Лабораторная работа 1.4.5
Изучение колебаний струны

1 Аннотация

Цель работы: изучить поперечные стоячие волны на тонкой натянутой струне; измерить собственные частоты колебаний струны и проверить условие образования стоячих волн; измерить скорость распространения поперечных волн на струне и исследовать её зависимость от натяжения струны.
Используемое оборудование: закрепленная на станине стальная струна, набор грузов, электромагнитные датчики, звуковой генератор, двухканальный осциллограф, частотомер.

2 Теоретическое введение

В работе изучаются поперечные колебания стальной гитарной струны, натянутой горизонтально и закрепленной между двумя неподвижными зажимами. Так как поперечные размеры струны много меньше её длины, то напряжение в струне может быть направлено только *вдоль неё*. В натянутой струне возникает *поперечная упругость*, то есть способность сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объёма. При вертикальном смещении произвольного элемента струны, возникают силы, действующие на соседние элементы, и в результате вся струна приходит в движение в вертикальной плоскости, т.е. возбуждение «бежит» по струне. Передача возбуждения представляет собой *поперечные бегущие волны*, распространяющиеся с некоторой скоростью в обе стороны от места возбуждения. В ненатянутом состоянии струна не обладает свойством поперечной упругости, и поперечные волны на ней невозможны.

2.1 Уравнение волны на струне

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение Т, и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Отметим, что, если струна расположена горизонтально в поле тяжести, величина Т должна быть достаточна для того, чтобы в состоянии равновесия струна не провисала, т.е. сила натяжения должна существенно превышать вес струны. Направим ось x вдоль струны в положении равновесия. Форму волны будем описывать функцией $y(x,t)$, определяющей вертикальное смещение y струны в данной точке в любой момент времени t. Рассмотрим малый элемент dm струны. Так как амплитуда колебаний невелика, то можно пренебречь добавочным напряжением, возникающим из-за удлинения элементов струны и считать силу T натяжения нити постоянной по её длине. Также можно считать углы отклонения α струны от оси x малыми. В итоге по 2 закону Ньютона в проекциях на ось y для элемента получим:

$$T\alpha_2 - T\alpha_1 \approx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dm$$

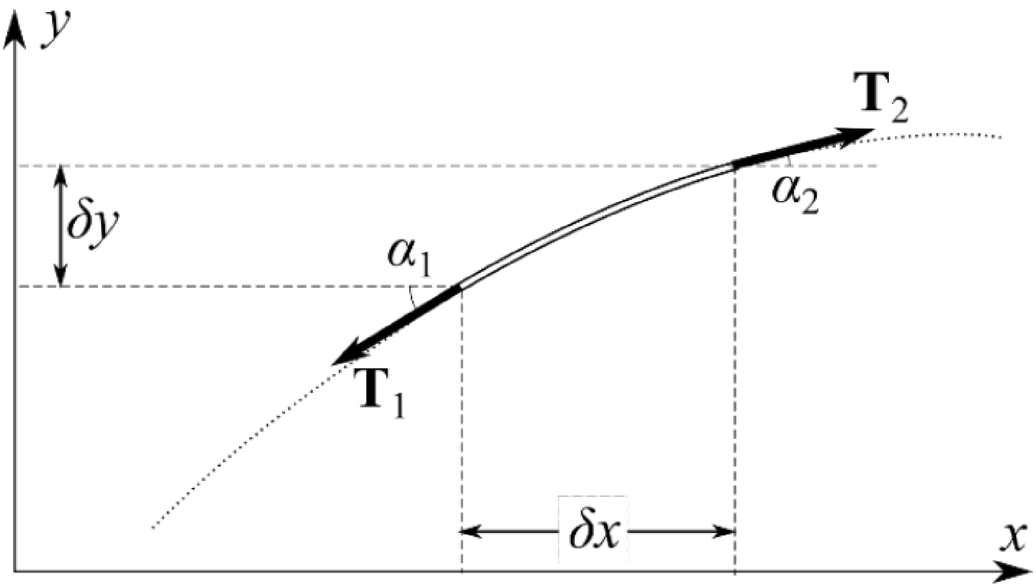

Рис. 1: . *К выводу уравнения колебаний струны*

Учтём, что в ненатянутом положении длина элемента равна δx, то есть $dm = \rho\delta x$, где ρ - линейная плотность нити в ненатянутом состоянии. Тогда, учитывая, что $\alpha = \partial y/\partial x$, получим:

$$T\delta\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\rho\delta x \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \left(u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)$$

$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (*)}$ - *уравнение свободных малых поперечных колебаний в струне.* Оно также называется волновым уравнением.

2.2 Бегущие волны

Заметим, что произвольная функция вида $y(x,t) = f(x - ut)$ является решением волнового уравнения $(*)$. Действительно, обозначим $\psi(x,t) = x - ut$. Тогда

$$y(x,t) = f(\psi(x,t)) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial\psi}{\partial t}\left(\frac{d^2 f}{d\psi^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{df}{d\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{d^2 f}{d\psi^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{df}{d\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = u$, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$, получим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2\frac{d^2 f}{d\psi^2} = u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Заметим теперь, что если в уравнении $y(x,t) = f(\psi(x,t))$ положить $\psi = const$, то получим: $dx/dt = u$, то есть возмущение струны движется поступательно со скоростью u вдоль оси x. Общее же решение волнового уравнения представимо в виде суперпозиции двух волн произвольной формы, бегущих вдоль оси x со скоростями $\pm u$:

$$y(x,t) = f_1(x - ut) + f_2(x + ut)$$

Вид функций f_1 и f_2 в данной конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий. В данной работе будут изучаться *гармонические волны*:

$$y(x,t) = a\cos\left[k(x-ut)\right] + b\cos\left[k(x+ut)\right] =$$

$$= a\cos\left(\omega t - kx\right) + b\cos\left(\omega t + kx\right)$$

Здесь ω - циклическая частота колебаний, а $k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$ - *пространственная частота* волны. (λ - длина волны).

2.3 Собственные колебания струны. Стоячие волны

Найдем вид свободных колебаний струны с *закрепленными концами*. Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = L$. Тогда из условия $y(0,t) = 0$ $(\forall t)$, получим:

$$a\cos(\omega t) + b\cos(\omega t) = 0 \Rightarrow a = -b$$

Тогда:

$$y(x,t) = a(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = 2a\sin kx \cdot \sin\omega t \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что данная волна получается в результате суперпозиции двух гармонических бегущих навстречу друг другу волн с равными амплитудами. Такая волна называется *стоячей*. Вся струна колеблется с циклической частотой ω. При этом амплитуда колебаний распределена по струне по закону: $y_m(x) = 2a\sin kx$. В точках, где $\sin kx = 1$, амплитуда колебаний максимальна (*пучности волны*). Точки, у которых $\sin kx = 0$ не колеблются вовсе (*узлы волны*). Точки струны между двумя соседними узлами всегда колеблются в одной фазе, то есть в любой момент времени их скорости сонаправлены.
Используем второе граничное условие $y(L,t) = 0$ $(\forall t)$:

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Тогда:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Как видно, параметр n определяет число полуволн (то есть пучностей), которые умещаются на струне. Так как длина волны однозначно связана с её частотой, то струна может колебаться только с определёнными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{2L}n$$

Спектр собственных частот ν_n колебаний струны зависит только от её натяжения, линейной плотности и длины и, в случае малых гармонических колебаний, не зависит от модуля Юнга материала струны.

2.4 Возбуждение колебаний струны. Резонанс

При колебаниях реальной струны всегда имеет место потеря энергии. Поддержание незатухающих колебаний в струне может осуществляться точечным источником, в качестве которого в данной работе используется электромагнитный вибратор. Для эффективной раскачки колебаний используется явление резонанса - необходимо, чтобы вынуждающая частота ν вибратора совпала с одной из собственных частот ν_n струны. Тогда в любой момент времени потери энергии будут компенсироваться поступающей от воздбудителя колебаний энергией, процесс становится стационарным и можно наблюдать стоячие волны.
Также стоит отметить, что в идеальном случае поток энергии вдоль стоячей волны отсутствует (в каждом участке между узлами кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот). Однако, энергия от вибратора должна каким-то образом доходить до удалённых от

него частей струны, поэтому в реальности помимо стоячей волны, есть ещё и малая бегущая компонента, которая и переносит энергию источника. Если потери энергии за период малы по сравнению с запасом колебательной энергии в струне, то искажение стоячих волн бегущей волной не существенно — наложение бегущей волны малой амплитуды на стоячую визуально приводит к незначительному «размытию» узлов (амплитуда колебаний в узлах совпадает с амплитудой бегущей компоненты волны).
Для достижения максимальной раскачки колебаний, необходимо располагать возбуждающий контакт вблизи узловый точки (но не строго в ней). Действительно, предположим, что вибратор способен раскачать соответствующий элемент струны до амплитуды A. Если x_0 - расстояние от него до пучности, то из формулы (1):

$$A = 2a \sin kx_0 \Rightarrow a = \frac{A}{2 \sin kx_0}$$

Отсюда видно, что расстояние x_0 следует устремлять к нулю.
Наконец отметим, что в ходе работы необходимо добиться того, чтобы колебания были *линейно поляризованы*, то есть чтобы струна колебалась в одной плоскости. Также необходимо обеспечить малость амплитуды колебаний - в противном случае волновое уравнение $(*)$ будет неприменимо.

3 Методика измерения

1. Установить длину $L \geq 80$см
2. Включить ЗГ и подождать 5-10 минут
3. Настроить ЗГ
4. Нагрузить струну
5. Перемещая магнит и меняя частоту ЗГ получить стоячую волну
6. Увеличивая частоту при постоянном натяжении струны, получить стоячие волны, соответствествующие $n = 1..6$, фиксируя частоту ЗГ. Повторить при повышении и понижении частоты для разных натяжений хотя бы 5 раз.
7. Проверить условие малости коэффицента бегучести в системе. Если оно не выполняется, убавить мощность ЗГ.
8. Для каждого натяжение струны F построить график $\nu_n(n)$. По наклону прямой определить скорость u.
9. Построить график $u^2(F)$. По наклону прямой определить ρ_l
10. Оценить погрешность и сравнить с истинным значением(написанно на установке)

4 Оборудование и инструментальные погрешности

В работе используются: звуковой генератор, двухканальный осциллограф, частотомер, набор грузов, станина,с закрепленной на ней струной.

1. Точность измерения массы грузов – 0,1 г.
2. Точность измерения с помощью линейки – 0,5 мм.
3. Точность измерения частот – 0,1 Гц.