

Metoda maksimalne entropije

Miha Čančula

29. februar 2012

1 Uvod

Spekter moči vhodnega signala smo približali z izrazom, ki ima v imenovalcu polinom stopnje m spremenljivke $z = \exp(-2\pi i \frac{1}{N})$.

$$|S(f)|^2 = \frac{C}{1 - b_1 z - b_2 z^2 - \dots} \quad (1)$$

Če koeficiente izberemo tako, da vsi razen konstante nastopajo z minusom, so b_i enaki avtoregresijskim (AR) koeficientom izvirnega signala.

$$y_n = b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \dots = \sum_{i=1}^m y_{n-1} b_i \quad (2)$$

Signal torej približamo z rešitvijo diferenčne enačbe s karakterističnim polinomom

$$Q(z) = 1 - b_1 z - b_2 z^2 - \dots \quad (3)$$

Rešitev takšne enačbe je linearna kombinacija eksponentnih funkcij, ki ima m prostih konstant, v eksponentu pa nastopajo koreni polinoma $Q(x)$. Polinom ima vedno m korenov, ki jih označimo z r_i , $i = 1 \dots m$ če so vsi koeficienti realni pa ti koreni nastopajo v konjugiranih parih.

$$y_n = \sum_{i=1}^m c_i e^{r_i n} \quad (4)$$

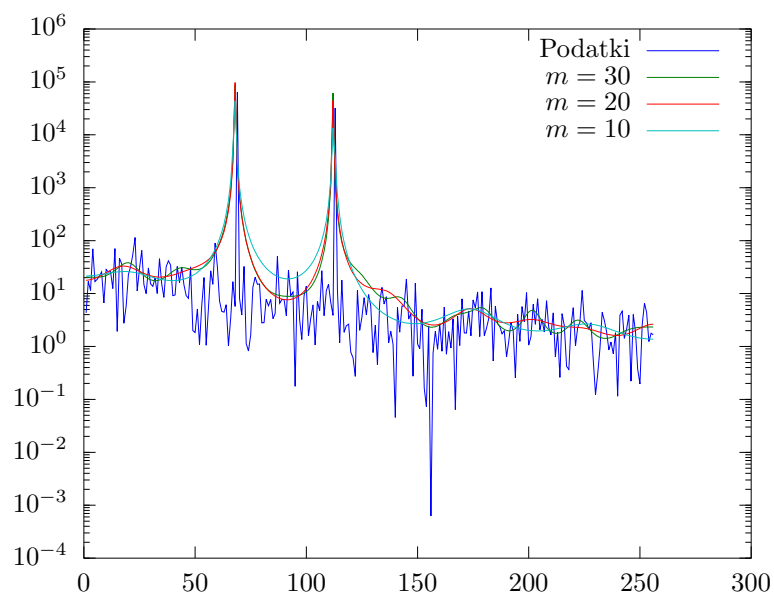
Konstante c_i lahko izračunamo, če poznamo vrednost signala y v vsaj m točkah. V našem primeru imamo točk vedno več kot m , zato je napoved za y dobro določena. Pri svojem računu nisem uporabil formule (4), saj je nabor podatkov dovolj majhen, da sem vrednosti izračunal direktno z rekurzijo.

Avtoregresija ima širšo uporabo v obdelavi signalov, zato obstaja kar nekaj orodij, ki znajo izračunati te koeficiente. Uporabil sem paket za analizo časovnih zaporedji (Time-Series analysis - TSA) programa Octave. Koeficiente b_i izračuna z uporabo avtokovariance in Durbin-Levinsove rekurzije.

2 Frekvenčni spekter

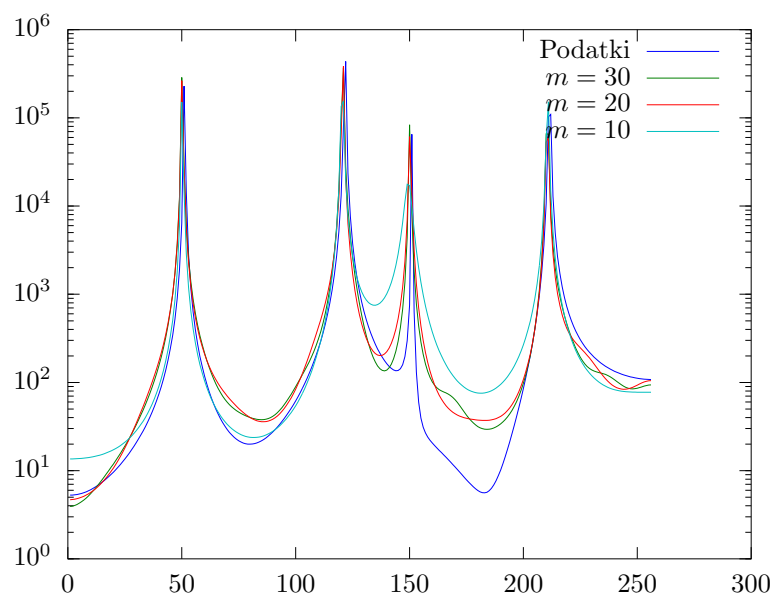
Najprej sem za vse našete datoteke s podatki približal spekter signalov. V vseh primerih sem uporabil največ $m = 25$ koeficientov.

Konstanta C , ki nastopa v števcu ulomka v enačbi (1), nima nekega fizikalnega pomena. Za prikaz na grafih sem jo določil tako, da se originalni in približen spekter čim boljše ujemata.



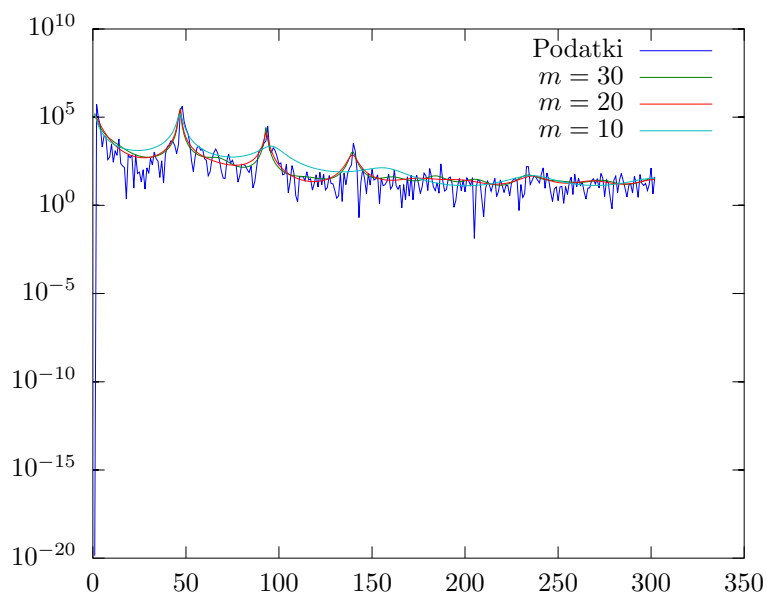
Slika 1: Spekter signala val2.dat

Na sliki 1 se vidi, da je približek spektra s polinomom v nekem smislu filtriranje signala. Šum spektra je močno zmanjšan, medtem ko sta oba glavna vrhova v veliki meri ohranjena.



Slika 2: Spekter signala val3.dat

Signal na sliki 2 izgleda, kot da bi v zajemanem intervalu nastopalo necelo število period. Vrhovi so široki, vmesna področja zaobljena, enakomernega šuma tudi ne opazimo. V tem primeru s polinomskim približkom zelo dobro opišemo obliko spektra. Čeprav ujemanje ni točno, samo s pogledom zelo težko ločimo pravi signal od približanega.



Slika 3: Spekter signala `co2.dat`

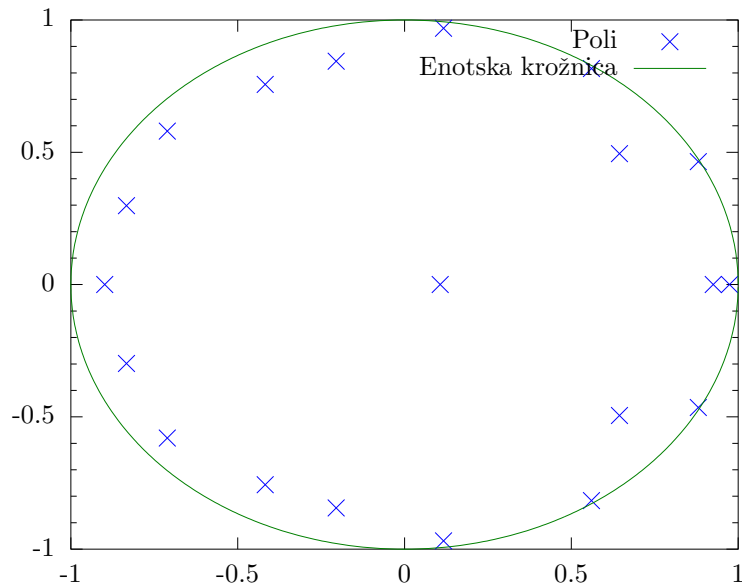
2.1 Položaj polov

Preveril sem tudi, ali so res vsi poli preslikave znotraj enotske krožnice. Preizkus sem naredil za vse datoteke s podatki, izkazalo se je, da je to res za vse obravnavane podatke. Metoda `durlev`, ki izračuna koeficiente polinoma ni najbolj dokumentirana, tako da je možno, da že sama poskrbi za pole.

Položaj polov preslikave za datoteto `co2.dat` z 20 poli je prikazan na sliki 4. Takoj lahko opazimo dvoje:

1. Večina polov je v bližini enotske krožnice.
2. Kompleksni poli nastopajo v konjugiranih parih

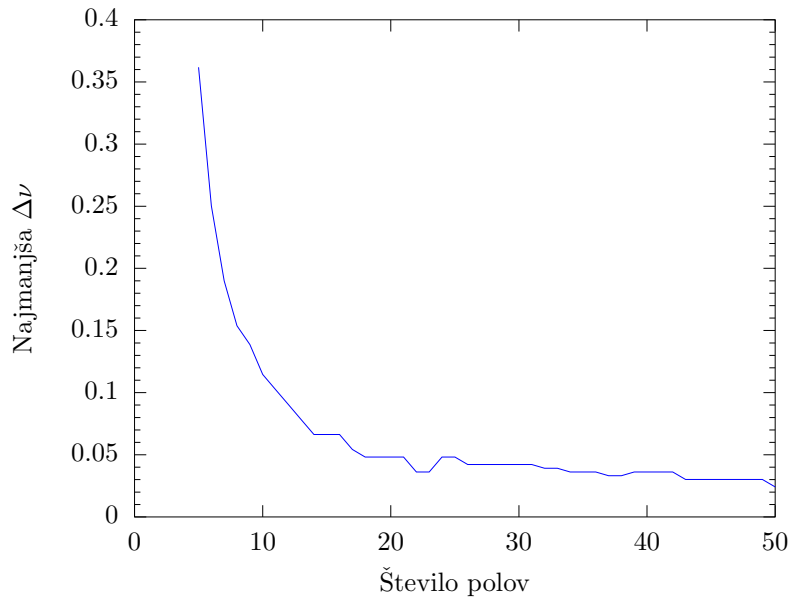
Drugi lastnost je pričakovana, saj je le v tem primeru izraz v enačbi (4) realen. Prva lastnost pa le pomeni, da izbrano število polov ni preveliko. Poli, ki so bolj oddaljeni od krožnice, imajo na spekter manjši vpliv.



Slika 4: Poli preslikave za signal co2.dat

3 Ločljivost

Ločljivost metode sem definiral kot najmanjšo razliko frekvenc $\Delta\nu$, pri kateri ima spekter signala $y(t) = \sin(\nu t) + \sin((\nu + \Delta\nu)t)$ dva vidna vrhova. Generiral sem takšen signal z osnovno frekvenco $\nu = 0.2$ in opazoval, pri kateri vrednosti $\Delta\nu$ bo imel spekter vsaj dva vrhova. To mejno frekvenca je seveda odvisna od števila dovoljenih polov, ta odvisnost je prikazana na sliki 5.



Slika 5: Ločljivost metode pri različnem številu polov

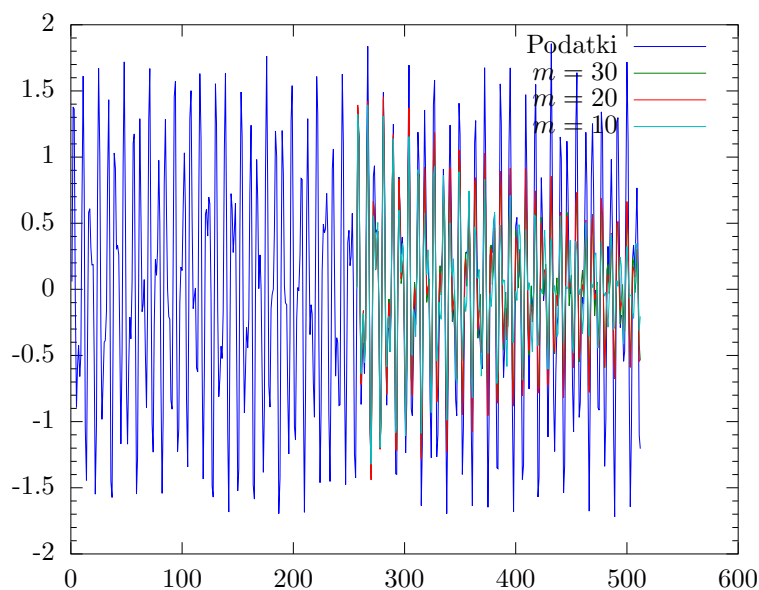
Višja ločljivost seveda pomeni manjši $\Delta\nu$, torej je po pričakovanju metoda natančnejša ob uporabi višjega števila polov oz. višje stopnje polinoma. Okrog $m = 30$, kjer sem opravljal večino izračunov, se ločljivost le malo spreminja in ostaja okrog vrednosti $\nu_1 = 0.05$. Tudi povečanje

števila polov ločljivosti ne izboljša bistveno, medtem ko jo zmanjšanje števila pod 15 znatno poslabša.

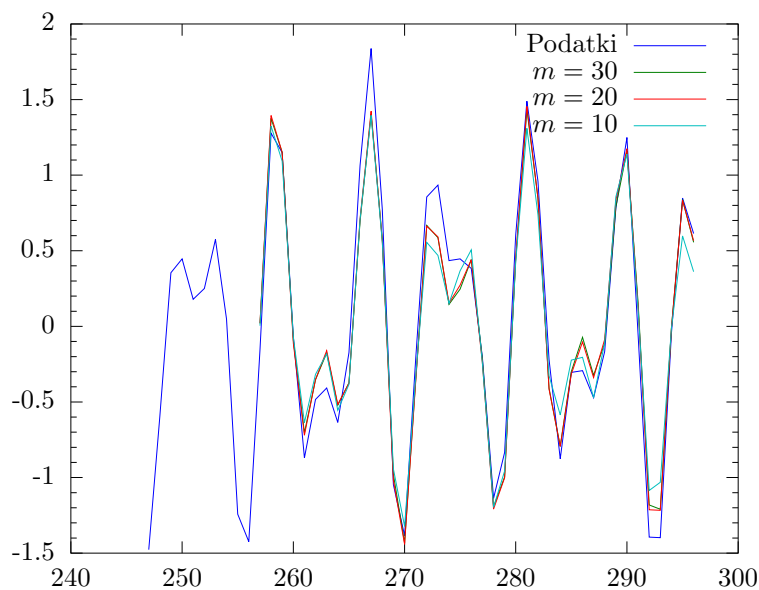
4 Napovedi

Če poznamo koeficiente avtoregresije, lahko iz dosedanjih podatkov napovemo prihodnje. Za preverjanje te napovedi sem koeficiente izračunal na podlagi polovice meritev, nato pa napovedi primerjal z drugo polovico meritev.

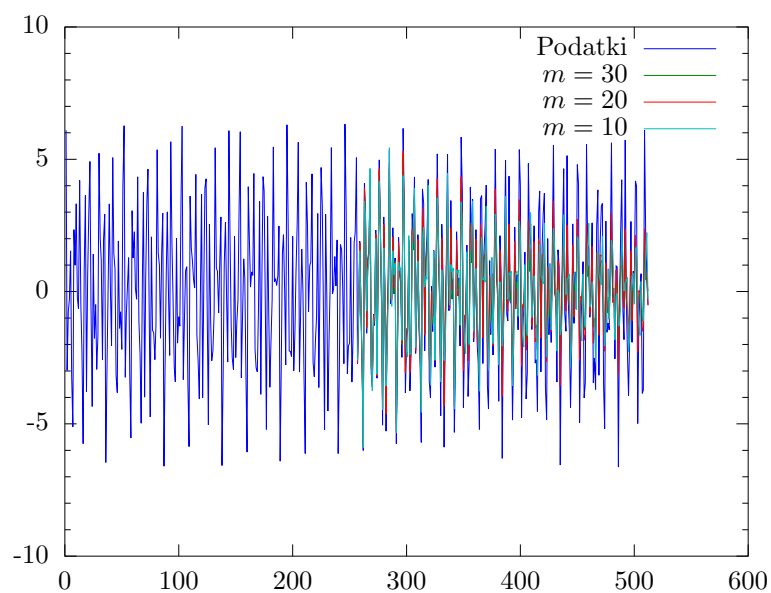
Začel sem z zadnjimi m točkami prve polovice signala, nato pa z rekurzivno formulo napovedal nadaljnje podatke.



Slika 6: Napoved signala `val2.dat` z avtoregresijo



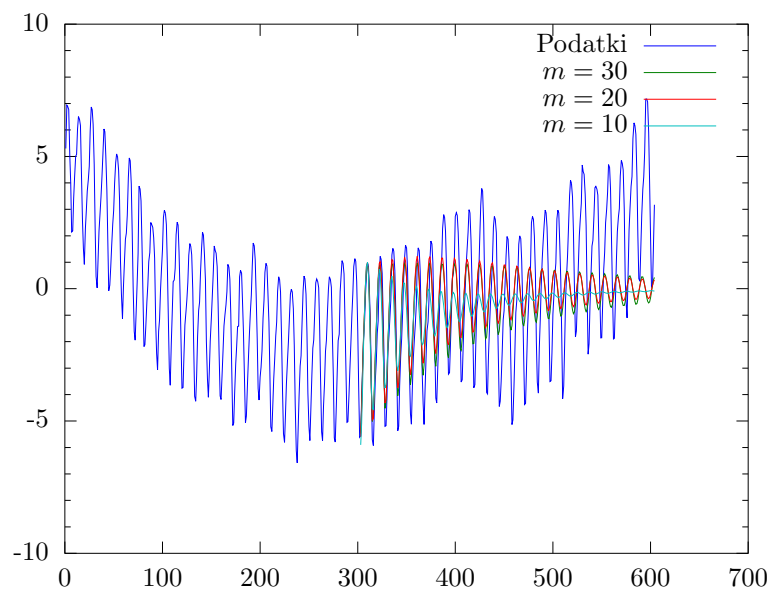
Slika 7: Napoved signala `val2.dat` z avtoregresijo – povečan pogled



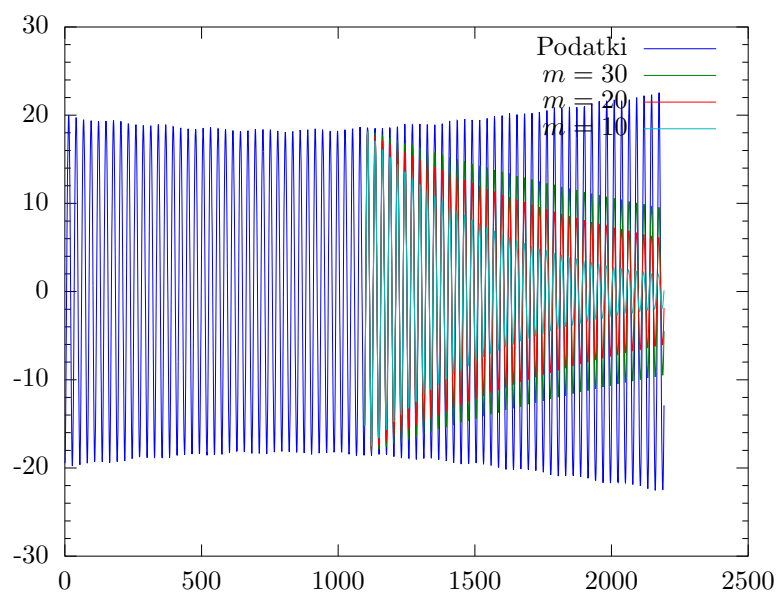
Slika 8: Napoved signala `val3.dat` z avtoregresijo

Vidimo, da napoved ni stabilna, saj se njena amplituda spreminja, kljub temu da je amplituda izvirnega signala približno konstantna. Na povečavi (slika 7) se vidi, da se že zelo kmalu pojavi odstopanje pri vrhovih, medtem ko je na vmesnem delu ujemanje dosti boljše. Pri obeh datotekah z valovi metoda napove eksponentno pojemanje signala. Eksponentno odvisnost pričakujemo po enačbi (4).

Kljub temu da amplituda izmerjenega signala znatno odstopa od napovedi, pa je ujemanje faze signala dosti boljše. Amplituda je torej bolj občutljiva na šum in numerične napake.

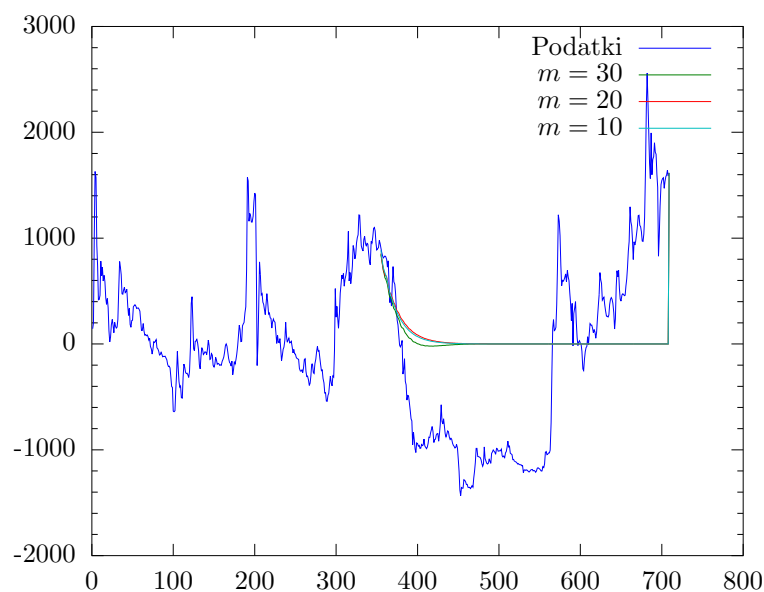


Slika 9: Napoved signala `co2.dat` z avtoregresijo



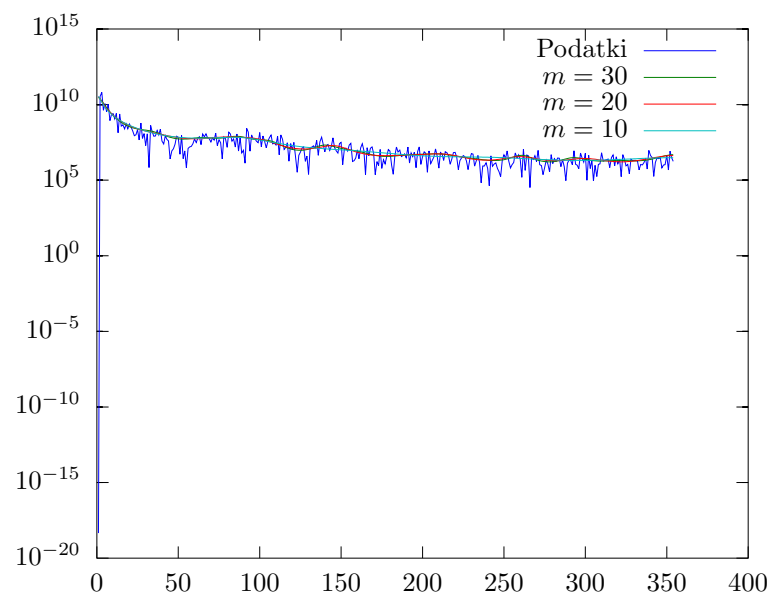
Slika 10: Napoved signala `luna.dat` z avtoregresijo

Pri napovedi podatkov o CO_2 in luninih efemeridah opazimo isti pojav, namreč da amplituda napovedanega signala pada proti 0, frekvenca in faza pa se tudi na daljši rok ujemata z izmerjenim signalom. Na obeh grafih se jasno vidi, da amplituda pada hitreje, če smo uporabili manjše število polov. Tudi s tem lahko utemeljimo, da je preslikava z večjim številom polov natančnejša.



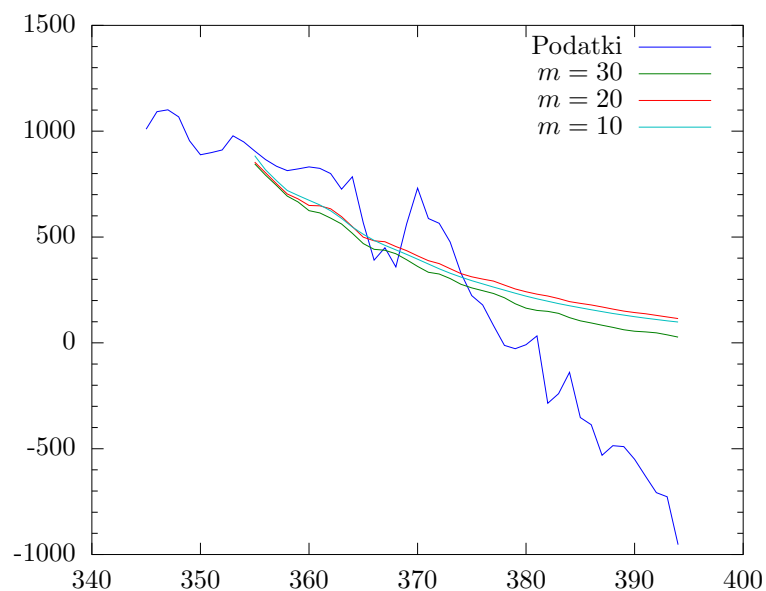
Slika 11: Napoved signala `borza.dat` z avtoregresijo

Pri podatkih z borze pa naletimo na bolj resne težave. Niti frekvenca niti amplituda napovedi se s podatki ne ujemata niti za kratke čase. To seveda lahko pojasnimo, saj je gibanje borznih indeksov naključen proces, ki ni periodičen.



Slika 12: Spekter signala `borza.dat`

Spekter nima nobenega očitnega vrha, ki bi ga lahko približali s polom preslikave blizu enotske krožnice. To pomeni, da položaj polov ni natančno določen, kar zagotovo pripomore k manjši natančnosti metode. Če si napoved ogledamo v bližini začetne točke, lahko vidimo, da signal od nje odstopa že takoj, neodvisno od izbranega števila polov. Ta metoda torej ni dobra za napovedovanje gibanja na borzi.



Slika 13: Napoved signala `borza.dat` z avtoregresijo – povečan pogled