(\omega) = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I}_C(\omega)$	$\mathbf{V}_L(\omega) = j\omega L\mathbf{I}_L(\omega)$	$\mathbf{V}_R(\omega) = R\mathbf{I}_R(\omega)$

Figur 1.1: Spænding og strøm i kondensatorer og spoler

Tabel 1.1: Regneregler for Laplace udtryk

$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$	Operation
$Af(t)$	$A\mathbf{F}(s)$	Skalering
$f_1(t) + f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s)$	Addition
$f_1(t) - f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s) - \mathbf{F}_2(s)$	Subtraktion
$\frac{d}{dt}f(t)$	$s\mathbf{F}(s) - f(0)$	Differentiering
$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$	$s^2\mathbf{F}(s) - sf(0) - f'(0)$	Differentiering
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\mathbf{F}(s)$	Integration
$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} s\mathbf{F}(s)$	Startværdi
$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} s\mathbf{F}(s)$	Slutværdi

Laplace parameteren $s = \sigma + j\omega$ indeholder parameteren $j\omega$ fra Phasor udtrykket, og Phasor udtryk kan derfor ses som et subset af Laplace.

Udregninger af overføringsfunktioner fra en sinusformet spænding eller strøm til en anden, gennem et kredsløb, kan derfor gøres mere generelt ved blot at erstatte $j\omega$ med s i den beregnede overføringsfunktion.

Tilsvarende kan en overføringsfunktion beregnet i Laplace domænet $\mathbf{T}(s)$ tolkes som en Phasor overføringsfunktion $\mathbf{T}(\omega)$, ved at erstatte s med $j\omega$. Amplitude og fasedrejning for en fysisk frekvens ω kan herefter regnes som normalt.

Ændringer fra tidligere kredsløbsudregninger er således kun som vist på figur 1.2.

Komponent	*Phasor*	*Laplace*
R	$Z_R = R$	$Z_R = R$
C	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$	$Z_C = \frac{1}{sC}$
L	$Z_L = j\omega L$	$Z_L = sL$

Figur 1.2: Impedans i passive komponenter

1.4 Ikke sinusformede spændinger

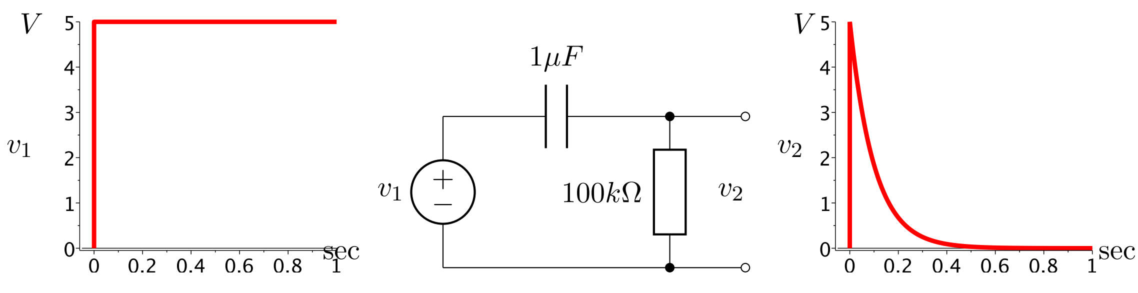
Laplace giver mulighed for at behandle ikke sinusformede spændinger. Dette giver nye muligheder for at beregne spændinger og strømme på et bestemt tidspunkt, blot den kurveform der påtrykkes kredsløbet kan Laplace transformeres.

1.4.1 Transformation af almindelige udtryk

Mange kurveformer af spændinger og strømme kan omsættes fra et udtryk i tid $f(t)$ til et Laplace udtryk $\mathbf{F}(s)$. Ofte anvendes en tabel (eller et matematikprogram som Maple) til denne transformation. Tabel 1.2 viser et udpluk af disse transformationer.

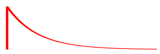
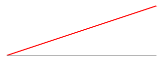
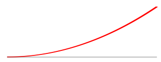
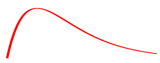
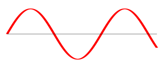
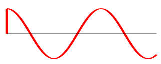
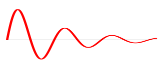
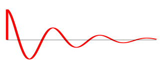
1.4.2 Eksempel - kredsløb med step indput

For et RC kredsløb med inputspændingen $v_1(t)$ skal outputspændingen $v_2(t)$ udregnes. Kredsløb og spændinger er vist i figur 1.3.



Figur 1.3: RC kredsløb med step

Tabel 1.2: Ofte forekommende Laplace transformationer

$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$	beskrivelse af $f(t)$
$\delta(t)$	1	 Enheds impuls
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	 Enheds trin (step)
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	 1) Eksponentiel
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^2	$\frac{2}{s^3}$	
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	 1)
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	 Sinus
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	 Cosinus
$e^{-at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	 1)
$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	 1)

1) Kurve eksempler gælder for $a > 0$.

Metode

- Find overføringsfunktion - med normale kredsløbsberegninger.
- Laplacetransformer indputspændingen.
- Find Laplaceudtryk for outputspændingen ved at multiplicere input med overføringsfunktion.
- Invers Laplacetransformer outputspændingen.

Løsning

For kredsløbet kan overføringsfunktionen udtrykkes som en spændingsdeling:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_2(s) &= \mathbf{V}_1(s)\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}\ , \quad \text{eller} \\
\mathbf{V}_2(s) &= \mathbf{V}_1(s)\frac{sRC}{sRC+1}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Indputspændingen Laplacetransformeres ved hjælp at tabellen 1.2. Amplituden $5V$ overføres til Laplace udtrykket ved skaleringsreglen i tabel 1.1. Det samlede udtryk for $\mathbf{V}_2(s)$ bliver derfor

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_2(s) &= 5\ \frac{1}{s}\ \frac{sRC}{sRC+1} \\
\mathbf{V}_2(s) &= \frac{5RC}{sRC+1} \\
\mathbf{V}_2(s) &= 5\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Dette udtryk $\mathbf{V}_2(s)$ omsættes tilbage til tidsdomænet $v_2(t)$ med en invers Laplace transformation. Skaleringen "5" bevares og resten af udtrykket fremgår direkte af tabel 1.2 med $a = \frac{1}{RC}$, og $V_2(t)$ bliver således

$$
\begin{aligned}
v_2(t) &= 5e^{-\frac{t}{RC}}\ \text{,eller med værdierne indsat} \\
v_2(t) &= 5e^{-10t}\ \text{som vist i figur 1.3.}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

1.5 Start spænding og startstrøm

Kondensatorer kan have en startspænding, ligesom en spole kan have en startstrøm. I det foregående eksempel vil inputspændingen $v_1(t)$, et 5 V step, give samme resultat, som hvis kondensatoren havde haft denne spænding, 5 V, som startspænding. Laplace antager at alle spændinger og strømme er 0 for tiden $t <= 0$, og det gør at en startspænding kommer til at optræde som et step til tiden $t = 0$, netop som $v_1(t)$ gjorde i eksemplet.

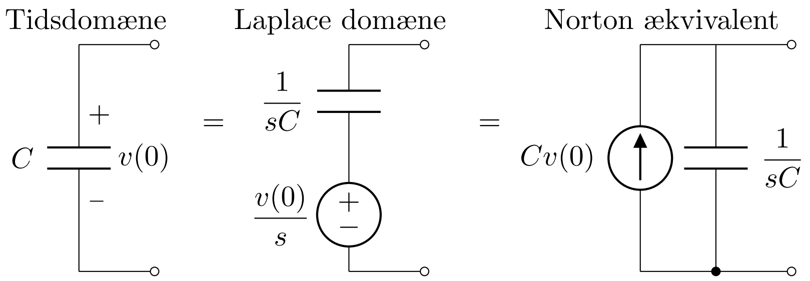
En kondensator med en startspænding kan derfor repræsenteres med en spændingskilde i serie med kapaciteten, som vist på figur 1.4.

På samme måde kan en spole L med en startstrøm $i(0)$ i Laplace udtrykkes som en strømkilde i parallel med spolen, som vist på figur 1.5

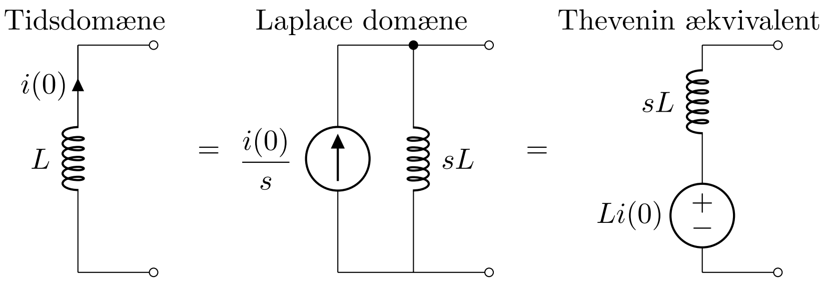
1.5.1 Eksempel med startstrøm i spole

Et kredsløb som vist på figur 1.6 vides at der på et tidspunkt er netop 3 A strøm i spolen og spændingskilden er fra dette tidspunkt konstant +12 V.

Find et udtryk for outputspændingen $v_2(t)$.



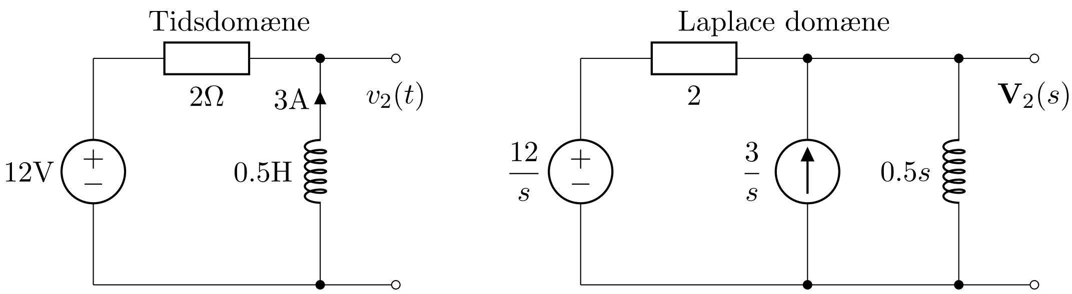
Figur 1.4: Kondensator med startspænding



Figur 1.5: Spole med startstrøm

Metode

- Omsæt kredsløb til Laplace domænet:
  – Erstat startspænding med en spændingskilde (eller eventuelt en Norton strømkilde ækvivalent).
  – Erstat startstrøm med en strømkilde (eller eventuelt en Thevenin spændingskilde ækvivalent).
  – Erstat alle impedanser med de tilsvarende laplacetransformerede.



Figur 1.6: Kredsløb med startstrøm i spolen

- Udregn outputspændingen (i Laplace domænet) med almindelige kredsløbsteknikker.
- Invers Laplacetransformer outputspændingen med tabel 1.2.

Løsning

Vi sætter tiden $t = 0$ til det tidspunkt, hvor vi kender startspændingen og omsætter kredsløbet til Laplacedomænet.

Startstrømmen omsættes til en strømkilde med samme retning og værdien $\mathbf{I}(s) = \frac{3}{s}$. De 12V erstattes med $\frac{12}{s}$, da de ses som et step. Spolen omsættes til en spole i Laplace-domænet med impedansen $0.5s$. Kredsløbet ser derefter ud som til højre i figur 1.6.

Outputspændingen $\mathbf{V}_2(s)$ beregnes med KCL, hvor der opstilles følgende udtryk for at summen af strømmen i noden ved $\mathbf{V}_2(s)$ i de 3 grene (som vist i (1.6))

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{V}_2 - \frac{12}{s}}{2} - \frac{3}{s} + \frac{\mathbf{V}_2}{0.5s} &= 0 \\
\frac{\mathbf{V}_2}{2} + \frac{\mathbf{V}_2}{0.5s} &= \frac{12}{2s} + \frac{3}{s} \\
\mathbf{V}_2 \frac{s+4}{2s} &= \frac{12+6}{2s} \\
\mathbf{V}_2 &= 18\frac{1}{s+4}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Invers Laplace giver så

$$v_2(t) = 18e^{-4t} \tag{1.7}$$

1.5.2 Eksempel med startspænding over kondensator

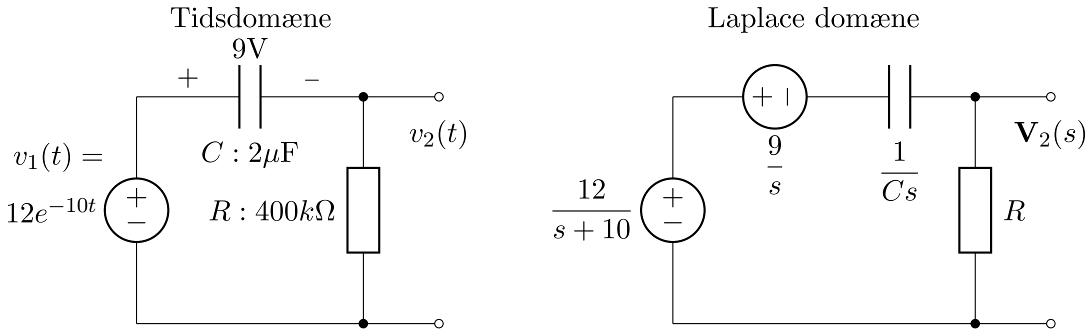
Kredsløbet i figur 1.7 indeholder en kondensator, der til et tidspunkt, som vi kalder $t = 0$, har en spænding på 9 V. Spændingen $v_1(t)$ beskrives på dette tidspunkt som en aftagende eksponentialfunktion $12e^{-10t}$.

Find et udtryk for $v2(t)$.

Løsning

Kredsløbet omsættes til Laplacedomænet, som vist til højre i figur 1.7, og da spændingen $\mathbf{V}_1(s) = \frac{12}{s+10}$ og startspændingen $\frac{9}{s}$ blot er to spændinger i serie, kan de summeres (med fortegn) til en spænding,

Kredsløbet løses derfor med en ligning ud fra strømmene i knudepunktet



Figur 1.7: Kredsløb med startspænding over kondensator

ved $\mathbf{V}_2(s)$:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{V}_2 - \left(\frac{12}{s+10} - \frac{9}{s}\right)\right) Cs + \frac{\mathbf{V}_2}{R} &= 0 \\
\mathbf{V}_2 Cs + \frac{\mathbf{V}_2}{R} &= \frac{(12s - 9(s+10))Cs}{s(s+10)} \\
\mathbf{V}_2 \frac{RCs+1}{R} &= \frac{(3s-90)C}{s+10} \\
\mathbf{V}_2 &= \frac{(3s-90)RC}{(s+10)(RCs+1)} \\
\mathbf{V}_2 &= \frac{3s-90}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Udtrykket kan ikke umiddelbart findes i tabellen, men efter en brøk-expansion simplificeres udtrykket til en sum af brøker. Brøkekspanderingen er almindelig operation, som i det fleste tilfælde klares af lommeregner eller Maple (*convert(F(s), parfrac, s)*). Her tages den skridt for skridt som eksempel.

En brøk med flere led i nævneren kan normalt ekspanders til en sum af brøker, hvor hver brøk kun har et af nævnerleddene.

$$\frac{3s-90}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})} = \frac{k_1}{s+10} + \frac{k_2}{s+\frac{1}{RC}} \tag{1.9}$$

De 2 konstanter udregnes ved at multiplicere hvert led med en af nævnerene, og så værdisætte s således at netop denne nævner bliver 0 (hvis en nævner optræder flere gange – som s^2 eller $(s{+}10)^2$ er det dog lidt mere kompliceret):

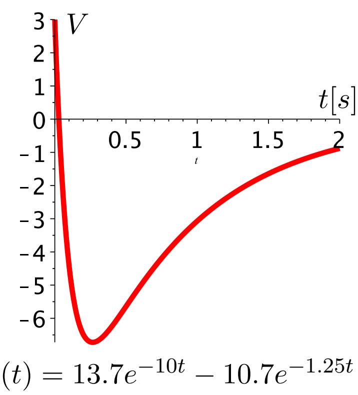
$$\begin{aligned}
\frac{(3s-90)(s+10)}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})} &= \left.\frac{k_1(s+10)}{s+10} + \frac{k_2(s+10)}{s+\frac{1}{RC}}\right|_{s=-10} \\
k_1 &= \frac{3(-10)-90}{-10+\frac{1}{RC}}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{(3s-90)(s+\frac{1}{RC})}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})} &= \left.\frac{k_1(s+\frac{1}{RC})}{s+10}+\frac{k_2(s+\frac{1}{RC})}{s+\frac{1}{RC}}\right|_{s=-\frac{1}{RC}} \\ k_2 &= \frac{-3\frac{1}{RC}-90}{-\frac{1}{RC}+10}\end{aligned} \tag{1.11}$$

og med komponentværdier indsat ($C = 2\mu$F og $R = 400k\Omega$):

$$\begin{aligned} k_1 &= 13.7 \quad k2 = -10.7 \\ \mathbf{V}_2 &= \frac{13.7}{s+10} - \frac{10.7}{s+1.25}\end{aligned} \tag{1.12}$$

Nu kan hvert led invers-Laplace transformeres som tabelopslag, og resultatet $v_2(t)$ bliver som vist på figur 1.8.



Figur 1.8: Spændingen $v_2(t)$ ud af kredsløbet i figur 1.7

1.6 Start- og slutværdisætning

Startspændingen ved opstart at et givet kredsløb (som i eksempel 1.5.2), eller steady-state værdien (slutværdien), er måske det vigtigste, og disse kan udregnes uden at foretage en invers-Laplace transformation.

1.6.1 Startværdi

Spændingen $\mathbf{V}_2(s)$ i eksempel 1.5.2 var i (1.8) fundet til:

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{3s-90}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})} \tag{1.13}$$

Ud fra startværdisætningen kan spændingen til tiden $t = 0$ udregnes ud fra tabelopslaget (fra tabel 1.1)

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathbf{F}(s) \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} v_2(t) &= \lim_{s\to\infty} s\frac{3s-90}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})} \\ v_2(0) &= \lim_{s\to\infty}\frac{3s^2-90s}{s^2+s(10+\frac{1}{RC})+\frac{10}{RC})} \\ v_2(0) &= 3\end{aligned} \tag{1.15}$$

dette resultat passer med det fuldt udregnede resultat i figur 1.8.

1.6.2 Slutværdisætning

Tilsvarende forrige eksempel kan slutværdien (steady state) udregnes ud fra tabelopslaget:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\mathbf{F}(s) \tag{1.16}$$

For udtrykket fra eksempel 1.5.2 fås

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} v_2(t) &= \lim_{s\to 0} s\frac{3s-90}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})} \\
v_2(\infty) &= \lim_{s\to 0} \frac{3s^2-90s}{s^2+s(10+\frac{1}{RC})+\frac{10}{RC}} \\
v_2(\infty) &= 0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

dette resultat passer ligeledes med det udregnede resultat i figur 1.8.

1.6.3 Maksimum og minimum

Eksempel 1.5.2 giver en kurveform som vist i figur 1.8 med et minimum i nærheden af 6.5 V. Den eksakte værdi er rimeligt let at finde ved at se hvor differentialkvotienten er 0.

Vi vil, for at illustrere en anden regneregel, differentiere $v_2(t)$ allerede i Laplacedomænet ved at udnytte differentieringsreglen fra tabel 1.1:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = s\mathbf{F}(s) - f(0) \tag{1.18}$$

her har vi allerede udregnet $\mathbf{F}(s) = \mathbf{V}_2(s)$ og $f(0)$ som er startværdien 3 V. Vi har derfor:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_2(s) &= \frac{3s-90}{(s+10)(s+1.25)} \\
v_2(0) &= 3\text{V} \\
\mathcal{L}\{v_2'(t)\} &= s\frac{3s-90}{(s+10)(s+\frac{1}{RC})} - 3 \\
\mathcal{L}\{v_2'(t)\} &= \frac{-137}{(s+10)} + \frac{13.4}{s+1.25} \\
v_2'(t) &= -137\,\mathrm{e}^{-10.0\,t} + 13.4\,\mathrm{e}^{-1.25\,t}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

hvor $v_2'(t) = 0$ findes tidspunkt for minimum, og fra det den mest negative spænding:

$$\begin{aligned}
v_2'(t) = 0 \quad &: \quad -137\,\mathrm{e}^{-10.0\,t} + 13.4\,\mathrm{e}^{-1.25\,t} = 0 \\
\Rightarrow \quad t &= 0.266 \text{ sek} \\
v_2(0.266) &= -6.7 \text{ V}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

1.7 Overføringsfunktion og differentialligning

En overføringsfunktion for et elektronisk kredsløb er ofte enklere at beregne direkte i Laplace-domænet (ud fra f.eks. at $Z_C = \frac{1}{sC}$ og $Z_L = sL$) og overføringsfunktionen udregnes med samme regneregler som for DC, d.v.s. Kirchhoffs love og Ohms lov.

Til tider kan det dog være hensigtsmæssigt at opstille den tilhørende differentialligning, og selv om det ret enkelt fremgår af tabel 1.1, er her et par eksempler.

1.7.1 Eksempel med system med en pol og et nulpunkt

Et eksempel kunne være (et lead kredsløb) med udgangssignalet $y(s)$ og indgangssignalet $u(s)$:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = 3\frac{s+30}{s+300} \tag{1.21}$$

En enkel omrokering giver:

$$\begin{aligned} y(s+300) &= (3(s+30))u \\ sy + 300y &= 3su + 90u \end{aligned} \tag{1.22}$$

Og derfra til den tilsvarende tidsdomæne differentialligning (fra tabel 1.1)

$$\frac{d}{dt}y + 300y = 3\frac{d}{dt}u + 90u \tag{1.23}$$

hvor y nu er $y(t)$ og u er $u(t)$, eller udgangs- og indgangssigneler i tidsdomænet.

1.7.2 Homogen reaktion

Det ses fra eksemplet ovenfor, at højre side af udtrykket (fra tælleren i overføringsfunktionen i (1.21)) udelukkende er en funktion af indgangssignalet, $(3\frac{d}{dt}u(t) + 90u(t))$.

Venstre side af udtrykket $(\frac{d}{dt}y(t) + 300y(t))$ er til gengæld *ikke* afgængigt af indgangssignalet, og beskriver overføringsfunktionens homogene reaktion (svarende til at differentialligningen er homogen når $u(t) = 0$).

Det vil sige at udgangsignalet $y(t)$ vil være en kombination af den homogene reaktion (fra nævneren) der er uafhængigt af indgangssignalet og indgangssignalet tilpasset ud fra udtrykket i tælleren.

Man kan sige at nævneren udtrykker overføringsfunktiones grundreaktion.

1.8 Opgaver

Opgave 1.1: Find $f(t)$ for følgende udtryk

a) $T(s) = \dfrac{6}{s+10}$ **c)** $T(s) = \dfrac{20s}{(s+10)(s+2)}$

b) $T(s) = \dfrac{2}{0.2s+1}$ **d)** $T(s) = \dfrac{11(s+10)}{(s+100)(s+1)}$

Opgave 1.2: Find $f(t)$ for følgende udtryk

a) $T(s) = \dfrac{2s^2+s+4}{s^2(s+0.5)}$ **c)** $T(s) = \dfrac{20}{(s+2)^2+1}$

b) $T(s) = \dfrac{20s}{(s+2)(0.2s+1)}$ **d)** $T(s) = \dfrac{11(s+10)}{s^2+20s+125}$

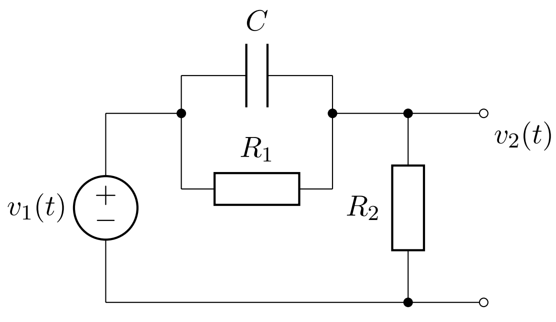
Opgave 1.3: Find start og slutværdi for følgende udtryk

a) $T(s) = \dfrac{1}{s}$ **c)** $T(s) = \dfrac{20s}{(s+2)^2+1}$

b) $T(s) = \dfrac{2s^2+4s+18}{s^2(s+3)}$ **d)** $T(s) = \dfrac{30}{s^2+5s+100}$

Opgave 1.4: Lead-filter

Kredsløbet i figur 1.9 er et lead-filter, der ofte bruget til styring af f.eks. en motor, der skal have lidt ekstra kraft til at accelerere, men anvendes også i mange andre situationer.



Figur 1.9: Lead filter

Komponentværdier er: $R_1 = 10k\Omega$ $R_2 = 10k\Omega$ og $C = 1\mu F$.

a) Find overføringsfunktion $T(s)$ for kredsløb.

b) Når $v1(t)$ er et 1 V step, hvad er så $\mathbf{V}_2(s)$.

c) Find startværdi $v_2(0)$ og steady state $v_2(\infty)$ for $\mathbf{V}_2(s)$.

d) Find $v_2(t)$

Opgave 1.5: Lead-filter 2

Lead filteret i figur 1.9 har nu følgende komponentværdier: $R_1 = 30k\Omega$ $R_2 = 10k\Omega$ og $C = 1\mu F$, og $v_1(t) = 1 - e^{-300t}$

a) Find steady state værdi for $v_1(t)$.

b) Find $\mathbf{V}_2(s)$.

c) Find Find startværdi $v_2(0)$ og steady state $v_2(\infty)$ for $\mathbf{V}_2(s)$.

d) Find $v_2(t)$ og plot $v_2(t)$ for $t = 0..0.1$.

1.9 Løsninger

1.1 a) $6e^{-10t}$; b) $10e^{-5t}$; c) $-5e^{-2t} + 25e^{-10t}$; d) $e^{-t} + 10e^{-100t}$

1.2 a) $8t - 14 + 16e^{-0.5t}$; b) $166.7e^{-5t} - 66.7e^{-2t}$;
c) $20e^{-2t}sin(t)$; d) $11e^{-10t}cos(5t)$

1.3 a) $f(0) = 1,\ f(\infty) = 1$; b) $f(0) = 2,\ f(\infty) = \infty$;
c) $f(0) = 20,\ f(\infty) = 0$; d) $f(0) = 0,\ f(\infty) = 0$

1.4 a) $\mathbf{T}(s) = \dfrac{s + 100}{s + 200}$; b) $\mathbf{V}_2(s) = \dfrac{s + 100}{s(s + 200)}$ c) $v_2(0) = 1$ $v_2(\infty) = 0.5$;
d) $v_2(t) = 0.5 + 0.5e^{-200t}$

1.5 a) $v_1(\infty) = 1$; b) $\mathbf{V}_2(s) = \dfrac{300(s + 33)}{s(s + 300)(s + 133)}$ c) $v_2(0) = 0$ $v_2(\infty) = 0.25$; d) $v_2(t) = 1.35e^{-133t} - 1.6e^{-300t} + 0.25$;