

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса. (1.2.3)

Зайнуллин Амир

10 октября 2022 г.

1 Аннотация

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить.

2 Теоретические сведения

Упрощения: При колебаниях не учитываются потери энергии на трение о воздух. Закон сохранения энергии, учитывая наше упрощение, имеет вид:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ .

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned}(R\cos\varphi - r)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2 &= L^2 \\ z^2 &= L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\varphi) \approx z_0^2 - Rr\varphi^2 \\ z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0}\end{aligned}$$

Подставляя z в закон сохранения энергии, получим:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{mgRr}{2z_0}\varphi^2 = 0$$

Дифференцируя по времени, получаем уравнение колебаний:

$$I\ddot{\varphi}^2 + \frac{mgRr}{z_0}\varphi^2 = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta \right)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = k m T^2$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки.

3 Методика измерений

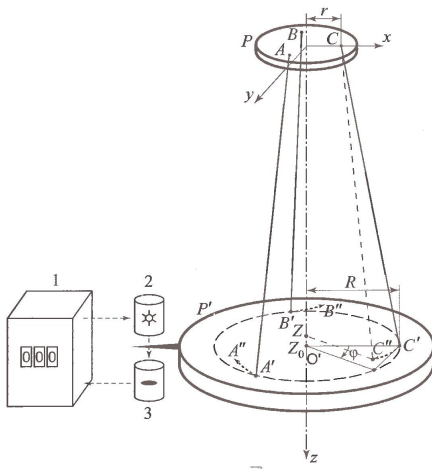


Рис. 1: Трифилярный подвес

Для наших целей будем использовать трифилярный подвес. Он состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные коле-

бания.

4 Используемое оборудование

Секундомер измеряет время с абсолютной погрешностью $\sigma_T^{\text{сист}} = 0,001$ с.

Параметры установки и коэффициент k

Работа выполнялась на установке №8, ее параметры указаны в таблице 1.

$m, \text{ г}$	$R, \text{ мм}$	$r, \text{ мм}$	$L, \text{ см}$	$z_0, \text{ см}$
1004,8	114,1	30,5	217,6	217,1
$\sigma_m, \text{ г}$	$\sigma_R, \text{ мм}$	$\sigma_r, \text{ мм}$	$\sigma_L, \text{ см}$	$\sigma_{z_0}, \text{ см}$
0,5	0,5	0,3	0,1	0,1

Таблица 1: Параметры установки

По полученным данным вычислим постоянную для конструкции №3:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 3,98 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность k будет равна:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0,04 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}^2}{\text{с}^2}$$

5 Результаты измерений и обработка данных

Момент инерции ненагруженной платформы

Сначала определим период колебаний ненагруженной платформы.

№	Время колебаний $T_n, \text{ с}$	Период колебаний $T, \text{ с}$
1	44,705	4,4705
2	44,685	4,4685
3	44,63	4,463

Тогда средний период колебаний $T_{\text{ср}} = 4,467 \text{ с}$. Определим погрешность.

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (T_{\text{ср}} - T_i)^2} \approx 0,003 \text{ с}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \approx 0,003 \text{ с}$$

Найдем момент инерции ненагруженной платформы

$$I_{\text{пл}} = k m T_{\text{ср}}^2 = 7,98 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} = 0,01$$

$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = I_{\text{пл}} \varepsilon = 0,08 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Значит, с данной установкой мы можем определять момент инерции тел с точностью 1% и $I_{\text{пл}} = (7,98 \pm 0,08) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Определение моментов инерции различных тел. Аддитивность моментов инерции

Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы, а именно – 3 измерения по 10 колебаний для каждого набора тел, получаем:

Набор тел	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_{\text{ср}}, \text{с}$	$T, \text{с}$	$m_0, \text{г}$	$I \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\sigma_I \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
Пл.+Крыш.	36,702	36,671	36,594	36,656	3,6656	2127,7	11,378	0,114
Пл.+Труба	43,04	42,95	42,89	42,96	4,296	1986,5	14,592	0,146
Оба тела	38,279	38,136	38,192	38,202	3,8202	3109,4	18,061	0,180

Таблица 2: Моменты инерции платформы с различными телами

Для подтверждения аддитивности необходимо показать, что выполняются условия:

$$I_{\text{пл+кр}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{кр}}$$

$$I_{\text{пл+тр}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{тр}}$$

$$I_{\text{пл+кр+тр}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{кр}} + I_{\text{тр}}$$

Из таблицы и формул мы можем найти момент инерции цилиндра и кольца, учитывая что погрешности момента инерции диска и вычисленных далее будут складываться: $I_{\text{кр}} = I_{\text{пл+кр}} - I_{\text{пл}} = (3,398 \pm 0,194) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, а $I_{\text{тр}} = I_{\text{пл+тр}} - I_{\text{пл}} = (6,612 \pm 0,226) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Тогда, для доказательства аддитивности, проверим последнее уравнение. Оно выполняется, следовательно моменты инерции аддитивны.

Теперь сравним полученные нами моменты инерции для тел, и их теоретические значения. Для крышки: $I_{\text{кр}} = \frac{1}{2} m_{\text{кр}} R_{\text{кр}}^2$. $R_{\text{ц}} = 10,96, \text{ см}$, тогда $I_{\text{ц}} = 2,135, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$, что подтверждает экспериментальное значение. Для кольца же: $I_{\text{к}} = m_{\text{к}} R_{\text{к}}^2$. Так как данное кольцо не идеально тонко, то $R_{\text{к}} = \frac{D_{\text{внут}} + h}{2}$, где $h = 0,41, \text{ см}$, а $D_{\text{внут}} = 15,08, \text{ см}$, тогда $R_{\text{к}} = 7,745, \text{ см}$. Получаем, что $I_{\text{к}} = 4,487, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$, что тоже совпадает с полученным экспериментальным значением.