

Tillæg til Regulerings teknik

af Ole Jannerup m.fl.

(rev 1.1)

Christian Andersen
DTU Elektro
Automation and Control

2018

Indhold

1	Introduktion	5
2	Regulator design	7
2.1	PI-Lead designmetode	7
2.1.1	Valg af α	8
2.1.2	Valg af fasemargin γ_M	8
2.1.3	Valg af N_i	9
2.1.4	Find den nye krydsfrekvens ω_C	10
2.1.5	Find resterende regulator konstanter	11
2.2	Eksempel: PI-Lead design af hastighedsstyring	11
2.2.1	Ny krydsfrekvens	12
2.2.2	Løsning med MATLAB	13
2.3	Eksempel: P-Lead design af en positionsstyring	14
2.3.1	P-Lead positionsregulator resultater	16
3	Begrænset styresignal og wind-up	19
3.1	Introduktion	19
3.2	Wind-up problem	19
3.3	Begrænsning af integrator	21
3.4	Anvendelse af Lag	22
4	Regulering af ustabile systemer	23
4.1	Introduktion	23
4.2	Regulatorens tæller polynomie	23
4.3	Regulator design	24
4.4	Eksempel: Regulering af ustabilt system	24
4.4.1	P-regulator til ustabilt system	25
4.4.2	PI-Lead regulator til ustabilt system	27
5	Implementering i C	29
5.1	Introduktion	29
5.2	Z-transformation på den intuitive måde	29
5.2.1	Z transformation	30
5.2.2	Samplingstid	31

5.2.3	Maple kontinuert til diskret	32
5.2.4	MATLAB kontinuert til diskret	32
5.3	Eksempel: Implementering af PI-Lead	32
5.4	Antal betydende cifre	34

Kapitel 1

Introduktion

Denne note er et supplement til kapitel 6 i Regulerings teknik af Ole Jannerup m.fl i 4. udgave. 5. udgave indeholder de fleste af elementerne i en forkortet udgave i afsnit 6.2.8 (PI-Lead design med indledende valg af α) og 6.2.3 (integrator overstyring).

Denne note indeholder:

- En alternativ metode til især PI-Lead design
- Håndtering af I-led problemer når styresignal går i mætning.
- Introduktion til diskret implementering af regulator

De to første er mangler i bogen, og den sidste er en kort introduktion til diskret regulering, som ikke er pensum i reguleringsteknik 1, men er relevant, da de fleste regulatorer implementeres diskret.

Kapitel 2

Regulator design

Dette kapitel omhandler design af især regulatorer der indeholder et Lead led. Det er en mere matematisk tilgang, der udnytter at udregning kan assisteres af matematikprogrammer som MATLAB og Maple. Metoden kan dog også løses grafisk ud fra bodeplot med minimal udregning.

Grundlæggende designs regulatoren ud fra en frekvensanalyse af det system der skal reguleres, og den antagelse at der ønskes en et reguleret system der er så hurtigt som muligt.

Udgangspunktet er at der vælges en fasemargin og andre parametre, som forventes at give en passende performance for det aktuelle system. Derfra udregnes så de parametre der indgår i regulatoren: K_P , τ_i , τ_d og α .

2.1 PI-Lead designmetode

Denne PI-Lead designmetode tager båndbredden af det endelige (lukket-sløjfe) system som den vigtigste parameter, eller med andre ord at stepresponse og indsvingningstid skal være hurtig og kort.

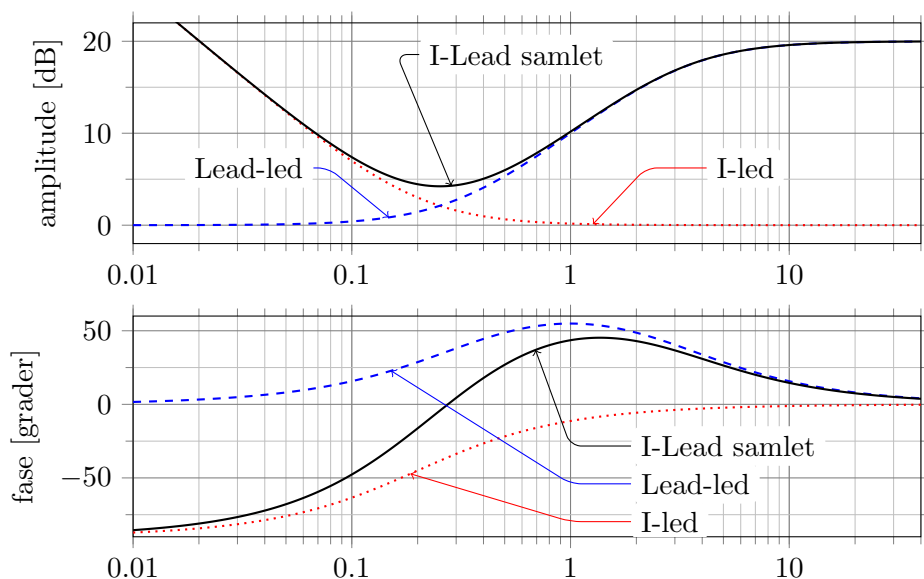
Det system der skal reguleres har overføringsfunktionen $G(s)$ og det antages at tilstrækkelig båndbredde og stabilitet ikke kan nås med en P- eller PI-regulator alene.

Der skal således designs et Lead-led til systemet. Regulatorens designs med en overføringsfunktion som i (2.1), når et I-led er medtaget.

$$\begin{aligned} G_C &= K_p \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s} \frac{\tau_d s + 1}{\tau_d \alpha s + 1} \\ \tau_i &= \frac{N_i}{\omega_C} \end{aligned} \tag{2.1}$$

hvor τ_d bestemmer nulpunktet i lead-leddet, hvor den tilhørende pol placeres ved en højere frekvens bestemt af α . τ_i bestemmer nulpunkt i I-leddet, og placeres i forhold til krydsfrekvensen ω_C med en faktor N_i .

Samlet set giver regulatoren et bodeplot i stil med figur 2.1.



Figur 2.1: Fasedrejningen for en PI-Lead regulator med $\omega_C = 1$ rad/sec, $\alpha = 0.1$, $N_i = 5$ og $K_P = 1$. Den stiplede linje viser lead-leddets bidrag, og den prikkede linje viser I-leddet.

Metoden er at der som udgangspunkt vælges en α til Lead-leddet og en N_i til I-leddet. Dernæst forskydes I-Lead leddet i frekvens, således at der netop opnås en valgt tilstrækkelig fasemargin γ_M , denne frekvens er den nye krydsfrekvens ω_C . Til slut udregnes en K_P således at open-loop gain bliver netop 0 dB ved den nye krydsfrekvens.

2.1.1 Valg af α

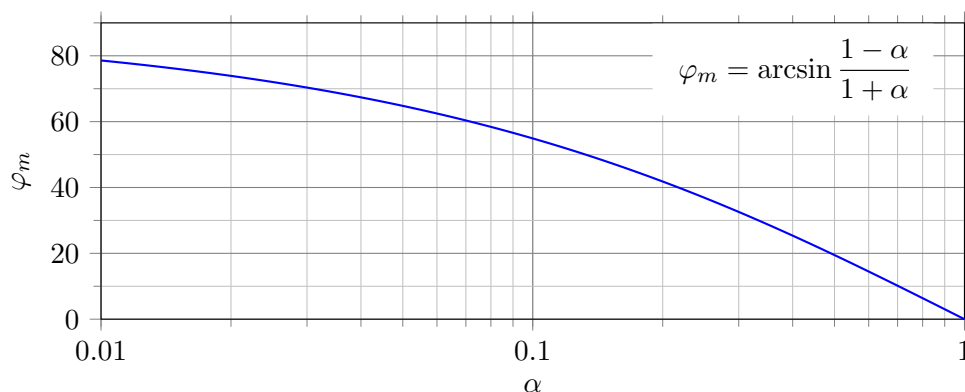
Den maksimale forbedring af fasemargin bestemmes af lead-leddets α , og størrelsen af denne forbedring kan ses på figur 2.2.

En $\alpha \in]1..0.2]$ opfattes normalt i den milde ende, hvor der kan opnås en mindre forbedring af indsvingningshastighed og en moderat forbedring af fasemargin. Med $\alpha \in [0.2..0.02]$ kan opnås en større forbedring af indsvingningshastighed og fasemargin, men også en betydeligt øget gain i regulatoren ved højere frekvenser. Det kan betyde at kontrolsignalet $u(s)$ ud af regulatoren vil forstærke støj ved disse frekvenser, og som igen kan medføre øget slitage eller energiforbrug.

En $\alpha = 0.2$ kan være et godt udgangspunkt.

2.1.2 Valg af fasemargin γ_M

Fasemargin vælges generelt ud fra den antagelse at en stor fasemargin giver et lille oversving af lukket-sløjfesystemet. En fasemargin $\gamma_M \in [50^\circ..80^\circ]$



Figur 2.2: Lead-led maksimal forbedring af fasevinklen φ_m ved ω_C som funktion af α . Jo mindre α jo mere aggressiv bliver regulatoren.

giver i mange tilfælde et relativt lille oversving.

For systemer med 2 rene integrationer eller ikke minimum-fase systemer kan der være grænser for hvor stor en fasemargin der kan opnås.

For 1. og 2. ordenssystemer kan det være fristende at vælge en fasemargin, der giver en meget høj krydsfrekvens, men det vil ofte være tilfældet at 1. eller 2. ordensmodellen slet ikke er gyldig ved disse frekvenser, og derfor ikke i praksis vil give den forventede performance.

En fasemargin $\gamma_M = 60^\circ$ kan være et godt udgangspunkt.

2.1.3 Valg af N_i

Nulpunktet i I-leddet placeres så tilstrækkeligt lavt i frekvens i forhold til den nye krydsfrekvens ω_C , at den fasedrejning I-leddet giver anledning til ved den nye krydsfrekvens er relativt lille - se figur 2.3. I-leddet vil også give en lille forskydning af den frekvens, hvor der opnås en maksimal forbedring af fasedrejningen, men dette forhold ignoreres som ubetydeligt.

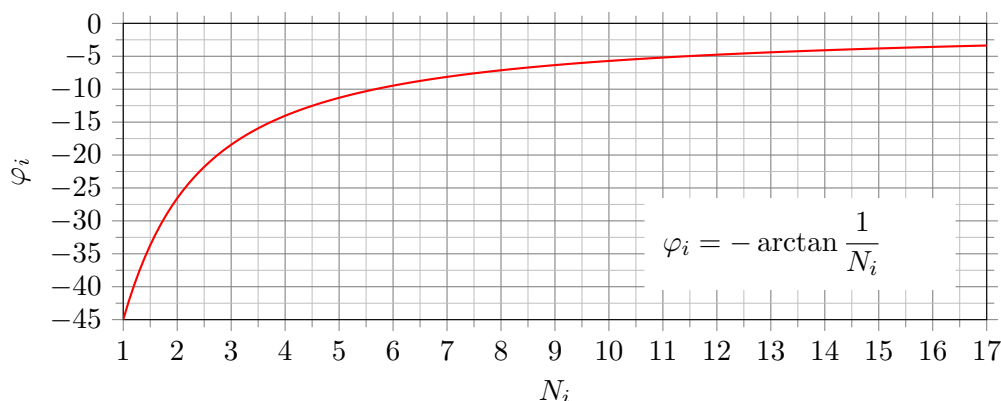
$$\tau_i = N_i \frac{1}{\omega_C} \quad (2.2)$$

hvor N_i er en faktor der typisk vælges i området $N_i \in [3..20]$, og ω_C er den nye krydsfrekvens, som er sammenfaldende med den frekvens ω_m hvor Lead-leddet har størst positiv fasedrejning.

$$\omega_m = \omega_C = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau_d} \quad (2.3)$$

Vælges N_i for stor bliver indsvingsningstiden ofte lang, og vælges den for lille vil den positive effekt på fasedrejningen af Lead-leddet blive reduceret

En $N_i = 5$ kan være et godt udgangspunkt.



Figur 2.3: Placering af nulpunkt for I-led ved en vinkelfrekvens der er N_i gange lavere end krydsfrekvensen ω_C , det giver den viste negative fasevinkel φ_i ved ω_C .

2.1.4 Find den nye krydsfrekvens ω_C

Det antages at der kan findes en frekvens ω_C , hvor fasedrejningen netop bliver γ_M af systemet $G(s)$ sammen med en optimalt placeret regulator.

Det betyder at følgende ligning skal løses:

$$\begin{aligned} \angle G(s) + \varphi_m + \varphi_i &= \gamma_M - 180^\circ|_{s=j\omega_C} \quad \text{eller} \\ \angle G(s) &= \gamma_M - \varphi_m - \varphi_i - 180^\circ|_{s=j\omega_C} \end{aligned} \quad (2.4)$$

hvor φ_m er den maksimale positive fasedrejning af Lead-leddet, og φ_i er den (negative) fasedrejningen I-leddet har ved krydsfrekvensen ω_C .

Maksimalvinklen φ_m kan udregnes ud fra lead-leddets overføringsfunktion som vist i (2.5), og som er vist i figur 2.2 i det relevante interval.

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \angle \left\{ \frac{\tau_d s + 1}{\alpha \tau_d s + 1} \right\}_{s=j\omega_C} \quad \tau_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_C} \\ \varphi_m &= \arctan \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}, \text{ eller } \varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Den negative fasevinkel φ_i fra I-leddet ved krydsfrekvensen ω_C kan udregnes som i (2.6), og er vist i figur 2.3 i det relevante interval.

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \angle \left\{ \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s} \right\}_{s=j\omega_C} \quad \tau_i = \frac{N_i}{\omega_C} \\ \varphi_i &= \arctan \frac{-1}{N_i} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Den nye krydsfrekvens ω_C kan findes grafisk ud fra vinkeldelen af $G(s)$ systemets bodeplot eller beregnes ved hjælp af f.eks. Maple, MATLAB (se evt. afsnit 2.2.2) eller en lommeregner.

2.1.5 Find resterende regulator konstanter

Øvrige konstanter findes ud fra ω_C og tidligere valg, som vist i (2.7).

$$\begin{aligned}\tau_d &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_C} \\ \tau_i &= N_i \frac{1}{\omega_C} \\ K_p &= \frac{1}{|G_C(s)G(s)|} \Big|_{s=j\omega_C}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Det afslutter regulatordesignet og den resulterende ydelse kan nu evalueres. Nedenstående er hints til hvad der (måske) kan forbedre ydelsen:

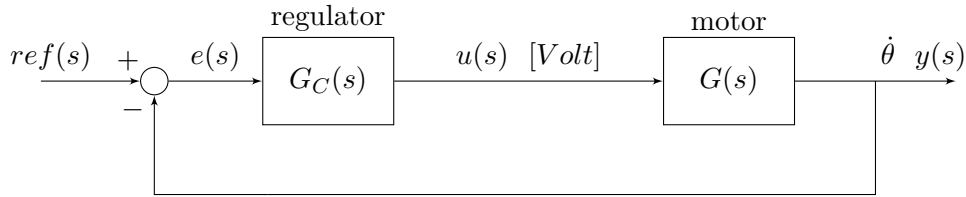
For meget oversving kan reduceres med større fasemargin γ_M .

En “pukkel” efter første flanke kan måske rettes ved at øge N_i , og tilsvarende hvis der efter den første flanke er en “pause” inden I-leddet reducerer fejlen, så er N_i måske for stor.

Regulatoren generer for stort styresignal $u(t)$, her kan det ofte hjælpe at reducere α .

Efter ændring af designparametrene skal øvrige parametre selvfølgelig genudregnes.

2.2 Eksempel: PI-Lead design af hastighedsstyring



Figur 2.4: En motor er modelleret med en overføringsfunktionen $G(s)$, den roterer med en udgangshastighed $\dot{\theta}$ i radianer/sek, og styres af en ankerspænding $u(s)$ i Volt. Motoren søges hastighedsstyret med en regulator $G_C(s)$.

Et system har en overføringsfunktion $G(s)$ som i (2.8) og målesystemet $H(s) = 1$ måler hastigheden direkte uden dynamik. Det kunne være en hastighedsstyring af en elektrisk motor som vist på figur 2.4.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{3}{(0.3s + 1)(2s + 1)} \quad (2.8)$$

Systemet har en maksimal fasedrejning på 180° , så det skulle være muligt at opnå en fin fasemargin og en god stabilitet.

Der ønskes, at det regulerede system kan styre hastigheden så hurtigt som muligt, uden stationær fejl og med kun et lille oversving. Derfor vælges (som udgangspunkt) følgende parametre:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.1 && \text{for et rimeligt aggressivt lead-led} \\ N_i &= 5 && \text{for en fair indsvingningstid} \\ \gamma_M &= 60^\circ && \text{for kun et lille oversving}\end{aligned}\tag{2.9}$$

2.2.1 Ny krydsfrekvens

Ud fra (2.5) og (2.6) findes fasedrejning for Lead-led og for I-led ved den nye krydsfrekvens:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 54.9^\circ \\ \varphi_i &= -11.3^\circ\end{aligned}\tag{2.10}$$

Den nye krydsfrekvens ω_C er så der hvor $G(s)$ sammen med fasedrejningen fra disse regulatorled giver en fasemargin γ_M som ønsket:

$$\begin{aligned}\angle G(s) + 54.9^\circ - 11.3^\circ &= 60^\circ - 180^\circ|_{s=j\omega_C} \\ \angle G(s) &= -163.6^\circ|_{s=j\omega_C} \\ \omega_C &= 13.15 \text{ rad/sec}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Fasedrejningen af $G(s)$ skal således være -163.6° ved netop ω_C , og kan findes grafisk fra bodeplot af $G(s)$. Her er løsningen ω_C fundet med Maples *fsolve* funktion).

Parametrene τ_d og τ_i findes ud fra (2.7):

$$\begin{aligned}\tau_d &= 0.24 \\ \tau_i &= 0.38\end{aligned}\tag{2.12}$$

Den samlede regulator bliver således:

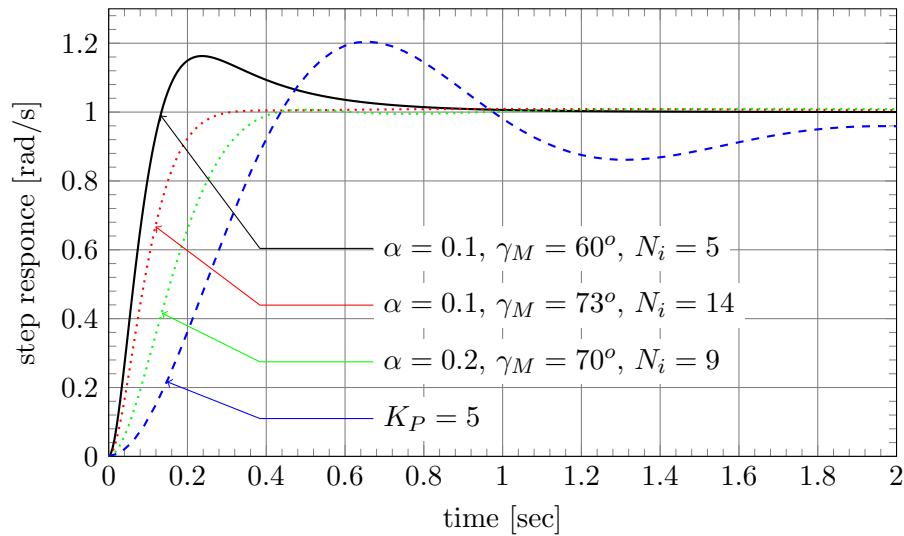
$$G_C(s) = \frac{0.38s + 1}{0.38s} \frac{0.24s + 1}{0.024s + 1}\tag{2.13}$$

Og dermed kan K_p udregnes som i (2.7) til:

$$\begin{aligned}K_p &= \left| \frac{0.38s + 1}{0.38s} \frac{0.24s + 1}{0.024s + 1} \frac{3}{(0.3s + 1)(2s + 1)} \right|_{s=j\omega_C}^{-1} \\ K_p &= 11.06\end{aligned}\tag{2.14}$$

Et enhedstrinrespons for systemet med regulator kan ses i figur 2.5 sammenlignet med en P-regulator for samme system.

Det ses at systemet som forventet er blevet hurtigere (stigetid 0.09 sec), uden stationær fejl, et oversving på 16% og en indsvingningstid på 0.72 sec.



Figur 2.5: Enhedstrin response for systemet i eksempel 2.2 med PI-Lead regulator (fuldt optrukket) sammenlignet med en P-regulator med en $K_p = 5$ (blå stippet) og yderligere to PI-Lead regulatorer optimeret for lille overshoot (rød prikket) med $\alpha = 0.1$, og (grøn prikket) med $\alpha = 0.2$.

Oversving kan gøres mindre ved at vælge en større fasemargin γ_M og i dette tilfælde også en større N_i , som det fremgår af de to prikkede kurver på figur 2.5. En større α (mindre aggressiv Lead) vil gøre systemet langsommere, men vil også give et mindre styresignal $u(t)$ ud af regulatoren.

□

2.2.2 Løsning med MATLAB

Denne hastighedstyring (eksempel 2.2) kunne udregnes med MATLAB som følger (med $N_i = 5$ $\alpha = 0.1$ og $\gamma_M = 60^\circ$):

```

1 Gs=tf(3,[0.6 2.3 1])           % system to control
2 w = logspace(-2,2,3000);       % frekvens fra 10^-2 til 10^2
3 [mag phase omega]=bode(Gs,w);  % bodeplot med vektor resultat
4 alpha=0.1                      % valgt Lead aggressivity
5 Ni=5;                          % valgt I-led
6 gammaM = 60;                  % valgt fasemargin
7 phi_m = rad2deg(asin((1-alpha)/(1+alpha))); % max fase af lead
8 phi_i = rad2deg(atan2(-1,Ni));  % fase af I-led
9 pc=gammaM - 180 - phi_m - phi_i % fase ved ny krydsfrekvens
10 n = find(phase<pc,1,'last');   % find sidste vektor indeks
11 wc=w(n)                       % og ny krydsfrekvens
12 tau_d=1/(sqrt(alpha)*wc)       % find ny lead,
13 tau_i=Ni/wc                    % og I-led parametre
14 Gd = tf([tau_d 1],[alpha*tau_d 1]); % lead-led
15 Gi = tf([tau_i 1],[tau_i 0]);   % I-led

```

```

16 [magc, phasec, umegac] = bode(Gs*Gi*Gd, wc) % ved ny krydsfrq.
17 Kp = 1/magc % find ny kp
18 margin(Kp*Gi*Gd*Gs) % test resultat

```

Her findes den søgte fasemargin ved at bruge den vektor et bodeplot generer.

Det giver en $\omega_C = 13$ rad/sec, en $\tau_i = 0.38$, en $\tau_d = 0.24$, en $k_P = 10.9$ og endelig viser `margin` en opnået fasemargin på 60.1° . Resultatet stemmer ikke helt med det ønskede, det skyldes at `bode` funktionen har grove spring i frekvens, og derfor kun giver et tilnærmet resultat.

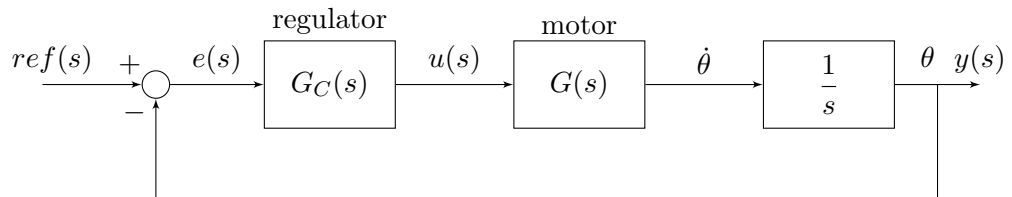
Koden `n = find(phase<pc,1,'last')`; virker kun hvis bodeplottet starter ved 0 grader og fasen krydser fasedrejningen `pc`, og at at dette er sidste gang i det valgte frekvensområde. For en del systemer vil `bode` starte ved et multiplum af 360 grader, og så vil denne kode ikke virke.

Dette system er et 2. ordenssystem med en maksimal fasedrejning på 180 gradet, så hvis der vælges en ønsket fasedrejning på f.eks. $\gamma_M = 40^\circ$, så vil den søgte fasedrejning `pc` være mindre end 180° , og er derfor ikke muligt med dette valg af N_i og α .

MATLAB har en `fsolve` funktion, der måske sammen med `margin` kan bruges til at finde en mere fleksibel måde at finde ω_C .

2.3 Eksempel: P-Lead design af en positionsstyring

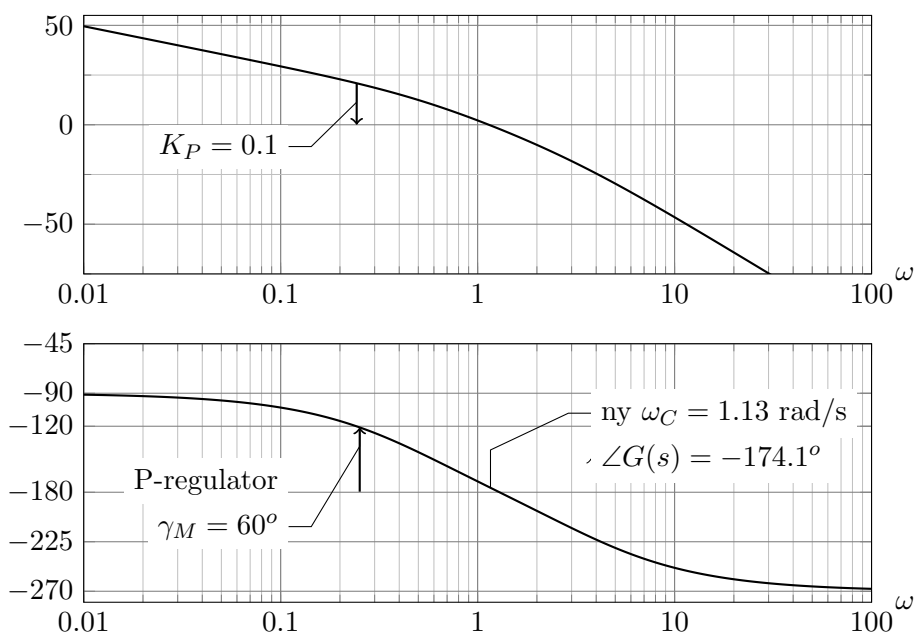
Dette eksempel er for et system der indeholder en ren integration – det kunne være positionsstyring af en motor som vist i figur 2.6.



Figur 2.6: En motor er modelleret med en overføringsfunktionen $G(s)$, den roterer med en udgangshastighed $\dot{\theta}$ og en vinkelposition θ i radianer. Motoren styres med en ankerspænding $u(s)$ i Volt. En regulator $G_C(s)$ skal styre positionen af motoren.

Overføringsfunktionen for systemet er som i (2.15) og målesystemet måler positionen θ direkte uden dynamik.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{3}{(0.3s + 1)(2s + 1)s} \quad (2.15)$$



Figur 2.7: Bodeplot for system i eksempel 2.3. Det ses at krydsfrekvensen skal være $\omega_C = 0.23$ rad/sec for at holde en fasemargin på 60° med en P-regulator. Med en P-Lead regulator kan krydsfrekvensen flyttes til $\omega_C = 1.13$ rad/s.

Systemets bodeplot (fasedel) er vist på figur 2.7 og det ses at fasedrejningen som forventet starter ved 90° og slutter ved 270° .

Der skal designs en P-Lead regulator i dette tilfælde, da den stationære fejl (for et step på referenceinput) allerede er elimineret af systemets integrator.

Der vælges som udgangspunkt en ønsket fasemargin γ_M og faktoren α for Lead-leddet (2.16).

$$\begin{aligned}\gamma_M &= 60^\circ \\ \alpha &= 0.1\end{aligned}\tag{2.16}$$

Ud fra dette udregnes maksimal forbedring af fasemargin til $\varphi_m = 54.9^\circ$ (med (2.5)) og en nye krydsfrekvens kan så findes ud fra ligningen (2.17), eller direkte aflæses på figur 2.7 (som den vinkelfrekvens hvor systemets fasevinkel er -174.1°).

$$\begin{aligned}\angle G(s) + 54.9^\circ &= 60^\circ - 180^\circ|_{s=j\omega_C} \\ \angle G(s) &= -174.1^\circ|_{s=j\omega_C} \\ \omega_C &= 1.13 \text{ rad/sec}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Og herfra findes Lead led:

$$\begin{aligned}\tau_d &= \frac{1}{\sqrt{0.1} \cdot 1.13} = 2.8 \\ G_c(s) &= \frac{2.8s + 1}{0.28s + 1}\end{aligned}\tag{2.18}$$

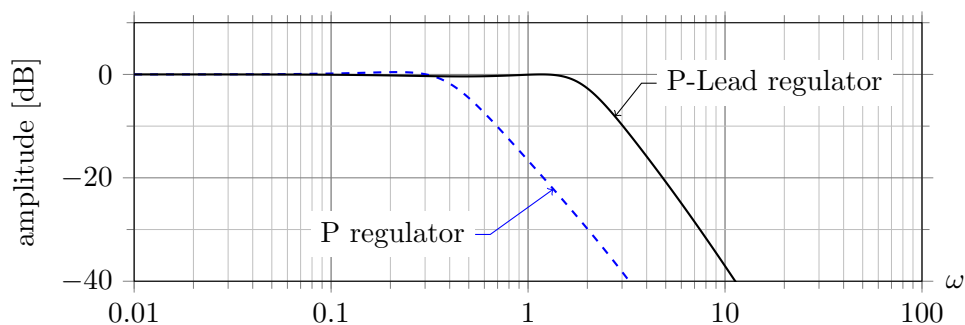
Så mangler der kun K_p som skal give open-loop systemet en gain på netop $0dB$ ved frekvensen $\omega_C = 1.13$ rad/sec:

$$\begin{aligned}K_p &= \left| \frac{2.8s + 1}{0.28s + 1} \frac{3}{(0.3s + 1)(2s + 1)s} \right|_{s=j\omega_C}^{-1} \\ K_p &= 0.31\end{aligned}\tag{2.19}$$

Regulatoren er nu færdigdesignet (i første valg afparametre), og kan analyseres.

2.3.1 P-Lead positionsregulator resultater

Figur 2.8 viser amplitudedelen af bodeplot for lukket sløjfe systemet, det viser den opnåede (3dB) båndbredde $\omega_B \approx 2$ rad/sec.

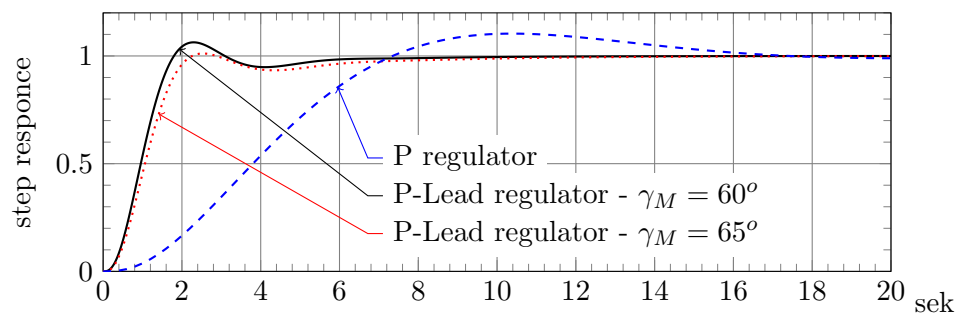


Figur 2.8: Bodeplot (amplitudedel) for lukket-sløjfesystem med en P-Lead regulator, sammenlignet med en ren P-regulator med $K_p = 0.1$ (blå stiplet kurve). Det ses at der er opnået en båndbredde $\omega_B \approx 2$ rad/sec, mod $\omega_B \approx 0.44$ rad/sec for det P-regulerede system.

Systemet stepresponce er vist i figur 2.9 og viser at systemet som forventet er blevet hurtigere (stigetid 1.1 sekund) i forhold til P-regulator løsningen, der gav en stigetid på 4.8 sekunder.

Systemets oversving (på 6%) er søgt reduceret ved at øge fasemargin til 65° (den prikkede kurve i figur 2.9) og det har reduceret oversvinget til 1%, men har også øget stigetiden.

□



Figur 2.9: Enhedstrin response for P-Lead positionsreguleret system (fuldt optrukket) sammenlignet med en P-regulator med en $K_p = 0.1$ for samme system (stiplet).

Kapitel 3

Begrænset styresignal og wind-up

3.1 Introduktion

I den virkelige verden er der grænser for hvor stort styresignalet ud af regulatoren kan være. For eksempel kan ankerspændingen for en motor være begrænset til måske $\pm 12V$. Det betyder naturligvis at den hurtigste stigetid bliver begrænset, ikke kun af systemets dynamik (overføringsfunktion), men også af amplitudebegrænsninger.

Det begrænsede styresignal giver især problemer, når regulatoren indeholder en integrator. Denne integrator integrerer fejlsignalet, og hvis styresignalet når begrænsningen vil fejlsignalet være til stede i længere tid, og integratoren vil nå en større værdi end forudset (integrator wind-up), og det vil generelt betyde et større oversving end forudset.

Denne del vil behandle typiske muligheder for at begrænse denne effekt.

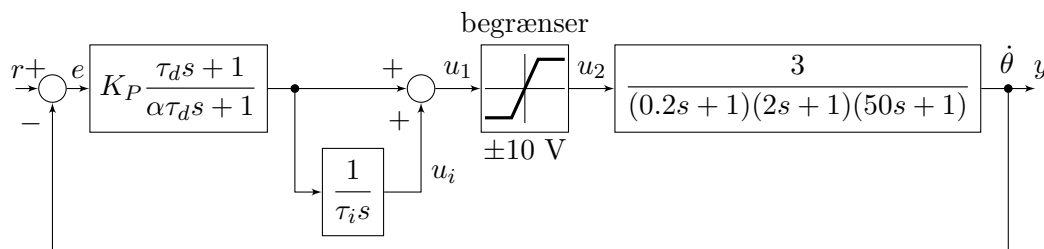
3.2 Wind-up problem

For at synliggøre integrator wind-up problemet omskrives regulator udtrykket som i (3.1), der giver et blokdiagram som i figur 3.1.

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right) \frac{\tau_d s + 1}{\alpha \tau_d s + 1} \quad (3.1)$$

For at illustrere konsekvensen er valgt et system med en langsom pol relativ til systemets øvrige dynamik - som vist i figur 3.1. Det kunne være en motor med en stor inertibelastning.

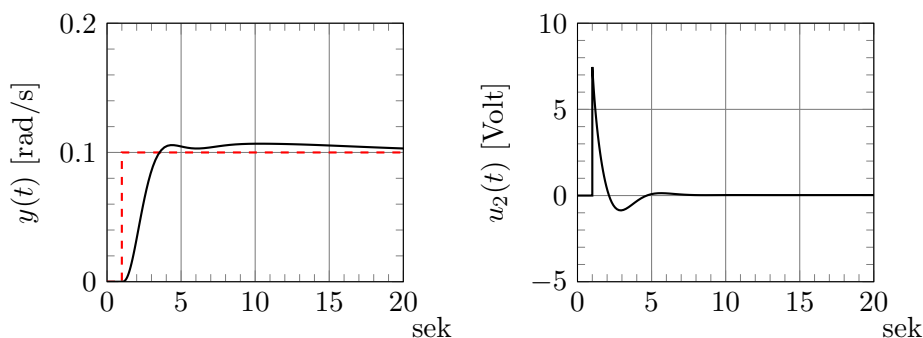
Der er designet en PI-Lead regulator til dette system, med følgende værdier af α , N_I og γ_M , der giver det en regulator med parametrene τ_d , τ_i og K_P som i (3.2).



Figur 3.1: Lukket sløjfe system med begrænser og PI-Lead controller med separat integratorled. Begrænseren har en gain på 1 indenfor grænserne.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0.1 & \tau_d &= 4.1 \\
 N_i &= 5 & \tau_i &= 6.5 \\
 \gamma_M &= 65^\circ & K_P &= 7.5
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

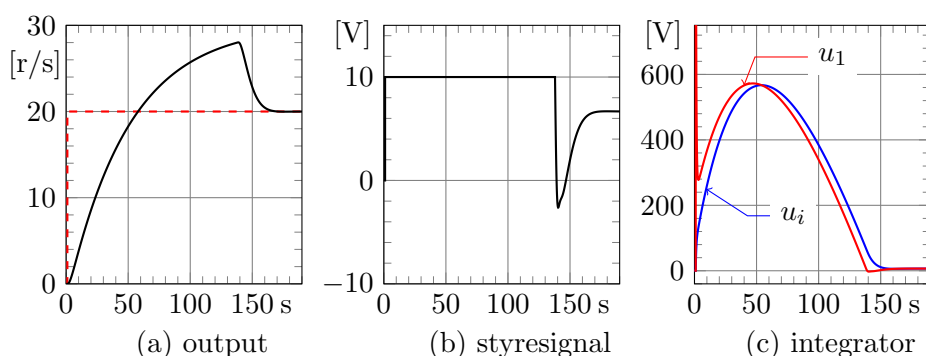
Vi vil så forvente at step-response for et lille trin på r skal give det optimale (med de valgte parametre) output y . Trinnet skal være så lille at begrænseren ikke er i funktion. Resultatet ses i figur 3.2 sammen med signalet $u_2(t)$, der viser at begrænserværdien ikke nås. Regulatoren giver et moderat oversving (ca. 7%) og en stigetid på ca. 3 sekunder. Med et større



Figur 3.2: Trin response for et trin på 0.1 rad/sek (venstre), med reference-trinnet vist stiplet rødt. Oversvinget er ca. 7%. Til højre er signalet ud af regulatoren $u_2(t)$, der ikke når begrænserværdien, men er tæt på.

trin på referenceinput vil begrænseren træde ikraft, og med et referencetrin på 20 rad/sek, ser resultatet ganske anderledes ud, som vist i figur 3.3. Her er signalet $u_2(t)$ tydeligt begrænset, det betyder naturligvis at stigetiden er betydelig langsommere, men vigtigere, oversvinget er nu oppe på ca. 40%, og indsvingningstiden er over 150 sekunder, som det fremgår af figur 3.3. Figuren viser tydeligt, at en indsvingningstid på måske 70 sekunder burde være muligt.

På figur 3.3(c) er bidraget fra integratoren alt for stort, da fejlsignalet

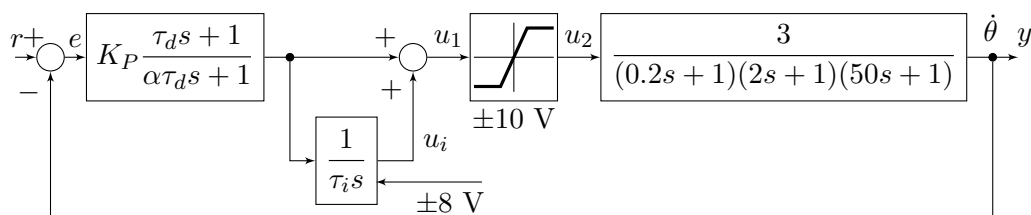


Figur 3.3: Trin response for et trin på 20 rad/sek (a), med referencetrinnet vist stiptet rødt. I midten (b) er signalet ud af regulatoren $u_2(t)$, som viser at begrænseren er ikraft i lang tid, og det ses af grafen til højre (c) at det er integratoren u_1 der bidrager med en uhensigtsmæssig høj værdi til $u_1(t)$.

integrerer i alt for meget i den tid styresignalet er begrænset (wind-up), derefter når først fejlsignalet skifter fortegn skal alt det integrerede rulles tilbage (un-windes), det tager tid, og giver anledning til stort oversving.

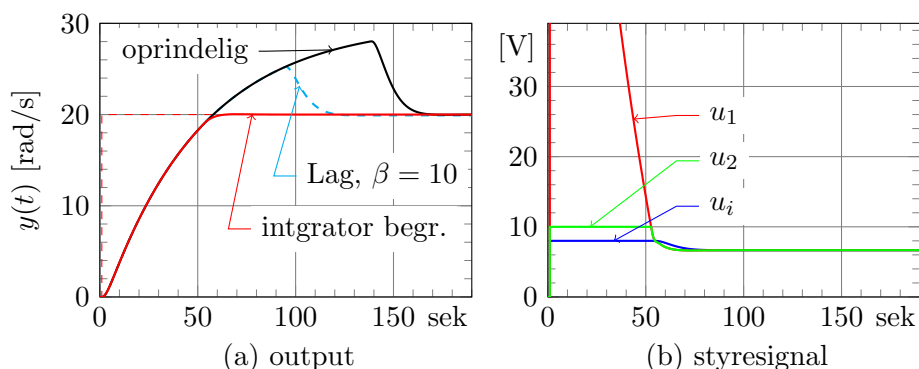
3.3 Begrænsning af integrator

En ofte anvendt forbedring er at begrænse integratoren som vist i figur 3.5. Integratorbegrænsningen skal dog stadig tillade hvad der skal til for at undgå stationær fejl ved det maksimale output.



Figur 3.4: Lukket sløjfe system med begrænser af styresignalet og begrænsning af integratorled.

I dette eksempel vil det være rimeligt at vælge en begrænsning lige under de 10 Volt, der maksimalt må sendes til motoren. I figur 3.5 er vist effekten når integratoren begrænses til at bidrage med 8 Volt.



Figur 3.5: Trin response på output (a) med begrænser af integratoren sammenholdt med den oprindelige og en løsning med et Lag-led i stedet for I-leddet. Til højre (b) vises data fra regulatoren med begrænset integrator, det ses at integrator output u_i nu kun bidrager ganske lidt i forhold til u_1 , så længe begrænsningen af u_2 er aktiv.

3.4 Anvendelse af Lag

En anden mulighed er at benytte et Lag-led i stedet for I-leddet, det forbedrer indsvingningstiden og oversvinget i forhold til det ubegrænsede I-led. Lag leddet reducerer den stationære fejl med en faktor $\beta \in [2..100]$, og ikke fuldstændigt som integratoren (svarende til $\beta = \infty$).

Overføringsfunktionen af Lag-leddet er valgt som i (3.3), hvor integratoren er erstattet af en pol, med en knækfrekvens der er β mindre end nulpunktets knækfrekvens.

$$G_L(s) = \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s + \frac{1}{\beta}} \quad (3.3)$$

Her er β placeret i nævneren således at den udregnede τ_i umiddelbart kan anvendes. Samtidigt opnås en – marginal – forbedring af fasemargin i forhold til den ren integrator, især ved $\beta < 10$.

Anvendelse af Lag som løsning på wind-up problemet er tydeligt en dårligere løsning end begrænsningen af I-leddet, som det fremgår af figur 3.5(a), her vist for en $\beta = 10$.

Kapitel 4

Regulering af ustabile systemer

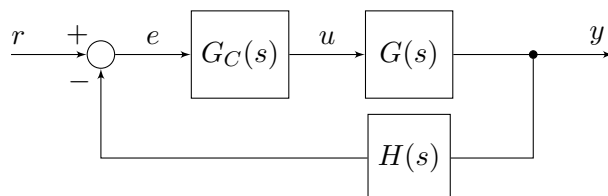
4.1 Introduktion

Ustabile systemer forstået som systemer med poler i højre halvplan, kan i mange tilfælde stabiliseres med en regulator.

Dette kapitel omhandler nogle af de forhold og muligheder, der bør tages i betragtning ved regulering af ustabile systemer. I mange tilfælde er denne metode hverken tilstrækkelig eller let.

4.2 Regulatorens tæller polynomie

For et generelt system med en regulator, som vist i figur 4.1, kan den lukket-sløjfe udtrykkes som i (4.1), og her er det nævnerpolynomiet $N_L(s)$ der ikke må have negative koefficienter – svarende til en eller flere poler i højre halvplan.



Figur 4.1: Lukket sløjfe med et system $G(s)$ der har poler i højre halvplan.

$$\begin{aligned}
G_L(s) &= \frac{G_C(s)G(s)}{1 + G_C(s)G(s)H(s)} \\
G_L(s) = \frac{T_L}{N_L} &= \frac{T_C T_G N_H}{N_C N_G N_H + T_C T_G T_H} \\
G_C(s) &= \frac{T_C}{N_C}, \quad G(s) = \frac{T_G}{N_G}, \quad H(s) = \frac{T_H}{N_H}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Nævneren i lukket-sløjfe udtrykket N_L består af summen af to polynomier, dels $N_C N_G N_H$ med de ustabile poler i N_G udtrykket, og dels $T_C T_G T_H$ hvor det er muligt at tilpasse tælleren af regulatoren T_C , således at det samlede nævnerpolynomie har luttet positive koefficienter.

$$\begin{aligned}
N_L &= N_C N_G N_H + T_C T_G T_H \\
N_L &= a_N s^N + \dots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad |a_n > 0; n \in 0..N
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Der er en god mulighed for at en traditionel P, PI eller PI-Lead regulator kan sikre at lukket sløjfe er stabil, hvis der er mange negative koefficienter i systemets overføringsfunktion kan det være nødvendigt at tilføje yderligere nulpunkter til regulatoren (måske et ekstra lead led).

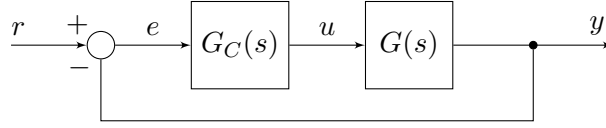
4.3 Regulator design

Metoden at stabilisere et system med poler i højre halvplan kan således være:

1. Bestem lukket sløjfe nævnerpolynomie for systemet uden regulator ud fra (4.2), her vil det fremgå hvilke koefficienter der er negative.
2. Tilføj regulator nulpunkter symbolsk, med de parametre der indgår i den forventede regulator, f.eks. $K_P(\tau_i s + 1)(\tau_d s + 1)$, og det samlede nævnerpolynomie inspiceres og der opstilles begrænsninger for de relevante parametre τ_i , τ_d og K_P der sikrer at alle koefficienter i lukket-sløjfe nævnerpolynomiet er positive. Bemærk at det kan kræve at K_P er negativ. Hvis de to nulpunkter i en normal PI-Lead regulator ikke er nok, kan det være nødvendigt at tilføje flere nulpunkter.
3. Regulator design afsluttes så på sædvalig vis ud fra systemets open-loop bodeplot, (medtag fortegnet for K_P), med iagttagelse af de begrænsninger der blev fundet i trin 2.

4.4 Eksempel: Regulering af ustabil system

Et system der er modelleret med overføringsfunktionen (4.3) skal stabiliseres med en regulator.



Figur 4.2: Ustabilt system med regulator.

$$G(s) = \frac{100}{(s+5)(s+50)(-s+2)}$$

$$G(s) = \frac{100}{-s^3 - 53s^2 - 140s + 500} \quad (4.3)$$

Udtrykket har mange negative koefficienter, men ved lave frekvenser $\omega \rightarrow 0$ vil overføringsfunktionen gå mod $G(s \rightarrow 0) = 0.2 \angle 0$, dvs. starter med fasedrejning 0 og en gain på 0.2.

Der forsøges indledningsvis med en P-regulator, Det vil tilføje en K_P faktor til tællerpolynomiet. Lukket sløjfe udtrykket bliver derfor som i (4.4).

$$G(S) = \frac{100K_P}{-s^3 - 53s^2 - 140s + 500 + 100K_P} \quad (4.4)$$

$$N_L : a_3 = -1, a_2 = -53, a_1 = -140, a_0 = 500 + 100K_P$$

Her fremgår det at alle koefficienter i nævneren er negative på nær a_0 , og det kan K_P ikke umiddelbart ændre.

Men hvis overføringsfunktionen forlænges med -1 for at tydeliggøres situationen, så kan en negativ K_P give lutter positive koefficienter, som vist i (4.5).

Det tilhørende bodeplot med fortegn fra K_P ses på figur 4.3.

$$G(S) = \frac{-100K_P}{s^3 + 53s^2 + 140s - 500 - 100K_P} \quad (4.5)$$

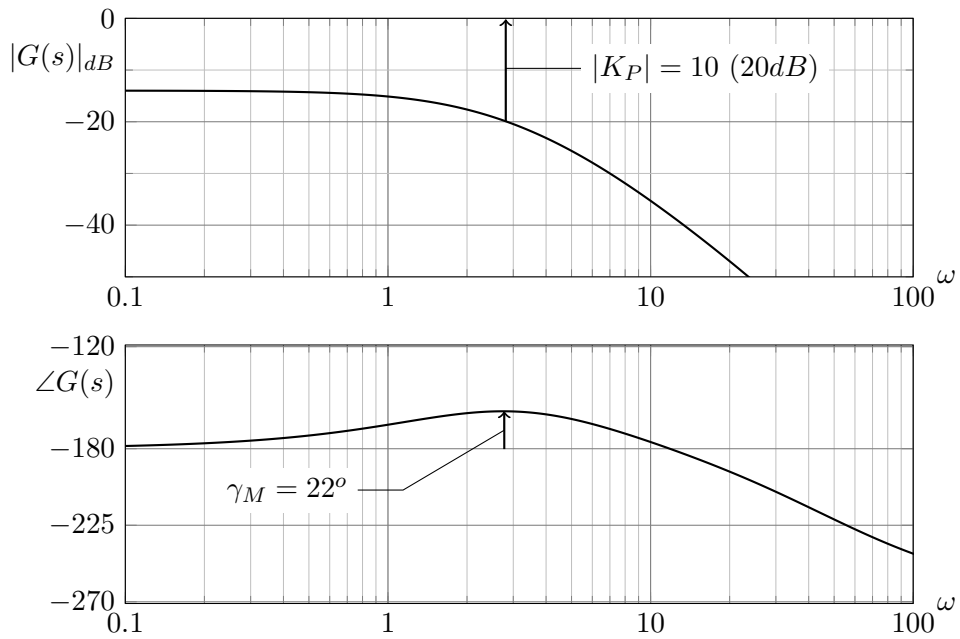
$$N_L : a_3 = 1, a_2 = 53, a_1 = 140, a_0 = -500 - 100K_P$$

Her er alle koefficienter i nævneren positive, hvis K_P er negativ og $|K_P| > 5$, og det bør gøre systemet stabilt.

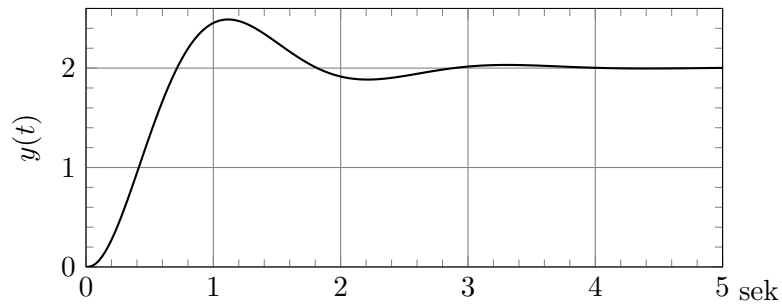
4.4.1 P-regulator til ustabilt system

Bodeplotet for systemet uden regulator i figur 4.3 viser at fasemargin er positiv indtil ca. $\omega = 11$ rad/s, og med en P-regulator kan der nås en fasemargin på ca. 22° med en $|K_P| = 10$ ved $\omega = 2.8$ rad/s.

Et enheds steprespons med denne P-regulator ser ud som på figur 4.4.



Figur 4.3: Bodeplot for system med pol i højre halvplan, med en $|K_P| = 10$ kan opnås en fasemargin på 22° .



Figur 4.4: Enhedstrin response for det P-regulerede ustabile system. Bemærk at den stationære værdi $y_{ss} = 2$ og at den stationære fejl $e_{ss} = -1$ er negativ

Den stationære fejl kan udregnes som som i (4.6), og passer med det viste steprespons.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \frac{h_0}{1 + K_0} \\ K_0 &= K_P \frac{100}{500} \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.4.2 PI-Lead regulator til ustabil system

Som det ses af stepresponse for P-regulatoren (figur 4.4) er der stadig en stor stationær fejl, som gør at en PI-Lead regulator kunne ligne et godt valg. Men som det også ses af figur 4.3 starter fasedrejningen ved $\angle G(s \rightarrow 0) = -180^\circ$ som gør startvinklen endnu mere negativ.

Med en PI-Lead regulator bliver open-loop udtrykket lidt mere kompliceret som i (4.7).

$$\begin{aligned}
 G_{ol}(s) &= K_P \frac{-100(\tau_i s + 1)(\tau_d s + 1)}{\tau_i s(\tau_d s + 1)(s^3 + 53s^2 + 140s - 500)} \\
 N_G &= \alpha \tau_d \tau_i s^5 + (53\alpha \tau_d \tau_i + \tau_i)s^4 + (140\alpha \tau_d \tau_i + 53\tau_i)s^3 + \dots \quad (4.7) \\
 &\quad ((-500\alpha + 100K_P)\tau_d \tau_i + 140\tau_i)s^2 + \dots \\
 &\quad (100K_P \tau_d + (100K_P - 500)\tau_i)s + 100K_P
 \end{aligned}$$

Her er nævnerpolynomiet noget længere, men en hurtig inspektion viser at kun koefficienter til s^2 (a_2) og s (a_1) kan blive negative (for positive værdier af τ_i , τ_d , α og K_P), og det giver uligheder som i (4.8).

$$\begin{aligned}
 a_2 &: ((-500\alpha + 100K_P)\tau_d \tau_i + 140\tau_i) > 0 \\
 &\Rightarrow K_P > \frac{1.4}{\tau_d} + 5\alpha \\
 a_1 &: (100K_P \tau_d + 100K_P \tau_i - 500\tau_i) > 0 \\
 &\Rightarrow K_P > 5 \frac{\tau_i}{\tau_d + \tau_i}
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lead leddet gør at der nu kan vælges en større fasemargin end med P-regulatoren, og det virker umiddelbart rimeligt at lade $\omega_C \approx 3$ rad/s, og en regulator udregnes med parametrene i (4.9).

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0.2 & \tau_d &= 0.67 \text{ sek} \\
 N_i &= 5 & \tau_i &= 1.5 \text{ sek} \\
 \gamma_M &= 52 & K_P &= 5.17 \\
 & & \omega_C &= 3.3 \text{ rad/s}
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Det undersøges så om forbehold for stabilitet er opfyldt (4.10) og (4.11).

$$\begin{aligned}
 K_P &> \frac{1.4}{\tau_d} + 5\alpha \\
 5.15 &> \frac{1.4}{0.67} + 50.2 \\
 5.15 &> 3.1
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

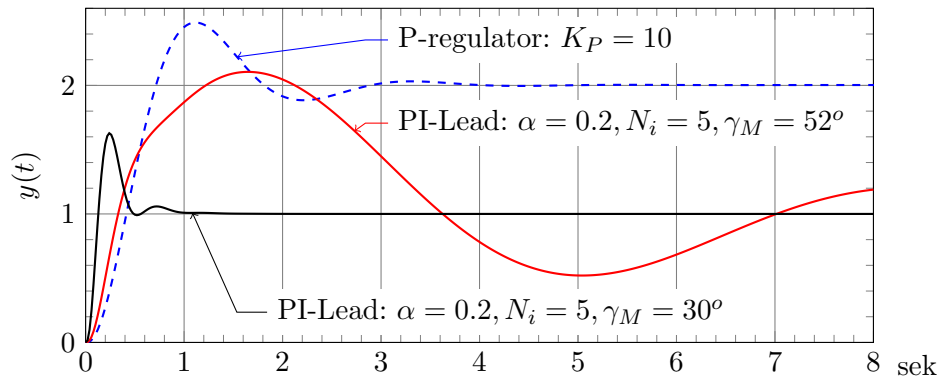
$$\begin{aligned}
 K_P &> 5 \frac{\tau_i}{\tau_d + \tau_i} \\
 5.15 &> 5 \frac{1.5}{1.5 + 0.67} \\
 5.15 &> 3.45
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

De er begge opfyldt, og systemet burde være stabilt.

En mindre fasemargin vil kunne give en højere krydsfrekvens, og en dertil hørende højere båndbredde. Forsøges med en fasemargin $\gamma_M = 40$ fås følgende regulatorparametre (4.12).

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0.2 & \tau_d &= 0.18 \text{ sek} \\
 N_i &= 5 & \tau_i &= 0.41 \text{ sek} \\
 \gamma_M &= 30^\circ & K_P &= 36 \\
 & & \omega_C &= 12 \text{ rad/s}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Til sammenligning er stepresponse for de 3 regulatorer vist i figur 4.5. Her ses at systemet med en fasemargin på kun $\gamma_M = 30^\circ$ giver den hurtigste indsvingning og det mindste overshoot.



Figur 4.5: Enhedstrin response for det PI-Lead-regulerede ustabile system. Den langsomme (røde) kurve er for systemet med den højeste fasemargin. En mindre fasemargin giver som forventet et hurtigere system, men giver samtidigt et mindre oversving.

□

Kapitel 5

Implementering i C

5.1 Introduktion

Dette kapitel er tænkt som kort og meget begrænset, men anvendelig, introduktion til diskret implementering af regulatorer. Kapitlet introducerer Z-transformation i tilstrækkeligt omfang til at implementere regulatorer som et C-program.

5.2 Z-transformation på den intuitive måde

Et C-program der integrerer en funktion erstatter integrationen med en summation, som vist i (5.1).

$$\int_{t=0}^1 m(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} m(k)\Delta t, \quad n = \frac{1}{\Delta t} \quad (5.1)$$

Og et C-program der implementerer den diskrete integration kunne se ud som i tabel 5.1.

Hvis $m(t) = m(k) = 1$, dvs. `getNewInput()` altid returnerer 1.0, så vil denne lille kodelump give at integralet af 1 over 1 sekund er 1, som forventet. Linje 8 er selve integrationen (opsummeringen), som kan skrives mere formelt, som i (5.2).

$$y_k = y_{k-1} + m_k T \quad (5.2)$$

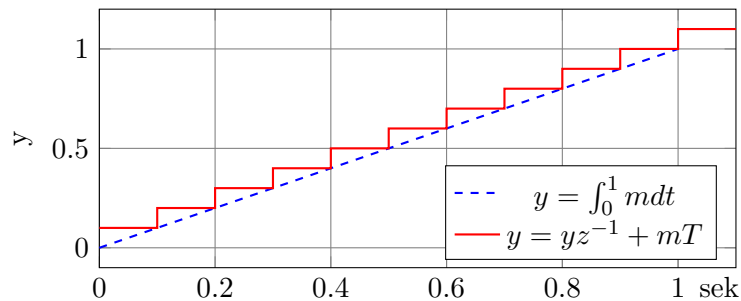
hvor y_k er den nyeste værdi (y til tiden k) og y_{k-1} er den forrige værdi (y til tiden $k-1$), hvor k i kodeeksemplet går fra 0 til 9. Den nyeste måling markeres tilsvarende med m_k , og $T = \Delta t$ er tiden mellem hver måling (sampletime), og forventes at være konstant (her 0.1 sek).

```

1 float y = 0;           // y is output
2 float m;               // m is measurement (input)
3 float T = 0.1;         // T is sample time
4 int i;
5 for (i = 0; i < 1/T; i++) // the integration loop (1 sec)
6 {
7     m = getNewInput(); // get new measurement
8     y = y + m*T;        // summarize area (input x time passed)
9     Wait(T);            // wait for next measurement
10 }
11 printf("Integralet fra 0..1 er %f\n", y);

```

Tabel 5.1: En C-programstump, der tilnærmelsesvis integrerer en måleværdi ved hjælp af en summation.



Figur 5.1: Integration af $m = 1$ over 1 sekund - med kontinuert udregning (blå stiplet) og med det viste C-program med en sampletime $T = 0.1$ sekund (rød fuldt optrukket). Der er forskel, men hvis T gøres mindre, vil forskellen mellem de to kurver blive tilsvarende mindre.

5.2.1 Z transformation

Der indføres nu betegnelsen z^{-1} for at markere at en værdi der er netop $1T$ gammel, og z^{-2} for en værdi der er netop $2T$ gammel. Det betyder at udtrykket i (5.2) kan skrives som i (5.3), og derefter omroteres som en overføringsfunktion.

$$\begin{aligned}
 y &= yz^{-1} + mT \\
 y(1 - z^{-1}) &= mT \\
 \frac{y}{m} &= \frac{T}{1 - z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Hvis vi nu sammenligner dette resultat (5.3) med Laplace for en integration ($\frac{1}{s}$), så er resultatet som det vises på figur 5.1. Forskellen mellem de to kurver er betydelig, men bliver mindre, hvis T gøres mindre.

Overføringsfunktionerne i (5.3) kan således tilnærmelsesvis sættes lig med den tilsvarende laplace overføringsfunktion som i (5.4).

$$\frac{1}{s} \approx \frac{T}{1 - z^{-1}} \quad (5.4)$$

Forskellen ved at anvende et udtryk i z i stedet for et udtryk i s skal forstås som forskellen mellem de to kurver i figur 5.1.

Hvis programmet i tabel 5.1 startede med en `Wait` (i stedet for `Wait` til sidst) ville y først nå værdien 0.1 ved tiden 0.1 (svarende til en forsinkelse på $1T$). Det ville give samme forskel til den ideelle kurve, men med modsat fortegn. Det vil også give en anden overføringsfunktion, som i (5.5).

$$\frac{1}{s} \approx \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (5.5)$$

Det kan let indses at middelværdien mellem disse 2 metoder ville give en mindre fejl, og det kan udtrykkes som i (5.6).

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{T}{1 - z^{-1}} + \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) \\ \frac{1}{s} &\approx \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Udregningen i (5.7) finder det udtryk, som s skal erstattes med for at gøre funktionen diskret.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\approx \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\ s &\approx \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} \\ s &\approx \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Beviset for at s generelt kan erstattes med det viste udtryk i z (5.7) må overlades til andre kurser, ligesom den øvrige teori for z -transformation.

Det viste udtryk - i (5.7) - kaldes en Tustin approksimation, og både MATLAB og Maple har funktioner til at omsætte en overføringsfunktion i Laplace domænet til en tilsvarende diskret overføringsfunktion i z domænet.

5.2.2 Samplingstid

Da den diskrete metode kun måler værdier hver T sekund, må det sikres at der ikke sker betydelige variationer inden for dette tidsrum. Det betyder at samplingstiden skal være kort i forhold til de frekvenser der forekommer i systemet. Faktisk betyder det at den højeste frekvens et diskret system kan håndtere er halvdelen af samplingfrekvensen (som kaldes Nyquistfrekvensen). Hvad der sker, hvis signaler alligevel indeholder frekvenser over Nyquistfrekvensen, må henvises til andre kurser.

Hvis sampeltiden bliver for kort stiller det meget store krav til regnenøjagtigheden, som vist nedenfor i afsnit 5.4

5.2.3 Maple kontinuert til diskret

I Maple kan en overføringsfunktion $G(s) = \frac{1}{s}$ omsættes fom følger (her er Tustin metoden default):

```
1 with(DynamicSystems):
2 Gs:=TransferFunction(1/s):
3 Gz:=ToDiscrete(Gs, T):
4 PrintSystem(Gz);
```

Den sidste PrintSystem vil vise:

$$Gz = \frac{0.5T(z+1)}{z-1}. \quad (5.8)$$

5.2.4 MATLAB kontinuert til diskret

I MATLAB ser den tilsvarende udregning ud som følger:

```
1 T = 0.1; %// MATLAB like numbers, so T=0.1
2 Gs = tf([1],[1 0]); %// integration transfer function
3 Gz = c2d(Gs, T, 'tustin') %// continues to discrete
```

Sidste linie giver som forventet

$$Gz = \frac{0.05(z+1)}{z-1} \quad (5.9)$$

5.3 Eksempel: Implementering af PI-Lead

Dette eksempel vil implementere en PI-Lead regulator som en C-funktion.

Regulatorens overføringsfunktion er som i (5.10), med $K_P = 11.6$, $\tau_i = 0.38$, $\tau_d = 0.24$, $\alpha = 0.1$ og samplingtiden $T = 0.025$ sek.

$$\begin{aligned} G_C(s) &= K_P \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s} \frac{\tau_d s + 1}{\alpha \tau_d s + 1} \\ G_C(s) &= 11.6 \frac{0.38s + 1}{0.38s} \frac{0.24s + 1}{0.024s + 1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Næste skridt er at erstatte s med $s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$, og ændre potensen af alle z til negativ, som vist i (5.11).


```

1  /* storage for old values */
2  float e[3] = {0,0,0}; // array with old values of e
3  float u[3] = {0,0,0}; // array with old values of output
4  /* control function called every T seconds */
5  float control(float ref, float measurement)
6  { /* calculate new error */
7    e[0] = ref - measurement;
8    /* calculate new control value */
9    u[0] = 1.315 * u[1] - 0.315 * u[2] +
10         82.89 * e[0] - 152.28 * e[1] + 69.92 * e[2];
11    /* prepare next call */
12    e[2] = e[1];
13    e[1] = e[0];
14    u[2] = u[1];
15    u[1] = u[0];
16    /* return new control value */
17    return u[0];
18 }

```

Tabel 5.2: Regulatoren er her implementeret som en funktion `control` der kaldes med en ny reference og måling hver gang der er gået T sekunder. Der er andre simple metoder til implementering, men igen falder det under et andet kursus.

$$\begin{aligned}
 G_C(z) &= 11.6 \frac{0.38 \frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 1}{0.38 \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \frac{0.24 \frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 1}{0.024 \frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 1} \\
 G_C(z) = \frac{u(z)}{e(z)} &= \frac{6.051z^2 - 11.12z + 5.104}{0.073z^2 - 0.096z + 0.023} \\
 u(z)(0.073z^2 - 0.096z + 0.023) &= e(z)(6.051z^2 - 11.12z + 5.104) \\
 u(z)(1 - 1.315z^{-1} + 0.315z^{-2}) &= e(z)(82.89 - 152.28z^{-1} + 69.92z^{-2})
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Her gælder at $u(z)$ er den nye værdi af regulator output, og er en funktion af den nye input værdi $e(z)$ samt af ældre værdier af både e og u . Da z^{-1} er betegnelse en værdi der er en sampletid gammel, kan udtrykket i (5.11) omskrives til at anvende sample-trin k som vist i (5.12).

$$u_k = 1.315u_{k-1} - 0.315u_{k-2} + 82.89e_k - 152.28e_{k-1} + 69.92e_{k-2} \tag{5.12}$$

Dette udtryk kan umiddelbart implementeres i et C-program som i tabel 5.2.

5.4 Antal betydende cifre

Som vist i eksemplet med udtryk (5.12) er der medtaget ret mange betydende cifre, og det er af betydning, især hvis der er stor afstand mellem systemets dynamik og samplefrekvensen.

Som eksempel kan en reel pol ved 1 rad/sek let blive til en ren integration, når sampleperioden $T = 1$ ms, som vist i (5.13).

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s+1} \Rightarrow G(z) = \left. \frac{0.0004998(z+1)}{z-0.999} \right|_{T=1\text{ms}} \\ G(s) &= \frac{1}{s} \Rightarrow G(z) = \left. \frac{0.0005(z+1)}{z-1} \right|_{T=1\text{ms}} \end{aligned} \quad (5.13)$$