Funções

1 Propriedades básicas

Exercício 1. Suponha que $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$. Calcule:

(a) $f(0)$ (b) $f(1)$ (c) $f(-1)$ (d) $f(-2)$ (e) $f(2a)$
(f) $f(b/3)$ (g) $f(2a+1)$ (h) $f(2x^2+3)$ (i) $f(a/b-1)$

Exercício 2. Suponha que $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$. Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ (b) $\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}$ (c) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Exercício 3. Encontre o domínio da função:

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

Exercício 4. Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta

Exercício 5. Explique por que não existe uma função cujo domínio seja $\{-1, 0, 3\}$ e cuja imagem seja $\{3, 4, 7, 9\}$.

Exercício 6. Se $f(x) = x^2+2x-1$ e $g(x) = 2x-3$, encontre cada uma das seguintes funções:

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

Exercício 7. Para cada par de funções f e g abaixo, expresse $f \circ g$ e $g \circ f$ da forma mais simplificada que puder:

(a) $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = (x+1)^2, \quad g(x) = \dfrac{3}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = x^2 + 2$ (d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}, \quad g(x) = \dfrac{x+3}{x+4}$

Exercício 8. Expresse a função na forma $f \circ g$, identificando as funções f e g:

(a) $F(x) = (2x + x^2)^4$ (b) $F(x) = \cos^2 x$ (c) $G(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

(d) $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1+x}}$ (e) $u(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$ (f) $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

Exercício 9. Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$, identificando as funções f, g e h:

(a) $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$ (b) $S(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$ (c) $T(x) = \operatorname{sen}^2(\cos t)$

Exercício 10. Suponha que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Mostre que $f \circ g = g \circ f$ se, e somente se, $d(a-1) = b(c-1)$.

Exercício 11. O que é uma função injetora?

Exercício 12. Determine se as seguintes funções são injetoras:

(a) $f(x) = 2x - 3$ (b) $f(x) = x^4 - 16$ (c) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Exercício 13. Encontre a função inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 + 2$ (b) $f(x) = \dfrac{4}{5x-3}$ (c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$ (d) $f(x) = x^2 + 8$

Exercício 14. Indique os intervalos onde as funções abaixo são positivas:

(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $f(x) = 1 - 3x$ (c) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

(d) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ (e) $f(x) = |x| - 2$ (f) $f(x) = 2x - |x|$

(g) $f(x) = -x^2 - 3$ (h) $f(x) = \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{5-3x}{4} - 1$ (i) $(3x+1)(2x+1)$

(j) $\dfrac{3x+4}{1-x}$ (k) $(5x+4)^4(7x-2)^3$ (l) $\dfrac{1-2x}{(5-x)(3-x)}$

(m) $(1-4x^2)(2x^2+3x)$ (n) $(2x^2-7x+6)(2x^2-7x+5)$ (o) $2x^3-6x^2+x-3$

Exercício 15. Determine a imagem das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

(a) $y = x^2 - 3x$ (b) $y = -x^2 + 4$ (c) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

(d) $y = -2x + \sqrt{7}$ (e) $y = \sqrt[3]{7}x + 2$ (f) $y = -4x^2 + 8x + 12$

Exercício 16. Resolva as seguintes equações e inequações modulares, determinando seu conjunto solução:

(a) $|x+1| - |x| = 2x + 1$ (b) $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (c) $|3x-2| < 4$ (d) $1 < |x-1| \leqslant 3$

Exercício 17. Um balão esférico com raio de r centímetros tem o volume $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Econtre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio de r centímetros até um raio de $r+1$ centímetros.

Exercício 18. Um retângulo tem um perímetro de 20 m. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

Exercício 19. Uma janela normanda tem o formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 10 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.

2 Gráficos de Funções e Simetria

Exercício 1. Um avião decola de um aeroporto e aterrissa uma hora depois em outro aeroporto, a 400 km. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.

(a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.

(b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.

(c) Esboce um possível gráfico da velocidade no solo.

(d) Esboce um possível gráfico da velocidade vertical.

Exercício 2. Como os gráficos das funções são obtidos a partir do gráfico de f?

(a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x-3) + 2$

Exercício 3. Esboce à mão, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

Exercício 4. Sem usar calculadora, faça um esboço grosseiro do gráfico:

(a) $y = -\sqrt{2}$ (b) $x = 1$ (c) $y = 3x + 2$ (d) $y = -x - 1$

(e) $y = -3x$ (f) $y = \dfrac{x}{2}$ (g) $y = 2x + 1$ (h) $y = -2x + 1$

(i) $y = x^3$ (j) $y = (x+1)^3$ (k) $y = (x-2)^3 + 3$ (l) $y = 4 - x^2$

(m) $y = \sqrt{x}$ (n) $y = 2\sqrt{x}$ (o) $y = -2^x$ (p) $y = 1 + x^{-1}$

Exercício 5. Calcule $f(-2)$ e $f(1)$ e esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Exercício 6. Calcule $f(-3)$, $f(0)$ e $f(2)$ e esboce o gráfico de

$$(a)\;\; f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad (b)\;\; f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(c)\;\; f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{1}{2}x & \text{se } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases} \qquad (d)\;\; f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Exercício 7. Esboce o gráfico de:

(a) $f(x) = x + |x|$ (b) $g(t) = |1 - 3t|$ (c) $h(t) = |t| + |t + 1|$ (d) $f(x) = ||x| - 1|$

Exercício 8. Determine se a função é par, ímpar ou nenhum dos dois:

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$ (f) $f(x) = x|x|$

(g) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

Exercício 9.* Se f e g são pares, $f + g$ é par? Se f e g são ímpares, $f + g$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar?

Exercício 10. Se f e g são pares, fg é par? Se f e g são ímpares, fg é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar?

Exercício 11. Mostre que $f(x) = mx + b$ é ímpar se, e somente se, $b = 0$, e é par se, e somente se, $m = 0$.

Exercício 12. Mostre que $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função par se, e somente se, $b = 0$.

3 Potências

Exercício 1. Escreva 9^{3000} como potência de 3.

Exercício 2. Escreva 5^{4000} como potência de 25.

Exercício 3. Escreva $2^{100} \cdot 4^{200} \cdot 8^{300}$ como potência de 2.

Exercício 4. Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (c) $8^{4/3}$ (d) $x(3x^2)^3$ (e) $b^8(2b)^4$

(f) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$ (g) $\dfrac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ (h) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$ (i) $\left(\dfrac{(x^2y^{-5})^{-4}}{(x^5y^{-2})^{-3}}\right)^2$ (j) $y^4(y^2(y^5)^2)^{3/5}$

Exercício 5. Determine os números reais x que satisfazem a cada uma das equações:

(a) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$ (b) $x^{2/3} + 3x^{1/3} = 10$ (c) $x - \sqrt{x} = 6$ (d) $x^4 - 3x^2 = 10$

Exercício 6. Calcule (sem usar calculadora):

(a) $25^{3/2}$ (b) $32^{3/5}$ (c) $32^{-4/5}$ (d) $(-8)^{7/3}$ (e) $8^{5/3}$

(f) $81^{3/4}$ (g) $8^{-5/3}$ (h) $(-27)^{4/3}$ (i) $\sqrt{2}^3\sqrt{8}^3$ (j) $3^{3/2}12^{3/2}$

Exercício 7. Encontre uma fórmula para a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^9$ (b) $f(x) = x^{12}$ (c) $f(x) = x^{1/7}$ (d) $f(x) = x^{-2/5}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^4}{81}$ (f) $f(x) = 32x^5$ (g) $f(x) = 6 + x^3$ (h) $f(x) = 4x^{3/7} - 1$

(i) $f(x) = 7 + 8x^{5/9}$

Exercício 8. Demonstre que:

(a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ (b) $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

(c) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2$ (d) $(23-8\sqrt{7})^{1/2} = 4-\sqrt{7}$

Exercício 9. Demonstre que se $x, y > 0$, com $x \neq y$, então

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Exercício 10. Explique por que a equação $\sqrt{x^2} = x$ não é válida para todo $x \in \mathbb{R}$ e deve ser substituída pela equação $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exercício 11.* Explique por que

$$\sqrt{x} < \sqrt[3]{x} \text{ se } 0 < x < 1$$

e

$$\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} \text{ se } x > 1.$$

Esboce os gráficos das funções $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$ no mesmo par de eixos coordenados no intervalo $[0, 4]$.

4 Polinômios

Exercício 1. Escreva na forma de somatório o polinômio

$$p(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots + 2^n x^n$$

Exercício 2. Mostre que os polinômios $f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ e $g(x) = x^4 + 1$ são iguais.

Exercício 3. Dividindo o polinômio $p(x)$ por $x^2 - 3x + 5$, obtemos o quociente $x^2 + 1$ e resto $3x - 5$. Determine $p(x)$.

Exercício 4. Divida $f(x)$ por $g(x)$ e verifique sua resposta, multiplicando quociente pelo divisor e somando ao resto:

(a) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ e $g(x) = x^3 - 2x + 1$

(b) $f(x) = x^4 - 2x + 13$ e $g(x) = x^2 + x + 1$

(c) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 3$

(d) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ e $g(x) = x^2 + 2$

Exercício 5. Dados $p(x) = 2x^3 + ax + 3b$ e $q(x) = x^2 - 3x + 9$, determine a e b de modo que a divisão de $p(x)$ por $q(x)$ seja exata.

Exercício 6. Fatore cada expressão:

(a) $4x^2 - 25$	(b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$	(c) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$
(d) $2x^2 + 5x - 12$	(e) $x^4 + 27x$	(f) $x^3y - 4xy$
(g) $x^8 - y^8$	(h) $x^{16} - y^8$	(i) $x^6 - 8x^3 + 15$
(j) $x^6 - 3x^3 - 10$	(k) $x^4 - 2x^2 - 15$	(l) $x^4 + 5x^2 - 14$

Exercício 7. Reescreva, completando o quadrado:

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $2x^2 - 12x + 11$ (c) $x^2 + 7x + 12$ (d) $-3x^2 + 5x - 1$

Exercício 8. Determine todas as escolhas de b, c e d tais que 1 e 4 sejam os únicos zeros do polinômio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

Exercício 9. Determine o vértice do gráfico das seguintes funções:

(a) $7x^2 - 12$ (b) $(x-2)^2 - 3$ (c) $-2x^2 + 5x - 2$ (d) $x^2 - 6x + 2$

Exercício 10. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = -2x^2 + 4x - 1$ (b) $y = (x-2)^3 + 2$ (c) $y = x^2 - 3x + 2$ (d) $y = \sqrt{x+2} - 1$

Exercício 11. Para cada uma das funções abaixo, definidas em $[1, \infty)$, determine sua imagem, uma fórmula para sua inversa, bem como domínio e imagem da inversa:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ (b) $g(x) = x^2 + 4x + 7$

Exercício 12. Encontre todas as soluções reais das equações:

(a) $x + 5 = 14 - \dfrac{x}{2}$ (b) $x^2 - x - 12 = 0$ (c) $2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$

(d) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (e) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$ (f) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(g) $3|x-4| = 10$

Exercício 13.* Mostre que não existem dois números reais cuja soma é 7 e cujo produto é 13.

Exercício 14.* Sem usar calculadora nem efetuar nenhum cálculo, explique por que $p(x) = x^2 + 87559743x - 787727821$ não possui raízes inteiras.
(*Sugestão: compare a paridade de $t \in \mathbb{Z}$ com a paridade de $p(t)$*)

Exercício 15. Suponha que $b, c \in \mathbb{R}$ sejam tais que $f(x) = x^2 + bx + c$ não tenha raízes reais. Mostre que $g(x) = x^2 + bx - c$ possui duas raízes reais distintas.

Exercício 16. Explique por que o polinômio $p(x) = x^6 + 100x^2 + 5$ não tem zeros reais.

Exercício 17. Dê um exemplo de um polinômio de grau 5 que tem exatamente dois zeros.

Exercício 18. Suponha que a, b e c sejam inteiros e que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 9$. Explique por que toda raiz de p que for inteira está no conjunto $\{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$.

Exercício 19. Prove que se $z \in \mathbb{C}$ é raiz do polinômio de coeficientes reais $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, então $\overline{z}$ também é raiz de p.

Exercício 20.* Descubra todas as raízes reais dos seguintes polinômios e os escreva como produto de fatores lineares com fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$:

(a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

(b) $x^6 + 2x^4 - 16x^2 - 32$

Exercício 21. Existe um número real que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo? Justifique.

Exercício 22.* Mostre que se n for um natural par então o polnômio

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$$

não possui raiz real.

5 Funções Racionais

Exercício 1. Escreva sob a forma de união de intervalos os domínios das seguintes funções:

(a) $y = \dfrac{5x^3 - 12x^2 + 13}{x^2 - 7}$ (b) $y = \dfrac{x^5 + 3x^4 - 6}{2x^2 - 5}$

(c) $y = \dfrac{4x^7 + 8x^2 - 1}{x^2 - 2x - 6}$ (d) $y = \dfrac{6x^9 + x^5 + 8}{x^2 + 4x + 1}$

Exercício 2. Escreva

$$\frac{x^5 + 6x^3 + 11x + 7}{x^2 + 4}$$

na forma $f(x) + \dfrac{ax + b}{x^2 + 4}$, onde $f(x)$ é um polinômio.

Exercício 3. Escreva cada expressão como a soma de um polinômio e de uma função racional cujo numerador tem grau menor que seu denominador:

(a) $\dfrac{2x+1}{x-3}$ (b) $\dfrac{4x-5}{x+7}$ (c) $\dfrac{x^2}{3x-1}$

(d) $\dfrac{x^2}{4x+3}$ (e) $\dfrac{x^6 + 3x^3 + 1}{x^2 + 2x + 5}$ (f) $\dfrac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^2 - 3x + 1}$

Exercício 4. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ (b) $y = \dfrac{-3}{x}$ (c) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ (d) $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ (e) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

Exercício 5. Suponha que p seja um polinômio e t seja um número real. Explique por que existe um polinômio $g(x)$ tal que

$$\frac{p(x) - p(t)}{x - t} = g(x) \qquad \text{para todo } x \neq t.$$

Exercício 6.* Prove que $\sqrt{x}$ não é uma função racional. (*Sugestão: inspire-se na prova de que* $\sqrt{2}$ *não é um número racional*)

6 Exponencial

Nas aulas sobre limites, veremos que o número de Euler e é definido como

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \approx 2,71828$$

Ele é a base do logaritmo natural, que denotamos por log. Ou seja,

$$\log x = \log_e x \text{ para todo } x > 0.$$

OBS: Portanto, o logaritmo na base 10 (que praticamente não utilizaremos nesse curso) será denotado como $\log_{10} x$.

Exercício 1. Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.

(a) Quantas bactérias existem após 3 horas?

(b) Quantas bactérias existem após t horas?

(c) Quantas bactérias existem após 40 minutos?

(d) Estime o tempo para a população atingir 100.000 bactérias.

Exercício 2. Um isótopo de sódio, ^{24}Na, tem meia-vida de 15 horas. Uma amostra desse isótopo tem massa de 2 g.

(a) Encontre a quantidade remanescente após 60 horas.

(b) Encontre a quantidade remanescente após t horas.

(c) Faça uma estimativa da quantidade remanscente após 4 dias.

Exercício 3. Determine o menor valor da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$.

Exercício 4. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = 4^x + 1$ (b) $(0,5)^{x-1}$ (c) $y = 10^{x+2}$ (d) $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$ (e) $y = 2(1 - e^x)$

Exercício 5. Começando com o gráfico de $y = e^x$, encontre as equações dos gráficos que resultam ao

(a) refletir em torno da reta $y = 4$

(b) refletir em torno da reta $x = 2$

Exercício 6. Resolva as seguintes equações:

(a) $2^x = 64\sqrt{2}$ (b) $8^x = \dfrac{1}{32}$ (c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

(d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 125$ (e) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$ (f) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}$

(g) $2^{3x-1} = 32$ (h) $5^{2x^2+3x-2} = 1$ (i) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

(j) $(2^x)^{x-1} = 4$ (k) $4^{x^2+4x} = 4^{12}$ (l) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$

(m) $\dfrac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \dfrac{81^{2x}}{27^{3-4x}}$ (n) $4^x - 2^x = 56$ (o) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

Exercício 7. Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

Exercício 8. Prove que

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

é uma função ímpar.

7 Logaritmo

Nas aulas sobre limites, veremos que o número de Euler e é definido como

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \approx 2,71828$$

Ele é a base do logaritmo natural, que denotamos por log. Ou seja,

$$\log x = \log_e x \text{ para todo } x > 0.$$

OBS: Portanto, o logaritmo na base 10 (que praticamente não utilizaremos nesse curso) será denotado como $\log_{10} x$.

Exercício 1. Calcule (sem usar calculadora):

(a) $\log_2 64$ (b) $\log_2 \frac{1}{128}$ (c) $\log_4 2$ (d) $\log_8 128$

(e) $\log_{10} 10000$ (f) $\log_{10} \frac{1}{1000}$ (g) $\log_2 8^{3,1}$ (h) $\log_{27} 81$

Exercício 2. Determine $a > 0$ tal que:

(a) $\log_2 a = 7$ (b) $\log_2 a = 8$ (c) $\log_2 a = -5$ (d) $\log_2 a = -9$

(e) $\log_a 64 = 1$ (f) $\log_a 64 = 6$ (g) $\log_a 64 = \frac{3}{2}$ (h) $\log_a 64 = \frac{6}{5}$

Exercício 3. Resolva as seguintes equações:

(a) $\log |x| = 2$ (b) $|\log x| = 2$ (c) $\log_3(5x + 1) = 2$

Exercício 4. Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

Exercício 5. Expresse $\log a + \frac{1}{2} \log b$ como um único logaritmo.

Exercício 6. Sabendo que $\log_3 x = 5,3$ e $\log_3 y = 2,1$, calcule: