

# Hidrodinamske nestabilnosti v tankih plasteh

Avtor: Miha Čančula  
Mentor: prof. dr. Alojz Kodre

21. marec 2012

# Vsebina

## Teorija

- ▶ Stabilnost
- ▶ Enačbe toka tekočin
- ▶ Lubrikacijski približek – enačba tankega filma

## Primeri

- ▶ Plast tekočine na klancu
- ▶ Razpad milnega mehurčka
- ▶ Nastanek kraških žlebičev

# Stabilnost

## Osnovna rešitev

- ▶ Ohranja simetrijo enačbe

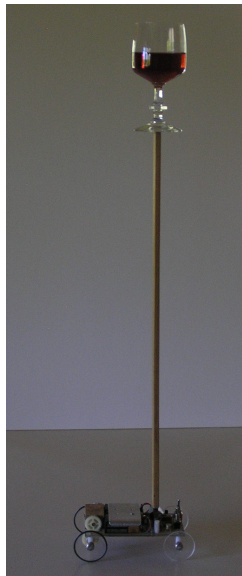
## Motnja

- ▶ Krši simetrijo
- ▶ Majhna v primerjavi z osnovno rešitvijo

## Stabilnost

- ▶ Majhna motnja po dolgem času ostane majhna

# Stabilnost



# Enačbe hidrodinamike

## Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

## Brezdimenzijska

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \mathbf{U}$$

## Nestisljivost

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

# Lubrikacijski približek

## Predpostavke

- ▶ Značilna dimenzija v smeri  $z$  mnogo manjša
- ▶ Hitrost v tej smeri majhna,  $u_z \ll u_x, u_y$
- ▶ Odvodi po  $z$  so večji kot odvodi v ravnini  $xy$

## Učinek

- ▶ Povprečenje po  $z \Rightarrow$  izgubimo profil v eni smeri
- ▶ Menjava spremenljivke  $\mathbf{u}(x, y, z, t) \rightarrow h(x, y, t)$
- ▶ 4 skalarne količine  $(\mathbf{u}, p) \rightarrow 1$  skalarna količina.

# Lineariziran problem

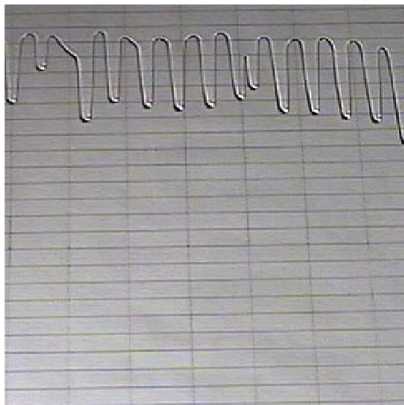
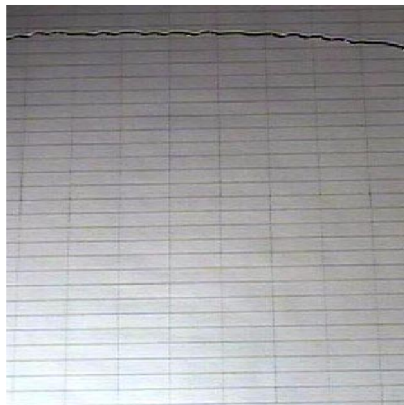
## Osnovna rešitev + motnja

- ▶  $h(x, y, t) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, y, t), \quad \varepsilon \ll 1, \quad h_1 \sim h_0$
- ▶ Rešimo  $h_0 \rightarrow$  enačba za  $h_1$
- ▶ Razvoj po  $\varepsilon$ , obdržimo le do linearnega člena

## Linearna enačba za $h_1$

- ▶ Konstanti koeficienti  $h_0 \Rightarrow$  eksponentne rešitve
- ▶ Sistem je stabilen, če je  $\Re \sigma \leq 0$  za vse lastne vrednosti  $\sigma$

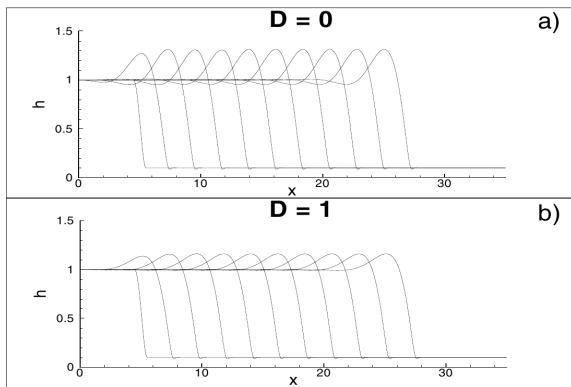
# Plast tekočine na klancu





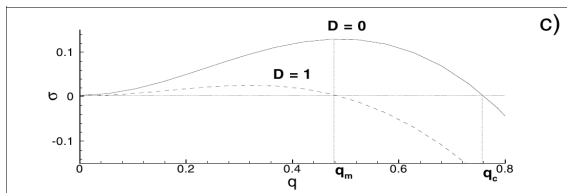
# Osnovna rešitev

- ▶ Tekočina polzi po klancu z enakomerno hitrostjo
- ▶ Substitucija  $\xi = x - Ut \Rightarrow h_0(\xi, y)$  je konstanta
- ▶ En parameter  $D$ : viskoznost  $\leftrightarrow$  površinska napetost



# Nestabilnost

- ▶  $h_1$  zapišemo kot vsoto normalnih valovnih načinov
- ▶ Lastna vrednost  $\sigma$  odvisna od valovne dolžine motnje
- ▶ Valovna dolžina z največjo  $\sigma \approx$  razmik med curki

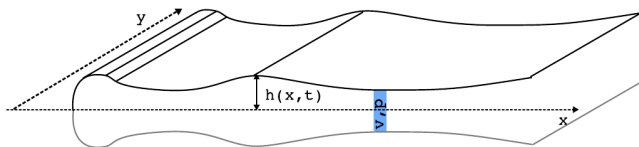


# Razpad milnega mehurčka



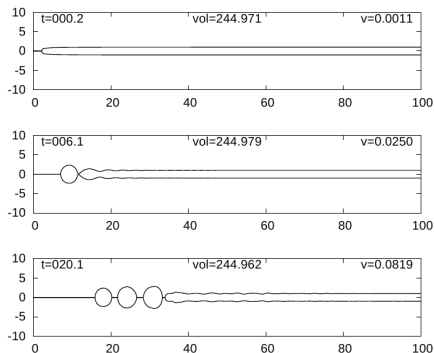
© Richard Heeks / Barcroft Media

# Tanka opna



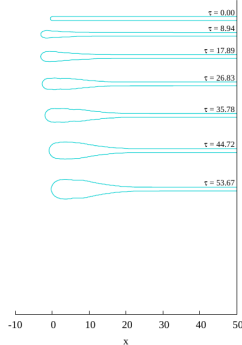
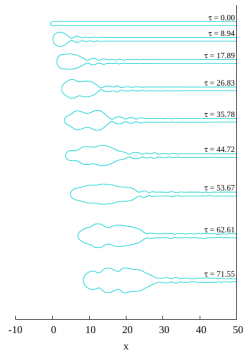
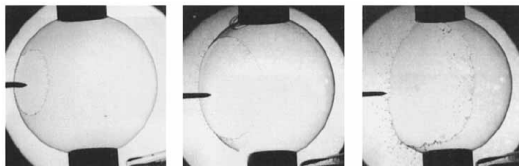
- ▶ Neuravnovešena površinska napetost
- ▶ Lubrikacijski približek
- ▶ Dve simetriji:  $y$  in  $x - ct$
- ▶ Nestabilnost = razpad na kapljice
- ▶ Ključen parameter: viskoznost

# Neviskozna opna



- ▶ Razpad simetrije v smeri  $x \Rightarrow$  razpad opne v valje
- ▶ Valji naprej razpadejo v kapljice

# Viskozna opna



- Počasnejše umikanje roba
- Opna ne razpade

# Kraški žlebiči



# Kraški žlebiči

## Nastanek

- ▶ Na kraških pobočjih pod vplivom dežja
- ▶ Počasen proces, težko izvajati eksperimente
- ▶ Enačbe za tok tekočine sklopljene s kemijskimi enačbami za topljenje apnenca

## Nestabilnost

- ▶ Neenakomernost v obliki površja
- ▶ Blagi žlebič se s časom pogloblja
- ▶ Zlom simetrije v vodoravni smeri



# Zaključek

## Hidrodinamika

- ▶ Navier-Stokesove enačbe
- ▶ Lubrikacijski približek  
 $(\mathbf{u}, p) \rightarrow h$

## Naravni pojavi

- ▶ Tekočina na klancu
- ▶ Razpad tanke opne
- ▶ Kraško površje

## Nestabilnost

- ▶ Občutljivost na majhne motnje
- ▶ Zlom simetrije
- ▶ Linearizirana enačba
- ▶ Lastne vrednosti linearnega operatorja