

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
ODDELEK ZA FIZIKO

Simon Čopar

NUMERIČNA ANALIZA NESTABILNOSTI  
NA ROBU TEKOČINSKE OPNE

Diplomsko delo

MENTOR: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 2009

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Alojzu Kodretu za prefinjeno strokovno vodstvo pri pisanju tega dela.

Posebna zahvala gre tudi vsem profesorjem in kolegom, ter vsem tistim, ki so mi bili med študijem nevede v moralno podporo.

### Povzetek

Numerično sem raziskal razpad tanke tekočinske opne na prostem robu. Uporabil sem mrežno shemo *staggered grid*, ki sem jo razširil na dva različna načina, da omogoča simulacijo na nesovisnem območju. V eni metodi sem za robove uporabil analitično rešitev, v drugi pa sem s substitucijo odpravil singularnosti na robovih. Predpostavil sem, da je tekočina neviskozna.

Učinek površinske napetosti vleče rob s konstantno hitrostjo, pri tem pa za robom nastaja steza kapljic z dobro določenim polmerom. Neviskozna tekočina se obnaša drugače od viskozne, za katero je mehanizem razpada že poznan. Rezultat za neviskozno tekočino sem podkrepil s fenomenološkim izračunom.

**Predmetne oznake:** numerična hidrodinamika, razpad tekočinskih open, površinska napetost, odcep kapljic, staggered grid.

### Abstract

I explored the behaviour of thin liquid films with exposed edge. A finite difference method, based on staggered grid, is modified in two ways to simulate the motion on disjointed domain. In the first approach, theoretical solution is used to obtain correct behaviour of boundaries. In the other, boundary singularities are regularized by introduction of a new variable. The liquid is considered inviscid.

The effect of surface tension draws the edge along the film with a constant velocity. Behind the edge, a trail of uniform drops is formed. Inviscid fluid behaves differently from viscous fluid, for which the breakup mechanism is known. A phenomenological calculation to match the results is provided.

**Keywords:** computational fluid dynamics, liquid film breakup, surface tension, droplet formation, staggered grid.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Postavitev problema</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Teoretično ozadje</b>	<b>6</b>
3.1	Energijska bilanca . . . . .	6
3.2	Enačba gibanja . . . . .	7
3.3	Potujoči valovi . . . . .	9
3.4	Diagram $P - T$ . . . . .	10
3.5	Ocena napake aproksimacije . . . . .	11
3.6	Razpad v dveh dimenzijah . . . . .	12
3.7	Sorodni procesi . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Numerična shema</b>	<b>13</b>
4.1	Mreža . . . . .	13
4.2	Linearna stabilnost, von Neumannova analiza . . . . .	14
4.3	Robni pogoj . . . . .	15
4.4	Povzetek metode . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Numerični rezultati</b>	<b>18</b>
5.1	Prikaz rešitev . . . . .	18
5.2	Umeritev numerične sheme . . . . .	22
5.3	Invariante . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Odpravljanje singularnosti na robovih</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Rezultati regularizirane metode</b>	<b>28</b>
<b>8</b>	<b>Vloga viskoznosti</b>	<b>30</b>
<b>9</b>	<b>Sklep</b>	<b>33</b>
	<b>Literatura</b>	<b>35</b>
	<b>Dodatek</b>	<b>36</b>

# 1 Uvod

Vsi poznamo milnične mehurčke in občudujemo njihovo barvitost in eleganco. Fizikalne zakone, ki opisujejo obliko mehurčkov, dobro poznamo. Pionirsko vlogo pri raziskovanju milničnih open, napetih na različne okvirje, je opravil Joseph Plateau, ki je eksperimentalno določil osnovne zakone, ki zanje veljajo. Prvi je ugotovil, da milnična opna zavzame obliko z minimalno površino. Tanke opne imajo veliko površino v primerjavi s prostornino, zato se uveljavijo površinski pojavi.

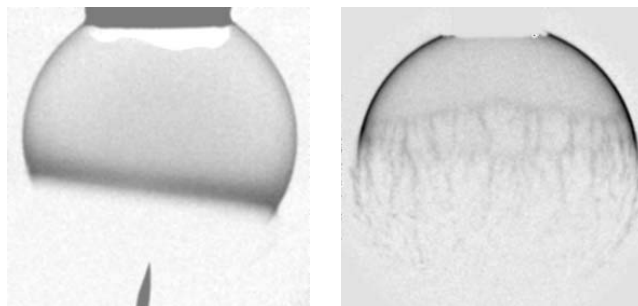
Statično obliko opne opišemo že s površinsko napetostjo. Za razumevanje dinamike razpada pa potrebujemo enačbe gibanja. V sredini osemnajstega stoletja je bila izpeljana Eulerjeva enačba, leta 1822 pa je sledila Navier-Stokesova enačba, s katero so opisali tudi učinek viskoznosti na gibanje. Lord Rayleigh je leta 1879 predlagal, da je pri razpadu pomembno sodelovanje vztrajnosti in sile površinske napetosti, podobno kot pri razpadu curka tekočine v kapljice, ki sta ga s Plateaujem že uspešno opisala.

Milnična opna počí, če jo preluknjamo ali kako drugače zmotimo. Proces je razmeroma hiter in s prostim očesom vidimo le, da opna izgine in od nje ostane le meglica in nekaj kapljic. Dogajanje zato lahko opazujemo le posredno. Prve meritve so bile narejene s pomočjo hitrega svetlobnega bliska, ki je zabeležil trenutno stanje opne na fotografski film. Pri tej metodi je bil tedaj poglavitni problem sinhronizirati blisk in začetek razpada. S tem se je ukvarjal Rayleigh [1], ki je ob tem navedel tudi prve ocene hitrosti razpada s pomočjo energijskega zakona. Eksperimenti so pokazali, da opna ne začne razpadati po celotni površini hkrati, ampak obstaja dobro definirana fronta, ki s konstantno hitrostjo potuje prek opne.

Taylor [2] in Culick [3] sta v sredini dvajsetega stoletja neodvisno pokazala, da se fronta ne premika s hitrostjo, ki jo je ocenil Rayleigh. Postavila sta model, ki predpostavlja, da se vsa tekočina iz razpadlega dela mehurčka nabira za fronto razpadanja in da rob opne raste in se debeli, ko med potjo pobira vedno več tekočine. Iz ravnovesja sil sta ugotovila, da se le polovica površinske energije pretvori v kinetično. Hitrost roba je sorazmerna z Rayleighovo oceno, vendar je za konstanten faktor manjša. Teoretični rezultat se je z meritvami zelo dobro ujemal, model pa so potrdile tudi kasnejše meritve s hitrimi kamerami.

Taylor-Culickov model roba je kvalitativno pravilen, ne daje pa informacije o tem, kaj drži rob v opisani obliki. Že dejstvo, da se polovica površinske energije izgubi, kaže na to, da viskoznosti ne smemo zanemariti. Model res napoveduje, da hitrost roba ni odvisna od viskoznosti, ne izključuje pa, da bi viskoznost sodelovala v nastanku roba. Odebeljeni rob ima veliko vztrajnost in viskoznost je ena izmed sil, ki rob in opno drži skupaj. Učinek viskoznosti je eksperimentalno težko izločiti, ker viskoznosti realnih tekočin niso dovolj majhne.

Na nekaterih posnetkih (Sl. 1) je mogoče videti, da se od roba odcepljajo curki tekočine, ki potem razpadejo zaradi Rayleighove nestabilnosti. Nastale kapljice so nekaj stokrat debelejše od opne, podobne velikosti pa je tudi rob, ko doseže ravnovesno debelino. Pri vseh eksperimentih so opne razpadle na ta način.



Slika 1: Posnetek razpada mehurčkov dveh različnih debelin. Levi je debelejši, na desnem pa se vidi tvorba nitk, ki razpadajo v kapljice. Razpad je tako hiter, da opna obdrži okroglo obliko. Vir: [6].

## 2 Postavitev problema

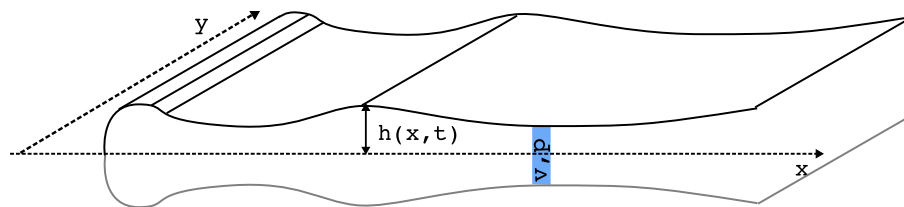
Tekočinske opne so stabilne na majhne odmike od ravnovesja, kar znamo pokazati s teorijo motenj [4]. Razpadejo le, če imajo prost rob, kjer sila površinske napetosti ni z ničimer uravnovešena. Ker je opna zelo tanka, je ukrivljenost na prostem robu velika. Visok tlak je omejen na kratko robno območje, zato se pojavi velika tlačna razlika. Vse dogajanje je omejeno na neposredno bližino roba, kjer bo tudi središče moje pozornosti. Razpadanje open bom raziskoval za neviskozno tekočino. Obravnava idealnih pojavov je pomemben način reševanja problemov v fiziki, ker jih je lažje matematično opisati in so izhodišče za bolj zapletene primere. Ker idealnih neviskoznih tekočin v naravi ni, ne moremo njihovega obnašanja raziskovati eksperimentalno. Zato je računalniška simulacija edini način, kako priti do podatkov. Pridobljene rezultate lahko potem primerjamo z meritvami za viskozne tekočine. Iz tega lahko presodimo, kateri procesi so skupni vsem tekočinam in kateri so vezani na viskozne tekočine.

Namesto reševanja polnega tridimenzionalnega problema je raziskovanje lažje začeti na poenostavljenem modelu. Preden se lotimo numerične simulacije tekočine, moramo ugotoviti, katere lastnosti opne lahko zanemarimo ali izkoristimo za poenostavitev problema. Krivinski radiji mehurčkov so ponavadi reda velikosti nekaj milimetrov ali centimetrov. Debeline open so tipično tisočkrat manjše, velikostnega reda valovnih dolžin vidne svetlobe, zaradi česar na mehurčkih opazimo mavrične barve. Ukrivljenost opne v velikem merilu sem zato zanemarl in jo obravnaval kot popolnoma ravno, kakršno bi na primer dobili, če bi milnico napeli na kvadraten okvir. Argument potrdijo tudi fotografije eksperimentov, na katerih je vidno, da je proces razpada dovolj hiter, da se oblika opne medtem ne spreminja.

Zaradi tankosti opne sem sklepal, da vzdolž debeline ni velikih variacij v tlaku in hitrostih, zato sem debelino opne uvedel le kot dodatno spremenljivko in poenostavil enačbe gibanja na dve dimenziji. Vso dinamiko je torej mogoče opisati v ravnini opne. Sila teže povzroča odtekanje tekočine in stanjša opno na zgornjem koncu, kar je glavni vzrok za spontan razpad. V simulaciji jo bom zanemarl, ker po nastanku prostega roba ni več pomembna.

Začetno stanje, iz katerega izhajam, je polneskončna opna enakomerne debeline. Ker je to stanje simetrično na translacijo vzdolž roba, ga je mogoče zadovoljivo opisati v prerezu (Sl. 2). Ne vemo pa, če se translacijska simetrija začetnega pogoja ohrani tudi v poznejšem času. Ker so sile na robu dovolj velike, lahko pride do spontanega zloma simetrije in ob vsakem odstopanju osnovnega stanja opna začne kazati dinamiko tudi v prečni smeri. To navsezadnje opazimo pri eksperimentih. Vseeno je najbolje najprej narediti simulacijo le v

eni dimenziji (v prerezu). Iz teh približnih simulacij je mogoče izluščiti splošne značilnosti gibanja, ki pomagajo pri razumevanju polnega problema. Iskal sem metodo, ki bo reševala enačbe gibanja za eno dimenzijo, a bo enostavno razširljiva na dve dimenziji, za raziskovanje zloma simetrije.



Slika 2: Za numerično simulacijo sem predpostavil translacijsko simetrijo vzdolž roba in zrcalno simetrijo v navpični smeri. Za tlak in hitrost sem privzel, da sta konstantna po debelini. Profil opne opišemo s spremenljivko  $h(x, t)$ .

Za reševanje hidrodinamskih enačb obstaja množica zelo učinkovitih metod. Izbral sem tako, ki obravnava tekočino na diskretni mreži. Enakomerna mreža olajša zapis enačb in interpretacijo rezultatov. Časovni razvoj je mogoče zapisati kot sosledje neodvisnih korakov in jih izvajati posamično. Naš model ima težavo, da se prosti rob opne s časom premika in ne moremo uporabiti fiksne robne pogoja. Položaj roba na mreži je lahko določen le do natančnosti ene mrežne razdalje. Ker ravno sile na robu ženejo gibanje celotne opne, ločljivost mreže ne zadošča. Morebitno odcepljanje kapljic predstavlja še dodaten zaplet, ker se tekočina razcepi na več delov in dobimo dodatne robove. Ker mreža med tekom simulacije ostaja sovisna in nespremenjena, tekočina pa zaseda le del definicijskega območja, nekatere točke mreže niso del tekočine in za njih gibalne enačbe nimajo smisla. Nekaj težav predstavlja tudi dejstvo, da se za neviskozno tekočino energija ohranja. Disipativni procesi stabilizirajo numerično shemo, pri ohranitvi energije pa je dovolj že zaokrožitvena napaka, da energija začne naraščati, kar vodi v divergentne rešitve. Težavo z energijskim zakonom sem razrešil z dodatkom dušenja, kar je običajen prijem v takih primerih, in z izbiro časovnega koraka. Za zaplete, ki so posledica prostega roba, pa sem poiskal nove prijeme, ki natančno sledijo dogajanju na robu kljub diskretizaciji ter opišejo cepljenje in združevanje delov tekočine.

### 3 Teoretično ozadje

#### 3.1 Energijska bilanca

Preden posežemo po diferencialnih enačbah, lahko z dimenzijsko analizo in ohranitvenimi zakoni ocenimo osnovne lastnosti pojava, podobno kot je stoletje nazaj to storil Rayleigh. Ker smo zanemarili učinke viskoznosti, velja ohranitev energije. Ne da bi se ukvarjali z vmesnim dogajanjem, primerjajmo energiji začetnega in končnega stanja. Na začetku imamo polneskončno planparalelno opno, katere edini prispevek k energiji je površinska napetost. Površino roba lahko v naši geometriji zanemarimo. Za končno stanje pa vzamemo, da se vsa tekočina nahaja v obliki monodisperznih kapljic z radijem  $r$  in hitrostjo  $v$ . Zdaj lahko zapišemo enakost energije v obeh primerih za razsežen odsek opne s ploščino  $S$ . Z  $N$  sem označil število kapljic, ki nastanejo iz izbranega odseka. Nezmotena opna ima polovično debelino  $h_0$ .

$$\sigma N 4\pi r^2 + 2Sh_0\rho \frac{v^2}{2} = 2S\sigma$$

Število kapljic dobimo iz ohranitve volumna.

$$N = \frac{2Sh_0}{4/3\pi r^3}$$

$$h_0 \frac{3}{r} + \frac{h_0\rho}{\sigma} \frac{v^2}{2} = 1$$

Preidemo na brezdimenzijsko obliko, kjer se  $r$  meri v enotah  $h_0$ ,  $v$  pa v enotah  $v_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho h_0}}$ . Zapisal bom še rešitev za enodimenzionalni problem (translacijska simetrija vzdolž roba), kjer je zveza med volumenom in površino drugačna, saj namesto kapljic govorimo o dolгих valjih.

$$1D : \quad \frac{2}{r} + \frac{v^2}{2} = 1 \quad 2D : \quad \frac{3}{r} + \frac{v^2}{2} = 1 \quad (1)$$

Ta rezultat nam pove zvezo med hitrostjo in polmerom kapljic, če so te med seboj enake in se pri razpadu energija ni porabila za kaj drugega, kot na primer nihanje posameznih kapljic. Najmanjši možni radij kapljic je trikratna debelina opne, kar bi se zgodilo le, če se nič energije ne bi porabilo za gibanje. V enodimenzionalnem primeru na podoben način dobimo omejitev polmera valjev:  $r > 2$ .

V primeru, da se za gibanje porabi vsa površinska energija ( $r \rightarrow \infty$ ), je hitrost

$$v = \sqrt{2}.$$

V pravih enotah je to

$$v = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho h_0}}. \quad (2)$$

Rezultat se ujema s tistim, ki ga je predlagal Rayleigh [5, 6]. V primeru, da so kapljice večje ali če so prisotni disipacijski učinki, gre v kinetično energijo manj prvotne energije in je hitrost kapljic kvečjemu nižja od mejne.



### 3.2 Enačba gibanja

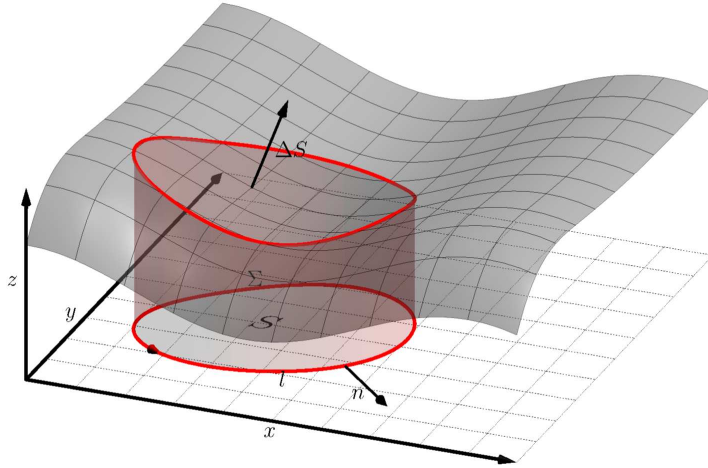
Ocene iz splošnih zakonov niso dovolj, če želimo natančno simulirati gibanje tekočine v času. Tekočina je zvezno sredstvo, ki ga opišemo s hitrostjo, gostoto in tlakom v vsaki točki. V našem primeru potrebujemo opis, v katerem prečno dimenzijo opne opišemo s spremeljivko  $h(x, y)$ . Za ta primer ne moremo uporabiti polne tridimenzionalne Eulerjeve enačbe, ampak moramo enačbe izpeljati od začetka. Izhajamo iz integralske definicije ohranitve gibalne količine za nevskožno in nestisljivo tekočino. Predpostavimo simetrijo na zrcaljenje preko ravnine  $xy$  in obravnavamo le zgornjo polovico (Sl. 2). Ohranitveni zakon zapišemo za gibajoč se volumen (količine s črtico).

$$\frac{D}{Dt} \iiint \rho \mathbf{v} dV' = - \oint p d\mathbf{\Sigma} \quad (3)$$

Na desni strani integriramo po ploskvi  $\mathbf{\Sigma}$ , ki objema volumen  $V'$ , in pomeni silo na tekočino znotraj te ploskve. Ker imamo opravka z opno, katere debelina je bistveno manjša od ostalih dimenzij, integriramo znotraj najprej po  $z$ . Na levi strani je ta operacija trivialna, na desni pa moramo vključiti tudi zgornjo ploskev, ki je pri nestalni debelini pod kotom. V ploskovnem integralu je kot običajno diferencial površine vektor s smerjo normale navzven. Ker nas zanimajo samo komponente sil, ki delujejo v ravnini opne, za zgornjo ploskev obdržimo samo projekcijo na ravnino  $xy$ . Sledi

$$\frac{D}{Dt} \iint \rho \mathbf{v} h dS' = - \oint p h \mathbf{n} dl + p \Delta S \cdot \nabla_{\perp} h. \quad (4)$$

Integral po volumnu smo prevedli na ploskovni integral,  $dV' = dS' dz$ , integral po robu tega volumna pa se poenostavi na integral po zaključeni krivulji,  $d\mathbf{\Sigma} = dl dz$ . Normala te krivulje je  $\mathbf{n}$  (Sl. 3). Z  $\nabla_{\perp}$  smo zaznamovali vektor odvodov v ravnini  $xy$ .



Slika 3: Skica integracijskih območij, uporabljenih v enačbah (3, 4). Obravnavani volumen objema ploskev  $\mathbf{\Sigma}$ , ki jo lahko zapišemo kot unijo plašča nad krivuljo ( $l$ ) in pokrova območja ( $\Delta S$ ).

Na krivuljnem integralu lahko uporabimo Greenovo formulo. Na levi uporabimo Reynoldsov transportni izrek za dve dimenziji, ki se glasi

$$\frac{D}{Dt} \iint f dS' = \iint \left[ \frac{Df}{Dt} + f \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} \right] dS.$$

S tem smo prevedli integral po gibajočem se volumnu na integral po fiksnem volumnu.

$$\rho \iint \left[ \frac{D(\mathbf{v}h)}{Dt} + \mathbf{v}h(\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}) \right] dS = - \iint \nabla_{\perp}(ph) dS + p\Delta S \cdot \nabla_{\perp}h \quad (5)$$

Ravno tako velja kontinuitetna enačba

$$\frac{Dh}{Dt} + h\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ki jo prepišemo v obliko

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_{\perp}(h\mathbf{v}) = 0. \quad (6)$$

S pomočjo te enačbe preuredimo levo stran enačbe (5).

$$\rho \iint h \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dS = - \iint \nabla_{\perp}(ph) dS + p\Delta S \cdot \nabla_{\perp}h$$

Ta enačba opisuje ohranitev gibalne količine za končno velik košček tekočine. Za reševanje je bolj primerna diferencialna oblika, ki jo dobimo tako, da pošljemo integracijsko območje proti nič,  $\Delta S \rightarrow 0$ . V limitnem procesu integrali izginejo, na desni strani pa se del odvodov uniči.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla_{\perp}p \quad (7)$$

Enačba gibanja je torej kar dvodimenzionalna Eulerjeva enačba. Učinki debeline se poznajo le pri kontinuitetni enačbi, ki spominja na enačbo za stisljive tekočine. Če ne bo rečeno drugače, od tu dalje privzemimo, da je  $\mathbf{v}$  dvokomponentni vektor in  $\nabla$  dvodimenzionalni odvod v ravnini.

Edini prispevek k tlaku v našem primeru je tlak zaradi površinske napetosti. Ta je sorazmeren s povprečno ukrivljenostjo površine. Ker smo zanemarili vse učinke, odvisne od  $z$ , velja

$$p = -\sigma\kappa.$$

Četudi bomo ukrivljenost  $\kappa$  v numerični metodi računali eksaktno, za oceno vzemimo kar približek za majhne naklone površine:  $\kappa = \nabla^2 h$ .

$$p = -\sigma\nabla^2 h$$

Dobljene enačbe še vedno vsebujejo snovne lastnosti. Te odpravimo s prehodom na brezdimenzijske količine. Od tu naprej se čas meri v enotah  $t_0$ , razdalje v enotah  $h_0$ , in hitrosti v  $h_0/t_0$ . Enačbo (7) s tem preoblikujemo v

$$\frac{\rho h_0^3}{t_0^2 \sigma} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \nabla^2 h.$$

Konstanta, ki stoji pred inercialnim členom se imenuje Webrovo število.

$$W = \frac{\rho h_0^3}{t_0^2 \sigma} \quad (8)$$

V našem primeru je naravno merilo razdalj polovična debelina plasti. Za čas pa nimamo naravnega merila. To pomeni, da različna gostota in površinska napetost vplivata le na

hitrost poteka dogodkov in lahko za namen simulacije in računanja vedno postavimo  $W = 1$  in s tem fiksiramo časovno skalo:

$$t_0 = \sqrt{\frac{\rho h_0^3}{\sigma}}.$$

Enoto za hitrost izrazimo s snovnimi konstantami kot

$$v_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho h_0}}, \quad (9)$$

kar bomo potrebovali v nadaljevanju.

Zapišimo kontinuitetno in Eulerjevo enačbo v brezdimenzijski obliki. Kontinuitetna enačba ne vsebuje snovnih konstant in ostane po prehodu na brezdimenzijske količine nespremenjena.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p \quad (10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(h\mathbf{v}) = 0 \quad (11)$$

Ta sistem enačb nima nobenega prostega parametra. To pomeni, da vse neviskozne opne razpadajo na enak način.

### 3.3 Potujoči valovi

Energijski zakon (En. 1) pove samo zvezo med polmerom kapljic in njihovo hitrostjo. Če v procesu razpada res nastajajo kapljice enakih polmerov, potem obstaja še ena zveza, s katero sta hitrost in polmer enolično določena. S tako zvezo lahko napovemo stanje izhodnih kapljic še preden začnemo reševati polni sistem gibalnih enačb.

Posebno preprosta je sebi podobna rešitev, v kateri se fronta giblje s stalno hitrostjo. Stanje roba opne ob nekem času se ponovi ob nekem drugem času, le da se rob medtem premakne naprej. To lahko pomeni bodisi enakomerno gibanje ali periodično gibanje s končno periodo. Najenostavnejši primer gibanja, katerega krajevna slika se le premika vzdolž dane smeri, so potujoči valovi. Ko govorimo o valovih, v resnici govorimo o premikanju celotnega stanja opne. Točne enačbe gibanja nam sploh ni treba vedeti, ker za potujoče valove vemo, da so rešitev valovnih enačb. Da se valovi gibljejo samo v eni smeri, posežemo po valovni enačbi prvega reda (advektivna enačba). Zapišimo jo za hitrost, čeprav morajo enake enačbe veljati za vse spremeljivke, če hočemo, da se stanje ohranja.

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + c \nabla v = 0 \quad (12)$$

Pri tem smo uvedli hitrost valovanja  $c$ , ki je zaenkrat še poljubna. Daleč od roba bodo rešitve res opisovale gibanje infinitezimalnih motenj v debelini in hitrosti. Na samem robu pa se v resnici ne giblje le motnja, ampak tudi sama tekočina, ki ima hitrost  $v$ .

Hitrost tekočine na robu se mora ujemati s hitrostjo motenj. Če bi se tekočina gibala prehitro, bi bilo njeno gibanje glede na motnje nadzvočno in bi nastajali udarni valovi. Če bi bila motnja hitrejša od tekočine, potem bi površinski valovi razburkali tekočino veliko prej, preden bi do tja prispela razpadna fronta. Razpad opne zato ne bi potekal le ob fronti,

ampak po celi opni hkrati. Edino smiselno je torej predpostaviti, da je  $c$  hitrost odcepljenih kapljic.

Daleč od roba, kjer so hitrosti majhne, velja linearizirana Eulerjeva enačba, ki se glasi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p. \quad (13)$$

Primerjava enačb (12) in (13) nam da presenetljiv rezultat

$$p = c \cdot v, \quad (14)$$

kar pomeni, da je hitrost v fazi s tlakom in se od njega razlikuje le za konstanten faktor. To je s simulacijo zelo enostavno potrditi.

Zgornji rezultat lahko pripeljemo še dlje, če pomislimo na rob, kjer je hitrost motenj kar enaka hitrosti tekočine,  $c = v$ . Za rob in odcepljene kapljice zato postavimo  $p = v^2$ , kar je druga zveza med  $p$  in  $v$ , ki smo jo potrebovali. Ta zveza, skupaj z enačbo (1) enolično določi kinetično energijo in tlak kapljic. Za okrogle kapljice velja  $p = \frac{2}{r}$  v dveh dimenzijah in  $p = \frac{1}{r}$  v eni, od koder dobimo tudi njihov polmer.

$$1D : \quad \frac{v^2}{2} = 0.2; \quad r = 2.5 \quad (15)$$

$$2D : \quad \frac{v^2}{2} = 0.25; \quad r = 4 \quad (16)$$

Postopek izpeljave je legitimen v eni dimenziji, kjer so hitrosti usmerjene v isto smer kot potujoči valovi. V dveh dimenzijah imamo lahko hitrosti tudi v prečnih smereh, zaradi česar je enačbo (16) treba jemati le kot oceno.

Rayleighova maksimalna hitrost (En. 2) ustreza kinetični energiji 1, zgornji rezultati so torej deleži kinetične energije proti celotni. Culick in Taylor [2, 3] izpeljeta vrednost  $\frac{v^2}{2} = 0.5$  z oceno dela, ki ga opravlja prost rob filma. Njuna hipoteza je bila potrjena z eksperimenti [2, 5, 6]. Za razliko od naše teorije, Culick predpostavi, da vsa tekočina ostaja v robu. Ta zato postaja vedno debelejši, kar opazimo tudi pri eksperimentih. V našem primeru odcepljene kapljice odnašajo gibalno količino, zato tekočina ne doseže večjih hitrosti. Za razliko je najverjetneje kriva predpostavka o neviskoznosti. Majhna viskoznost na gibanje večjega dela tekočine ne vpliva, postane pa pomembna ravno v zelo tanki plasti, ki nastane pri odcepljanju kapljic. O vplivu viskoznosti bom več povedal kasneje.

### 3.4 Diagram $P - T$

Ohranitev energije (En. 1) ponuja možnost, da nastale kapljice primerjamo po kinetičnih energijah in recipročnih polmerih. Za ponazoritev teh lastnosti na diagramu ločimo hitrostni in tlačni del energijske bilance.

$$\underbrace{\frac{2}{r}}_P + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_T = 1 \quad (17)$$

Za vsako kapljico lahko numerično izmerimo polmer in hitrost. Če nanašamo na eno os  $T = \frac{1}{2}v^2$ , na drugo pa  $P = \frac{2}{r}$ , morajo točke ležati na premici  $P + T = 1$ . Točke pod to premico pomenijo, da je prišlo do disipacije energije.

Če se par  $(P, T)$  ene kapljice s časom premika po diagramu, pomeni da se volumen in gibalna količina ne ohranjata. Diagram tudi omogoča primerjavo s teoretičnimi napovedmi za hitrost (enačbi (15) in (16)).

Osi diagrama v eni dimenziji predstavljata kinetično energijo  $T$  in delež preostale površinske energije  $P$ , ki je sorazmeren s tlakom v kapljicah ( $P = 2p$  za eno dimenzijo in  $P = 1.5p = \frac{3}{r}$  za dve).

### 3.5 Ocena napake aproksimacije

S približkom, ki smo ga naredili s poenostavitvijo na dve dimenziji, predpostavljamo, da sta tako hitrost kot tlak enaka po vsej globini. To ni res za dele opne s krivinskim radijem, manjšim od debeline opne. Manjši detajli ne vplivajo na globalno gibanje tekočine, njihov tlačni vpliv je omejen na tekočino tik pod površino. Gre za površinske kapilarne valove, za katere je privzetek o konstantnem vertikalnem hitrostnem profilu nepravilen.

Predpostavili smo tudi, da so pravokotne hitrosti, ki spreminjajo debelino opne, majhne. Komponento hitrosti v smeri  $z$  lahko ocenimo iz nestisljivosti tekočine v treh dimenzijah.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbf{v}$$

Za desni del smo predpostavili, da ni odvisen od  $z$ . Integral zgornje enačbe po  $z$  je zato trivialen.

$$w = -z \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Dobili smo rezultat, da vertikalna hitrost linearно narašča iz sredine opne proti robu. Iz tridimenzionalne Eulerjeve enačbe dobimo tudi tlačni gradient, ki žene to hitrost

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)w = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Iz zgornje enačbe z integralom izluščimo tlačni popravek. Ta mora biti na površini enak 0, da tlak ustreza površinski napetosti. S tem določimo integracijsko konstanto.

$$\delta p \approx \frac{z^2 - h^2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla)(\nabla \mathbf{v}) \right)$$

V integralski obliki enačbe gibanja smo integrirali tlak po  $z$ . Tokrat je integrand odvisen od  $z$ , zato bo rezultat drugačen.

$$\int_0^h \delta p \, dz = -\frac{h^3}{3} \left( \nabla \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)(\nabla \mathbf{v}) \right)$$

To lahko vstavimo v enačbo gibanja (En. 10) in uporabimo nepopravljeno obliko za odvod hitrosti.

$$\begin{aligned} h \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -h \nabla p - \nabla \int_0^h \delta p \, dz \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \nabla \nabla^2 h + \frac{1}{h} \nabla \left[ \frac{h^3}{3} (\nabla \nabla^2 h - \nabla((\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \nabla)(\nabla \mathbf{v})) \right] \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \nabla \nabla^2 h + \frac{1}{h} \nabla \left[ \frac{h^3}{3} (\nabla \nabla^2 h - |\nabla \otimes \mathbf{v}|^2) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Popravek je nelinearen in četrtega reda. Prvi člen opisuje vpliv ostrih sprememb v debelini, za katere smo že ugotovili, da konstanten tlak ni dober opis. Drugi člen je kvadrat tenzorja strižnih hitrosti. Kadar je ta velik, je celoten približek o neviskozni tekočini napačen in bi morali začeti s polno Navier-Stokesovo enačbo.

### 3.6 Razpad v dveh dimenzijah

Teorija potujočih valov napoveduje kapljice s polmerom  $r = 4$ . Ta rezultat pa je le ocena, ker vsako gibanje v prečnih smereh krši predpostavko o potujočih valovih. Če je razpad v smeri gibanja fronte hitrejši kot v vzdolžni smeri, potem dobimo vzporedne valje s presekom  $r' = 2.5$ , kot napoveduje teorija v eni dimenziji. Ti potem razpadejo zaradi Rayleighove nestabilnosti. Karakteristična dolžina, pri kateri ima nestabilnost največji eksponent ([4], str. 65), je

$$\lambda = r' \frac{2\pi}{0.7}$$

Tolikšne so dolžine odsekov, na katere razpade tekočinski valj. Nastale kapljice so sprva vzbujene in je del energije shranjen v njihovih oscilacijah. Ko se nihanje zaradi disipacije ustavi, kapljice postanejo okrogle s polmerom

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{2} r'^2 \lambda} = r' \sqrt[3]{\frac{3\pi}{0.7}} \approx 4.72. \quad (19)$$

Izgube energije zaradi nihanja gredo na račun zmanjšanja površinske energije in s tem povečanja kapljic.

### 3.7 Sorodni procesi

Enačba gibanja (En. 7), skupaj s kontinuitetno enačbo, opisuje neviskozno tekočino v enodimenzionalnem prerezu. Podobne enačbe dobimo za gibanje cilindrično simetrične neviskozne tekočine. Izpeljava enačb poteka na enak način, le da po zamenjavi spremenljivk v integralu (En. 5) dobimo dodaten Jakobijev faktor  $r$  za cilindrično geometrijo. Za gibalno in kontinuitetno enačbo dobimo

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{v^2}{2r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\nabla p, \quad (20)$$

$$\frac{Dr}{Dt} - \frac{1}{2} r \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (21)$$

Edina razlika sta dodatna člena, ki sta posledica drugačnega razmerja med debelino plasti in njenim volumnom. Spremeni se tudi izračun tlaka, kjer moramo upoštevati tudi okroglost v prečni smeri. Zaradi te razlike je neskončna opna stabilna, neskončen cylinder pa ni. Enačbe pa so vseeno dovolj sorodne, da lahko pričakujemo podobno obnašanje.

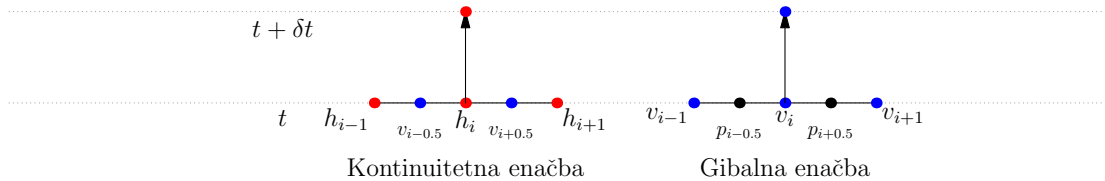
## 4 Numerična shema

### 4.1 Mreža

Za reševanje enačb (10) in (11) sem posegel po metodi končnih diferenc. Za Navier-Stokesov sistem, katerega poseben primer je Eulerjeva enačba, je znano [7], da reševanje na mreži, ki ima vse spremenljivke v istih točkah mreže, ni stabilno. Enačbe bom reševal na raztreseni mreži (staggered grid). Tlak in debelina bosta definirana na mrežnih točkah, hitrosti pa na zveznicah med točkami (Sl. 4). Taka mreža se uporabi v primerih, ko imamo enačbe prvega reda in potrebujemo stabilnost s simetričnimi diferencami. Označimo s spodnjim indeksom položaj na mreži, z zgornjim pa korak v času. V eni dimenziji se diskretizirani odvodi zapišejo kot

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_i^n &= \frac{1}{\delta t}(v_i^{n+1} - v_i^n) \\ \left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^n &= \frac{1}{2\delta x}v_i^n(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) \\ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_i^n &= \frac{1}{\delta x}(p_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^n &= \frac{1}{\delta t}(h_i^{n+1} - h_i^n) \\ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_i^n &= \frac{1}{\delta x^2}(h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n) \\ \left(\frac{\partial v h}{\partial x}\right)_i^n &= \frac{1}{2\delta x}(v_{i+\frac{1}{2}}^n h_{i+1}^n - v_{i-\frac{1}{2}}^n h_{i-1}^n + h_i^n(v_{i+\frac{1}{2}}^n - v_{i-\frac{1}{2}}^n))\end{aligned}$$

Če desne strani po Taylorju razvijemo okrog  $i$ -te točke, lahko pokažemo, da se do drugega reda ujemajo z odvodi na levi strani. Za zadnji izraz lahko na ta način pokažemo, da je izmed vseh možnih kombinacij, ki dajo v prvem redu odvod na levi, navedena možnost pravilna do najvišjega reda, [8].



Slika 4: Diskretizacija enačb na raztreseni mreži. Spremenljivka  $v$  je definirana na zamaknjenih točkah glede na debelino in tlak. Zaznamoval sem, katere vrednosti spremenljivk potrebujemo, da izračunamo vrednost v naslednjem časovnem koraku.

Odločil sem se za shemo, ki je eksplisitna v času. Implicitne sheme imajo res prednost, da so bolj zagotovo stabilne in dovoljujejo večji korak, vendar za naš model niso primerne, ker moramo robne točke obravnavati posebej.

## 4.2 Linearna stabilnost, von Neumannova analiza

Z diskretizacijo lahko iz stabilnih diferencialnih enačb nastane nestabilna računška shema. To se zgodi, ker je lahko časovni korak predolg, da bi ga prva diferenca zadovoljivo opisala. Nestabilnosti zaznamo z linearno perturbacijsko teorijo. Če majhni linearni odmiki od ravnovesnega stanja eksponentno naraščajo, potem je metoda nestabilna. Diskretiziramo enodimenzionalno različico lineariziranih enačb gibanja:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (22)$$

$$p = - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v h}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (24)$$

Za numerično stabilnost sem dodal malenkosten disipativni člen za dušenje visokofrekvenčnih komponent valovanja. To je v skladu z ugotovitvijo, da za drobne detajle predpostavka o enodimenzionalnosti ne drži. Za razliko od debeline in hitrosti, ki se ravnata po diferencialni enačbi, se tlak v vsakem koraku računa znova. Ker je definiran z drugim odvodom debeline, se vsaka oscilacija v debelini odraža v tlaku kot velika motnja. Zato je debelina tista, kjer je potrebno gladiti manjše oscilacije. Dodatek dušenja v Eulerjevo enačbo bi pomenil dodatek viskoznosti, česar nočem, ker raziskujem obnašanje v limiti idealne tekočine.

Dodatek ne vpliva na ohranitev volumna, kar vidimo z integracijo:

$$\int \eta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx = \eta \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\text{meja}}$$

Spremembo totalnega volumna povzroči dodatni člen le na meji definicijskega območja. Tam se tudi brez tega člena volumen lahko spreminja, če hitrost ni ničelna. Definijsko območje mora biti dovolj veliko, da tekočina tam miruje in ostane enakomerno debela.

Po von Neumannu [8] za  $p$ ,  $h$  in  $v$  vstavimo nastavke oblike

$$h = h_0 + h_\epsilon e^{ikx}$$

V času predpostavimo geometrijsko (eksponentno) obnašanje s faktorjem  $q$ . Enačbe postanejo

$$\begin{aligned} \frac{v_\epsilon}{\delta t}(q-1) + \frac{v_0 v_\epsilon}{2\delta x}(2i \sin k\delta x) &= \frac{h_\epsilon}{\delta x^3}(2i \sin \frac{k\delta x}{2} 2(\cos k\delta x - 1)) \\ \frac{h_\epsilon}{\delta t}(q-1) + \frac{v_0 h_\epsilon}{2\delta x}(2i \sin k\delta x) + \frac{v_\epsilon h_0}{2\delta x}(4i \sin \frac{k\delta x}{2}) &= \eta \frac{h_\epsilon}{\delta x^2} 2(\cos k\delta x - 1) \end{aligned}$$

Rešitev sistema (pri privzetku, da je  $h_0 = 1$ , kar je začetno stanje opne) je

$$q = \left(1 - \frac{\eta P}{2}\right) + i \left(v_0 \frac{\delta t}{\delta x} \sin k\delta x \pm \frac{P}{2} \sqrt{4P^2 - \eta^2}\right) \quad (25)$$

Pri tem je  $P = \frac{4\delta t \sin^2 \frac{k\delta x}{2}}{\delta x^2}$ . Za stabilnost mora biti  $|q| < 1$ . Privzemimo še ničelno hitrost,  $v_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} |q|^2 &= 1 - \eta P + P^4 \\ |q| &\approx 1 - 2\eta \frac{\delta t}{\delta x^2} \sin^2 \frac{k\delta x}{2} + 128 \frac{\delta t^4}{\delta x^8} \sin^8 \frac{k\delta x}{2} \end{aligned}$$



Pomembno je, da je algoritem brez dušenja  $\eta$  le marginalno stabilen, kot posledica ohranitve energije: faktor je oblike  $q = 1 + iP^2$ . Za popolnoma stabilno shemo mora  $|q| < 1$  veljati za vse valovne dolžine. Postavimo sinusne člene na 1.

$$|q| = 1 - 2\eta \frac{\delta t}{\delta x^2} + 128 \frac{\delta t^4}{\delta x^8} < 1$$

$$\eta > 64 \frac{\delta t^3}{\delta x^6} \quad (26)$$

Če hočemo ohraniti natančnost, moramo pri zgoščevanju mreže ohraniti razmerje med časovnim korakom in *kvadratom* mrežne razdalje,  $\delta t \propto \delta x^2$ .

Za običajne diskretizacijske parametre so zahtevani koeficienti dušenja tolikšni, da rezultati ne bi več predstavljali fizikalnega stanja,  $\eta$  je namreč nefizikalen dodatek za stabilnost. V svojih simulacijah bom  $\eta$  nastavljal na manjše vrednosti in se za stabilizacijo zanašal na nelinearne pojave.

### 4.3 Robni pogoji

Pokanje open in nestabilnosti, ki se pojavijo pri samem razpadu, so povezane z okoliščinami v neposredni bližini roba. Visoka ukrivljenost pomeni visoko gostoto površinske energije, ki je omejena na ozko območje. To pomeni visok tlačni gradient v razdalji nekaj debelin opne od roba. Ob predpostavki samopodobnosti smo pokazali, da pojav doseže znano ravnovesno hitrost roba in nastalih kapljic.

Za simulacijo je najpomembnejša pravilna obravnava roba, ker ta žene gibanje celotne opne. Ukrivljenost je tam zelo velika, gladina opne pa je nagnjena, kar pomeni, da poenostavljena formula  $\kappa = \nabla^2 h$  ni ustrezna. Za ukrivljenost sem uporabil točno tritočkovno formulo. Izraz

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}^3} \quad (27)$$

se na diskretni mreži napiše

$$\kappa = \frac{D^2 h}{\sqrt{1 + (D_+ h)^2} \sqrt{1 + (D_- h)^2} \sqrt{1 + (D_0 h)^2}}, \quad (28)$$

kjer v imenovalcu nastopajo desna, leva in sredinska diferenca.

V mrežnih točkah, kjer tekočine ni, vrednosti ne računam z enačbami gibanja, ampak jih samo postavim na  $h = 0$ , da se ločijo od aktivnih točk. Teh točk ne smemo uporabiti za računanje ukrivljenosti, zato tritočkovna formula za ukrivljenost ni uporabna na skrajnih točkah tekočine. V teh točkah se površina nadaljuje v simetrično preslikavo preko osi  $x$ . Ker rob v resnici ni točno na točkah mreže ampak nekje vmes, bi bile tako izračunane ukrivljenosti napačne. Druga težava je ta, da ne smemo dovoliti sunkovitega skakanja roba opne po točkah mreže. To obnašanje je nefizikalno in nujno vodi v napačno hitrost roba in dodatno harmonično vzbujanje.

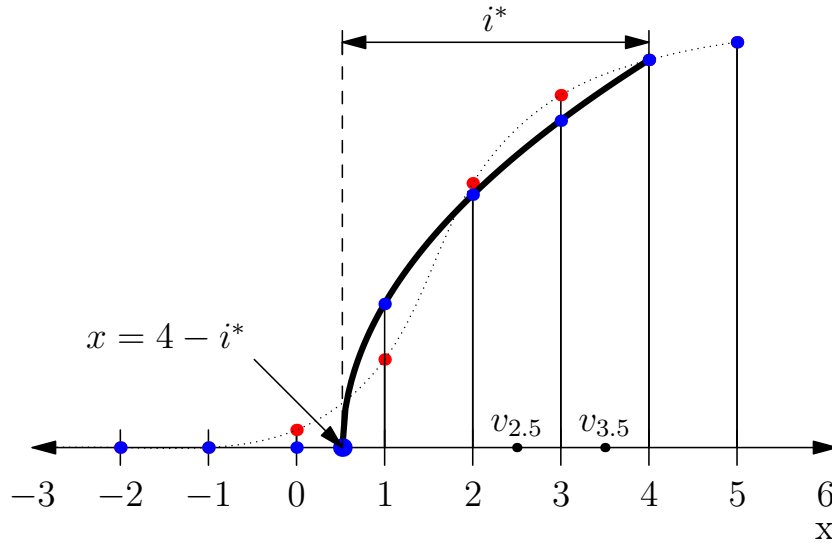
Težave sem rešil s privzetkom, da sile na robu zelo hitro dosežejo mehansko ravnovesje. Ravnovesno stanje je v dveh dimenzijah krogelna kapica, v eni dimenziji pa odsek valja. Valjast rob sem aproksimiral s parabolo. Vsak časovni korak poiščem robove, njihove konce

(zadnje štiri točke) spremenim v korenske parabole z enakim volumnom (opis prilagajanja parabole na dani volumen je opisan v dodatku). Vrednosti tlaka in hitrosti zamenjam s povprečji po tem območju. Tlak dobimo analitično, iz globine parabole (za indekse in simbole glej sliko 5):

$$p = \frac{2i^*\delta x}{h_{i+4}^2} \quad (29)$$

Za hitrost vzamemo povprečno vrednost v dveh točkah. Izbira načina povprečenja je pomembna za ohranitev gibalne količine in jo bom pojasnil kasneje, v enačbi (31).

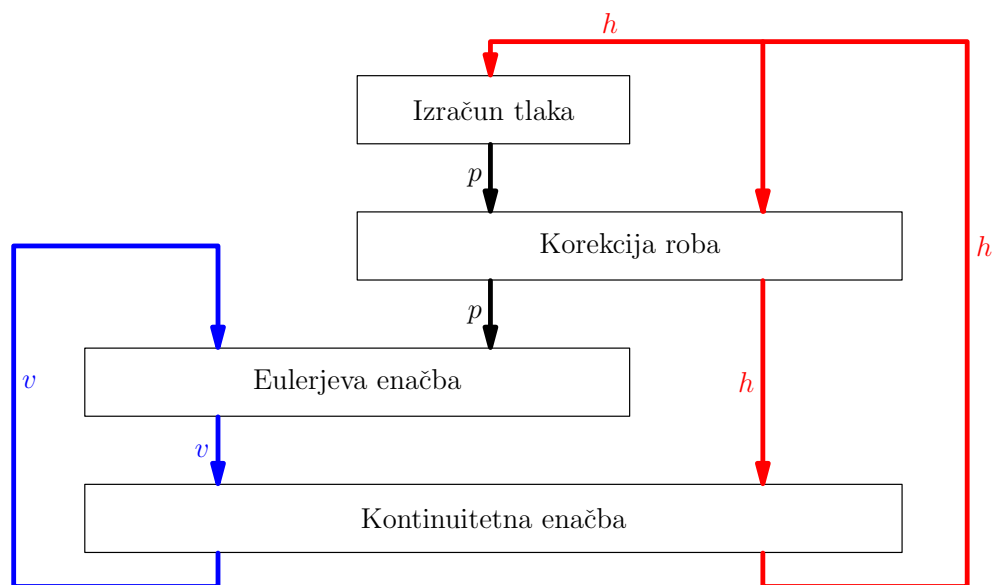
Tlak na robu v trenutku, ko se kapljica odtrga od celote, je lahko več redov velikosti večji kot drugje. To je nestabilno, tudi če je metoda stabilna na ravnem delu opne. Ker pa odcep traja le en časovni korak, se visoke vrednosti tlaka izravnavajo, preden lahko metoda odpove.



Slika 5: Skica procesa, s katerim upoštevamo singularni robni pogoj. Zadnje 4 točke nadomestimo s korensko funkcijo tako, da se volumen ohrani. Hitrost na tem območju postavimo na povprečje hitrosti v označenih točkah, tlak pa je enak ukrivljenosti parabole.

#### 4.4 Povzetek metode

Celotna numerična shema je sestavljena iz samostojnih eksplicitnih korakov v času. Enačbe gibanja rešujemo v treh korakih: izračun tlaka, časovni korak v hitrostih in časovni korak v debelini. Med izračun tlaka in evolucijo hitrosti pa moramo dodati korekcijo robnega pogoja, ker le-ta spremeni vrednosti tlaka na robu, te pa potrebujemo v koraku Eulerjeve enačbe. Pri korekciji roba vsakič poiščemo leve in desne robove in jih nadomestimo z omenjenimi korenskimi odseki. Na območjih, kjer tekočine ni, Eulerjeva enačba nima pomena, zato na teh območjih hitrosti in tlaka ne računam. Podrobna oblika diskretiziranih enačb je opisana v dodatku.



Slika 6: Shema poteka numerične metode. V grobem je ta sestavljena iz štirih korakov, tlak pa se vedno računa na novo in je le pomožna spremenljivka.

## 5 Numerični rezultati

### 5.1 Prikaz rešitev

Opisana računska shema je izpeljana tako, da zdrži poljubne cepitve in združitve delov tekočin. S tako metodo lahko simuliramo tudi primere, pri katerih bi običajne metode odpovedale. Simulacijo sem zagnal z začetnim pogojem polneskončne opne in pustil teči toliko časa, dokler niso motnje prišle do desnega roba mreže.

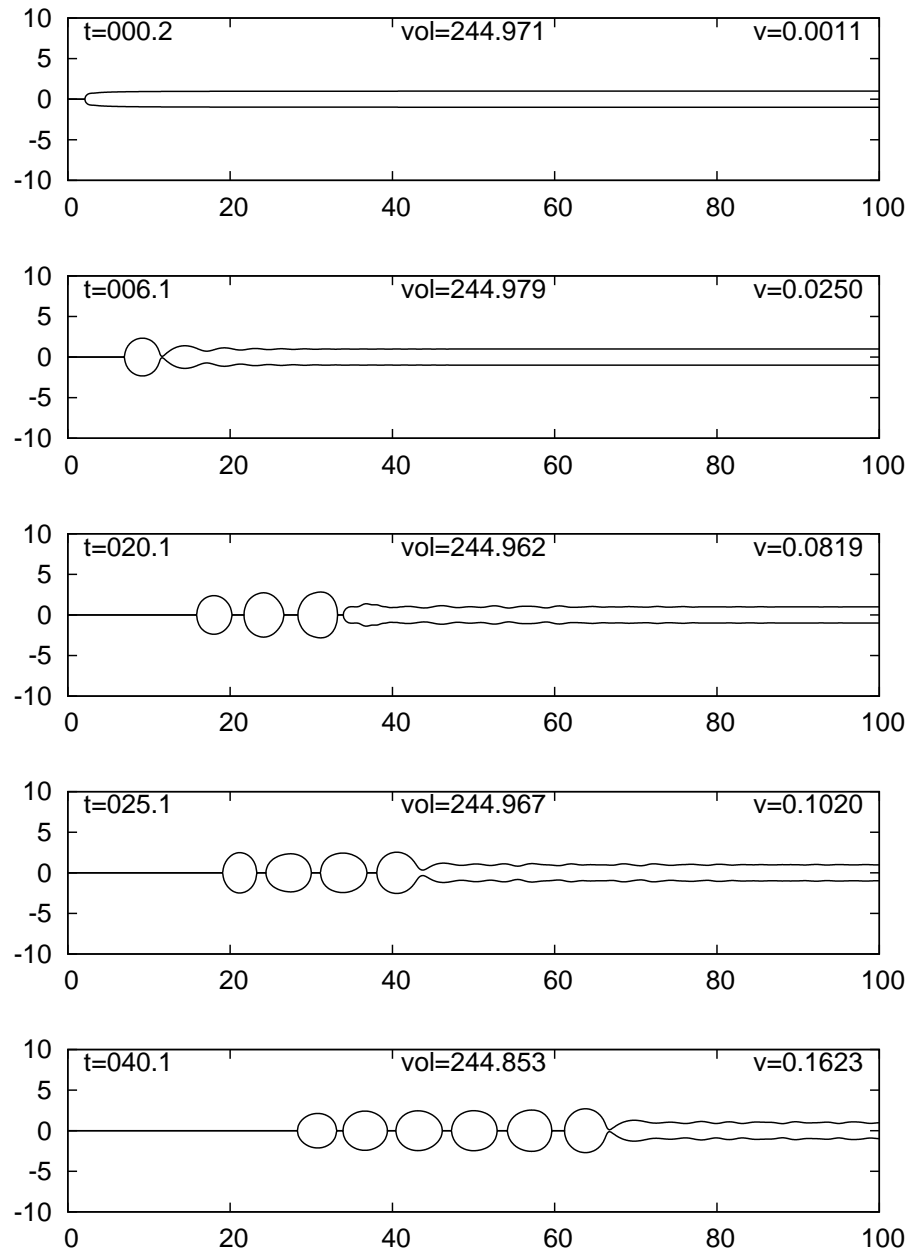
Rezultate metode sem prikazal kot profile tekočine ob različnih časih. Iz eksperimentalnih podatkov in modelov iz literature bi pričakovali debeljenje roba, ki bi kmalu dosegel konstantno hitrost. Zagon simulacije je pokazal drugačno sliko. Od opne se takoj začnejo odcepljati kapljice, ki niso veliko večje od opne same. Debelega roba ni opaziti, kapljice izhajajo direktno iz nezmotene opne. Dogajanje je povsem periodično in iz izbranega začetnega pogoja doseže ravnovesno stanje že po odcepu prve kapljice. Odcepljene kapljice niso povsem okrogle, vendar oscilirajo okrog ravnovesnega okroglega stanja, ker jih površinska napetost poskuša spraviti v obliko z najmanjšo površino. Odcep je sunkovit pojav, ki tekočino razburka in pošlje hitre kapilarne valove po površini opne. Te podrobnosti je težje prepoznati iz slike, se pa dobro vidijo, če rezultate predvajamo v obliki filma.

Slike profilov (Sl. 7) so povsem drugačne od tega, kar napoveduje Culick. Sklepamo lahko, da Culickov model za neviskozne tekočine ne velja. Dobljeni potek dogajanja je nekaj novega in ga dosedanje raziskave ne opišejo.

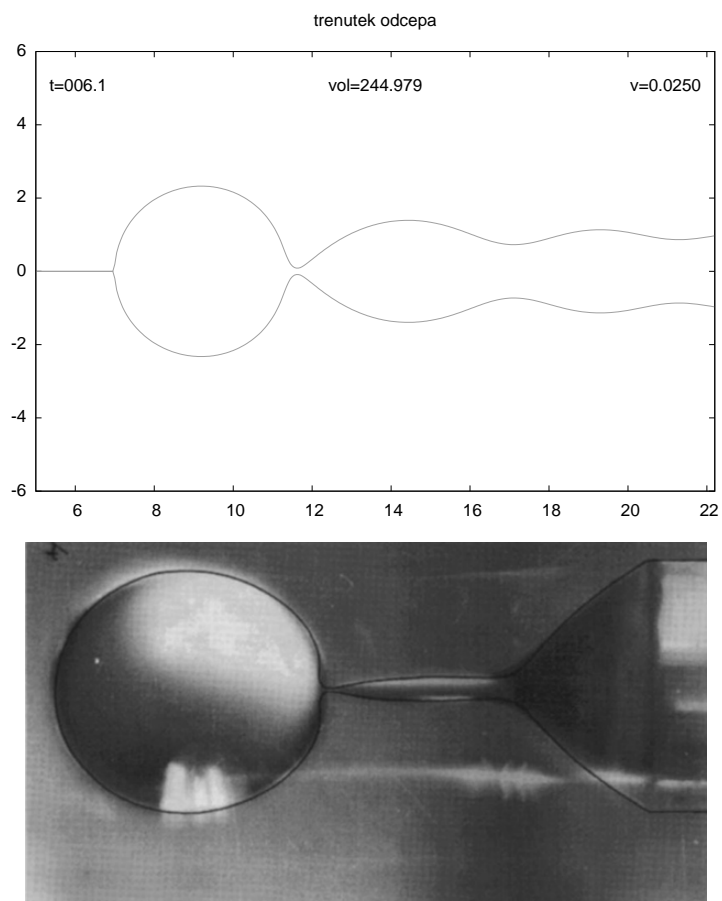
Primerjava odcepa prve kapljice s sliko odcepa kapljice v cilindrični geometriji (Sl. 8) pokaže, da sta procesa zelo podobna. V trenutku odcepa vidimo značilen profil, ko je gladina odcepljajoče se kapljice skorajda pravokotna na os, preostanek tekočine pa izhaja iz stičišča pod manjšim kotom. Podobnost je posledica sorodnosti enačb v obeh primerih (En. 20, 21).

Eden izmed pomembnih rezultatov je tudi ta, da tlak in hitrost hkrati menjata predznak, kar pomeni, da sta natančno v fazi (Sl. 9). To je v skladu s hipotezo, da se fronta razpada širi kot potujoči val, sorazmerje smo pokazali v enačbi (14).

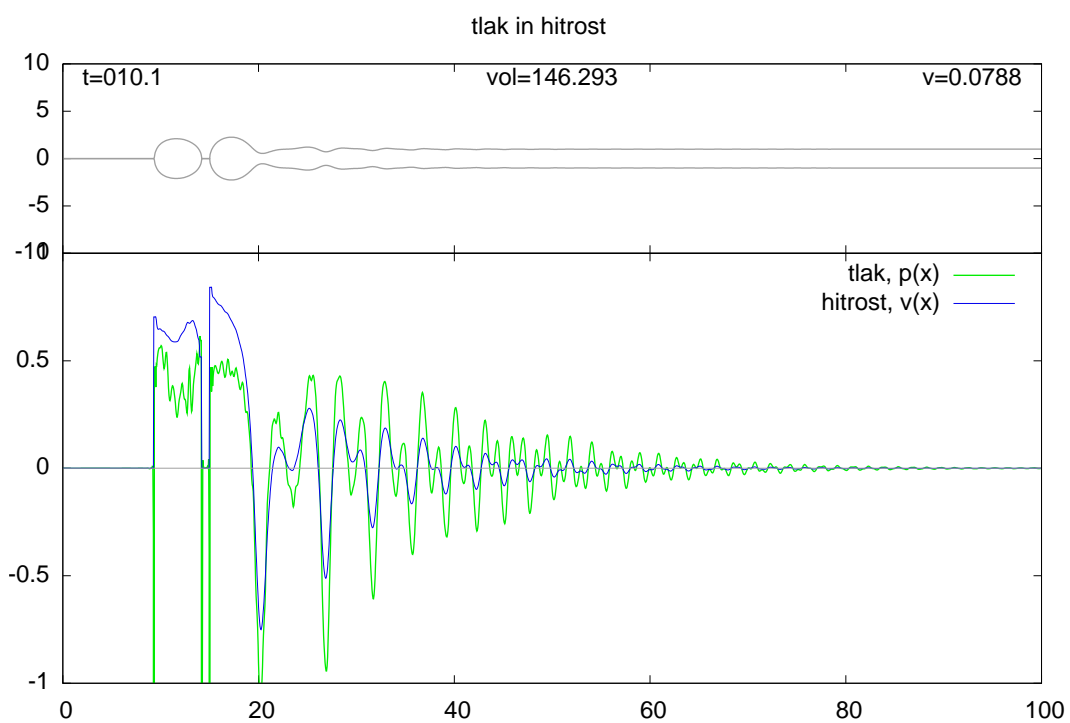
Na tem mestu bom prikazal le slike rešitev, ki jih vrača simulacija. Izbiro parametrov bom pojasnil kasneje.



Slika 7: Profil tekočinske plasti pri različnih časih. Druga slika kaže trenutek tik pred odcepom prve kapljice. Očitno je, da so vse kapljice enakih velikosti in potujejo z isto hitrostjo. Iz podatkov za totalni volumen vidimo, da se ta ohranja na promil natančno.



Slika 8: Oblika opne v trenutku odcepa ima podobno obliko kot odcep kapljice od curka. Procesa sta sorodna, kljub temu, da ima segmentacija curka v kapljice cilindrično simetrijo, opna pa translacijsko. Spodnja slika je iz vira [9].



Slika 9: Tlak in hitrost sta točno v fazi. Kot sem pokazal v prejšnjem odseku, je to povezano z dejstvom, da je proces periodičen. Razmerje med obema količinama mora biti v grobem enako povprečni hitrosti roba, kot smo videli v teoretičnem izračunu.

## 5.2 Umeritev numerične sheme

Računska shema ima še nekaj prostostnih stopenj, s katerimi nadzorujemo natančnost in konvergenco. Za uglasitev parametrov sem uporabil diagrame  $P - T$ . Metoda je stabilna, kadar par  $(T, P)$  za isto kapljico ostane na istem mestu skozi daljši čas simulacije.

Gostoto mreže reguliramo z mrežno razdaljo  $\delta x$ , časovni korak pa moramo ustrezno zmanjšati, da metoda ostane konvergentna. Za mrežno razdaljo sem vedno vzel  $\delta x = 0.05$ . Za časovni korak sem preizkusil različne vrednosti in na koncu izbral  $\delta t = 0.0005$ . Stabilnost sem spremljal na  $P - T$  diagramu. Parameter dušenja sem postavil na  $\eta = 0.025$ , kar se je izkazalo za dober kompromis med stabilnostjo in fizikalno eksaktnostjo. Te vrednosti ne zadostijo von Neumannovemu kriteriju za konvergenco (En. 26), metoda pa vseeno ostane pohlevna zaradi nelinearnih členov in gladilnega učinka analitične rešitve na robu.

Povzemimo: od tu naprej, če ni rečeno drugače, velja

$$\delta x = 0.05; \quad \delta t = 0.0005; \quad \eta = 0.025. \quad (30)$$

Robu tekočine, ki mu v vsakem koraku prilagodim parabolo, moramo določiti hitrost. Pred popravkom imajo robne točke različne hitrosti, iz teh pa moramo nekako dobiti skupno hitrost. Nova hitrost mora ohraniti silo zaradi tlačne razlike na stiku med popravljenim robom in nespremenjenim delom opne, drugače izgubimo interakcijo z robom. Teoretično nimamo nobenega zakona, ki bi nam povedal, kako to hitrost določiti. Zato sem poskušal z različnimi kombinacijami hitrosti štirih robnih točk in na  $P - T$  diagramu opazoval, katera najboljše ohranja stanje kapljic.

Označimo prvo točko roba z  $h_i$ ,  $h_i \dots h_{i+3}$  pa so točke, ki jih nadomestimo s korensko parabolo (Sl. 5). Za hitrost sem poskusil z vrednostmi

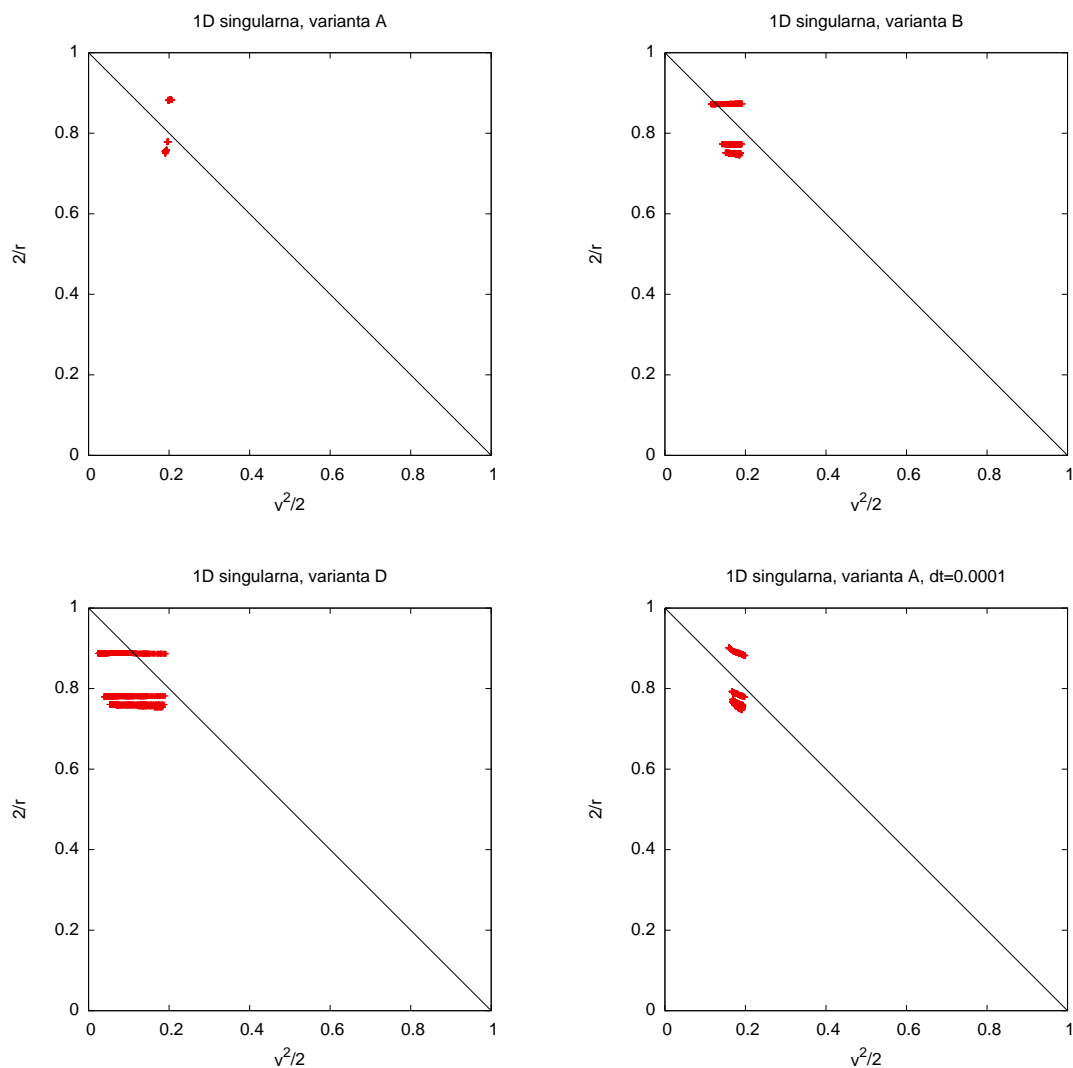
- A:  $\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_{i+2.5} + v_{i+3.5})$
- B:  $\langle v \rangle = v_{i+2.5}$
- C:  $\langle v \rangle = v_{i+3.5}$
- D:  $\langle v \rangle = \sum v_i(h_{i-0.5} + h_{i+0.5}) / \sum (h_{i-0.5} + h_{i+0.5})$

Možnost D je povprečje hitrosti po celotni kapici in sledi iz ohranitve gibalne količine, vendar se je pokazalo, da se hitrost najboljše ohranja v primeru A, ko povprečimo dve točki na stičišču korenskega zaključka z ostalim delom opne.

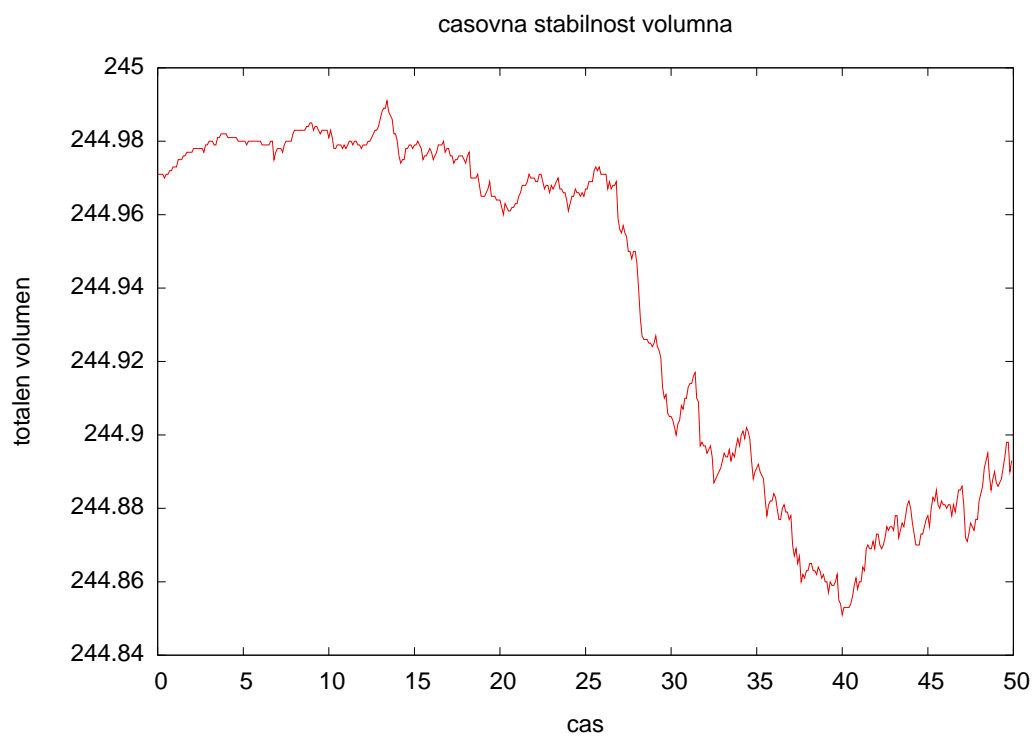
$$\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_{i+2.5} + v_{i+3.5}) \quad (31)$$

Na  $P - T$  diagramu lahko kvalitativno ocenimo, kako dobro se shema drži ohranitve volumna. Ni pa odveč pogledati časovnega poteka totalnega volumna tekočine (Sl. 11). Za ta primer je bilo definicijsko območje široko 250 enot, da je bilo odtekanje tekočine na desni zanemarljivo. Glavne napake v volumnu prinesejo robovi. Volumen tekočine je bil v tem primeru  $V = 490$ .





Slika 10: Primerjava  $P - T$  grafov za različne možnosti obravnave robnega pogoja. Prve tri možnosti imajo  $\delta t = 0.0005$ , četrta  $\delta t = 0.0001$ . Metode povprečenja so po vrsti A,B,D,A. Metoda A je najboljša izbira (En. 31). Vidimo, da z napačno izbiro dobimo zdrs v kinetični energiji (hitrost pada). Manjši časovni korak pomeni več korakov in s tem večjo akumulirano napako.



Slika 11: Potek volumna zgornje polovice opne v času,  $\delta t = 0.0005$ . Relativna sprememba volumna na časovno enoto je okrog  $10^{-5}$ , kar pomeni manj kot  $10^{-8}$  na en časovni korak.

### 5.3 Invariante

Konstante gibanja so pomembne pri razumevanju splošnih lastnosti fizikalnih procesov. Ker smo že na začetku izbrali ničelno viskoznost, se energija ohranja. Če med odcepljanjem energija prehaja le med kinetično in površinsko energijo, velja ohranitev tudi za posamezne kapljice. Prav tako velja ohranitev gibalne količine. Slike kažejo, da so vse kapljice približno enake velikosti in potujejo s skupno hitrostjo. Za vse kapljice razen prve, ki ima večji polmer, zelo dobro velja zveza (1). Na  $P - T$  diagramu ležijo zelo blizu premice, ki predstavlja ohranitev energije (En. 17). Malenkostno razliko lahko pripišemo energiji oscilacij kapljic, tako da je ujemanje v resnici še boljše. Kinetična energija je v vseh primerih zelo blizu napovedi  $T = 0.2$ , ki jo da račun s potujočimi valovi (En. 15). Rezultati ostanejo enaki, če variramo mrežno razdaljo in časovni korak, s čimer izključimo učinek diskretizacije. Kinetični energiji  $T = 0.2$  pripada hitrost  $v = \sqrt{2T} = 0.632$ , napovedan polmer kapljic pa je  $r = 2.5$ . Poglejmo primerjavo teoretičnih napovedi iz potujočih valov s povprečnimi vrednostmi iz simulacije.

	izmerek	teorija
$v$	$0.62 \pm 0.01$	0.632
$h$	$2.65 \pm 0.01$	2.5

(32)

Delež prvotne energije, ki pripada kinetični in površinski energiji, dobimo z vstavljanjem v enačbo (1).

$$\frac{2}{r} + \frac{v^2}{2} = 0.947$$

Okrog pet odstotkov energije se pri odcepljanju kapljic izgubi, večina na račun njihovih oscilacij.

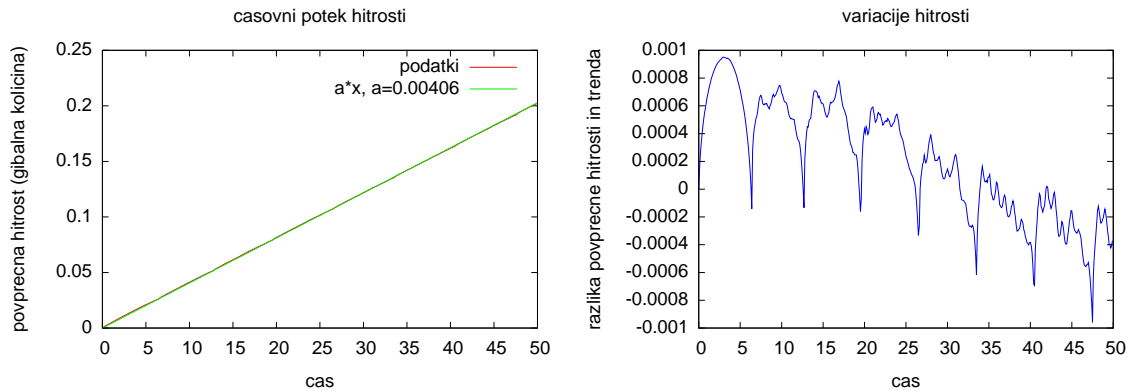
Opazimo tudi, da gibalna količina narašča linearno s časom (Sl. 12). Izmerjeno rast

$$\langle v \rangle = a \cdot t; \quad a = 0.00406$$

lahko uporabimo za oceno sile. Iz Newtonovega zakona dobimo

$$F = V \frac{d\langle v \rangle}{dt} = V \cdot a = 490 \cdot 0.00406 = 1.989.$$

Grobo lahko ocenimo, da vse delo opravlja polkrožna kapica na robu opne. Ta kapica deluje na celotno opno s silo, ki je posledica delovanja tlaka  $p$  na presek  $2r$ . Tlak v okrogli kapljici je  $p = \frac{1}{r}$ , kar da  $F = 2rp = 2$ . Numerični rezultat se ujema s teoretičnim na en odstotek natančno.



Slika 12: Povprečna hitrost v odvisnosti od časa. Linearni potek dokazuje, da je proces periodičen. Presenetljivo pa ni vidnih nobenih večjih odstopanj pri odcepih kapljic, od koder lahko zaključimo, da rob tekočine opravlja delo s približno konstantno močjo, ne glede na fazo odcepa. Majhna odstopanja od linearnega poteka prikazuje desni graf. Ostre spremembe ustrezajo časom odcepv kapljic, od koder sem odčital periodo odcepljanja.

$t$	$\Delta t$
6.35	6.30
12.65	6.83
19.48	7.02
26.50	7.01
33.51	7.01
40.52	—

Tabela 1: Izmerjeni časi, ob katerih pride do odcepa kapljice. Razmiki med odcepi se ustalijo, ko zamre učinek začetnega pogoja. Perioda je torej 7.01 časovnih enot.

Invarianta procesa je tudi frekvenca odcepljanja kapljic. Zanj nimamo dobre teoretične napovedi in je torej izhodni podatek modela. Iz variacij v povprečni hitrosti sem odčital čase odcepv, povprečna perioda odcepljanja je  $\Delta t = 7.01$ .

Zavedati se moramo, da se zaradi odcepljanja položaj roba tekočine giblje precej hitreje kot tekočina sama. Poleg tega, da se rob giblje s hitrostjo kapljic, se tudi ob odcepu vsake kapljice premakne za toliko, kolikor tekočine se je porabilo za tvorbo nove kapljice.

$$v' = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\pi r^2 / 2}{\Delta t} = 1.40$$

Hitrost fronte razpadanja je torej okrog  $v_{\text{tot}} = v + v' = 2.03$ , kar je precej več kot hitrost same tekočine. Opna z majhno viskoznostjo razpade hitreje kot napoveduje Culick, kar lahko pripišemo povsem drugačnemu mehanizmu razpada. Učinek viskoznosti s primerjavo eksperimentalnih vrednosti bom opisal pozneje.

## 6 Odpravljanje singularnosti na robovih

V spremeljivki  $h$  ima površina tekočine na robu korensko singularnost. Računska shema zahteva, da poznamo tlak na robu, tega pa je na diskretni mreži nemogoče določiti. V prejšnjih poglavjih sem opisal metodo, pri kateri sem nadomestil robne vrednosti z analitično rešitvijo. To metodo bom od zdaj imenoval *singularna metoda*. Ker iščem algoritem, ki ga bo mogoče razširiti v dve dimenziji, potrebujemo prijeme, ki se dajo posplošiti. Analitična rešitev za rob je bila v eni dimenziji parabola. V dveh dimenzijah pa bi morali obravnavati celoten rob hkrati, pri čemer njegove točne lokacije ne bi poznali. Zato sem poiskal transformacijo, ki odpravi potrebo po implicitnem reševanju robnega problema.

Definicijsko območje vsebuje področja, kjer ni ničesar in področja, kjer se nahaja opna. Debelina opne na meji se obnaša korensko, kar smo s pridom izkoristili pri singularni metodi. Singularnosti se lahko izognemo, če si mislimo debelino opne kot koren neke druge spremeljivke. Na območjih, kjer opne ni, lahko sedaj predpostavimo negativne vrednosti te spremeljivke. Definirajmo:

$$z = \frac{1}{2}h^2 \quad (33)$$

Odvoda debeline se prepišeta v sledeča izraza:

$$\begin{aligned} h' &= \frac{z'}{h} \\ h'' &= \frac{z''}{h} - \frac{(z')^2}{h^3} \end{aligned}$$

Ker v enačbi gibanja ne nastopa  $h$ , transformacija nanjo ne vpliva. Spremenita se le kontinuitetna enačba in izračun tlaka. V kontinuitetno enačbo vstavimo transformirane odvode in odpravimo ulomke. Spremeni se le številski faktor pred enim izmed odvodov.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + (\nabla h)\mathbf{v} + h\nabla\mathbf{v} &= 0 \\ \frac{1}{h}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{h}(\nabla z)\mathbf{v} + h\nabla\mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + (\nabla z)\mathbf{v} + 2z\nabla\mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

Ker obravnavamo enodimenzionalen problem, so operatorji  $\nabla$  le parcialni odvodi po koordinati  $x$ . Obstoječi numerični shemi, ki smo jo uporabili za implicitno metodo, moramo le dodati en člen:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial vz}{\partial x} + \underbrace{z \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{dodatek}} = 0. \quad (34)$$

Izračun krivine v eni dimenziji se spremeni v

$$\kappa = \frac{2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\sqrt{2z + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}. \quad (35)$$

Ta izraz ima pomen tudi za negativne  $z$ , dokler argument pod korenem ostaja pozitiven. Dosegli smo torej, da je tlak definiran tudi onkraj roba tekočine in je, če smo funkcijo razširili

analitično, na robu zvezen. Rob je regularna točka z dobro definiranimi odvodi. Tlak pa vseeno ni dobro definiran globoko v negativnem področju, zato razširimo obravnavo le za eno mrežno točko v negativno območje, da zagotovimo regularnost roba.

V področjih z negativnimi vrednostmi spremenljivke  $z$  enačbe gibanja nimajo nobenega pomena. Povsod, razen za točke, ki se dotikajo območja s pozitivnim  $z$  (rob), sem jih nadomestil z difuzijsko enačbo s konstantnim homogenim členom  $\psi$ , da funkcija ostane gladka in negativna.

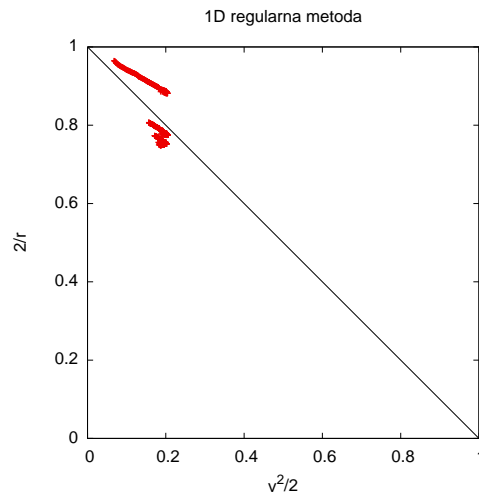
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \eta \nabla^2 z - \psi \quad (36)$$

Prvi člen gladi funkcijo, da ostane zvezna, kar je pomembno, ko se rob premakne in zunanja točka postane robna. Člen  $\psi$  poskrbi, da negativne vrednosti ostanejo negativne.

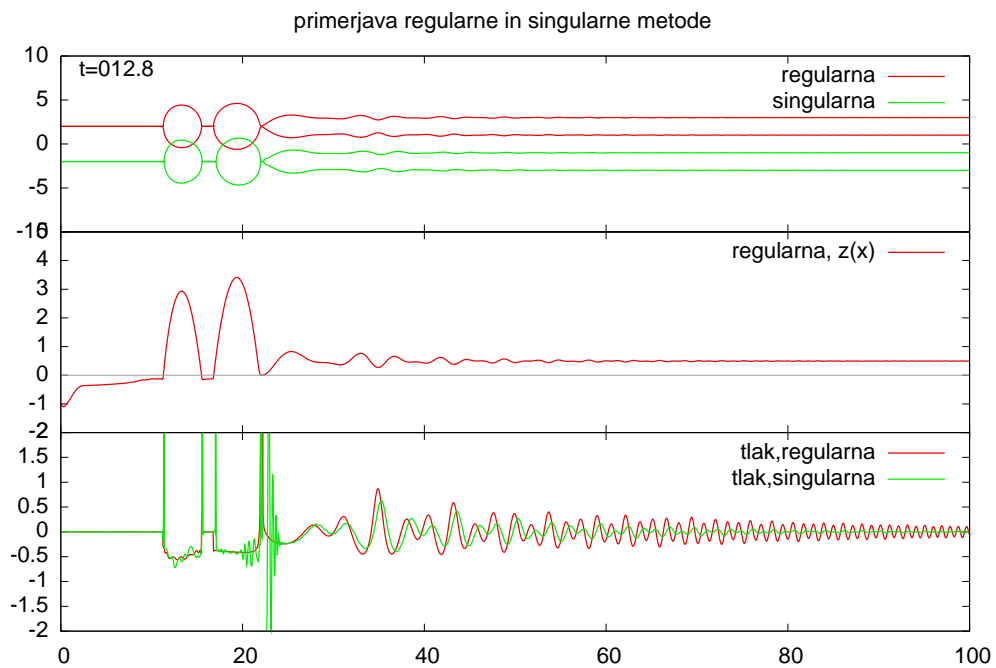
Za negativne točke, ki se dotikajo pozitivnega območja, sem uporabil enake formule kot za pozitivne točke, le da sem za izračun odvodov uporabil asimetrične končne difference, ki ne uporabijo sosednje točke v negativnem območju. Tako sem dosegel, da rob leži med dvema regularnima točkama funkcije. Tlak in hitrost moramo ekstrapolirati iz sosednjih točk. Za take točke sem račun s poskušanjem uglasil tako, da dovoljuje odcepljanje kapljic in ohranja obnašanje v pozitivnih območjih. Posebno pozornost sem moral posvetiti osamljenim pozitivnim in negativnim točkam. Izolirana pozitivna točka predstavlja kapljico, manjšo od medmrežne razdalje in jo obravnavam kot negativno, ker simulacija takih primerov ne more smiselno razrešiti. Izolirana negativna točka pa pomeni, da se dva dela tekočine skorajda dotikata, kar se zgodi tik po odcepu kapljice. V tem primeru uporabim samo člen  $\psi$  v enačbi (36), da se kapljici razmakneta, preden se spet zlepi zaradi končne mrežne razdalje.

## 7 Rezultati regularizirane metode

Pri parametrih dušenja  $\eta = 0.00525$  in  $\psi = 5\eta$  daje regularizirana metoda enake rezultate kot singularna. Za umeritev sem spet uporabil  $P-T$  diagrame. S primerjavo slik vidimo, da sta obliki profila kvalitativno enaki, časovno ujemanje je dobro, težava je le z ohranjanjem volumna in hitrosti pri odcepljenih kapljicah. Pri singularni metodi smo obliko roba izbrali tako, da se je volumen ohranjal. Pri regularni metodi ni nobenega mehanizma, ki bi strogo preprečeval prehajanje volumna v negativni del. Ohranitveni zakon na robu se uveljavlja le posredno. Enačbe gibanja pri  $z = 0$  zagotavljajo, da ni čez rob nobenega pretoka, vendar meja na diskretni mreži ni več eksaktno določena, zato rob "pušča". Iz primerjave obeh metod vidimo, da to na pravilnost rešitve ne vpliva, ker se rob giblje dovolj hitro. Posledice se vidijo le na odcepljenih kapljicah. Dobra stran metode je tudi, da je tlak na robu bolj gladek z manjšimi oscilacijami.



Slika 13: Regularizirana metoda nima strogega robnega pogoja, zato odcepljenim kapljicam padata radij in hitrost in sčasoma izginejo.



Slika 14: Primerjava med singularno (korenski zaključki) in regularno metodo. Profil je skoraj popolnoma enak, do časovnega zamika ne pride. Tlak je pri regularni metodi bolj gladek. Na srednjem grafu vidimo pomožno funkcijo  $z(x)$ , ki nadomesti debelino plasti. Obnašanje v negativnem delu je poljubno, da le ostane negativno.

## 8 Vloga viskoznosti

Eksperimentalne študije [2, 6, 10, 11] navajajo rezultate, ki se razmeroma dobro ujemajo z Culickovo napovedjo za kinetično energijo  $T = 0.5$ . Fotografski posnetki kažejo, da vsa tekočina iz razpadlega dela opne zares ostaja v robu, ki zato pridobiva na velikosti. Tako debelina roba kot kapljice, ki nastajajo, so okrog stokrat večje od debeline nedotaknjene opne. Gibanje v osnovi ni periodično. Rob doseže stacionarno debelino le zaradi nestabilnosti, zaradi katere iz njega izhajajo curki tekočine, ki naprej razpadejo v kapljice.

Rezultati simulacije neviskozne tekočine so povsem drugačni. Kapljice izhajajo neposredno iz fronte razpadanja in so zelo drobne, velikostnega reda debeline opne. Hitrost kapljic je manjša kot v Culickovi teoriji, odcepljanje je periodično.

Iz povedanega lahko sklepamo, da je viskoznost glavni krivec, da se rob ne odcepi od opne. Za robom nastaja grlo, vendar se to ne more dovolj zožiti, ker viskoznost upočasnjuje odtekanje tekočine iz ožine. Značilna "lepljivost" viskoznih tekočin zagotovi silo, ki vleče za seboj celoten rob. Neviskozna tekočina te lastnosti nima in rob pusti za seboj.

Brezdimenzijski parameter, ki meri razmerje med viskozni in površinskimi silami, je *Ohnesorgejevo število*. Viskoznost tekočine označimo z  $\mu$ .

$$Z^2 = \frac{\mu^2}{\rho \sigma h_0} \quad (37)$$

Neviskozno limito lahko dosežemo z manjšo viskoznostjo ali pa z debelejšo opno in višjo površinsko napetostjo.

Pandit in Davidson [5] sta naredila serijo meritev z različnimi raztopinami, s čimer sta variirala viskoznost in površinsko napetost. Vse njune meritve se ujemajo s Culickovo napovedjo. Točne hitrosti niso navedene, zato bom predpostavil kar  $T = 0.5$ . Iz navedenih viskoznosti in površinskih napetosti sem izračunal Ohnesorgejeva števila in ugotovil, da so vsa globoko v viskoznem režimu.

$P$	3.6%	5.8%	3.8%	7.8%	2.3%
$Z$	1.6	6.1	11.2	28.0	238

Tabela 2: Meritve Pandita in Davidsona, [5]. Vrednosti Ohnesorgejevega števila  $Z$  sem izračunal iz podatkov za viskoznost in površinsko napetost.

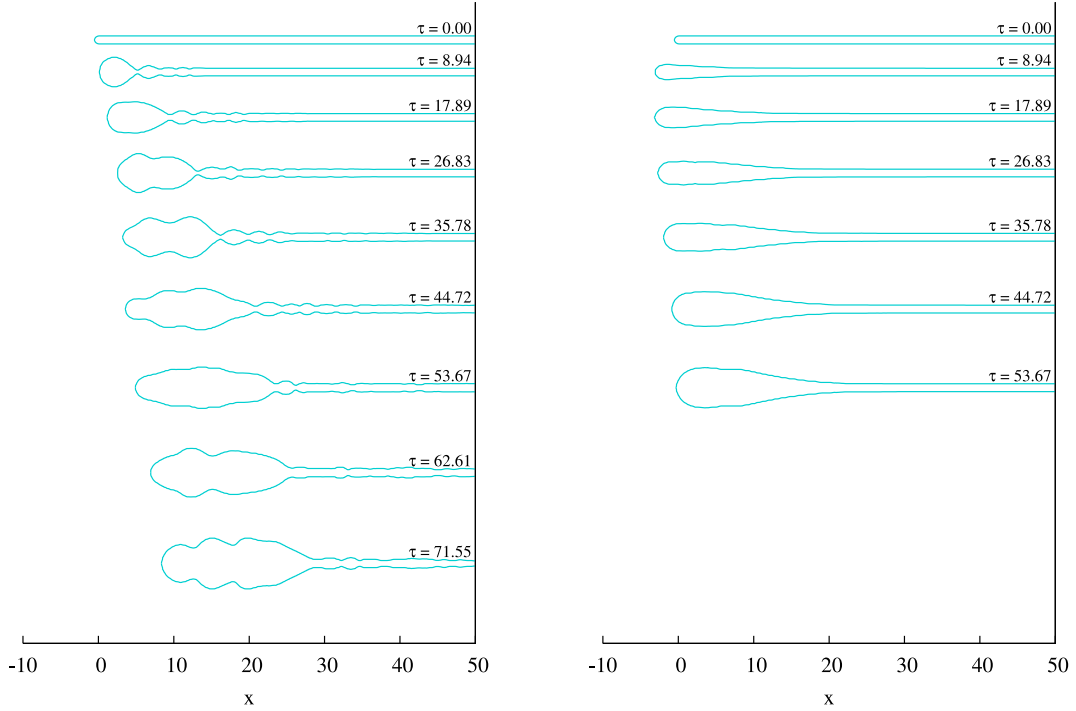
Deleži površinske energije, ki ostanejo v kapljicah, so zelo nizki ( $P \ll 1$ ), kar je posledica velikih kapljic. To se zgodi zato, ker je tudi rob, iz katerega te kapljice nastajajo, več velikostnih redov debelejši od opne. Moja simulacija predvideva majhne kapljice, kar pa ni nujno končno stanje. Po procesu odcepljanja se vse kapljice gibljejo s približno enako hitrostjo. Fluktuacije v tej hitrosti in v obliki kapljic hitro povzročijo ponovno združevanje. Nove kapljice imajo zaradi ohranitve gibalne količine enako hitrost kot pred zlepljanjem, ce zane-marimo majhen učinek zračnega upora. Takoj po združitvi so kapljice v vzbujenem stanju, ker zlepek ni okrogle oblike. Energija tega nihanja se po daljšem času pretvori v toploto in dobimo okrogle kapljice z večkratnimi radiji. Na ta način lahko tudi neviskozna opna razpada v velike kapljice, ki pa so počasnejše kot pri viskoznih tekočinah.

Zavaleta v poročilu [12] navaja podrobno študijo odvisnosti dogajanja na robu v odvisnosti od Ohnesorgejevega števila. Avtor podaja teoretične asimptotične rešitve za neposredno bližino roba in za majhne motnje daleč od roba. Poročilo vsebuje tudi rezultate natančne

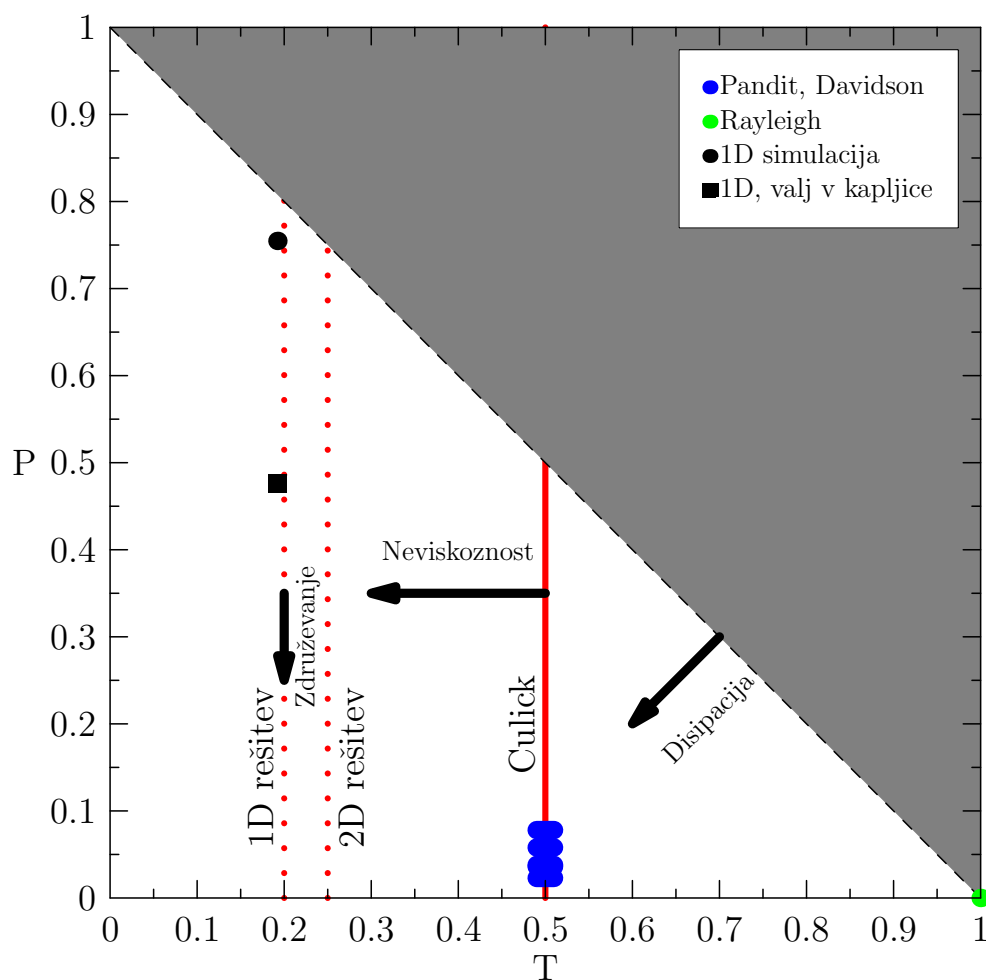


simulacije, ki obravnava prerez dvodimenzionalno, z metodo prostorskih elementov (volume of fluid). Za velike  $Z$  se rob le debeli, kot to napoveduje Culick. Pri vrednostih  $Z \approx 0.5$  se začne formirati grlo, ki je za vedno manjše vrednosti  $Z$  vedno ožje. Podobne rezultate navajajo tudi avtorji prispevka [13]. Zavaleta zaključí, da za končne vrednosti  $Z$  širina grla limitira k končni debelini in do odcepitev tekočine ne pride. Za limitno vrednost  $Z = 0$  pa pušča odprto vprašanje, ker numerična metoda ni prilagojena na ta primer.

Manjši kot je  $Z$ , manjša je širina grla, pri katerem viskoznost začne igrati pomembno vlogo. Če obrnemo zvezo (37), dobimo odvisnost  $h \propto Z^2$ , kar dopušča možnost, da se pri  $Z = 0$  grlo prekine in pride do odcepa.



Slika 15: Rezultati numeričnih simulacij z viskoznostjo, [12]. Levi sliki pripada  $Z = 0.0045$ , desni pa  $Z = 0.045$ . Desna slika kaže debeljenje roba, ki ga potrjujejo eksperimenti. Leva slika pa jasno nakazuje, da se ob času  $t = 8.94$  formira grlo. Čas je primerljiv s časom odcepa prve kapljice v mojem primeru ( $t = 6.35$ ).



Slika 16: Grafični povzetek rešitev. Zaznamoval sem rezultat, pridobljen z numerično simulacijo in vertikalne oznake pri napovedanih hitrostih iz računa s potujočimi valovi. Ujemanje z napovedjo v eni dimenziji je zelo dobro. Označil sem tudi točke za hipotetično stanje, ko najprej nastanejo valji tekočine po enodimenzionalnem modelu in nato razpadejo po Rayleighu. Za primerjavo sem dodal eksperimentalne podatke, ki sodijo v viskozni režim.

## 9 Sklep

Ko raziskujemo razpad tekočinskih open, ugotovimo, da je bistveno dogajanje omejeno na fronto razpada. Moj cilj je bil raziskati podrobnosti dogajanja ob živem robu razpadajoče opne, s poudarkom na neviskoznih tekočinah. S teoretičnim računom sem ocenil nekatere parametre pojava. Enačb, ki ga opišejo, ni mogoče do konca rešiti analitično. Za potrditev analitičnih dognanj sem potreboval učinkovito numerično metodo, ki zmore obvladati gibanje tekočine na nesovisnem območju. Računski postopek sem zasnoval za eno dimenzijo, na raztreseni mreži. Robni problem sem sprva reševal z uporabo analitičnega nastavka in dobil učinkovit algoritem, ki uspešno simulira tudi spremljajoče drobne procese, kot so vibracije kapljic, kapilarni valovi in ponovno združevanje delov tekočine.

Enodimenzionalna simulacija opisuje le ideliziran primer gibanja. V dveh dimenzijah ne vemo, ali nestabilnosti v prečni smeri le deformirajo fronto razpada ali je proces bistveno drugačen od enodimenzionalnega. To je v veliki meri odvisno od tega, kolikšen je karakteristični čas prečnih nestabilnosti v primerjavi s periodo odcepljanja. Razširitev singularne metode na dve dimenziji ni mogoča, ker v dveh dimenzijah rob lahko teče vzdolž poljubne krivulje. Težave je mogoče obiti s pomočjo regularizacije roba. V novem algoritmu roba ni več potrebno reševati posebej, kar pušča odprto možnost za posplošitev na ploskovni problem. Dvodimenzionalni prostor pa je geometrijsko bogatejši, zato posplošitev metode zahteva obravnavo veliko različnih konfiguracij, ki jih rob lahko zasede na mreži.

Metodi, ki sem ju izpeljal, lahko uporabimo tudi za druge sorodne probleme. Mogoč je dodatek viskoznih členov ali uporaba za reševanje enačb v cilindrični geometriji, na primer razpad curkov preko Rayleighove nestabilnosti. Računska shema je poenostavljena in ne more dati tako natančnih rezultatov kot tiste, ki obravnavajo celoten prerez opne, vendar je praktična zaradi hitrosti. S preходом na eno dimenzijo smo pridobili na časovni in prostorski zahtevnosti algoritma.

Simulacija je pokazala presenetljivo obnašanje opne. Numerični rezultat se povsem ujema s teoretično napovedjo potujočih valov (En. 15), nima pa nič skupnega z eksperimenti in teorijo za viskozne tekočine. Pokazal sem, da obstajajo bistvene razlike med gibanjem viskozne in neviskozne opne. Od tekočine se periodično odcepljajo majhne kapljice, debel rob ne nastane. Izsledki numeričnih študij za viskozne tekočine [12, 13] kažejo, da je odcepljanje kapljic lahko kvečjemu limitni primer za  $Z = 0$ . Ker gre za posebno obnašanje, ki ga dobimo samo v specifičnih okoliščinah, numerični rezultati niso zanesljivi. Vsaka metoda prinese s seboj napako zaradi poenostavitev, diskretizacije in zaokroževanja, kar je dovolj, da se stanje izmakne iz poteka, ki ga želimo raziskati. Moji rezultati kažejo, kakšno je gibanje viskozne tekočine v primeru, da je odcepljanje res možna eksaktna rešitev enačb.

Razlogi, ki onemogočajo zanesljivo numerično analizo, vplivajo tudi na stanje v realnih razmerah. Že brez zloma simetrije v prečni dimenziji je zato možno odcepljanje kapljic pri končnih  $Z$ . Tanki vratovi so občutljivi na površinske valove, gibanje okoliškega zraka in v ekstremnih primerih tudi na molekularne fluktuacije, saj so vratovi pogosto debeline nekaj sto molekul. Prav tako je gibanje odvisno od začetne oblike opne, zato rezultatov za en začetni pogoj ne moremo posploševati. V dveh dimenzijah je možnosti še več, saj pretakanje v prečni smeri podre krhko ravnovesje sil v vratu.

Eksperimenti s tekočinami z zelo nizko viskoznostjo bi pokazali, na kakšen način lahko pride do prehoda v odcepljanje kapljic, vendar so lastnosti večine tekočin neprimerne za tovrstne poskuse. Poskusi z milničnimi opnami sodijo v viskozni režim. Za uspešen nastanek opne

ponavadi celo znižujemo površinsko napetost (povečujemo  $Z$ ), da dosežemo večjo stabilnost. Še najnižje  $Z$  imajo filmi, ki nastanejo pri padanju kapelj na vodno gladino, ter zelo debele opne, kar pa še vedno ni dovolj, da bi lahko preučevali limitni primer.

Zgodba vsekakor še ni zaključena, opisani rezultati pa lahko služijo kot odskočna deska za nadaljno raziskovanje.

## Literatura

- [1] Lord Rayleigh, *Scientific Papers* 3, 441 (1902)
- [2] G. Taylor, *The Dynamics of Thin Sheets of Fluid*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **253**, 313 (1959)
- [3] F. E. C. Culick, *Comments on a Ruptured Soap Film*, J. Appl. Phys. **31**, 1128 (1960)
- [4] P. G. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 2002
- [5] A. B. Pandit, J. F. Davidson, *Hydrodynamics of the Rupture of Thin Liquid Films*, J. Fluid. Mech. **212**, 11-24 (1990)
- [6] F. Müller, U. Kornek, R. Stannarius, *Experimental Study of the Bursting of Inviscid Bubbles*, Phys. Rev. E **75** (2007)
- [7] K. A. Hoffmann, *Computational Fluid Dynamics, Vol. 1*, Engineering Education System, 2000
- [8] C. A. J. Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, Springer-Verlag, 1991
- [9] J. Eggers, E. Villermaux, *Physics of Liquid Jets*, Rep. Prog. Phys. **71** (2008)
- [10] G. Rämme, *The Bubble Bursts*, Phys. Educ. **24** (1989)
- [11] É. Reyssat, D. Quéré, *Bursting of a Fluid Film in a Viscous Environment*, Europhys. Lett., **76** (2), 236-242 (2006)
- [12] L. J. Gordillo Zavaleta, *Self-Similar and Travelling Wave Solutions In Surface Tension-Driven Thin Planar Films*, Scientific Computing Advanced Training (2007)
- [13] G. Sünderhauf, H. Rasziller, F. Durst, *Edge Retraction on a Planar Liquid Sheet*, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Universität Erlangen–Nürnberg
- [14] D. J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 2000

## Dodatek

Eulerjevo in kontinuitetno enačbo (10, 11) za uporabo v singularni numerični shemi prepišemo v diskretno obliko na raztreseni mreži. V programu moramo izračunati časovne spremembe za vse točke preden te spremembe izvedemo. Približek časovnega odvoda hitrosti iz enačbe (10) je

$$v_i^* = -\frac{1}{2\delta x}v_i(v_{i+1} - v_{i-1}) - \frac{1}{\delta x}(p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}).$$

Ker računamo samo za aktivne točke, na robu pa moramo ekstrapolirati, naredimo časovni korak takole:

$$v_i = \begin{cases} 0 & h_{i+\frac{1}{2}} = h_{i-\frac{1}{2}} = 0 \\ v_{i+1} & h_{i-\frac{1}{2}} = 0 \\ v_{i-1} & h_{i+\frac{1}{2}} = 0 \\ v_i + \delta t \cdot v_i^* & \text{sicer} \end{cases}$$

Podobno naredimo za časovni prirastek debeline:

$$h_i^* = -\frac{1}{2\delta x}(v_{i+\frac{1}{2}}h_{i+1} - v_{i-\frac{1}{2}}h_{i-1} + h_i(v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}})) + \\ + \eta \frac{1}{\delta x^2}(h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1})$$

Vrednosti, ki postanejo negativne, postavimo nazaj na nič.

$$h_i = h_i + \delta t \cdot h_i^*; \quad h_i < 0 \Rightarrow h_i = 0$$

---

Za izračun tlaka (En. 28) uporabimo tri različne aproksimacije prvega odvoda:

$$\begin{aligned} D_+p_i &= \frac{1}{\delta x}(h_{i+1} - h_i) \\ D_-p_i &= \frac{1}{\delta x}(h_i - h_{i-1}) \\ D_0p_i &= \frac{1}{2}(D_+p + D_-p) \\ D^2p_i &= \frac{1}{\delta x}(D_+p - D_-p) \\ p_i &= \frac{D^2p_i}{\sqrt{(1 + (D_+p_i)^2)(1 + (D_-p_i)^2)(1 + (D_0p_i)^2)}} \end{aligned}$$

---

Pri iskanju parabole za analitičen zaključek roba, pri kateri je vsota vrednosti v diskretnih točkah enaka predpisani prostornini  $V$ , potrebujemo rešitev enačbe

$$h_{i+4} \cdot \sum_{j=1}^{\lfloor i^* \rfloor} \sqrt{2\delta x \frac{(i^* - j)}{i^*}} = V$$

za parameter  $i^*$  (Sl. 5), kar opravimo z bisekcijo. Končna vrednost  $i^*$  nastopa v formuli za tlak roba (En. 29).

Jaz, Simon Čopar, rojen 28. avgusta 1987, izjavljam, da sem avtor dela z naslovom *Numerična analiza nestabilnosti na robu tekočinske opne*, ki sem ga izdelal pod mentorstvom prof. Alojza Kodreta.

Simon Čopar, 31. avgust 2009