L'ÉQUIPE MAROCAINE DE PREPARATION AUX OLYMPIADES INTERNATIONALES DE MATHEMATIQUES

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Stratégies et Réflexes

1ère Partie

$$y^2 f(x) - x^2 f(y) = y^2 - x^2$$

Mohammed Jamal
Choukri Saâd

2018

L'ÉQUIPE MAROCAINE DE PREPARATION AUX OLYMPIADES INTERNATIONALES DE MATHEMATIQUES

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Stratégies et Réflexes

Choukri Saâd

Faculté des sciences, Aïn chock, Casablanca
Département de mathématiques

Mohammed Jamal

Classes de mathématiques supérieurs
Lycée Louis-le-Grand, Paris

2018

Avant-propos de l'ouvrage

Les équations fonctionnelles sont des équations dont l'inconnu est une fonction, à partir d'une relation ou bien plusieurs relations portant sur une fonction, il est demandé de trouver la forme explicite de celle-ci ou plus généralement trouver une propriété que la fonction vérifie. Les équations fonctionnelles ont toujours connu présence dans les différentes compétitions nationales autour du monde et internationales.

Cet ouvrage propose aux étudiants qui préparent les compétitions nationales et les compétitions internationales de mathématiques, notamment les olympiades internationales de mathématiques des techniques et des stratégies ainsi que des exercices corrigés. Il pourra intéresser également les enseignants.

Á la fin de chaque chapitre, on trouve une liste d'exercices de difficultés variantes issus notamment des compétitions de mathématiques autour du monde, qui constituent une illustration des techniques présentées qui les précède. Le dernier chapitre traite des exercices de tout genre sur les équations fonctionnelles. En total cet ouvrage contient plus de 400 exemples et exercices corrigés.

À la fin dans la seconde partie de l'ouvrage, vous trouvez trois annexes. L'annexe A donnant les concepts de base sur les ensembles et les applications. L'annexe B traite les propriétés fondamentales de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. L'annexe C traite les notions qui suivent, les suites, les limites, la continuité et la dérivabilité. Le seconde partie de l'ouvrage à venir, celle-ci traitera les axes suivants, les équations fonctionnelles et géométrie, les équations fonctionnelle et l'arithmétique, les équations polynômiales, méthodes et stratégie supplémentaires et finalement un chapitre contenant des équations fonctionnelles de tout genre.

Notre premier objectif de l'édition de cet ouvrage dépasse les limites du gain matériel. Notre objectif suprême est plutôt maintenir l'aide didactique et pédagogique nécessaire aux candidats olympiques marocains des OIM. Cet ouvrage est aussi un cadeau pour tous les sympathisants des mathématiques, élèves, étudiants, professeurs et simples lecteurs.

On tient à remercier toutes les personnes qui nous ont aidé, Mohammed Amine Bennouna, Chbihi Youness, Aassilla Mohammed, Houssam Akhmouch, Mohammed El Alami, Hamza Ba-Mohammed, Elias Kaichouh et Omar El Hadri.

Nous serons reconnaissant à ceux de nos lecteurs qui nous feront parvenir leurs remarques sur notre travail. Contacter nous à l'adresse électronique `livres.empimo@gmail.com`.

Les auteurs

Table des matières

Généralités 1

1 Comprendre la notion de fonction, équation fonctionnelle

Une *fonction* décrit une relation entre un ensemble de départ qu'on notera $\mathbb{A}$ et un ensemble d'arrivée noté $\mathbb{B}$. Elle associe à chaque élément a dans $\mathbb{A}$ un unique élément b dans $\mathbb{B}$ appelé image de a par f. On note alors $b = f(a)$ et on dit que b est l'image de a par la fonction f. On utilise la notation suivante pour définir une fonction:

$$f \begin{cases} \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B} \\ a \longmapsto f(a) \end{cases}$$

On peut avoir une forme explicite de la fonction f qui permet de calculer l'image de chaque élément, par exemple $f(x) = 3x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais dans certains cas ceci est impossible comme le montre l'exemple suivant :

$$p \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto p_n \end{cases}$$

avec p_n est le n-ième nombre premier.

Il faut noter aussi que les ensemble $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ utilisés ci haut peuvent avoir une dimension supérieure à 2. Une telle fonction est appelée une fonction multi-variable. Un élément a dans $\mathbb{A}$ s'appelle un n-uplet avec n la dimension de $\mathbb{A}$. L'exemple suivant illustre un cas ou $\mathbb{A}$ est de dimension 2, les éléments qui appartiennent à cet ensemble s'appellent des 2-uplets (ou doublets).

$$f \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) \longmapsto xy + 1 \end{cases}$$

Pour les fonctions d'une variable réelle, il existe une manière géométrique de les décrire que l'on appelle le graphe de la fonction. Il s'agit de représenter dans un système d'axes tous les points $(x, f(x))$ pour tout x dans l'ensemble de départ. Les propriétés que nous énoncerons plus tard pourront être interprétées et exploitées de manière géométrique (i.e. visuelle).

Passons maintenant au vif sujet, c'est quoi une équation fonctionnelle ? c'est tout simplement une équation dont l'inconnue est une fonction, on s'intéresse alors à déterminer l'ensemble des fonctions qui vérifient une égalité (parfois inégalité) algébrique ou une relation particulière. Par exemple, cherchons à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y)^2 = f(x) + f(y) + 2xy$$

On peut remarquer que la fonction $f(x) = x$ est une solution du problème, mais est ce l'unique solution? Dans la suite, on discutera quelques techniques élémentaires de résolution des problèmes des équations fonctionnelles comme les substitutions, la symétrie, l'injection, surjection ...

Méthodes élémentaires de résolution

2

1 Substitutions de base

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation fonctionnelle, il faut commencer par des substitutions de bases et si c'est possible, on essaie de déterminer des valeurs clefs de quelques images, souvent $f(0)$, $f(1)$... Parfois, une suite de substitutions peut amener à la résolution du problème.

Exemples.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - 2f(y)) = x + y - 3f(y)$$

Solution. Généralement, lorqu'on affronte une équation fonctionnelle, il faut commencer par des substitutions simples, bien choisies ! On peut par exemple essayer de trouver quelques valeurs comme $f(0), f(1), f(-1), \ldots$, ou essayer de trouver des conditions sur cette fonction. L'exercice ci-dessus aborde une équation fonctionnelle simple dont l'idée très basique, il suffit de se débarasser de y dans l'expression $f(x-2f(y))$. Le raisonnement qu'on propose est le suivant: Posons $y = 0$, cela donne $f(x - 2f(0)) = x - 3f(0)$. Par la suite, on pose $z = x - 2f(0)$ alors $f(z) = z + 2f(0) - 3f(0) = z - f(0)$. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve $f(0) = 0$ d'où la seule fonction qui vérifie les conditions de l'exercice est $f(x) = x$ pour tout réel x. Réciproquement la fonction identité vérifie l'équation initiale.

Il faut noter que la vérification est une étape très importante pour chaque problème, on peut perdre des points dans les compétitions olympiques si le candidat l'oublie ! Donc attention !!

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Solution. Soit f une solution du problème. La recherche de $f(0)$ semble judicieuse. On commence par substituer $x = 0$ et $y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. Ainsi toute solution du problème doit vérifier $f(0) = 0$. Par la suite, en subtituant $y = 0$, on obtient $xf(x) = f(0) = 0$, ce qui donne $f(x) = 0$. La dernière étape consiste à vérifier que la fonction nulle vérifie bien l'équation initiale, ce qui est immédiat.

La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *vérifie* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$ *et pour tous* $x, y \in [0,1]$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. *Calculer* $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Solution. Il est facile de trouver la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$. En effet, en substituant $x = 1$ et $y = 0$, on trouve

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1+0}{2}\right) = \frac{f(1)+f(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

puis on a

$$\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \frac{f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})}{2} \qquad (*)$$

On a besoin donc de calculer $f(\frac{2}{3})$, en substituant $x = y = \frac{1}{3}$, on trouve

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}{2} = 2f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Donc d'après $(*)$ on retrouve $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Trouver toutes les fonctions réelles f *qui vérifient pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy$$

Solution. En substituant $x = y = 0$, on tombe sur $0 = 0$ (rien de nouveau). En substituant $x = y$, on trouve $f(2x) - f(0) = 4x^2$, en prenant $t = 2x$ et en posant $f(0) = c$, avec c une constante, on a $f(t) = t^2 + c$. Réciproquement les fonctions $t \mapsto t^2 + c$ vérifient l'équation initiale.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ *qui pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ *vérifient*

$$xf(xy) = f(y)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Comme la valeur 0 n'est pas autorisée ici, la première substitution à essayer est $x = 1$ et/ou $y = 1$. On voit que la substitution $x = 1$ mène à une trivialité, donc inintéressante. Posons $y = 1$ dans l'équation de base. On obtient $xf(x) = f(1)$ pour tout $x > 0$, i.e. $f(x) = \frac{f(1)}{x}$. Comme $f(1)$ n'est qu'une constante on pose $f(1) = c$, on obtient par la suite $f(x) = \frac{c}{x}$ pour tout $x > 0$. La réciproque est évidente. Donc l'équation de base admet une infitnité de solutions de la forme $x \mapsto \frac{c}{x}$ avec c une constante strictement positive.

(Suisse 2005) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ *telles que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(yf(x)) \times (x+y) = x^2(f(x)+f(y))$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. À nouveau, nous travaillons dans $\mathbb{R}^{+*}$, donc nous allons plutôt nous orienter vers la valeur 1 pour les premières substitutions. Essayons de substituer $x = y = 1$ dans l'équation de base. Nous obtenons après calculs $f(f(1)) = f(1)\,(*)$ Nous ne pouvons donc pas immédiatement trouver la valeur de $f(1)$. Par contre, nous avons établi une propriété intéressante à propos de $f(1)$. Il est bon à présent de ne pas baisser les bras et de poursuivre les substitutions pour obtenir plus d'informations à propos de $f(1)$. Rappelons ici que $f(1)$ n'est rien d'autre qu'une constante, ainsi, il est parfaitement possible (et même souhaitable !) de tenter des substitutions de la forme $(x, y) = (1, f(1)), (x, y) = (f(1), 1)$ ou encore $(x, y) = (f(1), f(1))$ et d'utiliser la propriété $(*)$ pour simplifier le résultat. Dans notre cas, substituer $x = f(1)$ et $y = 1$ donne, en utilisant la propriété $(*)$ pour simplifier les doubles f et en factorisant l'équation résultante, $(f(1) - 1)(2f(1) + 1) = 0$. Donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1/2$. Comme le domaine d'arrivée est $\mathbb{R}^{+*}$, on exclut la seconde possibilité. On conclut que $f(1) = 1$. Afin d'utiliser cette information pour f, on substitue $x = 1$. Un simple réarrangement des termes donne $yf(y) = 1$, i.e. $f(y) = 1/y$. Réciproquement, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ vérifie l'équation de base.

(Ukraine 2017) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,:

$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))$$

Solution. Un lecteur attentif remarquera que si on compose les deux termes de l'équation, on trouve

$$f(f(x + f(f(y)))) = f(y + f(f(x))) = x + f(f(y))$$

On fixe y et on pose $t = x + f(f(y))$ avec t un réel quelconque (puisque x parcourt $\mathbb{R}$) , donc $f(f(t)) = t$. En remplaçant dans l'équation de base, on trouve que $f(x + y) = x + y$. On prend $y = 0$. D'où la seule fonction qui vérifie notre equation fonctionnelle est $f(x) = x$ pour tout réel x. N'hésitez pas à composer par f lorsque l'équation vous parait symétrique ! Un autre exemple qui porte sur une inégalité fonctionnelle dans $\mathbb{N}^*$, qui semble un peu difficile mais pas de panique, vous allez voir que c'est simple !

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) + yf(f(x)) \leq x(1 + f(y))$$

Solution. Il est vivement conseillé dans ce cas d'essayer de trouver la valeur de $f(1), f(f(1))$...
En prenant $x = y = 1$, on trouve $f(f(1)) \leq 1$ et puisque $f(f(1)) \neq 0$ car l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{N}^*$, alors $f(f(1)) = 1$. En prenant $x = 1, y = f(1)$, on trouve $f(1) \leq 1$ donc $f(1) = 1$. Pour $x = 1$, on obtient : $f(y) \geq y$ pour tout entier naturel non nul y. On remarque que $f(x) = x$ est solution, essayons de montrer que $f(x) \leq x$ pour conclure. En effet, pour $y = 1$, $x + f(x) \leq f(x) + f(f(x)) \leq 2x$ alors $f(x) \leq x$ d'après ce qui précède, on a $f(x) = x$ pour tout entier naturel non nul. Réciproquement, cette fonction vérifie les conditions de l'exercice.

On laisse au lecteur le soin de traiter cette question lorsque $\mathbb{N}$ est remplacé par $\mathbb{R}$, c'est le même principe de raisonnement !

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + x^2$$

Un petit problème ! Une seule substitution permet de le résoudre, essayer de la trouver avant de voir la solution !!!

Solution. On remplace x par $x - f(0)$ et y par $f(0)$, on trouve $f(x) = ax^2 + bx + c$. Reste à déterminer les constantes $a,$ bet c.

Déterminer toutes les fonctions : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x+y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x)$$

pour tous les réels x, y

Solution. Soit $P(x, y)$ l'assertion donnée. Notons que pour tous : $a, b \in \mathbb{R}$, on a :$\max(a, b)+\min(a, b) = a+b$. Or :

$$\begin{aligned} P(x,0)+P(0,x) \implies 2f(x) &= (\max(f(x),0)+\min(f(x),0)) + (\max(f(0)+x)+\min(f(0)+x)) \\ &= (f(x)+0) + (f(0)+x) \\ \implies f(x) &= f(0)+x. \end{aligned}$$

Soit :$f(0) = c$, alors : $f(x) = x + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Or $P(2c, 0)$ implique :$2c + 0 + c = \max(3c, 0) + \min(c, 2c)$. Si $c > 0$, alors $3c = 3c + c$, ce qui est impossible; si $c < 0$, alors $3c = 0 + 2c$, impossible aussi.

On conclut que : $c = 0$, donc : $f(x) = x$ pour tout réel x.

2 Substituons fonctionnelles

Dans le monde des mathématiques olympiques, les substitutions de base ne sont pas suffisantes pour résoudre une équation fonctionnelle. Cependant, il existe d'autres techniques qui permettent d'avoir des renseignements sur les fonctions recherchées. Les substitutions fonctionnelles sont largement utilisées pour résoudre certaines équations fonctionnelles.

Une substitution fonctionnelle consiste à remplacer une expression algébrique ou une fonction par une forme simple afin de simplifier l'équation fonctionnelle. Dans la suite, nous donnerons plusieurs exemples qui permettent de bien comprendre cette technique.

Exemples.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$y^2 f(x) - x^2 f(y) = y^2 - x^2$$

Solution. Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus. En divisant les deux membres de l'équation par x^2y^2 (on peut car x et y sont non nuls), on trouve

$$\frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(y)}{y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2} - \frac{1}{y^2}$$

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}$, on obtient par la suite $g(x) = g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction g est constante, i.e. $g(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc $f(x) = cx^2 + 1$. On vérifie aisément que toutes les fonctions $x \mapsto cx^2 + 1$ vérifient l'équation de base.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + 2f(x) + f(f(y) - x) = y$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Comme à notre habitude, commençons par quelques substitutions de base. Avec $x = 0$, nous obtenons $f(f(y)) = y - 2f(0)$.

Le terme le plus compliqué de l'équation de base est $f(f(y) - x)$. Il peut donc être judicieux d'essayer de s'en débarrasser. Le moyen le plus facile de fixer ce terme est de substituer $x = f(y)$. On obtient ainsi, après simplification des doubles f,

$$f(y) = -y + 3f(0)$$

Substituons encore $y = 0$ dans cette dernière équation, on obtient $f(0) = 0$. L'équation ci-dessus devient donc $f(y) = -y$. Réciproquement cette fonction vérifie l'équation de base.

➛ *Voyons à présent un exemple un peu moins habituel. Il s'agit d'une inéquation fonctionnelle. Pas de panique ! Le procédé pour résoudre un tel problème reste fondamentalement le même*

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) \geq f(xy)$$

Solution. Soit f une solution de l'inéquation ci-dessus. Il est toujours bon de commencer un problème d'équation fonctionnelle en identifiant les potentielles solutions. Pour ce faire, passez en revue les fonctions usuelles (les fonctions constantes $x \mapsto c$, les fonctions linéaires $x \mapsto ax + b$, en particulier $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$, $x \mapsto x^2, x \mapsto -x^2$, $x \mapsto c/x$, etc). Dans cet exemple, seules les fonctions constantes dans la liste ci-dessus satisfont l'inéquation. On va donc essayer de montrer que les solutions sont les fonctions constantes. Commençons naturellement par substituer $y = 0$. On obtient $f(x) \geq f(0)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si on arrive à établir l'inégalité inverse, c'est-à-dire $f(x) \leq f(0)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors on pourrait déduire l'égalité $f(x) = f(0)$ et on aura résolu le problème. Essayons donc de faire apparaître un $f(0)$ du côté gauche du signe $\geq$. La substitution naturelle est donc $y = -x$. Elle mène à

$$f(0) \geq f(-x^2)$$

Le problème à présent est que les nombres réels ne peuvent pas tous s'exprimer comme "moins le carré d'un autre". Ainsi, on peut conclure l'égalité $f(t) = f(0)$ à ce stade seulement pour les t qui peuvent s'écrire $t = -x^2$ pour un certain x dans $\mathbb{R}$. Il est facile de voir dans ce cas que si $t \leq 0$, alors $t = -\sqrt{t^2}$ et que cette même expression n'est pas dénie pour $t > 0$. Étant donné $t \leq 0$, on pose $x = \sqrt{-t}$ dans l'équation ci-dessus et on déduit que $f(0) \geq f(t)$. Combiné avec notre premier résultat, on a $f(t) = f(0)$ pour tout $t \leq 0$ dans $\mathbb{R}$. Une autre substitution qu'il est toujours bon d'envisager est le classique $x = y$. Dans ce cas, cela donne $f(2x) \geq f(x^2)$. En posant $x = -\sqrt{t}$, on obtient $f(0) = f(-2\sqrt{t}) \geq f(t)$. De la double inégalité et des résultats précédents, on peut finalement conclure que $f(t) = f(0)$ pour tout t réel. On vérifie aisément que toutes les fonctions constantes $x \mapsto c$ satisfont l'inégalité de départ.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2x + 29}{x - 2}\right) = 100x + 80$$

pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

Solution. Pour tout $x \neq 2$, on pose $r(x) = \dfrac{2x + 29}{x - 2}$. On commence par remarquer que $r(x) \neq 2$ pour tout $x \neq 2$ et que $r(r(x)) = x$ on substitue x par $r(x)$ dans l'équation de base. Ainsi on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(r(x)) = 100x + 80 \\ 2f(r(x)) + 3f(x) = 100r(x) + 80 \end{cases}$$

En éliminant $f(r(x))$, on obtient $f(x) = 60r(x) - 40x + 16$. Donc

$$f(x) = \frac{40x^2 - 216x - 1708}{2 - x}$$

On vérifie réciproquement que cette fonction vérifie l'équation de base.

(Suisse 2004) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. La première partie, comme très souvent, consiste à calculer la valeur de $f(0)$. Vous pouvez omettre cette partie dans un premier temps et y revenir quand on aura abordé le chapitre sur la *surjectivité*. Le schéma paraîtra alors beaucoup plus clair.
La substitution $x = y = 0$ nous donne $f(f(0)) = f(0)^2$. En substituant $x = 0$ et $y = -f(0)^2$, on obtient $f(f(-f(0)^2)) = 0$. Autrement dit, si l'on pose $a := f(f(-f(0)^2))$, alors $f(a) = 0$. Ce genre d'argument paraîtra beaucoup plus naturel après avoir abordé la surjectivité. Posons à présent $x = y = a$ pour obtenir $f(0) = a$. En appliquant f des deux côtés, on obtient $f(f(0)) = f(a) = 0$, sachant que $f(f(0)) = f(0)^2$, on obtient $f(0) = 0$. Ce résultat nous permet de trouver plus de condtions et de relations sur cette fonction. On obtient tour à tour $f(f(y)) = y$ et $f(xf(x)) = f(x)^2$. Utilisons la première égalité pour simplifier la seconde Comment faire apparaître des doubles f dans la seconde égalité ? L'idée est d'introduire une nouvelle variable grâce à la substitution $x = f(t)$, où t est un réel quelconque. Pour s'économiser une nouvelle variable, on effectue la manipulation suivante : on remplace tous les x par des $f(x)$ (à la place de remplacer les x par des $f(t)$). On obtient ainsi

$$f(f(x)f(f(x))) = f(f(x))^2$$

L'expression obtenue semble bien plus compliquée que l'originale, mais elle se laisse simplifier si l'on utilise le fait que $f(f(y)) = y$. On obtient

$$f(xf(x)) = x^2$$

Combiné avec l'égalité que l'on a transformée, on a $f(x)^2 = x^2$. Attention, cela ne signifie pas que l'on obtient deux fonctions solutions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$! On sait seulement que si f est une solution de l'équation de base, alors $f(x) = x$ pour certaines valeurs de x et $f(x) = -x$ pour les autres.
Rappelons que l'on sait que $f(0) = 0$. Donnons-nous donc $x_1 \neq 0$ tel que $f(x_1) = x_1$ et $x_2 \neq 0$ tel que $f(x_2) = -x_2$ et voyons si une combinaison des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ est une solution possible de l'équation.
Avec $x = x_1$ et $y = x_2$, on obtient $f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 + x_2$. D'autre part on sait que $f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 - x_2$ ou $f(x_1^2 - x_2) = -x_1^2 + x_2$. En combinant on obtient $x_2 = 0$ ou $x_1 = 0$. Ce qui contredit le fait que $x_1, x_2 \neq 0$. Ainsi, on a prouvé que f ne peut pas être une combinaison des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x$. Il ne nous reste donc que deux candidats pour être solution : les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$. Un calcul simple montre que ces deux fonctions vérifient l'équation de base.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)(f(x + y) - xy)$$

Solution. En manipulant un peu cette expression, on tombe sur $x(f(x)-x^2)+y(f(y)-y^2)=(x-y)((f(x+y)-(x+y)^2)$. On remarque qu'il faut introduire la fonction g définie par $g(x)=f(x)-x^2$. D'où, on se ramène à l'égalité suivante : $xg(x)-yg(y)=(x-y)g(x+y)$. C'est plus pratique et plus simple à manipuler ! on remarque que si $g(x)$ est solution alors $g(x)-f(0)$ est solution alors sans perte de généralité, on peut supposer que $g(0)=0$. A ce stade, on trouve en substituant x par $-x$ que g est impaire , puis en prenant $y \to -y$, on obtient : $(x-y)g(x+y)=(x+y)g(x-y)$ On pose $u=x-y$ et $v=x+y$, on obtient $ug(v)=vg(u)$ pour u, v non nuls, on trouve $\frac{g(u)}{u}=\frac{g(v)}{v}=cte$ donc $g(x)=ax+g(0)$. Finalement, $f(x)=x^2+ax+b$ avec $b=g(0)$. On laisse le lecteur vérifier si cette fonction est valable !

Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que pour tout $\in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Avant d'attaquer cet exercice, on voit qu'il est nécessaire de rappeler le binôme de Newton, une formule très utile.
Rappel. (Binôme de Newton) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Solution. On pose $g(x)=f(x)-x^n$, d'après le binôme de Newton, on a la relation suivante :

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+(x+y)^n-x^n-y^n \implies g(x+y)=g(x)+g(y)$$

Par récurrence $g(x)=xg(1), \forall x \in \mathbb{N}^*$. On pose $g(1)=f(1)-1=c\geq 0$, alors : $f(x)=cx+x^n$

Déterminer toutes les paires de fonctions (f, g) définies de $\mathbb{R}^{+,*}\to\mathbb{R}^{+,*}$ telle que pour tous $x, y>0$,

$$(f(x)+y-1)(g(y)+x-1)=(x+y)^2$$

è

$$(-f(x)+y)(g(y)+x)=(x+y+1)(y-x-1)$$

Solution. on introduit la fonction h à deux variables définie par $h(x,y)=\dfrac{g(y)+x}{x+y+1}$ alors les deux équations donnent :

$$(x+1+y)h(x,y)=f(x+1)+y-1$$
$$(x+1-y)h(x,y)=f(x)-y$$

On somme les deux égalités , on obtient : $(2x+2)\ h(x,y)=f(x+1)+f(x)-1$. Cela montre que $h(x,y)$ ne dépend que de x , on prend dans la première équation $y=1$ et $y=2$ respectivement , on trouve que $\frac{f(x+1)}{x+2}=\frac{f(x+1)+1}{x+3}$. d'où $f(x+1)=x+2$ implique $f(x)=x+1$ pour tout $x>1$. En remplaçant dans la premiére équation ,on trouve que $g(y)=y+1$ pour tout $y>0$. On remplaçe une deuxiéme fois, on obtient : $f(x)=x+1$ pour tout $x>0$. Réciproquement , ces fonctions sont valables .

(Maroc 2015) Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ on a

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x}$$

Solution. On remplace $x \to \dfrac{1}{1-x}$ puis $x \to \dfrac{x-1}{x}$, on obtient le système d'équations

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - x$$

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Après résolution, on aboutit au résultat suivant $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{2x(x-1)}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette fonction est bien solution du problème.

3 Égalisation de termes fonctionnels

Parfois, lorsqu'une équation fonctionnelle paraît plutôt robuste, il est bon de chercher certaines substitutions sophistiquées qui permettent d'égaler deux termes fonctionnels. En clair, si par une substitution astucieuse, on arrive à égaler deux membres additifs ou multiplicatifs de l'équation, alors cette dernière peut se simplier de manière décisive. Étudions tout de suite un exemple pour éclaircir ces propos.

Exemples.

(Suisse 1998) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

Solution. Soit f une fonction qui vérifie l'équation ci-dessus. Une démarche standard suggérerait de tenter les substitutions qui annuleraient les arguments des deux gros termes fonctionnels, à savoir $y = x^2$ et $y = f(x)$. Mais voyons ici une méthode plus directe. Existe-t-il une substitution qui égalerait les termes $f(f(x) + y)$ et $f(x^2 - y)$, de manière à ce qu'ils se simplifient mutuellement dans l'équation ? Pour cela, on doit avoir $f(x) + y = x^2 - y$. On peut donc prendre $y = (x^2 - f(x))/2$. Cette substitution donne

$$4f(x) \times \frac{x^2 - f(x)}{2} = 0$$

et cela pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit directement qu'étant donné une valeur x dans $\mathbb{R}$, alors on a soit $f(x) = 0$, soit $f(x) = x^2$. En particulier, $f(0) = 0$. Attention à nouveau, cela ne signifie pas que l'on a soit $f(x) = 0$ pour tout x, soit $f(x) = x^2$ pour tout x, mais bien que n'importe quel mélange de ces deux fonctions est potentiellement une solution ! Supposons qu'il existe deux réels distincts $x_1, x_2 \neq 0$ avec $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = x_2^2$. En substituant $x = x_1$ et $y = x_2$ dans l'équation de base, on obtient $f(x_1^2 - x_2) = x_2^2$. D'autre part, on a soit $f(x_1^2 - x_2) = 0$, soit $f(x_1^2 - x_2) = (x_1^2 - x_2)^2$. En combinant, on trouve deux cas; le premier est $x_2 = 0$ (Absurde) et le second cas est $x_1^2(x_1^2 - 2x_2) = 0$. Comme $x_1 \neq 0$, on a alors $x_1^2 = 2x_2$. Substituer $x = 0$ et $y = x_2$ nous donne $f(-x_2) = f(x_2) = x_2^2$. Si l'on répète l'argument ci-dessus avec la substitution $x = x_1$ et $y = -x_2$, alors on obtient de manière similaire $x_1^2 = 2x_2$ et donc $x_1 = x_2 = 0$ qui est également contradictoire.

Trouver toutes les fonctions $\mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$,

$$f(x^2 f(f(y)))x = f(x)f(y)$$

Solution. Ce problème, après quelques tentatives, se révèle hermétique aux méthodes de substitutions élémentaires. Nous travaillons ici avec un produit de termes fonctionnels. On peut tenter d'égaler ces termes fonctionnels, dans le but de pouvoir simplifier un peu cette équation. En substituant $x = \dfrac{1}{f(f(y))}$, alors $f(x^2 f(f(y))) = f(x)$, après simplification, on obtient $f(y) \times f(f(y)) = 1$ Notez que cette manipulation est licite parce que le domaine d'arrivée de f ne contient pas zéro. De manière similaire, avec $x = \sqrt{\dfrac{y}{f(f(y))}}$, on obtient $f(x^2 f(f(y))) = f(y)$. Ainsi après simplification

$$f\left(\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}\right) = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}} \qquad (*)$$

Une telle équation devrait vous faire bondir de votre chaise. L'étudiant qui aura pris le temps de chercher d'éventuelles solutions à l'équation de départ aura abouti à la conclusion que probablement seule la fonction $x \mapsto 1/x$ satisfait l'équation. Or, l'unique valeur positive z qui satisfait $z = 1/z$ est la valeur $z = 1$. Ainsi, il est probable qu'on puisse déduire quelque chose de décisif à ce niveau-là. Reprenons l'équation $f(y) \times f(f(y)) = 1$ et appliquons-la aux valeurs z telles que $f(z) = z$. L'équation devient $zf(z) = 1$. En utilisant à nouveau que $f(z) = z$, on en déduit $z^2 = 1$ et donc $z = 1$. Ainsi on a montré que si une valeur z satisfait $f(z) = z$, où f est une solution de l'équation de départ, alors $z = 1$. Si l'on combine ce résultat avec l'égalité $(*)$, on obtient $\sqrt{\dfrac{y}{f(f(y))}} = 1$ et donc $f(f(y)) = y$ pour tout y dans $\mathbb{R}^{*+}$ Finalement, en utilisant l'égalité précédente, l'équation $f(y)f(f(y)) = 1$ devient $f(y) = 1/y$. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation initiale.
➛ *Ce dernier exemple vous montre qu'il ne faut pas craindre les vilaines substitutions. Après avoir essayé les substitutions de base, tentez toujours d'égaler les termes fonctionnels de part et d'autre de l'équation. C'est un bon réflexe en matière d'équations fonctionnelles.*

4 Calcul double et multiple

Il existe des cas où l'on n'arrive pas à simplifier l'équation de manière significative. On tourne alors en rond avec des gros termes fonctionnels compliqués. On peut alors essayer de calculer une expression de deux façons fondamentalement différentes, un peu comme on s'est surpris à calculer $f(xf(x))$ de deux manières dans un exemple précédent. En combinant les résultats, on obtient souvent de nouvelles équations plus utiles que les précédentes.

De manière plus générale, on peut parfois construire un système d'équations dont les inconnues sont des termes fonctionnels que l'on souhaite calculer. Il faut alors faire apparaître ces termes de manière significativement différente pour ne pas obtenir de résultats triviaux en résolvant le système engendré.
Voyons quelques exemples permettant de bien découvrir cette technique.

Exemples.

Trouver toutes les fonctions $f : [-1, +\infty[\to [-1, +\infty[$ telles que pour tous $x, y > 0$

$$f(xf(x-1) + yf(y-1)) = xf(3x-1)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Si l'on substitue naturellement $x = 1$, on trouve $f(f(0) + yf(y-1)) = f(2)$ pour tout $y > 0$. En parallèle la sustitution $y = 1$ mène à $f(xf(x-1) + f(0)) = xf(3x-1)$ pour tout $x > 0$. Ainsi en faisant une égalisation on trouve $xf(3x-1) = f(2)$, i.e. $f(3x-1) = f(2)/x$. Étant donné $t > -1$, on substitue $x = (t+1)/3$ et on obtient par la suite $f(t) = \frac{3f(2)}{t+1}$. Réciproquement et aprés un calcul on tombe sur $\frac{c}{2c+1} = \frac{c}{3}$. On tire que $c \in \{0, 1\}$. Donc les fonctions qui vérifient l'équation de base sont la fonction nulle et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$. . On n'a pas besoin ici de vérifier que ces deux fonctions sont solutions car on les a trouvées en essayant quelles valeurs de c sont effectivement solutions de l'équation de départ. Si vous n'êtes pas sûrs, mieux vaut vérifier une fois de trop ses solutions qu'oublier de le faire.

➛*L'équation fonctionnelle de l'exemple suivant n'a qu'une seule variable libre. De telles équations sont en principe difficiles car il y a peu de substitutions raisonnables à faire et moins de degrés de liberté.*

Trouver toutes les fonctions réelles f satisfaisant les trois conditions suivantes

1. $f(-x) = -f(x)$ *pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$;

2. $f(x+1) = f(x) + 1$ *pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$;

3. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$.

Solution. Soit f une fonction qui vérifie le système d'équations ci-dessus. En substituant $x = 0$ dans (a) il s'en suit directement que $f(0) = 0$. L'équation (b) fournit la relation de récurrence (Voir le principe de récurrence dans le cours des stratégies de base) $f(n+1) = f(n)+1$ qui, combiné à $f(0) = 0$, nous permet de conclure que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il nous faut maintenant une idée pour avancer, car on ne conclura rien de plus avec des substitutions de base. L'idée est de combiner les équations (b) et (c) pour calculer un même terme fonctionnel de deux manières différentes. On cherche donc une grandeur que l'on peut écrire à la fois sous la forme $a+1$ et $1/b$. Il y a bien sûr beaucoup de possibilités, mais les différentes expressions qui apparaissent dans les conditions de base suggèrent de s'intéresser à $1 + 1/x$ pour $x \neq 0, -1$. D'une part on obtient avec (b) et en utilisant ensuite (c),

$$f\left(\frac{1}{x}+1\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \frac{f(x)}{x^2} + 1 \qquad (*)$$

D'autre part, avec (c), on a aussi

$$f\left(\frac{1}{x}+1\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x}{1+x}}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)(x+1)^2}{x^2}$$

Continuons nos calculs, il faut calculer le terme $\frac{x}{1+x}$, pour s'en sortir on le met sous sa forme canonique, on obtient

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{f(x)+1}{(x+1)^2}$$

En somme on a ainsi

$$f\left(\frac{1}{x}+1\right) = \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{x^2}$$

Une comparaison avec $(*)$ donne immédiatement $f(x) = x$ pour tout $x \neq 0, -1$. Cependant on connaît déjà que $f(0) = 0$ et $f(-1) = -1$. Donc $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction remplit tous les équations du système proposé.

(CSO 2001) Trouver toutes les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 f(x + y)$$

Solution. Soit f une fonction solution de l'équation ci-dessus. Le côté gauche est invariant si l'on remplace x par $-x$. Il en va donc de même pour le côté droit. Cela fournit l'équation

$$(x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(y - x)$$

On aimerait maintenant substituer x et y de telle manière que $x+y$ prenne toutes les valeurs réelles pendant que xy reste constant, par exemple égal à 1. On y arrive en posant $x = (t - 1)/2$ et $y = (t + 1)/2$ avec t un nombre réel arbitraire. L'équation devient $f(t) = f(1)t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Toutes les solutions sont donc de la forme $x \mapsto cx^2$ avec c une constante réelle. Remplaçons dans l'équation de base pour déterminer d'éventuelles contraintes sur c. L'équation devient

$$c(x^2 + cy^2)^2 = c(x^2 - y^2)^2$$

pour tous x, y dans $\mathbb{R}$. Avec $x = y = 1$ on obtient $c(c+1)^2 = 0$ et donc $c = 0$ ou $c = -1$. Réciproquement on a bien l'égalité $c(x^2 + cy^2)^2 = c(x^2 - y^2)^2$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc la fonction nulle et la fonction $x \mapsto -x^2$.

(APMO 2014) Soit $S = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ l'ensemble des entiers ≥ 2. Existe t-il une fonction $f : S \to S$ telle que pour tous $a, b \in S$ avec $a \neq b$,

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2)$$

Solution. Pour résoudre cet exercice nous allons compter de deux manières différentes la même quantité. Notons qu'on a

$$\begin{aligned} f(2)f(2^2)f(2^3)f(2^4)f(2^5) &= f(2^3)f(2^4)f(2^5)f(2^6) \\ &= f(2^5)f(2^6)f(2^14) \\ &= f(2^{14})f(2^{22}) \\ &= f(2^{72}) \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} f(2)f(2^2)f(2^3)f(2^4)f(2^5) &= f(2^1)f(2^2)f(2^4)f(2^{16}) \\ &= f(2^2)f(2^4)f(2^34) \\ &= f(2^4)f(2^{72}) \end{aligned}$$

Donc par comparaison des deux égalités obtenus on trouve $f(2^4) = 1$, ce qui est impossible.

5 ▌ Symétries et variables additionnelles

Parfois on est face à une équation fonctionnelle dont l'un de ses deux membres est symétrique par rapport à ses variables, ou nous pouvons après une certaine démarche obtenir une symétrie. En échangeant x par y nous obtenons une nouvelle condition, ce qui pourrait s'averer utile.
Dans d'autres cas, nous pourrions avoir besoin d'ajouter une variable supplémentaire pour obtenir une symétrie. Dans la suite nous donnerons plusieurs exemples permettant d'illustrer cette technique.

Exemples.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xy) = f(x)y^2 + f(y) - 1$$

Solution. Le membre de gauche est symétrique par rapport aux variables a et y, alors il en est de même pour le membre de droite. On en déduit $f(x)y^2 + f(y) - 1 = f(y)x^2 + f(x) - 1$. Alors, $f(x)(y^2 - 1) = f(y)(x^2 - 1)$ et alors pour $x, y \neq \pm 1$ on a $\dfrac{f(x)}{x^2 - 1} = \dfrac{f(y)}{y^2 - 1}$. Ainsi, $f(x) = c(x^2 - 1)$ pour tout $x \neq \pm 1$. C'est encore vrai pour $x = \pm 1$ puisque $f(\pm 1)(y^2 - 1) = f(y)((\pm 1)^2 - 1) = 0$, . En remplaçant dans l'équation de base on trouve après un calcul $c = 1$, par la suite la seule solution de l'équation fonctionnelle mise en question est $x \mapsto x^2 - 1$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient

$$f(x)f(y - f(x)) = 4xy - 2f(x^2)$$

Solution. On peut aisément rendre le membre de gauche symétrique en deux variables, il suffit de substituer y par $y + f(x)$. On obtient

$$f(x)f(y) = 4x(y + f(x)) - 2f(x^2) = 4xy + 4xf(x) - 2f(x^2)$$

Le membre de gauche étant symétrique, il en est de même pour le membre de droite, on obtient ainsi $4xf(x) - 2f(x^2) = 4yf(y) - 2f(y^2)$; i.e. la fonction $x \mapsto 4xf(x) - 2f(x^2)$ est constante, on a alors l'existence d'une constante a telle que $4xf(x) - 2f(x^2) = a$. En particulier, on a $f(x)f(y) = 4xy + a$. On va montrer que $a = 0$. Si on suppose que $a \neq 0$, alors $f(x)f(-\frac{a}{4x}) = 0$ donc si $f(x) \neq 0$ alors $f(-\frac{a}{4x}) = 0$. En particulier $f(y_0) = 0$ pour un certain y_0, ceci est impossible puisque $4xy_0 + a = f(x)f(y_0)$ pour tout x si $a \neq 0$. On conclut que $f(x)^2 = 4x^2$, doù $f(x) = \pm 2x$. L'identité $f(x)f(y) = 4xy$ implique immédiatement que $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = -2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La réciproque est immédiate.

Déterminer les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(y + f(x)) = f(x)f(y) + f(f(x)) + f(y) - xy$$

Solution. On substitue $y = 0$, on obtient $f(x)f(0) + f(0) = 0$, donc soit $f(0) = 0$ ou $f(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le second cas est impossible en remplaçant dans l'équation de base. On substitue y par $f(y)$ dans l'équation de base de sorte que le membre gauche soit symétrique en x et y. Par suite le membre de droite est également symétrique. Un réarrangement donne

$$\frac{f(f(x)) + x}{x} = \frac{f(f(y)) + y}{y} = \lambda$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = kf(x) - x$. Ainsi, l'équation de base devient $f(y + f(x)) = f(x)f(y) + kf(x) - x + f(y) - xy$. On note $f(-1) = b$, alors en prenant $y = -1$ dans la dernière équation, on trouve $f(f(x) - 1) = (b + k)f(x) + b$ et en substituant y par $f(y) - 1$ on obtient

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y) - 1) &= ((k + b)f(y) + b)f(x) + kf(x) - x + (k + b)f(y) + b - xf(y) + x \\ &= (k + b)[f(x)f(y) + f(x) + f(y)] + b - xf(y) \end{aligned}$$

Cette équation implique que $xf(y) = yf(x)$, doù $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$ pour tout $x, y \neq 0$, par suite $f(x) = cx$ qui est vrai aussi pour $x = 0$ en vertu de $xf(y) = yf(x)$ (en prenant $y = 0$ et en laissant x libre). Maintenant en prenant $f(x) = cx$ dans l'équation de base on obtient facilement $c = 1$ ou $c = -1$. En conclusion, les deux seules solutions sont l'identité et la fonction $x \mapsto -x$.

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$:*
>
> $$f(f(x) + f(y)) = f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y^2)$$

Solution. Le côté de gauche est symétrique, donc

$$f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y^2) = f(y^2) + 2y^2 f(x) + f(x^2)$$

alors

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2}$$

doù $f(x) = cx^2$.

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*
>
> $$f(f(x) + f(y)) = f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y)^2$$

Solution. De la même façon que l'exercice qui précède, on obtient :

$$f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y)^2 = f(y^2) + 2y^2 f(x) + f(x)^2$$

En prenant $y = 0$ et $y = 1$ respectivement, on trouve le système suivant :

$$f(x^2) + x^2 f(0) + f(0)^2 = f(0) + f(x)^2$$
$$f(x^2) + 2x^2 f(1) + f(1)^2 = f(1) + 2f(x) + f(x)^2$$

doù $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$ pour tout réel x. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les deux égalités ne peuvent plus occurer en même temps !

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*
>
> $$f(xf(y)) - x = f(xy)$$

Solution. Malheureusement l'égalité $f(xf(y)) - x = f(yf(x) - y$ n'est pas intéressante ! Or , si on remplace x par $f(x)$, on trouve :

$$f(f(x)f(y)) = f(x) + f(yf(x)) = f(x) + y + f(xy)$$

Donc, cette expression est symétrique . Alors :

$$f(x) + y + f(xy) = f(y) + x + f(yx)$$

doù : $f(x) - x = f(y) - y = c$, alors $f(x) = x + c$ En remplaçant dans léquation de base , on trouve $c = 1$.

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$:*
>
> $$f(f(x) + y) = x + f(f(y))$$

Solution. En remplaçant y par $f(y)$, on tombe sur une relation symétrique :

$$f(f(x)+f(y)) = x + f(f(y)) = y + f(f(x))$$

Donc $f(f(x)) = x + c$, exploitons cette relation dans l'équation de base avec $x \to f(x)$ alors, on obtient $f(x+y+c) = x+y+c$ d'où :$f(x) = x$.

➛*Dans la suite, on discutera un truc important : la méthode des trois variables. Cette méthode consiste à introduire une nouvelle variable libre pour se débarasser des restrictions de l'équation fonctionnelle. Dans certains cas, cette méthode est trés puissante !*

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$:*
>
> $$f(x+y)^2 = f(x)^2 + 2f(xy) + f(y)^2$$

Solution. On introduit la variable z, comme ce qui suit :

$$f(x+y+z)^2 = f(x)^2 + 2f(x(y+z)) + f(y+z)^2$$

et puisque $f(y+z)^2 = f(y)^2 + 2f(yz) + f(z)^2$ alors ,on obtient :

$$f(x+y+z)^2 = f(x)^2 + f(y)^2 + f(z)^2 + 2f(x(y+z)) + 2f(yz)$$

et par symétrie du côté gauche , on déduit que :

$$f(yz) + f(xy+zx) = f(xz) + f(yx+yz) = f(yz) + f(xy+yz)$$

Or, il est évident que le système déquations : $a = yz, b = xz, c = xy$ admet des solutions . Alors :

$$f(a) + f(b+c) = f(b) + f(a+c) = f(c) + f(a+b)$$

Fixons b, c , on obtient :

$$f(a+c) - f(a) = f(a+b) - f(b)$$

Autrement dit

$$f(x+c) = f(x) + f(b+c) - f(b)$$

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$, telle que $g(c) = f(b+c) - f(b)$ Alors $f(x+y) = x + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ Le reste de l'exercice est laissé comme exercice pour le lecteur !

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$:*
>
> $$f(x+3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y$$

Solution. On a $f(x+3f(y+z)) = f(x) + f(y+z) + 2(y+z)$. Mais , on veut calculer le côté gauche de deux façons différentes .Pour cela , on remplace z par $3f(z)$. D'où

$$f(x+3f(y+3f(z))) = f(x+3f(y)+3f(z)+6z) = f(x+3f(y)+6z)+f(z)+2z = f(x+6z)+f(y)+2y+f(z)+2z$$

D'autre part, le côté droit est équivalent à

$$f(x) + f(y+3f(z)) + 2y + 6f(z) = f(x) + f(y) + f(z) + 2z + 2y + 6f(z)$$

Alors $f(x+6z) = f(x) + 6f(z)$. On remplace x par $6x$:$f(6x+6z) = f(6x) + 6f(z) \implies 6f(z) = f(6z) + c$ avec c une constante. Alors $f(x+z) = f(x) + f(z) + c$.

Dans la suite des chapitres, on verra que cette fonction est linéaire (voir le chapitre 3).
➛*Si on affronte une équation du genre*

$$f(x+g(y)) = g(y) + h(x, y)$$

Il est vivement conseillé de comparer les expressions $P(x, y+g(z))$ et $P(x+h(x,z), y)$

6 Itérées d'une fonction

Avant de commencer cette section, il est primordiale d'être familiarisée avec la notion de suite (Voir le cours des suites sur le site officiel de *Math&Maroc*), et la résolution des relations des récurrences (Voir le cours concernant la résolution des relations récurrentes dans le site officiel de *Math&Maroc*).

Soit X un ensemble non vide, et $f : X \to X$ une fonction. La suite des itérées de f est la suite de fonctions $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $x \in X$, $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$ et pour tout $n \geq 1$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

Certaines équations fonctionnelles font apparaître des itérées. L'idée est alors parfois pour x fixé, de considérer la suite (x_n), telle que $x_n = f^n(x)$. L'ensemble de tout les x_n est appelé *orbite* de x par f. L'étude des propriétés de cette suite permet parfois d'en déduire les propriétés de f. Voyons des exemples à propos.

Exemples.

(Proposé OIM 1992) Soient a et b deux réels strictement positifs. Prouver qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. L'équation fonctionnelle portant sur des itérées, il peut être judicieux de considérer la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ un réel donné, et pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. On obtient $x_{n+2} + ax_{n+1} - b(a+b)x_n = 0$. C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Léquation $X^2 + aX - b(a+b) = 0$ admet donc deux solutions distinctes qui sont b et $-(a+b)$. Il existe donc deux constantes λ et μ telles que pour tout $n \geq 0$, $x_n = \lambda b^n + \mu(-1)^n(a+b)^n$. On va prouver que $\mu = 0$, supposons le contraire, puisque $a, b > 0$, on a $\mid b^n \mid \leq \mid (-1)^n(a+b)^n \mid$ et donc pour n suffisamment grand il serait possible d'avoir $x_n < 0$, ce qui contredit le fait f est à valeurs positives. Donc $\mu = 0$. Mais alors, pour $n = 0$ et $n = 1$, il vient respectivement $x_0 = x = \lambda$ et $x_1 = f(x) = \lambda b$. Doù $f(x) = bx$, ceci assure l'unicité. On vérifie aisément que la fonction $x \mapsto bx$ est solution du problème.

Déterminer toutes les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$f(2x - f(x)) = x$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. Puisque f est définie sur $[0,1]$, on note alors que pour tout $x \in [0,1]$ on a $2x - f(x) \in [0,1]$. Posons $g : x \mapsto 2x - f(x)$. La fonction g est définit et à valeurs dans $[0,1]$. De plus pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(g(x)) = x$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note g^n la n-ième itérée de g. Pour $x \in [0,1]$, on a $g(g(x)) = 2g(x) - f(g(x)) = 2g(x) - x$. Par une récurrence sans difficulté on prouve alors que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x) = ng(x) - (n-1)x$. Supposons qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) \neq x_0$. D'après ci-dessus, on déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(x_0) = \infty$ et ceci contredit le fait que g est bornée. Donc $g(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$, i.e. $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. On laisse le soin au lecteur pour vérifier que cette fonction est bien solution du problème.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un entier. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $n \geq m \geq 0$,

$$f(n+m) + f(n-m) = f(an)$$

Solution. Avec $m = 0$ on obtient $2f(n) = f(an)$, en particulier $f(0) = 0$. En prenant maintenant $m = 1$ on obtient la relation de récurrence $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$, avec $a_n = f(n)$, $n \geq 0$. L'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0$ admet une racine double $x_1 = x_2 = 1$, et par suite $f(n) = \alpha + \beta n$. Comme $0 = f(0) = \alpha$ alors on voit que $f(n) = \beta n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la suite, pour tous $n \geq m$, $\beta(n+m) + \beta(n-m) = \beta an$. On en déduit que $\beta(a-2) = 0$. Alors pour $a \neq 2$, l'unique solution est la fonction nulle, et pour $a = 2$ les solutions sont les fonctions $f(n) = \beta n$ avec β une constante.

(Bulgarie 1996) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n$$

Solution. Pour n fixé on pose $a_0 = n$ et $a_{k+1} = f(a_k)$ avec $k \in \mathbb{N}$. L'équation fonctionnelle implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $3a_{k+1} - 2a_{k+2} = a_k$. L'équation caractéristique $2x^2 - 3x + 1 = 0$ admet pour racines 1 et $1/2$, par suite $a_k = c_0 + c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Comme a_k et c_0 sont des entiers, il s'en suit que 2^k divise c_1 pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier $a_1 = a_0$, i.e. $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7 Savoir exploiter des particularités

On l'a déja dit, toute information sur la fonction cherchée est bonne et certaines d'elles peuvent même indiquer les démarches à suivre vers la solution: fonctions définies et/ou à valeurs sur les entiers, continuité, monotonie, polynômes... Dans ce dernier cas il faut surtout pas oublier qu'une fonction polynômiale n'admet qu'une infinité de racines.

Exemples.

(Maroc 2012) Déterminer toutes les fonctions polynômiales qui vérifient pour tous $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

Solution. Le lecteur attentif remarquera que si P est une solution, alors il en est de même pour $P + c$ avec c une constante réelle. On remarque aussi que la fonction $x \mapsto x^2$ est une solution. On va alors montrer que les seules solutions de l'équation fonctionnelle mise en question sont les fonctions $x \mapsto x^2 + c$ où c est une constante réelle. L'idée clé est de montrer que la fonction polynômiale $P(x) - x^2$ est constante. Pour s'en sortir on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x) - x^2$. On obtient

$$Q(x+1) + (x+1)^2 = P(x+1) = P(x) + 2x + 1 = Q(x) + x^2 + 2x + 1$$

Par suite, $Q(x+1) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la fonction polynômiale Q est constante (le polynôme $Q(x) - Q(0)$ admet une infinité de racines) et c'est ce qu'il fallait démontrer.

(Putnam 1971) Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$$

Solution. Puisque $P(0) = 0$, on déduit que $P(1) = 1$ puis $P(5) = 5$,... L'idée est donc de considérer la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Une récurrence immédiate montre que la suite (a_n) est strictement croissante et que pour tout entier $n \geq 0$, $P(a_n) = a_n$. Cela entraîne que le polynôme Q, défini par $Q(x) = P(x) - x$ admet une infinité de racines distinctes, et est donc le polynôme nul. Donc $P(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La réciproque est immédiate.

Déterminer les fonctions $f : [0, +\infty[$ telles que $f(0) = 0$ et pour tout $x > 0$,

$$f(x) = 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right)$$

Solution. Si $0 < x < 2$, alors $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 0$ et par la suite $f(x) = 1 + 5f(0) - 6f(0) = 1$. Si $2 \leq x < 4$, alors $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$ et $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 0$. D'où $f(x) = 1 + 5f(1) - 6f(0) = 6$. Il s'en suit par une simple récurrence sur n, que pour $x \in [2^n, 2^{n+1}[, n \geq 0$ où $(a_n)_n$ est la suite définie par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6, \quad a_n = 1 + 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

pour $n \geq 2$. Pour résoudre cette relation de récurence, doit modifier la suite $(a_n)_n$ afin de tomber sur une relation de récurence habituelle, pour s'en sortir, on pose $b_n = a_n + \lambda$ et on cherche λ de façon à ce qu'on a $b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$. i.e. $a_n + \lambda = 5a_{n-1} + 5\lambda - 6a_{n-2} - 6\lambda$, i.e. $\lambda = -1/2$. Donc en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \frac{1}{2}$, on retrouve

$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{11}{2}, \quad b_n - 5b_{n-1} + 6b_{n-2} = 0$$

pour $n \geq 2$. L'equation caractéristique admet deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$, donc $b_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$. Aprés détermination de α et β par les conditions initiales $b_0 = 1/2$ et $b_1 = 11/2$, on trouve $b_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+3}}{2}$ et par la suite $a_n = b_n + \frac{1}{2} = \frac{1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}}{2}$. En conclusion et après vérification l'unique solution du problème est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad x \in]0, 2[\\ \dfrac{1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}}{2} \quad \text{si} \quad x \in [2^n, 2^{n+1}[, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

8 Exercices

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + f(x + y) + f(x + 2y) = 6(x + y)$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$$

Trouver le nombre des solutions non nulles de l'équation $f(x) = f(-x)$.

3. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(1) = 1$ et pour tous $a, b \in \mathbb{N}$,
$$f(a+b) = f(a) + f(b) - 2f(ab)$$
Calculer $f(1431)$.

4. Trouver toutes les fonctions réelles f telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

5. Trouver toutes les fonctions réelles f vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$yf(2x) - xf(2y) = 8xy(x^2 - y^2)$$

6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$

7. Trouver toutes les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x+y) = f(x) + y$$

8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(xy) + f(y) = f(xf(y)) + y$$

9. Déterminer toutes les fonctions réelles tel que pour tous $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x + f(1)) = x + 1$$

10. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$f(xf(y^2)) = xyf(x)^2 f(f(y))$$

11. Montrer qu'il n'existe pas une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) = f(-x) + 1$$

12. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x)f(y) = f(x-y)$$

13. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

14. (Slovénie 1999) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

15. (Suisse 2010) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y)$$

16. (Japon 2012) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y)$$

17. (Maroc 1987) Soient a et b deux réels distincts tels que $a+b \neq 0$. Trouver l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$af(x) + bf(1-x) = x$$

18. (Maroc 1998) Déterminer toutes les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$$

19. (Maroc 2005) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

20. (OIM 2008) Déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telles que pour tous $x, y, z, t > 0$ avec $xy = zt$,
$$\frac{f(x)^2 + f(y)^2}{f(z^2) + f(t^2)} = \frac{x^2 + y^2}{z^2 + t^2}$$

21. (OIM 2010) Déterminer toutes réelles f telles que l'égalité
$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$
est vraie pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

22. (Maroc 2018) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,
$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{x-1}\right) = x$$

23. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + n = 3f(n)$$

24. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2n + 2016 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2017$$

25. (A4, 2007) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

26. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$
$$f(x^3) - f(y^3) = (x - y)(f(x^2) + f(xy) + f(y^2))$$

27. On dit qu'un entier naturel n est **Intéressant** s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$$f(x) - f(x + y) \leq y^n \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
Déterminer tous les entiers intéressants.

28. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x + y) \geq f(x).f(y) \geq 2018^{x+y}$$

29. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+}$
$$x(f(x) + f(y)) = f(x)f(x + y),$$

30. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$$

31. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$$

32. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2y.$$

33. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(f(x) - y) \leq xf(x) + f(y)$$

34. Montrer quil n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$
$$f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2z.$$

35. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y > 0$
$$f(f(x) + y) + f(x + y) = 2x + 2f(y),$$

36. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(f(x + y)) \geq f(f(y)) + yf(x)$$

37. (Bulgarie 2004) Déterminer tous les réels $k > 0$ pour lesquels, il existe une fonction à valeurs réels $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes:
$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$;
$f(x, y) = f(y, x)$;
$f(x, 1) = x$;
$f(zx, zy) = z^k f(x, y)$, pour tous $x, y, z \in [0, 1]$

9 Solutions des exercices

1. On substitue $y = 0$ pour obtenir $f(x) = 2x$. On vérifie facilement la réciproque.

2. On remplace x par $1/x$ pour obtenir $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$. On élimine $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour obtenir $f(x) = \frac{2 - x^2}{x}$. Réciproquement cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle. Maintenant $f(x) = f(-x)$ équivaut à $x = \pm\sqrt{2}$. Donc le nombre de solutions de l'equation $f(x) = f(-x)$ est 2.

3. En substituant $b = 1$, on trouve $f(a + 1) = f(a) + f(1) - 2f(a) = 1 - f(a)$. Donc $f(2) = 1 - f(1) = 0$ et $f(3) = 1 - f(2) = 1$ et $f(4) = 1 - f(3) = 0$... par la suite $f(1431) = 1$.

4. On remplace x par $1 - x$ dans l'équation de base pour obtenir $f(1 - x) + (1 - x)f(x) = 1 + (1 - x)$. En éliminant $f(1 - x)$ du systéme des équations, il vient $f(x) = 1$, la réciproque est immédiate.

5. En substituant $y = 0$, il vient $f(0) = 0$. On divise les deux membres de l'équation fonctionnelle par xy pour obtenir $\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(2y)}{2y} = 4x^2 - 4y^2$. D'ou $\frac{f(2x)}{2x} - 4x^2 = c$. Donc pour tout $x \neq 0$ on a $f(x) = x^3 + cw$, cette égalité reste vraie pour $x = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + cx$. On laisse le lecteur vérifier la réciproque.

6. On procède comme dans ce qui précède pour résoudre ce genre d'équations fonctionnelles. Aprés un remplacement de x par $-x$ et une élimination du terme $f(-x)$, on tombe sur $f(x) = 1/x$. Il est facile de vérifier que cette fonction est bien une solution.

7. C'est immédiat en donnant à x la valeur 0. On obtient $f(y) = y + c$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ où c est une constante. La réciproque est immédiate.

8. En substituant $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. En substituant $x = 0$ et en gardant y libre, on trouve $f(y) = y + f(0) = y$. La réciproque est facile à vérifier.

9. En remplaçant x par $x - f(1)$, on trouve que les fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle proposée sont $x \mapsto x + c$ où c est une constante réelle. On laisse au lecteur le soin de vérifier.

10. On pose $x = y = 1$, on trouve $f(1) = 1$. Puis, pour $y = 1$ on obtient $f(x) = xf(x)^2$. Donc $f(x) = x$ pour tout $x > 0$.

11. On remplace x par $-x$, on trouve $f(-x) = f(x) + 1$ .Or $f(x) = f(-x) + 1$,on somme les deux égalités et on obtient 0=2. Absurde !

12. on pose $x = y = 0$ alors $f(0)^2 = f(0)$ .Donc $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$. Pour $x = y$: $f(x)^2 = f(0)$ si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle et si $f(0) = 1$, on trouve $f(x)^2 = 1$. Reste à montrer qu'il n'existe pas deux réels x, y telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = -1$ pour conclure .

13. pour x non nul, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. En divisant l'égalité par $x^2 - y^2$ pour x, y différent. On trouve : $g(x + y) - g(x - y) = 4xy$ Pour $(x, y) \to (\frac{x}{2}, \frac{x}{2})$, on trouve $g(x) = x^2 + g(0)$, puis conclure.

14. prendre $(x, y) \to (x + f(0), 0)$ puis conclure !

15. On prend $x = y = 0$ alors $f(2f(0)) = f(0)$, pour $x = y = 2f(0)$, on trouve $f(2f(2f(0))) = 5f(0) = f(2f(0)) = f(0)$ alors $f(0) = 0$ Pour $y = 0$, on trouve : $f(f(x)) = f(x)$ Par injection (voir Chapitre) : $f(x) = x$ est la seule solution !

16. Pour $x = y$: $f(f(x)f(0)) = x^2 - xf(x)$ pour $x = y = 0$; $f(f(0)^2) = 0$ et pour : $x = f(0)^2$ et $y = 0$, on trouve : $f(0)^4 = f(f(f(0)^2)^2) = f(f(0)^2) = 0$ donc $f(0) = 00$. Puis conclure .

17. Remplacer x par $1 - x$ puis résoudre le système pour aboutir à l'expression de $f(x)$.

18. Montrer que $f(x^2 + y) = f(y^2 + x) = f(x) + f(y)$ puis conclure que f est constante .

19. on pose $x = y = 1$ et on obtient $f(1) = 1$ .Puis pour $y = 1$, on trouve $f(x) = \frac{2}{x}$

20. pour $x = y = z = t = 1$, on trouve $f(1) = 1$ et pour $z = t = \sqrt{x}$ et $y = 1$, on obtient $\frac{f(x)^2+1}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x}$. puis conclure !

21. On pose $x = y = 0$, alors : $f(0) = 0$ ou $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

   • Si $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, on pose : $y = 0$, on trouve : $f(x) = f(0)$, alors f est constante. En remplaçant dans l'équation d'origine :$f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ or $f(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$, avec $c \in \{1, 2\}$.

   • Si $f(0) = 0$, pour $x = y = 1$ on trouve $f(1) = 0$ or $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.

   Pour $f(1) = 0$, on pose $x = 1$ pour $f(y) = 0 \ \forall y$, est une solution.

   Pour $\lfloor f(1) \rfloor = 1$, la substitution : $y = 1$ implique $f(\lfloor x \rfloor) = f(x), \ (*)$.

   on pose : $x = 2, y = \frac{1}{2}$ dans l'équation de base : $f(1) = f(2)\lfloor f(\frac{1}{2}) \rfloor$. Or, daprès : $(*)$ on a : $f(\frac{1}{2}) = f(0) = 0$, donc $f(1) = 0$ contradiction avec : $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.

   Doù $f(x) = 0, \ \forall x$ or $f(x) = c, \ \forall x, \ c \in [1, 2]$.

22. Les fonctions $\dfrac{x-3}{x+1}$ et $\dfrac{x+3}{1-x}$ sont bijectives.

   Soit $y = \dfrac{x-3}{x+1} \Rightarrow \dfrac{x+3}{1-x} = \dfrac{y+3}{1-y}$, alors $f\,(y) + f\left(\dfrac{y-3}{y+1}\right) = \frac{y+3}{1-y}$,

   De la même façon, pour $y = \frac{x+3}{1-x}$, donc: $f((y) + f(\left(\frac{y+3}{1-y}\right) = \frac{y-3}{y+1}$,$\forall y \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$. On déduit que $2f(y) + y = \dfrac{y+3}{1-y} + \dfrac{y-3}{y+1}$. D'oû $f(y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y+3}{1-y} + \dfrac{y-3}{y+1} - y\right)$,$\forall y \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

23. Comme dans les exemples précédents, on considère la suite (a_k) définie par $a_0 = n$ et $a_k = f^k(n)$.On obtient la relation récurrente suivante :

$$a_k + a_{k-1} + a_{k-3} = 3a_{k-2}$$

Considérons l'ensemble $S = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$, puisque S est une partie de $\mathbb{N}$,alors elle admet un minimum a_j.

On a

$$a_k + a_{k-1} + a_{k-3} = 3a_{k-2} \geq 3a_j$$

avec égalité si et seulement si $a_k = a_{k-1} = a_{k-3}$

Or, pour $k = j + 3$, on obtient l'égalité. Donc $a_j = a_{j+1} = a_{j+2} = a_{j+3}$.

Par une double récurrence, on obtient : $a_k = a_j, \forall k \geq j$ et $a_k = a_j \forall k < j$.

Il s'en suit que : $a_n = a_0 = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dans les chapitres suivants, notamment le chapitre de l'injectivité, on verra une autre méthode pour résoudre ce problème.

24. On définit la suite des entiers positifs $(a_n)_{n\geq 0}$ comme suit : $a_0 \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$,$\forall \in \mathbb{N}$.

Soit $c_n = a_n - a_{n-1} - 672$ pour tout $n \geq 1$. alors,

$$c_{n+1} + 2c_n = a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} - 2016$$

d'ou pour tout $n \geq 1$, $c_{n+1} + 2c_n$ est un entier telle que

$$0 \leq c_{n+1} + 2c_n \leq 1.$$

Supposons que $c_1 > 0$; alors $c_1 \geq 1$ et $c_2 \leq -2c_1 + 1 \leq -1$. De plus, $c_3 \geq -2c_2 \geq 2$. on montre que : $c_{2k+1} \geq 2^k$ on utilise la récurrence pour montrer cela . Si $c_{2k+1} \geq 2^k$ est vraie, alors $c_{2k+2} \leq -2c_{k+1} + 1 \leq -2^{k+1} + 1$ et $c_{2k+3} \geq -2c_{k+2} \geq 2^{k+2} - 2 \geq 2^{k+1}$, doù le résultat. Observons que :

$$a_{2k+2} - a_{2k} - 1334 = c_{2k+2} + c_{2k+1} \leq -2^k + 1,$$

donc, pour $k \geq 11$, on a

$$a_{2k+2} < a_{2k}.$$

Contradiction, puisque tous les a_k sont des entiers naturels non nuls.

Si $c_1 < 0$, alors $c_2 \geq -2c_1 > 0$ on répète cet argument jusquau ce qu'on obtient

$$a_{2k+3} < a_{2k+1},$$

pour tout $k \geq 11$, contradiction.

On conclut que $c_1 = 0$, or, $a_1 = a_0 + 672$. On déduit que

$$f(n) = n + 672,$$

25. pour tout $z > 0$ $f(x+f(y))+z = f(x+y)+f(y)+z$ donc :$f(f(x+f(y))+z) = f(f(x+y)+f(y)+z)$

Or , daprès l'équation de base :

$$f(x + f(y) + z) + f(x + f(y)) = f(x + y + f(y) + z) + f(x + y)$$

De plus ,

$$f(x + y + z) + f(y) + f(x + y) + f(y) = f(x + 2y + z) + f(y) + f(x + y)$$

On déduit que :

$$f(x + y + z) + f(y) = f(x + 2y + z)$$

Le reste est laissé comme exercice au lecteur, on pourra continuer avec l'équation de Cauchy pour compléter la résolution de l'exercice !

26. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(1) = 1$. Remarquons que :

$$f(x^3) - f(z^3) = (f(x^3) - f(y^3)) + (f(y^3) - f(z^3))$$

Alors, on obtient :

$$(x^2 - 1)(f(x^2) + f(x) + 1) = (x^2 - x)(f(x^4) + f(x^3) + f(x^2) + (x - 1)(f(x^2) + f(x) + 1)$$

Après simplifications simplification,

$$f(x^4) = x(x-1)f(x^2) + (x^2 - x + 1)f(x) + x(x-1)$$

Pour simplifier, soient g, h deux polynômes telle que : $f(x^3) = g(x; f(x), f(x^2))$ et $f(x^4) = h(x; f(x); f(x^2))$ En calculant $f(x^{12})$ de deux façons différentes ,on obtient la relation suivante :

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x$$

pour tout $x > 0$. Finalement :

$$f(x^3) = (x-1)(f(x^2) + f(x) + 1) + 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) + 1 = x^3$$

27. Soit n un entier naturel intéressant :

Pour n pair , la fonction nulle satisfait les conditions de l'exercice .

Pour n impair : $f(x+y) - f(x) = f(x+y) - f(x+y+(-y)) \leq (-y)^n = -y^n$,donc :

$f(x) - f(x+y) \geq y^n \implies f(x) - f(x+y) = y^n$.

Or , $f(0) - f(x) = f(x) - f(2x) = x^n \implies f(0) - f(2x) = 2x^n$ et $f(0) - f(2x) = (2x)^n = 2^n x^n$

Finalement, on conclut que $n = 1$ est intéressant .

28. La substitution $x = y = 0$ nous permet de trouver $f(0) = 1$.

Pour $y = -x$, on obtient $f(x).f(-x) = 1$ et pour $y = 0$, on trouve $f(x) \geq 2018^x$ et $f(-x) \geq 2018^{-x}$.

Alors $f(x).f(-x) \geq 1$. On a égalité si et seulement si $f(x) = 2018^x$. Réciproquement, on peut facilement vérifier que c'est une solution .

29. Pour $x = y$, on obtient : $f(x)(f(2x) - 2x) = 0$. Reste à montrer que si $f(a) = 0$ et $f(b) = b$ pour deux réels a, b, alors $a = b = 0$. Puis conclure !

30. Soit $P(x, y)$ l'équation fonctionnelle proposée, le lecteur attentif remarquera que la détermination de $f(0)$ est une étape cruciale pour la résolution du probléme .Posons $c = f(0)$. Les substitutions $P(0, c)$ et $P(c, 0)$ donnent $f(0) = 0$. Or, $P(x, 0)$ implique $f(f(x)) = f(x)$. En retranchant $P(f(x), x)$ de $P(x, f(x))$,on trouve : $f(x)(f(x) - x) = 0$. Le problème est presque résolu. Il nous reste de montrer que si : $f(a) = 0$ et $f(b) = b$ pour a, b dans $\mathbb{R}$, alors $a = b = 0$. (Cette partie est laissé au lecteur).

31. Pour $y = 0$, on obtient $f(x^2) = f(f(x))$. Pour $y = f(x) - x^2$, on trouve $f(x^2) = f(f(x)) + 2(f(x) - x^2)^2$. En faisant la différence des deux égalités, on obtient $f(x) = x^2$. Il est facile de vérifier que c'est une solution !

32. Soit $P(x, y, z)$ l'assertion $f(x + f(y+z)) + f(f(x+y) + z) = 2y$ et posons $f(0) = c$

$P(x - c\frac{c-x}{2}, \frac{x-c}{2})$ implique $f(x) + f(f(\frac{x-c}{2}) + \frac{x-c}{2}) = c - x$

$P(\frac{x-c}{2}, 0, \frac{x-c}{2})$ implique $f(\frac{x-c}{2} + f(\frac{x-c}{2})) = 0$

Alors , $f(x) = c - x$

33. $y = 0$, $f(f(x)) \leq xf(x) + f(0)$

$y = f(x) : f(0) \leq xf(x) + f(f(x))$ donc $xf(x) \geq 0$

$x = 0 : f(f(0) - y) \leq f(y)$

$x = 0y = f(0) - t : f(t) \leq f(f(0) - t)$, donc : $f(x) = f(f(0) - x)$

$0 \leq (f(0)-x)f(f(0)-x)+xf(x) = f(0)f(x)$ donc $f(0)f(x) \geq 0$

Or, daprès $xf(x) \geq 0$, on déduit que $f(x)$ change de signe,il s'en suit que $f(0)=0$ et $f(x)=f(-x)$

$0 \leq xf(x) - xf(-x) = 0 \rightarrow xf(x) = 0$

Alors: $f(x) = 0$

34. Il suffit de prendre $(x,t,z) \rightarrow (z,y,x)$ .Puis , on trouve $z = x$ pour tous $z, x > 0$. Contradiction !

35. Soit $P(x,y)$ l'assertion $f(f(x)+y)+f(x+y) = 2x+2f(y)$. Posons $a = f(1)$.

(a) : $P(x,f(1)) \implies f(f(x)+a)+f(x+a) = 2x+2f(a)$

(b) : $P(1,x) \implies f(x+a)+f(x+1) = 2+2f(x)$

(c) : $P(1,f(x)) \implies f(f(x)+a)+f(1+f(x)) = 2+2f(f(x))$

(d) : $P(x,1) \implies f(f(x)+1)+f(x+1) = 2x+2a$

$a-b-c+d \implies$: $f(f(x)) = 2x - f(x) + c$ avec $c = f(a) - 2 + a$

Une simple récurrence permet de montrer que : $f^n(x) = \frac{1}{3}(f(x)+2x+nc-\frac{c}{3})+\frac{1}{3}(-2^n)(-f(x)+x+\frac{c}{3})$ $\forall n \geq 2$

Pour : $n \rightarrow +\infty$ et puisque $f^n(x) > 0$, on obtient : $f(x) = x + \frac{c}{3}$ $\forall x$

En substituant dans l'équation de base , on trouve : $f(x) = x, \forall x > 0$

36. Soit $P(x,y)$ l'assertion $f(f(x+y)) \geq f(f(y)) + yf(x)$

$P(0,y) \Rightarrow f(0) = 0$

$P(-y,y) \Rightarrow -yf(-y) \geq f(f(y))$ (1)

$P(x,0) \Rightarrow f(f(x)) \geq 0$ (2)

D'après : (1), (2), on obtient : $xf(x) \geq 0 \rightarrow f(-k^2) \leq 0 \leq f(k^2)$ $\forall k \in \mathbb{R}$

$P(-a^2,-b^2) \Rightarrow f(-b^2) = 0$

$P(-(a+b)^2,b^2) \Rightarrow f(f(b^2)) = 0$

$P(a^2,b^2) \Rightarrow f(b^2) = 0$

Finalement , $f(x) = 0$ pour tout x réel.

37. $P(x,x) \implies f(x,x) = f(x\cdot 1, x\cdot 1) = x^k f(1,1)$.

Or, $f(1,1) = 1$ (équation 2) $\implies f(x,x) = x^k$ $(*)$.

$P(f(x,x),f(x,x)) \implies f(f(x,x),f(x,x)) = x^{k^2}$ (selon $*$).

Or : $f(f(x,x),f(x,x)) = f(f(f(x,x),x),x) = f(f(x^k,x),x) = f(x^k\cdot f(x^{k-1},1),x) = f(x^k\cdot x^{k-1},x) = f(x^{2k-1},x) = x^k f(x^{2k-2},1) = x^{3k-2}$.

Alors : $k^2 = 3k-2 \implies k = 1,2$.

Pour $k=2$, on prend : $f(x,y) = xy$ et pour $k=1$, on prend : $f(x,y) = min\{x,y\}$. Doù $k = 1,2$.

Équations de Cauchy et applications

3

1 Équations de Cauchy, applications

1.1 Équation de Cauchy

Allons un bout plus loin dans la théorie des équations fonctionnelles. Ce script traite d'une famille de quatre équations fonctionnelles, à première vue inoffensives, connues sous le nom d'équations de *Cauchy*. On les rencontre parfois après une réduction appropriée d'une équation moins standard. Néanmoins, la résolution des équations de Cauchy requiert de nouveaux outils d'analyse dont notamment les notions de *continuité* d'une fonction et de *densité* dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Nous introduirons intuitivement ces notions en temps voulu et on détaillera plus dans le chapitre concernant l'utulisation des propriétés analytiques d'une fonction. Voilà le problème que l'on se propose de résoudre appelé l'équation de Cauchy.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Avant de s'attaquer à l'équation fonctionnelle de Cauchy, nous allons commencer par aborder un exemple trés simple.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{Q}$,

$$f(nx) = nf(x)$$

Considérons f une solution. On peut voir la condition comme $f(\underbrace{x + x + ... + x}_{n}) = \underbrace{f(x) + f(x) + ... + f(x)}_{n}$.
On peut remarquer qu'en remplaçant n par 0, l'équation devient $f(0) = 0$. On connaît donc $f(0)$. On pourrai essayer de remplacer x par 1 et garder n variable. On obtient $f(n) = f(1)n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui ne donne f pour les entiers seulement donc n'est pas suffisant!

Il faut être un peu plus astucieux cette fois-ci! L'énoncé nous dit que $x \in \mathbb{Q}$ donc est tenté d'utiliser la caractérisation des nombres rationnels: tout nombre rationnel x peut d'écrire sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in N^*$. On prend donc $x \in \mathbb{Q}$ et on l'écrit sous la forme précédente $x = \frac{p}{q}$. L'équation devient:

$$f\left(n\frac{p}{q}\right) = nf\left(\frac{p}{q}\right)$$

Il faut maintenant choisir judicieusement n. On connaît f pour les entiers, on est donc tenté de choisir $n = q$ pour transformé $n\frac{p}{q}$ en une valeur entière. En prenant $n = q$ on a :

$$f(p) = qf\left(\frac{p}{q}\right) \implies f(1)p = qf\left(\frac{p}{q}\right) \implies f(1)\frac{p}{q} = f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Finalement,

$$f(1)x = f(x)$$

En posant à nouveau $f(1) = a$, on vérifie que toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$ (il est important de noter que a est dans $\mathbb{Q}$ cette fois-ci) sont solution. En effet, pour une telle fonction f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$

$$f(nx) = anx$$

et

$$nf(x) = nax = anx$$

Revenons à notre problème, trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout réels x et y:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On peut commencer par remarquer que toutes les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$ (encore!) sont solutions. Essayons de le démontrer.

On remarque également que si f est solution alors αf est solution pour $\alpha \in \mathbb{Q}$. On peut imposer une valeur $f(1)$ mais on en aura pas besoin dans ce cas la.

En remplaçant x et y par 0, il vient que $f(0) = 0$. On remarque qu'on n'arrive pas déterminer $f(0)$ ce qui est normal car pour les solutions sont de la forme $f(x) = ax$, $f(0) = a$ donc dépend de la solution. On pose donc $f(1) = a$.

On remarque que $f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2a$, $f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2a + a = 3a$, ... En continuant ainsi, on a $f(n) = an$ pour tout n. On connaît donc f pour tout les entiers.

On peut faire ce qu'on a fait pour 1 pour un $x \in \mathbb{Q}$ quelconque. $f(x + x) = 2f(x)$, $f(2x + x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$,... Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(nx) = nf(x)$. On retrouve l'exemple 3 ! On connaît donc les solutions de l'équation: toutes les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in Q$. On a donc prouvé le résultat auquel on s'attendait.

On a ainsi montré que les fonctions réelles additives dont l'ensemble de départ est $\mathbb{Q}$ sont les fonctions $x \mapsto ax$ où a est une constante réelle. Peut on avoir ce résultat si on suppose l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$? Pour continuer à partir d'ici, on a besoin d'imposer des conditions supplémentaires sur f. La condition de loin la plus importante pour nous sera la monotonie.

Lemme. Soit f une solution monotone de l'équation de Cauchy. Alors f est une fonction linéaire, à savoir, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax$.

Démonstration. Soit f une fonction monotone vérifiant l'équation de Cauchy. On remarque que $-f$ est aussi une solution monotone de l'équation de Cauchy. On peut alors supposer que f est croissante. On sait déjà daprès l'exemple précédent que pour tout rationnel q on a $f(q) = f(1)q$. On note que $f(1) \geq f(0) = 0$ (car f est croissante). Supposons maintenant qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > xf(1) = 0$. Soit q un nombre rationnel supérieur à x. Donc par croissance de f, $0 = f(q) \geq f(x) > 0$, ce qui est absurde. Si $f(1) > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (entre deux réels différents il existe certainement un nombre rationnel, on parlera en détails de la densité dans le chapitre 5), il existe un nombre rationnel q tel que $f(x)/f(1) > q > x$. Par croissance de f, comme $q > x$, on a $qf(1) = f(q) > f(x)$, mais par construction $f(x) > f(1)q$. On aboutit alors à une contradiction. Le cas $f(x) < xf(1)$ se traite d'une manière similaire. On en déuit que $f(x) = xf(1)$ pour tout réel x.

La continuité de f en un point est aussi une condition suffisante pour garantir la linéarité. Bien que dans le contexte des olympiades il est rare que le concept de continuité apparaisse, nous allons quand même en parler dans le chapitre 5. Notons qu'une condition suffisante pour garantir la linéarité mais rarement utilisée au monde des équations fonctionnelles est que la fonction f soit bornée supérieurement ou bornée inférieurement.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction additive et multiplicative. i.e. pour tous réels x et y,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x) \times f(y)$$

Alors soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ou pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

1.2 Équation de Jensen

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant pour tout réels x et y:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

On peut commencer par chercher des solutions évidentes. On vérifie facilement que $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = x+1$ sont solutions. Plus généralement, on peut vérifier que toute fonction de la forme $f(x) = ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ est solution. Nous allons démontrer que ce sont les seules. Soit f solution. On remarque que αf est solution, et $f+\beta$ est solution aussi. Cela nous permet de choisir $f(0) = 0$ (avec $\beta = -f(0)$). Pour $y = 0$ et x variable, on a $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$. Donc pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)}{2}$ (en remplaçant x dans le premier résultat par $x+y$). Or, l'équation nous donne $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ donc $\frac{f(x+y)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, ce qui implique que $f(x+y) = f(x)+f(y)$. On retrouve l'équation de Cauchy! On sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$. Donc les solutions de l'équation de Jensen sont les fonctions de la forme $f(x) = ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ (Car si f est solution $f+\beta$ aussi, et on avait fixé un β).
➢*En supposant la fonction f continue ou croissante, on peut montrer que les fonctions vérifiant l'équation de Jensen dont l'ensemble de départ et d'arrivé est $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ax+b$ où a et b deux constantes réelles.*

Pour finir cette partie sur l'équation de Jensen, donnons des exemples de problème dont la résolution est amené à utiliser l'équation de Jensen.

Exemples.

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Solution. On remarque que

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2}=f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}}{3}\right)=f\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Donc

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Donc f est une solution de l'équation de Jensen, de plus f est croissante, par conséquent il existe deux constantes a et b réelles tels que $f(x)=ax+b$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En substituant dans l'équation de départ on trouve $a=0$. Donc les seules solutions de l'équation fonctionnelle suggérée sont les fonctions constantes.

(JMO 2015/4) *Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ telle que :*

$$f(x)+f(t)=f(y)+f(z)$$

pour tous $x<y<z<t$ en progression arithmétique.

Solution. Puisque x,y,z,t sont en progression arithmétique , on écrit :$x=d,y=a+d,z=a+2d,t=a+3d$,$d>0$ .Alors notre équation est équivalente à

$$f(a)+f(a+3d)=f(a+d)+f(a+2d),d>0$$

Pour $a\to a-d$, on obtient l'écriture simplifiée :

$$f(a-d)+f(a+2d)=f(a)+f(a+d),d>0$$

On effectue la somme des deux expressions, on trouve

$$f(a-d)+f(a+3d)=2f(a+d),d>0$$

On posera :$x=a-d,y=a+3d$,alors : $f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})$. C'est l'équation fonctionnelle de Jensen, doù $f(x)=ax+b$ avec a,b des constantes .

Le cas $d=0$ est trivial. Pourquoi ?

1.3 Applications des équations de Cauchy, changement de variable

Avant de commencer cette section, on signale que cette section contient des notions de la terminale du lycée à savoir la fonction logarithme et la fonction exponentielle. Pour le lecteur qui n'est pas familiarisé avec ces notions, on le conseille de sauter cette partie.
Il existe des équations fonctionnelles qu'on peut les résoudre en utilisant l'équation fonctionnelle de Cauchy. Citons par exemple l'*équation logarithmique de Cauchy*, l'*équation exponentielle de Cauchy* et l'*équation multiplicative de Cauchy*. Nous allons voir dans la suite comment on peut résoudre ces équations fonctionnelles en utilisant des simples changements de variable.

Introduisons à présent les trois autres équations de Cauchy,

$$f:\mathbb{R}^{*+}\to\mathbb{R}^{*+},\quad f(xy)=f(x)f(y) \tag{1}$$

$$f:\mathbb{R}^{*+},\to\mathbb{R},\quad f(xy)=f(x)+f(y) \tag{2}$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{*+},\quad f(x+y)=f(x)f(y) \tag{3}$$

Les trois nouvelles équations de Cauchy ne sont en fait pas ontologiquement différentes de la première. En effet, supposons que f soit une solution de l'équation (2), alors la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(\exp x)$ est une solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy. En effet,

$$g(x+y)=f(\exp(x+y))=f(\exp x\times\exp y)=f(\exp x)+f(\exp y)=g(x)+g(y)$$

. De même si f est une solution de (3), alors $\log f$ est une solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy. Si f est une solution de (1), alors $\log(f(\exp x))$ est une solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy. Les solutions sont donc $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$ pour (1), $x \mapsto a \log x$, $a \in \mathbb{R}$ pour (2) et $x \mapsto a^x$ où $a > 0$ pour (3).

Pour achever cette section, donnons deux exemple, le premier extrait de l'olympiade nationale dont la démarche de résolution ressemble à celle de de l'équation fonctionnelle de Cauchy, et le second exemple issu de l'olympiade internationale.

Exemples.

(Maroc 2004) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

Solution. En prenant $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. En prenant $x = 0$ et en gardant y libre on trouve $f(-y) = f(y)$. En prenant $y = x$, on trouve $f(2x) = 4f(x)$, puis en prenant $y = 2x$ on trouve $f(3x) = 9f(x)$. On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(nx) = n^2 f(x)$. On vérifie facilement par récurrence que cette égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, en prenant $x = 1/q\,, (q \in \mathbb{N}^*)$ on obtient $f(1) = f(q \times 1/q) = q^2 f(1/q)$, d'où pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f(1/q) = f(1)/q^2$. Finalement, soit $x = p/q$ un rationnel, on a alors $f(x) = f(p/q) = p^2 f(1/q) = p^2/q^2 f(1) = x^2 f(1)$. En posant $a = f(1)$, on obtient $f(x) = ax^2$ où $a \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, on vérifie que cette fonction vérifie bien l'équation de base. Donc les solutions de l'équation fonctionnelle sont $x \mapsto ax^2$ avec a un nombre rationnel.

(OIM 1992) Trouver toutes les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

Solution. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle ci-dessus, on a déjà montré dans un exemple précédent que $f(0) = 0$ (si vous ne souvenez plus comment, c'est un excellent exercice!). On substitue $x = 0$ pour obtenir $f(f(y)) = y$. Avec $y = 0$, on obtient de plus $f(x^2) = f(x)^2$. En ayant $f(f(y)) = y$, remplacer les y par les $f(y)$ donne des renseignements de nouvelles équations importantes. C'est nous allons faire, on obtient par la suite, après simplification et en utilisant aussi $f(x^2) = f(x)^2$,

$$f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y)$$

Cela ressemble déjà à une équation de Cauchy, à la différence près que x^2 ne peut naturellement prendre que des valeurs positives. En d'autres termes, nous avons "seulement" :

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

pour tout $u \geq 0$ et pour tout $v \in \mathbb{R}$. On va donc se débarrasser de la condition gênante $u \geq 0$. De l'équation établie ci-dessus, on peut déduire l'imparité de f. On obtient ainsi pour tout $u \geq 0$,

$$f((-u) + v) = -f(u + (-v)) = -f(u) - f(-v) = f(-u) + f(v)$$

On conclut que $f(u + v) = f(u) + f(v)$ pour tous les réels cette fois. Il reste à établir la monotonie de f. L'argument qui va suivre est assez fondamental et mérite qu'on s'en souvienne. L'équation $f(x^2) = f(x)^2$, donne en particulier $f(x) \geq 0$ pour tout réel positif x. Nous avons maintenant tous les ingrédients pour déduire la croissance de f. En effet, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \geq b$, nous avons

$$f(a) = f(a - b + b) = f(a - b) + f(b) \geq f(b)$$

Doù la croissance de f. Donc f est une solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy qui est croissante, donc daprès le lemme précédent on a $f(x) = \lambda x$. En remplaçant dans l'équation de base, on trouve $\lambda = 1$. Donc l'unique solution est la fonction identité.

2 Équations généralisées de Cauchy

2.1 Équation de Pexider

Les équations de Pexider, introduites en 1903, sont des généralisations des équations de Cauchy. Par la suite, nous allons les étudier sur des exemples précis.
Exemples

Trouver les fonctions continues $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$

Solution. En substituant successivement $x = 0$ puis $y = 0$ dans l'équation ci-dessus, on trouve $h(y) = f(y) - g(0)$ et $g(x) = f(x) - h(0)$. En substituant dans l'équation fonctionnelle de base on trouve $f(x+y) = f(x) + f(y) - h(0) - g(0)$, i.e.

$$f(x+y) - h(0) - g(0) = f(x) - h(0) - g(0) + f(y) - h(0) - g(0)$$

alors la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - -h(0) - g(0)$ est continue et additive, par conséquent $k(x) = ax$ pour une constante réélle a. Finalement les solutions de l'équation fonctionnelle de base sont de la forme $f(x) = ax+b+c$, $g(x) = ax+b$ et $h(x) = ax+c$ où a, b et c sont des constantes réelles après une vérification.

Déterminer les fonctions continues $f, g, h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in]0, +\infty[$,

$$f(xy) = g(x)h(y)$$

Solution. En substituant $x = y = 1$ dans l'équation ci-dessus on obtient $f(1) = g(1)h(1)$. Supposons que $f(1) \neq 0$, i.e. $g(1) \neq 0$ et $h(1) \neq 0$, alors en prenant respectivement $x = 1$ et $y = 1$ dans l'équation de base on trouve $h(y) = f(y)/g(1)$ et $g(x) = f(x)/h(1)$. En remplaçant dans l'équation initiale on trouveque pour tous $x, y > 0$,

$$f(xy) = \frac{f(x)f(y)}{h(1)g(1)}$$

En considérant la fonction k définie sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto k(x) = \dfrac{f(x)}{h(1)g(1)}$, on obtient

$$k(xy) = \frac{f(xy)}{h(1)g(1)} = \frac{f(x)}{h(1)g(1)} \times \frac{f(y)}{h(1)g(1)} = k(x)k(y)$$

Cela implique que la fonction $x \mapsto k(x)$ est multiplicative, sachant qu'elle est continue, alors pour tout $x \in]0, +\infty[$, $k(x) = x^a$ où a est une constante réelle. Donc les fonctions f, g et h sont données par $f(x) = \alpha\beta x^a$, $g(x) = \alpha x^a$ et $h(x) = \beta x^a$ avec $\alpha\beta \neq 0$. Maintenant, on suppose que que $f(1) = g(1)h(1) = 0$, si $g(1) = 0$ alors en prenant $x = 1$ dans l'équation de base on obtient $f \equiv 0$ puis $g \equiv 0$ et h une fonction arbitraire. De même si $g(1) = 0$, $f \equiv 0$ et $h \equiv 0$ et g une fonction arbitraire.

Déterminer les fonctions continues $f, g, h : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = g(x)h(y)$$

Solution. Posons pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 10^{F(x)}, g(x) = 10^{G(x)}$ et $h(x) = 10^{H(x)}$, alors l'équation fonctionnelle suggérée implique que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $10^{F(x+y)} = 10^{G(x)+H(y)}$, i.e. pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(x+y) = G(x) + H(y)$$

Alors, daprès l'exemple (1), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = Ax + B + C$, $G(x) = Ax + B$ et $H(x) = Ax + C$ où A, B et C sont des constantes réelles. En conclusion, les fonctions f, g et h sont données par $f(x) = bca^x$ et $g(x) = ba^x$ et $h(x)ca^x$ pour tout réel x avec a, b et c des constantes strictement positives.

> *Trouver toutes les fonctions continues $f, g, h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x et y dans $\mathbb{R}$,*
>
> $$f(xy) = g(x) + h(y)$$

Solution. Posons $F(x) = f(10^x)$, $G(x) = g(10^x)$ et $H(x) = h(10^x)$, alors l'équation fonctionnelle de base devient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(x+y) = f(10^{x+y}) = f(10^x \times 10^y) = g(10^x) + h(10^y) = G(x) + H(y)$$

Alors, daprès l'exemple (1), on aboutit à $F(x) = ax + b + c$, $G(x) = ax + b$ et $H(x) = ax + c$. En conclusion les fonctions f, g et h sont données par $f(x) = a \log x + b + c$, $g(x) = a \log x + b$ et $h(x) = a \log x + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où a, b et c des constantes réelles.

> *Déterminer les fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*
>
> $$f(x) + f(y) = g(x+y)$$

Solution. On commence par remarquer que

$$f(x+y) + f(0) = g(x+y+0) = g(x+y) = f(x) + f(y)$$

c-à-d

$$(f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)) = f(x+y) - f(0)$$

Donc la fonction $f(x) - f(0)$ est une fonction additive, comme elle est continue on a alors $f(x) = cx + d$ et ainsi $g(x) = cx + 2d$. D'àprés les résultats sur les équations de Pexider, on déduit que $g(x) = ax + b + c$ et $f(x) = ax + b$ et $f(x) = ax + c$. Finalement on a $f(x) = ax + c$ et $g(x) = ax + 2c$.

2.2 Fonctions préservant les valeurs moyennes

Soit n un entier relatif non nul, on définit la moyenne d'ordre n de deux nombres réels positifs par

$$M_n(x, y) = \left(\frac{x^n + y^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{x^n + y^n}{2}}$$

si $n \neq 0$ et par convention $M_0(x, y) = \sqrt{xy}$. On rappelle que M_0, M_1, M_{-1} et M_2 sont respectivement les moyennes géométrique, arithmétique, harmonique et quadratique de x et y lorsque $x, y > 0$. On a déjà étudié l'équation de *Jensen* qui peut s'écrire aussi

$$f(M_1(x, y)) = M_1(f(x), f(y))$$

Dans la suite de cette section, on se propose d'étudier des équations fonctionnelles du type

$$f(M_p(x, y)) = M_q(f(x), f(y))$$

avec p et q deux entiers relatifs.

Exemples.

(Équation de Lobachevski) Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to [0, = \infty[$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, alors pour $x \in \mathbb{R}$ on a daprès l'équation de base

$$f\left(\frac{x_0+x}{2}\right) = \sqrt{f(x_0)f(x)} = 0$$

Solution. En remplaçant x par $2x - x_0$, on obtient $f(x) = 0$. Donc f est identiquement nulle. Supposons maintenant que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$. Posons alors $f(x) = 10^{g(x)}$, donc en substituant dans l'équation fonctionnelle de base, on voit que g est une solution de l'équation de Jensen, comme elle est continue, il existe alors deux constantes réelles p et q telles que $g(x) = px + q$. En posant $A = 10^q$ et $a = 10^p$ on voit que $f(x) = Aa^x$. Finalement toute solution continue e l'équation proposée est de la forme $x \mapsto Aa^x$ avec A une constante positive et a une constante strictement positive.

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

Solution. Considérons la fonction $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto f(\sqrt{x})$, alors de l'équation initiale on trouve pour tous $x, y \geq 0$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})}$$

Donc g est une solution de l'équation fonctionnelle de l'équation précédente, par conséquent il existe deux constantes $A \geq 0$ et $a > 0$ telles que $g(x) = Aa^x$ pour tout $w \geq 0$. Ainsi, $f(x) = Aa^{x^2}$ pour $x \geq 0$ avec $A \geq 0$ et $a > 0$. D'une autre part, on a

$$f(-x) = \sqrt{f(-x)f(-x)} = f\left(\sqrt{\frac{x^2+x^2}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{x^2+(-x)^2}{2}}\right) = f(x)$$

Finalement, les solutions continues de l'équation proposée de la forme $x \mapsto Aa^{x^2}$ où $A \geq 0$ et $a > 0$.

Déterminer les fonctions continues $f :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telles que pour tous x et y réels strictement positifs,

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

Solution. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ définie par $g(x) = f(10^x)$, alors en remplaçant dans l'équation de base,

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(10^{\frac{x+y}{2}}\right) = f(\sqrt{10^x 10^y}) = \sqrt{f(10^x)f(10^y)} = \sqrt{g(x)g(y)}$$

Donc d'aprés l'exemple (1), il existe deux constantes $A \geq 0$ et $a > 0$ telles que $g(x) = Aa^x$ pour tout réel x. Donc, pour $x > 0$ on a

$$f(x) = g(\log x) = Aa^{\log x} = Ax^{\log a} = Ax^{\alpha}$$

Réciproquement, pour tout $A \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = Ax^{\alpha}$ est une solution de l'équation fonctionnelle proposée.

(fonctions préservant la moyenne harmonique) Déterminer les fonctions continues $f :]0, ř\infty[\to \mathbb{R}^*$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right) = \frac{2}{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}}$$

Solution. Considérons la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^*$ définie par $g(x) = 1/f(1/x)$. En substituant dans léquation ci-dessus on trouve pour tous $x, y > 0$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\dfrac{2}{x+y}\right)} = \frac{\dfrac{1}{f(1/x)}+\dfrac{1}{f(1/y)}}{2} = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$

Donc g est une solution de l'équation de Jensen, de plus g est continue, par conséquent $g(x) = ax + b$ et comme $g(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$, il s'en suit que a et b on le même signe, i.e. $ab \geq 0$ et que $(a, b) \neq (0, 0)$, i.e. $a^2 + b^2 \neq 0$. Finalement, les fonctions qui vérifient l'équation fonctionnelle proposée prennent la forme $x \mapsto \dfrac{x}{a+bx}$ avec $ab \geq 0$ et $a^2 + b^2 \neq 0$.

3 Équations fonctionnelles de type-Cauchy

Certains problèmes ressemblent fortement à des équations de Cauchy. Seulement, leur résolution n'utilise pas les résultats de la section précédente. Il faut donc adapter les schémas de preuve aux problèmes en question. On s'attend donc naturellement à devoir appliquer un argument proche de la continuité pour étendre nos solutions de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ par exemple. Il n'y a à nouveau pas de théorie à présenter ici, seulement des exemples clés.

Exemples.

(Bélarus 1997) Trouver toutes les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation. A priori, l'équation de base est obtenue par addition de deux équations de Cauchy. Après une courte recherche, on identifie trois solutions : la fonction identité et les constante 2 et 0. Commençons comme toujours par quelques substitutions de base.
En prenant $x = y = 0$, on trouve $f(0)^2 = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$. Si $f(0) = 0$, alors substituer $x = 0$ donne immédiatement la fonction constante $f \equiv 2$. Il nous reste à séparer les deux solutions, 0 et lidentité. Supposer que $f(1) = 0$, amène à la solution $f \equiv 0$ et si $f(1) \neq 0$, alors on peut montrer que $f(q) = q$ pour tout rationnel q, le lecteur est invité à montrer cela, on le donne comme exercice. Nous avons donc à présent que si f n'est pas constante, alors f est l'identité sur $\mathbb{Q}$. Prendre $y = 1$, donne $f(x+1) = f(x) + 1$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = f(x) + n$ pour tout x réel et pour tout n entier naturel. Avec $y = n$, on trouve $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en particulier f est impaire. On a aussi $f(x) = nf(x/n)$ et donc $f(qx) = qf(x)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement, $y = q$ fournit $f(x+q) = f(x) + f(q)$ pour tout réel x et pour tout rationnel q. Substituer $y = -x$ donne $f(x^2) = f(x)^2$ et donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
On passe maintenant à la meilleure partie : l'extension de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. C'est une manière de faire standard. Il est donc judicieux de savoir la reproduire. Supposons qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) < x$. Soit alors q un rationnel tel que $f(x) < q < x$. On a alors

$$q > f(x) = f(x-q) + f(q) \geq f(q) = q$$

Ce qui est contradictoire. Pour $f(x) > x$, un raisonnement analogue fournit une contradiction. On conclut comme souhaité que $f(x) = x$.

➛*Le prochain exemple peut être vu comme un système d'inégalités de Cauchy. Ici, il est intéressant et non-trivial d'étendre nos déductions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}^{*+}$. La partie clé est bien plus subtile.*

(OIM 2013) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{*+} \to \mathbb{R}$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{*+}$,

$$\begin{cases} f(x)f(y) \geq f(xy) \\ f(x+y) \geq f(x) + f(y) \end{cases}$$

et telles qu'il existe $a > 1$ avec $f(a) = a$.

Solution. Soit f une solution du problème. Ces inégalités annoncent de suite la couleur. C'est un problème de type-Cauchy. La méthode standard est donc de commencer par travailler sur $\mathbb{N}$, puis étendre à $\mathbb{Q}^{*+}$. Mais évidement on garde les bons réflexes. A priori seule l'identité parait être une solution. Commençons par quelques substitutions. En prenant $x = y = 1$, on trouve $f(1)^2 \geq f(1)$. Comme l'on ne sait rien du signe de $f(1)$, il y a trop de cas à traiter à partir de ce résultat. Quelle autre valeur de base est intéressante mis à part 1 dans ce problème ? Bien sûr a ! Poser $y = a$ donne $af(x) \geq f(ax)$ et donc avec $x = 1$, on obtient $f(1) \geq 1$. Inductive ment grâce à $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, on conclut que $f(n) \geq n$ pour tout entier positif n. Peut-on étendre cette relation à $\mathbb{Q}^{*+}$? Appliquons la méthode standard :

$$f(p) = f\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{q \text{ fois}}\right) \geq qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

Donc $f(p/q) \leq f(p)/q$ ce qui ressemble plutôt à l'inégalité renversée. Avec $x = p/q$ et $y = q$, on obtient

$$f\left(\frac{p}{q}\right)f(q) \geq f(p)$$

Notons que $f(q) \geq q > 0$, nous pouvons donc diviser et obtenir $f(p/q) \geq f(p)/f(q)$. En particulier, on déduit que $f(p/q) > 0$. Cette observation parait triviale ici, mais il n'est pas facile de réaliser en examen que l'équation précédente implique la positivité des images. Dans le contexte des équations de Cauchy comment avait-on utilisé que l'image de f était positive (pour des valeurs positives) ? On avait déduit la monotonie des solutions ! Dans notre cas, on sait que $f(x+y) \geq f(x) + f(y) > f(x)$ et donc on peut déduire que f est strictement croissante. Jusqu'ici tout était standard. On passe à présent à la partie technique pour étendre nos déductions de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Q}^{*+}$. Fixons $x \in \mathbb{Q}^{*+}$. L'idée est d'introduire la partie entière $\lfloor x \rfloor$ de x :

$$f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1$$

On a donc établi que $f(x) > x - 1$. Ce n'est pas ce que l'on souhaitait et la relation parait trop large pour être utile. Pourtant, dans ce contexte, on peut l'utiliser de manière décisive. Par induction, l'inégalité de départ nous dit que $f(x)^k \geq f(x^k)$. Ainsi

$$f(x) \geq \sqrt[k]{f(x^k)} > \sqrt[k]{x^k - 1}$$

Pour $x > 1$, en faisant tendre $k \to \infty$, on obtient $f(x) \geq x$ pour $x > 1$. Ainsi $f(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 1$. Voilà l'argument du type analyse auquel on s'attend dans ce genre de problème (On va voir dans le chapitre 5 comment l'analyse peut nous servir largement dans la résolution des équations fonctionnelles). Que dire s'il existait $x_0 \geq 1$ tel que $f(x_0) > x_0$? La deuxième inégalité nous donne

$$f(x_0 + y) > x_0 + f(y) > x_0 + y$$

Autrement dit, $f(x) > x$ pour tout $x \geq x_0$. En particulier, on doit avoir $x_0 > a > 1$, car $f(a) = a$. En partant du point fixe a, peut t-on construire d'autres points fixes de f ? On sait que

$$a^2 = a.a = f(a).f(a) \geq f(a^2) \geq a^2$$

On déduit que $f(a^2)a^2$ et par récurrence, $f(a^k) = a^k$. Comme $a > 1$, les a^k deviennent arbitrairement grands. Donc, il existe k tel que $x_0 \leq a^k$. C'est une contradiction. On conclut que l'on a bien $f(x) = x$ pour $x \geq 1$.
Qu'en est-il des valeurs $x < 1$? Fixons $x < 1$. On sait que $1/x > 1$. Donc

$$f(x).1/x = f(x).f(1/x) \geq f(1) = 1$$

et par conséquent $f(x) \geq x$. De plus, il existe un entier k tel que $kx > 1$, ce qui donne

$$kx = f(kx) \geq kf(x)$$

et ainsi $f(x) \leq x$. Finalement on a bien $f(x) = x$ et on conclut que l'identité est bien l'unique solution.

4 Se ramener aux équations de Cauchy

Aprés avoir bien détailler l'étude des équations fonctionnelles de Cauchy, ces dérniéres sont maintenant considérés comme outil qui avec on peut résoudre des équations fonctionnelles plus compliqués. Dans cette partie on va voir comment on peut résoudre des équations fonctionnelles à l'aide des équations fonctionnelles de Cauchy. Par la suite on va s'appuyer sur des exemples permettant l'illustration de cette technique.

Exemples.

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels,

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation. On a $f(x+y)+f(0) = f(f(x+y)) = f(x)+f(y)$, donc la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)$ est additive, de plus c'est une fonction continue, par suite $f(x) = ax + b$ pour des certaines constantes a et b réelles. L'équation de base implique que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $a^2(x+y)+ab+b = a(x+y)+2b$, en prenant $x = y = 0$, on trouve $ab = b$ puis en prenant $x = 1$ et $y = 0$, on trouve $a^2 = a$. Finalement soit $a = b = 0$ ou $a = 1$, ce qui donne que f est identiquement nulle ou $f(x) = x + b$ pour une certaine constante b.

(Roumanie 2009) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle ci-dessus. En prenant $y = 0$, on obtient $f(x^3) = xf(x^2)$ et par suite

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2) = f(x^3) + f(y^3)$$

Comme tout réel t peut s'écrire sous la forme $t = x^3$ pour x un réel arbitraire, alors pour tous $t, l \in \mathbb{R}$,

$$f(t + l) = f(t) + f(l)$$

Autrement dit, la fonction f additive, et d'aprés les résultats sur les fonctions additives vu précédemment, pour tout réel x et pour tout entier naturel non nul, $f(nx) = nf(x)$. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle proposée, on remarque que pour toute constante c, cf est encore une solution de l'équation fonctionnelle proposée. On peut donc supposer que $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$. Supposons que que $f(1) = 1$, comme f est additive on obtient de $f((x+1)^3) = (x+1)f((x+1)^2)$ que $2f(x^2) + f(x) = 2xf(x) + x$. En remplaçant x par $x + 1$ on déduit que

$$2f((x+1)^2) + f(x+1) = (2x+2)f(x+1) + x + 1$$

Comme f est additive, on se ramène à l'identité

$$2f(x^2)+3f(x)=2xf(x)+3x$$

Combiné avec la relation $2f(x^2)+f(x)=2xf(x)+x$, cela fournit $f(x)=x$. Pour le second cas, $f(1)=0$, avec les mêmes arguments ci-dessus on obtient $2f(x^2)+f(x)=2xf(x)$, et en remplaçant $x$par $x+1$ on déduit que $f\equiv 0$. Finalement les solutions de l'équation fonctionnelle proposée sont les fonctions $x\mapsto cx$ où c est une constante réelle.

(Russie 1993) Déterminer les fonctions $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telles que pour tous $x,y>0$,

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}$$

Solution. On commence par remarquer que la fonction constante $f\equiv 1$ est une solution de l'équation fonctionnelle ci-dessus. On va montrer que la seule solution non constante est l'identité. Si $f(a)\neq 1$ pour un certain $a>0$, alors

$$f(a)^{f(xy)}=f(a^{xy})=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)f(y)}$$

Par la suite on a $f(xy)=f(x)f(y)$. On a également

$$f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^x)f(a^y)=f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)}=f(a)^{f(x)+f(y)}$$

En somme, la fonction f est multiplicative et additive, par conséquent pour tout $x>0$, $f(x)=cx$ pour une certaine constante c. En substituant dans l'équation de base, on trouve $c=1$. D'où la conclusion.

(OIM 2002) Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tous $x,y,z,t\in\mathbb{R}$,

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. En substituant $y=z=t=0$, on trouve $2f(0)(f(x)+f(0))=2f(0)$. En prenant $x=0$ dans cette équation on trouve $f(0)=0$ ou $f(0)=1/2$. Si $f(0)=1/2$, en revenant à la dernière équation établie on trouve $f(x)=1/2$ pour tout réel x. Supposons maintenant que $f(0)=0$, alors en prenant $z=t=0$ on trouve $f(xy)=f(x)f(y)$, en particulier $f^2(1)=f(1)$, i.e. $f(1)=0$ ou $f(1)=1$. Si $f(1)=0$, on retrouve immédiatement que f est identiquement nulle du fait que $f(x)=f(x)f(1)$. On suppose alors que $f(1)=1$, en substituant $x=0$ et $y=t=1$ on obtient $f(z)=f(-z)$, i.e. f est une fonction paire. Puisque f est multiplicative alors $f(x)\geq 0$ pour $x\geq 0$ (On a établit ceci pas mal de fois dans des exemples précédents). Comme f est paire, alors f est partout positive. En prenant maintenant $x=t$ et $y=z$, on trouve

$$(f(x)+f(y))^2=f(x^2+y^2)$$

Considérons la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{f(x)}$, alors $g(x^2)=\sqrt{f(x^2)}=\sqrt{f(x)^2}=f(x)=g^2(x)$ et la relation ci-dessus donne

$$g(x^2)+g(y^2)=g(x^2+y^2)$$

Donc, g est une fonction additive positive sur $]0,+\infty[$ avec $g(1)=1$, alors $g(x)=x$ pour tout $x>0$ et puisque g est paire, alors $g(x)=\mid x\mid$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Par conséquent $f(x)=x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Réciproquement, cette fonction est bien solution de l'équation fonctionnelle proposée.

i)*Déterminer toutes les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que : pour tous les réels x,y :*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$$

ii) *Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : pour tous les réels x, y :*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

Solution.
i) On pose : $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$,alors notre équation est équivalente à : $g(x)+g(y) = g(x+y)$ et puisque g est continue et vérifie l'equation de Cauchy ,il s'en suit que : $g(x) = cx$. Donc , $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + cx$.
ii) De la même façon, on pose : $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$.

Déterminer toutes les fonctions additives $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $f(x) + x^2 \geq 0$ pour tout réel x.

Solution. Il est évident que : $f(x) = cx$, pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Donc $cx \geq -x^2$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
Si $c > 0$, alors il existe $h \in \mathbb{Q}$ telle que $-c < h < 0$, donc $ch < -h^2$.
Si $c < 0$,alors il existe $h \in \mathbb{Q}$ telle que $0 < h < c$, donc $ch < -h^2$.
D'où : $c = 0$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{Q}$, si $f(l) = m$, on peut choisir q telle que : $l - \sqrt{-m} < q < l + \sqrt{-m}$
On a : $f(l) = f(l-q) + f(q) = f(l-q) \geq -(l-q)^2 > m$ contradiction !
Donc , $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$. Or, $f(x) + f(-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout x irrationnel x, $-x$ est aussi irrationnel, alors $f(x) + f(-x) = 0$, Donc $f(x) = f(-x) = 0$ pour tout irrationnel x.
On déduit finalement que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer toutes les fonctions continues $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$f(a) + f(b) = f(c) + f(a+b-c)$$

Solution. Pour $c = 0$,On a :$f(a+b) + f(0) = f(a) + f(b)$ .On pose $g(x) = f(x) - f(0)$ .Alors , g est continue additive, donc $g(x) = cx$ .Alors $f(x) = cx + d$.

(*Iran*) *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x) = f(\frac{1}{x}), x \neq 0$$
$$f(1) = 1$$

Solution. Soit $x \notin \{0, 1\}$: $f(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}) = f(\frac{1}{x}) + f(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(1-x)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{f(x)-f(x)^2}$
$f(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}) = f(\frac{1}{x-x^2}) = \frac{1}{f(x-x^2)} = \frac{1}{f(x)-f(x^2)}$. Alors $\frac{1}{f(x)-f(x)^2} = \frac{1}{f(x)-f(x^2)}$ et $f(x^2) = f(x)^2$ pour tout réel x différent de 0 et de 1. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc $f(x^2) = f(x)^2$ pour tout réel x. On sait que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et $f(x+y) = f(x)+f(y)$ implique que $f(x)$ est non décroissante. Or $f(x) = f(1)x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, on déduit que $f(x) = ax$ pour tout réel x. En remplaçant dans l'équation d'origine, on obtient : $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$

5 Extensions

Certains équations fonctionnelles ressemblent à ceux de Cauchy mais les conditions portant sur la fonction sont partielles. Dans cette dernière partie, nous verrons des exemples.

Exemples.

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifiant pour tous x et $y > 0$ réels l'équation suivante,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution. Soit f une fonction vérifiant l'équation ci-dessus. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on prend c assez grand, de façon que $a+b+2c$, $b+2c > 0$. On a d'une part

$$f(a+b+2c) = f(a+b) + f(2c)$$

D'une autre part,

$$f(a+b+2c) = f(a) + f(b+2c) = f(a) + f(b) + f(2c)$$

Par conséquent

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Donc f est additive, comme elle est continue, elle est alors linéaire.

➛*Pour dériver une condition de Cauchy à partir d'une condition partielle, souvent on utilise un nombre spécific, et un calcul double comme la méthode ci-dessus. Remarquer également qu'on a utilisé la méthode des trois variables!*

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\mid y - x \mid \leq 1$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. On va montrer pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\mid x - y \mid \leq 2$ on a

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

En particulier, en posant $z = \dfrac{x+y}{2}$ la fonction f vérifie

$$f(x) + f(z) = f(x+z) = f\left(\frac{x+z}{2} + \frac{x+z}{2}\right) = 2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

De même on a

$$2f\left(\frac{y+z}{2}\right) = f(y) + f(z)$$

Notons que

$$2f\left(\frac{x+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) = f(y) + f(z) = 2f\left(\frac{x+y+2z}{2}\right) = 2f(2z) = 4f(z)$$

En combinant, on obtient

$$f(x) + f(y) = 4f(z) - 2f(z) = 2f(z) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y)$$

et cela pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\mid y - x \mid \leq 2$. Une récurrence peut nous fournir alors la condition de Cauchy *(C'est un bon exercice pour le lecteur)*. On en déduit que f est additive, comme f est continue elle est alors linéaire.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous les réels x, y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x^{2013}) = f(x)^{2013}$$

Solution. : D'aprés l'équation fonctionnelle de Caushy, $f(q_0 x) = q_0 f(x)$ pour tout rationnel q_0 et réel$x$; Alors :

$$\begin{aligned}[f(x+q_0)]^{2013} &= [f(x)+f(q_0)]^{2013} \\ &= f(x)^{2013} + 2013 f(x)^{2012} f(q_0) + \cdots + f(q_0)^{2013} \\ &= f(x)^{2013} + 2013 q_0 f(1) f(x)^{2012} + \cdots + [q_0 f(1)]^{2013}\end{aligned}$$

and also

$$\begin{aligned}[f(x+q_0)]^{2013} &= f[(x+q_0)^{2013}] \\ &= f(x)^{2013} + 2013 f(x^{2012} q_0) + \cdots + f(q_0^{2013}) \\ &= f(x)^{2013} + 2013 q_0 f(x^{2012}) + \cdots + [q_0 f(1)]^{2013}\end{aligned}$$

Pour x fixe, la différence des deux expressions est un pôlynome en q_0; qui admet une infinité de racines puisque l'égalité est vraie pour tous les rationnels , et en comparant les coefficients ; On trouve que : $f(x^{2012}) = f(1)f(x)^{2012}$, si f a le même signe que $f(1)$ pour les réels positives. Cela implique que f est majorée, donc : $f(x) = cx$ avec c une constante. On remplace,on obtient :$c^{2013} = c$ avec c réel. Donc : $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Finalement ,on obtient l'ensemble des solutions :. $f(x) = -x$, $f(x) = 0$, et $f(x) = x$

6 Exercices

1. (Suisse 2004) Trouver toutes les fonctions injectives $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels $x \neq y$,

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$$

2. (États-unis 2012) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y^2) = f(x) + \mid yf(y) \mid$$

3. (Proposé OIM 1979) Étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xy+x+y) = f(xy) + f(x) + f(y)$$

   Montrer que f est additive.

4. (Bélarus 1997) Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$$

5. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante pour tous x et y réels,

$$f(x+y) = A^y f(x) + A^x f(y)$$

   où A est une constante réelle strictement positive.

6. (Fonctions préservant la moyenne quadratique) Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{f(x)^2+f(y)^2}{2}}$$

7. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels,
$$f(x+y) = a^{xy} f(x) f(y)$$
où a est une constante strictement positive.

8. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels on a,
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

9. (Putnam 1947) Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y)$$

10. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(\sqrt[n]{x^n+y^n}) = f(x) + f(y)$$
où n est un entier strictement positif.

11. (Roumanie 1997) Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ vérifiant pour tous x et y réels,
$$f(x^2+y^2) = f(x^2-y^2) + f(2xy)$$

12. Trouver toutes les fonctions continues vérifiant l'équation suivante pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x+y) = x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y)$$

13. Montrer que l'équation fonctionnelle
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = f(x)f(y) \qquad (*)$$
est équivalente à l'équation fonctionnelle
$$f(x)^2 = f(x+y)f(x-y)$$
Résoudre l'équation fonctionnelle $(*)$ pour f continue.

14. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x+y+a) + b = f(x) + f(y)$$
où a et b sont deux constantes réelles.

15. Déterminer les fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels,
$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \end{cases}$$

7 Solutions des exercices

1. Soit $P(x,y)$ l'assertion suivante $\forall x \neq y \in \mathbb{R}$ $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$

   Si $f(0) \neq 0$ alors : $P(x,0)$ implique $f(x) = f(0)\frac{f(1)-1}{f(1)+1} =$ cte impossible car f est injective. Donc $f(0)=0$, alors $P(1,0)$ donne $f(1)=1$. Soit $x \neq 1$, en retranchant $P(x,1)$ de $P(xy,y)$: on obtient $f(xy) = f(x).f(y)$ pour tout $x \neq 1$. Or ceci est vrai pour $x=1$. Soit la nouvelle assertion $P(x,1) = Q(x), f(x+1) = f(x-1)\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$, $x \neq 1$. Une récurrence simple permet de montrer que $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$, puis à partir de la multiplicativité de f, on déduit que $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$.

   On a $f(x^2) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $f(x) > 0, \forall x > 0$. Pour $x > y > 0$, $\frac{x+y}{x-y} > 0$, donc $f(x) > f(y)$ et $f(-x) = -f(x)$. Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Finalement, $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. La fonction nulle est clairement une solution .Soit f non nulle ,solution de notre équation .En posant $x = 0$, on obtient : $|yf(y)| = f(y^2) - f(0)$. D'où: $f(x+y^2) = f(x) + f(y^2) - f(0)$. Posons : $g(x) = f(x) - f(0)$,alors : $g(x^2+y) = g(x) + g(y^2)$. Donc : g est additive pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \geq 0$. Or, $g(x+y^2) = g(x) + |yf(y)|$, donc g est croissante . Alors : $g(x) = cx$ pour tout $x > 0$.

   Pour $y \geq x$, on a : $g(y-x) = g(y) + g(-x)$, ceci impique que : $c(y-x) = cy + g(-x)$, Donc $g(-x) = -cx$. Alors, $g(x) = cx$. pour tout $x \in \mathbb{R}$, et puisque g est strictement croissante, $c \geq 0$.. On conclut que ; $f(x) = cx + d$. En remplaçant cette solution dans l'équation de base, on trouve : $f(x) = cx, c \geq 0$.

3. Soit f une solution éventuelle du problème. En substituant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$. En substituant $y = -1$, on trouve $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction f est impaire. En substituant $y = 1$, on obtient $f(2x+1) = 2f(x) + f(1)$ et par suite pour tous $u, v \in \mathbb{R}$,

   $$f(2(u+v+uv)+1) = 2f(u+v+uv) + f(1) = 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1)$$

   . D'autre part en substituant $x = u$ et $y = 2v+1$, il vient

   $$f(2(u+v+uv)+1) = f(u+(2v+1)+u(2v+1)) = f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv+u)$$

   En comparant, on en déduit

   $$2f(uv) + 2f(u) + 2f(u) + 2f(v) + f(1) = f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv+u)$$

   i.e. $f(2uv+u) = 2f(uv) + f(u)$, en substituant $v = -1/2$ dans cette équation on trouve $0 = f(-u/2) + f(u)$, puisque f est impaire on déduit que $f(u) = 2f(u/2)$, par suite $f(2x) = 2f(x)$, donc $f(2uv+u) = f(2uv) + f(u)$. En remplaçant u par y et $2uv$ par x, on obtient $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$, mais $f(0) = 0$ alors il est clair que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

4. Soit f une solution de l'équation. A priori, l'équation de base est obtenue par addition de deux équations de Cauchy. Après une courte recherche, on identifie trois solutions : la fonction identité et les constante 2 et 0. Commençons comme toujours par quelques substitutions de base.
   En prenant $x = y = 0$, on trouve $f(0)^2 = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$. Si $f(0) = 0$, alors substituer $x = 0$ donne immédiatement la fonction constante $f \equiv 2$. Il nous reste à séparer les deux solutions, 0 et lidentité. Supposer que $f(1) = 0$, amène à la solution $f \equiv 0$ et si $f(1) \neq 0$, alors on peut montrer que $f(q) = q$ pour tout rationnel q, le lecteur est invité à montrer cela, on le donne comme exercice. Nous avons donc à présent que si f n'est pas constante, alors f est l'identité sur $\mathbb{Q}$. Prendre $y = 1$, donne $f(x+1) = f(x) + 1$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = f(x) + n$ pour tout x réel et pour tout n entier naturel. Avec $y = n$, on trouve $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en particulier f est impaire. On a aussi $f(x) = nf(x/n)$ et donc $f(qx) = qf(x)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement, $y = q$ fournit $f(x+q) = f(x) + f(q)$ pour tout réel x et pour tout rationnel q. Substituer $y = -x$ donne $f(x^2) = f(x)^2$ et donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
   On passe maintenant à la meilleure partie : l'extension de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. C'est une manière de faire standard.

Il est donc judicieux de savoir la reproduire. Supposons qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) < x$. Soit alors q un rationnel tel que $f(x) < q < x$. On a alors

$$q > f(x) = f(x-q) + f(q) \geq f(q) = q$$

Ce qui est contradictoire. Pour $f(x) > x$, un raisonnement analogue fournit une contradiction. On conclut comme souhaité que $f(x) = x$.

5. Soit f une solution éventuelle. On définit la fonction continue $g : x \mapsto A^{-x} f(x)$. Il vient $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, i.e. la fonction g est additive, comme elle est continue, alors $g(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où c est une constante réelle, puis $f(x) = cxA^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$.

6. Soit f une solution éventuelle du problème. On remarque que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$. Ensuite en remplaçant x par $-x$, donne $f(x)^2 = f(-x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais par continuité de f, il vient $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x, i.e. f est paire et donc f est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier. Définissons la fonction F par $x \mapsto F(x) = f(\sqrt{x})^2$ pour $x \geq 0$, notre équation de base devient

$$F\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{F(u) + F(v)}{2}$$

où $u = x^2$ et $v = y^2$. Alors $F(u) = cu + b$ où encore $f(x) = \sqrt{cx^2 + b}$ pour $x \geq 0$ où c et b deux constantes positives. Puisque f est paire, alors $f(x) = \sqrt{cx^2 + b}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où c et b deux constantes positives.

7. On définit la fonction continue $g(x) = a^{-x^2/2} f(x)$. L'équation fonctionnelle initiale devient

$$g(x+y) = g(x)g(y)$$

Donc g est identiquement nulle ou $g(x) = b^x$ pour tout réel x où b est une constante strictement positive. On en déduit que $f \equiv 0$ ou $f(x) = b^x a^{x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour une certaine constante réelle strictement positive b.

8. On définit la fonction continue g par $g(x) = f(x) + 1$ pour tout réel x. L'équation fonctionnelle devient ainsi

$$g(x+y) = g(x)g(y)$$

Donc $g \equiv 0$ ou $g(x) = b^x$ avec b une constante strictement positive. Par suite, $f \equiv -1$ ou $f(x) = b^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où b une constante strictement positive.

9. La fonction identiquement nulle est solution de l'équation fonctionnelle proposée. Supposons que f n'est pas identiquement nulle, donc il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$, en substituant $x = x_0$ et en gardant y libre, on trouve $f\left(\sqrt{x_0^2 + y^2}\right) = f(x_0)f(y)$, mais $f\left(\sqrt{x_0^2 + y^2}\right) = f(x_0)f(-y)$, donc en comparant, on trouve $f(x_0)f(y) = f(x_0)f(-y)$ mais $f(x_0) \neq 0$, alors f est paire. Donc il suffit de trouver la forme explicite de $f(x)$ pour conclure. On définit la fonction continue g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(\sqrt{x})$. L'équation fonctionnelle prend donc la forme

$$g(u+v) = g(u)g(v)$$

avec $u = x^2$ et $v = y^2$. Cette équation fonctionnelle a pour fonction non identiquement nulle la fonction $g(u) = a^u$ où a est une constante strictement positive. Il vient que $f(x) = a^{x^2}$ pour tout x in $\mathbb{R}$ avec a une constante réelle strictement positive.

10. Soit f une solution éventuelle du problème. Si n est pair, remarquons qu'en remplaçant x par $-x$ dans l'équation initiale, il vient $f(x) + f(y) = \sqrt[n]{x^n + y^n} = f(-x) + f(y)$. Donc f est paire. On définit la fonction continue $g(x) = f(\sqrt[n]{x})$, $x \geq 0$ si n est pair, et $g(x) = \sqrt[n]{x}$ pour tout x réel si n est impair. L'équation fonctionnelle devient

$$g(u+v) = g(u) + g(v)$$

où $u = x^n$ et $v = y^n$. Cette dernière équation a pour solutions les fonctions $u \mapsto au$ où a est une constante réelle. Finalement les solutions de l'équation fonctionnelle originale sont les fonctions $x \mapsto ax^n$ où a est une constante réelle.

11. Soit f une solution éventuelle de l'équation fonctionnelle. En substituant $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. En substituant $x = 0$, on trouve $f(y^2) = f(-y^2)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, autrement dit f est paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ (faire une distinction de cas $x \geq 0$ et $x < 0$). Donc, il suffit de trouver les valeurs de $f(x)$ pour x positif. Pour $x > y$, on définit $\alpha = x^2 - y^2$ et $\beta = 2xy$, on a $\alpha^2 + \beta^2 = (x^2 + y^2)^2$. L'équation fonctionnelle devient

$$f\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) = f(\alpha) + f(\beta)$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent on trouve $f(x)ax^2$ où a est une constante réelle.

12. Soit f une solution éventuelle de l'équation fonctionnelle proposée. On définit la fonction g par $g(x) = f(x) - x^3/3 + x^2$. L'équation fonctionnelle prend alors la forme

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

Donc $g(x) = ax$ pour une certaine constante réelle a. Par suite $f(x) = ax + x^3/3 - x^2$ pour tout réel x où a est une constante réelle.

13. En prenant $x = a + b$ et $y = a - b$ dans l'équation originale on trouve

$$f(a)^2 = f(a + b)f(a - b)$$

Réciproquement à partir de l'équation fonctionnelle $f(a)^2 = f(a + b)f(a - b)$ on peut trouver

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = f(x)f(y)$$

en prenant $a = \dfrac{x + y}{2}$ et $b = \dfrac{x - y}{2}$. En substituant $y = 0$ dans l'équation originale, on trouve

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)f(0)$$

Si $f(0) = 0$, alors $f(x/2)^2 = 0$, par suite $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $f(0) \neq 0$, alors en remplaçant x par $x + y$ on trouve

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = f(x + y)f(0)$$

En comparant avec l'équation originale, on obtient

$$f(x)f(y) = f(x + y)f(0)$$

On définit la fonction continue g par $f(x)/f(0)$. L'équation fonctionnelle de base devient

$$g(x + y) = g(x)g(y)$$

Cette équation a pour solutions $g \equiv 0$ ou $g(x) = a^x$ avec a une constante strictement positive. Finalement les solutions de l'équation fonctionnelle mise en question sont les fonctions $f(x) = f(0)a^x$ où a est une constante strictement positive.

14. On définit la fonction continue g par $g(x) = f(x - a) - b$. L'équation fonctionnelle devient

$$g(x + y + 2a) = g(x + a) + g(y + a)$$

ou encore

$$g(u + v) = g(u) + g(v)$$

où $u = x + a$ et $v = y + a$. Par suite $g(u) = cu$ ou c une constante réelle, par suite $f(x) = c(x + a) + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où c est une constante réelle.

15. Le système d'équations proposé est équivalent à

$$\begin{cases} f(x+y)+g(x+y)=(f(x)+g(x))(f(y)+g(y)) \\ f(x+y)-g(x+y)=(f(x)-g(x))(f(y)-g(y)) \end{cases}$$

On pose $h(x)=f(x)+g(x)$ et $k(x)=f(x)-g(x)$, le système d'équations ci-dessus devient

$$\begin{cases} h(x+y)=h(x)h(y) \\ k(x+y)=k(x)k(y) \end{cases}$$

pour tous $x,y\in\mathbb{R}$. Donc $h\equiv 0$ ou $h(x)=a^x$ et $k\equiv 0$ ou $k(x)=b^x$ avec a et b deux constantes strictement positives. En conclusion, les solutions du système sont $f=g\equiv 0$ ou $f(x)=g(x)=a^x/2$ ou $f(x)=-g(x)=b^x/2$ ou $f(x)=(a^x+b^x)/2$ et $g(x)=(a^x-b^x)/2$ avec a et b deux constantes strictement positives.

Équations fonctionnelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

4

Certaines équations fonctionnelles portent sur des fonctions définies sur les entiers ou sur les rationnels. Il peut également arriver que l'on impose aux solutions d'être également à valeurs entières.

1 Équations fonctionnelles sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Les outils de résolutions des équations fonctionnelles portant sur les entiers différent de ceux utilisés pour la résolution des équations fonctionnelles définies sur le corps des réels. En effet, on peut utiliser la récurrence, propriétés de $\mathbb{N}$ et les propriétés arithmétiques. Dans cette section on va donner des exemples de ce type d'équations fonctionnelles.

Exemples.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous m, n dans $\mathbb{Z}$,

$$f(m+n) = f(m) + f(n)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Si l'on essaie d'identifier les solutions, on remarque que les fonction de la forme $n \to cn$ semblent être les seules. Remarquons au passage que si $f(n) = cn$, alors $c = f(1)$. On va donc montrer que les solutions sont de la forme $n \to f(1)n$. Gardons nos réflexes et tentons la substitution $m = n = 0$. Elle donne $f(0) = 0$. On peut donc utiliser un raisonnement par récurrence. Essayons donc de transformer notre équation pour obtenir une formule qui lie la valeur de $f(n+1)$ à celle de $f(n)$ ou d'une manière plus générale, une formule qui lie la valeur de $f(n)$ aux valeurs de $f(n-1), \ldots, f(0)$. Substituer $m = 1$ nous donne

$$f(n+1) = f(n) + f(1)$$

Rappelons que l'on désire garder $f(1)$ comme un paramètre constant. Il faut interpréter ce résultat de la manière suivante : étant donné la valeur de $f(n)$, alors je peux calculer la valeur de $f(n+1)$. Appliquons donc une récurrence pour montrer dans un premier temps que $f(n) = f(1)n$ pour $n \geq 0$. On sait déjà que $f(0) = 0 = f(1)$ů0. Supposons à présent que $f(n_0) = f(1)n_0$ pour un certain $n_0 \geq 0$. On a alors

$$f(n_0+1) = f(n_0) + f(1) = n_0 f(1) + f(1) = (n_0+1)f(1)$$

et donc on peut conclure que $f(n) = f(1)n$ pour $n \geq 0$. La substitution (naturelle !)$m = n$ dans l'équation de base donne $f(n) = f(n)$, car rappelons que $f(0) = 0$. Ainsi, étant donné $n < 0$, on a

$$f(n) = -f(-n) = -(-nf(1)) = nf(1)$$

car si $n < 0$, alors $n > 0$ et on sait calculer l'image par f des entiers positifs. On peut donc conclure que $f(n) = f(1)n$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$. On vérifie bien qu'il s'agit d'une solution.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Commençons par nos substitutions protocolaires. Si l'on pose $m = n = 1$, on obtient $f(1)^2 = f(1)$ et donc $f(1) = 1$, car $f(1)$ ne peut pas être zéro ici. De plus, il est facile de voir que la propriété de multiplicativité de f, à savoir$f(mn) = f(m)f(n)$, peut s'étendre à plus de deux variables. En effet, avec une simple récurrence sur k, on montre que pour des nombres naturels arbitraires $n_1, ..., n_k$, on a

$$\begin{aligned} f(n_1 n_2 ... n_k) &= f(n_1 \times (n_2 n_3 ... n_k)) \\ &= f(n_1) f(n_2 n_3 ... n_k) \\ &= ... \\ &= f(n_1) f(n_2) ... f(n_k) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où toutes les variables ni sont égales, alors on a $f(n^k) = f(n)^k$, quels que soit les entiers naturels non nuls n et k que l'on choisit. Une telle propriété de multiplicativité de f fait légitimement penser à la décomposition en nombres premiers. De manière plus précise, si l'on se donne $n > 1$ un nombre naturel avec sa décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{a_1} ... p_r^{a_r}$, alors on a

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{a_1} ... p_r^{a_r}) \\ &= f(p_1^{a_1}) ... f(p_r^{a_r}) \\ &= f(p_1)^{a_1} ... f(p_r)^{a_r} \end{aligned}$$

En particulier, si l'on connaît les valeurs $f(p)$ pour tous les nombres premiers p, alors on peut calculer $f(n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Mais quelles conditions ces valeurs $f(p)$ doivent elles satisfaire ? Sont-elles uniquement déterminées par l'équation de base ? En cherchant un peu, on remarque que l'on n'arrive pas à trouver de contraintes pour les valeurs $f(p)$ (exactement comme pour $f(1)$ dans l'exemple précédent). On doit donc les considérer comme des paramètres constants.

Montrons donc que la fonction f qui envoie 1 sur $f(1) = 1$ et$n = p_1^{a1} ... p_r^{a_r}$ sur $f(n) = f(p_1)^{a_1} ... f(p_r)^{a_r}$ est solution, quelque soient les valeurs des $f(p_i)$. Clairement, si $m = 1$ ou $n = 1$, alors cette fonction satisfait bien l'équation $f(mn) = f(m)f(n)$. Dans le cas général où $n = p_1^{a1} ... p_r^{a_r}$ et $m = q_1^{b1} ... q_s^{b_s}$, avec $p_1 = q_1, ..., p_k = q_k$ les facteurs premiers communs de m et n (où $0 \leq k \leq \min\{r, s\}$) et $p_{k+1}, ..., p_r, q_{k+1}, ..., q_s$ leurs facteurs premiers distincts, nous avons

$$\begin{aligned} f(nm) &= f(p_1^{a_1} ... p_r^{a_r} q_1^{b_1} ... q_s^{b_s}) \\ &= f(p_1^{a_1+b_1} ... p_k^{a_k+b_k} p_{k+1}^{a_{k+1}} ... p_r^{a_r} q_{k+1}^{b_{k+1}} ... q_s^{b_s}) \\ &= f(p_1)^{a_1+b_1} ... f(p_k)^{a_k+b_k} f(p_{k+1})^{a_{k+1}} ... f(p_r)^{a_r} f(q_{k+1})^{b_{k+1}} ... f(q_s)^{b_s} \\ &= f(p_1)^{a_1} ... f(p_r)^{a_r} f(q_1)^{b_1} ... f(q_s)^{b_s} \\ &= f(n)f(m) \end{aligned}$$

(Maroc 2006) La fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ vérifie pour tout x entier relatif,

$$f(x+1) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

Sachant que f(1)=2, calculer f(2006).

Solution. Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$f(x+2) = \frac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)} = \frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}$$
$$= \frac{1-f(x)+1+f(x)}{1-f(x)-(1-f(x))}$$
$$= -\frac{1}{f(x)}$$

Par conséquent,

$$f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = -\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}} = f(x)$$

Avec une récurrence simple, on peut montrer que

$$f(x+4k) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Sachant que $2006 = 4 \times 501 + 2$, alors $f(2006) = f(2)$ et puisque $f(2) = \dfrac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3$, donc $f(2006) = -3$.

> *(Maroc 1983) Trouver toutes les fonctions strictement croissantes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(2) = 2$ et vérifiant pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,*
> $$f(nm) = f(n)f(m)$$

Solution. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. En substituant $n = m = 1$, on trouve $f(1) = f(1)^2$, donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$, comme $f(1) > f(0) \geq 0$ alors $f(1) = 1$. Sachant que $0 \leq f(0) < f(1) = 1$ alors $f(0) = 0$. On va alors montrer par une récurence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$, pour $n = 0$ c'est vérifié. Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai jusquà le rang $n-1$ et montrons le au rang n. Si l'entier n n'est pas premier, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq a, b \leq n-1$ et $n = ab$. On a $f(n) = f(ab) = f(a)f(b)$. L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $f(a) = a$ et $f(b) = b$, par conséquent $f(n) = ab = n$. Si l'entier n est premier, alors $n+1$ n'est pas premier, alors $f(n+1) = n+1$ daprès ce qui précède. Mais on a $n-1 < n < n+1$, par croissance stricte de f, on a alors $f(n-1) < f(n) < f(n+1)$, i.e. $n-1 < f(n) < n+1$, d'où $f(n) = n$. On en déduit que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement cette fonction vérifie bien les conditions de l'énoncé.

> *(Maroc 1996) Existe t-il une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
> $$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$$

Solution. Supposons qu'il existe une telle application. Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) - f(n) = f(f(n)) > 0$, donc l'application f est strictement croissante (on peut montrer cela par une récurrence simple). Rappelons que pour toute fonction $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \geq n$. Dans notre cas on va montrer qu'à partir d'un certain rang p on a $f(n) > n$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(k) = k$, en substituant dans l'équation de base on trouve $f(k+1) = f(k) + f(f(k)) = 2k$. Si $k > 1$, alors $p = k+1$ convient. Sinon, si $k = 1$, alors $f(1) = 1$ et par conséquent $f(2) = f(f(1)) + f(1) = 2$ et alors $f(3) = f(f(2)) + f(2) = f(2) + f(2) = 4$, donc $p = 3$ convient. En conclusion, il existe un rang à partir duquel on a $f(n) > n$. Soit $n \geq p$, on a alors $f(n) > n$, i.e. $f(n) \geq n+1$ ce qui implique $f(f(n)) \geq f(n+1)$, c-à-d $f(n+1) - f(n) \geq f(n+1)$ et alors $f(n) \leq 0$ et ceci n'est pas possible. Donc il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant $f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tels que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^3(1) + f^3(2) + \ldots + f^3(n) = (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))^2$$

Solution. On sait que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Donc l'application identité est une solution. On va montrer que c'est l'unique solution du problème. En substituant $n = 1$, on obtient $f(1) = 1$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} f^3(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} f^3(k) - \sum_{k=1}^{n} f^3(k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k)\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)^2 \\ &= f(n+1)(2f(1) + \ldots + 2f(n) + f(n+1)) \end{aligned}$$

Donc

$$f^2(n+1) = 2f(1) + \ldots + 2f(n) + f(n+1)$$

Alors

$$f^2(n+2) - f^2(n+1) = f(n+2) + f(n+1)$$

En simplifiant on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+2) = f(n+1) + 1$. Une simple récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = n$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bornées telles que pour tous entiers $n, k \in \mathbb{N}$,

$$f(n+k) + f(k-n) = 2f(k)f(n)$$

Solution. Soit f une solution éventuelle de l'équation fonctionnelle ci-dessus. En substituant $n = k = 0$, on trouve $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. On est devant deux cas:

1. Si $f(0) = 0$, pour $n = 0$ et k libre, on trouve $2f(k) = 0$. Donc f est identiquement nulle.

2. Si $f(0) = 1$, en substituant $k = 0$ dans l'équation de base on trouve $f(n) + f(-n) = 2f(n)$, par suite f est paire. On peut alors restreindre l'étude aux entiers positifs. Pour $n = k$, on obtient cette fois $f(2k) = 2f^2(k) - 1$, pour tout entier k. Supposons par l'absurde que $\mid f(1) \mid \geq 2$, on prouve alors par récurrence sur p que $\mid f(2^p) \mid \geq 2^{p+1}$. Cette inégalité est vraie pour $p = 0$. Soit p un entier tel que $\mid f(2^p) \mid \geq 2^{p+1}$. Alors

$$\mid f(2^{p+1}) \mid = \mid 2f^2(2^p) - 1 \mid \geq 2 \mid f(2^p) \mid^2 -1$$

   Ainsi, $f(2^{p+1}) \geq 2^{2p+3} - 1 \geq 2^{p+2}$. On a alors prouvé le résultat souhaité. Ainsi f n'est pas majorée et ceci contredit le fait que f soit bornée. On en déduit que $f(1) \in \{-1, 0, 1\}$. 3 cas se présentent:

   (a) Si $f(1) = 1$, l'équation fonctionnelle s'écrit $f(k+1) = 2f(k) - f(k-1)$. Une récurence double montre que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit à nouveau que f soit bornée.

   (b) Si $f(1) = -1$, en substituant dans l'équation de base $n = 1$, on trouve $f(k+1) + 2f(k) + f(k-1) = 0$. Une récurrence double montre que $f(k) = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme f est paire on en déduit que $f(k) = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Sans difficulté on vérifie que cette fonction est bien une solution du problème.

   (c) Si $f(1) = 0$. En substituant $n = 1$ dans l'équation fonctionnelle de base on obtient $f(k+1) = -f(k-1)$ pour tout entier k. Puisque $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, avec un argument de récurence et de parité, on déduit que pour tout entier k,

$$f(4k) = 1, \qquad f(4k+1) = 0, \qquad f(4k+2) = -1 \qquad f(4k+3) = 0$$

pour tout entier k. Réciproquement, on vérifie qu'il s'agit bien d'une solution du problème.

(Proposé OIM 1991) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers m, n,

$$f(m + f(f(n)) = -f(f(m+1)) - n$$

Solution. Soit f une solution éventuelle de l'équation fonctionnelle ci-dessus. On note f^k la k-ième itérée de f. Pour tous entiers m et n on a alors

$$f(f^2(m) + f^2(n)) = -f^2(f^2(m)+1) - n$$

Le membre de gauche étant symétrique en m et n, celui de droite doit l'être également, doù

$$f^2(f^2(m)+1) + n = f^2(f^2(n)+1) + m$$

c-à-d.

$$m - n = f^2(f^2(m)+1) - f^2(f^2(n)+1)$$

Or daprès l'équation fonctionnelle initiale $f^2(f^2(m)+1) = f(-f^2(2) - m) = f(-f^2(2) - m) = f(-k-m)$, où $k = f^2(2)$. Donc pour tous entiers m et n, on a

$$m - n = f(-k-m) - f(-k-n)$$

Pour $n = -k$ et $p = -m-k$, on déduit pour tout entier p que $f(p) = f(0) - p$. Notons qu'en particulier, $f(f(p)) = f(f(0) - p) = f(0) - (f(0) - p) = p$. Réciproquement on obtient $f(0) = 1$. Donc la seule solution du problème est la fonction $p \mapsto 1 - p$.

(OIM 1977) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout entier $n \geq 0$,

$$f(n+1) > f(f(n))$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) > f(f(n)) \geq 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \geq 1$. Posons $f_2 : n \mapsto f(n+1) - 1$. La fonction $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_2(n) + 1 = f(n+1) > f(f(n)) = f(f_2(n-1)+1) = f_2(f_2(n-1)) + 1$$

ou encore $f_2(n+1) > f_2(f_2(n))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c-à-d. f_2 est aussi solution du problème. En particulier $f_2(n+1) \geq 1$ et donc $f(n+2) \geq 2$. Une récurrence sans difficulté montre alors que pour tous entiers $n, k \geq 0$, on a $f(n+k) \geq k$. En particulier, pour $n = 0$ il vient $f(k) \geq k$ pour tout entier $k \geq 0$. Ainsi on obtient $f(k+1) > f(f(k)) \geq f(k)$ ce qui prouve que f est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. L'inégalité de base $f(n+1) > f(f(n))$ entraîne $n+1 > f(n)$ par croissance stricte de f. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 > f(n) \geq n$ et alors $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, on vérifie bien que l'identité s'agit bien d'une solution.

(Proposé OIM 1995) Montrer qu'il existe une et une seule fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tous entiers $m, n > 0$ on a,

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 95)$$

Quelle est la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{19} f(k)$?

Solution. Soit f une solution éventuelle. Posons $F(n) = f(n) - 95$ et $m + 95 = k$. Alors pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \geq 96$, il vient

$$F(k + F(n)) = n + F(k) \qquad (*)$$

Par suite

$$F(k + F(k + F(n))) = F(k + n + F(k))$$

Mais daprès $(*)$ on a d'une part $F(k + F(k + F(n))) = k + F(n) + F(k)$ et d'autre part $F(k + n + F(k)) = k + F(k + n)$. Par suite

$$F(k + n) = F(k) + F(n)$$

pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \geq 1996$. Une récurrence donne $F(p) = pF(1)$ pour tout entier $p \geq 1$. En effet cette égalité est vrai pour $p = 1$. Supposons que cette égalité est vraie pour un $p \geq 1$ fixé. Daprès la relation établie ci-dessus et l'hypothèse de récurrence,

$$F(p + 1 + 96) = F(97) + F(p) = F(96) + F(1) + F(1) = F(96) + (p + 1)F(1)$$

D'autre part

$$F(p + 1 + 96) = F(p + 1) + F(96)$$

En comparant les deux égalités obtenues, on obtient $F(p + 1) = (p + 1)F(1)$ comme souhaité.
Pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \geq 96$, on a alors

$$F(k + F(n)) = (k + F(n))F(1) = kF(1) + nF(1)^2$$

et daprès $(*)$, $F(k + F(n)) = n + F(k) = n + kF(1)$, il en découle que $F(1)^2 = 1$ et donc $F(1) = 1$. Par suite pour tout entier n, $F(n) = n$. c-à-d. $f(n) = n + 95$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'agit bien d'une solution du problème.

La somme à évaluer est facile, en effet un calcul simple donne $\sum_{k=1}^{n} f(k) = 1995$.

(Roumanie) Existe t-il une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$f(3n + 1) \leq f(3n + 4) - 1$$

$$f(5n + 2) \geq f(5n + 7) - 1$$

Solution. Par absurde, on supposera qu'une telle fonction existe.
En appliquant la premiére inégalité plusieurs fois, on trouve :

$$f(3n + 1) \leq f(3n + 4) - 1 \leq f(3n + 7) - 2 \leq .... \leq f(3n + 16) - 5.$$

De la même maniére, on obtient :

$$f(5m + 2) \geq f(5m + 7) - 1 \geq f(5m + 12) - 2 \geq f(5m + 17) - 3$$

.

Pour $n = 5k + 2$ et $m = 3k + 1$:$f(15k + 7) \leq f(15k + 22) - 5$ et $f(15k + 7) \geq f(15k + 22) - 3$
Ce qui est contradictoire !

Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que : $f(f(n)) = 2n$ pour tout entier naturel non nul .

Solution. : Cet exercice aborde une question qui demande une construction adéquate . L'idée clé consiste à construire cette fonction sur les entiers impaires (modulo 4) puis les paires .

Soit k un entier naturel , on a : $f(4k + 1) = 2(4k + 3)$ et $f(4k + 3) = 4k + 1$. Et pour les paires , on prend : $f(2k) = 2f(k)$, cela donne l'image de $4k$ et $4k + 2$.

Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que : $f(f(n)) = n^2$ pour tout n.

.

Solution. Un lecteur trés attenfif trouvera que ce probléme est conséquence directe du précédant.Mais quelle est cette analogie ?

Parfois, il faut penser à la décomposition en nombres premiers .

Si : $n = \prod p_i^{a_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de n et g la fonction de l'exercice précedant alors, l'image de n sera : $f(n) = \prod p_i^{g(a_i)}$. Cette construction est clairement solution (vérifiez !).

2 Équations fonctionnelles sur $\mathbb{Q}$

Les techniques de résolution des équations fonctionnelles définies sur $\mathbb{Q}$ ressemblent à ceux utilisés dans la résolution des équations fonctionnelles sur $\mathbb{R}$. Cette partie qui concerne les équations fonctionnelles définies sur $\mathbb{Q}$ peut alors être considérée comme une révision des techniques vues dans les chapitres précédents. En revanche il existe plusieurs méthodes concernant les équations fonctionnelles sur $\mathbb{Q}$ qui ne sont plus valables dans le corps des réels. Dans la suite de cette section, on verra des exemples.

Exemples.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que $f(1) = 2$ et pour tous x et y rationnels,

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

Solution. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle ci-dessus. En substituant $x = 1$ et $y = n$ un entier naturel arbitraire, on trouve $f(n+1) = f(n)+1$, une simple récurrence fournit $f(n) = n+1$ pour tout entier naturel n non nul. En substituant $x = 0$ et $y = n$ un entier naturel arbitraire, on trouve $f(0)n = n$, donc $f(0) = 1$ et alors $f(n) = n + 1$ pour tout entier naturel. Maintenant on cherche à trouver $f(z)$ pour $z \in \mathbb{Z}$. En substituant $x = -1$ et $y = n$ un entier naturel arbitraire, on trouve $f(-n) = -f(n-1) + 1 = -n + 1$ (On a utilisé le fait que $f(-1) = 0$ qu'on peut trouver en substituant $x = -1$ et $y = 1$). Maintenant on cherche à déterminer $f(1/n)$ pour un certain entier naturel non nul n. En prenant $x = n$ et $y = 1/n$, on trouve

$$f(1) = (n+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1 \qquad (*)$$

En substituant $x = 1$ et $m + \frac{1}{n}$ dans l'équation originale, on obtient $f\left(m+1+\frac{1}{n}\right) = f\left(m+\frac{1}{n}\right)+1$. Ainsi, par une récurrence simple on trouve $f\left(m+\frac{1}{n}\right) = m + f\left(\frac{1}{n}\right)$. L'équation $(*)$ devient

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$$

pour tout entier naturel non nul n. Pour $x = \frac{1}{n}$ et $y = m \in \mathbb{Z}$ dans l'équation de départ on trouve alors $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$. Ainsi pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r + 1$. Réciproquement, il s'agit bien d'une solution du problème.

➛*La méthode utilisée dans l'exemple ci-dessus s'appelle la méthode $\mathbb{N} - \mathbb{Q} - \mathbb{R}$. On détaillera cette technique dans la section qui suit.*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. Pour $x = y = 0$ dans l'équation de base on obtient $(f(0)-1)^2 = 0$, i.e. $f(0) = 1$. De plus en substituant $x = 1$ et $y = -1$, on trouve $f(-1) = f(1)f(-1)$,i.e. $f(-1) = 0$ ou $f(1) = 1$. On distingue deux cas.

1. Supposons que $f(-1) = 0$. On va utiliser une autre fois une variable additionnelle z *(Méthode des trois variables)*. En remplaçant y par yz où z un rationnel arbitraire on trouve

   $$f(xyz) = f(x)f(yz) - f(x+yz) + 1 = f(x)(f(y)f(z) - f(y+z) + 1) - f(x+yz) + 1$$

   Cette longue formule fait sembler qu'on a trop éloigné du but, mais ce n'est pas le cas. Notons que le terme gauche est symétrique. En écrivant l'équation ci-dessus en x et comparant, on obtient

   $$f(x)f(y+z) - f(x) + f(x+yz) = f(z)f(x+y) - f(z) + f(xy+z) \qquad (*)$$

   En prenant $z = -1$ (on pouvait pas faire cela dés le début, car on avait $z = 1$ fixé !) on trouve

   $$f(x)f(z-1) - f(x) + f(x-y) = f(xy-1)$$

   et en prenant $x = 1$ dans cette égalité, on trouve

   $$f(y-1)(1-f(1)) = (1-f(1)) = f(1-y) - f(1) \qquad (**)$$

   En prenant $y = 2$ dans cette égalité, on trouve $f(1) = 0$ ou $f(1) = 2$. Distinguons deux cas alors,

   (a) Si $f(1) = 0$, en remplaçant y par $y+1$ dans $(**)$ on trouve $f(y) = f(-y)$. En remplaçant y par $-y$ dans l'équation de base on trouve $f(xy) = f(x)f(y) - f(x-y) + 1$, et alors pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a $f(x+y) = f(x-y)$. En particulier pour $x = y$ on trouve $f(2x) = f(0) = 1$ pour tout x rationnel. et ceci contredit le fait que $f(1) = 0$. Dans ce cas l'équation fonctionnelle proposée n'admet pas de solution.

   (b) Si $f(1) = 2$. Remplacer y par $y+1$ donne $1 - f(y) = f(-y) - 1$. En posant pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = 1 - f(x)$, on voit que la fonction g est impaire. De plus en substituant par g dans l'équation de base, on trouve

   $$g(xy) = g(x) + g(y) - g(x)g(y) - g(x+y) \qquad (***)$$

   En remplaçant y par $-y$, on trouve $-g(xy) = g(x) - g(y) + g(x)g(y) - g(x-y)$, en sommant avec $(***)$ on trouve $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) = g(2x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$. Cette équation doit vous faire bondir de votre chaise ! C'est une équation de Cauchy ! Sachant que le domaine d'étude est $\mathbb{Q}$, alors $g(x) = rx$ pou une certaine constante rationnelle r. En remplaçant dans $(***)$ on trouve $r = -1$, par conséquent $f(x) = 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ et on vérifie qu'il s'agit bien d'une solution fonctionnelle proposée.

2. Supposons que $f(1) = 1$. En substituant $z = 1$ dans $(*)$, on obtient

   $$f(xy+1) - f(x)f(y+1) + f(x) = 1$$

   Pour $y = -1$ on obtient $f(1-x) = 1$ pour tout rationnel x. Ceci signifie que $f(x) \equiv 1$ et cette fonction vérifie bien notre problème.

(OIM 1990) Construire une fonction $f : \mathbb{Q}^{*+} \to \mathbb{Q}^{*+}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{*+}$,

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

Solution. A priori, il suffit de trouver une seule fonction qui vérifie l'équation fonctionnelle, et on peut s'attendre à ce que cela ne soit pas bien difficile à réaliser. Que nenni ! L'équation n'étant pas très simple à appréhender, une solution ne saute pas vraiment aux yeux. Essayons donc e rendre le problème plus sympathique. Soit f une solution éventuelle. Comme on suit les conseils de la partie du cours, on va chercher quelques propriétés que f vérifie. Or on remarque que f est injective (Voir le chapitre suivant sur l'*injectivité*). En effet, si $a, b \in \mathbb{Q}^{*+}$ tels que $f(a) = f(b)$, alors $f(a)/a = f(af(a)) = f(af(b)) = f(a)/b$ et donc $a = b$ puisque $f(a) \neq 0$. Essayons maintenant de déterminer certaines valeurs particulières de f. En substituant $x = y = 1$, on trouve $f(f(1)) = f(1)$, mais on vient de voir que f est injective, donc $f(1) = 1$. On en déduit immédiatement que que, pour tout $y \in \mathbb{Q}^{*+}$, on a

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \qquad (*)$$

On remarque que f est surjective (Voir le chapitre suivant sur la *surjectivité*) car daprès $(*)$, tout $y \in \mathbb{Q}^{*+}$ admet un antécédent $f(1/y)$ par f. D'autre part, pour $x = f\left(\frac{1}{y}\right)$ dans l'équation de base, il vient

$$f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)f(y)\right) = \frac{f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{y} = 1 = f(1)$$

Par injectivité de f, il vient que pour tout $y \in \mathbb{Q}^{*+}$,

$$f\left(\frac{1}{y}\right)f(y) = 1 \qquad (**)$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{*+}$, puisque f est bijective, il existe $t \in \mathbb{Q}^{*+}$ tel que $y = f(1/t)$. Par suite, par $(*)$ on a $f(y) = f\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t$ et donc

$$f(xy) = f\left(xf\left(\frac{1}{t}\right)\right) = tf(x) = f(x)f(y) \qquad (***)$$

Les relations $(*)$ et $(***)$ sont plus agréables que l'équation fonctionnelle initiale. Il reste comme même à prouver qu'elles sont à elles deux, équivalente à cette dernière. Or si $g : \mathbb{Q}^{*+} \to \mathbb{Q}^{*+}$ est une fonction telle que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{*+}$, $g(g(y)) = 1/y$ et $g(xy) = g(x)g(y)$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{*+}$, on a $g(xg(y)) = g(x)g(g(y)) = \dfrac{g(x)}{y}$, ce qui assure que g vérifie bien l'équation fonctionnelle initiale. En conclusion, il nous reste plus qu'à construire une fonction $f : \mathbb{Q}^{*+} \to \mathbb{Q}^{*+}$ vérifiant les conditions $(*)$ et $(***)$. Or de $(***)$, on déduit immédiatement que si $p_1, ..., p_n$ sont des nombres premiers et si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des entiers (éventuellement négatifs), alors il faut que :

$$f(p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n}) = f(p_1)^{\alpha_1}...f(p_n)^{\alpha_n} \qquad (****)$$

L'idée est alors de considérer la suite (p_i) des nombres premiers ordonnés et de poser pour tout entier $k \geq 1$,

$$f(p_{2k-1}) = p_{2k}, \qquad f(p_{2k}) = \frac{1}{p_{2k-1}}$$

Puis, d'étendre la construction de f à $\mathbb{Q}^{*+}$ tout entier. Tout rationnel $x > 0$ s'écrit de façon unique sous la forme $\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$ où les α_i sont des entiers quelconques, seulement un nombre fini d'entre eux étant non nuls. On définit alors $f(x)$ via $(****)$. Il n'est pas difficile de vérifier que dans ces conditions, les relations $(*)$ et $(***)$ sont vérifiées, et alors f est bien une solution du problème

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{*+} \to \mathbb{Q}^{*+}$ telles que pour tout rationnel $x > 0$,

$$f(x+1) = f(x) + 1 \qquad f(x^2) = (f(x))^2$$

Solution. On remarque que l'identité est une solution, on va montrer que c'est l'unique solution. Soit f une solution vérifiant le système d'équations ci-dessus. Une récurrence sans difficulté sur $n \in \mathbb{N}^*$ montre que $f(x+n) = f(x) + n$ pour tout x rationnel > 0 et pour tout entier naturel non nul n. Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\frac{a}{b}+b\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + b^2 + 2a$. Par suite, en utilisant la deuxième condition, il vient :

$$f\left(\left(\frac{a}{b}+b\right)^2\right) = f\left(\left(\frac{a}{b}+b\right)\right)^2 = \left(f\left(\frac{a}{b}\right)+b\right)^2 = \left(f\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2 + b^2 + 2bf\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (*)$$

D'autre part

$$f\left(\left(\frac{a}{b}+b\right)^2\right) = f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + b^2 + 2a\right) = f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2\right) + b^2 + 2a == f\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2 + b^2 + 2a \qquad (**)$$

En comparant $(*)$ et $(**)$, on aboutit à $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$. Ceci étant vrai pour tous $a, b\mathbb{N}^*$, on déduit que $f(x) = x$ pour tout $x > 0$ rationnel.

➛*Remarquer qu'on a utilisé la caractérisation des nombres rationnels strictement positifs, ce qui n'est plus valable quand on passe à l'ensemble des nombres réels.*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(x+1) = f(x) + 1$ et pour tout $x \in \mathbb{Q}^{*+}$ on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$.

Solution. Il est clair que $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(1/2) = 1/2$, $f(3) = 3$, $f(3) = 3$ et $f(1/3) = 1/3$. On se propose de montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}^{*+}$. Soit $n > 1$ un entier, on va montrer par récurrence forte sur la propriété $P(n)$ suivante, *«Pour tous $h, k \in \mathbb{N}^*$, $h \wedge k = 1$, $h + k = n$ on a $f(h/k) = h/k$ »*. On voit facilement que $P(2)$ est vraie. On suppose que $P(n)$ est vraie jusquà un rang m, et montrons que $P(m+1)$ est aussi vraie. Soient h et k deux entiers strictement positifs tels que $h + k = m + 1$. Deux cas se présentent,
Premier cas. Supposons que $h > k$, par hypothèse de récurrence, on a

$$f\left(\frac{h}{k}\right) = f\left(1 + \frac{h-k}{k}\right) = f\left(\frac{h-k}{k}\right) + 1 = \frac{h-k}{k} + 1 = \frac{h}{k}$$

Second cas. Supposons que $h < k$, alors d'après l'équation $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ on a,

$$f\left(\frac{h}{k}\right) = f\left(\frac{1}{h/k}\right) = \frac{f(k/h)}{k^2/h^2} = \frac{k/h}{k^2/h^2} = \frac{k}{h}$$

D'après ce qui précède. Ainsi l'unique solution de l'équation fonctionnelle origanale est l'identité.

(Crux) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to]0, +\infty[$ telles que $f(0) = 1$ et pour tous x et y rationnels,

$$f(x) = \sqrt{f(x+y)f(x-y)}$$

Solution. Soit f une solution éventuelle de l'équation fonctionnelle ci-dessus. Celle-ci est équivalente à l'équation suivante,

$$\frac{f(x+y)}{f(x-y)} = \frac{f(x)}{f(x-y)}$$

En substituant $x = 0$ dans cette équation, on trouve $f(-y) = 1/f(y)$. Pour $x = ky$ où k un entier relatif on obtient

$$\frac{f((k+1)y)}{f(ky)} = \frac{f(ky)}{f((k-1)y)}$$

Ainsi la suite de terme générale $f(ny)/f((n-1)y)$ où $n \geq 1$ est constante, et par conséquent,

$$\frac{f(ny)}{f((n-1)y)} = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y)$$

Par suite la suite $(f(ny))_n$ est une suite géométrique pour y fixé de raison $f(y)$ et alors $f(ny) = f(y)^n$. Ainsi en remplaçant y par y/n, on obtient $f(y) = f(y/n)^n$, i.e. $\sqrt[n]{f(y)} = f(y/n)$. Ainsi pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

avec $a = f(1)$. Par suite $f(x) = a^x$ pour tout rationnel positif x et comme $f(-y) = \dfrac{1}{f(y)}$ et alors $f(x) = a^x$ pour $x \in \mathbb{Q}^-$. Donc la fonction $x \mapsto a^x$ pour x rationnel où a un réel strictement positif.

3 Méthode $\mathbb{N} - \mathbb{Q} - \mathbb{R}$

Dans cette section, on va voir une méthode de résolution des fonctions définies sur $\mathbb{Q}$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Il consiste détendre les résultats de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ puis à $\mathbb{Q}$. On a vu cette technique pas mal de fois, notamment dans la résolution de l'équation de Cauchy, l'équation de Jensen. On va commencer par un exemple vu précédemment. Il s'agit d'un exercice issus de l'olympiade nationale marocaine.

Exemples.

(Maroc 2004) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

Solution. En prenant $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. En prenant $x = 0$ et en gardant y libre on trouve $f(-y) = f(y)$. En prenant $y = x$, on trouve $f(2x) = 4f(x)$, puis en prenant $y = 2x$ on trouve $f(3x) = 9f(x)$. On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(nx) = n^2 f(x)$. On vérifie facilement par récurrence que cette égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, en prenant $x = 1/q\,, (q \in \mathbb{N}^*)$ on obtient $f(1) = f(q \times 1/q) = q^2 f(1/q)$, d'où pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f(1/q) = f(1)/q^2$. Finalement, soit $x = p/q$ un rationnel, on a alors $f(x) = f(p/q) = p^2 f(1/q) = p^2/q^2 f(1) = x^2 f(1)$. En posant $a = f(1)$, on obtient $f(x) = ax^2$ où $a \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, on vérifie que cette fonction vérifie bien l'équation de base. Donc les solutions de l'équation fonctionnelle sont $x \mapsto ax^2$ avec a un nombre rationnel.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. En substituant $x = y = z/2$ où z un nombre rationnel arbitraire, on obtient

$$f(z) = f\left(\frac{z}{2}\right) + f\left(\frac{z}{2}\right) + f\left(\frac{z}{2}\right) f\left(\frac{z}{2}\right)$$

i.e.

$$f(z) = \left(f\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 1\right)^2 - 1$$

En particulier, on a $f(x) \geq -1$ pour tout x rationnel. Si $f(1) = -1$, en substituant $y = 1$ et en remplaçant x par $x-1$ dans l'équation initiale on trouve $f(x) = f(x-1+1) = f(x-1)+f(1)+f(1)f(x-1) = -1$. Supposons maintenant que $f(1) > -1$. En remplaçant y par x et $2x$ respectivement on trouve $f(2x) = 2f(x)+f(x)^2 = (f(x)+1)^2 - 1$ et $f(3x) = f(2x)+f(x)+f(x)f(2x) = f(x)^3+3f(x)^3+3f(x) = (f(x)+1^3 - 1$. Il n'est pas difficile de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(nx) = (f(x)+1)^n - 1$. En substituant $x = my/n$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et y un nombre rationnel arbitraire, on obtient $f(my) = \left(f\left(\frac{m}{n}y\right)+1\right)^n - 1$ ou encore $f\left(\frac{m}{n}y\right) = (f(y)+1)^{\frac{m}{n}} - 1$, pour $y = 1$ dans cette relation on trouve $f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}} - 1$ où $a = f(1)+1 > 0$ une constante réelle. Réciproquement, les fonctions $x \mapsto a^x - 1$ vérifient l'équation fonctionnelle d'origine.

➛*Notons qu'on peut résoudre cette équation fonctionnelle en utilisant les équations de Cauchy.*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulles telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. En substituant $x = y = 0$, on voit que $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$. En substituant $x = y$ dans l'équation originale, on trouve $f(2x)f(0) = f(x)^4$ pour tout x rationnel. Si $f(0) = 0$, on obtient f identiquement nulle, ce qui contredit les hypothèses. Supposons maintenant que $f(0) = 1$, en remplaçant x par x et $2x$ et 2^2x respectivement dans la dernière équation établie, il vient $f(2x) = f(x)^4 = f(x)^{2^2}$ et $f(4x) = f(2x)^4 = f(2x)^{4^2}$ et $f(8x) = f(4x)^4 = f(x)^{8^2}$. Une récurrence simple nous fournit $f(nx) = f(x)^{n^2}$ pour tout entier naturel n. En substituant $x = my/n$ où $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et y un nombre rationnel arbitraire dans la dernière équation établie, il vient

$$f(my) = f\left(\frac{m}{n}y\right)^{n^2}$$

mais $f(y)^{m^2} = f\left(\frac{m}{n}y\right)^{n^2}$ alors $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(y)^{\frac{m^2}{n^2}}$ et pour $y = 1$, il vient $f\left(\frac{m}{n}\right) = q^{\frac{m^2}{n^2}}$ où $q = f(1)$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $f(x) = c^{x^2}$ pour une constante c réelle . On peut étendre notre résultat à $\mathbb{Q}$ tout entier. En effet, en substituant $x = 0$ et en laissant y libre il vient $f(x)^2 f(0)^2 = f(x)f(-x)$ ou encore $f(x) = f(-x)$. Doù le résultat. Passons au second cas, $f(0) = -1$, on remarquant que la fonction $g = -f$ est une solution de l'équation fonctionnelle originale et que $g(0) = 1$, on déduit que $f(x) = -c^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ pour une certaine constante réelle c. En conclusion les solutions de l'équation fonctionnelle mise en question sont les fonctions $x \mapsto c^{x^2}$ et $x \mapsto -b^{x^2}$ où c et b deux constantes réelle.

(Inde 2003) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation. A priori, l'équation de base est obtenue par addition de deux équations de Cauchy. Après une courte recherche, on identifie trois solutions : la fonction identité et les constante 2 et 0. Commençons comme toujours par quelques substitutions de base.
En prenant $x = y = 0$, on trouve $f(0)^2 = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$. Si $f(0) = 0$, alors substituer

$x = 0$ donne immédiatement la fonction constante $f \equiv 2$. Il nous reste à séparer les deux solutions, 0 et lidentité. Supposer que $f(1) = 0$, amène à la solution $f \equiv 0$ et si $f(1) \neq 0$, alors on peut montrer que $f(q) = q$ pour tout rationnel q, le lecteur est invité à montrer cela, on le donne comme exercice. Nous avons donc à présent que si f n'est pas constante, alors f est l'identité sur $\mathbb{Q}$. Prendre $y = 1$, donne $f(x+1) = f(x)+1$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = f(x)+n$ pour tout x réel et pour tout n entier naturel. Avec $y = n$, on trouve $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en particulier f est impaire. On a aussi $f(x) = nf(x/n)$ et donc $f(qx) = qf(x)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement, $y = q$ fournit $f(x+q) = f(x)+f(q)$ pour tout réel x et pour tout rationnel q. Substituer $y = -x$ donne $f(x^2) = f(x)^2$ et donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
On passe maintenant à la meilleure partie, l'extension de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. C'est une manière de faire standard. Il est donc judicieux de savoir la reproduire. Supposons qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) < x$. Soit alors q un rationnel tel que $f(x) < q < x$. On a alors

$$q > f(x) = f(x-q) + f(q) \geq f(q) = q$$

Ce qui est contradictoire. Pour $f(x) > x$, un raisonnement analogue fournit une contradiction. On conclut comme souhaité que $f(x) = x$.

4 Exercices

1. (Maroc 2014) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ qui vérifient la relation suivante pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$,
$$f(f(a)+f(b)) = a+b-1$$

2. (Maroc 2005) Déterminer toutes les fonctions f définies de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^* - \{1\}$ et qui vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(n)+f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 168$$

3. Déterminer toutes les fonctions $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$h(h(n)) + h(n+1) = n+2$$

4. (Irlande 1999) Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tous entiers premiers entre eux a et b on a $f(ab) = f(a)f(b)$ et pour tous nombres premiers p et q on a $f(p+q) = f(p)+f(q)$.
Montrer que $f(2) = 2$ et $f(3)$ et $f(1999) = 1999$.

5. (OIM 1993) Existe t-il une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ strictement décroissante telle que $f(1) = 2$ et pour tout entier $n > 0$, $f(f(n)) = f(n)+n$.

6. Trouver toutes les fonctions $f ; \mathbb{N}^* \to [1, +\infty[$ telles que $f(2) = 4$ et pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n)/n \leq f(n+1)/(n+1)$ et $f(mn) = f(m)f(n)$.

7. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$,
$$f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n) + 2$$

8. (Roumanie 2010) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f(n) + f(n+1) + f(f(n)) = 3n+1$$

5 Solutions des exercices

1. Soit f une solution éventuelle. En prenant $b = 1$ et en gardant a libre, on trouve $f(f(a)+f(1)) = a$. Pour $a = f(n)+f(1)$ et $b = 2f(1)$ dans l'équation originale on obtient $f(a) = n$, par suite $f(n+1) = f(n)+3f(1)-1$. En posant $f(1) = c$. Par suite nous obtenons $f(n) = (3n-2)c - n + 1$ $(*)$ (On peut

voir que la suite de terme général $f(n)$ est arithmétique) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite $f(0) = -2c + 1$, et en prenant $a = 0$ et $b = 1$ dans l'équation de base on obtient $f(f(0) + f(1)) = 0$, i.e. $f(-c+1) = 0$ et alors $c(-3c+2) = 0$ d'aprés $(*)$, et puisque $c \in \mathbb{Z}$, alors $c = 0$. Donc $f(n) = -n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On vérifie sans difficultés que cette fonction vérifie bien notre équation.

2. Soit f une solution éventuelle. En remplaçant $k+1$ par k dans l'équation ci-dessus on trouve $f(k+1) + f(k+2) = f(k+3)f(k+4) - 168$. Une différence donne $f(k+2) - f(k) = f(k+3)[f(k+4) - f(k+2)]$. Ainsi $f(3) - f(1) = f(4) = [f(5) - f(3)]$. En remplaçant k par $2m - 1$ ou $m \geq 1$ un entier arbitraire, on trouve $f(2m+1) - f(2m-1) = f(2m+2)[f(2m+3) - f(2m+1)]$ et comme pour tout entier $n \geq 1$, on a $\mid f(3) - f(1) \mid$, $\mid f(5) - f(3) \mid$, $\mid f(2m+1) - f(2m-1) \mid$ sont tous strictement positifs ou tous nuls. Si ces nombres sont tous positifs, alors :
$$\mid f(3) - f(1) \mid > \mid f(5) - f(3) \mid > \ldots > \mid f(2m+1) - f(2m-1) \mid$$
Or il n'existe pas une suite d'entiers naturels qui est strictement décroissante. Donc $\mid f(2m+1) - f(2m-1) \mid = 0$ pour tout entier $m \geq 1$. i.e. la suite de terme géneral $f(2m-1)$ est constante. On pose alors $f(2m-1) = a$ pour tout entier $m \geq 1$ où a est une constante entière > 1. Un raisonnement similaire montre l'existence d'une constante $b > 1$ tel que pour tout $m \geq 1$, on a $f(2m) = b$. En substituant $n = 1$ dans l'équation originale, on trouve $a + b = ab - 168$. On va mettre cette équation à inconnus entiers sous sa forme canonique, il vient $(a-1)(b-1) = 13^2$. d'ou $(a, b) = (14, 14)$ ou $(a, b) = (2, 170)$ ou $(a, b) = (170, 2)$. Donc les solutions de l'équation fonctionnelle mise en question sont $f(n) \equiv 14$ et les deux fonctions
$$f(n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 170 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad \textit{et} \quad f(n) = \begin{cases} 170 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$
➛*C'est un bon exercice qui montre lutilisation des propriétés de $\mathbb{N}$. On a utilisé dans cet exercice le fait que toute suite décroissante de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$ est stationnaire.*

3. Soit h une solution éventuelle. Notons que notre équation fonctionnelle fait apparaître $h(h(n))$ et $h(n+1)$, donc il est clair qu'on ne peut pas créer une relation de récurrence. On va utiliser une autre approche pour résoudre cette équation fonctionnelle. Commençons d'abord par trouver les valeurs de $h(1)$ et $h(2)$. En substituant $n = 1$ dans l'équation de base, on trouve $h(h(1)) + h(2) = 3$, par suite $h(h(1)) \leq 2$ et $h(2) \leq 2$. Deux cas se présentent,
Premier cas. Si $h(2) = 1$, alors $h(h(1)) = 2$. En prenant $n = 2$ dans l'équation initiale, on obtient $4 = h(h(2)) + h(3) = h(1) + h(3)$. On pose $h(1) = k$, il est clair que $k \neq 1$ et $k \neq 2$ et puisque $k \leq 3$, alors $k = 3$. Mais $2 = h(h(1)) = h(3) = 1$, ceci est contradictoire. Donc l'équation fonctionnelle mise en question n'admet pas de solution.
Second cas. Si $h(2) = 2$, alors $h(h(1)) = 1$. En prenant $n = 2$ dans l'équation initiale, il s'en suit que $h(3) = 2$. En prenant $n = 3$, 4, 5 on obtient $h(4) = 3$ et $h(5) = 4$ et $h(6) = 4$. Une récurrence simple nous fournit $f(n) \geq 2$ pour $n \geq 2$, par suite $h(1) = 1$ car $h(h(1)) = 1$. Il est clair qu'il existe au plus une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle proposée. Il suffit alors de trouver une solution. La solution est $h(n) = \lfloor n\alpha \rfloor + 1$ où $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. On peut facilement obtenir la valeur de α car α est solution de l'équation $\alpha^2 + \alpha + 1$. Réciproquement la fonction $n \mapsto \lfloor n\alpha \rfloor + 1$ vérifie l'équation de base où α la constante citée précédemment.

4. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Une telle fonction existe bien, l'identité par exemple. En prenant $a = 2$ et $b = 3$, on trouve $f(6) = f(2)f(3)$ et en prenant $p = q = 3$ on trouve $f(6) = 2f(3)$. Comme $f(3) \neq 0$, alors $f(2) = 2$. En substituant $p = q = 2$, on trouve $f(4) = 4$. Pour $p = 2$ et $q = 3$, on trouve $f(5) = 2 + f(3)$. Alors, pour $p = 5$ et $q = 2$, on trouve $f(7) = f(5) + 2 = f(3) + 4$. Mais pour $p = 5$ et $q = 7$, on obtient $f(12) = f(7) + f(5) = 2f(3) + 6$. Tandis que, pour $a = 4$ et $b = 3$, on obtient $f(12) = f(4)f(3) = 4f(3)$. On en déduit alors que $f(3) = 3$ puis que $f(5) = 5$ et $f(7) = 7$. Pour déterminer $f(1999)$, il convient de savoir que 1999 est premier, et que $1999 + 3 = 2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$. Il suffit donc de trouver $f(11)$ et $f(13)$. Pour $a = 5$ et $b = 3$, on trouve $f(15) = 15$. Pour $p = 13$ et $q = 2$, on trouve $f(13) = f(15) - f(2) = 13$ et pour $p = 11$ et $q = 2$, on trouve $f(11) = f(13) - f(2) = 11$. On en déduit que $f(2002) = f(2)f(7)f(11)f(13) = 2002$, puis que $f(1999) = f(2002) - f(3) = 2002 - 3 = 1999$, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

5. La réponse est Oui. On peut par exemple construire une telle fonction par récurence. On pose $f(1)=2$. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On suppose que les nombres $f(1),\dots,f(n-1)$ sont construits, avec $f(1)<f(2)<\dots<f(n-1)$. On désigne par $g(n)$ le plus grand entier $k \in \{1,\dots,n-1\}$ tel que $f(k) \leq n$. On pose alors $f(n)=n+g(n)$. La condition de croissance sur les $f(i)$ assure qu'alors $g(n) \geq g(n-1)$, et donc que $f(n)>f(n-1)$. D'autre part, puisque la fonction f est strictement croissante sur $\{1,2,\dots,n\}$ et que $f(1)=2$, on a $f(n)>n$. Par suite $g(f(n)) = \max\limits_{1\leq k\leq n,\, f(k)\leq f(n)} k = n$. D'où $f(f(n))=g(f(n))+f(n)=f(n)+n$.

   ➛ *On a utilisé une propriété de $\mathbb{N}$ qui est très utile. Si $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)\geq n$*

6. Soit f une solution éventuelle du problème. Il est clair que la fonction $g(n)=f(n)/n$ et que pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$, on a $g(mn)=g(m)g(n)$ (on dit que g est multiplicative). Il vient que $g(1)=1$ et donc $g(2)=2$. Nous allons montrer que g est l'identité. Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $g(k)\neq k$. En posant $l=g(k)\neq k$. On aura terminé si on trouve x et y vérifiant $(2^x-k^y)(2^x-l^y)<0$ à cause de la monotonie. Comme k et l sont différents, on peut trouver un entier naturel sachant que le rapport est compris entre $\max\{k^y,l^y\}$ et $\min\{k^y,l^y\}$ et que $\min\{k^y,l^y\}\geq 2$. Alors, il existe une puissance de 2 compris entre $\max\{k^y,l^y\}$ et $\min\{k^y,l^y\}$, et en posant 2^x cette puissance, on aboutit à la conclusion désirée.

7. Si $f\equiv c$ une constante, on trouve $2c=c^2+2$, i.e. $(c-1)^2+1=0$, ce qui est impossible, donc f n'est pas une constante. En substituant $m=0$ dans l'équation de base, on trouve $f(n)+f(-1)=f(0)f(n)+2$, i.e. $f(n)(1-f(0))=2-f(-1)$. Sachant que f n'est pas une constante, il vient $f(0)=1$ et $f(-1)=2$. En substituant $m=-1$ dans l'équation de base, on trouve $f(n-1)+f(-n-1)=2f(n)+2$. Le terme de gauche reste le même en remplaçant n par $-n$, donc f est paire. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $f(n-1)+f(n+1)=2f(n)+2$, une récurrence sans difficulté fournit $f(n)=n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et par suite la parité de f donne $f(n)=n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Réciproquement cette fonction est bien une solution.

8. En substituant $n=1$, on trouve $f(1)+f(2)+f(f(1))=4$, comme $f(1),f(2),f(f(1))\geq 1$ on a alors $f(1)\in\{1,2\}$. Si $f(1)=1$, alors $f(2)=2$ et une récurrence sans difficultés donne $f(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Si $f(1)=2$, alors $f(2)=1$ et $f(3)=4$. Un récurrence sans difficulté fournit

$$f(n)=\begin{cases} n+1 & \text{si } n \ \textit{est} \text{ impair} \\ n-1 & \text{si } n \ \textit{est} \text{ pair}\end{cases}$$

Utilisation des propriétés des fonctions

5

Après avoir vu toutes les techniques de bases concernant la résolution des équations fonctionnelles, on va aborder dans ce chapitre les techniques de résolution qui utilisent les propriétés des fonctions (l'injectivité, surjectivité, parité, périodicité, points fixes ...).

1 Parité

1.1 Généralités

On a utilisé pas mal de fois dans les chapitres précédents la parité de la fonction pour étendre nos résultats de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}^+$ à $\mathbb{Q}$ et de $[0, +\infty[$ à $\mathbb{R}$. Dans cette section on va voir des exemples.

Rappelons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite paire si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$, et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite impaire si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemples.

(Maroc 2015) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y)$$

Solution. Soit f une solution éventuelle du problème. En substituant $x = 0$, il vient $f(f(y)f(-y)) = -yf(y)$. La fonctions $f(f(y)f(-y))$ étant paire, alors il en est de même pour $-yf(y)$, i.e. $yf(-y) = -yf(y)$ pour tout y réel. Donc pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = -f(x)$. En substituant $x = y = 0$ dans l'équation de base, on trouve $f(f(0)^2) = 0$. En substituant $x = f(0)^2$ dans l'équation $f(f(x)^2) = x^2$ on trouve $f(\underbrace{[f(f(0)^2)]}_{0}{}^2) = f(0)^4$, par suite $f(0) = f(0)^4$, il vient $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$, on a en particulier $f(-0) = -f(0)$ et alors $f(-x) = -f(x)$ pour tout x réel. En permutant x et y dans l'équation de base on trouve

$$f(f(x+y)f(y-x)) = y^2 - xf(x)$$

Mais

$$f(f(x+y)f(y-x)) = f(-f(x+y)f(x-y)) = -f(f(x+y)f(x-y)) = -x^2 + yf(y)$$

Donc
$$x^2 - yf(y) = -y^2 + xf(x)$$
En particulier, pour $y \neq 0$, on trouve $xf(x) = x^2$, donc pour $x \neq 0$ on a $f(x) = x$ mais on sait déjà que $f(0) = 0$ et par suite $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans le second cas où $f(0) = 1$, on sait déjà que $f(f(0)^2) = 0$, donc $f(1) = 0$ et en remplaçant x par $-y+1$ dans l'équation initiale on trouve
$$f(0) = (y-1)^2 - yf(y)$$
Alors $yf(y) + 1 = y^2 - 2y + 1$ et alors $f(y) = y - 2$, donc $f(0) = -2$, ceci n'est pas possible car $f(0) = 1$. Donc l'unique fonction vérifions l'équation fonctionnelle de base est l'identité. Réciproquement, on vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une solution.

(États unis) Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on a
$$f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n$$

Solution. Soit f une solution éventuelle de l'équation ci-dessus. Pour $x = y = 0$ on trouve $f(0) = 0$. En substituant $y = 0$, on trouve pour tout réel y, $f(y^n) = f(y)^n$. Soit $a \geq 0$ un réel. Il existe un réel y tel que $a = y^n$, et donc pour tout réel x,
$$f(x+a) = f(x+y^n) = f(x) + f(y^n) = f(x) + f(y)^n = f(x) + f(a)$$
En particulier pour $x = -a$, on déduit que f est impaire. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$. Alors $f(x-a) = -f(-x+a) = -(f(-x) + f(a)) = f(x) - f(a)$. En conclusion, pour tous réels x et a, on a $f(x+a) = f(x) + f(a)$. C'est alors une équation de Cauchy, on sait qu'alors pour tout réel x et tout rationnel r, on a $f(xr) = rf(x)$, en particulier $f(r) = f(1)r$. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f((r+x)^n) = (f(r) + f(x))^n$. Par suite
$$f((r+x)^n) = f\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k f(x^{n-k})$$
et
$$(f(r) + f(x))^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (f(r))^k (f(x))^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k (f(1))^k (f(x))^{n-k}$$
D'où
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k f(x^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k (f(1))^k (f(x))^{n-k}$$
En considérant x fixé, les deux polynômes (en r) ci-dessus coïncident sur tous les rationnels, et donc ils sont égaux et on peut identifier les coefficients. En particulier, pour $k = n-2$ et pour $k = n-1$, il vient
$$\begin{cases} f(x^2) = (f(x))^2 (f(1))^{n-2} \\ f(x) = f(x)(f(1))^{n-1} \end{cases} \qquad (*)$$
En particulier pour $x = 1$, on déduit que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$ ou, si n est impair, $f(1) = -1$. Si $f(1) = 0$, de $(*)$ on déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et réciproquement la fonction identiquement nulle est bien une solution. Si $f(1) = 1$, de $(*)$ et puisque tout réel positif est le carrée d'un réel, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Soient x et y deux réels tels que $0 \leq x \leq y$. Alors
$$0 \leq f(y^2 - x^2) = f(y^2) - f(x^2) = (f(y))^2 - (f(x))^2 = (f(y) - f(x))(f(y) + f(x))$$
Et alors $f(y) \geq f(x)$, ce qui assure que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme la fonction f est impaire, elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Or on a déjà vu qu'une solution monotone de l'équation de Cauchy est linéaire. Comme $f(1) = 1$, f est donc l'identité. Réciproquement il s'agit bien d'une solution. Il nous reste le seul cas où $f(1) = -1$, on pose $g = -f$. La fonction g vérifie alors l'équation initiale et on a de plus $g(1) = 1$, donc d'après ce qui précède $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et alors $f(x) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En conclusion la fonction identiquement nulle et l'identité sont les solutions de l'équation et dans le cas où n est impair, la fonction $x \mapsto -x$ est également solution.

2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Lors de la résolution d'une équation fonctionnelle, les propriétés trouvées sur la fonction peuvent nous servir largement dans la résolution de cette dernière. Dans cette partie, nous verrons comment on peut exploiter l'injectivité, surjectivité et la bijectivité. Le lecteur non familiarisé avec ces notions peut voir l'annexe A.

2.1 Utilisation de l'injectivité

Exemples

Trouver toutes les fonctions injectives $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = f(x)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Nous cherchons ici uniquement des fonctions injectives. Rappelons que si $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective, alors pour tous $x, y \in E$, si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$. Revenons à notre équation fonctionnelle. Comme $f(f(x)) = f(x)$ et f est injective, alors $f(x) = x$, réciproquement il est immédiat que l'identité s'agir bien d'une solution.

➛ *Comment montre-t-on qu'une fonction est injective ? En général, par des substitutions astucieuses, on va chercher à obtenir une identité en une variable, disons x, qui apparaît toujours sous la forme $f(x)$, sauf pour une occurrence où l'on espère que la variable apparaisse injectivement nue, i.e. en dehors de tout terme fonctionnel. Ainsi, si l'on suppose que l'on a $f(a) = f(b)$, alors on va pouvoir conclure que $a = b$.*

(Suisse 2012) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(2x) + 8y + 6$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. On remarque que seule la variable y apparaît en dehors de tout terme fonctionnel. De plus, vous remarquerez avec l'expérience que lorsque l'on veut prouver l'injectivité de f, il est bon de se débarrasser de la variable qui apparaît sous la forme $f(x)$ et $f(2x)$ dans la même équation. Posons donc $x = 0$ pour obtenir

$$f(f(0) + 2f(y)) = f(0) + 8y + 6$$

À nouveau, on apprend avec le métier, que si l'on a une telle équation, c'est gagné pour l'injectivité. En effet, supposons que l'on ait $f(u) = f(v)$ pour deux réels u et v. Alors, on a $f(f(0) + 2f(u)) = f(f(0) + 2f(v))$ et donc $f(0) + 8u + 6 = f(0) + 8v + 6$ qui implique naturellement $u = v$. On a donc montré que f devait être injective. Essayons à présent de n'avoir plus qu'un terme fonctionnel de chaque côté de l'équation, de manière à pouvoir simplifier par f. Pour cela, il faut se débarrasser du $8y + 6$. On va donc poser $y = -3/4$. Ainsi, on a

$$f\left(f(x) + 2f\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = f(2x)$$

Comme f est injective, il vient

$$f(x) + 2f\left(-\frac{3}{4}\right) = 2x$$

On conclut qu'une solution de l'équation fonctionnelle suggérée est nécessairement de la forme $x \mapsto 2x + c$. En remplaçant cette fonction dans l'équation de base on trouve $7c = c + 6$ et donc $c = 1$. Réciproquement, on vérifie que la fonction $x \mapsto 2x + 1$ est bien une solution.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

Solution. On va vous proposer deux méthodes pour résoudre cette équation fonctionnelle. La première consiste à remarquer que le côté de gauche reste invariant en permutant x et y, donc il en est de même pour le côté de droite. Par suite, $xf(y) = yf(x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et alors $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où $c = f(1)$. Réciproquement on obtient $f(1) = \pm 1$. La seconde méthode consiste à utiliser un argument d'injectivité. La solution nulle est clairement une solution de l'équation. Soit alors f une solution éventuelle non nulle de l'équation fonctionnelle, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. En substituant $x = a$ on trouve $f(f(a)f(y)) = f(a)y$. On va alors montrer que f est injective. Soient $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $f(u) = f(v)$, cela implique que $f(a)f(u) = f(a)f(v)$, par suite $f(f(a)f(u)) = f(f(a)f(v))$ et alors $f(a)u = f(a)v$ et comme $f(a) \neq 0$ alors $u = v$. En conclusion f est injective. Dans le but d'obtenir une égalité de termes fonctionnels, on remplace maintenant $y = 1$ dans l'équation de départ et on obtient $f(f(x)f(1)) = f(x)$. Comme f est injective, alors $f(x)f(1) = x$. Avec $x = 1$, il vient $f(1)^2 = 1$, i.e. $f(1) = \pm 1$. Réciproquement, on vérifie aisément que les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont bien des solutions.

(Slovénie 1999) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Solution. On va vous proposer deux approches pour résoudre cette équation fonctionnelle. En substituant $y = 0$ et $x = a + f(0)$ où a un réel arbitraire, on trouve $f(a) = -a + 1 + f(0)$, i.e. la fonction f de la forme $-x + c$ où c est une constante. En remplaçant dans l'équation de base, on trouve $c = 1/2$ et alors la fonction $x \mapsto -x + 1/2$ est l'unique solution. Une seconde solution consiste à utiliser un argument d'injectivité. En substituant $x = y = 0$ dans l'équation on obtient $f(-f(0)) = 0$. En substituant $x = -y + 1$, on trouve $f(-y + 1 - f(y)) = 0 = f(-f(0))$ et par injectivité de f, il vient $f(y) = -y + 1 + f(0)$. Et comme précédemment on trouve $f(x) = -x + c$.

(Proposé OIM 1997) Existe t-il deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x,

$$\begin{cases} f(g(x)) = x^2 \\ g(f(x)) = x^3 \end{cases}$$

Solution. Supposons qu'un tel couple de fonctions existe. Á partir de la condition $g(f(x)) = x^3$, on va montrer que la fonction f est injective. Soient u et v deux réels tels que $f(u) = f(v)$, donc $g(f(u)) = g(f(v))$, par suite $u^3 = v^3$, i.e. $(u - v)(u^2 + uv + v^2) = 0$ donc $u - v = 0$ ou $u^2 + uv + v^2 = 0$, mais le terme $u^2 + uv + v^2$ est nul si et seulement si $u = v = 0$, dans tous les cas $f(u) = f(v)$ implique $u = v$, autrement dit, f est injective. D'autre part, pour tout réel x, on a

$$f(x^3) = f(g(f(x))) = (f(x))^2$$

Donc, chacun des nombres $f(0), f(1)$ et $f(-1)$ est égal à son carré. Comme l'équation $x = x^2$ n'admet que deux solutions, alors deux nombres parmi 0 et 1 et -1 ont même image par f. Et ceci contredit le fait que f est injective.

(Proposé OIM 2007) Déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

Solution. Commençons par montrer que pour tout $y > 0$, on a $f(y) > y$ car s'il existe y_0 tel que $f(y_0) = y_0$, en substituant dans l'équation de base $y = y_0$, il vient $f(x + y_0) = f(x + y_0) + f(y_0)$, i.e. $f(y_0) = 0$ et ceci n'est pas possible par définition de la fonction f. Supposons que $f(y_0) < y_0$, en substituant $x = y_0 - f(y_0)$ et $y = y_0$, on trouve $f(2y_0 - f(y_0)) = 0$ et ceci n'est pas possible. Soit maintenant $g(x) = f(x) - x$, alors $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ en posant $t = x + y$ on aboutit à $g(t + g(y)) = g(t) + y$ pour tous $t > y > 0$. On voit que g est injective. D'autre part, si $t > x + y$ alors

$$g(t + g(x) + g(y)) = g(t + g(x)) + y = g(t) + x + y = g(t + g(x + y))$$

Comme g est injective, il s'en suit que $g(x) + g(y) = g(x + y)$, donc g est additive, et puisque g est positive, alors pour tout réel x, on a $g(x) = cx$ où c est constante réelle. Par suite $f(x) = (c + 1)x$. La réciproque fournit $c = 1$. En conclusion l'unique solution de l'équation fonctionnelle est la fonction $x \mapsto 2x$.

(Proposé OIM 1988) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telles que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$f(f(n) + f(m)) = n + m$$

Solution. Soit f une solution fonctionnelle ci-dessus. Commençons par remarquer que f est injective, en effet si $f(n) = f(m)$ alors $2n = f(2f(n)) = f(2f(m)) = 2m$ et par suite $n = m$. D'autre part

$$f(2f(n)) = f(f(n) + f(n)) = n + n = 2n = n + 1 + n - 1 = f(f(n + 1) + f(n - 1))$$

Par suite, par injectivité de f, il vient $2f(n) = f(n + 1) + f(n - 1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n + 1) - f(n) = f(n) - f(n - 1)$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = f(n) - f(n - 1)$ est constante, et alors il existe une constante $c \in \mathbb{N}$ telle que $f(n) - f(n - 1) = c$, une récurrence simple montre que f est affine. Réciproquement, parmi toutes les fonctions affines, il est facile de vérifier que la seule solution du problème est celle définie par $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(OIM 2017) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$$

Solution. Soit f une solution éventuelle de l'équation fonctionnelle ci-dessus. Remarquons que si f est solution, alors $-f$ est également une solution. Supposons $f(0) = 0$, donc en substituant $y = 0$ dans l'équation de base, on trouve $f(x) = 0$, i.e. f est identiquement nulle, réciproquement on vérifie facilement que la fonction nulle est bien une solution du problème. Supposons $f(0) \neq 0$, en substituant $x = y = 0$ dans notre équation fonctionnelle, on trouve $f(f(0)^2) = 0$. On va montrer que $f(1) = 0$, supposons qu'il existe $c \neq 1$ tel que $f(c) = 0$, en substituant $x = c/(c - 1)$ et $y = c$, on trouve

$$f\left(f\left(\frac{c}{c-1}\right)f(c)\right) + f\left(\frac{c}{c-1} + c\right) = f\left(\frac{c^2}{c-1}\right)$$

c-à-d

$$f\left(f\left(\frac{c}{c-1}\right)f(c)\right) + f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) = f\left(\frac{c^2}{c-1}\right)$$

mais $f(c) = 0$, alors on obtient $f(0) = 0$, ceci n'est pas possible par hypothèse. Donc pour tout $x \neq 1$, on a $f(x) \neq 0$. Sachant que $f(f(0)^2) = 0$, alors $f(0)^2 = 1$ et par suite $f(1) = 0$ et $f(0) = -1$ ou $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$. Supposons que $f(0) = -1$, en gardant x libre et en substituant $y = 1$, on trouve

$f(0) + f(x+1) = f(x)$, i.e. $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout réel x. Une récurrence facile fournit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = f(x) + n$. On va montrer que f est injective. En effet, soient a et b deux réels tels que $f(a) = f(b)$, alors d'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a+n) = f(b+n)$. Considérons le trinôme

$$X^2 - (a+n)X + (b+n-1)$$

Soit Δ le discriminant de ce trinôme, on remarque que pour n assez grand, on a $\Delta = (a+n)^2 - 4(b+n-1) > 0$, par suite il existe deux nombres réels r et s, racines du trinôme $X^2 - (a+n)X + (b+n-1)$ tels que $r+s = a+n$ et $rs = b+n-1$. En substituant dans l'équation initiale $x = r$ et $y = s$, il vient $f(f(r)f(s)) + f(r+s) = f(r.s)$, i.e. $f(f(r)f(s)) + f(a+n) = f(b+n-1)$ et alors $f(f(r)f(s)) + f(a) + n = f(b) + n - 1$, on obtient $f(f(r)f(s)) = -1$ car par hypothèse on a $f(a) = f(b)$. Par suite $f(r)f(s) = 0$, donc $f(r) = 0$ ou $f(s) = 0$ et puisque 1 est l'unique zéro de la fonction f, on a alors $r = 1$ ou $s = 1$. Supposons par exemple que $r = 1$, les deux relations $r + s = a + n$ et $rs = b + n - 1$ impliquent $a = b$, on montre de même que si $s = 1$, on a $a = b$. En conclusion on a $f(a) = f(b)$ implique $a = b$, et donc f est injective. En gardant x libre et en substituant $y = -x$ dans l'équation initiale, on trouve

$$f(f(x)f(-x)) + f(0) = f(-x^2)$$

mais $f(0) = -1$, donc

$$f(f(x)f(-x)) = f(-x^2) + 1 = f(-x^2 + 1)$$

Comme f est injective, on a $f(x)f(-x) = -x^2 + 1$. En substituant $y = 1 - x$ et en gardant x libre, on trouve

$$f(f(x)f(1-x)) + f(x+1-x) = f(x(1-x))$$

Comme $f(1) = 0$, on a alors

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x(1-x))$$

Et par injectivité de f, on obtient

$$f(x)f(1-x) = x(1-x)$$

c-à-d

$$f(x)(1 + f(-x)) = x(1-x)$$

i.e. $f(x) + f(x)f(-x) = x(1-x)$, par suite $f(x) - x^2 + 1 = x - x^2$ et donc $f(x) = x - 1$ pour tout x réel, réciproquement il s'agit d'une solution. Supposons maintenant que $f(0) = 1$, donc $-f(0) = -1$ et comme on a déjà mentionné $-f$ est également une solution de l'équation fonctionnelle, alors $-f$ est une solution vérifiant $-f(0) = -1$, donc d'après ce qui précède $-f(x) = x - 1$ et par suite $f(x) = 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions du problème sont la fonction identiquement nulle et la fonction $x \mapsto 1 - x$ et la fonction $x \mapsto x - 1$.

2.2 Utilisation de la surjectivité, la bijectivité

Le caractère surjectif d'une fonction $f : E \to F$ nous assure que toutes les éléments de F sont des valeurs prises par la fonction f. Si de plus la fonction f est bijective, tout élément de F admet un unique antécédent par f. Pour bien comprendre la notion de fonction surjective ou bijective, le lecteur est invité à lire l'annexe A. Il existe une troisième situation dans laquelle la surjectivité est utile. Dans le cas où une des variables libres, disons x, qui apparaît dans l'équation, apparaît toujours sous la forme $f(x)$ et que l'on sait déjà que f doit être surjective, alors on peut remplacer tous les $f(x)$ par une nouvelle variable, pour autant que le domaine d'arrivée de f soit le même ensemble que l'ensemble de départ. Voyons un court exemple pour illustrer cet énoncé :

Exemples

Trouver toutes les fonctions surjectives $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = f(x)$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. On sait que f est surjective. Autrement dit, lorsque x varie parmi toutes les valeurs réelles, alors $f(x)$ prend, tour à tour, toutes les valeurs réels également. Ainsi, on peut remplacer les $f(x)$ de l'équation par une nouvelle variable réelle libre t et obtenir l'équation $f(t) = t$ pour tout t dans $\mathbb{R}$. Réciproquement la fonction identité s'agit bien d'une solution du problème.

Soit f une fonction vérifiant pour tous x et y réels,

$$f(f(x) - x + y)^2 = x + f(y^2 - x)$$

Montrer que f est surjective.

Solution. Soit f une fonction éventuelle vérifiant l'équation ci-dessus. Dans l'équation, se trouvent deux termes fonctionnels, chacun d'un côté de l'équation. On va donc en "immobiliser" un, pour avoir contrôle complet de l'autre. Dans ce but, on substitue $y = x - f(x)$, et on obtient l'équation

$$f(0)^2 = x + f((x - f(x))^2 - x)$$

qui est équivalente à l'équation

$$f((x - f(x))^2 - x) = f(0)^2 - x$$

Il y a maintenant du côté droit une fonction linéaire en x, qui peut naturellement prendre toutes les valeurs réelles. Cela vaut donc aussi pour le côté gauche. La fonction f par conséquent est surjective.

Une situation particulièrement facile et courante est celle des fonctions involutives. Une fonction f avec la propriété $f(f(x)) = x$ pour tout x est appelé *involutive*. Quelques exemples sont $f(x) = -x$ et $f(x) = 1/x \, (x > 0)$. De telles fonctions sont automatiquement surjectives. Plus généralement, d'une équation du type

$$f(f(x)) = x + c$$

avec une constante c, il s'en suit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective, le côté droit pouvant en effet prendre toutes les valeurs réelles.
L'exemple suivant montre une équation fonctionnelle qu'on a déja résolu en utilisant l'injectivité. La méthode présentée ici se base sur un argument de surjectivité.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. Il est clair que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. En substituant $x = a$, on obtient

$$f(f(a)f(y)) = f(a)y$$

Comme le terme de gauche peut prendre toutes les valeurs réelles (car $f(a) \neq 0$), on conclut que f est surjective. Substituons de nouveau $y = 1$ dans l'équation originale, ce qui nous donne $f(f(x)f(1)) = f(x)$. Avec $t = f(x)$ libre en utilisant la surjectivité de f, on obtient $f(tf(1)) = t$ pour tout t dans $\mathbb{R}$. Remarquons à présent que si $f(1) = 0$, on obtient $t = f(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible. Donc $f(1) \neq 0$, en substituant $z = t/f(1)$, on trouve $f(z) = z/f(1)$ pour tout z dans $\mathbb{R}$. Ainsi, les solutions du problème ont la forme $x \mapsto cx$. Réciproquement, on trouve $c^3 = c$, comme $c \neq 0$ on a bien $c^2 = 1$. En conclusion les solutions du problème sont la fonction nulle et la fonction $x \mapsto -x$ et $x \mapsto x$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. Dans le but de montrer que f est surjective, on pose $y = 0$ pour fixer deux des trois termes fonctionnels. On obtient ainsi

$$f(f(f(x))) = x + f(0) - f(f(0))$$

Le membre de droite est une fonction affine qui prend naturellement toutes les valeurs réelles. Le membre de gauche est un terme fonctionnel pur. On conclut donc que f est une fonction surjective. On remarque à présent qu'à chaque fois que la variable y apparaît dans l'équation, elle apparaît sous la forme $f(y)$. Posons donc $t = f(y)$. On obtient ainsi

$$f(t) = t + x - f(f(f(x)))$$

Cette équation est valable pour tout x dans $\mathbb{R}$, et pour tout t dans $\mathbb{R}$. Avec $x = 0$, on obtient donc $f(t) = t+c$ pour tout réel t, où c une constante. En remplaçant dans l'équation de départ, avec $x = y = 0$, on obtient $3c + 2c = c$ et donc $c = 0$, i.e. f est la fonction identité.

(OIM 1992) Déterminer toute les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

Solution. Soit f une solution éventuelle. Pour $x = 0$, il vient $f(f(y)) = y+(f(0))^2$, pour tout réel y. Puisque ma fonction $f(f(x))$ est affine, elle est alors bijective, il en est de même donc pour f (Voir l'annexe A). De plus le membre de gauche est invariant par la transformation $x \to -x$, il doit en être de même pour le membre de droite. Par suite, pour tout réel x, on a $(f(x))^2 = (-f(x))^2$ et par suite l'injectivité de f nous assure que $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x. Et donc f est impaire. Notons qu'alors $f(0) = 0$. De plus $f(x^2) = f(x)^2$ pour tout réel x, comme tout réel positif peut s'écrire sous la forme d'un carré d'un nombre réel, cela nous assure que f est positive sur $\mathbb{R}^+$. Soient a et b deux réels positifs. Comme f est positive, il existe des réels x et y tels que $a = x^2$ et $b = f(y)$. Alors, $f(b) = f(f(y)) = y$ et $f(a) = f(x^2) = f(x)^2$. Alors

$$f(a + b) = f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2 = f(a) + f(b)$$

On en déduit que la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ vérifie l'équation de Cauchy et donc f est linéaire sur $\mathbb{Q}^+$. Comme pour tout $x > y \geq 0$, on a $f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y) \geq f(y)$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par suite f est linéaire. Comme f est impaire, elle est alors linéaire sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, on vérifie facilement que la seule solution linéaire qui soit solution du problème est l'identité.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) - 2xf(y) + f(x)$$

Soit f une solution éventuelle. Notons que l'unique solution constante est la fonction nulle. Supposons qu'il existe une solution non constante, donc il existe $f(y_0) = t \neq 0$. En substituant $y = y_0$ dans l'équation de base, on trouve $f(x - t) - f(x) = f(t) - 2xt$. Comme $f(t) - 2xt$ est une fonction affine et est évidement surjective, la fonction $x \mapsto f(x-t) - f(x)$ peut prendre toutes les valeurs réelles. En prenant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle originale, on trouve $f(-f(y)) = f(f(y)) + f(0)$. D'autre part, en remplaçant x par $f(x)$ dans l'équation fonctionnelle de base, on trouve

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(y)) - 2f(x)f(y) + f(f(x)) \qquad (*)$$

En permutant x et y, on déduit que

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(y) - f(x))$$

En particulier pour $y = x - t$, on trouve

$$f(f(x) - f(x-u)) = f(f(x-t) - f(x))$$

pour tout réel x, et comme déjà mentionné, la fonction $x \mapsto f(x-t) - f(x)$ peut prendre toutes les valeurs réelles. Il s'en suit que f est paire. De la relation déjà prouvée $f(-f(y)) = f(f(y)) + f(0)$ et en substituant $y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. En prenant $y = x$ dan $(*)$, on obtient $0 = 2f(f(x)) - 2f(x)^2$, c-à-d. $f(x)^2 = f(f(x))$. La relation $(*)$ devient

$$f(f(x) - f(y)) = (f(x) - f(y))^2$$

En prenant à nouveau $y = x - t$, on trouve par parité de f

$$f(f(x-t) - f(x)) = (f(x-t) - f(x))^2$$

Comme la fonction $x \mapsto f(x-t) - f(x)$ prend toutes les valeurs réelles, on déduit que $f(u) = u^2$ pour tout réel u. Réciproquement, la fonction $x \mapsto x^2$ est bien une solution.

3 Monotonie et périodicité

La monotonie et la périodicité d'une fonction sont des propriétés qui peuvent s'avérer utiles lors de la résolution d'une équation fonctionnelle. Dans la suite de cette partie, on verra des exemples.

3.1 Utilisation de la monotonie

La monotonie se retrouve sous différentes formes dans la résolution des équations fonctionnelles. Comme on l'a déjà vu, dans l'équation de Cauchy, une fonction monotone qui est solution de l'équation de Cauchy est linéaire. Rappelons le résultat qu'on le retrouve dans l'annexe A avec une preuve,

> Une fonction strictement monotone est injective. Réciproquement, une fonction injective et *continue* est strictement monotone.

Exemples

> *Trouver toutes les fonctions* $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ *tels que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$
>
> $$f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Gardons les bons réexes. Dans ce genre d'égalité, il est naturel de tenter d'égaler les termes fonctionnels. Fixons donc x et cherchons y tel que $yf(x) = x + y$. On veut donc substituer $y = \dfrac{x}{f(x)-1}$. La substitution est légale uniquement pour les x tels que $f(x) > 1$, car on doit s'assurer que $y > 0$. Pour de tels x, après substitution et simplification, on obtient $f(x) = 1$ qui est contradictoire. Autrement dit, il n'existe pas de x tel que $f(x) > 1$. On a donc $f(x) \leq 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{*+}$. Appliqué à l'équation de départ, ce résultat donne $f(x+y) \leq f(x)$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^{*+}$, car $f(yf(x)) \leq 1$. On déduit donc que f est une fonction décroissante. En effet, étant donné $u < v$ dans $\mathbb{R}^{*+}$, on a $f(v) = f(u + v - u) \leq f(u)$ car $v - u > 0$. Remarquons que la fonction constante $f \equiv 1$ est solution. On ne va donc pas pouvoir déduire l'injectivité des solutions sans avoir exclu cette fonction. Supposons que l'on ait $f(a) = 1$ pour un certain $a > 0$. Alors on remarque dans un premier temps que pour $0 < x \leq a$, on a $f(x) \geq f(a) = 1$ par décroissance. Comme l'on sait déjà que $f(x) \leq 1$, on conclut donc que $f(x) = 1$ pour $0 < x \leq a$. Si l'on retourne à l'équation de départ, on remarque que si x et y sont des réels positifs inférieurs à a, alors le côté gauche est 1. Si l'on arrive à rendre $x + y$ plus grand que a, par exemple en prenant $x = y = 2a/3$, alors on va pouvoir déduire quelque chose de déterminant, en l'occurrence $f(4a/3) = 1$. Notez que $4a/3 > a$. En répétant ce même argument, avec $4a/3$ à la place de a, et ainsi de suite, on obtient que f est identiquement 1. On peut donc à présent supposer que $f(x) \neq 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{*+}$. Cela signie donc que l'on a $f(x) < 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{*+}$ car on sait déjà que $f(x) \leq 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{*+}$. En répétant l'argument avec lequel on a prouvé que f était décroissante et en utilisant cette fois l'inégalité stricte $f(yf(x)) < 1$, alors on obtient que f est une fonction strictement décroissante. En particulier, f est aussi injective. Il faut à présent mettre à prfiot l'injectivité de f. On doit pour cela faire disparaître un des termes du côté gauche de l'équation de départ. C'est ici que la preuve devient astucieuse. L'idée est d'utiliser l'équation de départ comme une formule qui nous permet de calculer f de la somme de deux nombres pour tenter de faire apparaître le terme $f(yf(x))$ du côté droit de l'équation. On a

$$\begin{aligned} f(x)f(yf(x)) &= f(x+y) \\ &= f(yf(x) + (x + y - yf(x))) \\ &= f(yf(x))f((x + y - yf(x))f(yf(x))) \end{aligned}$$

et donc on obtient

$$f(x) = f((x + y - yf(x))f(yf(x)))$$

Utilisons à présent l'injectivité pour simplifier par f. On obtient $x = (x+y-yf(x))f(yf(x))$ pour toutx, y dans $\mathbb{R}^{*+}$. A présent, on voit que le problème est terminé. Substituons $x = 1$ pour obtenir

$$f(yf(1)) = \frac{1}{1 + (1 - f(1))y}$$

Il reste à introduire la nouvelle variable $z = yf(1)$, qui prend bien n'importe quelle valeur réelle positive lorsque y varie dans $\mathbb{R}^{*+}$ pour finalement établir $f(z) = 1/(1 + cz)$ avec $c = \dfrac{1 - f(1)}{f(1)}$ une constante strictement positive. En conclusion les fonctions vérifiant l'équation de départ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+cx}$ où c est une constante positive (dans le cas $c = 0$ on retrouve de cas de fonction identiquement 1). Réciproquement ces fonctions vérifient bien les conditions du problème.

➛ *Voilà un solide exemple d'équations fonctionnelles. Ne paniquez pas, c'est un problème vraiment compliqué. Retenez dans un premier temps le schéma que l'on a utilisé pour montrer la monotonie et rappelez vous que l'on peut établir l'injectivité à l'aide de la monotonie stricte.*

(Maroc 1983) Trouver toutes les fonctions strictement croissantes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(2) = 2$ et vérifiant pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$f(nm) = f(n)f(m)$$

Solution. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. En substituant $n = m = 1$, on trouve $f(1) = f(1)^2$, donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$, comme $f(1) > f(0) \geq 0$ alors $f(1) = 1$. Sachant que $0 \leq f(0) < f(1) = 1$ alors $f(0) = 0$. On va alors montrer par une récurence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$, pour $n = 0$ c'est vérifié. Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai jusquà le rang $n-1$ et montrons le au rang n. Si l'entier n n'est pas premier, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq a, b \leq n-1$ et $n = ab$. On a $f(n) = f(ab) = f(a)f(b)$. L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $f(a) = a$ et $f(b) = b$, par conséquent $f(n) = ab = n$. Si l'entier n est premier, alors $n+1$ n'est pas premier, alors $f(n+1) = n+1$ daprès ce qui précède. Mais on a $n-1 < n < n+1$, par croissance stricte de f, on a alors $f(n-1) < f(n) < f(n+1)$, i.e. $n-1 < f(n) < n+1$, d'où $f(n) = n$. On en déduit que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement cette fonction vérifie bien les conditions de l'énoncé.

(Maroc 1996) Existe t-il une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$$

Solution. Supposons qu'il existe une telle application. Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) - f(n) = f(f(n)) > 0$, donc l'application f est strictement croissante (on peut montrer cela par une récurrence simple). Rappelons que pour toute fonction $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \geq n$. Dans notre cas on va montrer qu'à partir d'un certain rang p on a $f(n) > n$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(k) = k$, en substituant dans l'équation de base on trouve $f(k+1) = f(k) + f(f(k)) = 2k$. Si $k > 1$, alors $p = k+1$ convient. Sinon, si $k = 1$, alors $f(1) = 1$ et par conséquent $f(2) = f(f(1)) + f(1) = 2$ et alors $f(3) = f(f(2)) + f(2) = f(2) + f(2) = 4$, donc $p = 3$ convient. En conclusion, il existe un rang à partir duquel on a $f(n) > n$. Soit $n \geq p$, on a alors $f(n) > n$, i.e. $f(n) \geq n+1$ ce qui implique $f(f(n)) \geq f(n+1)$, c-à-d $f(n+1) - f(n) \geq f(n+1)$ et alors $f(n) \leq 0$ et ceci n'est pas possible. Donc il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant $f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(Bulgarie 1996) Déterminer toutes les fonctions strictement monotones $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telles que pour tout $x > 0$,

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x$$

Solution. Soit f une solution éventuelle du problème. On introduit la fonction g définie par $g(x) = f(x)/x$ pour tout $x > 0$, alors on a $g\left(\frac{x}{g(x)}\right) = g(x)$ et par une récurrence simple on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{x}{g(x)^n}\right) = g(x)$, i.e. $f\left(\frac{x}{g(x)^n}\right) = \frac{x}{g(x)^{n-1}}$. D'autre part l'équation fonctionnelle de base implique que $f\left(\frac{f(x)^2}{f(f(x))}\right) = f(x)$. La fonction f est strictement monotone, donc elle est injective et par suite il vient $\frac{f(x)^2}{f(f(x))} = x$, i.e. $g(xg(x)) = g(x)$. Une récurrence simple sur n fournit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(xg(x)^n) = g(x)$, i.e. $f(xg(x)^n) = xg(x)^{n+1}$. Si $f^{(m)}$ est la composée m fois de f, alors pour tous $k, m \in \mathbb{N}^*$, $f^{(m)}(xg(x)^{-k}) = xg(x)^{m-k}$ $(*)$. On se propose de montrer que g est constante. Supposons, par l'absurde que g n'est pas constante, alors il existe $x_1 \neq x_2$ tels que $g(x_1) < g(x_2)$. D'après la propriété d'Archimède (Voir l'annexe B) on peut choisit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\right)^k \geq \frac{x_2}{x_1}$. Comme f est monotone, alors $f \circ f$ est strictement monotone et une récurrence immédiate fournit $f^{(2m)}$ est une fonction strictement croissante, et par $(*)$ on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right)^{2m-k} \geq \frac{x_2}{x_1}$. D'autre part pour m assez grand, l'inégalité inverse est aussi vraie, contradiction. Donc la fonction g est constante et par suite $f(x) = ax$ pour tout $x > 0$ où a est une constante strictement positive. La réciproque est facile à démontrer.

3.2 Utilisation de la périodicité

Pour bien assimiler la notion de périodicité et ses propriétés, on conseille le lecteur de consulter l'annexe B. En général, les solutions des équations fonctionnelles ne sont pas périodiques, sauf si elles sont constantes. Bien sûr, ce n'est pas à prendre pour parole d'évangile. Mais il est vrai que lorsque l'on utilise la périodicité pour résoudre une équation fonctionnelle, c'est souvent pour montrer que la solution ne peut pas être périodique et donc déduire que toute période potentielle est donc nulle. C'est justement l'objet du premier exemple.

Exemples

(France 2007) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers m et n,

$$f(m + f(n) - n) = f(m) + f(n)$$

Solution. Soit f une solution éventuelle du problème. À nouveau, on le répète, lorsque toutes les variables apparaissent à l'intérieur de termes fonctionnels uniquement, il est bon de tenter d'égaler ces termes fonctionnels. Par exemple, avec $m = 2nf(n)$, on obtient $f(n) = f(2nf(n)) + f(n)$ et donc $f(2nf(n)) = 0$. En particulier, zéro admet un antécédent. On voit assez facilement que deux solutions potentielles sont la fonction nulle et la fonction $n \to 2n$. Clairement la fonction nulle est solution et si en supposant que f n'est pas la fonction nulle on arrivait à prouver que f est injective en zéro (à savoir si $f(a) = 0$, alors $a = 0$), on pourrait conclure du résultat ci-dessus que $f(n) = 2n$ pour tout entier n. Supposons donc qu'il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$, autrement on peut conclure directement que $f(n) = 2n$ pour tout entier n. La substitution $m = n = a$ dans l'équation de base donne $f(0) = 0$. Si l'on substitue uniquement $n = a$, on obtient $f(ma) = f(m)$ pour tout entier m. Autrement dit, f est une fonction périodique et admet tout entier $b \neq 0$ tel que f(b) = 0 comme période. On a établi précédemment que $f(2nf(n)) = 0$, en particulier $2f(1)$ est une période de f. Si l'on pose à présent $n = 1$ dans l'équation de base, on obtient

$$f(m + f(1) - 1) = f(m) + f(1)$$

Comme $2f(1)$ est une période de f, on a aussi

$$f(m + f(1) - 1) = f(m + f(1) - 1 + 2 - f(1)) = f(m + 1)$$

Autrement dit, pour tout entier m on a $f(m + 1) = f(m) + f(1)$ et donc par récurrence on montre que $f(m) = mf(1)$. Rappelons que f doit être périodique, elle ne peut donc être linéaire seulement si elle est constante. En effet, on a $f(m + a) = f(m)$ et donc $(m + a)f(1) = mf(1)$. Comme $a \neq 0$, on a forcément $f(1) = 0$ et donc f est la fonction nulle. Réciproquement la fonction identiquement nulle et la fonction $n \mapsto 2n$ sont bien des solutions du problème.

(OIM 1968) Soit a un nombre réel. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$$

a) Prouver que f est périodique.
b) Pour $a = 1$, donner un exemple d'une telle fonction.

Solution. **a)** Soit f une telle fonction. Notons d'après l'équation fonctionnelle et que pour tout cela ait bien un sens, on a $1/2 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 1/2$. Alors, pour tout réel x, on a $0 \leq g(x) \leq 1/2$. De plus en substituant dans l'équation de base on trouve

$$g(x + a) = \sqrt{\frac{1}{4} - g(x)^2}$$

Par suite $g(x+a)^2 = \frac{1}{4} - g(x)^2$ et donc

$$g(x+2a)^2 = \frac{1}{4} - g(x+a)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - g(x)^2\right) = g(x)^2$$

Comme tout est positif, il vient $g(x+2a) = g(x)$, i.e. $f(x+2a) = f(x)$, ce qui assure que f est $2a$-périodique.

b) On peut par exemple choisir la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \mid \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \mid + \frac{1}{2}$.

Toute fonction à la fois monotone et périodique est constante.

Plus généralement, on n'a en fait pas besoin de la périodicité pour conclure que la fonction est constante, mais seulement du fait que la fonction prenne la même valeur en plusieurs endroits. De telles idées peuvent parfois aider, comme on peut le voir dans l'exemple suivant

(Proposé OIM 2005) Déterminer toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *telles que pour tous* $x, y \in]0, +\infty[$,

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Dans cet exercice, il n'est pas du tout clair par où on doit commencer. La fonction constante $f(x) = 2$ est clairement une solution. Mais est-elle la seule ? Si on observe plus précisément, il y a encore deux questions relativement naturelles que l'on peut se poser,

1. *Est-il possible de trouver un* y *tel que la parenthèse de droite prenne la même valeur pour deux* x *différents ?* Cela amènerait probablement à une identité dont on pourrait se servir. Donnons-nous donc $0 < u < v$ et cherchons y tel que $u + yf(u) = v + yf(v)$. En résolvant, on trouve :

$$y = \frac{v-u}{f(v) - f(u)}$$

   Pour que la substitution soit légale, on doit avoir $f(u) > f(v)$. En supposant que ce soit le cas, le côté droit de l'équation de départ prend la même valeur pour $x = u$ ou $x = v$. Ça doit donc aussi être le cas pour le côté gauche de l'équation. Comme $f(y) \neq 0$, cela implique que $f(u) = f(v)$. En résumé, nous avons démontré que s'il existe $0 < u < v$ avec $f(u) > f(v)$, alors $f(u) = f(v)$; ce qui est bien entendu absurde. Ainsi, pour tout $u < v$ on a $f(u) \leq f(v)$. Nous avons donc prouvé (d'une manière quelque peu surprenante) que f est croissante.

2. *Que se passe-t-il si* f *prend la même valeur à deux endroits différents ?* Soit donc $0 < u < v$ avec $f(u) = f(v)$. Pour tout $y > 0$, on a alors

$$2f(u + yf(u)) = f(u)f(y) = f(v)f(y) = 2f(v + yf(v))$$

   Cela semble impliquer une sorte de périodicité, de période $c = v - u$. En réalité, soit $z > u$ un nombre quelconque, et remplaçons $y = \frac{z-u}{f(u)}$, dans cette équation, on obtient alors $f(z) = f(u + yf(u)) = f(v + yf(v)) = f(z + c)$. De ce fait, f est périodique dans l'intervalle $]u, +\infty[$ et d'après ce qui précède, f est également croissante et par conséquent constante. Remplaçons maintenant $x, y > u$ dans l'équation initiale (notez que si $x, y > u$, alors $x + yf(x) > u$). Il s'ensuit alors que cette constante vaut 2. C'est presque ce que nous souhaitons. f est constante seulement à partir de u, mais il est facile de voir que f l'est aussi à partir de 0. En effet, prenons y quelconque et $x > u$, en substituant dans l'équation de départ, il s'ensuit directement, car $x + yf(x) > u$, que l'on a $f(y) = 2$. Finalement, on a bien $f(y) = 2$ pour tout $y > 0$.

On doit donc encore montrer qu'il existe deux nombres réels différents pour lesquels f prend la même valeur et on aura terminé. On suppose que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire, on suppose que f est injective. Utilisons encore la symétrie du côté gauche de l'équation. On a

$$2f(x+yf(x)) = f(x)f(y) = f(y)f(x) = 2f(y+xf(y))$$

On obtient donc $x+yf(x) = y+xf(y)$, car f est injective. Avec $y=1$ on obtient alors $f(x) = (f(1)-1)x+1$ pour tout $x>0$. Cependant, en substituant dans l'équation de départ, on remarque que ces fonctions ne sont pas des solutions. Il reste à vérifier que la fonction $f\equiv 2$ est bien une solution, ce qui est évidemment évident.

(Proposé OIM 1996) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait, $\mid f(x)\mid\leq 1$ et

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x) = f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)$$

Montrer que la fonction f est périodique.

Solution. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'exercice, notons qu'il existe bien de telles fonctions, par exemple la fonction constante $f\equiv c$ où $c\in[-1,1]$. On introduit la fonction $g(x) = f\left(x+\frac{1}{6}\right)-f(x)$. D'après l'équation fonctionnelle, pour tout réel x on a

$$g\left(x+\frac{1}{7}\right) = f\left(x+\frac{13}{42}\right)-f\left(x+\frac{1}{7}\right) = f\left(x+\frac{1}{6}\right)-f(x) = g(x)$$

Par suite, la fonction g est $1/7$-périodique. Elle est donc également 1-périodique car $1 = 7\times 1/7$. Ainsi, pour tout réel x, on a $g(x+1) = g(x)$, i.e. $f\left(x+1+\frac{1}{6}\right)-f(x+1) = f\left(x+\frac{1}{6}\right)-f(x)$, ou encore

$$f\left(x+1+\frac{1}{6}\right)-f\left(x+\frac{1}{6}\right) = f(x+1)-f(x)$$

Cela signifie que la fonction $h:x\mapsto f(x+1)-f(x)$ est $1/6$-périodique. Et donc elle est aussi 1-périodique. Par suite, pour tout réel x, on a $h(x+1) = h(x)$, i.e. $f(x+2)-f(x+1) = f(x+1)-f(x)$. Soit a un réel fixé, on déduit que la quantité $f(a+n)-f(a+n-1)$ est indépendante de n. Notons c cette valeur commune. Alors pour tout entier $k\geq 1$,

$$f(a+k) = f(a)+\sum_{i=1}^{k} f(a+i)-f(a+i-1) = kc+f(a)$$

Si $c\neq 0$, on constate que lorsque $k\to\infty$, on a $f(a+k)\to\infty$, ce qui contredit le fait que f soit bornée, donc $c=0$ et par suite en substituant $k=1$ dans la relation ci-dessus, on trouve $f(a+1) = f(a)$ et cela pour tout réel a. Il s'en suit que f est 1-périodique.

4 Points zéros, points fixes

Une autre idée importante dans la résolution des équations fonctionnelles est de sintéresser aux zéros et aux points fixes de la fonction recherchée. Comme d'habitude, il s'agit avant tout de remarquer que les points fixes peuvent apporter des informations importantes.
Tout d'abord, donnons les définitions de ces points particuliers. Soit $f:A\to A$ une fonction quelconque où A un ensemble non vide. Un élément $a\in A$ est appelé *point fixe* de f si $f(a) = a$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle, alors un nombre réel x avec $f(x)=0$ est appelé *zéro* de la fonction f.

Exemples

Montrer que toute fonction strictement croissante $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point fixe.

Solution. Supposons, par l'absurde, que f n'admet pas de points fixes. L'ensemble $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > x\}$ est une partie non vide (car $0 \in A$) de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure qu'on notera a. On se propose de montrer que $f(a) \geq a$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a. Comme $a \geq x_n$, alors $f(a) \geq f(x_n) > x_n$ et un passage à la limite fournit $f(a) \geq a$. Supposons que $f(a) > a$, alors par croissance stricte de f, on obtient $f(f(a)) > f(a)$, donc $f(a) \in A$ et par suite $f(a) \leq a$, ce qui n'est pas possible. Donc a est un point fixe de f. D'où la conclusion.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout réel x,

$$f(f(x)) = x^3 + \frac{3}{4}x$$

Montrer qu'il existe trois nombres réels distincts a, b, c tels que,

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0$$

Solution. Soit $g(x) = x^3 + \dfrac{3}{4}x$, alors on a par hypothèse $f(f(x)) = g(x)$. remarquons que $f(g(x)) = f(f(f(x))) = g(f(x))$. Notons que g est injective car elle est strictement croissante, et qu'il en est de même pour g. Soit x_0 un point fixe de g, par ce qui précède, on a $f(x_0) = g(g(x_0)) = g(f(x_0))$, donc $f(x_0)$ est un point fixe de g. Or, les points fixes de g sont $-1/2$, 0 et $1/2$, et donc f est une bijection de l'ensemble $\{-1/2, 0, 1/2\}$ vers lui même. On en déduit que

$$f(-1/2) + f(0) + f(1/2) = -1/2 + 0 + 1/2 = 0$$

D'où le résultat.

(OIM 1996) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

Solution. Soit f une solution éventuelle de l'équation ci-dessus. En substituant $m = n = 0$, on obtient $f(0) = 0$, et par suite $f(f(n)) = f(n)$ et par suite $f(n)$ est un point fixe de f pour tout entier naturel n. L'équation fonctionnelle est alors équivalente à $f(0) = 0$ et $f(m + f(n)) = f(m) + f(n)$. Il est clair que la fonction nulle est solution du problème. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a) \neq 0$, et notons b le plus petit point fixe de f, on a $2b = 2f(b) = f(b + f(b)) = f(2b)$. Une récurrence simple fournit $f(nb) = nb$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $b = 1$, alors $f(n) = n$ pour tout entier naturel n qui est bien une solution du problème. Supposons que $b \geq 2$. Soit c un point fixe (quelconque) de f et soit $c = bq + r$ la division euclidienne de c par b, on remarque que r est également un point fixe de f, en effet

$$qb + r = c = f(c) = f(qb + r) = f(f(qb) + r) = f(qb) + f(r) = qb + f(r)$$

Donc, $f(r) = r$ et on sait que b est le plus petit point fixe de f, avec $0 \leq r < b$, par suite $r = 0$. En conclusion, tout point fixe de f est de la forme qb où $q \in \mathbb{N}$. De plus, l'identité $f(f(i)) = f(i)$ implique que $f(i) = bn_i$ pour tout i, $0 \leq i < b$, avec $n_i \in \mathbb{N}$ et $n_0 = 0$. Donc si $n = kb + i$, alors $f(n) = (k + n_i)b$. Réciproquement, il est facile de vérifier que pour tous des entiers fixés $b \geq 2$, $n_0 = 0$ et $n_1, ..., n_{b-1} \in \mathbb{N}$, la fonction f définie par

$$f(n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor + n_i\right)b$$

vérifie les conditions demandées.

(Proposé OIM 2000) Trouver tous les couples des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels,

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

Solution. Commençons par résoudre le problème sous l'hypothèse que la fonction g admet un zéro α. En substituant $y = \alpha$ dans l'équation de base, il vient $g(x) = (\alpha + 1)f(x) - xf(\alpha)$. L'équation de base devient

$$f(x + g(y)) = (\alpha + 1 - y)f(x) + (f(y) - f(\alpha))x$$

En substituant $y = \alpha + 1$, on trouve $f(x + n) = mx$ où $n = g(\alpha + 1)$ et $m = f(\alpha + 1) - f(\alpha)$. Il s'en suit que f est une fonction affine, et par conséquent g est également affine. En substituant $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ dans l'équation originale et en comparant les coefficients, on obtient facilement

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{cx^2 - c^2}{1 + c} \\ g(x) = cx - c^2, \quad c \neq -1 \end{cases}$$

On se propose de montrer que g possède effectivement un zéro α. Si $f(0) = 0$, en substituant $y = 0$ dans l'équation de base, on obtient $f(x + g(0)) = g(x)$, donc $\alpha = -g(0)$ convient. Supposons que $f(0) = b \neq 0$. En remplaçant x par $g(x)$ dans l'équation initiale, on obtient

$$f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x))$$

Le côté de gauche est symétrique, alors il en est de même pour celui de droite, par suite

$$f(g(x) + g(y)) = g(y)f(x)xf(g(y)) + g(g(y))$$

En substituant $x = 0$ dans l'équation de base, on trouve $f(g(y)) = a - by$ où $a = g(0)$. En particulier g est injective et f est surjective (Voir l'annexe A), il s'en suit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Maintenant, les deux relations précédentes fournissent

$$g(x)f(y) - ay + g(g(x)) = g(y)f(x) - ax + f(f(y)) \qquad (*)$$

En substituant $y = c$ dans $(*)$, on obtient $g(g(x)) = g(c)f(x) - ax + g(g(c)) + ac = kf(x) - ax + d$ où $k = f(c)$. Maintenant $(*)$ devient $g(x)f(y) + kf(x) = g(y)f(x) + kf(y)$ et en substituant $y = 0$ dans cette équation on trouve $g(x)b + kf(x) = af(x) + kb$, i.e.

$$g(x) = \frac{a - k}{b}f(x) + k$$

Notons que $g(0) = a \neq k = g(c)$, car g est injective. De la surjectivité de f, on peut déduire que g est également surjective, donc 0 admet un antécédent par g. D'où la conclusion.

5 Utilisation de la densité

Dans la résolution de quelques équations fonctionnelles, on a utilisé la densité de l'ensemble des nombres rationnels dans l'ensemble des nombres rationnels, voir notamment les solutions de l'équation de Cauchy monotones. Reprenons le lemme donné dans la partie traitant l'équation fonctionnelle de Cauchy. Pour le lecteur non familiarisé avec les propriétés de $\mathbb{Q}$, on le conseille de voir l'annexe B avant de commencer cette partie.

Lemme. Soit f une solution monotone de l'équation de Cauchy. Alors f est une fonction linéaire, à savoir, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax$.

Démonstration. Soit f une fonction monotone vérifiant l'équation de Cauchy. On remarque que $-f$ est aussi une solution monotone de l'équation de Cauchy. On peut alors supposer que f est croissante. On sait déjà daprès l'exemple précédent que pour tout rationnel q on a $f(q) = f(1)q$. On note que $f(1) \geq f(0) = 0$ (car f est croissante). Supposons maintenant qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > xf(1) = 0$. Soit q un nombre rationnel supérieur à x. Donc par croissance de f, $0 = f(q) \geq f(x) > 0$, ce qui est absurde. Si $f(1) > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (entre deux réels différents il existe certainement un nombre rationnel, on parlera en détails de la densité dans le chapitre 5), il existe un nombre rationnel q tel que $f(x)/f(1) > q > x$. Par croissance de f, comme $q > x$, on a $qf(1) = f(q) > f(x)$, mais par construction $f(x) > f(1)q$. On aboutit alors à une contradiction. Le cas $f(x) < xf(1)$ se traite d'une manière similaire. On en déduit que $f(x) = xf(1)$ pour tout réel x.

Par la suite nous allons utiliser un argument de densité pour prouver que les solutions continues de l'équation de Cauchy sont les fonctions linéaires.

Lemme. Soit f une solution continue de l'équation de Cauchy. Alors f est une fonction linéaire, à savoir, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax$.

Démonstration. Soit f une fonction continue vérifiant l'équation de Cauchy. On sait que pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a $f(x) = f(1)x$. Maintenant, soit x un réel qui sera fixé par la suite. La densité de $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ nous garanti lexistence une suite de nombres rationnels (x_n) qui converge vers x. Mais on sait que $f(x_n) = f(1)x_n$ pour tout entier naturel n, comme f est continue, en faisant tendre $n \to \infty$, on voit que $f(x) = f(1)x$. Donc pour tout réel x, on a $f(x) = f(1)x$.

En général, on a le lemme suivant.

Lemme. Deux fonctions f et g continues qui coïncident sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$, sont égaux, autrement dit, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = g(x)$.

Démonstration. Soit f et g deux fonctions continues. Soit x un nombre réel fixé, il existe une suite de nombres rationnels (x_n) qui converge vers x. On sait que $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout entier naturel n, puisque f et g sont continues, un passage à la limite fournit $f(x) = g(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(x)$.

Exemples

Passons à un exemple issu d'une ancienne olympiade suédoise, dont la dernière partie concernant le prolongement des solutions de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ fait intervenir la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

(Suède 1962) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout réel x et pour tout rationnel r,

$$| f(x) - f(r) | \leq 7(x - r)^2$$

Solution. Soit f une solution éventuelle de l'inéquation fonctionnelle ci-dessus. On se propose de montrer que f est constante. Soient a et b deux nombres rationnels. Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on pose $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Il est clair que tous les a_i sont des nombres rationnels et $a_{i+1} - a_i$ est une différence constante qui vaut $\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Par suite, d'après l'inégalité triangulaire,

$$| f(a) - f(b) | \leq \sum_{i=0}^{n-1} | f(a_{i+1}) - f(a_i) | \leq 7 \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = \frac{7(b-a)^2}{n}$$

et cette inégalité est vraie pour tout entier naturel n. En faisant tendre $n \to \infty$, on trouve $f(a) = f(b)$. Donc f est constante sur $\mathbb{Q}$. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on pose $f(r) = c$ une constante. Soit x un nombre réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite de nombres rationnels (x_n) qui converge vers x, et tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel $| x - r_n | < \epsilon$. Alors

$$| f(x) - c | = | f(x) - f(x_n) | \leq 7(x - x_n)^2 \leq 7\epsilon^2$$

pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre $\epsilon \to 0$, on déduit que $f(x) = c$. Donc pour tout réel x, on a $f(x) = c$. Réciproquement les fonctions constantes sont bien des solutions du problème.

6 Limites et continuité

Les exemples ci-dessus montre l'utilité des limites des suites, et l'utilisation de la notion de continuité. On envoie le lecteur non familiarisé avec ces notions vers l'annexe C. Dans la suite de cette partie, nous allons donner des exemples qui illustre l'utilisation de ces notions dans le monde des équations fonctionnelles.

Exemples

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes, pour tous réels x, y,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

.

Solution. Soit f une solution du problème ci-dessus. En posant $a = x - y$, on déduit que

$$f(a + 2y) + f(a) = 2f(a+y)f(y)$$

Fixons a et faisons tendre y vers $+\infty$, la seconde condition conduit alors à $f(a) = 0$. Par suite f est la fonction nulle. Réciproquement, on vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une solution.

(Croatie 1996) Soit $t \in]0, 1[$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que, pour tout réel x,

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2$$

Solution. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle ci-dessus. On introduit la fonction $g(x) = f(x) - f(tx)$. Il est clair que g continue en 0 et que $g(0) = 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(tx) = x^2$. Par suite, pour tout entier $n \geq 1$, $g(tx) - g(t^2x) = t^2x^2$, $g(t^{n-1}) - g(t^n x) = t^{2(n-1)}$. En télescopant on obtient

$$g(x) - g(t^n x) = x^2 \sum_{k=1}^{n-1} t^k = x^2 \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}$$

En faisant tendre $n \to \infty$, puisque $t^2 \in]0,1[$ et que $\lim_{a \to +\infty} g(a) = g(0) = 0$, on en déduit que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{x^2}{1-t^2}$, i.e. $f(x) - f(tx) = \dfrac{x^2}{1-t^2}$. En procédant comme ci-dessus, on obtient pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(x) - f(t^n x) = \frac{x^2}{1-t^2} \sum_{k=1}^{n-1} t^{2k} = x^2 \frac{1-t^{2n}}{(1-t^2)^2}$$

Et en faisant tendre $n \to \infty$, il vient $f(x) - f(0) = \dfrac{x^2}{(1-t^2)^2}$ pour tout réel x. Réciproquement les fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{(1-t^2)^2} + k$ où k une constante réelle sont bien des solutions de l'équation fonctionnelle initiale.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que, pour tous réels x et y,

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2$$

Prouver que f est identiquement nulle ou que f ne s'annule pas.

Solution. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé autre que la fonction nulle. Pour $x = y$, il vient $f(2x)f(0) = f(x)^2$ pour tout réel x. Puisque f n'est pas identiquement nulle, la relation précédente assure que $f(0) \neq 0$. Par absurde, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. Toujours, d'après la relation précédente, on a $0 = f(a)f(0) = f(a/2)^2$, d'où $f(a/2) = 0$. Une récurrence simple conduit à $f(a/2^n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Mais $a/2^n$ converge vers 0 quand $n \to \infty$, donc par continuité de f, il vient $f(0) = 0$, et ceci contredit $f(0) \neq 0$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \to 0} f(x)/x = 1$, et pour tout réels x et y,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

Solution. Soit f une solution éventuelle du problème. Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$. La limite donnée dans l'énoncé invite à faire apparaître une telle quantité. Soit donc $y \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \neq 0$, d'après l'équation fonctionnelle on a

$$\frac{f(x+y) - f(y)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 2y$$

En faisant tendre $x \to 0$, il vient $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x+y) - f(y)}{x} = 1 + 2y$. Cela signifie que f est dérivable en y et que $f'(y) = 1 + 2y$. Compte-tenu de $f(0) = 0$, on en déduit que, pour tout y, $f(y) = y^2 + y$. Réciproquement il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto x^2 + x$ vérifie les conditions du problème.

(OIM 1998) On considère toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous entiers $s, t > 0$,

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

Déterminer la plus petite valeur de $f(1998)$.

Solution. Soit f une telle application. On pose $f(1) = c$. Si on prend $t = 1$ alors, pour tout entier $s > 0$,

$$f(f(s)) = c^2 s \qquad (*)$$

En particulier $f(f(1)) = f(c) = c^2$. On déduit de $(*)$ que, pour tout entier $s > 0$, $f(f(f(s))) = f(c^2 s)$. Et d'autre part, d'après $(*)$ toujours $f(f(f(s))) = c^2 f(s)$. Ainsi, pour tout entier $s > 0$,

$$f(c^2 s) = c^2 f(s) \qquad (**)$$

D'après l'équation de base, pour tous entiers $s, t > 0$, $f(t^2 f(f(s))) = f(s)f(t)^2$. Donc avec $(*)$, il vient $f(t^2 c^2 s) = f(s)f(t)^2$ et avec $(**)$ on déduit alors que $c^2 f(t^2 s) = f(s)f(t)^2$. En particulier, pour tous entiers $s, t > 0$, $c^2 f(t^2 s^2) = f(s^2)f(t)^2$. Le membre de gauche étant symétrique, le membre l'est également, donc $f(s^2)f(t)^2 = f(t^2)f(s)^2$. Pour $t = 1$, il vient alors $f(s^2)c^2 = cf(s)^2$, doù $f(s^2)c = f(s)^2$ Par suite $f(t^2 s^2)c^3 = c^2 f(ts)^2$ et, d'autre part, $c^3 f(t^2 s^2) = cf(s^2)f(t)^2 = (f(s)f(t))^2$, alors $c^2(f(ts))^2 = (f(s)f(t))^2$. Et, comme tout est positif, il vient

$$f(s)f(t) = cf(st) \qquad (***)$$

Il est facile de montrer par récurrence, pour tout entiers $n \geq 3$ et $t_1, t_2, ..., t_n > 0$ on a

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right) = \frac{1}{c^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} f(t_i)$$

En particulier, pour tout entier $t > 0$,

$$f(t^n) = \frac{1}{c^{n-1}} f(t)^n \qquad (****)$$

Ainsi $f(t)^n$ est divisible par c^{n-1} pour tout entier $n \geq 2$. S'il existe un entier $m > 0$ tel que $f(m) = 1$, alors $f(1) = c = 1$ puisque c divise $f(m)$, mais f est injective d'après $(*)$, alors $f(m) = f(1)$, par suite $m = 1$. Sinon, soit $c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ où $k, \alpha_1, ..., \alpha_k$ des entiers naturels non nuls et $p_1, ..., p_k$ sont des nombres premiers deux à deux différents. Soit $t > 0$ un entier. D'après ce qui précède, on peut affirmer que chacun des p_i divise $f(t)$. On appelle β_i l'exposant de p_i dans la décomposition en nombres premiers de $f(t)$. D'après $(****)$, on a donc pour tout entier $n \geq 2$, $(n-1)\alpha_i \leq n\beta_i$, i.e. $\alpha_i/\beta_i \leq 1$ et donc $\alpha_i \leq \beta_i$. Cela assure que chacun des p_i apparaît dans la décomposition de $f(t)$ avec un exposant plus grand à celui avec lequel il apparaît dans la décomposition de c et donc c divise $f(t)$, ceci étant vrai pour tout entier $t > 0$. On peut alors considérer la fonction $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par $g(t) = f(t)/c$ pour tout entier $t > 0$. Alors $g(1) = 1$ et $g(c) = c$, d'après $(***)$, $g(st) = g(s)g(t)$ pour tous entiers $s, t > 0$ (On dit que g est une fonction totalement multiplicative). De plus, d'après l'équation fonctionnelle de base, pour tous entiers $s, t > 0$, il vient

$$c^2 g(t)^2 g(g(s)) = cg(t^2 cg(s)) = f(t^2 f(s)) = sf(t)^2 = sc^2 g(t)^2$$

et comme $c^2 g(t)^2 \neq 0$, on obtient $g(g(s)) = s$ (g est une involution).
En conclusion, si f vérifie les conditions de l'énoncé alors on peut lui associer la fonction involutive totalement multiplicative $g = f/c$ qui vérifie évidemment les conditions de l'énoncé mais en prenant pas des valeurs qui ne dépassent pas celles de f. Ainsi, pour déterminer la plus petite valeur possible de $f(1998)$, il suffit de se restreindre aux fonctions involutives totalement multiplicatives qui vérifient $g(1) = 1$ (il est clair que, réciproquement, tous les fonctions involutives totalement multiplicatives qui vérifient $f(1) = 1$ vérifient également les conditions de l'énoncé). Pour une telle fonction on a $g(1998) = g(2)g(3)^2 g(37)$ avec $g(2)$, $g(3)$ et $g(37)$ deux à deux distincts et dans $\mathbb{N}^* - \{1\}$. Pour limiter l'effet de la puissance on choisit donc $g(3) = 2$. Puisque g est une involution, cela entraîne que $g(2) = 3$ et puisque g est multiplicative, on a $g(9) = g(3)g(3) = 4$, ce qui interdit cette valeur pour $g(37)$. Il ne reste plus qu'a choisir $g(37) = 5$. Et alors $g(1998) = 120$. Finissons tout de même la construction de g, on a $g(5) = 37$ et pour tout p premier autre que $2, 3, 5$ et 37, on pose $g(p) = p$. Comme toute fonction multiplicative est totalement déterminée par ses valeurs sur les nombres premiers, ces choix définissent bien g. Finalement la valeur minimale de $f(1998) = 120$.

➛*C'est une équation fonctionnelle dont la résolution est basée sur des outils de théorie des nombres. Ne vous inquiétez pas, c'est un problème 6 de l'olympiade internationale. On verra plus d'exercices sur les équations fonctionnelles et l'arithmétique dans le chapitre 6.*

7 Exercices

1. Déterminer toutes les fonctions f strictement croissantes $\mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(f(x)) = x$.

2. (Roumanie 1986) Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) \geq g(n)$. Prouver que $f = g$.

3. (France 1995) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application bijective. Prouver qu'il existe trois entiers naturels a, b, c tels que $a < b < c$ et $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

4. (OIM 1983) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ vérifiant les deux conditions suivantes, pour tous réels strictement positifs x et y, $f(xf(y)) = yf(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. (France 1996) Prouver qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout réel x on ait
$$f(f(x)) = x^2 - 1996$$

6. (OIM 1994) Soit s l'ensemble des nombres réels strictement supérieurs à 1. Déterminer toutes les fonctions satisfaisant les deux propriétés,
   (a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ pour tous $x, y \in S$.
   (b) La fonction $f(x)/x$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

7. (Vietnam 2003) Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ qui vérifient l'inégalité $f(3x) \geq f(f(2x)) + x$ pour tout réel $x > 0$. Trouver la valeur maximale de α tel que pour tout $f \in F$ on a $f(x) \geq \alpha x$ pour tout réel x.

8. Déterminer toutes les fonctions continues $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telles que pour tout $x > 0$,
$$f(x) + \frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{x}$$

9. (Bulgarie 2006) Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction telle que pour tous $x > y > 0$
$$f(x + y) - f(x - y) = 4\sqrt{f(x)f(y)}$$
   (a) Montrer que $f(2x) = 4f(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) Déterminer toutes les solutions de l'équation fonctionnelle.

10. Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a
$$(f(x) + f(y))f\left(\frac{x + y}{2}\right) = 2f(x)f(y)$$

11. (Crux) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x,
$$f(x^3 + x) \leq x \leq f(x)^3 + f(x)$$

8 Solutions des exercices

1. Il est facile de vérifier que la fonction définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est bien solution du problème. On va montrer que c'est la seule. Soit f une solution du problème, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq a$. Si $f(a) < a$ alors, puisque f croissante strictement, on a $f(f(a)) < f(a)$ et donc $a < f(a)$ ce qui est absurde. Si $f(a) > a$ alors, de la même façon $f(f(a)) > f(a)$, et donc $a > f(a)$ ce qui également absurde. Ainsi dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce qui assure que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a bien $f(a) = a$.

2. Supposons qu'il existe un entier a tel que $f(a) \neq g(a)$. Alors l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid g(n) \neq f(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et donc l'ensemble $B = \{g(n) \mid n \in A\}$ est lui aussi une partie non vide de $\mathbb{N}$. Cet ensemble B admet donc un plus petit élément qu'on notera $g(b)$ avec $b \in A$. Notons qu'on a $g(b) < f(b)$. Puisque f est surjective, il existe un entier c tel que $f(c) = g(b) < f(b)$. En particulier on a $c \neq b$ car $f(c) = g(b)$ et $b \in A$. Puisque g est injective, on a alors $g(c) \neq g(b) = f(c)$, d'où $c \in A$ et $g(c) < f(c) = g(b)$, ce qui contredit le caractère minimal de $g(b)$. En conclusion, pour tout entier a on a $f(a) = g(a)$.

3. Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(0) < f(n)$ (par exemple $f(0)+1$ a un antécédent différent de 0 par f. Cela nous permet d'affirmer que l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid f(0) < f(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ qui par conséquence que l'on va noter b. Par suite $0 < b$ et $f(0) < f(b)$. Soit $n = 2f(b) - f(0)$. Puisque f est bijective, il existe donc un entier c tel que $f(c) = n$. Ainsi, on a $f(c) + f(0) = 2b$. De plus $f(c) = f(b) + (f(b) - f(0)) > f(b) > f(0)$. Le caractère minimal de b conduit alors à $b < c$. Ainsi en posant $a = 0$, il vient $a < b < c$ et $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

4. En cherchant un peu, on trouve assez vite que la fonction $x \mapsto 1/x$ est une solution du problème. On va prouver que c'est la seule. La forme de l'équation fonctionnelle et de la solution envisagée laisse prévoir que l'on va sintéresser à des expressions du type $xf(x)$. Soit f une solution éventuelle. Commençons par prouver que f est bijective. En effet, pour $x = 1$, il vient $f(f(y)) = yf(1)$. Donc $f(f(y))$ est affine est par suite f est bijective (Voir l'annexe A). Étudions maintenant l'ensemble F des points fixes de f. En remplaçant y par x dans l'équation originale, on trouve $f(xf(x)) = xf(x)$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $xf(x) \in F$. Mais on peut également $1 \in F$. En effet, puisque f est bijective, on note c l'unique antécédent de 1 par f. D'après l'équation de base on a $f(1) = f(1 \times f(c)) = cf(1)$. Comme $f(1) > 0$, on a alors $c = 1$, et donc $f(1) = f(c) = 1$. Il ne reste plus à montrer que 1 est l'unique point fixe de f. Pour cela, on va regarder d'un plus près l'ensemble F. On va commencer par montrer que F est stable par produit et par passage à l'inverse. Soient $x, y \in F$. On a donc $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Mais alors $f(xy) = f(xf(y)) = yf(x) = yx = xy$, donc $xy \in F$, d'autre part puisque $1 \in F$, on a aussi, pour $x \in F$,
$$1 = f\left(\frac{1}{x} \times x\right) = f\left(\frac{1}{x} f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$
Ce qui assure que $f(1/x) = 1/x$ et qu'ainsi $1/x \in F$. On est maintenant en mesure d'atteindre notre objectif. En effet, considérons un éventuel point fixe $a \neq 1$. Si $a > 1$ alors puisque F est stable par produit, on en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(a^n) = a^n$. Mais alors $\lim\limits_{n \to \infty} f(a^n) = +\infty$, ce qui contredit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Et, si $0 < a < 1$, puisque f est stable par passage à l'inverse alors $1/a \in F$, ce qui n'est pas possible d'après ce qu'on vient de voir (car $1/a > 1$).

5. Soit f une solution éventuelle. On pose $g(x) = x^2 - 1996$. L'idée est de regarder d'un peu plus près les points fixes de f et g. Les deux points fixes de g sont les deux solutions réelles distinctes de l'équation $x^2 - x - 1996 = 0$, que l'on va les noter a et b. Posons $f(a) = p$ et $f(b) = q$. Alors $a = g(a) = f(f(a)) = f(p)$ et alors $g(p) = f(f(p)) = f(a) = p$, ce qui prouve que p est aussi un point fixe de g. De même, q est un point fixe de g. De plus, $f(p) = a \neq b = f(q)$ donc $p \neq q$. Ainsi, $\{p, q\} = \{a, b\}$. On pose maintenant $h(x) = g(g(x)) = (x^2 - 2016)^2 - 2016$. Il n'est pas difficile de vérifier que la fonction h admet quatre points fixes. Bien entendu, tout point fixe de g est un point fixe de h. On note a, b, c, d les points fixes de h. Le même raisonnement que ci-dessus permet de prouver que f induit une bijection de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ sur lui même (i.e. $\{f(a), f(b), f(c), f(d)\} = \{a, b, c, d\}$. Or, c et d ne sont pas des points fixes de g, donc ce ne sont pas des points fixes de f non plus. Par suite, on doit avoir $f(c) = d$ et $f(d) = c$. Mais alors $g(c) = f(f(c)) = c$, ce qui contredit que c ne soit pas un point fixe de g.

6. Soit f une solution qui remplit les deux conditions ci-dessus. Posons $x = y$ dans (a), il vient
$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x) \qquad (*)$$
Cela signifie que pour tout $x > -1$, $x + f(x) + xf(x)$ est un point fixe de f. On peut donc essayer d'établir quelque chose à propos des points fixes de f. C'est précisément le but de la condition en (b). Par définition, $a \neq 0$ est un point fixe de f si et seulement si $f(a)/a = 1$. D'après la condition (b), il

existe alors dans chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ au plus un point fixe, car la fonction $f(x)/x$ ne peut prendre qu'au plus une fois la valeur 1 dans ces deux intervalles. Soit maintenant a un point fixe de f. Avec $x=y=a$, on obtient $f(2a+a^2)=2a+a^2$. Par conséquent, $2a+a^2$ est aussi un point fixe de f. Dans le cas $a>0$ on a $0<a<2a+a^2$, et f aurait alors au moins deux points fixes différents dans l'intervalle $]0,+\infty[$. ce qui est impossible à cause de (b). Dans le cas $1<a<0$, on a de manière analogue $1<2a+a^2<a<0$ et f aurait alors deux points fixes différents dans l'intervalle $]-1,0[$, ce qui n'est pas non plus possible. Le seul point fixe de f est donc 0 et de l'équation $(*)$, il s'en suit que $x+f(x)+xf(x)=0$ pour tout x dans $]-1,+\infty[$. On obtient ainsi,

$$f(x)=-\frac{x}{x+1}$$

On montre finalement que la fonction $x\mapsto -\dfrac{x}{x+1}$ satisfait les deux conditions de départ. La fonction $\dfrac{f(x)}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}$ est en effet strictement croissante dans les intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, la condition (b) est donc vérifiée. De plus (a) est vérifiée car

$$\frac{-x-\dfrac{-y}{y+1}-x\dfrac{-y}{y+1}}{x+\dfrac{-y}{y+1}+x\dfrac{-y}{y+1}+1}=\frac{y-x}{x+1}=y+\frac{-x}{x+1}+y\frac{-x}{x+1}$$

➛*Cet exemple suggérait de s'intéresser aux points fixes, sans néanmoins le mentionner explicitement. Pensez aux points fixes lorsque vous obtenez une équation du type* $(*)$. *Essayez ensuite de voir si vous pouvez déduire quelque chose à propos des points fixes.*

7. Il est clair que $x/2\in F$, donc $\alpha\leq 1/2$. En plus pour tout $f\in F$ on a $f(x)\geq x/3$ pour tout $x>0$. L'idée est noter $\alpha_1=1/3$ et construire une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $f(x)\geq\alpha_n x$ et on va montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ converge vers $1/2$. Cela impliquera que $\alpha\geq 1/2$, et par suite $\alpha=1/2$. Essayons de construire une relation de récurrence portant sur α_k. Supposons que $f(x)\geq\alpha_k x$. L'inégalité de l'énoncé fournit
$$f(3x)\geq f(f(2x))+x\geq\alpha_k f(2x)+x\geq 2\alpha_k^2x+x=3\alpha_{k+1}x$$
Cela signifie que $\alpha_{n+1}=\dfrac{2\alpha_n^2+1}{3}$. Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ converge vers $1/2$. C'est facile, en effet on remarque que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est croissante et majorée par $1/2$, ainsi elle converge vers α, et on a $\alpha=\dfrac{2\alpha^2+1}{3}$, i.e. $\alpha=1/2$ car $\alpha<1$.

8. Il s'agit d'une équation de second degré en $f(x)$. Les solutions sont $f(x)=x$ et $f(x)=1/x$ pour tout $x>0$. On se propose de montrer que $f(x)=x$ pour tout $x\in]0,1[$ ou $f(x)=1/x$ pour tout $x\in]0,1[$. Par absurde, supposons que $f(u)=u$ ou $f(v)=1/v$ pour $0<u,v<1$, alors $f(u)<1$ et $f(v)>1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe r compris entre u et v tel que $f(r)=1$, mais $r\in]0,1[$, alors $f(r)=r$ ou $f(r)=1/r$, et ceci contredit $f(r)=1$ et $r\in]0,1[$. On montre comme précédemment que que $f(x)>x$ pour tout $x>1$ ou $f(x)=1/x$ pour tout $x>1$. En conclusion on a quatre solutions, la fonction $x\mapsto x$, la fonction $x\mapsto 1/x$, la fonction $f(x)=x$ pour $x\in]0,1[$ et $f(x)=1/x$ pour $x>1$, et la fonction $f(x)=1/x$ pour $x\in]0,1[$ et $f(x)=x$ pour $x>1$.

9. (a) On remarque que la fonction f est strictement croissante. En effet, soient $u>v>0$, en substituant $x=(u+v)/2$ et $y=(u-v)/2$ dans l'inégalité $f(x+y)-f(x-y)>0$, on trouve $f(u)-f(v)>0$, par conséquent f est strictement croissante. Par suite $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ existe (on la note $l\geq0$). En faisant tendre x et y vers 0 dans l'équation de base on obtient $l-l=4l$, i.e. $l=0$. Fixons x et faisons tendre y vers 0, on déduit de l'équation fonctionnelle que $f(x+y)-f(x-y)$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Puisque f est monotone, on déduit qu'elle est continue en $x>0$. Finalement, fixons x et faisons tendre $y\to x^-$, on obtient $f(2x)=4f(x)$.

   (b) En remplaçant x par ny avec $n\geq2$ dans l'équation de base, on trouve

$$f((n+1)y)+f((n-1)y)=4\sqrt{f(ny)f(y)}$$

Une récurrence double sur n fournit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(ny) = n^2 y$. On pose $c = f(1)$, il vient $f(n) = cn^2$ pour tout entier naturel n. Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a $cp^2 = f(p) = f(q \times p/q) = q^2 f(p/q)$, i.e. $f(p/q) = cp^2/q^2$. Donc les deux fonctions f et $x \mapsto cx^2$ coïncident sur $\mathbb{Q}^{*+}$, et puisque $\mathbb{Q}^{*+}$ est dense $\mathbb{R}^{*+}$ alors $f = cx^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement les fonctions $x \mapsto cx^2$ vérifient l'équation originale où c est une constante strictement positive.

10. La fonction nulle est clairement solution du problème. Soit f une solution éventuelle autre que la fonction identiquement nulle. Si f ne s'annule pas, on pose $g = 1/f$. La fonction g est continue et vérifie l'équation de Jensen. Donc f est affine. Or puisque g ne doit pas s'annuler, alors g est une constante. Par suite f est une fonction constante. Réciproquement les fonctions constantes non nulles sont bien solutions du problème. Il nous reste à prouver que f ne s'annule pas. Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe un réel x tel que $f(x) = 0$. On considère alors la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $x_n n + 1 = (x_n + a)/2$. Alors $f(x_{n+1})(f(x_n) + f(a)) = 2f(x_n)f(a)$. Si $f(x_n) = 0$ alors $f(x_n) + f(a) = f(a) \neq 0$ et donc $f(x_{n+1}) = 0$. Il est facile donc de prouver par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, on a $f(x_n) = 0$. Or, pour tout entier $n \geq 0$, on a également $x_{n+1} - a = \dfrac{1}{2}(x_n - a)$, une récurrence immédiate donne $x_n - a = \dfrac{(x - a)}{2^n}$ et donc la suite (x_n) converge vers a. Par continuité de f, on a $f(a) = 0$, ce qui contredit notre hypothèse sur a.

11. On introduit la fonction $g(x) = x^3 + x$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Par suite g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g^{-1} sa bijection réciproque. Alors g^{-1} est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution éventuelle. Alors l'énoncé devient, pour tout réel x, on a $f(g(x)) \leq x \leq g(f(x))$. En composant par g^{-1} à droite sur la première inégalité, il vient $f(x) \leq g^{-1}(x)$. En composant par g^{-1} à gauche sur la seconde inégalité, il vient $g^{-1}(x) \leq f(x)$. Et donc $f(x) = g^{-1}(x)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que g^{-1} est solution du problème.

Bibliographie

[1] **1000 Chalenges mathématiques**, Analyse, Mohammed Aassila, Ellipses, 2016.

[2] **300 défis mathématiques**, Mohammed Aassila, Ellipses, 2001.

[3] **Les olympiades de mathématiques**, Tarik Belhaj Soulami, Ellipses, 1999.

[4] **Functional equations**, Titu Andreescu. XYZ Press, 2012.

[5] **Problems from the book**, Titu Andreescu, XYZ Press, 2008.

[6] **Équations fonctionnelles I**, Thomas Huber, Arnaud Maret.

[7] **Équations fonctionnelles II**, Thomas Huber, Arnaud Maret.

[8] **Introduction to functional equations**, Costas Efthimiou, Version September 12, 2010.

[9] **Functional Equation**, Pang-Cheng, Wu, Version May 6, 2018.

[10] **Functional Equations Problems**, Amir Hossein Parvardi, Version June 13, 2011.

[11] **Functional Equations**, Marko Radovanović.

[12] **Cours d'équations fonctionnelles**, Pierre Bornsztein, Moubinool Omarjee, Juillet 2003.