

MODELISATION DE L'ASTHME

Rapport de Biomedical Engineering

Groupe 8

Réalisé par :

ALAOUI Doae

HARRASSE Abir

AIT BELAISSAOUI Ziad

OUBELKASS Nouamane

EL KARDABOUSSI Youssef

Encadré par :

M. Marcel FILOCHE

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à présenter nos vifs remerciements à notre professeur et encadrant M. Marcel FILOCHE qui s'est présenté toujours disponible et qui a fait preuve d'implication tout au long de la période du projet. Nous apprécions ses conseils jugement indispensables à la progression du travail.

Table de matières

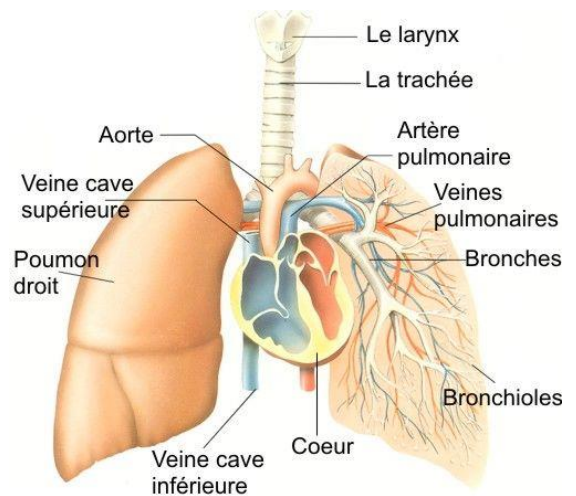
Introduction générale :	4
L'appareil respiratoire :	4
La physiologie de l'asthme :	4
Problématique et présentation du modèle :	5
Problématique :	5
Présentation du modèle :	5
Hypothèses de l'étude :	5
Modélisation mathématique et simulation informatique :	5
Modèle mathématique de l'écoulement :	5
Conclusion :	12
Annexe :	13
Modèle de discrétisation :	13
Remplissage de la matrice :	13
Code python :	14
Références :	14

Introduction générale :

L'appareil respiratoire :

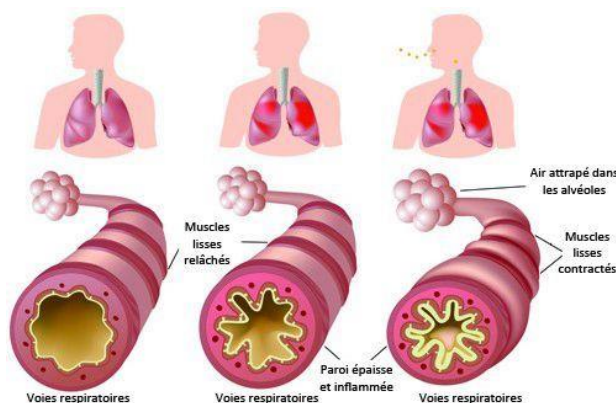
La consommation d'oxygène et la production de dioxyde de carbone sont indispensables à la production de la quantité d'énergie suffisante pour chaque individu. L'organisme humain a donc besoin d'un système qui assure ce processus. Nous parlons de **système respiratoire**.

Le système respiratoire est constitué de **voies respiratoires** qui assurent les échanges de l'air entre les poumons et l'atmosphère (cavité nasale, trachée ...) et de **voies intrapulmonaires** qui amènent l'air des voies respiratoires jusqu'aux alvéoles pulmonaires, on parle de **bronches** et **bronchioles**. Celles-ci peuvent être affectées par plusieurs maladies notamment la bronchite, l'asthme et la bronchectasie.



La physiologie de l'asthme :

L'asthme, provenant du mot grec « Azein » qui signifie respirer difficilement, est un problème



aériennes :

respiratoire d'origine allergique qui provoque une inflammation chronique des voies aériennes. Il est caractérisé par la survenue de crises qui sont des épisodes de gêne respiratoire sifflante. Les symptômes asthmatiques sont caractérisés par trois processus pathophysiologiques :

L'inflammation chronique des voies

Le développement de l'asthme revient en premier lieu à une réaction inflammatoire de la muqueuse bronchique. Une multitude de cellules inflammatoires et des médiateurs y contribuent et participent aux changements caractéristiques pathophysiologiques. Cette inflammation des voies respiratoires est étroitement liée aux expositions durant la petite enfance, à l'hyperréactivité et aux symptômes asthmatiques. Dans ce cas, l'inflammation en cas d'asthme persiste également si les symptômes sont épisodiques.

Les mastocytes de la muqueuse bronchique, les éosinophiles, les lymphocytes, les cellules dendritiques, les macrophages et les neutrophiles contribuent en particulier à la réaction inflammatoire.

L'hyperréactivité bronchique :

Au début et au fil de la progression de leur maladie, les personnes asthmatiques présentent une hyperréactivité bronchique, ce qui signifie que le système bronchique devient très sensible avec des aptitudes de se contracter lors de l'exposition à certaines substances : allergènes, virus, air froid.... L'hyperréactivité bronchique est rattachée à l'inflammation des voies respiratoires et partiellement réversible suite à un traitement médicamenteux.

L'obstruction bronchique :

La limitation du flux d'air en cas d'asthme repose majoritairement sur le rétrécissement brutal du calibre bronchique. Cette obstruction bronchique est surtout causée par le spasme des muscles bronchiques lisses. Par ailleurs, des œdèmes ainsi que l'épaississement des parois bronchiques et une surproduction de mucus contribuent au rétrécissement des voies respiratoires.

Problématique et présentation du modèle :

Problématique :

Durant ce projet, nous tâcherons à mettre en place un modèle pour reproduire aussi fidèlement que possible l'écoulement de l'air en premier lieu pour une bronche cylindrique, et ensuite pour une bronche dont les parois sont déformées (cas de l'asthme). Pour chaque géométrie différente, nous nous intéresserons à la mesure de l'augmentation de la résistance aérienne bronchique.

Présentation du modèle :

Nous commençons par modéliser la bronche par un rectangle. Nous fixons la pression à l'entrée et à la sortie du rectangle et nous suivons la variation du champ de vitesse, de la pression et de la résistance aérienne. Nous varions ensuite la géométrie du tube et nous comparant les résultats obtenus.

Hypothèses de l'étude :

- ✓ L'écoulement est laminaire conservatif.
- ✓ Le régime est stationnaire.
- ✓ Le terme de l'inertie est négligeable.
- ✓ Le fluide est incompressible.

Modélisation mathématique et simulation informatique :

Modèle mathématique de l'écoulement :

Vu que nous travaillons sur l'écoulement de l'air dans les bronches, qui est un fluide newtonien, et en prenant en considération les hypothèses citées auparavant, nous pouvons nous placer dans l'approximation de Stokes, l'équation que nous résoudrons est donc :

$$-\vec{\nabla}P + \mu\Delta\vec{u} = \vec{0}$$

Avec μ la viscosité du fluide (l'air dans notre cas).

En ajoutant l'équation de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous aurons recours à la méthode des éléments finis. Nous discrétisons notre surface rectangulaire en une grille avec des pas dx suivant l'axe horizontal et dy suivant l'axe vertical, et à chaque point de coordonnées (i, j) nous associerons la fonction $i + jk$ avec $0 \leq k < M$.

M étant la largeur du rectangle et N sa longueur.

Pour résoudre notre problème numériquement, nous passons au cas discret en appliquant nos équations valables dans un domaine continu en chaque point de la discrétisation (voir la méthode dans l'annexe).

1^{er} cas : Écoulement de Poiseuille

Dans ce cas, nous avons essayé de simuler un écoulement de Poiseuille, c'est-à-dire le cas 2D sans déformation. Notre écoulement est la solution du système :

$$-\vec{\nabla}P + \mu\Delta\vec{u} = \vec{0} \text{ avec } \vec{u} = u_x(y)\vec{e}_x \text{ et } \vec{\nabla}P = \text{constant} = \frac{\Delta P}{L}$$

Donc en remplaçant le formule de la vitesse dans l'équation de Stokes, nous trouvons :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$$

L'expression de la vitesse est donc : $u_x(y) = \frac{\Delta P}{2\mu L}Ay + B$ avec A et B des constantes.

Or avec les conditions aux limites : $u_x(y = 0) = u_x(y = D) = 0$:

$$u_x(y) = \frac{\Delta P}{2\mu L}y(y - D)$$

Une fois cette formule, nous pouvons donc calculer, le débit et la vitesse maximale théoriques :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = \frac{D}{2} \Rightarrow u_m = u\left(y = \frac{D}{2}\right) = \frac{-\Delta P D^2}{8\mu L}$$

Et

$$Q = \int_0^D u_x(y)dy = \int_0^D \left(\frac{\Delta P}{2\eta L}y^2 - \frac{\Delta P}{2\eta L}Dy\right)dy = \left[\frac{\Delta P}{6\eta L}y^3 - \frac{\Delta P}{4\eta L}Dy^2\right]_0^D = -\frac{\Delta P}{12\eta L}D^3$$

Ces formules peuvent donc nous aider à vérifier si notre modèle est précis. Passons maintenant aux résultats qu'on a eu sur le profil de Poiseuille.

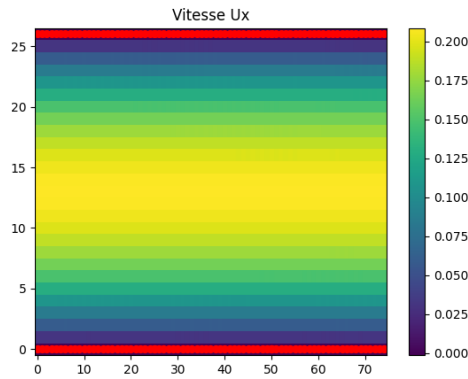


Figure 1 : Profil de la vitesse u_x pour un tube droit

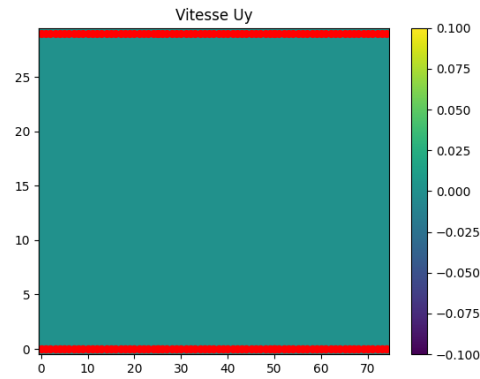


Figure 2 : Profil de la vitesse u_y pour un tube droit

Premièrement, nous remarquons que la composante suivant Y est nul, et la variation de la vitesse suivant X est nul, qui est cohérent avec un écoulement de Poiseuille. Et aussi, d'après les figures ci-dessous, nous remarquons que la pression est linéaire, qui est encore un fois cohérent avec un écoulement de Poiseuille.

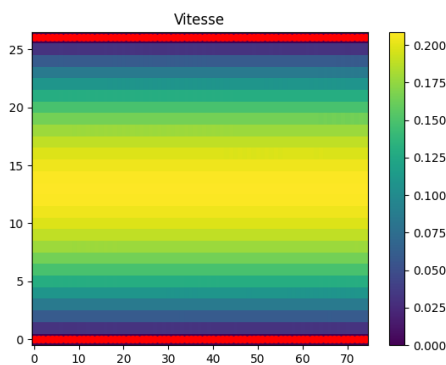


Figure 3 : Profil de la vitesse pour un tube droit

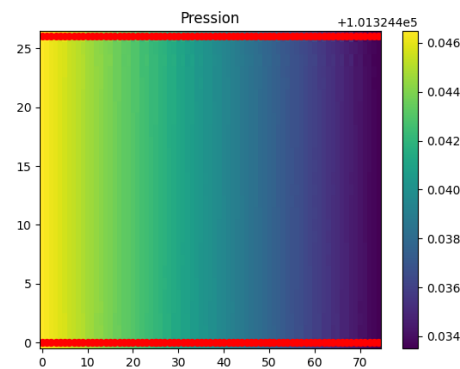


Figure 4 : Profil de la pression p pour un tube droit

Mais, cela ne suffit pas, nous devons vérifier les valeurs de la vitesse maximale et du débit, avant de confirmer. D'après les formules démontées avant, et pour la 4^{ème} génération :

$$U_{\max} = 0.22 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q = 0.0011 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$$

Ceci est aussi en cohérence avec ce qui est dans nos courbes.

3^{ème} cas : Tube avec un seul resserrement :

Dans la perspective de modéliser le problème de l'asthme et après avoir étudié le cas simpliste du tube droit, nous imposons à notre tube pour première étape un seul resserrement de largeur ε_2 et de longueur ε_1 . Notre tube devient le suivant :

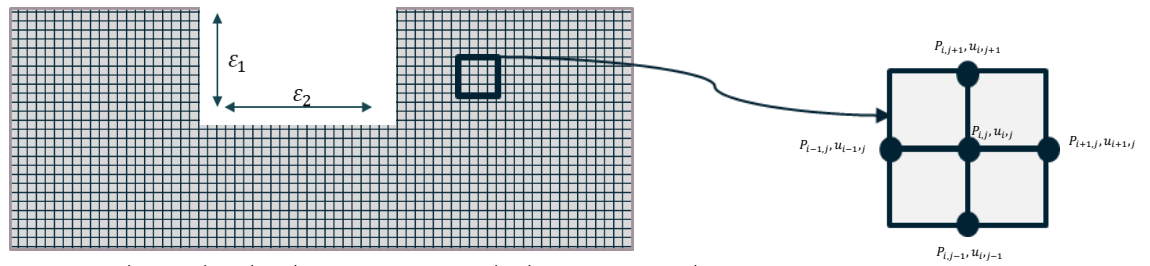


Figure 5 : schéma du tube discrétisé ainsi que la discrétisation utilisée

Pour modéliser l'écoulement du fluide à l'intérieur du tube, on doit écrire les équations de l'écoulement ainsi que les bonnes conditions aux limites pour avoir des résultats vraisemblables : les équations ainsi que les conditions aux limites que nous avons choisies sont les suivantes :

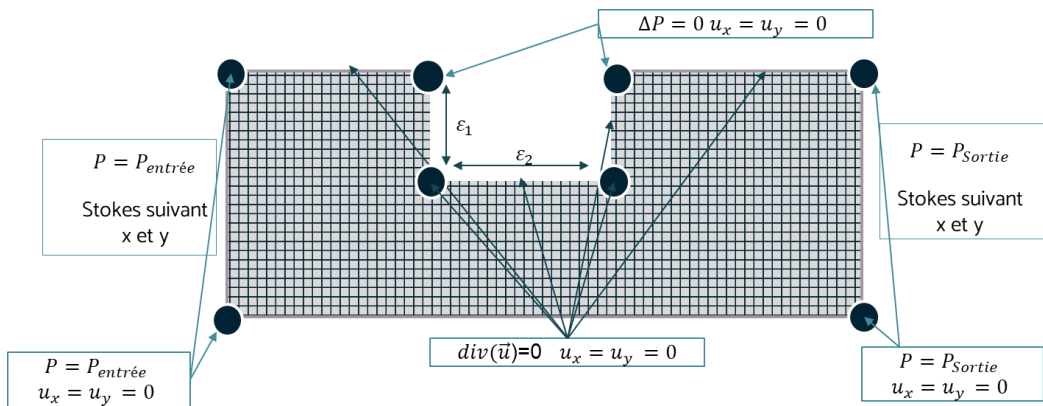


Figure 6 : équations et conditions aux limites dans le cas du tube avec un seul resserrement

Nous remplissons la matrice par les équations indiquées par la figure 2 sous leur forme discrétisée de la même façon (voir annexe) que dans le premier cas.

La résolution de l'équation matricielle nous donne les profils de vitesse et de pression suivants :

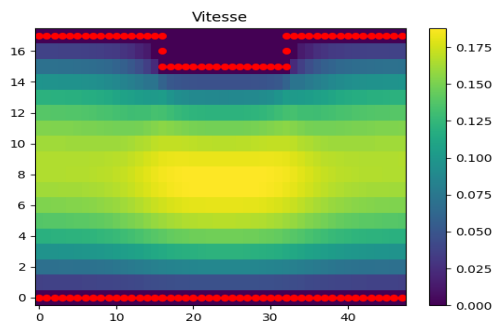


Figure 7 : profil de la vitesse pour un seul resserrement

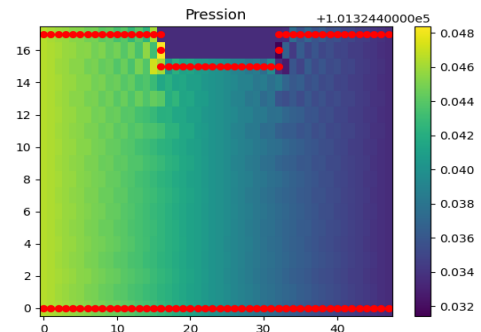


Figure 8 : Profil de la pression avec un seul resserrement

Le résultat de la résolution de notre système matricielle montre bien des profils vraisemblables : la vitesse augmente vraisemblablement à l'intérieur du resserrement ce qui

va en concordance avec la conservation du débit à l'intérieur du tube. De même la pression est décroissante allant de la valeur de l'entrée jusqu'à la valeur à la sortie. Les deux figures imposent deux remarques :

1. Est-ce que nous pouvons améliorer notre résolveur pour avoir des solutions plus lisses avec moins de carreaux lors de l'affichage ?
2. Est-ce que nous avons bien résolu notre système : en d'autres termes, est-ce que les profils récupérés vérifient bien $A.X = B$?

La réponse à la première question semble plus aisée : en fait, nous calculons la norme du vecteur $AX - B : \|AX - B\|$: nous trouvons qu'elle est bien égale à 0 : les deux profils récupérés sont bien les solutions à notre problème.

Pour la deuxième, la réponse nécessite un peu de travail : le problème des carreaux au milieu provient de l'utilisation de la dérivée centrée lors de la discrétisation des équations de la figure 2 : la solution serait donc de les remplacer par les dérivées décentrées, mais la vie n'est pas aussi simple que cela ! En fait, la dérivée centrée nous permet d'avoir des solutions plus précises et donc qui conservent plus le débit (**combien est le débit sans alpha**), la question 1 revient donc à trouver un compromis entre la conservation du débit et la lisseur (absence de carreaux) de la solution : nous introduisons un facteur α qui appartient à l'intervalle $[0, 1]$ qui jouera à partir de ce moment un rôle essentiel dans la résolution de notre problème. α nous aide à définir une nouvelle dérivée, elle est introduite de la manière suivante :

$$\frac{dg_i}{dx_{nouvelle}} = \alpha \cdot \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2 \cdot dx} + (1 - \alpha) \cdot \frac{g_i - g_{i-1}}{dx}$$

Cette nouvelle forme de la dérivée nous garantira deux grands paramètres : maximiser la conservation du débit et présenter une solution lisse avec moins de carreaux.

Notre étude nous a mené à un facteur $\alpha = 0.9$, la solution récupérée à l'issue de l'introduction de ce facteur est la suivante :

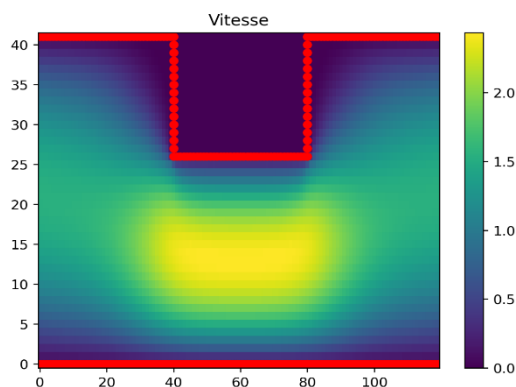


Figure 9 : profil de la vitesse pour un seul resserrement après introduction

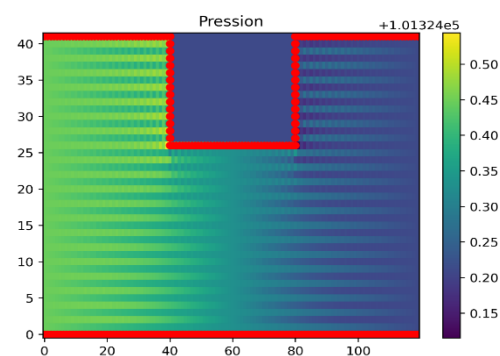


Figure10 : profil de la pression pour un seul resserrement après introduction de

Avec $\alpha = 0.9$, la variation du débit est de **6%** et les solutions sont plus lisses qu'auparavant.

Maintenant que nous avons établi le profil général de notre solution, c'est le temps d'introduire une étude sur cette solution pour tirer plus d'informations :

On se rassure tout d'abord de la validité de nos observations à œil nu : le profil de Poiseuille hors resserrement et la modification de celui-ci à l'intérieur de ce resserrement

doit être vérifié : de ce fait, nous traçons la courbe représentant la vitesse sur plusieurs coupes avant, pendant et après le resserrement, le résultat est le suivant :

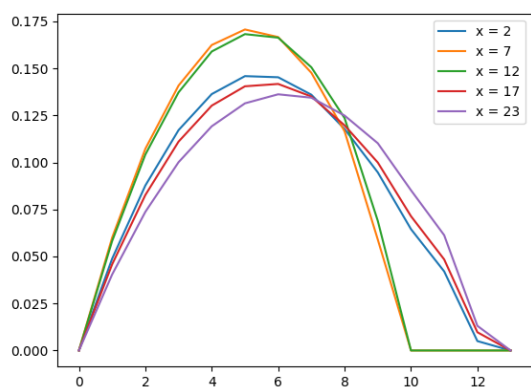


Figure 10 : profil de la vitesse sur plusieurs coupes

Nous remarquons qu'avant le resserrement, la vitesse suivait un profil de poiseuille : la parabole associée à pour équation : $y = ax^2 + bx + c$. Pendant le resserrement, le profil de la vitesse dévie du profil de Poiseuille graduellement, à la sortie de la déformation, ce profil commence à revenir graduellement encore une fois vers le profil de Poiseuille. Cette étude est primordiale pour assurer la validité du profil de Poiseuille local sur toute partie du tube suffisamment longue où il n'y a pas de déformation.

Nous passons maintenant à l'étude du débit, grandeur primordiale : nous avons tracé l'évolution du débit de l'entrée et le débit moyen en fonction de la taille du maillage, le résultat est le suivant :

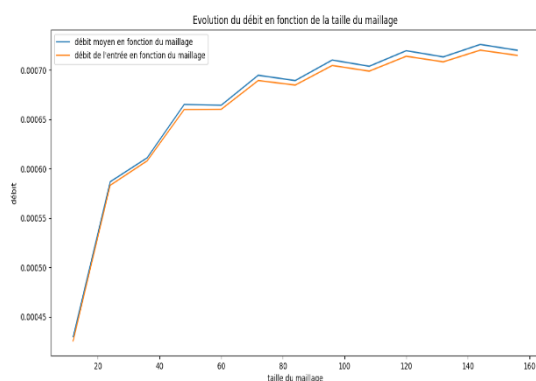
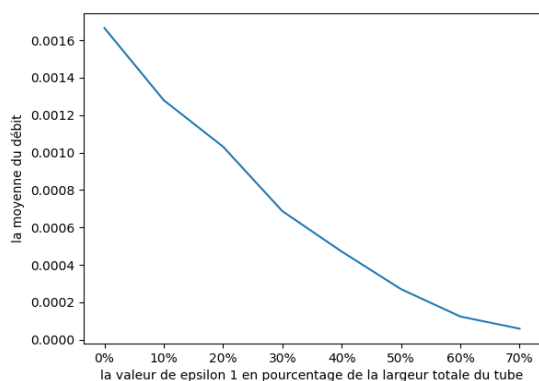


Figure 11 : évolution du débit en fonction de la taille du maillage

Nous remarquons que le débit augmente avec la taille du maillage, pour $N=100$, le débit commence à converger vers sa valeur limite, nous pouvons déduire que $N=100$ est une bonne taille du maillage qui assure à la fois la rapidité de l'exécution du programme ainsi qu'une valeur bien proche de la valeur limite du débit. Cette courbe nous montre une autre chose, pour une taille de maillage relativement petite (de l'ordre de 10 à 20), le débit semble être constant (les courbes sont confondues). Conclusion : il est toujours déconseillé de travailler avec des tailles de maillages petites : elles donnent toujours des illusions !

On varie les dimensions du resserrement ε_1 et ε_2 et on note la variation du débit en fonction de celles-ci. Les résultats sont les suivants :



Nous remarquons que plus la valeur de ε_1 est grande, plus l'écoulement du fluide est bloqué et le débit tend vers 0. Par contre, plus la valeur de ε_1 tend vers 0, plus le débit est grand et tend vers la valeur du débit trouvé pour un tube de droit qui était de 0.001. En conclusion, plus la déformation est petite, plus le comportement du tube tend vers le comportement d'un tube droit !

Nous passons maintenant à ε_2 , nous répétons la même étude, cette fois-ci en variant la valeur de ε_2 et en regardant son influence sur le débit.

Nous remarquons ci-contre l'évolution du débit en fonction de l'évolution de ε_2 . Plus nous rétrécissons le resserrement, plus le débit augmente. Un résultat auquel nous nous attendions bien !

Figure 12 : évolution du débit en fonction de la valeur de ε_1

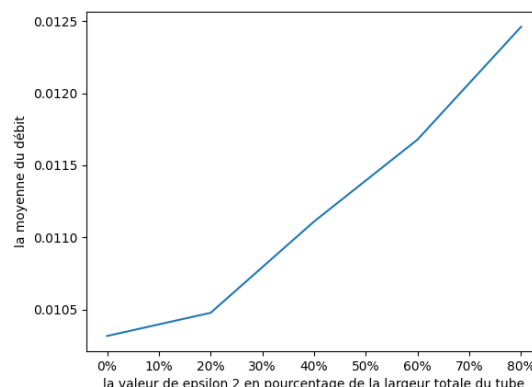


Figure 13 : évolution du débit en fonction de la valeur de ε_2

Nous étudions finalement la résistance du tube. Pour ce faire, on calcule la résistance de deux façons et nous comparons les résultats.

La première méthode serait de considérer la formule de la résistance de Poiseuille valable sur tout le tube et de calculer la résistance à l'aide de la formule :

$$R = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{12\eta L}{D^3}$$

La résistance équivalente trouvée est : $R_{\text{eq}} = 23.7 \text{ (S.I)}$

La deuxième méthode, qui s'impose avec plus de précision est de considérer le tube comme étant l'association en série de plusieurs tubes sur lesquels la loi de Poiseuille est vérifiée (dans notre cas trois tubes) et de calculer la résistance équivalente qui est égale à la somme des résistances dans ce tube. On a :

$$R_{\text{eq}} = 22.5 \text{ (S.I)}$$

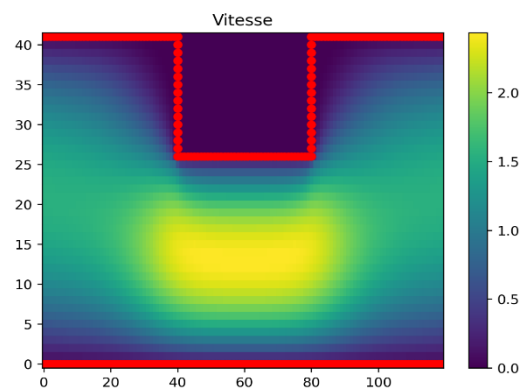


Figure 14 : Association série de 3 tubes

Nous remarquons bien que plus nous travaillons avec la loi de Poiseuille en local, plus les résultats sont plus précis, néanmoins la différence n'est pas très flagrante, il reste possible de travailler en première approximation avec la loi de Poiseuille même dans un tube légèrement déformé !

4^{ème} cas : Tube déformé (cas de l'asthme) :

Nous nous intéressons cette fois au cas d'un tube avec plusieurs resserrements afin de nous rapprocher du cas d'une bronche affectée par l'asthme.

Nous arrivons à obtenir les profils de vitesse et de pression suivants :

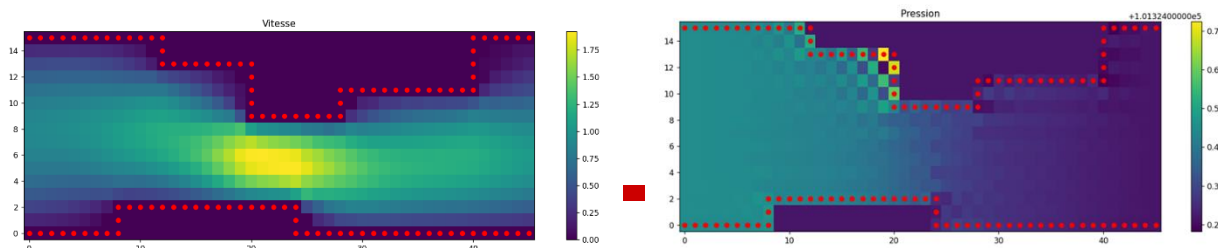


Figure 15 : profil de vitesse dans un tube déformé

Figure 16 : profil de pression dans un tube déformé

Nous remarquons que la vitesse augmente dans l'endroit du resserrement puis diminue une fois que le tube s'élargisse. Compte à la pression, celle-ci décroît en parcourant le tube de l'entrée vers la sortie.

A partir de ces résultats obtenus, nous avons réussi à calculer le débit chez une personne asthmatique ($0.00125 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$) ainsi d'en déduire la valeur de la résistance (**11.67 (SI)**). En comparant ces valeurs avec celles d'une personne normale, nous remarquons que le débit chez une personne asthmatique diminue d'un pourcentage de **76 %**.

Nous avons ensuite pu trouver l'analogie droit du tube déformé qui conserve le même débit. C'est un tube de diamètre $D = \mathbf{0.00487 \text{ m}}$.

Conclusion :

En définitive, l'asthme est un phénomène complexe qui a toujours suscité la curiosité des gens qui l'ont étudié. Durant ce projet, nous avons essayé de le modéliser d'une façon simple à l'aide des outils mathématiques et informatiques que nous maîtrisons. Nous nous sommes en particulier intéressés à l'augmentation de la résistance hydrodynamique et son impact sur le débit de l'air dans les bronches, et nous avons abouti à quelques résultats notamment la diminution du débit avec l'augmentation de la résistance qui elle-même accroît avec l'augmentation du resserrement.

Annexe :

Modèle de discrétisation :

Equation de Navier-Stokes avec une dérivée de pression centrée :

Suivant X :

$$\frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{2dx} + \mu \left(\frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dx^2} + \frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dy^2} \right) = 0$$

Suivant Y :

$$\frac{P_{k+N} - P_{k-N}}{2dy} + \mu \left(\frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dx^2} + \frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dy^2} \right) = 0$$

Equation de Navier-Stokes avec une dérivée de pression décentrée :

Suivant X :

$$\frac{P_{k+1} - P_k}{dx} + \mu \left(\frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dx^2} + \frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dy^2} \right) = 0$$

Suivant Y :

$$\frac{P_{k+N} - P_k}{dy} + \mu \left(\frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dx^2} + \frac{U_{k+1} + U_{k-1} - 2U_k}{dy^2} \right) = 0$$

Equation de conservation de masse :

$$\frac{U_{k+1} - U_k}{dx} + \frac{U_{k+N} - U_{k-N}}{dy} = 0$$

Equation de Laplacienne de la pression :

$$\frac{P_{k+1} + P_{k-1} - 2P_k}{dx^2} + \frac{P_{k+1} + P_{k-1} - 2P_k}{dy^2} = 0$$

Remplissage de la matrice :

Trouver une solution à notre système revient à résoudre l'équation matricielle :

$$A X = B$$

Avec le remplissage de la matrice A sous la forme :

La matrice A est une matrice de taille 3NM, donc on a choisi d'entrer pour chaque point 3 équation, c'est-à-dire pour le point 0, les équations sont dans les lignes 1,2 et3, et ainsi de

suite. (Pour un point k , les équations sont dans les lignes $3k, 3k+1$ et $3k+2$. Or puisque la matrice des inconnues X s'écrit sous la forme $X = (u_{x0}, \dots, u_{xMN}, u_{y0}, \dots, u_{yMN}, P_0, \dots, P_{MN})$, alors les facteurs de $u_{x\cdot}$ dans les équations sont dans les NM premières colonnes, les facteurs de u_y sont les 2^{ème} NM colonnes, et enfin les facteurs de P sont dans les dernières NM colonnes.

Code python :

Veuillez trouver nos code python commenté en cliquant sur le lien suivant :

[Code python](#)

Références :

- Physiologie de l'asthme : <https://www.medportal.ch/fr/domaines-therapeutiques/pneumologie/allergologie/asthme/propos-de-lasthme-bronchique/#dwell>
<http://amar-constantine.e-monsite.com/pages/programme-1ere-annee/anatomie-physiologie/l-asthme-bronchique.html>
- Définition de l'asthme : <https://www.msdmanuals.com/fr/accueil/troubles-pulmonaires-et-des-voies-a%C3%A9riennes/biologie-des-poumons-et-des-voies-respiratoires/pr%C3%A9sentation-du-syst%C3%A8me-respiratoire>