

# Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса. (1.2.3)

11 октября 2022 г.

## 1 Аннотация

**Цели работы:** измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

**Оборудование:** трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить.

## 2 Теоретические сведения

**Упрощения:** При колебаниях не учитываются потери энергии на трение о воздух. Закон сохранения энергии, учитывая наше упрощение, имеет вид:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E$$

Здесь  $I$  – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $m$  – масса платформы с телом,  $\varphi$  – угол поворота платформы от положения равновесия системы,  $z_0$  – координата по вертикали центра нижней платформы  $O'$  при равновесии ( $\varphi = 0$ ),  $z$  – координата той же точки при некотором угле поворота  $\varphi$ .

Воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки  $C$  в этой системе –  $(r, 0, 0)$ . Нижний конец данной нити  $C'$ , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты  $(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\varphi$  эта точка переходит в  $C''$  с координатами  $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$ . расстояние между точками  $C$  и  $C''$  равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned}(R\cos\varphi - r)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2 &= L^2 \\ z^2 &= L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\varphi) \approx z_0^2 - Rr\varphi^2 \\ z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0}\end{aligned}$$

Подставляя  $z$  в закон сохранения энергии, получим:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{mgRr}{2z_0}\varphi^2 = 0$$

Дифференцируя по времени, получаем уравнение колебаний:

$$I\ddot{\varphi}^2 + \frac{mgRr}{z_0}\varphi^2 = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta \right)$$

Здесь амплитуда  $\varphi_0$  и фаза  $\theta$  колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kT^2$$

где  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$  – величина, постоянная для данной установки.

### 3 Методика измерений

Для наших целей будем использовать трифилярный подвес. Он состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , вращающейся платформы  $P'$ .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа  $P'$  оказывается повернутой на угол  $\varphi$  относительно верхней платформы  $P$ , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные коле-

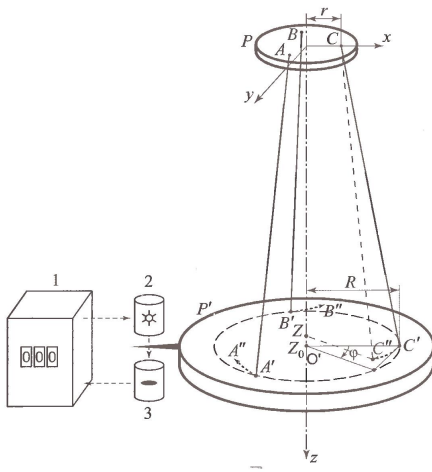


Рис. 1: Трифилярный подвес

бания.

### 4 Используемое оборудование

Секундомер измеряет время с абсолютной погрешностью  $\sigma_T^{\text{сист}} = 0,001$  с.

#### Параметры установки и коэффициент $k$

Работа выполнялась на установке №8, ее параметры указаны в таблице 1.

$m, \text{ г}$	$R, \text{ мм}$	$r, \text{ мм}$	$L, \text{ см}$	$z_0, \text{ см}$
1004,8	114,1	30,5	217,6	217,1
$\sigma_m, \text{ г}$	$\sigma_R, \text{ мм}$	$\sigma_r, \text{ мм}$	$\sigma_L, \text{ см}$	$\sigma_{z_0}, \text{ см}$
0,5	0,5	0,3	0,1	0,1

Таблица 1: Параметры установки

По полученным данным вычислим постоянную для конструкции №3:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 3,98 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность  $k$  будет равна:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0,04 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}^2}{\text{с}^2}$$

## 5 Результаты измерений и обработка данных

### Момент инерции ненагруженной платформы

Сначала определим период колебаний ненагруженной платформы.

№	Время колебаний $T_n, \text{ с}$	Период колебаний $T, \text{ с}$
1	44,705	4,4705
2	44,685	4,4685
3	44,63	4,463

Тогда средний период колебаний  $T_{\text{ср}} = 4,467 \text{ с}$ . Определим погрешность.

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (T_{\text{ср}} - T_i)^2} \approx 0,003 \text{ с}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \approx 0,003 \text{ с}$$

Найдем момент инерции ненагруженной платформы

$$I_{\text{пл}} = k m T_{\text{ср}}^2 = 7,98 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} = 0,01$$

$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = I_{\text{пл}} \varepsilon = 0,08 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Значит, с данной установкой мы можем определять момент инерции тел с точностью 1% и  $I_{\text{пл}} = (7,98 \pm 0,08) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

## Определение моментов инерции различных тел. Аддитивность моментов инерции

Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы, а именно – 3 измерения по 10 колебаний для каждого набора тел, получаем:

Набор тел	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_{\text{ср}}, \text{с}$	$T, \text{с}$	$m_0, \text{г}$	$I \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\sigma_I \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
Пл.+Крыш.	36,702	36,671	36,594	36,656	3,6656	2127,7	11,378	0,114
Пл.+Труба	43,04	42,95	42,89	42,96	4,296	1986,5	14,592	0,146
Оба тела	38,279	38,136	38,192	38,202	3,8202	3109,4	18,061	0,180
Цил. с пр.	28,424	28,513	28,474	28,470	2,847	3268	10,542	0,105

Таблица 2: Моменты инерции платформы с различными телами

Для подтверждения аддитивности необходимо показать, что выполняются условия:

$$I_{\text{пл+кр}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{кр}}$$

$$I_{\text{пл+тр}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{тр}}$$

$$I_{\text{пл+кр+тр}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{кр}} + I_{\text{тр}}$$

Из таблицы и формул мы можем найти момент инерции цилиндра и кольца, учитывая что погрешности момента инерции диска и вычисленных далее будут складываться:  $I_{\text{кр}} = I_{\text{пл+кр}} - I_{\text{пл}} = (3,398 \pm 0,194) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , а  $I_{\text{тр}} = I_{\text{пл+тр}} - I_{\text{пл}} = (6,612 \pm 0,226) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Тогда, для доказательства аддитивности, проверим последнее уравнение. Оно выполняется, следовательно моменты инерции аддитивны.

Теперь сравним полученные нами моменты инерции для тел, и их теоретические значения. Для крышки:  $I_{\text{кр}} = \frac{1}{2} m_{\text{кр}} R_{\text{кр}}^2$ .  $R_{\text{кр}} = 7,8 \text{ см}$ , тогда  $I_{\text{кр}} = 3,41 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , что подтверждает экспериментальное значение.

Для трубы же:  $I_{\text{тр}} = m_{\text{тр}} R_{\text{тр}}^2$ .  $R_{\text{тр}} = 7,5 \text{ см}$ . Получаем, что  $I_{\text{к}} = 6,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$ , что тоже совпадает с полученным экспериментальным значением.

Для цилиндра из лабораторной работы 1.2.4 получается  $I = (2,56 \pm 0,18) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

## Зависимость момента инерции системы тел от их расположения. График зависимости $I(h^2)$

Определим зависимость момента инерции системы двух тел от их взаимного расположения. Для этого располагая грузы, как сказано в условии, получим зависимость от расстояния. Полученные результаты измерений занесем в таблицы. Основываясь на результатах таблицы, построим график зависимости  $I(h^2)$ .

№ изм.	$T_{\text{ср}}, \text{с}$	$T, \text{с}$	$I \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$h, \text{см}$
1	33,029	3,303	8,931	4,53 см
2	33,228	3,323	9,040	5,03 см
3	33,459	3,346	9,165	5,51 см
4	34,053	3,405	9,491	6,58 см

Таблица 3: Зависимость периода колебаний и момента инерции от расстояния

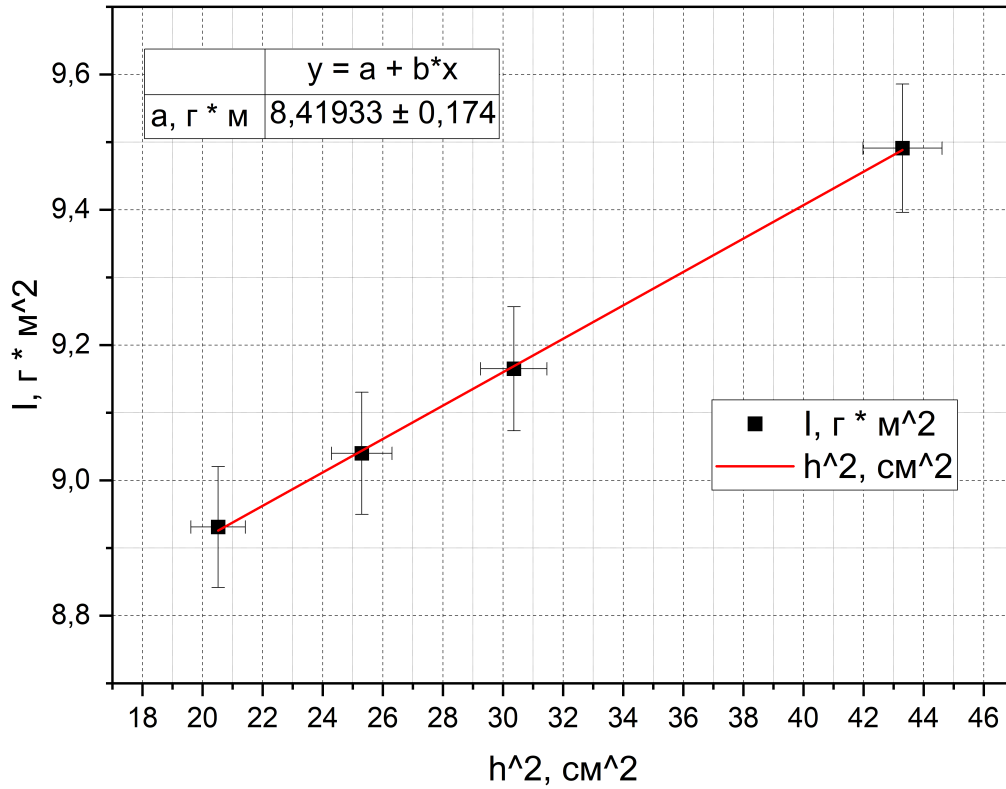


Рис. 2: Схема расположения грузов на платформе трифилярного подвеса.

По графику понятно, что  $I = kh^2 + b$ . Тогда  $b$  – момент инерции платформы + диска. Для вычисления коэффициентов  $k$  и  $b$  воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 8,419 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad (1)$$

где  $x = h^2$ ,  $y = I$ .

Случайные погрешности вычисления  $k$  и  $b$  можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,136 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (2)$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \sqrt{(\varepsilon_I)^2 + (\varepsilon_{h^2})^2} \approx b \cdot \varepsilon_I \approx 0,108 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (3)$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0,174 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (4)$$

## 6 Обсуждение результатов

Так как  $b = I_{\text{ц}} + I_{\text{пл}}$ , то  $I_{\text{ц}} = 0,439 \pm 0,254 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Зная радиус цилиндра  $R_{\text{ц}} = 3,49 \text{ см}$ , мы можем определить его массу:  $m_{\text{ц}} = 2I_{\text{ц}}/R_{\text{ц}}^2 \approx 0,721 \text{ кг}$ ,  $\sigma_{m_{\text{ц}}} = m_{\text{ц}} \cdot \sqrt{\varepsilon_I^2 + (2\varepsilon_R)^2} \approx$

0,417 кг. Видно, что масса не совпадает с реальной массой цилиндра. Это произошло из-за того, что мы измерили мало точек для зависимости момента инерции от квадрата расстояния. Сама установка позволяет измерять моменты инерции с точностью до одного-двух процентов.

Полученная зависимость  $I(h^2)$  аппроксимируется линейной зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ( $I = I_c + Mh^2$ , где  $I$  – момент инерции тела,  $I_c$  – момент инерции тела относительно центра,  $M$  – масса тела, а  $h$  – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).

## 7 Заключение результатов

В данной лабораторной работе мы проверили аддитивность моментов инерции, и выяснили экспериментальным путем, что это верно. Также сравнили измеренные моменты инерции с теми, которые рассчитаны теоретически. Так как они почти равны, трифилярный подвес обеспечивает достаточную точность.