

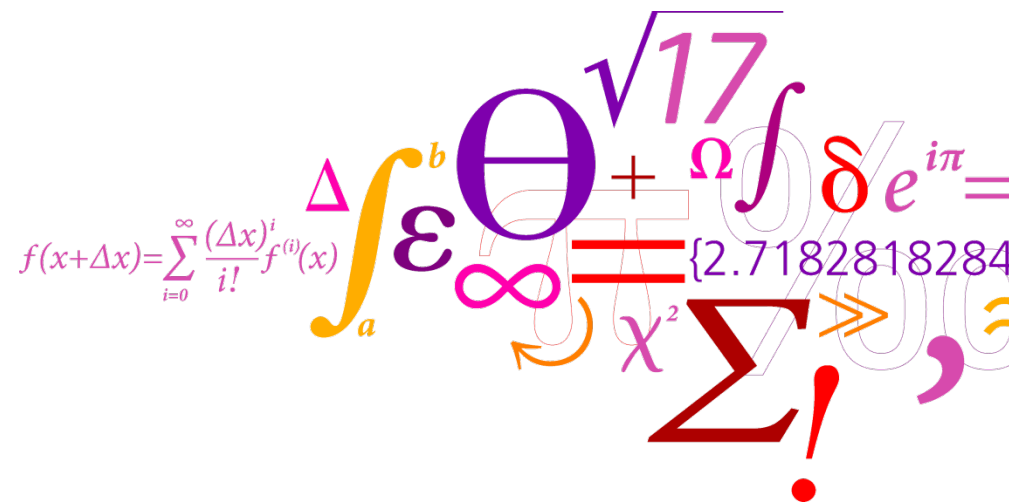
# Reguleringsteknik 1

J. Christian Andersen

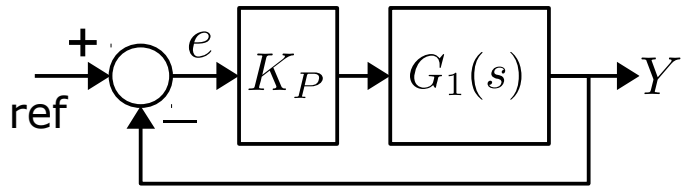
Kursusuge 6

## Plan

- Stabilitetsmargin
  - Begreber (igen)
  - Nyquist plot
- PID design ud fra frekvensanalyse
  - P- regulator
  - PI regulator
  - P-Lead regulator



# Bodeplot begreber Stabilitetsmargin



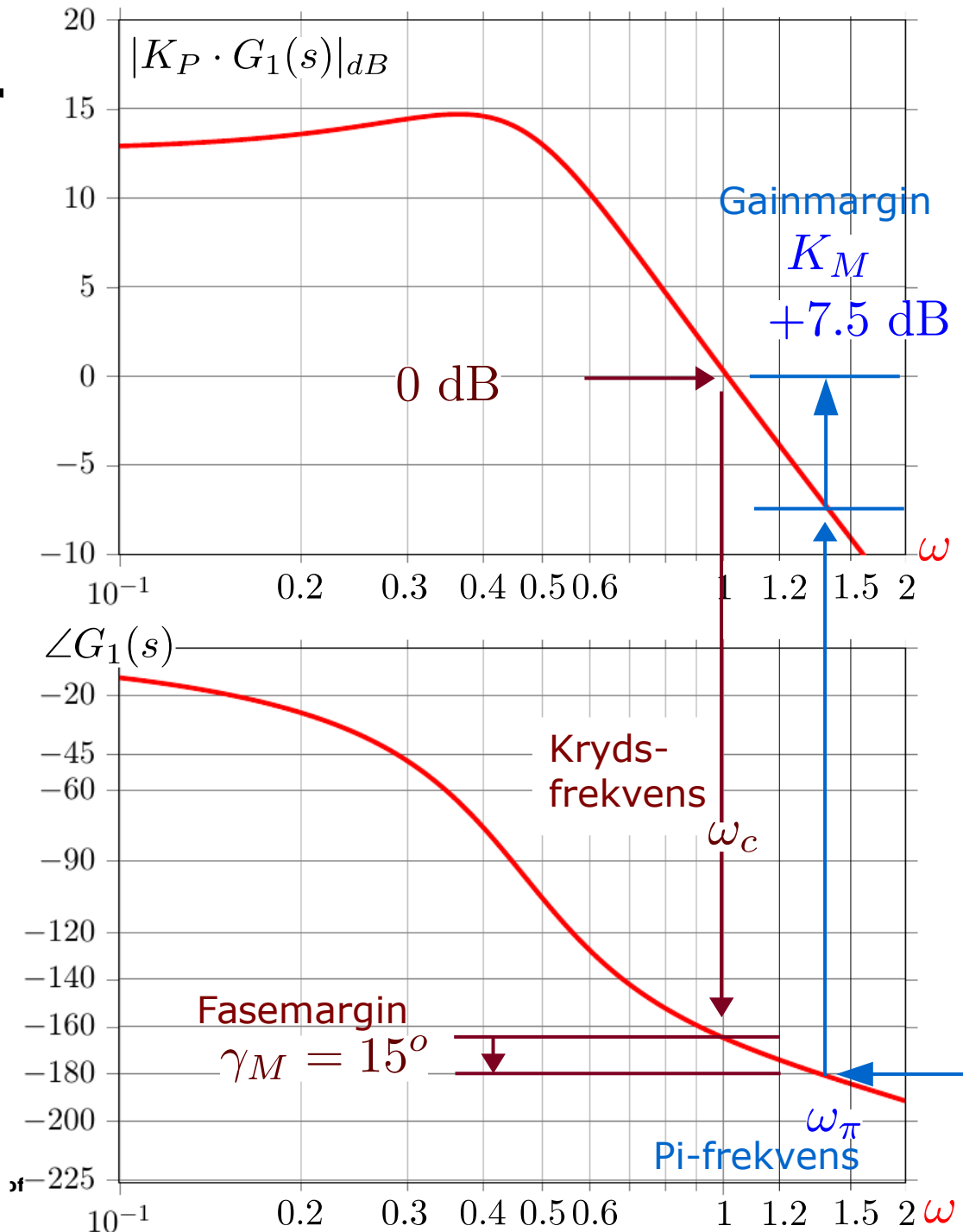
Stabilitetsmargin og bodeplot:  
*Altid åben sløjfe (open loop)*

Krydsfrekvens (crossing frequency):  
Frekvens  $\omega_c$ , hvor åben sløjfe krydser 0 dB gain.

Fasemargin  $\gamma_M$  (gamma M) er  
fasemargin ved  $\omega_c$   
ned til -180 grader

Pi-frekvens:  
frekvens  $\omega_\pi$ , hvor åben sløjfe  
fasedrejning er -180 grader

Gain-margin  $K_M$  er  
gain margin ved  $\omega_\pi$  op til 0 dB



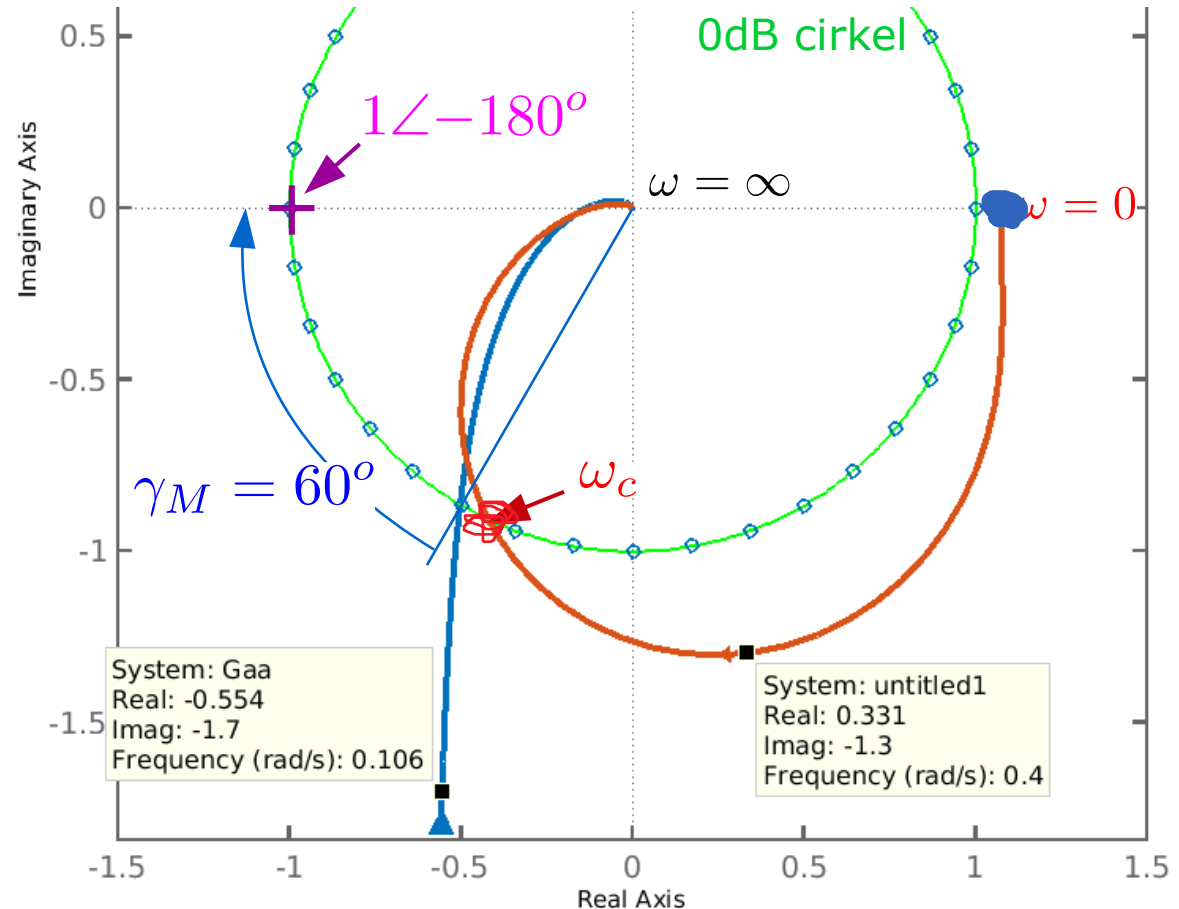
# **Nyquist plot**

- samme begreber,  
blot andet plot-format**

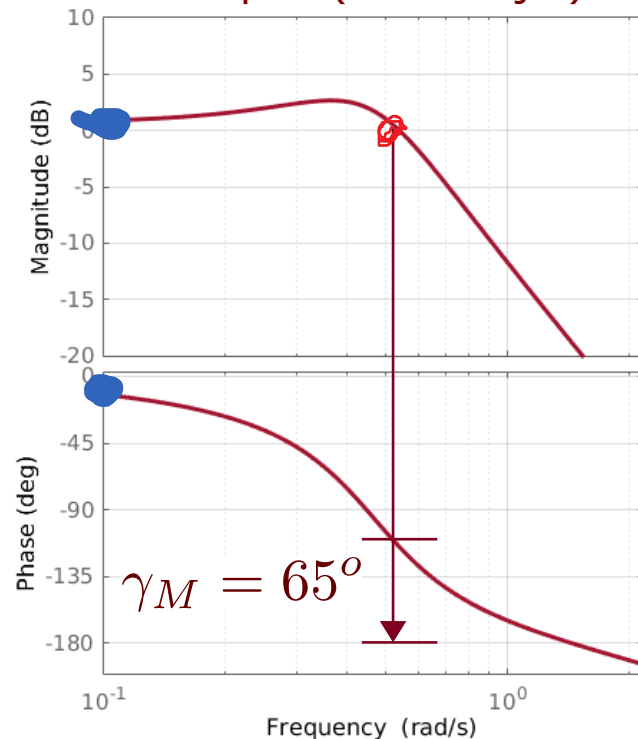
# Nyquist plot

$$G_a = \frac{1.075}{s^3 + 5s^2 + 2.1s + 1}$$

Åben sløjfe



Bodeplot (åben sløjfe)



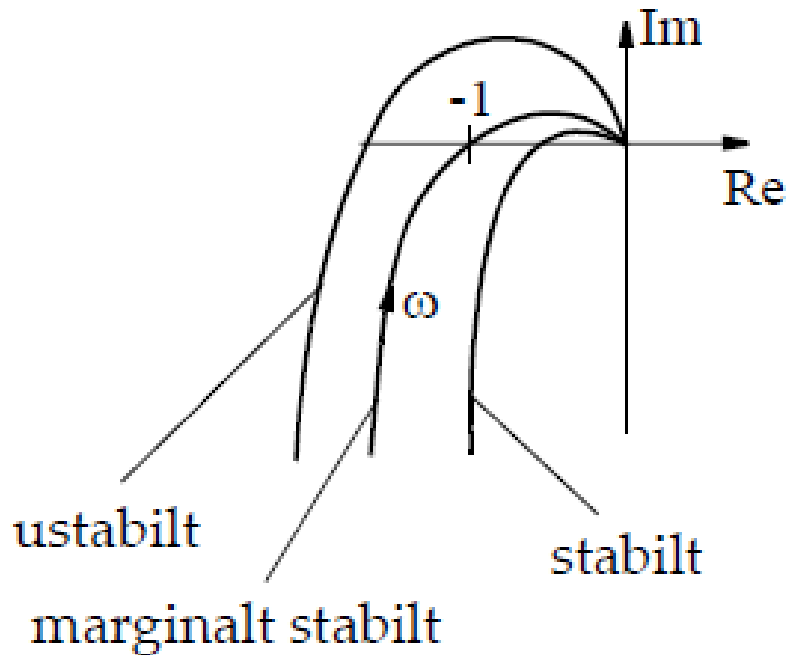
Andet system (åben sløjfe)

$$G_a(s) = 0.13 \frac{1.5}{s(2s + 1)(s + 1)}$$

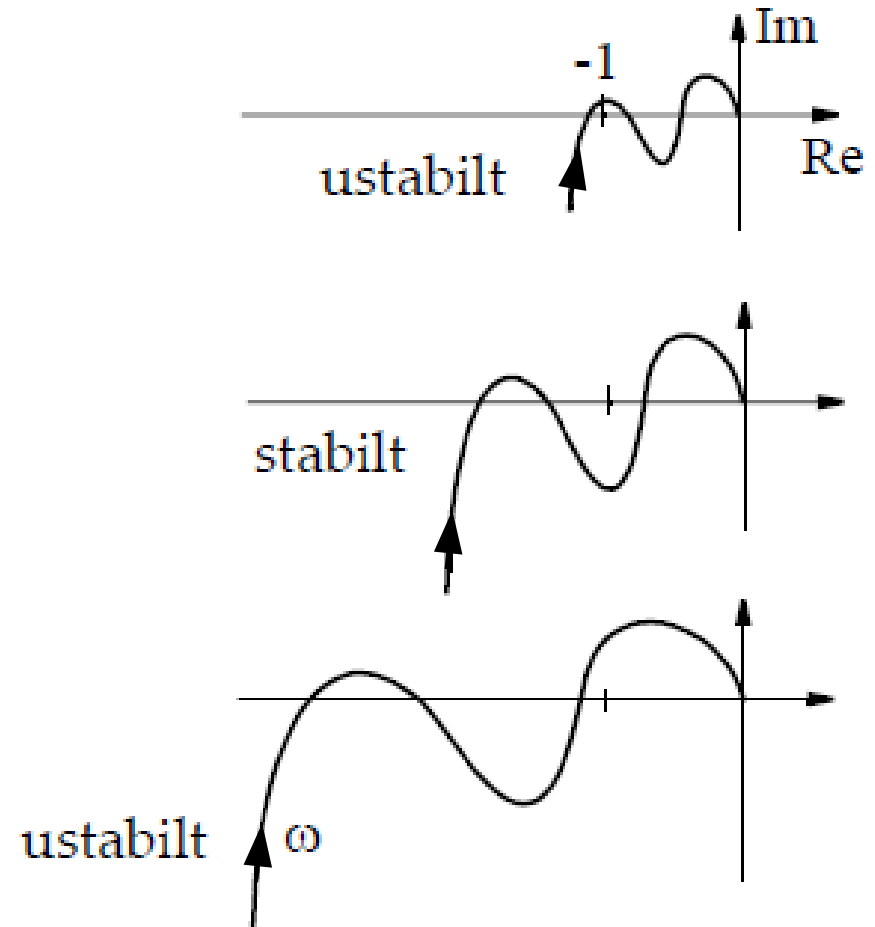
MATLAB:

```
G2 = tf([1.075],[1 5 2.1 1])
nyquist(G2)
axis([-1.5,1.5,-1.7,1])
```

# Nyquist forenklede stabilitetskriterie - åben sløjfe



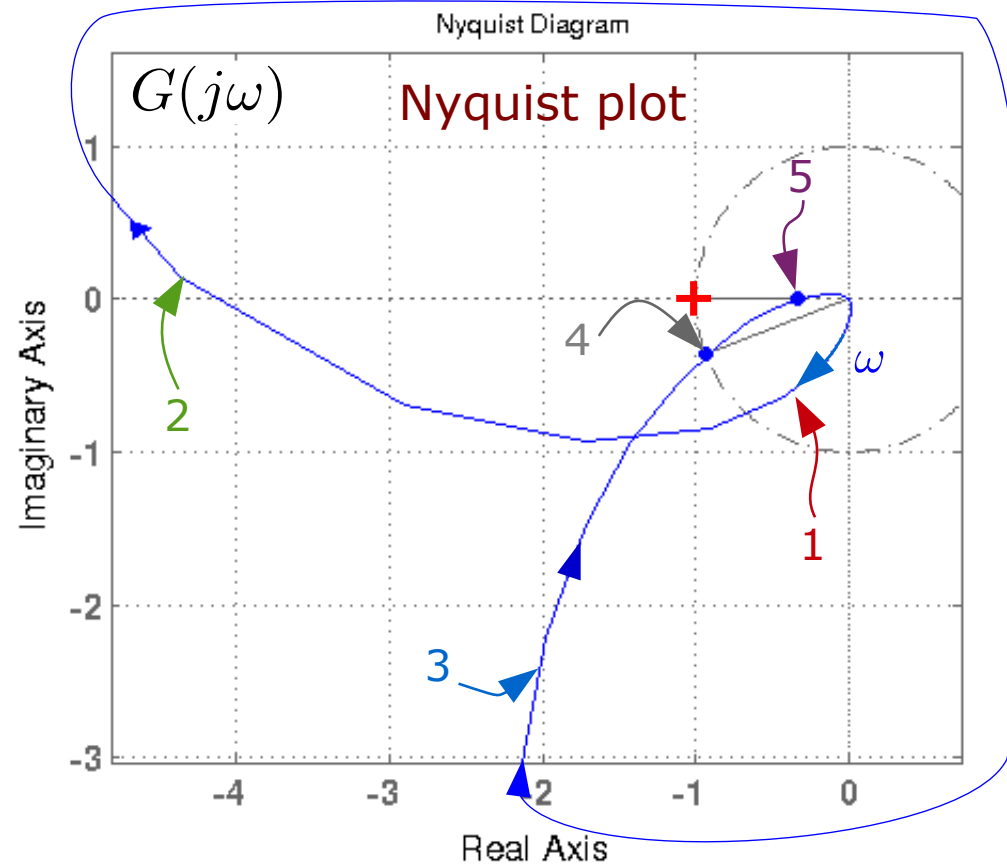
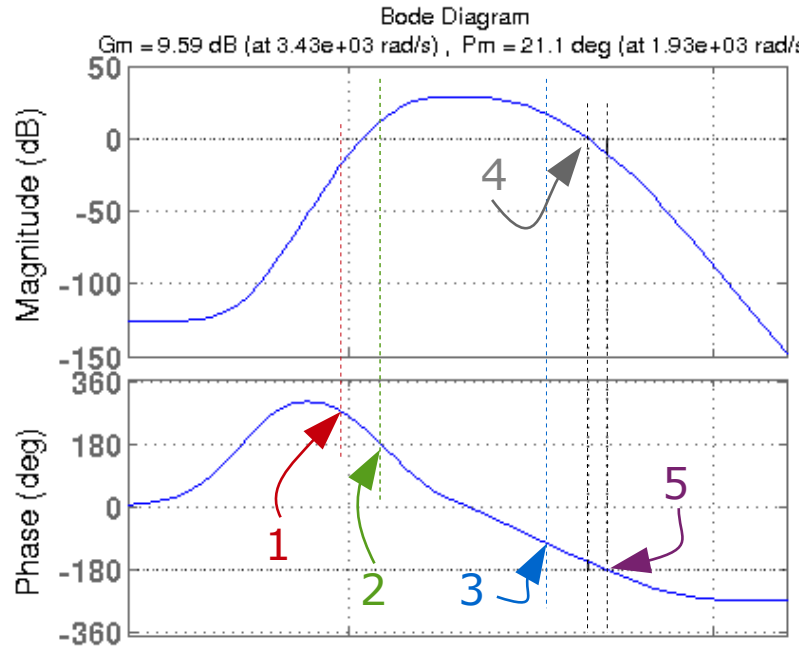
Når nyquistkurven af  $G(j\omega)$   
fra **lav til høj frekvens**  
har **-1 punkt til venstre**  
er systems  
lukket sløjfe stabilt



# "Audio" forstærker

(reduceret i frekvens og båndbredde – og dårligt design (motorboating))

## Åben sløjfe bode plot

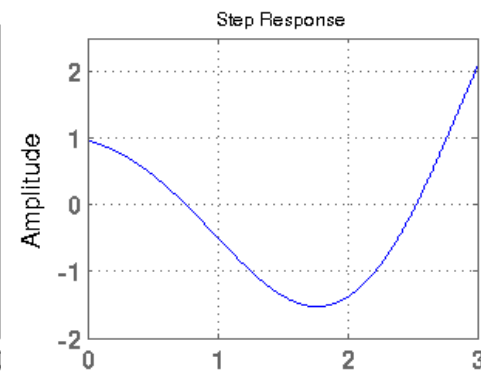
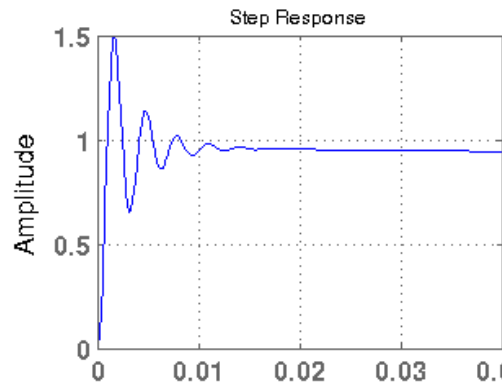
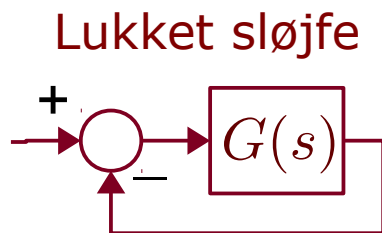
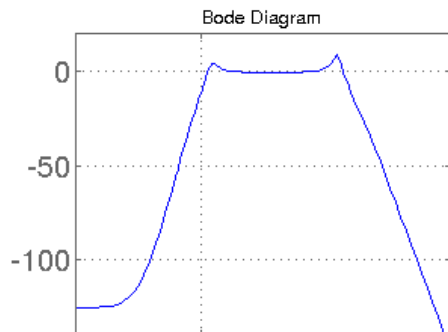
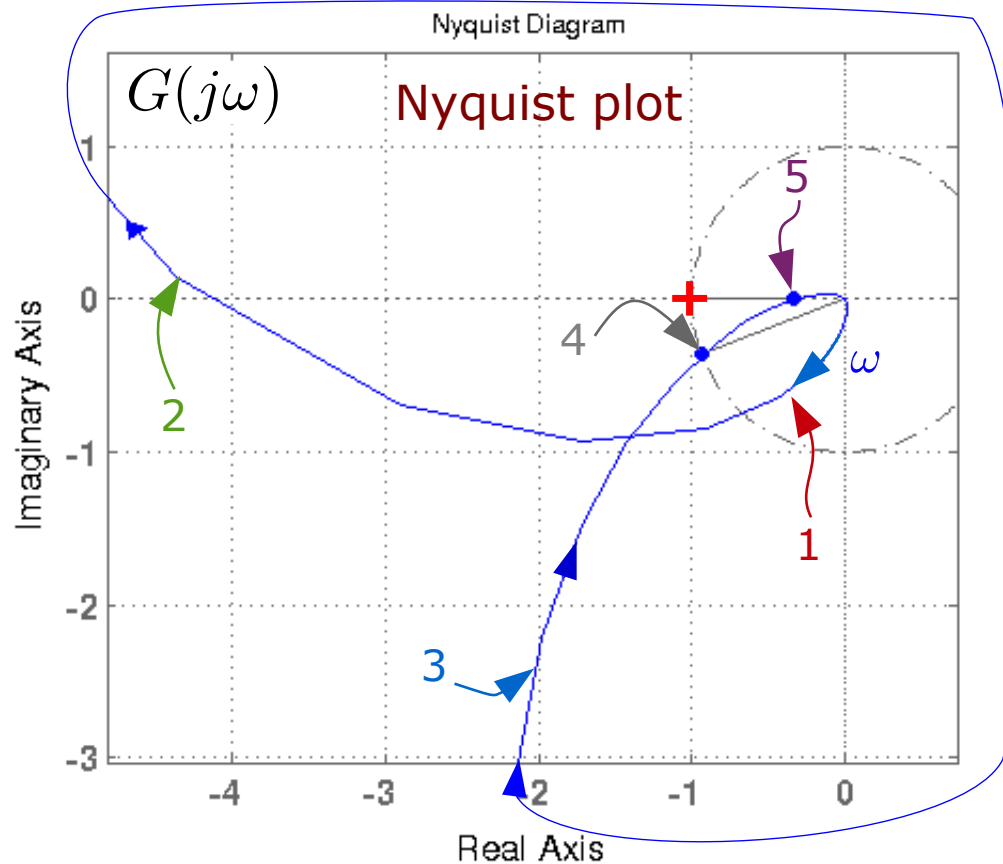
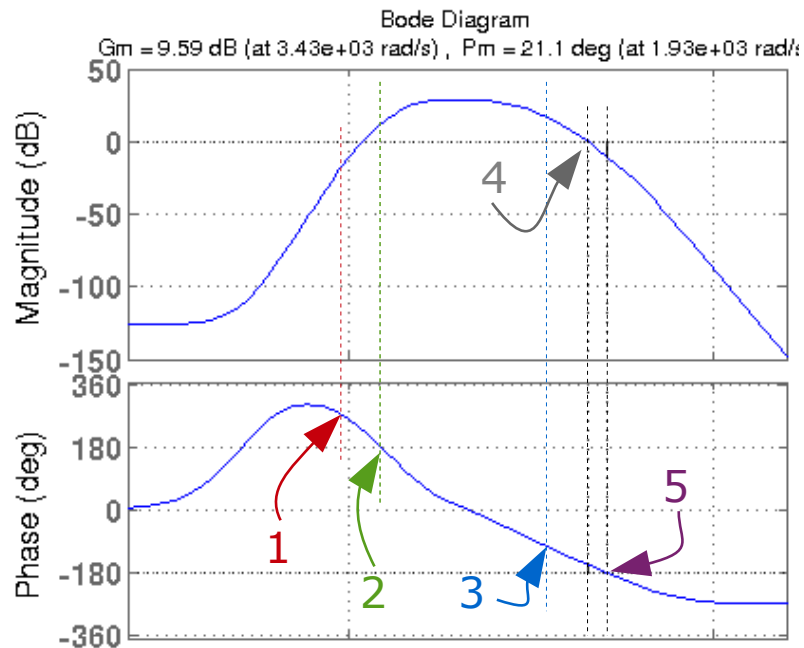


Krydsfrekvens?  
Stabil?

# "Audio" forstærker

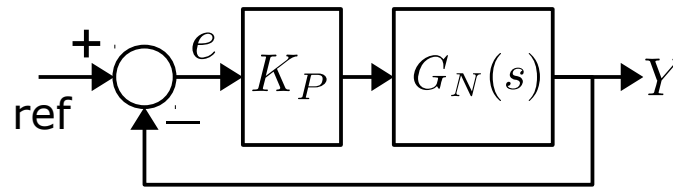
(reduceret i frekvens og båndbredde – og dårligt design (motorboating))

## Åben sløjfe bode plot



# kontrollspørgsmål

## Nyquist stabilitet



Nyquist af 3 åben sløjfe systemer med  $K_P = 1$   
(ingen poler i højre halvplan)

Opgave 1:

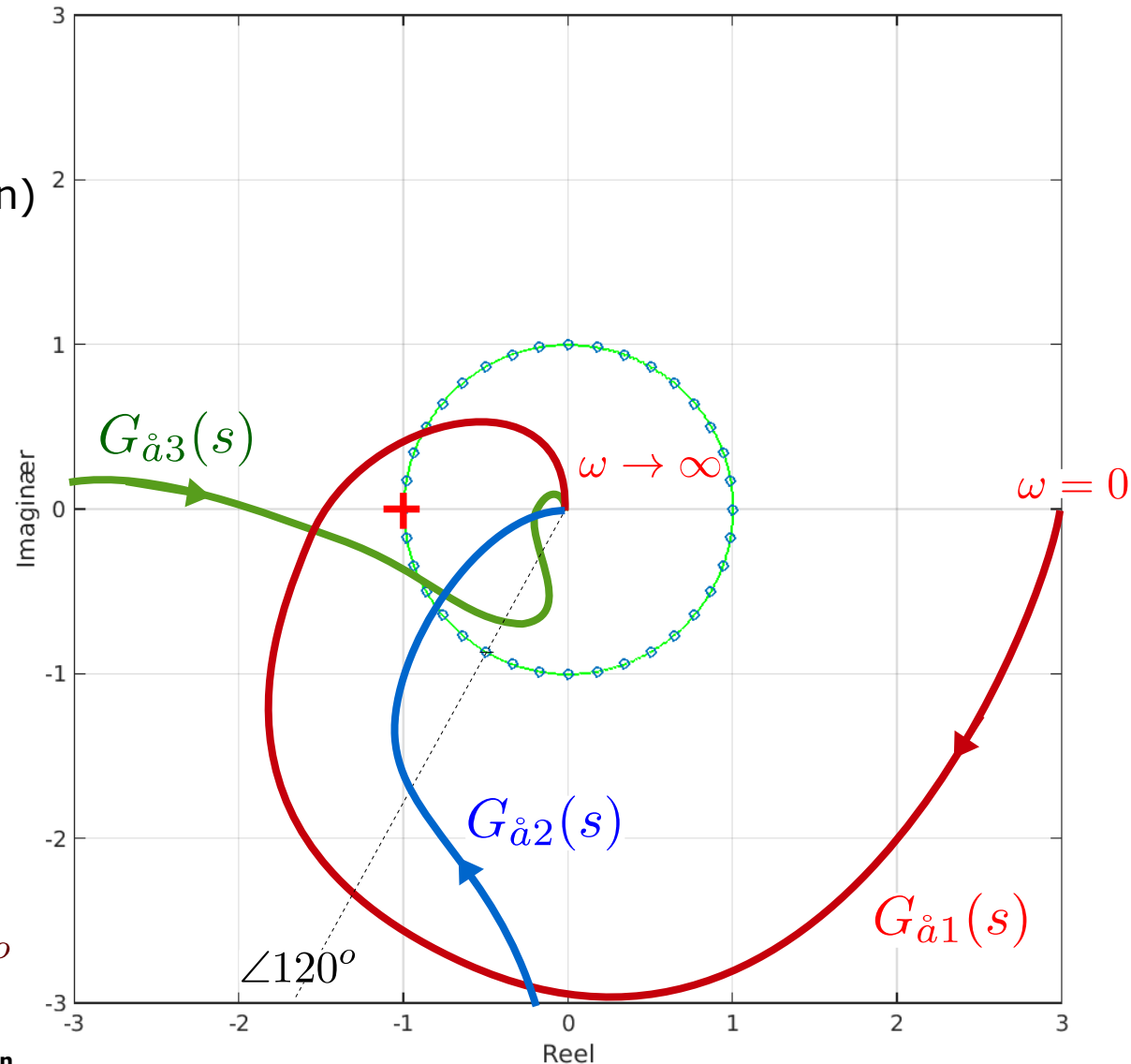
- Hvilke af de 3 systemer vil give et stabilt lukket sløjfe system?

Opgave 2:

- Hvordan kan  $K_P$  ændres (ca.) for hvert system før at lukket sløjfe bliver marginalt stabilt?

Opgave 3:

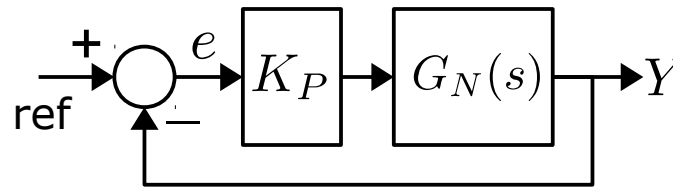
- For rødt system, hvad skal  $K_P$  være for at fasemargin  $\gamma_M = 60^\circ$





# kontrollspørgsmål

## Nyquist stabilitet



Nyquist af 3 åben sløjfe systemer med  $K_P = 1$   
(ingen poler i højre halvplan)

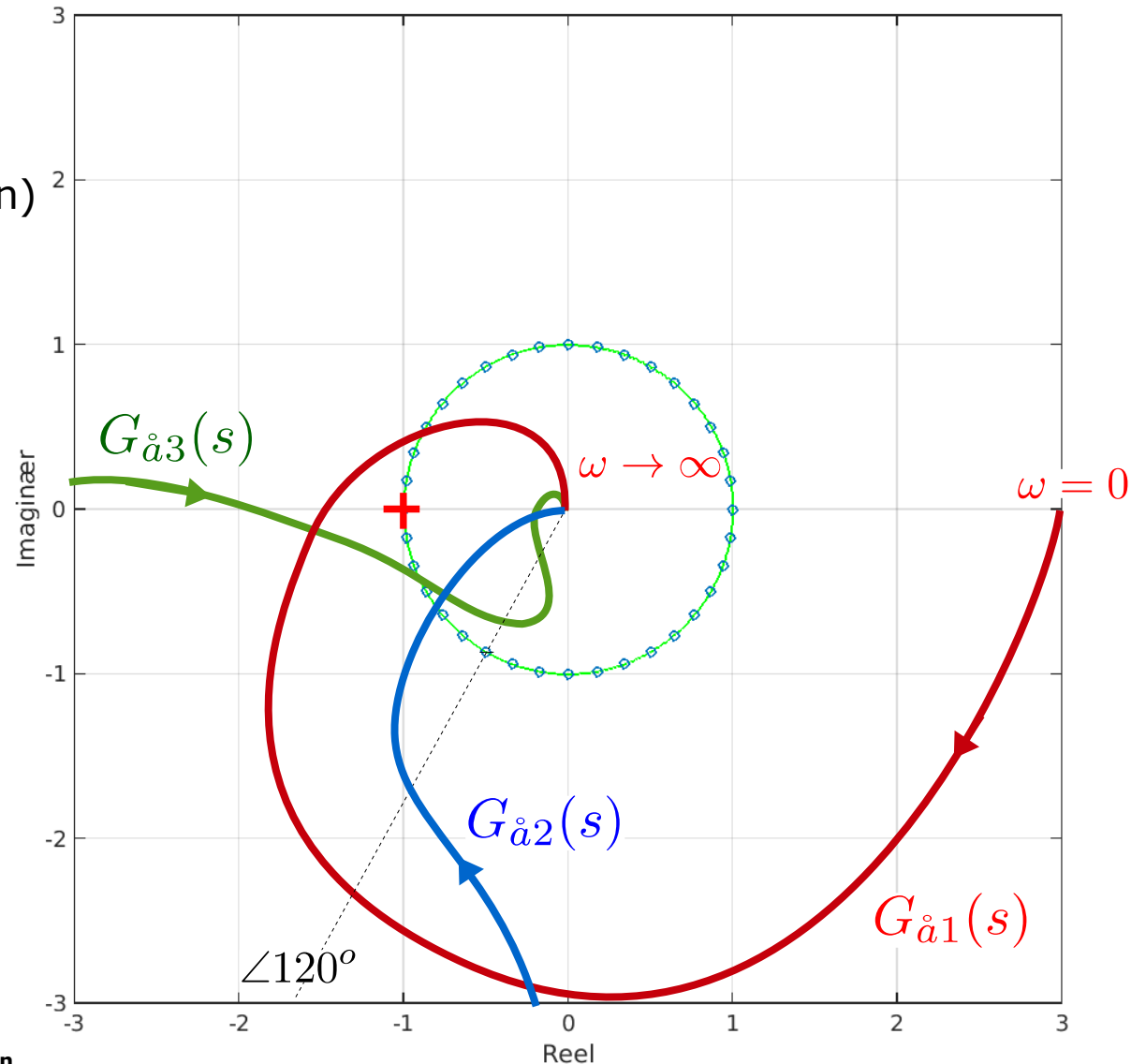
Opgave 1:

– Hvilke af de 3 systemer vil give et stabilt lukket sløjfe system?

G1: ustabilt, -1 er til højre for kurven

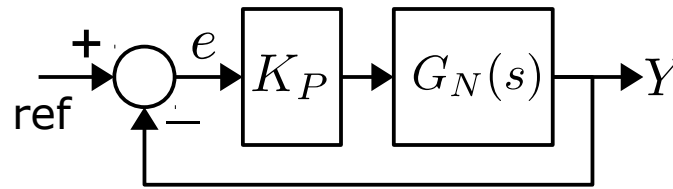
G2: stabilt

G3: stabilt, da -1 er til venstre for kurven



# kontrolspørgsmål

## Nyquist stabilitet



Nyquist af 3 åben sløjfe systemer med  $K_P = 1$   
(ingen poler i højre halvplan)

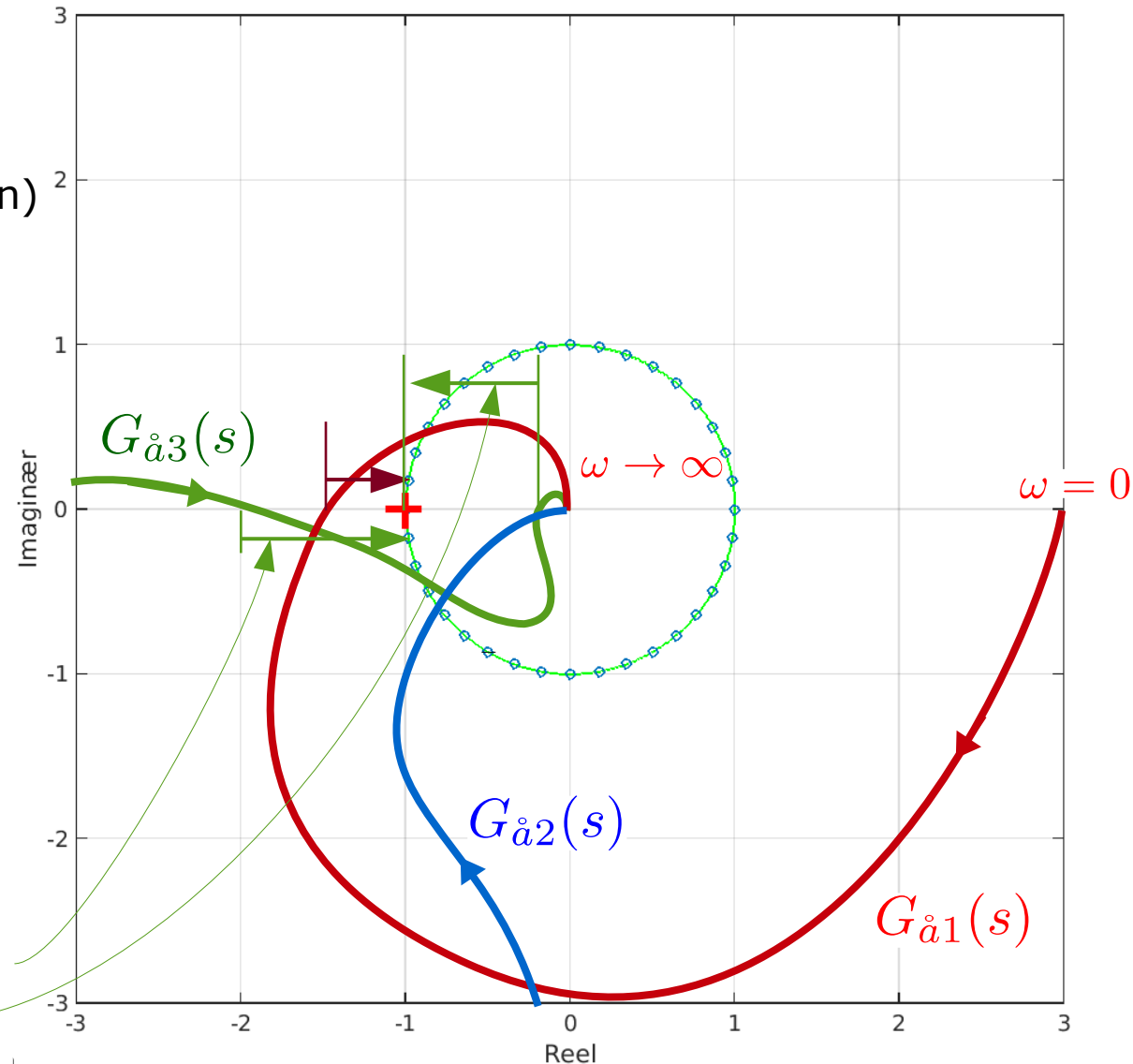
Opgave 2:

- Hvordan kan  $K_P$  ændres  
(ca.) for hvert system  
før at lukket sløjfe bliver  
marginalt stabilt?

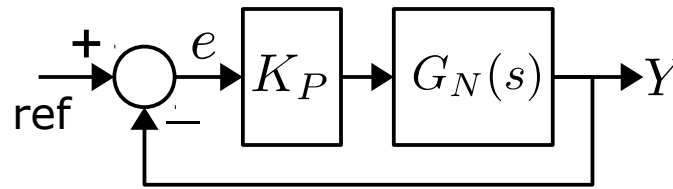
G1: Gain kan reduceres  
fra ca. 1.5 til 1.0,  
 $K_P = 1/1.5 = 0.67$   
for marginal stabil

G2:  $K_P$  kan gøres  
meget stor for marginal  
stabil

G3: 2 muligheder  
a) gain kan reduceres  
til  $K_P = 0.5$  eller  
b) øges til  $K_P = 5$



# kontrollspørgsmål Nyquist stabilitet

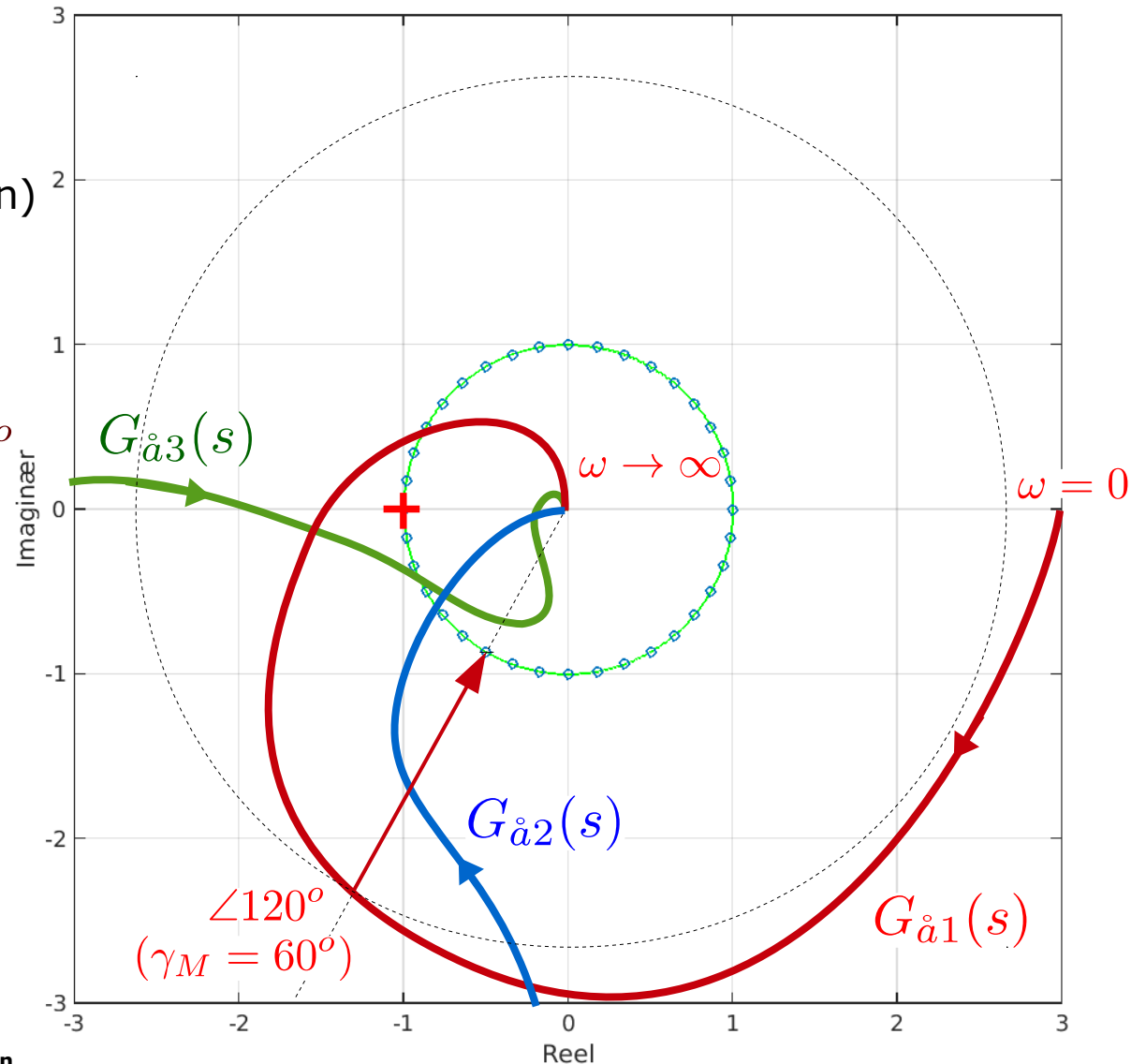


Nyquist af 3 åben sløjfe systemer med  $K_P = 1$   
(ingen poler i højre halvplan)

Opgave 3:

- For rødt system,  
hvad skal  $K_P$  være  
for at fasemargin  $\gamma_M = 60^\circ$

G1: Gain hvor  $\angle G_{\dot{a}1} = 120^\circ$   
er (ca.) 2.6 (+8.3 dB)  
Derfor skal  $K_P$  ændres  
med -8.3dB, eller  
 $K_P = 0.385$ .  
Så vil -1 være til venstre  
og system stabilt



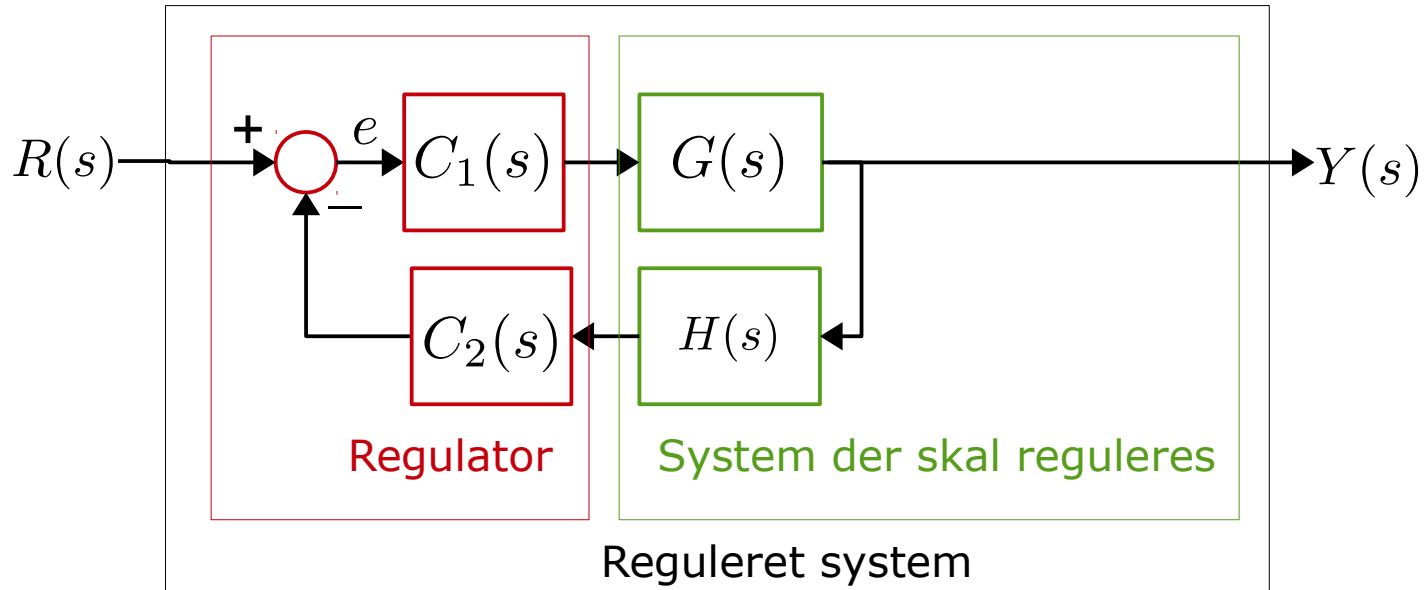
# PID design

# PID design

Optimal regulering

- System output følger referencen hurtigt og præcist

eller  $y(t) = r(t)$



# PID design

## Kp - led

$K_P$  kan rykke amplituden op og ned (men *ikke* ændre fasen).

Og dermed ændre fasemargin  $\gamma_M$  og krydsfrekvens  $\omega_c$ .

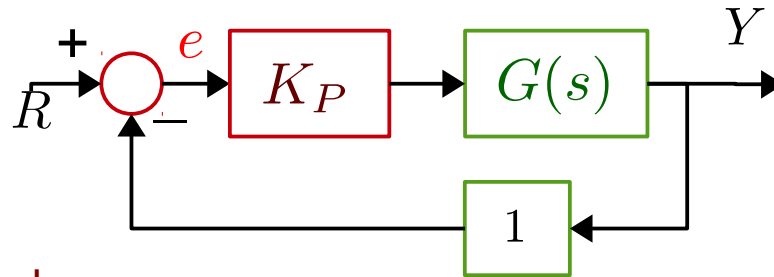
- Mindre  $K_P$  giver (normalt) Bedre fasemargin (og gainmargin) og (normalt) mindre oversving.
- Større  $K_P$  giver (normalt) mindre statisk fejl

For enhedsstep – lukket sløjfe:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_a} \frac{1}{s}$$

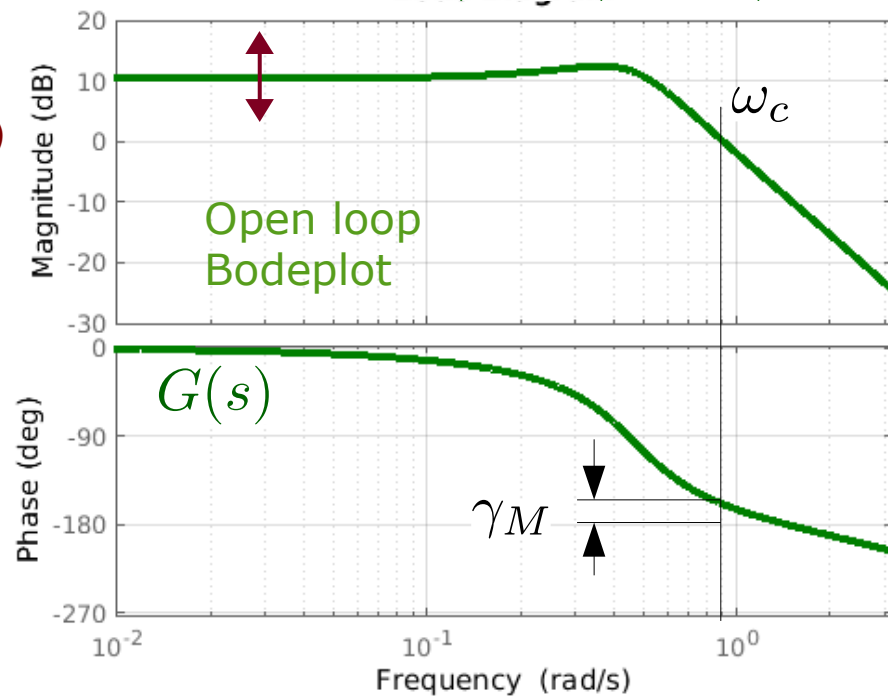
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + 3.3K_P}$$

$$K_P = 1 \Rightarrow e_{ss} = 23\%$$



$$G_a = K_P G(s)$$

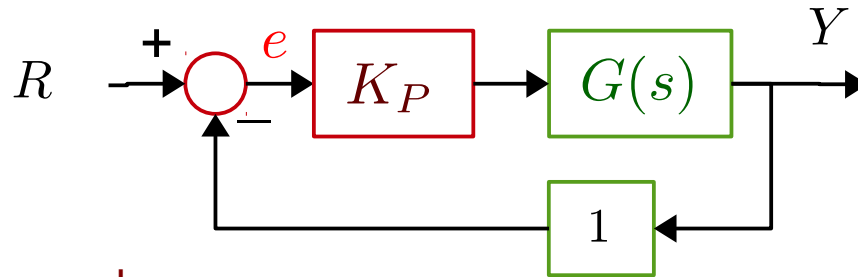
$$G(s) = \frac{3.3}{s^3 + 5s^2 + 2.1s + 1}$$



# PID design

## K<sub>p</sub> – led

### statisk fejl



$K_P$  kan rykke amplituden op og ned (men *ikke* ændre fasen).

Og dermed ændre fasemargin  $\gamma_M$  og krydsfrekvens  $\omega_c$ .

- *Mindre  $K_P$  giver (normalt) Bedre fasemargin (og gainmargin) og (normalt) mindre oversving.*
- *Større  $K_P$  giver (normalt) mindre statisk fejl*

*For input = enhedsstep*

$$R(s) = \frac{h_0}{s}, \quad h_0 = 1$$

$$G_{\hat{a}} = K_P G(s)$$

$$G(s) = \frac{3.3}{s^3 + 5s^2 + 2.1s + 1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + G_{\hat{a}}} \right)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + 3.3K_P}$$

$$K_P = 1 \Rightarrow e_{ss} = 23\%$$

$$K_P = 10 \Rightarrow e_{ss} = 3\%$$

$$K_P = 100 \Rightarrow e_{ss} = 0.3\%$$

$$K_P = 0.2 \Rightarrow e_{ss} = 60\%$$

# PID design

## Kp - led

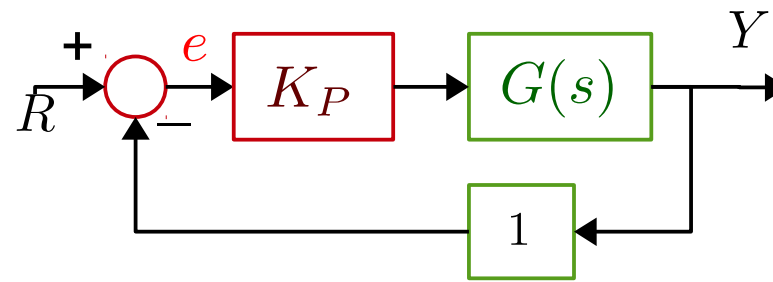
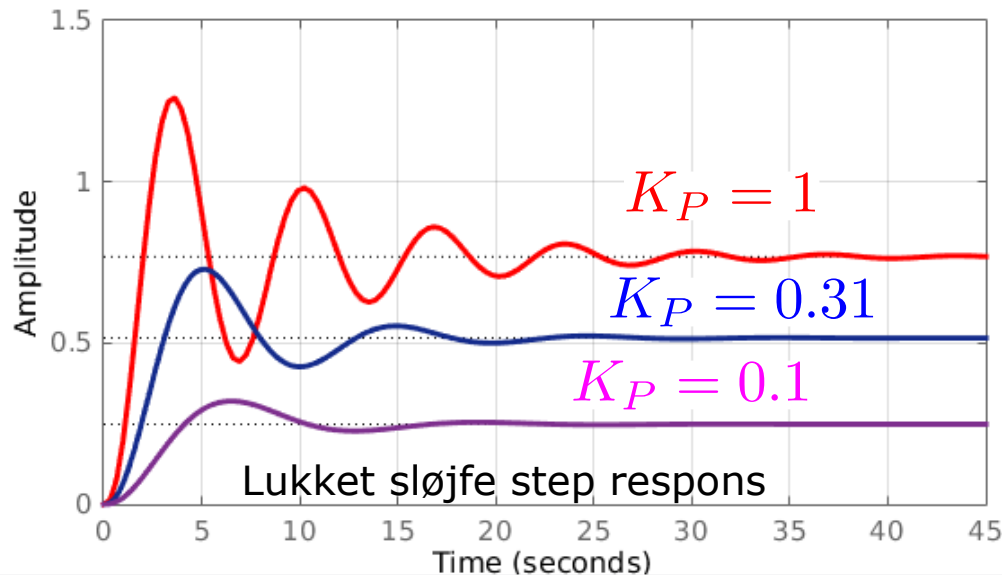
$K_P$  kan rykke amplituden op og ned (men *ikke* ændre fasen).

$$G(s) = \frac{3.3}{s^3 + 5s^2 + 2.1s + 1}$$

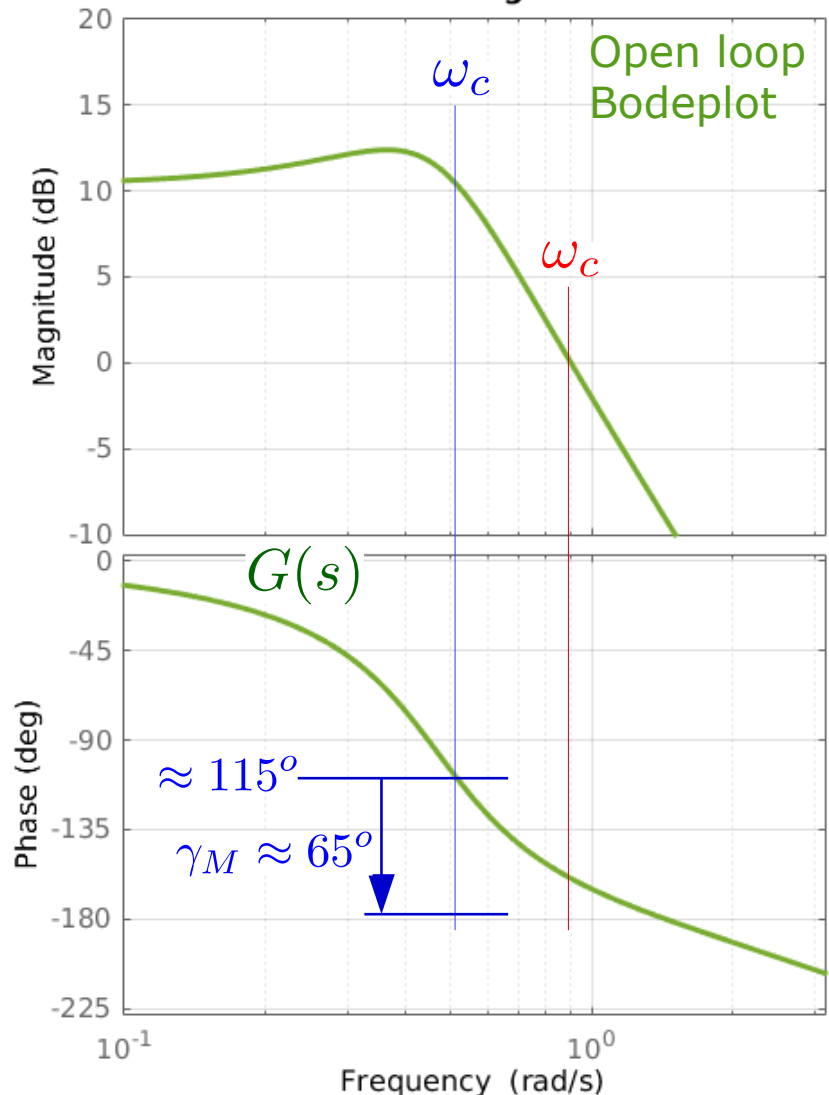
$$K_P = 0dB = 1 \Rightarrow \gamma_M = 20^\circ$$

$$K_P = -10dB = 0.31 \Rightarrow \gamma_M = 65^\circ$$

$$K_P = -20dB = 0.1 \Rightarrow \gamma_M = ?$$



Bode Diagram





# PID design

## Kp - led

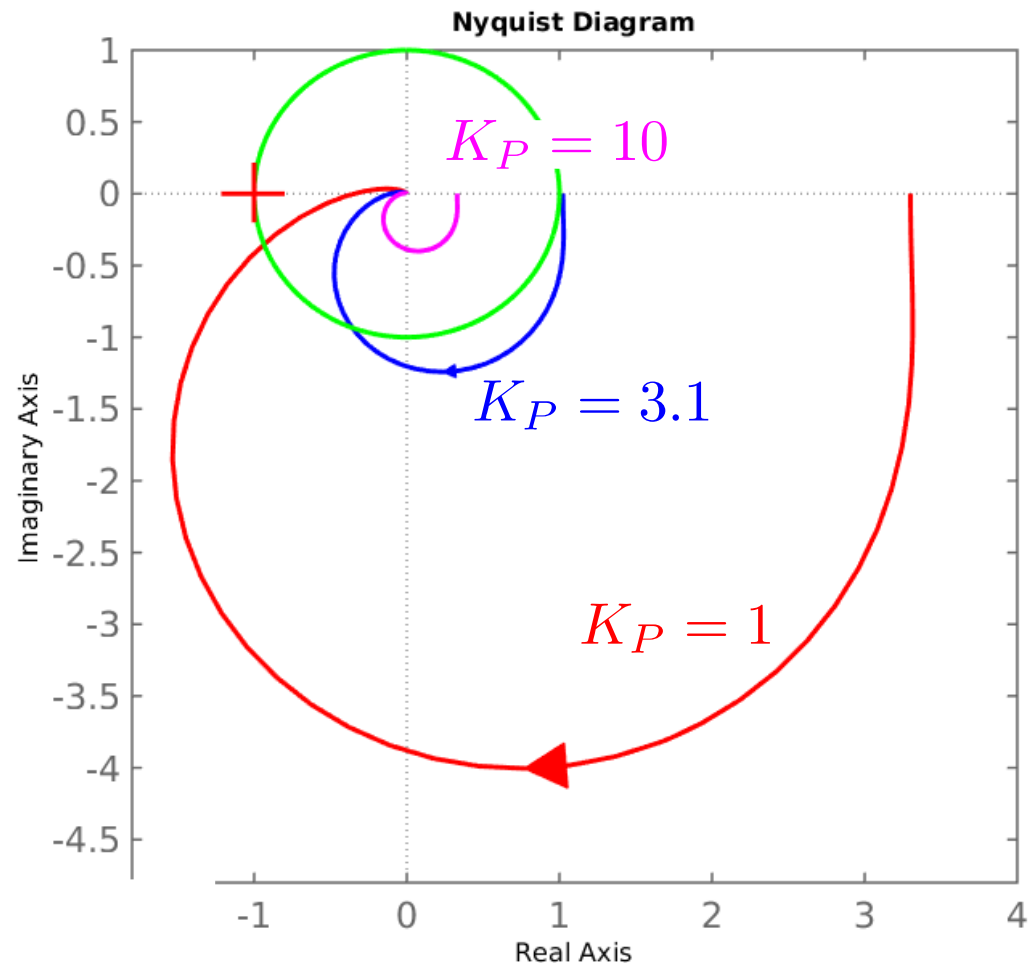
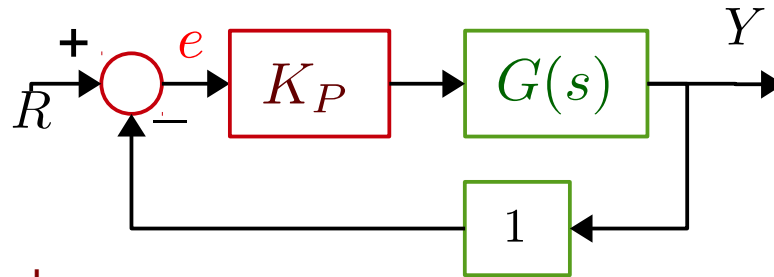
$K_P$  kan rykke amplituden op og ned (men *ikke* ændre fasen).

$$G(s) = \frac{3.3}{s^3 + 5s^2 + 2.1s + 1}$$

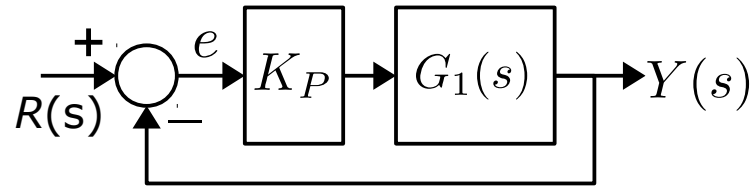
$$K_P = 0dB = 1 \Rightarrow \gamma_M = 20^\circ$$

$$K_P = -10dB = 0.31 \Rightarrow \gamma_M = 65^\circ$$

$$K_P = -20dB = 0.1 \Rightarrow \gamma_M = \infty$$



# Kontrolspørgsmål PI-Lead



1. Design en P-regulator til et system  $G_1$

$$G_1(s) = \frac{40}{s(s+10)^2}$$

Med en fasemargin på 60 grader,

a) hvad skal  $K_p$  være?

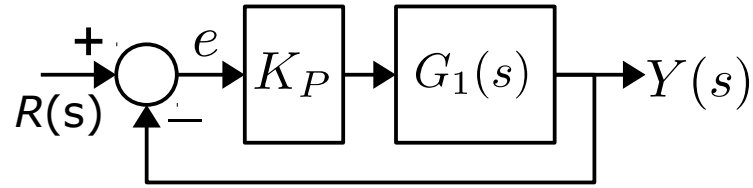
b) Hvad bliver lukket sløjfe overføringsfunktion fra  $R$  til  $e$ ?

$$\frac{e(s)}{R(s)} = ?$$

c) Hvad er stationær fejl for et enhedsstep?

d) Plot et steprespons for lukket sløjfe  
Hvad bliver oversving?

# Kontrolspørgsmål PI-Lead



1. Design en P-regulator til et system G1

$$G_1(s) = \frac{40}{s(s+10)^2} = \frac{40}{s^3 + 20s^2 + 100s}$$

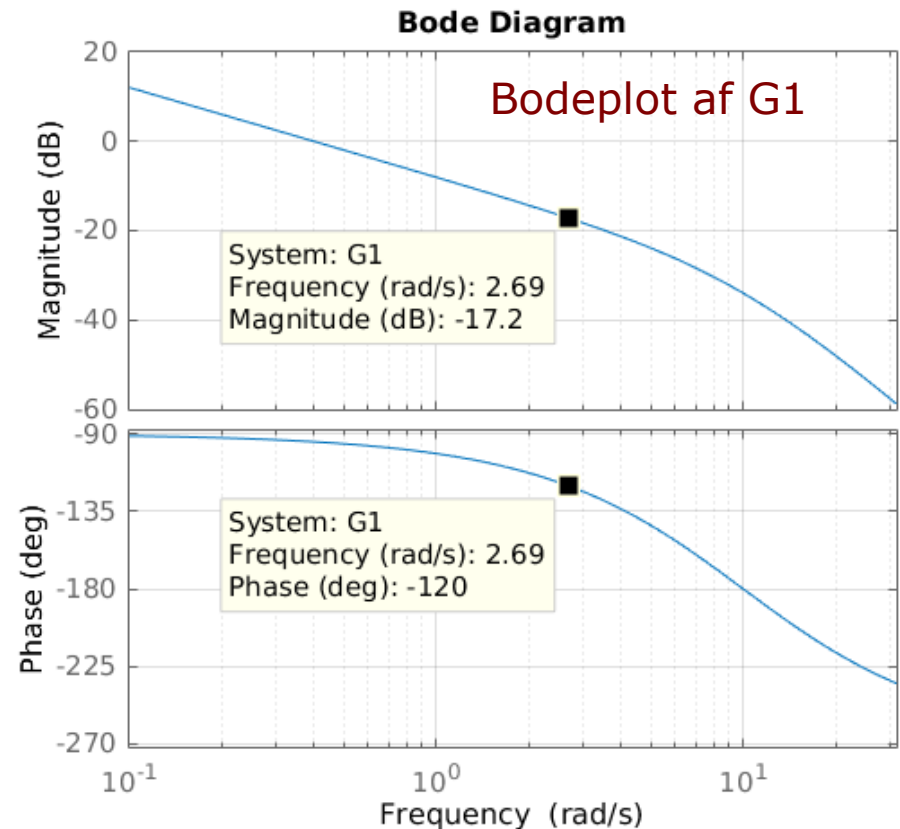
Med en fasemargin på 60 grader,  
a) hvad skal  $K_P$  være?

Fasemargin 60 grader kræver en krydsfrekvens hvor fasedrejning er -120 grader.

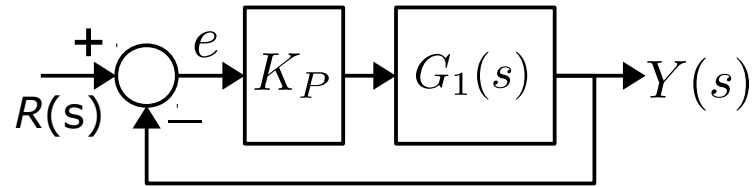
Som vist er det ved 2.68 rad/s,  
hvor gain er -17.2 dB

$$K_P = +17.2 \text{ dB}$$

$$K_P = 10^{\frac{17.2}{20}} = 7.16$$



# Kontrolspørgsmål PI-Lead



1. Design en P-regulator til et system  $G_1$

$$G_1(s) = \frac{0.1}{s(s+10)^2} \quad K_P = 7.16$$

b) Hvad bliver lukket sløjfe overføringsfunktion fra  $R$  til  $e$ ?

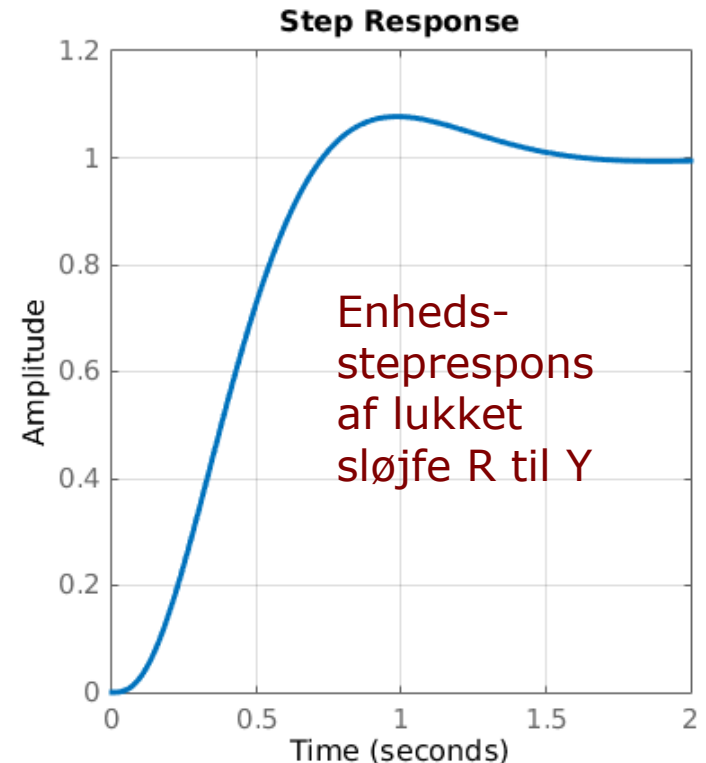
$$\frac{e(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + K_P G_1}$$

$$\frac{e(s)}{R(s)} = \frac{s^3 + 20s^2 + 100s}{s^3 + 20s^2 + 100s + 286.5}$$

c) Hvad er stationær fejl for et enhedsstep?

$$e_{r,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K_P G_1} \frac{1}{s} \Rightarrow e_{r,ss} = 0$$

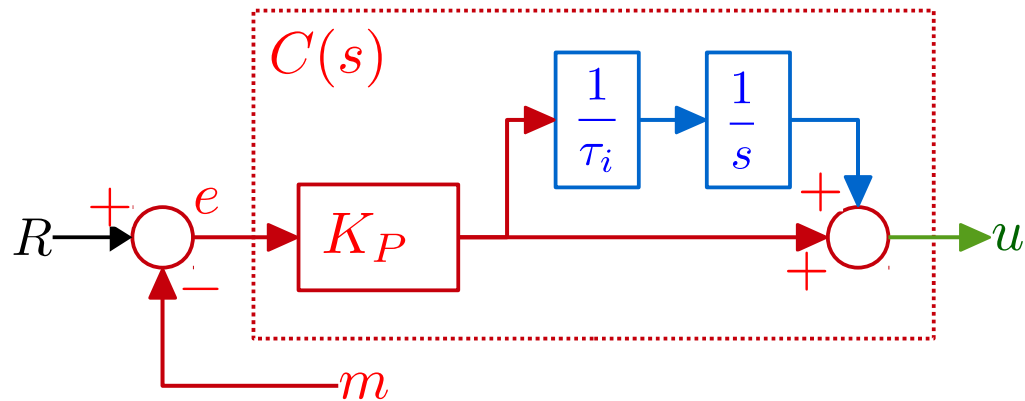
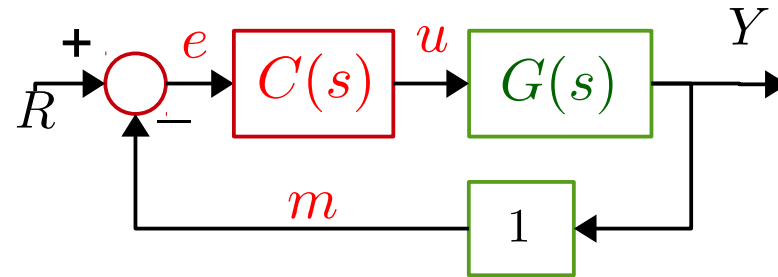
d) Plot et steprespons for lukket sløjfe  
Hvad bliver oversving? **Oversving 7.7%**



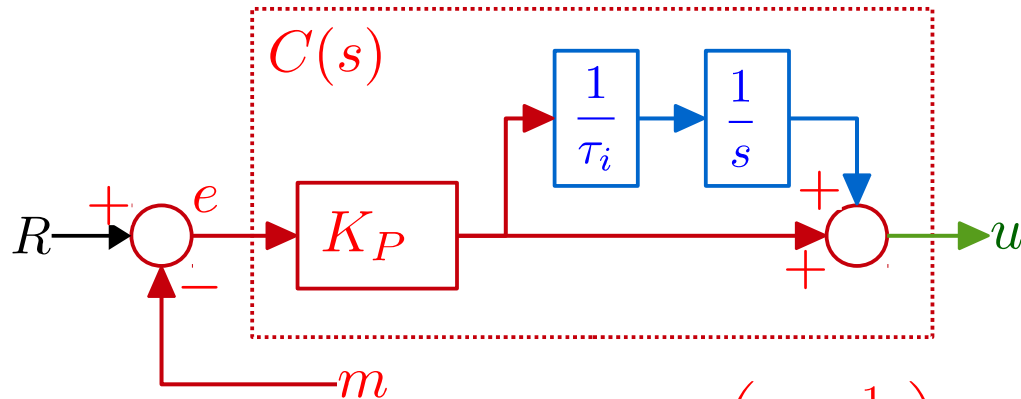
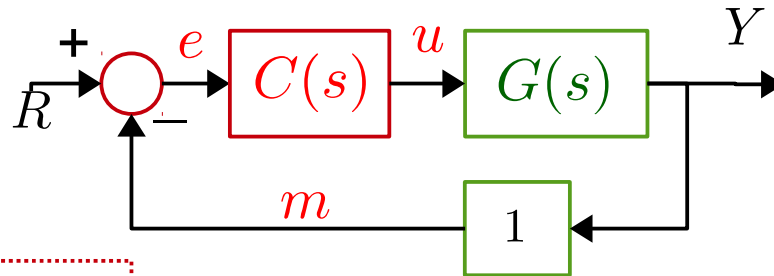
`stepinfo(Gcl)`

RiseTime: 0.4541  
SettlingTime: 1.4176  
SettlingMin: 0.9079  
SettlingMax: 1.0771  
Overshoot: 7.7083  
Undershoot: 0  
Peak: 1.0771  
PeakTime: 0.9855

# PID-design I-led



# PID-design I-led



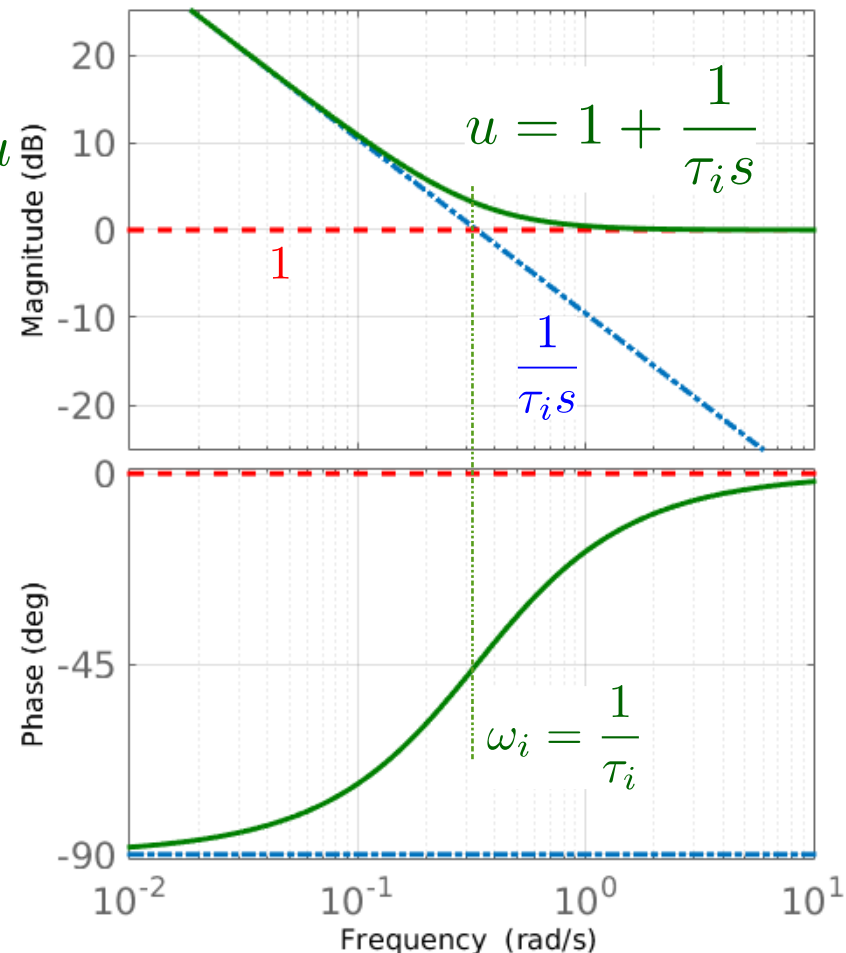
$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right)$$

$$C(s) = K_P \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

I-led giver høj gain ved  $\omega \rightarrow 0$   
og dermed mindre stationær fejl  
- for step input  $e_{ss} \rightarrow 0$

Integrator virkning aftager med frekvensen  
Negativ fasedrejning (  $-90^\circ$  ) aftager  
ved I-leddets knæfrekvens  $\omega_i$

Bode Diagram



# PID design

## I - led

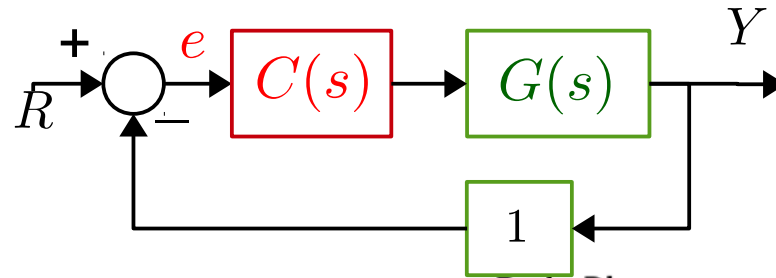
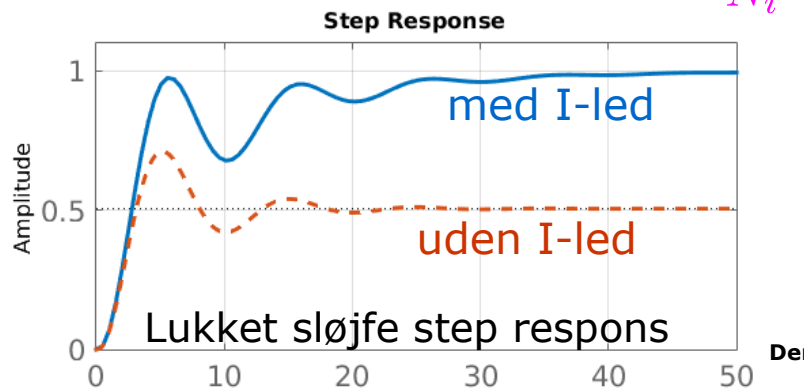
$$C(s) = \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

I-led tilføjer en pol i  $\omega = 0$  og et nulpunkt (knæk op) ved  $\omega_i$

Nulpunkt ved  $\omega_i$  placeres lavere end  $\omega_c$  med en faktor  $N_i$  for at mindske tab af fasemargin

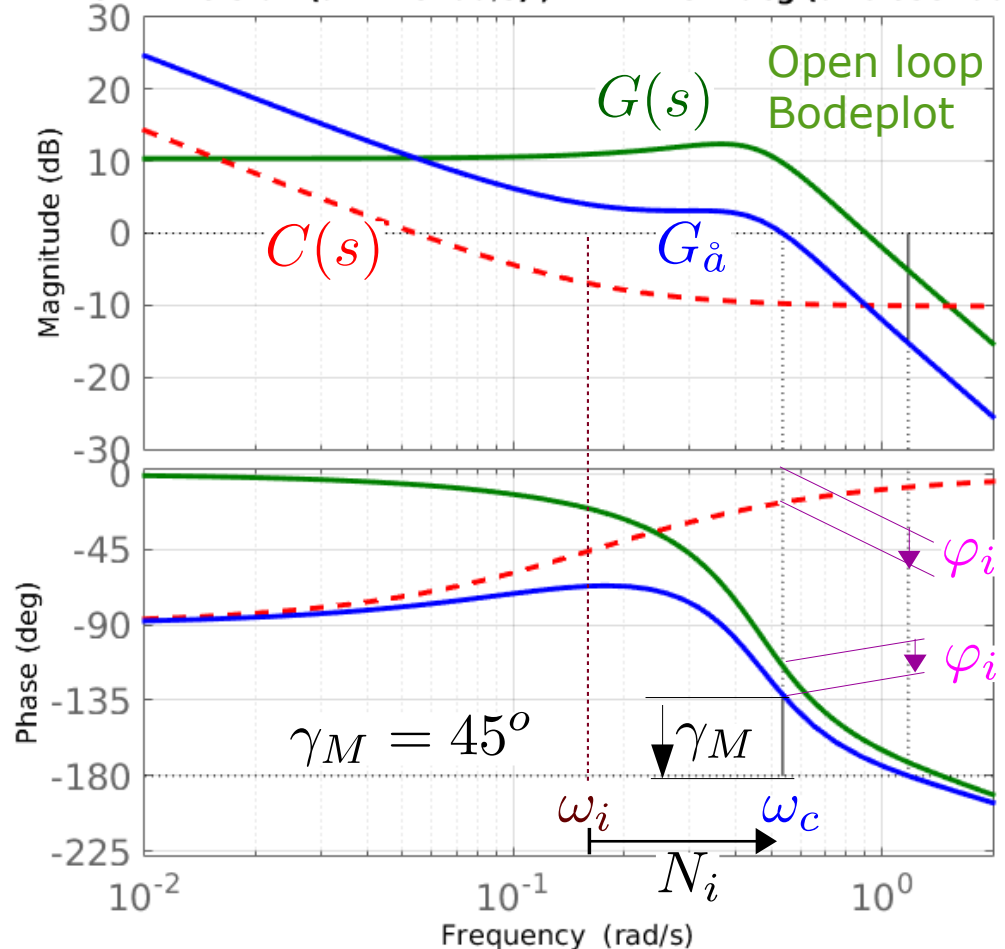
$$N_i = \frac{\omega_c}{\omega_i} = \omega_c \tau_i \Rightarrow \tau_i = \frac{N_i}{\omega_c}$$

Fasemargin effekt  $\varphi_i = -\arctan \frac{1}{N_i}$



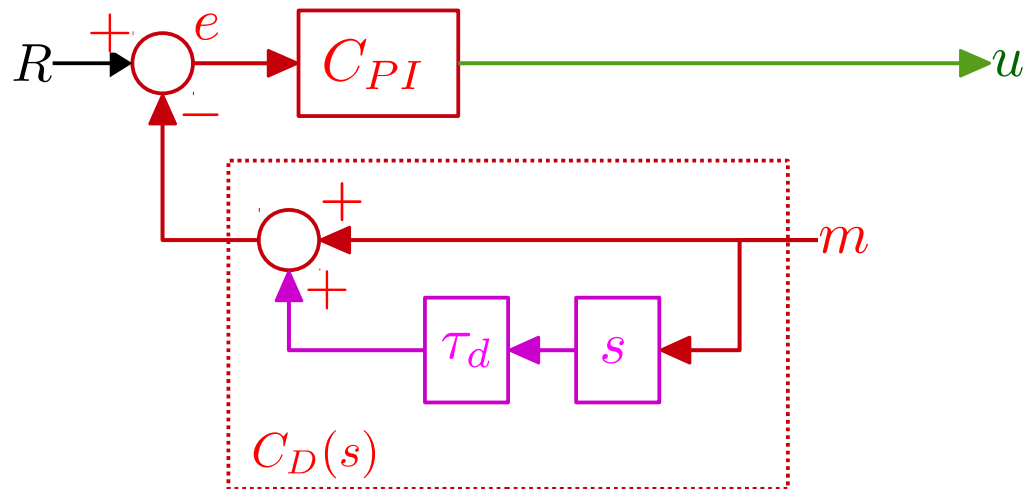
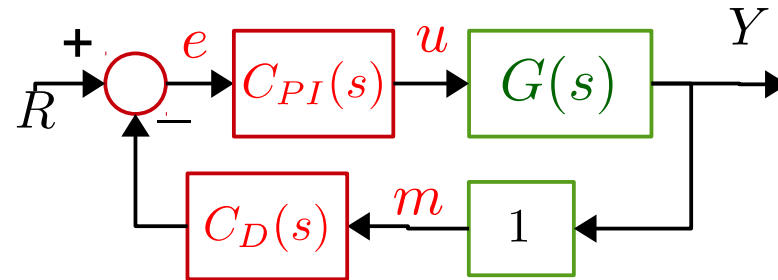
Bode Diagram

Gm = 15.3 dB (at 1.18 rad/s) , Pm = 48.2 deg (at 0.538 rad/s)



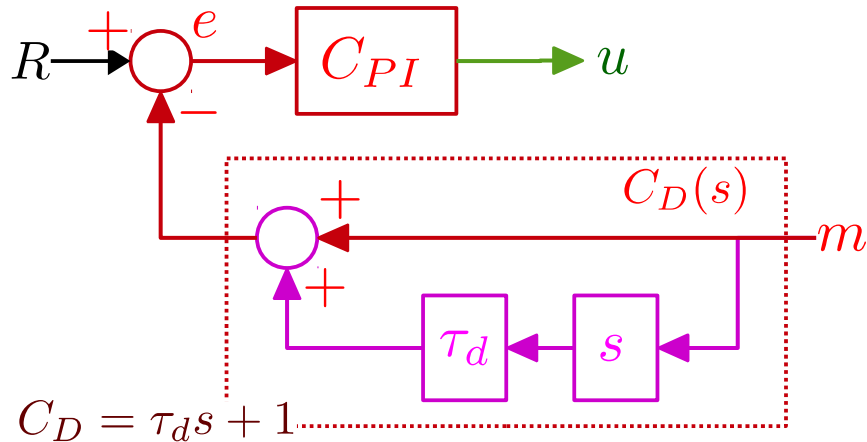
# PID-design

## Lead (D) - led





# PID-design Lead (D) - led



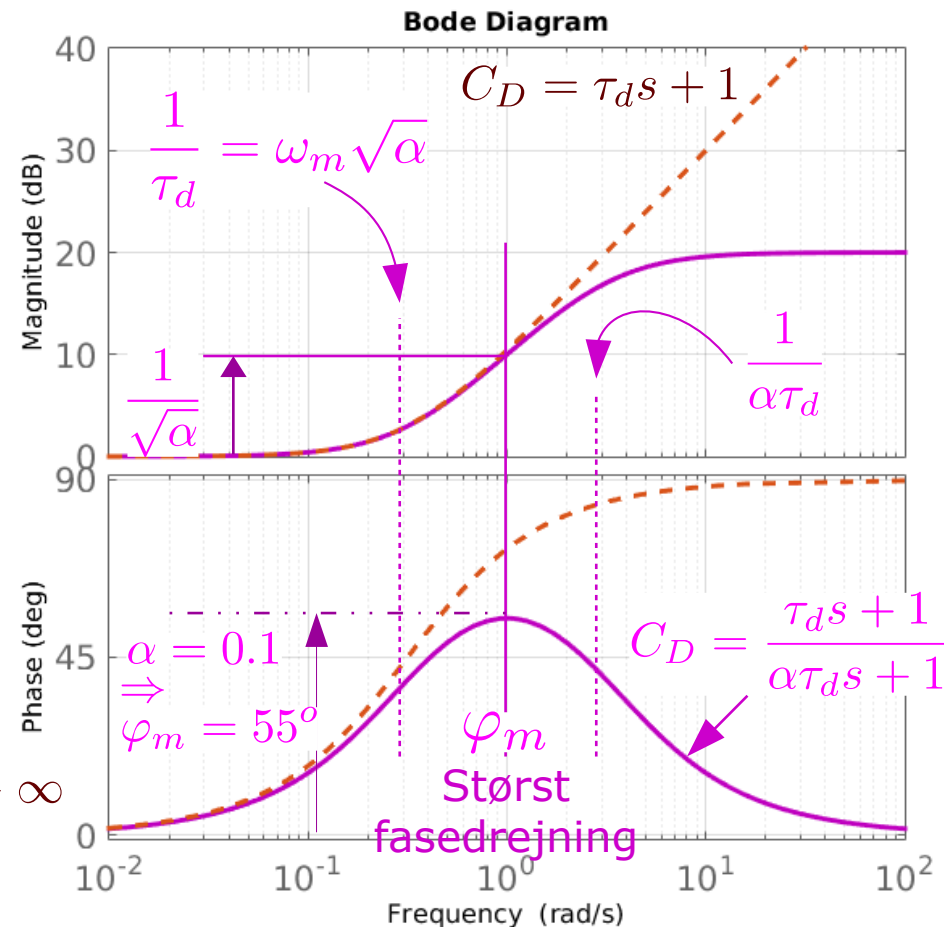
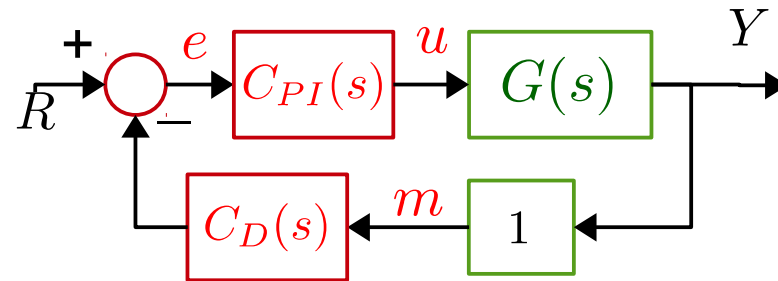
$$C_D = \tau_d s + 1$$

$$C_D \approx \frac{\tau_d s + 1}{\alpha \tau_d s + 1}, \alpha < 1$$

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

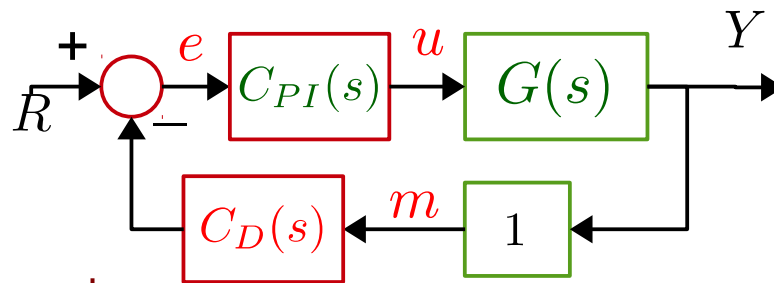
Nulpunkt giver positiv fasedrejning, som kan udnyttes til bedre fasemargin

Pol tilføjet for at undgå  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G_D| \rightarrow \infty$  (og gøre system implementerbart)



# PID design

## Lead – led



Et Lead-led tilføjer et nulpunkt og en pol

$$C_D(s) = \frac{\tau_d s + 1}{\alpha \tau_d s + 1} ; \alpha = 0.2$$

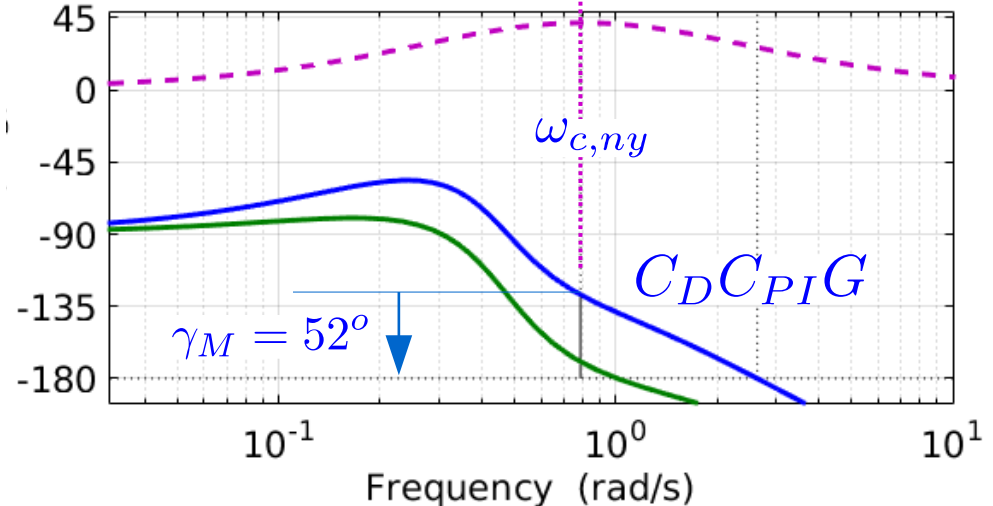
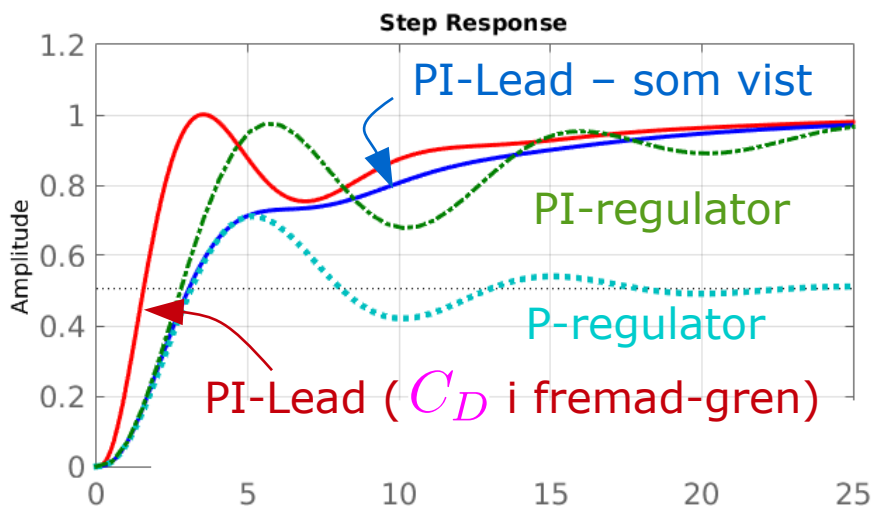
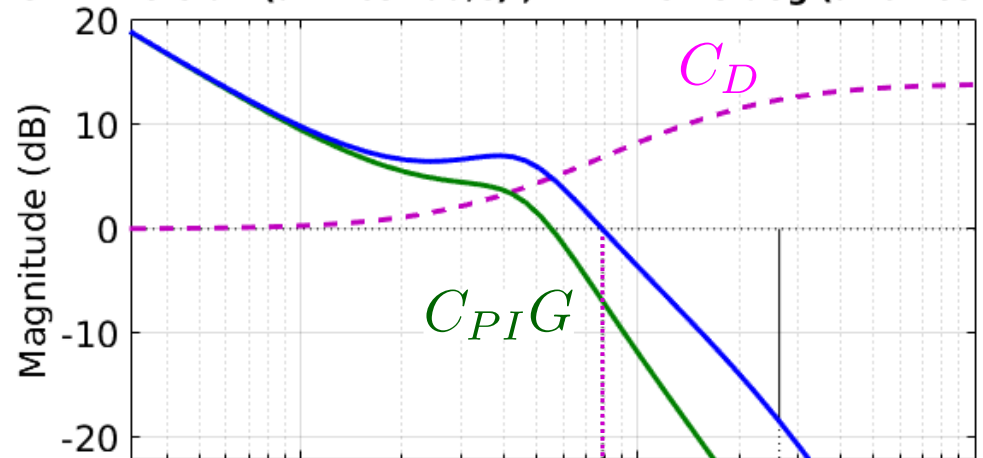
Positiv fasedrejning  $\varphi_m$   
skal helst udnyttes ved den  
nye  $\omega_{c,ny}$

Her er  $K_P = 0.31$  og  $N_i = 3$   
bevaret, og vist grønt

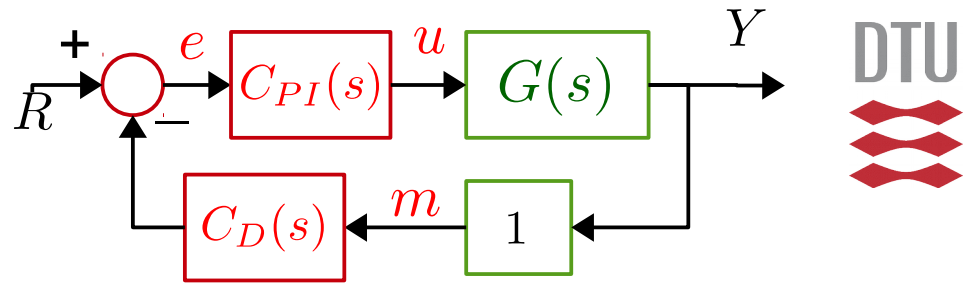
Her placeres  $\omega_{c,ny}$  så  $\gamma_M = 52^\circ$

Open loop  
Bodeplot

**Bode Diagram**  
Gm = 18.5 dB (at 2.63 rad/s) , Pm = 52.3 deg (at 0.785 rad/s)



# Kontrolspørgsmål PI-Lead



## 2. Design en PI-Lead-regulator skal designes

Det besluttes at bruge følgende (typiske) værdier:

$$N_1 = 3, \alpha = 0.3, \gamma_M = 60^\circ$$

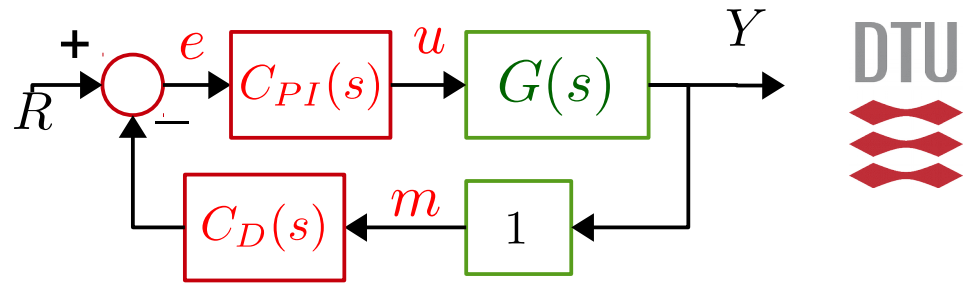
- a) Hvilken fasedrejning giver I-leddet ved krydsfrekvensen?
- b) Hvilken fasedrejning giver Lead leddet maksimalt?
- c) Når der skal opnås 60 grader fasemargin, ved hvilken fasevinkel for systemet  $G(s)$  skal krydsfrekvensen findes?
- d) Når systemet er

$$G(s) = \frac{40}{(s+1)(s+10)^2}$$

Hvad bliver så den nye krydsfrekvens?

- e) Hvad skal  $K_p$  være for at opnå denne krydsfrekvens?

# Kontrolspørgsmål PI-Lead



## 2. Design en PI-Lead-regulator skal designes

Det besluttes at bruge følgende (typiske) værdier:

$$N_1 = 3, \alpha = 0.3, \gamma_M = 60^\circ$$

a) Hvilken fasedrejning giver I-leddet ved krydsfrekvensen?

$$\varphi_i = -\arctan\left(\frac{1}{N_i}\right) * 180/\pi = -18.4^\circ$$

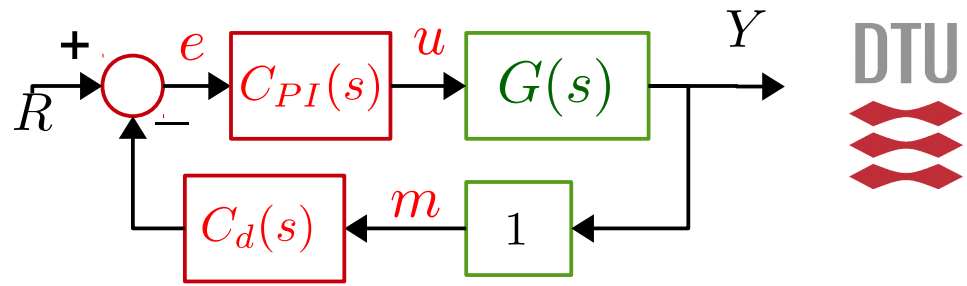
b) Hvilken fasedrejning giver Lead-leddet maksimalt?

$$\varphi_d = \arcsin\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) * 180/\pi = 32.6^\circ$$

c) Når der skal opnås 60 grader fasemargin, ved hvilken fasevinkel for systemet  $G(s)$  skal krydsfrekvensen findes?

$$\varphi_G = -180^\circ + 60^\circ - 32.6^\circ + 18.4^\circ = -134.2^\circ$$

# Kontrolspørgsmål PI-Lead



## 2. Design en PI-Lead-regulator skal designes

Det besluttes at bruge:

$$N_1 = 3, \alpha = 0.3, \gamma_M = 60^\circ$$

c) ved hvilken fasevinkel skal krydsfrekvensen findes?

$$\varphi_G = -134.2^\circ$$

d) Hvad bliver den nye krydsfrekvens?

$$\omega_c = 5.22 \text{ rad/sek}$$

$$\tau_i = \frac{N_i}{\omega_c} = 0.57 \quad \tau_d = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 0.35$$

e) Hvad skal Kp være?

$$C_i = \text{tf}([t_i \ 1], [t_i \ 0])$$

$$C_d = \text{tf}([t_d \ 1], [\alpha t_d \ 1])$$

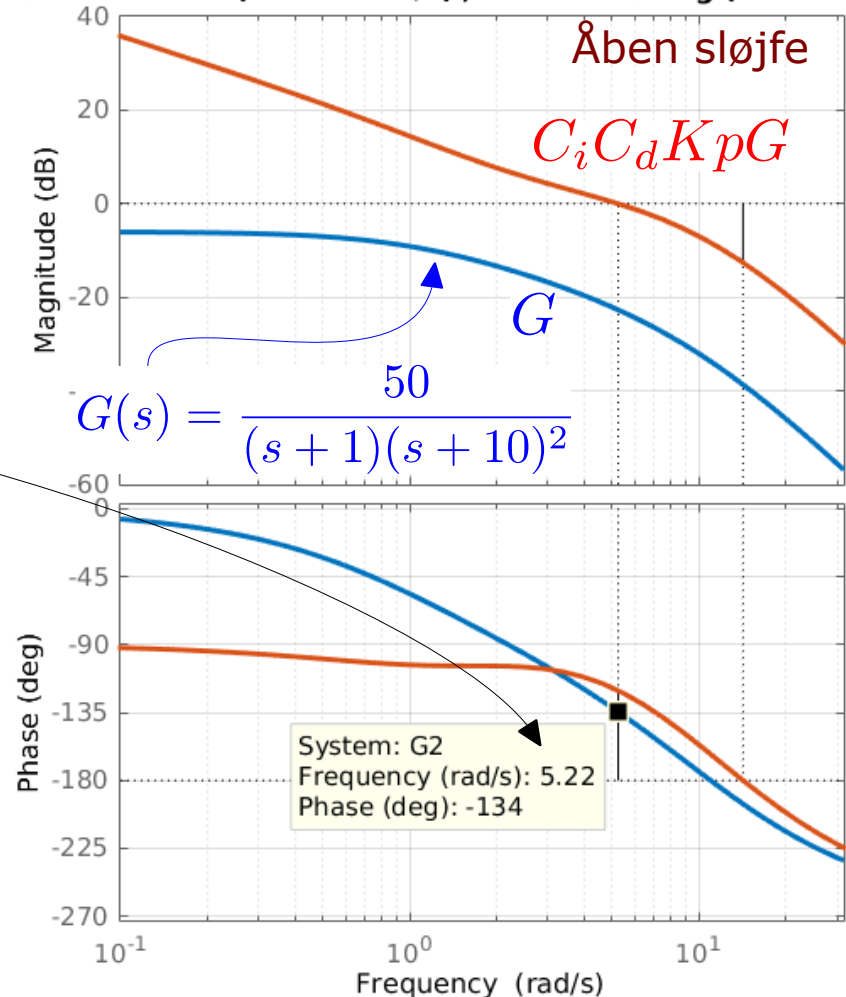
$$[\text{mag}, \text{ang}] = \text{bode}(C_d * C_i * G, \omega_c)$$

$$\rightarrow \text{mag} = 0.1411, \text{ang} = -120.4706$$

$$K_p = 1/\text{mag}$$

$$\rightarrow K_p = 7.0849$$

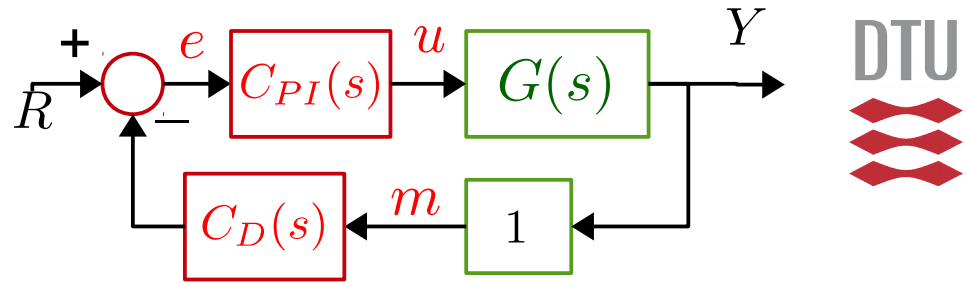
Bode Diagram  
Gm = 12.6 dB (at 14.2 rad/s) , Pm = 59.5 deg (at 5.25 rad/s)



# Grupperegning og Dagens øvelse

- Næste gang: bl.a. midtvejstest og midtvejsevaluering
- Grupperegning – PI-Lead
- Øvelse 6+7+8 dampmaskineopgave

# Grupperegning



1. Design en PI-Lead regulator til et system  $G_1$

$$G_1 = \frac{9000}{(100s + 1)(s^2 + 60s + 900)}$$

a) Design en PI-Lead regulator, når der vælges:

$$N_i = 2, \alpha = 0.1 \text{ og } \gamma_M = 70^\circ$$

2. Multiple choice opgaver på campusnet