

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Oddelek za fiziko

Seminar – 1. letnik, II. stopnja

Hidrodinamske nestabilnosti v tankih plasteh

Avtor: Miha Čančula

Mentor: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, marec 2012

Povzetek

Kazalo

1	Uvod	2
2	Stabilnost in zlom simetrije	2
3	Hidrodinamika	3
3.1	Navier-Stokesova enačba	3
3.2	Lineariziran problem	3
4	Tekočina na klancu	3
4.1	Enačbe	4
4.2	Reševanje	5
4.3	Nestabilnost	5
5	Milni mehurčki	7
6	Kraški žlebiči	9
6.1	Razpad curka	10
7	Zaključek	10

1 Uvod

Na nestabilnosti naletimo na mnogih področjih fizike. Zaradi zapletenosti enačb in izobilja različnih pogojev so še posebej zanimive tiste, ki izhajajo iz študija gibanja tekočin, hidrodinamike.

Hidrodinamika je zelo široko področje, enačbe, ki opisujejo gibanje tekočin pa zahtevne za reševanje, zato se poslužimo določenih poenostavitev in približkov. V tem seminarju sem se posvetil le tankim plastim tekočine. Na ta način si lahko enačbe poenostavimo do takšne mere, da jim bomo znali rešiti vsaj numerično. Vseeno pa tudi v tako zmanjšanem naboru sistemov najdemo veliko zanimivih problemov. Vse obravnavane primere lahko vidimo v vsakdanjem življenju.

2 Stabilnost in zlom simetrije

O nestabilnosti govorimo, ko infinitezimalno majhna sprememba trenutnega stanja lahko povzroči večjo, merljivo razliko po nekem končnem času [1].

Takšna definicija je precej splošna, zato jo za potrebe seminarja raje definiramo ožje in bolj eksaktno. Stabilnost sistema pomeni, da vse motnje, ki so na začetku majhne, ostanejo majhne tudi ob poljubnem času. Nasprotno, sistem je nestabilen, če vsaj ena motnja po nekem času preneha biti majhna. Običajno to pomeni, da če je motnja ob začetnem času omejena z neko zgornjo mejo, obstaja neka druga zgornja meja, ki je motnja nikoli ne preseže.

Če se poleg stabilnosti motnja s časom manjša, je tok *asimptotično stabilen*. V teoriji dinamičnih sistemov asimptotično stabilni rešitvi rečemo tudi atraktor.

Stabilnost oz. nestabilnost sistema je tesno povezana z zlomom simetrije. Predstavljajmo si sistem, katerega časovno spreminjanje lahko opišemo z eno ali več diferencialnimi enačbami, ki imajo določeno simetrijo. Z nastavkom, ki upošteva to simetrijo, dobimo rešitev enačb. Stabilnost se pokaže, ko temu nastavku dodamo majhno motnjo, ki ne upošteva simetrije. Stabilni sistem se bo vrnil v simetrično stanje, medtem ko pri nestabilnem pride do zloma simetrije.

Primer nestabilnega pojava je svinčnik, postavljen na konico. Enačba, ki opisuje njegovo gibanje, je simetrična glede na rotacijo okrog osi svinčnika. Zato lahko najdemo rešitev z enako simetrijo, to je pokončna lega. Če pa svinčnih le malo izmaknemo iz simetrične lege, bo padel in končal v stanju brez rotacijske simetrije.

Po drugi strani pa je težno nihalo stabilen sistem. Če takšno nihalo zmotimo, bo motnja vseskozi ostajala približno majhna velika, zaradi trenja in zračnega upora se bo s časom celo manjšala. Po dolgem času bo sistem spet v simetričnem stanju.

3 Hidrodinamika

3.1 Navier-Stokesova enačba

Tok nestisljive tekočine z gostoto ρ in viskoznostjo μ se podreja Navier-Stokesovi enačbi in ohranitvi mase. Enačbi za hitrost $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ in tlak $p(\mathbf{r}, t)$ se glasita

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

kjer je ρ gostota tekočine, μ pa njena viskoznost.

Kot običajno pri reševanju enačb si jo najprej poenostavimo tako, da preidemo na brezdimenzijske spremenljivke in čimbolj minimiziramo število parametrov. Izberimo si meri za dolžino x_0 in hitrost v_0 . Če uvedemo še brezdimenzijsko Reynoldsovo število $R = v_0 x_0 / \mu$, lahko enačbo zapišemo za brezdimenzijski spremenljivki U in P .

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

3.2 Lineariziran problem

Stabilnost hidrodinamskega sistema lahko študiramo tako, da najprej najdemo osnovno rešitev, ki ji v hidrodinamiki rečemo *osnovni tok*. Ta rešitev je lahko podana analitično ali numerično, vsekakor pa se podreja Navier-Stokesovi enačbi.

Nato osnovnem toku dodamo motnjo, tako da dobimo *skupni tok*, zopet podan s hitrostjo $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ in tlakom $p = P + p'$. Tudi za skupni tok mora veljati N-S enačba, iz česar lahko izpeljemo enačbo za motnjo \mathbf{u}' in p' .

Ker nas zanimajo le majhne motnje, lahko v enačbi zanemarimo vse člene kjer motnja nastopa v drugem ali višjih redih. Na ta način sistem zreduciramo na linearno diferencialno enačbo

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \mathbf{u}' \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (6)$$

Če je osnovni tok stacionaren, so koeficienti v linearnem sistemu enačb konstantni, torej takšno enačbo znamo rešiti. Ločimo lahko spremenljivki \mathbf{r} in t , splošno rešitev pa zapišemo kot linearno kombinacijo sinusnih motenj

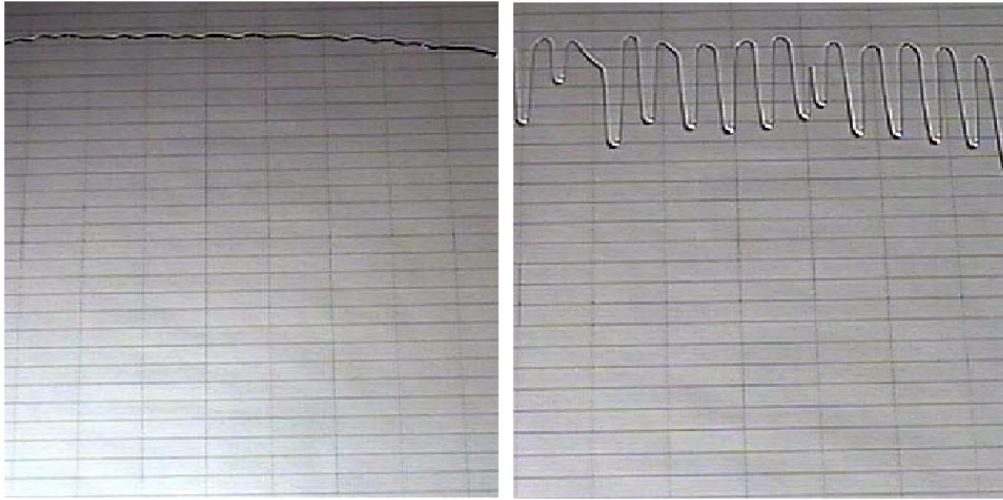
$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad (7)$$

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} p_i(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Hitro lahko vidimo, da bo tok nestabilen, če ima vsaj ena lastna vrednost s_i realni del večji od 0, v nasprotnem primeru pa bo stabilen. Problem stabilnosti sistema lahko torej prevedemo na iskanje lastnih vrednosti matrike. Sedaj tudi vidimo, da matematično natančni definiciji mere za velikost motnje in kriterija za stabilnosti nimata velikega pomena, saj motnje v obliki normalnih valovnih načinov le eksponentno naraščajo ali padajo, njihova oblika pa ostaja enaka.

4 Tekočina na klancu

Hidrodinamsko nestabilnost lahko opazujemo pri polzenju tekočine po klančini [2]. Ta pojav je vsem dobro znan, saj ga lahko vidimo na avtomobilskih steklih v dežju, enostavno pa je tudi



Slika 1: Polzenje tanke plasti tekočine po nagnjeni površini. Majhne motnje v obliki fronte (levo) hitro prerastejo v vzorec, ki ni niti približno enakomeren, je pa periodičen (desno). Vir: [2]

pripraviti poskus doma. Čeprav je samo reševanje zahteven postopek, pa lahko rezultat preverimo z eksperimentom.

Vzorec na sliki 1 lahko pojasnimo s kratkim razmislekom. Po klančini navzdol vodo poganja sila teže, zadržujeta pa jo viskoznost in površinska napetost, ki pa imata velik vpliv le na tanke plasti. Če majhna motnja ob nekem trenutku povzroči, da je na nekem mestu plast voda debelejša, imata tako viskoznost kot površinska napetost manjši vpliv na gibanje vode kot sila teže, zato bo na tistem mestu steklo več vode kot drugod, kar bo le okrepilo začetno motnjo, tako da bo na tistem mestu voda vedno lažje tekla.

Le z razmislekom pa ne znamo napovedati niti končne oblike fronte niti povprečne razdalje med mesti z večjim pretokom. Če nas to zanima, moramo tudi kaj izračunati.

4.1 Enačbe

Če privzamemo nestisljivost tekočine $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, se Navier-Stokesova enačba za tekočino na klanču poenostavi v

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + g(\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{k}) \quad (9)$$

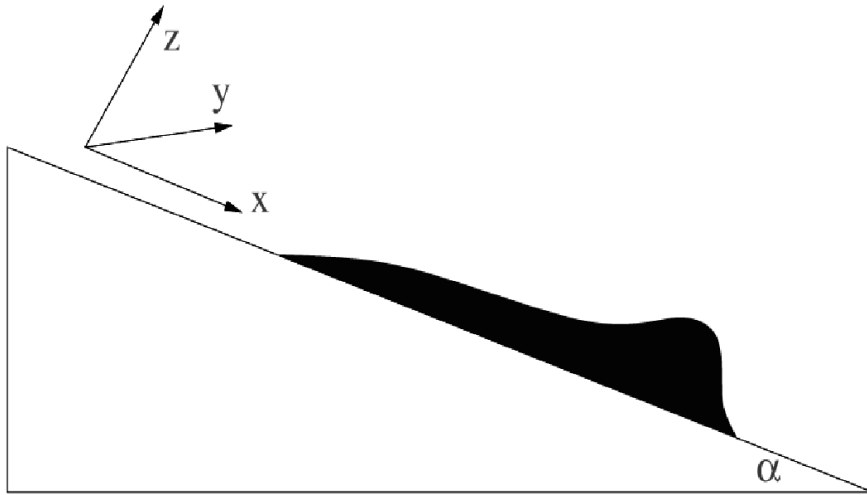
kjer je \mathbf{u} hitrost tekočine, ρ njena gostota in μ viskoznost. Člena z g sta dinamična in statična komponenta sile teže. Pomembni so tudi robni pogoji, običajno se izbere sledeče:

- Na meji med tekočino in klancem tekočina ne drsi, torej je tam $\mathbf{u} = 0$.
- Na meji med tekočino in zrakom ima tlak nezveznost, ki jo sorazmerja površinski napetosti in ukrivljenosti meje κ .

Ker obravnavamo tanke filme, lahko privzamemo, da je debelina h manjša od katerekoli dolžinske skale v ravnini. S tem privzetkom lahko enačbo (9) poenostavimo v enačbo za h .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{3\mu} \nabla \cdot [\gamma h^3 \nabla \nabla^2 h - \rho g h^3 \nabla h \cos \alpha + \rho g h^2 \sin \alpha \mathbf{i}] \quad (10)$$

Da najdemo osnovno rešitev, najprej privzamemo, da ima rešitev enako simetrijo kot sama enačba. Postavimo se v koordinatni sistem kot na sliki 2. Klanec, po katerem teče tekočina, ima translacijsko simetrijo v smeri y , zato za osnovno rešitev velja $h_y = 0$. Ža lažje reševanje preidemo



Slika 2: Skica tekočine v dveh dimenzijah. Viden je greben tik za fronto tekočine in pa zožitev daleč za fronto, ki je pri računih ne bomo upoštevali

še na brezdimenzijske količine. V enačbi ostane le še en parameter $D(\alpha)$, ki podaja razmerje med vplivom viskoznosti in površinske napetosti, brezdimenzijsko dolžino klanca v smeri x pa označimo z L . Enačba za brezdimenzijske količine, ki predpostavlja simetrijo in zato opisuje osnovno rešitev problema, se glasi

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -[h^3 h_{xxx}]_x + D(\alpha)[h^3 h_x]_x - (h^3)_x \quad (11)$$

Pred začetkom reševanja moramo določiti tudi začetne in robne pogoje. Enačba je četrtega reda v x , zato potrebujemo štiri robne pogoje. Če začnemo s podobnim profilom kot na sliki 2, le da se rep nadaljuje do zgornjega roba klančine, velja $h(0, t) = 1$ po definiciji brezdimenzijske debeline, pred fronto pa je plast mnogo tanjša, $h(L, t) = b \ll 1$. Oba enakosti ne veljata le na robu območja, ampak tudi v njegovi bližini, zato za ostala dva robna pogoja vzamemo $h_x(0, t) = h_x(L, t) = 0$. Potrebujemo še začetni pogoj, ki je kar profil tekočine ob času $t = 0$. Naravna izbira je krivulja, ki povezuje dva ravna odseka z gladkim vmesnim delom.

4.2 Reševanje

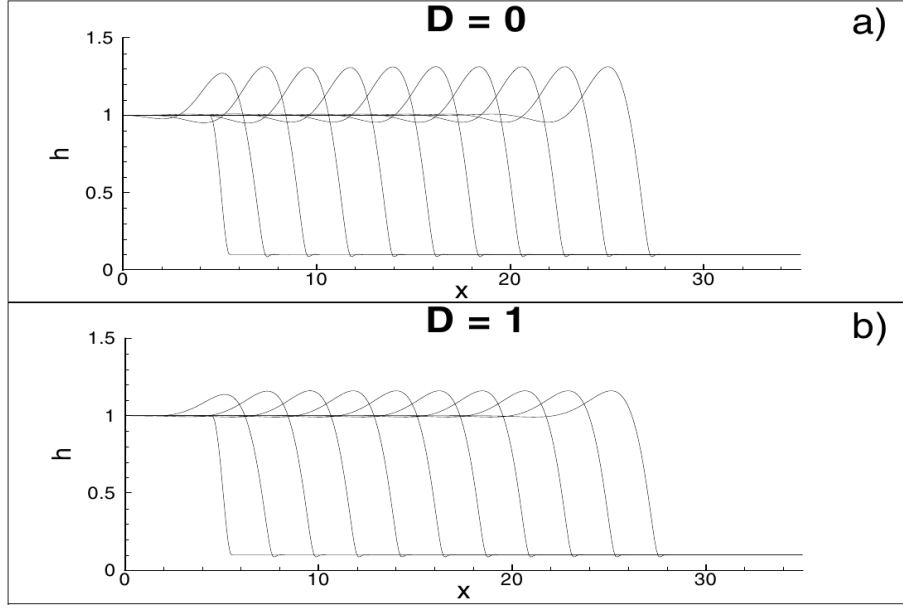
Zgornja enačba je še vedno prezahtevna, da bi jo reševali analitično, zato posežemo po numeričnih metodah. Rešitev enačbe (11) lahko dobimo z uporabo metode na osnovi končnih diferenc. Enačba je prvega reda v času in četrtega reda v koordinati x , zato je najbolj pomembna izbira diskretizacije za x . Največ pozornosti moramo posvetiti diskretizaciji najvišjega člena v enačbi, ki je v našem primeru četrtega reda.

4.3 Nestabilnost

Osnovna rešitev $h_0(x, t)$ je sicer odvisna od časa, vendar lahko predpostavimo, da rob tekočine polzi s konstantno hitrostjo U . Časovno odvisnost koeficientov h_0 bomo torej odpravili, če se postavimo v koordinatni sistem, ki se giblje s to hitrostjo. V tem primeru uvedemo spremenljivko $\xi = x - Ut$ in $\nabla = (\partial_\xi, \partial_y)$, splošno rešitev pa lahko zapišemo v obliki

$$h(\xi, y, t) = h_0(\xi) + \varepsilon h_1(\xi, y, t) \quad (12)$$

V tej sliki se h_0 ne spreminja s časom, torej smo dobili linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Ker želimo, da je motnja res majhna, predpostavimo, da sta h_0 in h_1 podobnega velikostnega reda, ε pa zelo majhen, dosti manjši od 1. Zgornji izraz vstavimo v enačbo (10) in zanemarimo vse člene z drugi in višjimi potencami ε .



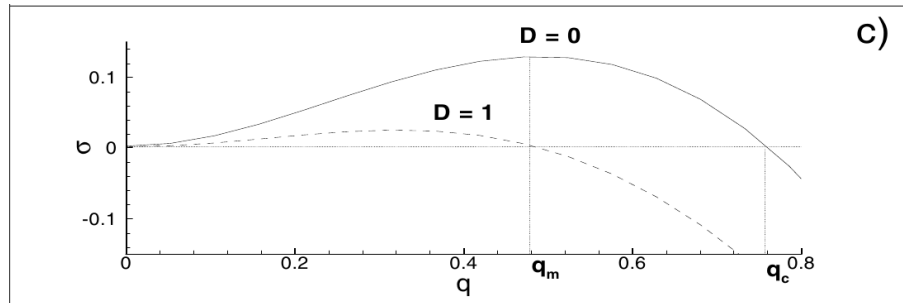
Slika 3: Profil tekočine pri različnih vrednostih parametra D . V obeh primerih se hitro oblikuje greben tik za fronto. Profili so prikazani v intervalih $\delta t = 2$, pri izbranih vrednostih $L = 40$ in $b = 0, 1$. Koordinata x je diskretizirana s korako $\Delta x = 0,05$ [2].

Motnjo h_1 izberemo takšno, da zanjo ne drži translacijska simetrija v smeri y . Na sliki 1 vidimo, da je oblika fronte približno periodična, zato $h_1(\xi, y, t)$ raje zapišemo kot linearno kombinacijo normalnih valovnih načinov. V enačbi bo tako nastopala Fourierova transformiranka po koordinati y , ki jo označimo z $g(\xi, q, t)$, za katero velja

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\mathcal{L}g \quad (13)$$

Tu je \mathcal{L} linearni diferencialni operator s konstantnimi koeficienti. Zanimajo nas lastne vrednosti tega operatorja, zlasti tista z največjim realnim delom. Lastne vrednosti so odvisne od valovnega števila q oz valovne dolžine $\lambda = 2\pi/q$; pričakujemo, da bo valovna dolžina, pri kateri je lastna vrednost $s(q)$ največja, enaka razdalji med posameznimi pasovi na sliki 1, saj bo motnja s takšno valovno dolžino najhitreje naraščala.

Ker smo osnovno rešitev h_0 izračunali numerično, tudi matrične elemente operatorja \mathcal{L} poznamo le numerično.



Slika 4: Hitrost rasti σ majhne motnje z valovnim številom $q = 2\pi/\lambda$. Način z najhitrejšo rastjo q_m ustreza pričakovani razdalji med vzorci. [2].

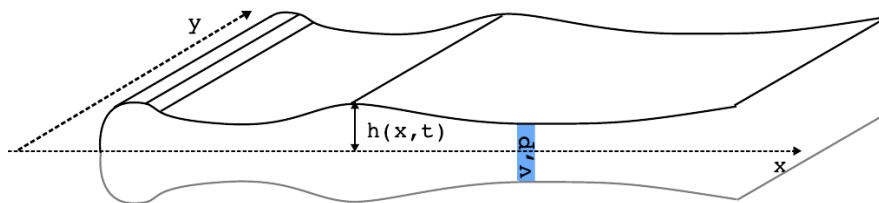
5 Milni mehurčki



Slika 5: Razpad milnega mehurčka [3].

Milni mehurčki so stabilni na majhne motnje zaradi površinske napetosti tekočine. Če pa mehurček predremo v eni točki, ustvarimo rob, kjer površinska napetost ni uravnotežena, zato se rob začne umikati. Ker je opna običajno zelo tanka, je ukrivljenost na robu velika, zato fronta napreduje zelo hitro [4]. To napredovanje je pri mehurčkih tako hitro, da s prostim očesom fronte sploh ne opazimo, ampak se nam zdi, da celoten mehurček razpade naenkrat. Pri opazovanju si lahko pomagamo s hitrimi kamerami, kot vidimo na sliki 5.

Podobno kot pri tankem filmu tudi tu obravnavamo tanko plast tekočine pod vplivom površinske napetosti. Skica roba opne z označenimi spremenljivkami in koordinatnimi osmi je na sliki 6.



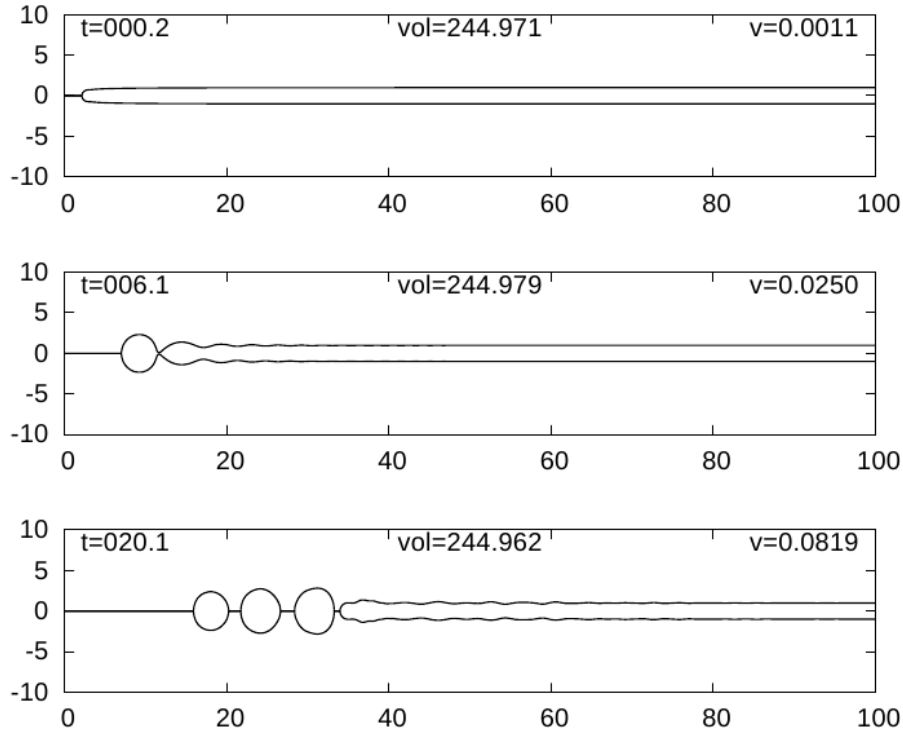
Slika 6: Profil opne s translacijsko simetrijo vzdolž roba in zrcalno simetrijo v navpični smeri. Ker je opna tanka, lahko privzamemo, da se tlak in hitrost ne spreminjata po debelini [4].

Pojava pa se močno razlikujeta v viru nestabilnosti. Pri razpadu milnega mehurčka namreče ne opazimo nestabilnosti v obliki fronte, ampak v dejstvu, da opna razpade v kapljice. Pravzaprav gre za zloma dveh simetrij, ene v smeri premikanja fronte in druge v pravokotni smeri. Reševanje problema je mnogo lažje ob predpostavki, da se translacijska simetrija vzdolž roba ohranja, torej se osredotočimo le na prvi zlom simetrije. Kljub temu pa so enačbe še vedno prezapletene za analitično reševanje, zato posežemo po numeričnih metodah.

S pomočjo simulacije lahko napovemo velikost in hitrost kapljic, ki se odcepijo od opne. Rezultat simulacije, ki jo je za diplomsko nalogo izvedel Simon Čopar, je na sliki 8.

Dobljena parametra lahko preverimo, saj se morata ohranjati tako skupna energija kot tudi celotna prostornina. Skupena prostornina opne in vseh kapljic je izračunana na sliki 8, med tekom simulacije pa se spremeni za manj kot en promil. Podoben izračun lahko naredimo tudi za skupno energijo kapljic in opne, le da moramo tu sešteti več prispevkov. Energija je lahko v obliki površinske napetosti, kinetične energije ali nihanja kapljic.

Tok neviskozne in nestisljive tekočine opisuje Eulerjeva enačba



Slika 7: Časovno spreminjanje roba opne med razpadom milnega mehurčka. Vidno je premikanje fronte in tvorba kapljic s polmerom, ki je dosti večji od debeline opne. [4]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p \quad (14)$$

Hkrati pa za opno velja tudi ohranitev prostornine, ki jo v brezdimenzijski obliki zapišemo kot

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(h\mathbf{v}) = 0 \quad (15)$$

Vemo, da opna za fronto razpade v kapljice. Njihovo število in velikost lahko določimo iz ohranitev energije in skupne prostornine. Pred razpadom je edini prispevek k energiji površinska napetost opne, po razpadu pa nastane N enako velikih kapljic z radijem r in hitrostjo v . Ohranitev energije ob razpadu odseka opne s površino S da enakost

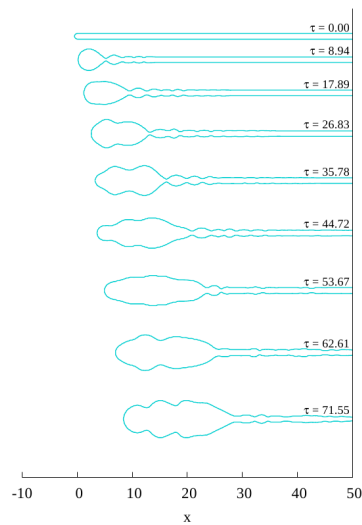
$$\sigma N 4\pi r^2 + 2Sh_0\rho \frac{v^2}{2} = 2S\sigma \quad (16)$$

kjer je prvi člen energija površinske napetosti kapljic, drugi kinetična energija kapljic, na desni pa energija opne pred razpadom. Zvezo med površino opne S in številom kapljic N dobimo iz ohranitve volumna, tako da se ohranitev energije v brezdimenzijski obliki, kjer je r v enotah h_0 , v pa v enotah $v_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho h_0}}$, glasi

$$\frac{3}{r} + \frac{v^2}{2} = 1 \quad (17)$$

Drugo zvezo med velikostjo in hitrostjo kapljic pa dobimo ob predpostavki, da fronta s časom ohranja svojo obliko, torej jo lahko zapišemo kot potujoči val. Ker se premika le v eni smeri, uporabimo valovno enačbo prvega reda

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\nabla v = 0 \quad (18)$$



Slika 8: Spreminjanje roba opne, ki je dovolj viskozna, da prepreči razpad v kapljice. [7]

Če bi bila hitrost valovanja c manjša od hitrosti tekočine na robu v , bi bilo gibanje tekočine nadzvočno in bi nastajali udarni valovi. Če pa bi bila motnja hitrejša od tekočine, bi opna razpadala že pred fronto. Edina smiselna možnost je torej, da je $c = v$.

Primerjava s posnetki razpadov resničnih milnih mehurčkov ni povsem primerna, saj ne moremo narediti mehurčka iz neviskozne tekočine.

6 Kraški žlebiči



Slika 9: Žlebiči na slovenskem Krasu pri Nabrežini [5]

S slike 9 lahko vidimo, da žlebiči tvorijo podobno periodično strukturo kot tekočina na sliki 1. Tudi po izvoru sta pojava sorodna: Na tistih mestih, kjer čez žlebič steče več vode, se tudi raztopi več apnenca, torej postane kanal še globlji in skozenj teče še več vode. Plast tekočine tu seveda ni tako tanka, da bi površina nepotest igrala veliko vlogo, je pa še vedno debelina toka h dosti

manjša od velikosti pobočja, na katerem se tvorijo žlebiči.

Proces tvorbe žlebičev je dosti bolj zapleten kot zgoraj obravnavani primeri. Namesto znane končne količine vode imamo sedaj neenakomeren dež, pa tudi pobočje ni nujno ravno in homogeno. Kakršnekoli račune še posebej oteži raztapljanje apnenca v vodi, zapleten kemijski proces ki še vedno ni natančno pojasnjen. Znanе Navier-Stokesove enačba so zato sklopljene z enačbami za raztapljanje, ki so znane le empirično. Vse kraške kamnine so zelo slabo topne v vodi, zato so takšni procesi prepočasni, da bi lahko z njimi izvajali fizikalne eksperimente, pomagamo si lahko le s številnimi primeri žlebičev najdenih v naravi.

Zaradi teh omejitev lahko nastanek in razvoj žlebičev modeliramo le s simulacijo. Pri tem moramo narediti kar nekaj poenostavitev, upoštevamo pa lahko opažanja iz narave.

Nastanek žlebičev na nekem skalnatem pobočju je neposredna posledica nestabilnosti. V simulaciji torej opazujemo, kaj se dogaja z majhno motnjo. V ta namen začnemo z žlebičem, katerega globina je majhna v primerjavi s širino in dolžino. Če se tak žlebič s časom poglobi, lahko zaključimo, da je površina pobočja nestabilna, saj se majhne motnje s časom večajo.

6.1 Razpad curka

Na nestabilnosti pogosto naletimo tudi pri študiju razpada curkov tekočin [6].

7 Zaključek

Literatura

- [1] P. G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability*, Cambridge University Press (2002)
- [2] L. Kondic, SIAM Review **45**, 95 (2003)
- [3] <http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-1199149/Super-slow-motion-pictures-soap-bubble-bursting-stunning-detail.html> (23. 1. 2012)
- [4] S. Čopar, Numerična analiza nestabilnosti na robu tekočinske opne, Diplomsko delo (2009)
- [5] <http://sl.wikipedia.org/wiki/Žlebič> (2. 2. 2012)
- [6] J. Eggers in E. Villermaux, Rep. Prog. Phys. **71**, 036601 (2008)
- [7] L. J. Gordillo Zavaleta, Self-similar and travelling wave solutions in surface tension-driven thin planar films, Scientific Computing Advanced Training (2007)