Limites e Continuidade

1 Limites de sequências

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+5}{2n-7}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-2}{7n+6}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5n+1}{5n^2-6n+3}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2-4n+3}{3n^2+5n+9}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\log\left(3+\dfrac{1}{n}\right)-\log 3\right)$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\log\left(7+\dfrac{1}{n}\right)-\log 7\right)$

Exercício 2. Calcule as seguinte somas infinitas:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3}{7^k}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{8}{5^k}$ (c) $\sum\limits_{m=2}^{\infty} \dfrac{5}{6^m}$ (d) $\sum\limits_{m=3}^{\infty} \dfrac{8}{3^m}$

Exercício 3. Calcule:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \tan \dfrac{1}{n}$

Exercício 4.* Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$$

Exercício 5. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Exercício 6. Mostre que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}) = 0$

Exercício 7.* Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Exercício 8.* Mostre que:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \infty$

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$

Exercício 9. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{1,01^n}$.

Exercício 10.* Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ converge e calcule o seu limite.

Exercício 11.* Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{n^2+n} = 1$.

Exercício 12.* Prove que o limite da sequência

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

existe e é igual a 2.

Exercício 13.* Prove que a sequência

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

converge e que o seu limite está entre $\frac{1}{2}$ e 1.

2 Cálculo de limites de funções

Retas assíntotas: Quando estudarmos o gráfico de funções (durante o estudo das derivadas), veremos com mais detalhes o conceito de reta assíntota. Por enquanto, tenha em mente que a reta $y = L$ é uma *assíntota horizontal* de $f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Por outro lado, a reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* de $f(x)$ se

$$\lim_{x\to a_-} |f(x)| = \infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a_+} |f(x)| = \infty$$

Exercício 1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

Exercício 2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x\to 2_-} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2_+} f(x) = 5$$

Nessa situação, é possível que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista? Explique.

Exercício 3. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função que satisfaça a todas as condições dadas:

(a) $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 2,\ \lim_{x\to 1_+} f(x) = -2,\ f(1) = 2$

(b) $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 0+} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 2_-} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 2_+} f(x) = 1,\ f(0)$ não definido.

(c) $\lim_{x\to 3_+} f(x) = 4,\ \lim_{x\to 3_-} f(x) = 2,\ \lim_{x\to 2_-} f(x) = 2,\ f(3) = 3,\ f(2) = 1$

Exercício 4. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 5_-} \dfrac{x+1}{x-5}$ (b) $\lim_{x\to 5_+} \dfrac{x+1}{x-5}$ (c) $\lim_{x\to 5_+} \log(x^2-25)$ (d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_+} \dfrac{\sec x}{x}$

(e) $\lim_{x\to \pi_-} \cot x$ (f) $\lim_{x\to 2_-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ (g) $\lim_{x\to 0_+} \left(\dfrac{1}{x} - \log x\right)$

Exercício 5. Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

Exercício 6. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0,$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ (c) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$ (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

Exercício 7. Calcule os seguintes limites, justificando em cada passagem as propriedades básicas de limites que foram utilizadas:

(a) $\lim_{x\to -2}(3x^4+2x^2-x+1)$ (b) $\lim_{x\to -1}(x^2+x)(3x^2+6)$ (c) $\lim_{t\to -2}\dfrac{t^4-2}{2t^2-3t+2}$

(d) $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}$ (e) $\lim_{x\to 8}(1+\sqrt[3]{x})(2-6x^2+x^3)$

Exercício 8. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ (b) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x-12}$ (c) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(-5+h)^2-25}{h}$

(d) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$ (e) $\lim_{t\to 1}\dfrac{t^4-1}{t^3-1}$ (f) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^3-27}$

(g) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ (h) $\lim_{u\to 2}\dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$ (i) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

(j) $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$ (k) $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t+1}}-\dfrac{1}{t}\right)$ (l) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(m) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

Exercício 9. Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0$.

Exercício 10. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

Exercício 11. Calcule $\lim_{x\to 0_+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$.

Exercício 12. A função sinal é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir:

(a) $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sgn} x$ (b) $\lim_{x\to 0_-} \operatorname{sgn} x$ (c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (d) $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

(e) $\lim_{x\to \pi_+} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$ (f) $\lim_{x\to \pi_-} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$ (g) $\lim_{x\to \pi} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$ (h) $\lim_{x\to \pi} |\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)|$

Exercício 13. Seja $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$. Encontre os limites laterais quando $x \to 2$ e diga se $\lim_{x\to 2} g(x)$ existe e calcule seu valor em caso afirmativo.

Exercício 14.* Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

Exercício 15. Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva:

(a) $y = \frac{5 + 4x}{x + 3}$ (b) $y = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 1}$

(c) $y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$ (d) $y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$

Exercício 16. Encontre $a \in \mathbb{R}$ tal que exista

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

e calcule o valor do limite nesse caso.

Exercício 17. Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Exercício 18.* Sejam p e q polinômios. Encontre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

se:

(a) o grau de p for menor que o grau de q;

(b) o grau de p for maior que o grau de q.

Exercício 19. Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ (e) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$ (f) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$ (h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 6x}{\operatorname{sen} 2x}$ (i) $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{cossec} x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

Exercício 20. Prove que $\lim\limits_{m\to\infty} (\cos \pi x)^{2m}$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e vale 1 ou 0 dependendo de x ser inteiro ou não.

3 Definição precisa de limite

Exercício 1. Demonstre cada afirmação usando a definição ϵ, δ de limite:

(a) $\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{x}{3}\right)=2$ (b) $\lim_{x\to a} x = a$ (c) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^4}=\infty$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=5$ (e) $\lim_{x\to a} c = c$ (f) $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

(g) $\lim_{x\to -6_+}\sqrt[8]{6+x}=0$ (h) $\lim_{x\to 0}|x|=0$ (i) $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-7)=1$

(j) $\lim_{x\to -2}(x^2-1)=3$ (k) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ (l) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

(m) $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ se $a>0$

Exercício 2.* Considere a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{se } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

Mostre que não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4 Continuidade

Exercício 1. Explique por que as seguintes funções são descontínuas no ponto dado a:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ em $a = -2$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ em $a = -2$

(c) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 2^x & \text{se } x > -1 \end{cases}$ em $a = -1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ em $a = 1$

Exercício 2.⋆ Para que valores de x a função abaixo é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Exercício 3.⋆ Se a e b são números positivos, prove que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

possui no mínimo uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

Exercício 4. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Mostre que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.