

Работа 1.2.4: Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

1 Аннотация

Цель работы: измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

2 Теоретические сведения

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяет не только величина его массы, но и ее пространственное распределение. Последнее характеризует физическая величина, которая называется тензором инерции. Геометрическим образом тензора инерции является эллипсоид, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$$

Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Эллипсоид инерции жестко связан с телом, для которого построен. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Для этого необходимо вдоль выбранной оси провести радиус-вектор \vec{r} до пересечения с поверхностью эллипсоида. Длина r будет определять момент инерции тела относительно этой оси:

$$I = \frac{1}{r^2}$$

Главные оси тела часто можно определить из его симметрии. Например, оси симметрии цилиндра или шара являются главными осями, так как для всех осей, лежащих в плоскости перпендикулярной оси симметрии, моменты инерции одинаковые, и, следовательно, эллипсоид инерции обладает такой же симметрией, являясь эллипсоидом вращения относительно оси симметрии тела. Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением

$$(I + I_p) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \varphi$$

Здесь I и I_p – это моменты инерции тела относительно оси вращения, φ – угол поворота рамки, f – модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}}$$

Момент инерции относительно диагонали I_d выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$\begin{aligned} I_d &= I_x \frac{a^2}{x^2} + I_y \frac{b^2}{y^2} + I_z \frac{c^2}{z^2} \\ (a^2 + b^2 + c^2)I_d &= a^2 I_x + b^2 I_y + c^2 I_z \\ (a^2 + b^2 + c^2)T_d^2 &= a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Относительно остальных осей:

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \quad (2.2)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2 \quad (2.3)$$

$$(b^2 + a^2)T_M^2 = a^2 T_y^2 + b^2 T_z^2 \quad (2.4)$$

3 Методика измерений

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рис.1. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

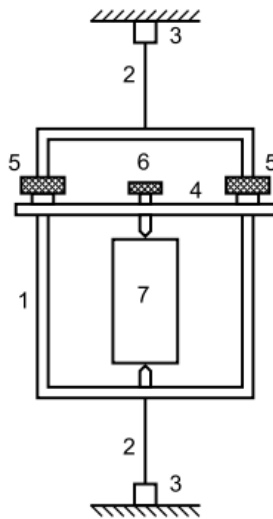


Рис. 1: Схема установки

В работе будем проверять соотношения (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4). Для пустой рамки и всех тел при различных их положениях относительно оси колебаний определим периоды колебаний по времени 10-15 колебаний, повторяя каждое измерение не менее 3 раз. Штангенциркулем измерьте геометрические размеры параллелепипеда. Вычислите главные моменты инерции. По полученным ранее данным проверьте справедливость формул.

4 Используемое оборудование

В работе используются: установка для получения крутильных колебаний (жесткая рамка, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке), набор исследуемых твердых тел, секундомер. **Погрешности:**

1. Для секундомера $\pm 0,5$ с
2. Для линейки $\pm 0,5$ мм
3. Для транспортира $\pm 0,5^\circ$

5 Результаты и обработка измерений

Таблица 1: Пустая рамка и цилиндры

Периоды 10 измерений, с	Пустая рамка	Мал. Цил., z	Мал. Цил., x	Бол. Цил., z
1	25,56	32,12	30,57	31,90
2	25,65	32,06	30,40	31,94
3	25,52	32,18	30,27	31,63
10Т, секунд	25,58	32,12	30,41	31,82
Т, секунд	2,558	3,212	3,041	3,182

Таблица 2: Цилиндры и главные оси куба

Периоды 10 измерений, с	Бол. Цилиндр, x	Два цилиндра	Куб, z	Куб, x	Куб, z
1	34,23	37,10	30,57	30,66	30,72
2	34,59	36,88	30,65	30,55	30,78
3	34,45	36,95	30,69	30,62	30,64
10Т, секунд	34,42	36,98	30,64	30,61	30,71
Т, секунд	3,442	3,698	3,064	3,061	3,071

Таблица 3: Куб: диагонали и другие

Периоды, с	Плоскостная диагональ	Главная диагональ	Куб / 2	Куб / 3
1	30,67	30,73	30,65	30,67
2	30,81	30,80	30,74	30,79
3	30,70	30,65	30,64	30,63
10Т, секунд	30,73	30,73	30,68	30,70
Т, секунд	3,073	3,073	3,068	3,070

Длина ребра куба 6: $a = 93,4$ мм

Таблица 4: Параллелепипед: главные

Периоды 10 измерений, с	T, z	T, x	T, y
1	40,80	38,03	32,70
2	40,69	37,91	32,58
3	40,71		
10T, секунд	40,73	37,97	32,64
T, секунд	4,073	3,797	3,264

Таблица 5: Параллелепипед: диагонали

Периоды 10 измерений, с	T, плоскостная диагональ	T, главная
1	33,34	35,03
2	33,47	35,03
10T, секунд	33,41	35,03
T, секунд	3,341	3,50

Таблица 6: Характеристики цилиндров

Характеристики	Мал. Цилиндр	Бол. Цилиндр
d, мм	87,6	87,8
h, мм	49,4	97,5
m, г	2263,6	4562,4

Таблица 7: Массы кубиков в граммах

2	1085,5
3	1090,5
6	1086,9

Таблица 8: Характеристика параллелепипеда

m, г	1083,2
x, мм	100,4
y, мм	150,3
z, мм	50,7

Таблица 9: Главные моменты инерции

Предмет	$\frac{I+I_x}{f}, c^2$	$\frac{I+I_y}{f}, c^2$	$\frac{I+I_z}{f}, c^2$
Пустая рамка			0,166
Маленький цилиндр	0,234	0,234	0,261
Большой цилиндр	0,300	0,300	0,257
Два цилиндра			0,346
Куб 6	0,237	0,239	0,238
Куб 2			0,238
Куб 3			0,239
Параллелепипед	0,365	0,270	0,420

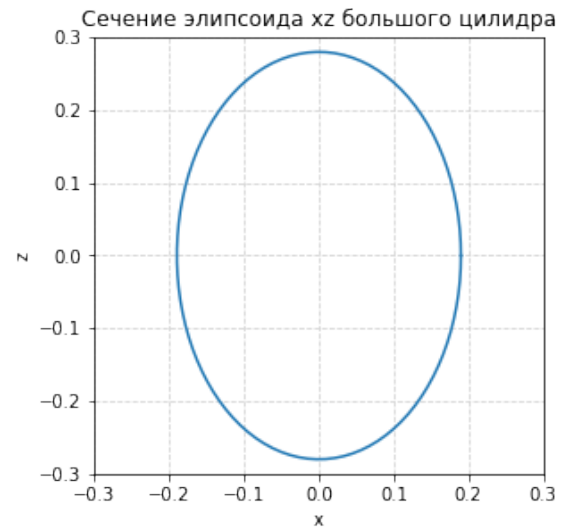
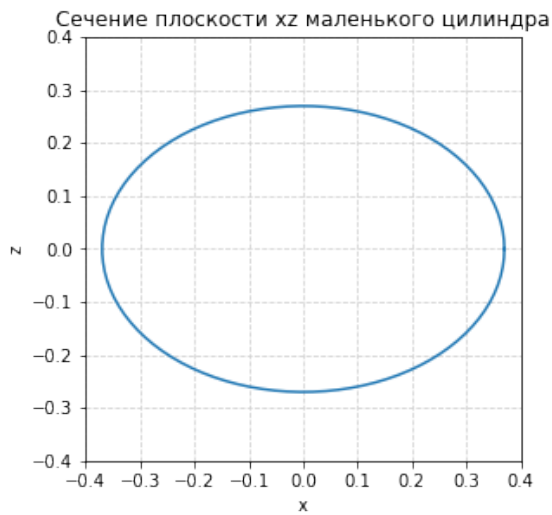
Тогда у T^2 погрешность равна $2\Delta T$. Поскольку мерили по 10, то $\Delta T = 0,05$ с, поэтому $\Delta T^2 = 0,1$ с².

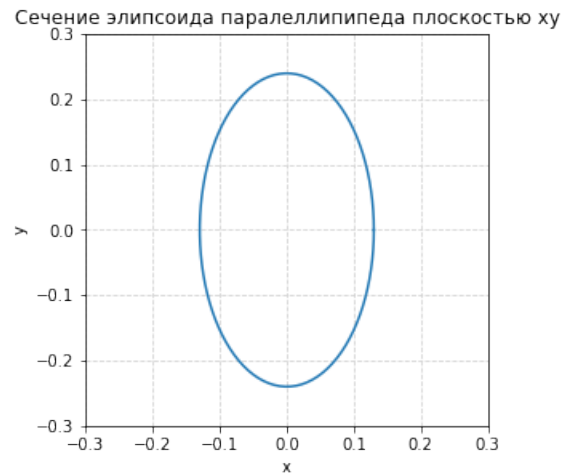
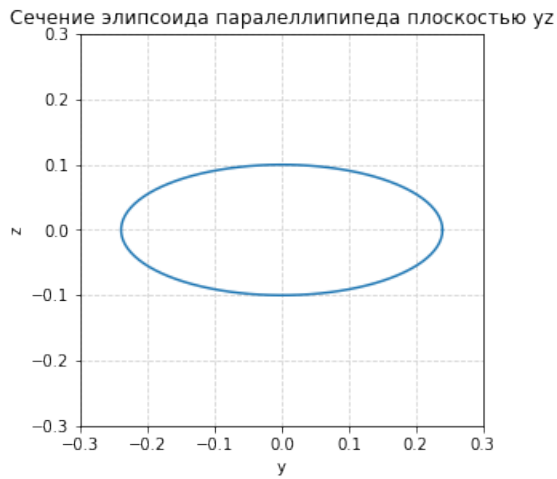
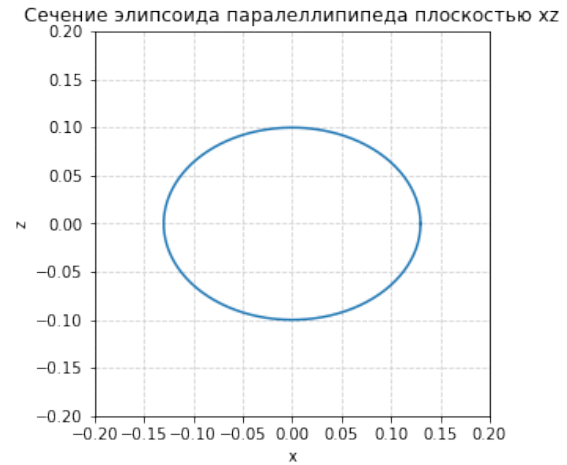
$$\frac{I + I_p}{f} = \frac{T^2}{4\pi^2} \implies \Delta \left(\frac{I + I_p}{f} \right) = \frac{\Delta T^2}{4\pi^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^2$$

Построим сечение эллипсоидом инерции тела, для этого вычислим $\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}$:

Таблица 10: Расстояния

Тело	$\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}, \text{с}^{-1}$
Маленький Цилиндр, z	0,27
Маленький Цилиндр, x	0,37
Большой Цилиндр, z	0,28
Большой Цилиндр, x	0,19
Куб, z	0,35
Куб, x	0,35
Куб, y	0,34
Параллелепипед, z	0,10
Параллелепипед, x	0,13
Параллелепипед, y	0,24





6 Обсуждение результатов

Проверим верность формул (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4):

Для куба:

$$T_{\text{плоскостная диагональ}}^2 (a^2 + a^2) \stackrel{?}{=} a^2 T_y^2 + b^2 T_z^2$$

$$3,073^2 \cdot 2 - (3,064^2 + 3,071^2) = 0,068 \text{ м } c^2 < 0,1 \text{ м } c^2$$

$$T_{\text{главная диагональ}}^2 3a^2 \stackrel{?}{=} a^2 T_x^2 + a^2 T_y^2 + a^2 T_z^2$$

$$3 \cdot 3,073^2 - (3,061^2 + 3,064^2 + 3,071^2) = 0,068 \text{ м } c^2 < 0,1 \text{ м } c^2$$

Для параллелепипеда:

$$T_{\text{плоскостная диагональ}}^2 (a^2 + b^2) \stackrel{?}{=} a^2 T_y^2 + b^2 T_z^2$$

$$3,341^2 (0,1503^2 + 0,0507^2) - (0,1503^2 \cdot 3,797^2 + 0,0507^2 \cdot 3,264^2) = -0,073 \text{ м } c^2 > -0,1 \text{ м } c^2$$

$$T_{\text{главная диагональ}}^2 (a^2 + b^2 + c^2) \stackrel{?}{=} a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2$$

$$(0,1503^2 + 0,507^2 + 0,1004^2) \cdot 3,50^2 - (0,1503^2 \cdot 4,073^2 + 0,0507^2 \cdot 3,264^2 + 0,1004^2 \cdot 3,797^2) = 0,053 \text{ м } c^2 < 0,1 \text{ м } c^2$$

Значит формулы верны в пределах нашей погрешности. Для соосных цилиндров должно выполняться:

$$\frac{I_{\text{маленький } z}}{m} = \frac{I_{\text{большой } z}}{M} = \frac{I_{\text{двух } z}}{m + M}$$

Используя теоретическую формулу для $I = \frac{1}{6}ma^2$ найдём f :

$$\begin{cases} I_p = 0,166f \\ I_t = \frac{1}{6} \cdot 1,0869 \cdot 0,0934^2 = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ I_t = 0,238f - I_p \end{cases} \implies 1,58 \cdot 10^{-3} = 0,072f$$

$$f = 0,0219 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность f :

$$\varepsilon_f = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,072} = 7\% \implies \Delta f = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность вычисленного I :

Таблица 11: Главные моменты инерции

Предмет	$I, x, \text{ г} \cdot \text{м}^2$	$I, y, \text{ г} \cdot \text{м}^2$	$I, z, \text{ г} \cdot \text{м}^2$
Пустая рамка			3,6
Маленький цилиндр	1,5	1,5	2,1
Большой цилиндр	2,9	2,9	2,0
Два цилиндра			4,0
Куб 6	1,6	1,6	1,6
Куб 2			1,6
Куб 3			1,6
Параллелепипед	4,4	2,3	5,6

$$\Delta I \leq 0,61 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Тогда данное значение f не соответствует значению для маленького цилиндра. Возможно данное расхождение произошло из-за того, что не была учтена случайная погрешность измерений или периоды для какого-то из цилиндров измерялись при углах, при которых уже нельзя пользоваться гармоническими законами для вычисления $\frac{I+I_p}{f}$. Кроме того, возможно, что во время работы f поменялось.

7 Вывод

Удалось измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закреплённого в ней тела, подтвердили верность теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, нашли главные моменты инерции тел и построили для них эллипсоиды инерции. Однако погрешности данных измерений оказались очень большими.