

# Лабораторная работа 1.3.1. Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения и изгиба

## 1 Аннотация

### 1.1 Цели работы

Экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба; по результатам измерений вычислить модуль Юнга.

### 1.2 Ожидаемые результаты

Получим зависимости между напряжением и деформацией, с помощью измерений и построенных графиков определим модуль Юнга для различных тел. Сравнивая полученное экспериментально значение модуля Юнга для проволоки с табличными значениями, определим материал, из которого она изготовлена.

## 2 Теоретические сведения

**Общие сведения:** Внутренними напряжениями называются силы, возникающие при деформировании тела и стремящиеся вернуть его в первоначальное положение, отнесенные к соответствующим площадям. Деформация – это относительное смещение двух точек, деленное на первоначальное расстояние между ними, в точке по определению:

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx}$$

Напряжение, соответствующее виду силы (растяжение (сжатие) либо сдвиг) определяется как сила, отнесенная к единице соответствующей площади:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Понятие напряжения имеет перед понятием силы то преимущество, что его можно установить в каждой точке (локальный вектор силы, действующий на единицу площади).

В общем случае, напряжение – тензор второго ранга.

**Модули упругости:**  $\varepsilon$  и  $\sigma$  связывают следующие, эмпирически выведенные соотношения: для растяжения (сжатия):  $\sigma = E\varepsilon$ , для сдвига:  $\sigma = G\gamma = G\gamma$  ( $\gamma$  – угол сдвига).  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль сдвига. Эти величины характеризуют упругие свойства материала твердого тела в области линейной зависимости напряжения и деформации. В нашем случае модуль Юнга для проволоки будет вычисляться следующим образом:

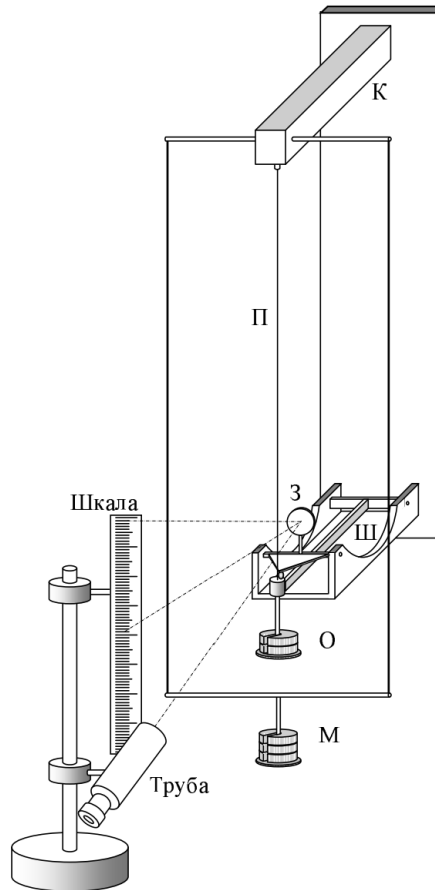
$$E = \frac{lk}{S}$$

## 2.1 Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

Эта часть работы описывается формулой, так как производят растяжение проволоки, что соответствует случаю одноосного напряженного состояния:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \text{ где } \sigma = \frac{F}{S}$$

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермантова:



Верхний конец проволоки  $\Pi$ , изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли  $\mathbf{K}$ , а нижний - к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн  $\mathbf{Ш}$ . На этот же цилиндр опирается рычаг  $\mathbf{г}$ , связанный с зеркальцем  $\mathbf{3}$ . Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркала.

Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с площадки  $\mathbf{М}$  на площадку  $\mathbf{О}$  и наоборот. Такая система позволяет исключить влияние деформации кронштейна  $\mathbf{K}$  на точность измерений, так как нагрузка на нем все время остается постоянной. При проведении эксперимента следует иметь в виду, что проволока  $\Pi$  при отсутствии нагрузки всегда несколько изогнута, что не может не сказаться на результатах, особенно при небольших нагрузках. Проволока вначале не столько растягивается, сколько распрямляется.

Формулу, связывающую число делений по шкале  $n$ , расстояние  $h$  от шкалы до зеркала, длину рычага  $r$  и удлинение можно выразить из следующих соображений:

Если направить зрительную трубу на зеркальце так, чтобы мы четко видели шкалу, тогда свет от шкалы будет падать примерно перпендикулярно шкале на зеркало, поэтому

$$\Delta l = \frac{nr}{2h}$$

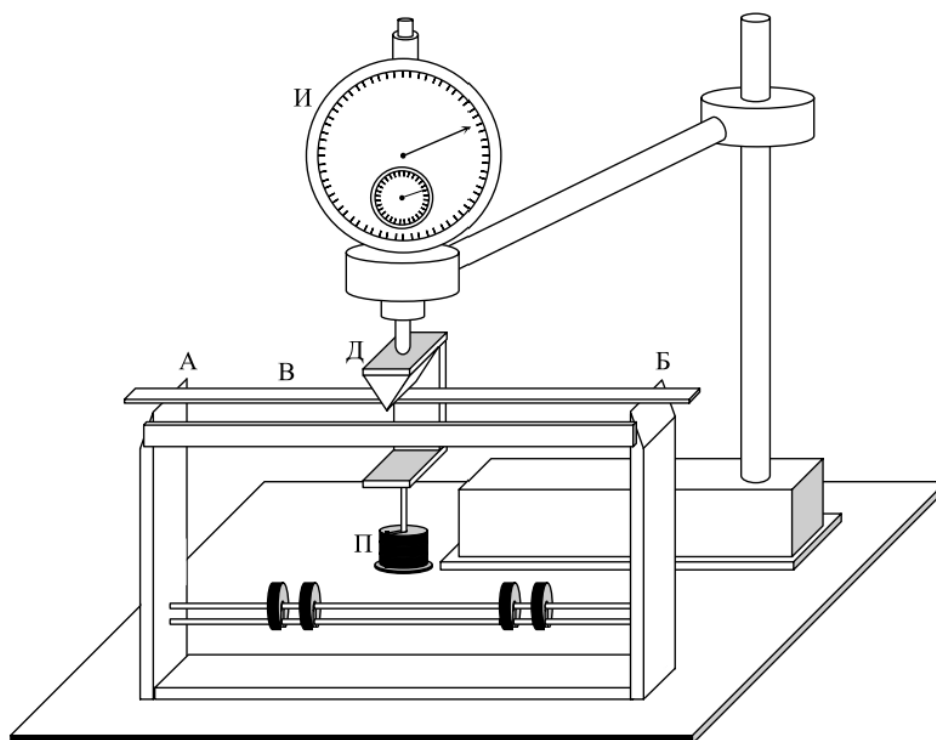
Модуль Юнга можем посчитать по формуле, где  $k$  угол наклона прямой зависимости удлинения

от прикладываемой силы:

$$E = \frac{kl_0}{S}$$
$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{l_0}}{l_0}\right)^2}$$

## 2.2 Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки

Экспериментальная установка состоит из стойки с опорными призмами А и Б:



На ребра призм опирается исследуемый стержень (балка) В. В середине стержня на призме Д подвешена площадка П с грузами.

Измерять стрелу прогиба можно с помощью индикатора И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный оборот большой стрелки индикатора соответствует 1 мм и одному делению малого циферблата.

Модуль Юнга  $E$  материала стержня связан со стрелой прогиба  $Y_{max}$  (то есть с перемещением середины стержня) следующим соотношением:

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{max}} \quad (1)$$

Здесь  $P$  - нагрузка, вызывающая прогиб стержня,  $l$  - расстояние между призмами А и Б, а  $a$  и  $b$  - ширина и высота сечения стержня.

Формула (1) была выведена при условиях, что, во-первых, ребра опорных призм А и Б находятся на одной горизонтали (высоте) и, во-вторых, сила  $P$  приложена точно посередине балки.

## 3 Методика измерений

1. (а) Измеряем площадь поперечного сечения проволоки с помощью микрометра

- (b) Измеряем длину проволоки
  - (c) Измеряем расстояние от шкалы до зеркальца
  - (d) Оцениваем максимальную величину нагрузки
  - (e) Измеряем зависимость  $n(m)$  2 раза
  - (f) Строим график  $\delta l(P)$
  - (g) Из графика получаем модуль Юнга
  - (h) Сравниваем с табличным
2. (a) Измеряем расстояние АВ
- (b) Снимаем зависимость  $y_{\max}(P)$ , переворачиваем и снимаем снова. Повторяем это для стержней различных материалов
  - (c) Для каждого стержня строим график и извлекаем модуль Юнга
  - (d) Сравниваем с табличным

## 4 Используемое оборудование

**В работе используется следующее оборудование:** в первой части – прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка; во второй части – стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величины прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линейка, штангенциркуль.

### Погрешности измерений:

1. штангенциркуль 0.05 мм
2. микрометр 0.01 мм
3. двухметровая линейка/рулетка 0.1 см
4. прибор Лермантова 2% (относительная погрешность)
5. установка для измерения прогиба балки 0.01 мм

## 5 Результаты измерений

$P$								
$y_{\max}$								

Таблица 1: Стержень 1 центральное

$P$								
$y_{\max}$								

Таблица 2: Стержень 1 сдвинутое

$P$								
$y_{max}$								

Таблица 3: Стержень 2 центральное

$P$								
$y_{max}$								

Таблица 4: Стержень 2 сдвинутое

$P$								
$y_{max}$								

Таблица 5: Стержень 3 центральное

$P$								
$y_{max}$								

Таблица 6: Стержень 3 сдвинутое

$m$								
$n$								

Таблица 7: Эксперимент 1

$m$								
$n$								

Таблица 8: Эксперимент 2