Trigonometria

1 Ângulos, Geometria Básica e o Círculo Unitário

Exercício 1. Converta de graus para radianos:

(a) $300°$ (b) $-18°$ (c) $36°$ (d) $9°$

Exercício 2. Converta de radiano para graus:

(a) $\dfrac{5\pi}{6}$ (b) 2 (c) $-\dfrac{3\pi}{8}$ (d) 4π

Exercício 3. Encontre o comprimento de um arco de um círculo de raio 12 cm, cujo ângulo central é $30°$.

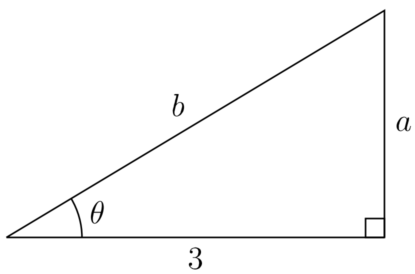
Exercício 4. Um círculo tem raio de 1,5 m. Qual o ângulo subentendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

Exercício 5. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

Exercício 6. Encontre os valores exatos:

(a) $\tan \pi/3$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

Exercício 7. Expresse os comprimentos a e b na figura abaixo em termos de θ.



Exercício 8. Determine todos os números t tais que $(1/3, t)$ seja um ponto sobre o círculo unitário.

Exercício 9. Qual o ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos em um relógio marcando 4 horas e 30 minutos?

Exercício 10.* Mostre que a soma das medidas dos ângulos (em radianos) de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n-2)\pi$.

2 Funções Trigonométricas

Exercício 1. Encontre o domínio da função:

(a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{1 - \tan x}$

Exercício 2. Se $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3}$ e $\sec y = \dfrac{5}{4}$, onde $x, y \in [0, \pi/2]$, avalie $\operatorname{sen}(x + y)$.

Exercício 3. Demonstre as identidades:

(a) $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

(b) $\dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \operatorname{sen} 2\theta$

Exercício 4. Encontre todos os valores de x tais que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ e $x \in [0, 2\pi]$.

Exercício 5. Determine o menor número $\theta > 4\pi$ tal que $\cos\theta = 0$

Exercício 6. Determine o menor número $\theta > 6\pi$ tal que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 7. Encontre o menor número $x > 0$ tal que $\operatorname{sen}(e^x) = 0$

Exercício 8. Explique por que $\pi^{\cos x} > \dfrac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 9. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sem usar recursos computacionais.

Exercício 10. Demonstre as identidades:

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

(b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

(c) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

(d) $\operatorname{sen}\theta \cot\theta = \cos\theta$

(e) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

(f) $\cot^2 x + \sec^2 x = \tan^2 x + \operatorname{cossec}^2 x$

(g) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(h) $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

(i) $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y}$

(j) $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

Exercício 11. Se $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3}$ e $\sec y = \dfrac{5}{4}$, onde $x, y \in [0, \pi/2]$, calcule:

(a) $\operatorname{sen}(x+y)$

(b) $\cos(x-y)$

(c) $\operatorname{sen} 2y$

(d) $\cos(x+y)$

(e) $\operatorname{sen}(x-y)$

(f) $\cos 2y$

Exercício 12. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(b) $y = \dfrac{1}{3}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $y = |\operatorname{sen} x|$

(d) $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercício 13. A função arco cosseno é par, ímpar ou nenhuma das duas opções? E quanto a arco seno?

Exercício 14.* Mostre que, para todo $t \in (-1, 1)$,

$$\operatorname{arcsen} t = \arctan \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercício 15. Mostre que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Exercício 16. Mostre que

$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Exercício 17. * Demonstre que $\cos 20°$ é um zero do polinômio $8x^3 - 6x - 1$.

Exercício 18. Mostre que

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

Exercício 19. Prove uma identidade análoga à do exemplo anterior para $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$.

Exercício 20. Mostre que

$$\cos x - \cos y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{y-x}{2}$$

Exercício 21. Prove que

$$\tan\frac{x+y}{2} = \frac{\cos x - \cos y}{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}$$

Exercício 22. * Mostre que

$$\cos\frac{\pi}{32} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

Exercício 23. * Mostre a identidade

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

(*Sugestão: calcule* $\tan(\arctan 2 + \arctan 3)$)

3 Números Complexos na Forma Polar

Exercício 1. Escreva na forma polar:

(a) $2-2i$ (b) $-3+3\sqrt{3}i$ (c) 4 (d) $1+\sqrt{3}i$ (e) $-3i$ (f) $\dfrac{1+i}{i}$ (g) $\dfrac{1}{1-i}-\dfrac{1}{i}$

Exercício 2. Demonstre que

$$\frac{1}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

Exercício 3. Escreva na forma polar:

(a) $\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\right)$ (b) $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{11} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{11}\right)$

Exercício 4. Calcule:

(a) $(2-2i)^{333}$ (b) $(-3+3\sqrt{3}i)^{555}$ (c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{100}$

(d) $\dfrac{i}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6}}$ (e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{7}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$

Exercício 5.* Calcule todas as raízes n-ésimas abaixo:

(a) $\sqrt{-7+24i}$ (b) $\sqrt{5+12i}$ (c) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ (d) $\sqrt[3]{-8i}$ (e) $\sqrt[3]{-1}$

Exercício 6.* Determine três números complexos distintos tais que $z^3 = 4i$.

Exercício 7.* Determine quatro números complexos distintos tais que $z^4 = -2$.