TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TIJUANA

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

UNIDAD 2

Problema de asignación

C. Abraham Jhared Flores Azcona
19211640

Profesora:
Ing. Igreyne Aracely Ruiz Romero

5 de noviembre del 2020

Índice

Índice de figuras

1. Introducción

Uno de los distintos problemas encontrados en el catálogo de la Investigación de Operaciones es el *Problema de asignación*. En esta breve investigación se expande acerca de su concepto, algorítmos de solución y un ejemplo resuelto en base a lo anterior.

2. Teoría

2.1. Concepto

El problema de asignación es una variante del problema de transporte visto en clase en la cual su variante caraterística es que las variables de desición pueden tomar valores binarios. Los valores asignados representan los recursos que se destinan a la realización de tareas. Por ejemplo, estas asignaciones pueden ser empleados a los cuales se les debe de dar trabajo. Su objetivo principal es *determinar la asignación optima (de costo mínimo) de trabajadores a puestos.*

A grandes rásgos, *"La mejor persona para el puesto"* es una buena descripción del modelo de asignación.

2.2. Definición informal

"Se asume que tenemos N trabajadores y N trabajos a realizarse. Por cada par (trabajador, trabajo) se conoce el salario a pagar al trabajador para que este reaize dicho trabajo. Nuestro objetivo es el de completar todos los trabajos minimizando las entradas totales, mientras se asigna a cada trabajador a solo un trabajo y viceversa."

2.3. Definición formal

La definición formal del problema es la siguiente:

Minimice el costo total:

$$Z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij}$$

Donde:

$\{c_{ij}\}_{N\times N}$ es la matríz de costo, donde c_{ij} es el costo del trabajador $i$para hacer el trabajo j.

$\{x_{ij}\}_{N\times N}$ es la matríz binaria resultante, donde $x_{ij} = 1 \leftrightarrow$ el $i$vo. trabajador es asignado al $j$vo. traba

$$x_{ij} = 1 \leftrightarrow \text{ el } i\text{vo. trabajador es asignado al } j\text{vo. trabajo.}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \forall i \in \{1, 2, ..., N\} \text{ - un trabajador para un trabajo.}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1,\ \forall i \in \{1, 2, ..., N\} \text{ - un trabajo para un trabajador.}$$

Planteado como matríz:

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Trabajos} \\
 & \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & & j & n \end{array} \\
\text{Personas} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ i \\ n \end{array} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & c_{2n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & c_{in} \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{in} & c_{nn} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Figura 1: Planteamiento matricial del problema de asignación.

Cabe destacar que éste problema se puede plantear en términos de teoría de grafos. Si se plantea el mismo problema de los trabajadores y los trabajos como si fuera un grafo bipártito donde cada esquina entre el $i$vo. trabajador y el $j$vo trabajo que tiene un peso de c_{ij}. Entonces el objetivo es encontrar el peso mínimo coincidencial en el grafo (el coincidencial consiste de N vértices, porque el grafo bipártital está completa).

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

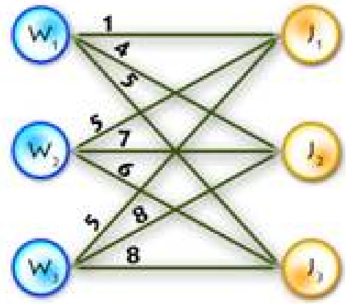

Figura 2: Planteamiento en forma de grafos del problema de asignación

2.4. Algorítmo de solución (Método Húngaro)

Existen distintos algorítmos con distintos grados de complejidad computacional que complementan la ressolución de este problema para casos muy particulares, pero el que satisface a grandes rasgos los criterios iniciales y el objetivo a llegar es el *Método Húngaro*. Se le denomina como tál gracias a que los primeros aportes al método fueron de Dénes König y Jenő Egerváry, los cuales son dos matemáticos de origen húngaro. Cabe destacar los siguientes puntos:

- Está diseñado para resolver *problemas de minimización unicamente*.
- El método *trabaja sobre una matriz cuadrada de costos* ($n \times m = n^2$).

```
Data: la matríz cuadrada ó la tabla cuadrada de costos (A_{n×n})
Result: el costo total minimizado de dicha matríz ó tabla (Z)
begin
Identificar el mínimo de cada renglón y restarlo a todos los elementos del
  renglón
while i < n + 1 do
  | Renglón_i = Renglón_i − Min (Renglón_i);
  | i + +;
end
Con la matríz resultante del paso anterior, identificar el el mínimo de cada
  colúmna y restarlo de todos los elementos de la colúmna
while j < n + 1 do
  | Colúmna_j = Colúmna_j − Min (Colúmna_j);
  | j + +;;
end
Function Trazado de lineas(n):
  | Trazar la menor cantidad de combinaciones de líneas horizontales y
  |   verticales para cubrir todos los ceros de la matríz reducida;
  | if #_líneas = n then
  |   | Obtener Z en base a lo encontrado;
  |   | return Z;
  | else if #_líneas < n then
  |   | Obtener el valor menor de aquellos valores que no se encuentran
  |   |   cubiertos por las lineas;
  |   | Restar el valor anterior a los elementos no cubiertos por las lineas;
  |   | Sumar dicho valor menor a auellos que se encuentren en las
  |   |   intersecciones de las lineas horizontales y verticales;
  |   | return Trazado de lineas(n);
end
```

Figura 3: Pseudocódigo del Método Húngaro

3. Práctica

3.1. Problema

La compañía de manufactura «Jiménez y Asociados» desea realizar una jornada de mantenimiento preventivo a sus tres máquinas principales A, B y C. El tiempo que demanda realizar el mantenimiento de cada máquina es de 1 día, sin embargo la jornada de mantenimiento no puede durar más de un día, teniendo en cuenta que la compañía cuenta con tres proveedores de servicios de mantenimiento debe de asignarse un equipo de mantenimiento a cada máquina para poder cumplir con la realización del mantenimiento preventivo. Teniendo en cuenta que según el grado de especialización de cada equipo prestador de servicios de mantenimiento el costo de la tarea varía para cada máquina en particular, debe de asignarse el equipo correcto a la máquina indicada con el objetivo de minimizar el costo total de la jornada. Los costos asociados se pueden observar en la siguiente matríz:

$$\begin{array}{c} \text{Máquinas} \\ \text{Equipos} \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \$10 & \$9 & \$5 \\ 2 & \$9 & \$8 & \$3 \\ 3 & \$6 & \$4 & \$7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 4: Matríz del problema de asignación de "Jiménez y Asociados".

3.2. Solución

1. Encontrar el valor menor de cada fila:

$$\begin{array}{c} \text{Mínimos de cada fila} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 5: Mínimos de cada fila de la figura 4.

2. Construir una nueva matríz con la diferencias entre los valores de la figura 4 y la figura 5:

$$\begin{array}{c} \text{Máquinas} \\ \text{Equipos} \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10-5=5 & 9-5=4 & 5-5=0 \\ 2 & 9-3=6 & 8-3=5 & 3-3=0 \\ 3 & 6-4=2 & 4-4=0 & 7-4=3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 6: Matríz de diferencias del problema de "Jiménez y Asociados".

3. Con los valores calculados para la figura 6, obtener los mínimos de cada colúmna:

$$\begin{array}{c} \text{Mínimos de cada colúmna} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 7: Mínimos de cada colúmna de la figura 6.

4. Construir una nueva matríz con la diferencias entre los valores de la figura 6 y la figura 7:

$$\text{Máquinas}$$

$$\text{Equipos}\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 5-2=3 & 4-0=4 & 0-0=0 \\ 6-2=4 & 5-0=5 & 0-0=0 \\ 2-2=0 & 0-0=0 & 3-0=3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 8: Segunda matríz de diferencias del problema de "Jiménez y Asociados".

5. Trazar la menor cantidad de combinaciones de lineas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los ceros de la figura 8:

$$\text{Máquinas}$$

$$\text{Equipos}\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 9: Matríz rayada a partir de la figura 8.

Debido a que el número de lineas verticales y/u horizontales necesarias es menor que el número de filas o colúmnas, se realiza el siguiente paso.

6. Seleccionar el elemento menor de los valores no-subrayados:

$$\text{Elemento menor}_{\text{no-subrayados}} = 3$$

7. Restar el elemento menor a los valores-no subrayados y adicionar dicho elemento a la intersección de las lineas:

$$\text{Máquinas}$$

$$\text{Equipos}\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3-3=0 & 4-3=1 & 0 \\ 4-3=1 & 5-3=2 & 0 \\ 0 & 0 & 3+3=6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 10: Matríz modificada a partir de la figura 9.

8. Realizar el paso 5 en la matríz de la figura 10:

Máquinas

$$\text{Equipos}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

Figura 11: Matríz rayada a partir de la figura 10.

9. Identificar la biyección (relación 1:1) de los equipos y las máquinas:

Máquinas

$$\text{Equipos}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}\boxed{0} & 1 & 0\\ 1 & 2 & \boxed{0}\\ 0 & \boxed{0} & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

Figura 12: Matríz de biyecciones a partir de la figura 11.

10. Obtener el valor de costo mínimo en base al valor encontrado en la figura 4 a partir de la posición de las biyecciones de la figura 12:

$$\overset{\text{Máquinas}}{\text{Equipos}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}\boxed{0} & 1 & 0\\ 1 & 2 & \boxed{0}\\ 0 & \boxed{0} & 6\end{pmatrix}\end{array}} \quad : \quad \overset{\text{Máquinas}}{\text{Equipos}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}\boxed{\$10} & \$9 & \$5\\ \$9 & \$8 & \boxed{\$3}\\ \$6 & \boxed{\$4} & \$7\end{pmatrix}\end{array}} \quad \therefore$$

Figura 13: Biyección de la figura 10 con la figura 12.

$$\begin{aligned} Z &= (\text{Equipos}_1 \cap \text{Máquinas}_1) + (\text{Equipos}_2 \cap \text{Máquinas}_3) + (\text{Equipos}_3 \cap \text{Máquinas}_2)\\ \therefore \quad &= 10 + 4 + 3\\ &= 17\end{aligned}$$

Dando por concluido el problema.

4. Conclusión

El problema de asignación y su resolución por el algoritmo descrito nos permiten plantear de otra manera los incovenientes acorde a los detalles de optimización deseados para costear de una mejor manera los procesos los cuales se desee emplear.

Referencias

[1] *Assignment Problem and Hungarian Algorithm.* URL: https://www.topcoder.com/thrive/articles/Assignment%20Problem%20and%20Hungarian%20Algorithm.

[2] *Assignment Problem: Meaning, Methods and Variations — Operations Research.* URL: https://www.engineeringenotes.com/project-management-2/operations-research/assignment-problem-meaning-methods-and-variations-operations-research/15652.

[3] *MODELO DE ASIGNACIÓN.* URL: https://proyectoinvestigacionoperaciones.wordpress.com/2016/11/09/primera-entrada-del-blog/.

[4] *Problemas de asignación - Ingenieria Industrial Online.* URL: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/problemas-de-asignacion/.