

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Oddelek za fiziko

Seminar – 1. letnik, II. stopnja

# Hidrodinamske nestabilnosti v tankih plasteh

Avtor: Miha Čančula

Mentor: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, marec 2012

## Povzetek

V hidrodinamiki lahko najdemo različne pojave, kjer je tok tekočine nestabilen. Nekateri izmed teh pojavov nastopajo pri gibanju tekočine v tanki plasti, kjer lahko za poenostavitev enačb uporabimo lubrikacijski približek. Primere lahko najdemo v vsakdanjem življenju, na primer tok tekočine po nagnjeni površini ali razpad opne milničnega mehurčka. Z uporabo primernih računskih modelov lahko napovemo stabilnost takšnih sistemov.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Stabilnost in zlom simetrije</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Hidrodinamika</b>	<b>3</b>
3.1	Navier-Stokesova enačba . . . . .	3
3.2	Lineariziran problem . . . . .	3
3.3	Lubrikacijski približek . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Tekočina na klancu</b>	<b>5</b>
4.1	Enačbe . . . . .	6
4.2	Nestabilnost . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Milni mehurčki</b>	<b>9</b>
5.1	Neviskozna opna . . . . .	10
5.2	Viskozna opna . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Kraški žlebiči</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Zaključek</b>	<b>14</b>

## 1 Uvod

O nestabilnosti govorimo, ko infinitezimalno majhna sprememba trenutnega stanja lahko povzroči večjo, merljivo razliko po nekem končnem času [1]. Na nestabilnosti naletimo na mnogih področjih fizike. Zaradi zapletenosti enačb in izobilja različnih pogojev so še posebej zanimive tiste, ki izhajajo iz študija gibanja tekočin, hidrodinamike.

Hidrodinamika je zelo široko področje, enačbe, ki opisujejo gibanje tekočin, pa zahtevne za reševanje, zato se poslužimo določenih poenostavitev in približkov. V tem seminarju sem se posvetil le tankim plastem tekočine. Na ta način si lahko enačbe poenostavimo do takšne mere, da jih bomo znali rešiti vsaj numerično, vseeno pa tudi v tako zmanjšanem naboru sistemov najdemo veliko zanimivih problemov. Vse obravnavane primere tudi dobro poznamo iz vsakdanjega življenja.

## 2 Stabilnost in zlom simetrije

Zgornja definicija nestabilnosti je precej splošna, zato jo za potrebe seminarja raje definiramo ožje in bolj eksaktno. Stabilnost sistema pomeni, da vse motnje, ki so na začetku majhne, ostanejo majhne tudi ob poljubnem času. Nasprotno, sistem je nestabilen, če vsaj ena motnja po nekem času preneha biti majhna. Običajno to pomeni, da za vsako motnjo, ki je ob začetnem času omejena z neko zgornjo mejo, obstaja neka druga zgornja meja, ki je motnja nikoli ne preseže.

Če se poleg stabilnosti motnja s časom manjša, je tok *asimptotično stabilen*. V teoriji dinamičnih sistemov asimptotično stabilni rešitvi rečemo tudi atraktor.

Stabilnost oz. nestabilnost sistema je tesno povezana z zlomom simetrije. Predstavljajmo si sistem, katerega časovno spreminjanje lahko opišemo z eno ali več diferencialnimi enačbami, ki imajo določeno simetrijo. Z nastavkom, ki upošteva to simetrijo, dobimo rešitev enačb. Stabilnost se pokaže, ko temu nastavku dodamo majhno motnjo, ki ne upošteva simetrije. Stabilni sistem se bo vrnil v simetrično stanje, medtem ko pri nestabilnem pride do zloma simetrije.

Primer nestabilnega pojava je svinčnik, postavljen na konico. Enačba, ki opisuje njegovo gibanje, je simetrična glede na rotacijo okrog osi svinčnika. Zato lahko najdemo rešitev z enako simetrijo, to je pokončna lega. Če pa svinčnih le malo izmaknemo iz simetrične lege, bo padel v določeno smer in končal v stanju brez rotacijske simetrije.

Po drugi strani pa je težno nihalo stabilen sistem. Če takšno nihalo zmotimo, bo motnja vseskozi ostajala približno enake velikosti, zaradi trenja in zračnega upora se bo s časom celo manjšala. Po dolgem času bo sistem spet v simetričnem stanju.

## 3 Hidrodinamika

### 3.1 Navier-Stokesova enačba

Tok nestisljive tekočine z gostoto  $\rho$  in viskoznostjo  $\mu$  se podreja Navier-Stokesovi enačbi in ohranitvi mase. Enačbi za hitrost  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  in tlak  $p(\mathbf{r}, t)$  se glasita

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

kjer je  $\rho$  gostota tekočine,  $\mu$  pa njena viskoznost.

Enačbi lahko poenostavimo s prehodom na brezdimenzijske spremenljivke in s tem zmanjšamo število parametrov. Izberimo si meri za dolžino  $x_0$  in hitrost  $v_0$ . Če uvedemo še brezdimenzijsko Reynoldsovo število  $R = v_0 x_0 / \mu$ , lahko za brezdimenzijski spremenljivki  $\mathbf{U}$  in  $P$  zapišemo

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

V sistemu enačb nastopa le en prost parameter. Poleg tega parametra je rešitev enačbe odvisna še od začetnih in robnih pogojev. Običajno poznamo začetni profil hitrosti in tlaka, saj si ju lahko izberemo ali ju izmerimo s poskusom. Robni pogoji v različnih geometrijah pa so lahko zelo zapleteni in močno otežijo računanje.

### 3.2 Lineariziran problem

Stabilnost hidrodinamskega sistema lahko študiramo tako, da najprej najdemo osnovno rešitev, ki ji v hidrodinamiki rečemo *osnovni tok*. Ta rešitev je lahko podana analitično ali numerično, vsekakor pa se podreja Navier-Stokesovi enačbi.

Nato osnovnem toku dodamo motnjo, tako da dobimo *skupni tok*, zopet podan s hitrostjo  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$  in tlakom  $p = P + p'$ . Tudi za skupni tok mora veljati N-S enačba, iz česar lahko izpeljemo enačbo za motnjo  $\mathbf{u}'$  in  $p'$ .

Ker nas zanimajo le majhne motnje, lahko v enačbi zanemarimo vse člene, kjer motnja nastopa v drugem ali višjih redih. Na ta način sistem zreduciramo nov na sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \mathbf{u}' \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (6)$$

Če je osnovni tok stacionaren, so koeficienti v linearnem sistemu enačb konstantni, torej takšen sistem znamo rešiti. Ločimo lahko spremenljivki  $\mathbf{r}$  in  $t$ , splošno rešitev pa zapišemo kot linearno kombinacijo

$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad (7)$$

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} p_i(\mathbf{r}) \quad (8)$$

kjer so  $\mathbf{u}_i$  in  $p_i$  lastni valovni načini. Ker sta enačbi linearni v kraju, je njihova krajevna odvisnost harmonična.

Hitro vidimo, da bo tok nestabilen, če ima vsaj ena lastna vrednost  $s_i$  realni del večji od 0, v nasprotnem primeru pa bo stabilen. Problem stabilnosti sistema lahko torej prevedemo na reševanje sistema linearnih enačb, kar je enakovredno iskanju lastnih vrednosti matrike. Sedaj tudi vidimo, da matematično natančni definiciji mere za velikost motnje in kriterija za stabilnosti nimata velikega pomena, saj motnje v obliki normalnih valovnih načinov le eksponentno naraščajo ali padajo, njihova oblika pa ostaja enaka.

Takšna poenostavitev velja le za majhne motnje. Če je sistem nestabilen in se motnja s časom poveča, bo po nekem času presegla mejo, kjer je lineariziran približek še smislen. Tedaj moramo v enačbi upoštevati tudi višje člene, zato le-ta ni več linearna.

### 3.3 Lubrikacijski približek

V geometrijah, kjer je ena izmed dimenzij mnogo manjša od ostalih, si lahko gibalne enačbe poenostavimo z lubrikacijskim približkom (angl. lubrication approximation). Odvisnost od te koordinate lahko izločimo in s tem zmanjšamo število spremenljivk v Navier-Stokesovi enačbi.

Na tanki plasti tekočine obstajata dve različni dolžinski skali, od katerih so odvisni velikostni redi nekaterih spremenljivk. Izberimo si koordinatni sistem, kjer je os  $z$  v smeri najmanjše dimenzije. Poljubna sprememba koordinate  $z$  bo vedno dosti manjša od primerljive spremembe v ravnini, iz česar lahko zaključimo

1. Komponenta hitrosti v smeri  $z$  je dosti manjša od komponent v smereh  $x$  in  $y$ .
2. Odvod poljubne spremenljivke po  $z$  je dosti večji od odvoda v ravnini.

Pri računih lahko nekatere izmed členov v Navier-Stokesovih enačbah zanemarimo. Ker pa imamo sedaj smer, v kateri se tekočina obnaša drugače kot v ostalih, imamo namesto ene vektorške enačbe različni enačbi v smereh  $z$  in  $xy$ . V definiciji Reynoldsovega števila nastopa tudi velikostna skala, ki je v tanki plasti enaka debelini plasti, torej majhni dimenziji,  $R = v_0 z_0 / \mu$ . V takšni geometriji lahko vedno računamo v limiti, ko je Reynoldsovo število majhno.

Poleg izpuščanja členov v enačbi pa nam tanka plast tekočine omogoča še eno spremembo. Če nas odvisnost hitrosti od višine  $z$  ne zanima, lahko hitrost povprečimo po debelini filma

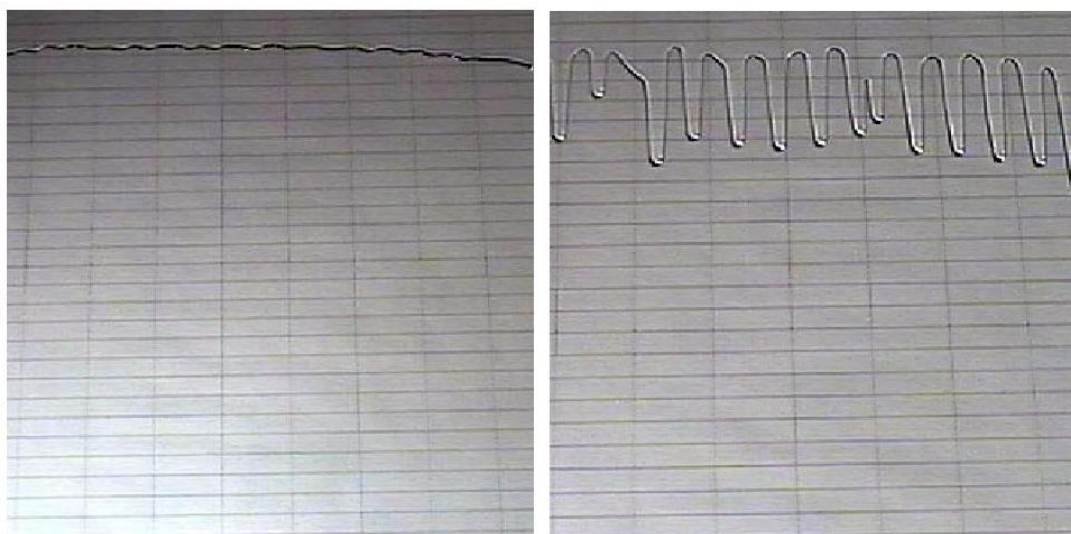
$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{u}(x, y, z) dz \quad (9)$$

kjer je  $h = h(x, y)$  debelina plasti na mestu  $(x, y)$ . Ohranitev mase da zvezo med  $h$  in  $\mathbf{u}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0 \quad (10)$$

s čimer lahko Navier-Stokesove enačbe zapišemo za spremenljivko  $h(x, y, t)$ . Namesto štirih skalarnih količin  $\mathbf{u}$  in  $p$  v poenostavljeni enačbi nastopa le ena količina, kar olajša reševanje. S tem korakom seveda izgubimo del informacije o rešitvi, saj iz rešitve za  $h$  ne moremo rekonstruirati hitrostnega profila v smeri  $z$ . Za ugotavljanje stabilnosti tanke plasti tekočine pa je dovolj reševati enačbo z eno samo skalarno spremenljivko.

## 4 Tekočina na klancu



Slika 1: Polzenje tanke plasti tekočine po nagnjeni površini. Majhne motnje v obliki fronte (levo) hitro prerastejo v vzorec, ki ni enakomeren, je pa približno periodičen (desno). Vir: [2]

Hidrodinamsko nestabilnost lahko opazujemo pri polzenju tekočine po klančini [2]. Ta pojav je vsem dobro znan, saj ga lahko vidimo na avtomobilskih steklih v dežju, enostavno pa je tudi pripraviti poskus doma. Čeprav je reševanje enačb zahtevano, lahko rezultat preverimo z eksperimentom.

Vzorec na sliki 1 lahko pojasnimo s kratkim razmislekom. Po klančini navzdol vodo poganja sila teže, zadržujeta pa jo viskoznost in površinska napetost, ki pa imata velik vpliv le na tanke plasti. Če majhna motnja ob nekem trenutku povzroči, da je na nekem

mestu plast voda debelejša, imata tako viskoznost kot površinska napetost manjši vpliv na gibanje vode kot sila teže. Na tistem mestu steklo več vode kot drugod, kar bo le okrepilo začetno motnjo, tako da bo na tistem mestu voda vedno lažje tekla.

Le z razmislekom pa ne znamo napovedati niti končne oblike fronte niti povprečne razdalje med mesti z večjim pretokom. Če nas to zanima, moramo tudi kaj izračunati.

## 4.1 Enačbe

Če privzamemo nestisljivost tekočine  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , se Navier-Stokesova enačba za tekočino na klancu glasi

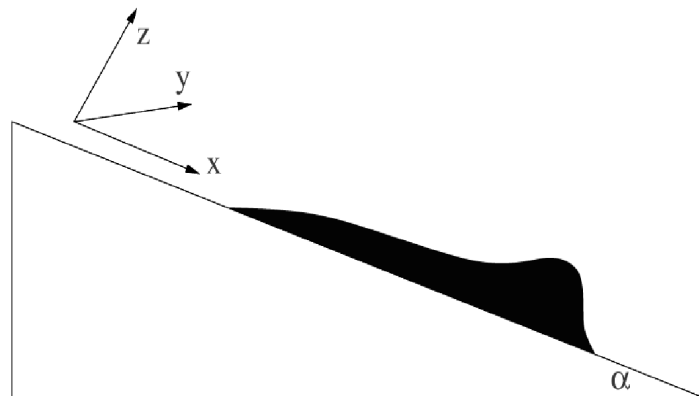
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + g(\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{k}) \quad (11)$$

kjer je  $\mathbf{u}$  hitrost tekočine,  $\rho$  njena gostota in  $\mu$  viskoznost. Člena z  $g$  sta dinamična in statična komponenta sile teže. Pomembni so tudi robni pogoji, običajno se izbere sledeče:

- Na meji med tekočino in klancem tekočina ne drsi, torej je tam  $\mathbf{u} = 0$ .
- Na meji med tekočino in zrakom ima tlak nezveznost zaradi površinske napetosti tekočine. Nezveznost je sorazmerna s površinsko napetostjo in ukrivljenostjo meje  $\kappa$ .

Ker obravnavamo tanke filme, lahko privzamemo, da je debelina  $h$  manjša od kate-rekoli dolžinske skale v ravnini  $xy$ . Uporabimo lubrikacijski približek, ukrivljenost meje med tekočino in zrakom pa ocenimo s  $\kappa \approx \nabla^2 h$ . S tem privzetkom lahko enačbo (11) poenostavimo v enačbo za  $h$ .

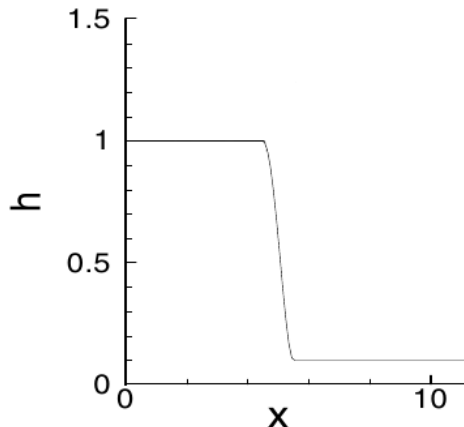
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{3\mu} \nabla \cdot [\gamma h^3 \nabla \nabla^2 h - \rho g h^3 \nabla h \cos \alpha + \rho g h^3 \sin \alpha \mathbf{i}] \quad (12)$$



Slika 2: Skica tekočine na klancu v dveh dimenzijah. Viden je greben tik za fronto tekočine in pa zožitev daleč za fronto. Pri računih raje privzamemo, da tekočina sproti priteka z zgornjega roba klančine, tako da zožitve ni treba upoštevati

Zgornja enačba je simetrična glede na poljuben premik v kraju in času, saj te količine v njej ne nastopajo eksplicitno. Začetno stanje, kot je prikazano na sliki 2 pa podaja

odvisnost debeline plasti od  $x$  in  $z$ . Iz postavitve problema sklepamo, da se bo čelo tekočine s časom premikalo po klanecu navzdol, torej bo profil odvisen od časa. Edina simetrija, ki ji zadoščata tako začetno stanje kot gibalna enačba je torej translacijska v smeri  $y$ .



Slika 3: Začetni pogoj za določanje toka tekočine po klanecu.

Da najdemo osnovno rešitev, najprej privzamemo, da ima rešitev enako simetrijo kot sama enačba. Postavimo se v koordinatni sistem kot na sliki 2. Klanec, po katerem teče tekočina, ima translacijsko simetrijo v smeri  $y$ , zato za osnovno rešitev velja  $h_y = 0$ . Za lažje reševanje preidemo še na brezdimenzijske količine. V enačbi ostane le še en parameter  $D(\alpha)$ , ki podaja razmerje med vplivom viskoznosti in površinske napetosti, brezdimenzijsko dolžino klanca v smeri  $x$  pa označimo z  $L$ . Enačba za brezdimenzijske količine, ki predpostavlja simetrijo in zato opisuje osnovno rešitev problema, se glasi

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - [h^3 h_{xxx}]_x + D(\alpha) [h^3 h_x]_x - (h^3)_x \quad (13)$$

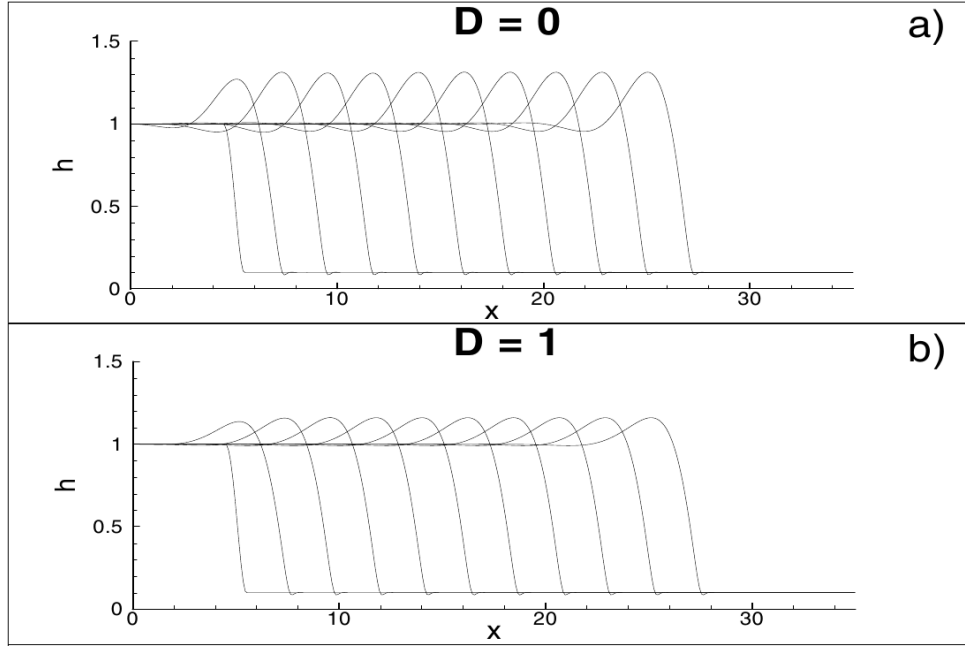
Pred začetkom reševanja moramo določiti tudi začetne in robne pogoje. Enačba je četrtega reda v  $x$ , zato potrebujemo štiri robne pogoje in profil tekočine ob času  $t = 0$ . Za začetno stanje si izberimo profil, kot je na sliki 3. Pri takšni izbiri velja  $h(0, t) = 1$  po definiciji brezdimenzijske debeline, pred fronto pa je plast mnogo tanjša,  $h(L, t) = b \ll 1$ . Velikost domene  $L$  mora biti večja od razdalje, ki jo bo prepotovalo čelo tekočine. Oba robna pogoja ne veljata le na robu območja, ampak tudi v njegovi bližini, zato za ostala dva robna pogoja vzamemo  $h_x(0, t) = h_x(L, t) = 0$ .

Zgornja enačba je še vedno prezahtevna, da bi jo reševali analitično, zato posežemo po numeričnih metodah. Rešitev enačbe (13) lahko dobimo z uporabo metode na osnovi končnih diferenc.

## 4.2 Nestabilnost

Osnovna rešitev  $h_0(x, t)$  je sicer odvisna od časa, vendar lahko predpostavimo, da čelo tekočine polzi s konstantno hitrostjo  $U$ . Časovno odvisnost koeficientov  $h_0$  bomo torej odpravili, če se postavimo v koordinatni sistem, ki se giblje s to hitrostjo. V tem primeru uvedemo spremenljivko  $\xi = x - Ut$ , splošno rešitev pa lahko zapišemo v obliki

$$h(\xi, y, t) = h_0(\xi) + \varepsilon h_1(\xi, y, t) \quad (14)$$



Slika 4: Profil tekočine pri različnih vrednostih parametra  $D$ . V obeh primerih se hitro oblikuje greben tik za fronto. Profili so prikazani v intervalih  $\delta t = 2$ , pri izbranih vrednostih  $L = 40$  in  $b = 0, 1$ . Koordinata  $x$  je diskretizirana s korakom  $\Delta x = 0,05$  [2].

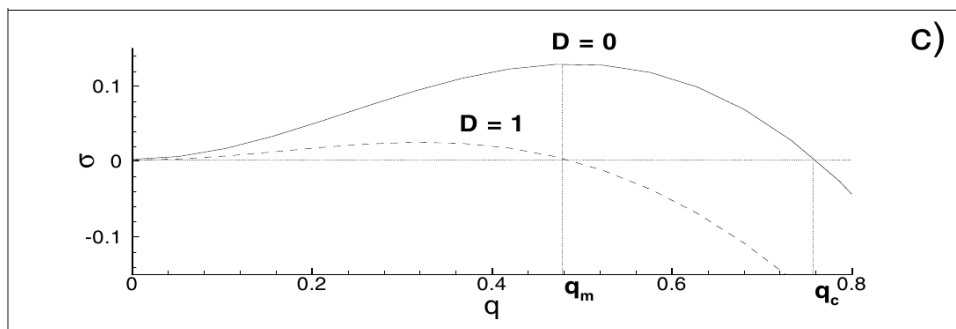
V tej sliki se  $h_0$  ne spreminja s časom, torej smo dobili linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Ker želimo, da je motnja res majhna, predpostavimo, da sta  $h_0$  in  $h_1$  podobnega velikostnega reda,  $\varepsilon$  pa zelo majhen, mnogo manjši od 1. Zgornji izraz vstavimo v enačbo (12) in zanemarimo vse člene z drugo in višjimi potencami  $\varepsilon$ .

Motnjo  $h_1$  izberemo takšno, da zanjo ne drži translacijska simetrija v smeri  $y$ . Na sliki 1 vidimo, da je oblika fronte približno periodična, zato poskusimo s harmonično motnjo oblike  $h_1(\xi, y, t) = g(\xi, t) \exp(iqy)$ . Takšna motnja z valovnim številom  $q$  ima valovno dolžino  $\lambda = 2\pi/q$ . Ker motnja zadošča linearni enačbi, je njena časovna odvisnost eksponentna

$$h_1(\xi, y, t) = \phi(\xi) e^{iqy} e^{st} \quad (15)$$

Tako  $\phi$  kot  $s$  sta odvisni od valovnega števila  $q$ . Če je realni del  $s$  pozitivna, bo majhna motnja eksponentno naraščala in povzročila zlom simetrije. Pričakujemo, da bo valovna dolžina, pri kateri je vrednost  $s$  največja, enaka razdalji med posameznimi pasovi na sliki 1, saj bo motnja s takšno valovno dolžino najhitreje naraščala. Odvisnost  $s(q)$ , izračunana numerično, je prikazana na sliki 5. Valovna dolžina najhitrejše rasti je odvisna od parametra  $D$ , prav tako pa tudi hitrost rasti in z njo karakteristični čas, po katerem motnja postane vidna.





Slika 5: Hitrost rasti s majhne motnje z valovnim številom  $q$ . Valovna dolžina z najhitrejšo rastjo  $\lambda_m = 2\pi/q_m$  ustreza pričakovani razdalji med curki. [2].

## 5 Milni mehurčki

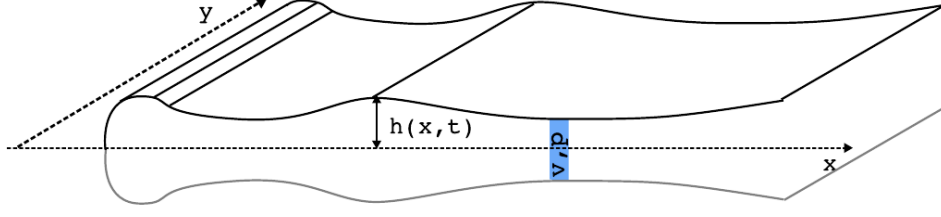


Slika 6: Razpad milnega mehurčka [3].

Milni mehurčki so stabilni, saj majhne motnje v opni zaduši površinska napetost tekočine. Če pa mehurček predremo v eni točki, ustvarimo rob, kjer površinska napetost ni uravnotežena, zato se rob začne umikati. Ker je opna zelo tanka, je ukrivljenost na robu velika, zato fronta napreduje zelo hitro [4]. To napredovanje je pri mehurčkih tako hitro, da s prostim očesom fronte sploh ne opazimo, ampak se nam zdi, da celoten mehurček razpade naenkrat. Pri opazovanju si lahko pomagamo s hitrimi kamerami, kot vidimo na sliki 6.

Podobno kot pri tankem filmu tudi tu obravnavamo tanko plast tekočine pod vplivom površinske napetosti. Skica roba opne z označenimi spremenljivkami in koordinatnimi osmi je na sliki 7.

Pojav se od drsenja tekočine po klancu bistveno razlikuje v viru nestabilnosti. Pri razpadu milnega mehurčka namreč ne opazimo nestabilnosti v obliki fronte, ampak v dejstvu, da opna razpade v kapljice. Pravzaprav gre za zloma dveh simetrij, ene v smeri premikanja fronte in druge v pravokotni smeri. Reševanje problema je mnogo lažje ob predpostavki, da se translacijska simetrija vzdolž roba ohranja, torej se osredotočimo le



Slika 7: Profil opne s translacijsko simetrijo vzdolž roba in zrcalno simetrijo v navpični smeri. Ker je opna tanka, lahko privzamemo, da se tlak in hitrost ne spreminjata po debelini [4].

na prvi zlom simetrije. Kljub temu pa so enačbe še vedno prezapletene za analitično reševanje, zato posežemo po numeričnih metodah.

Tako z eksperimenti kot tudi z računom lahko vidimo, da ključno vlogo pri razpadu opne igra njena viskoznost. Viskozne in neviskozne tekočine se obnašajo tako različno, da najlažje obravnavamo vsako posebej.

## 5.1 Neviskozna opna

Tok neviskozne in nestisljive tekočine opisuje Eulerjeva enačba

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p \quad (16)$$

Za tanko opno smemo uporabiti lubrikacijski približek, tako da ohranitev prostornine v brezdimenzijski obliki zapišemo kot

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(h\mathbf{v}) = 0 \quad (17)$$

Vemo, da opna za fronto razpade v kapljice. Njihovo število in velikost lahko določimo iz ohranitev energije in skupne prostornine. Pred razpadom je edini prispevek k energiji površinska napetost opne, po razpadu pa nastane  $N$  enako velikih kapljic z radijem  $r$  in hitrostjo  $v$ . Ohranitev energije ob razpadu odseka opne s površino  $S$  da enakost

$$\sigma N 4\pi r^2 + 2Sh_0\rho \frac{v^2}{2} = 2S\sigma \quad (18)$$

kjer je prvi člen energija površinske napetosti kapljic, drugi kinetična energija kapljic, na desni pa energija opne pred razpadom. Zvezo med površino opne  $S$  in številom kapljic  $N$  dobimo iz ohranitve volumna, tako da se ohranitev energije v brezdimenzijski obliki, kjer je  $r$  v enotah  $h_0$ ,  $v$  pa v enotah  $v_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho h_0}}$ , glasi

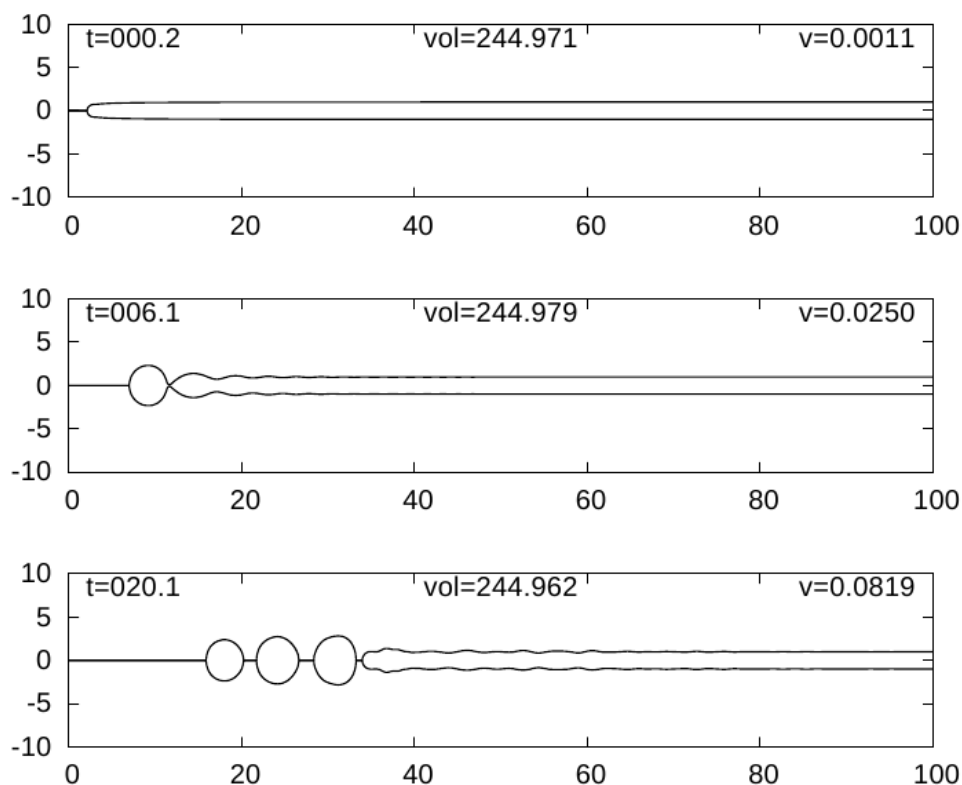
$$\frac{3}{r} + \frac{v^2}{2} = 1 \quad (19)$$

Drugo zvezo med velikostjo in hitrostjo kapljic pa dobimo ob predpostavki, da fronta s časom ohranja svojo obliko, torej jo lahko zapišemo kot potujoči val. Ker se premika le v eni smeri, uporabimo valovno enačbo prvega reda

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\nabla v = 0 \quad (20)$$

Če bi bila hitrost valovanja  $c$  manjša od hitrosti tekočine na robu  $v$ , bi bilo gibanje tekočine nadzvočno in bi nastajali udarni valovi. Če pa bi bila motnja hitrejša od tekočine, bi opna razpadala že pred fronto. Edina smiselna možnost je torej, da je  $c = v$ .

Neviskozne opne je v svojem diplomskem delu obravnaval Simon Čopar. Rezultat simulacije, ki jo je pri tem izvedel, je na sliki 8.



Slika 8: Časovno spreminjanje roba opne med razpadom milnega mehurčka. Vidno je premikanje fronte in tvorba kapljic s polmerom, ki je dosti večji od debeline opne. [4]

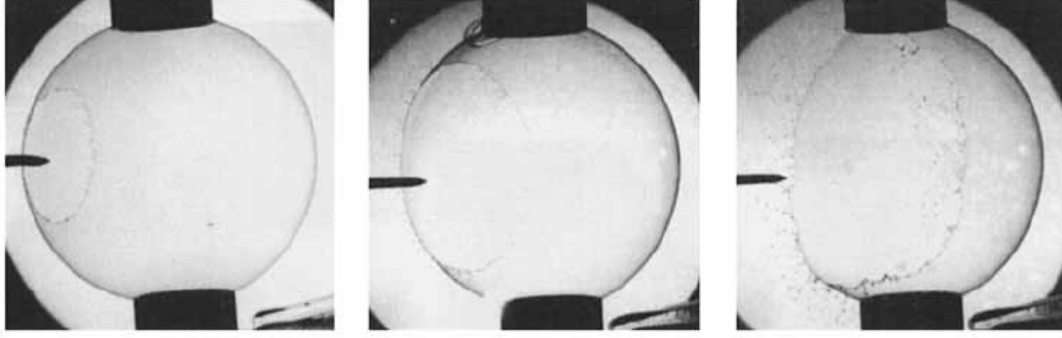
Na tej sliki je prikazan le zlom simetrije v smeri potovanja opne. Prikaz je dvodimenzionalen, torej so krogci, ki se odcepljajo od roba, v resnici valji tekočine. Ti valji razpadejo v kapljice zaradi Rayleighove nestabilnosti, ki je izven obsega tega seminarja.

Dobljeno hitrost in velikost kapljic lahko preverimo, saj se morata ohranjati tako skupna energija kot tudi celotna prostornina. Skupna prostornina opne in vseh kapljic je izračunana na sliki 8, med tekom simulacije pa se spremeni za manj kot en promil. Podoben izračun lahko naredimo tudi za skupno energijo kapljic in opne.

## 5.2 Viskozna opna

Opne viskozne tekočine se v splošnem obnašajo drugače. Poskusi kažejo, da pri dovolj visoki viskoznosti mehurček sploh ne razpade v kapljice, ampak se vsa tekočina nabere na enem mestu. Primer takšnega razpada je na sliki 9.

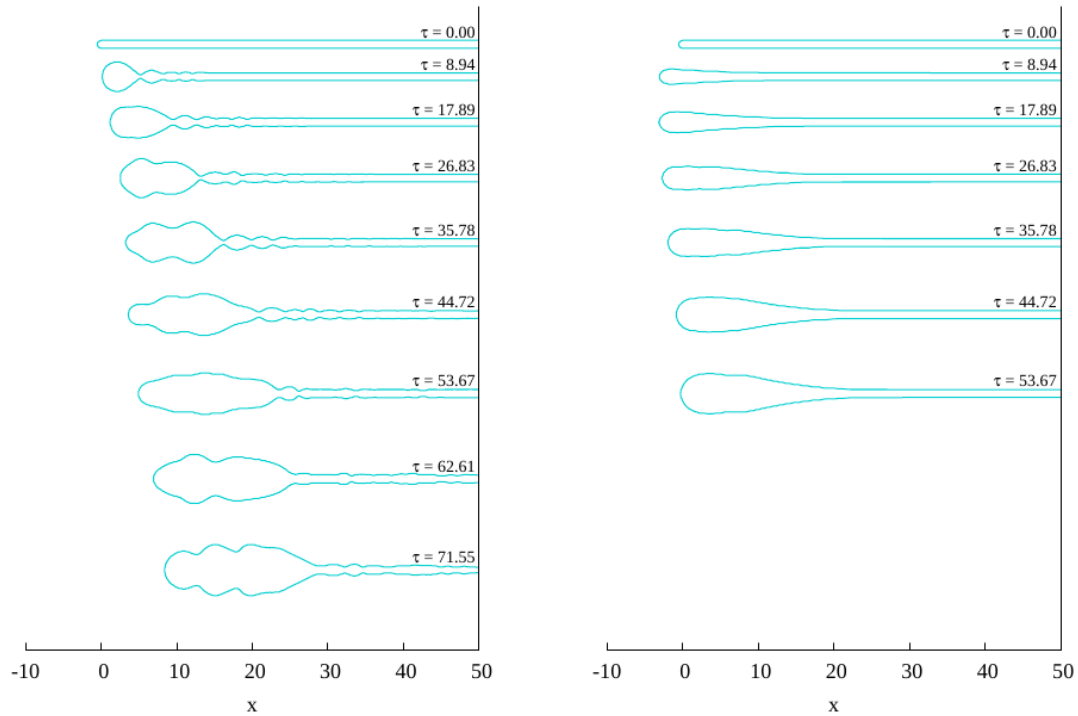
Če želimo razpad takšnega mehurčka modelirati, se spet zatečemo k numeričnim metodam. Rešujemo Navier-Stokesovo enačbo, kjer moramo upoštevati tudi člen z viskozno-stjo. Ko vse količine pretvorimo v brezdimenzijsko obliko, na gibanje roba opne vpliva le parameter  $Z$ , ki ga imenujemo Ohnesorgovo število in predstavlja razmerje med silami zaradi viskoznosti in površinsko napetostjo [8]. Podan je kot



Slika 9: Razpad mehurčka iz raztopine Teepola z viskoznostjo  $\mu = 6$  mPa s. [9]

$$Z = \mu \sqrt{\frac{\rho}{\sigma a}} \quad (21)$$

kjer je  $\mu$  viskoznost tekočine,  $\rho$  njena gostota,  $\sigma$  površinska napetost,  $2a$  pa povprečna debelina opne pred razpadom. Časovno spreminjanje roba pri različnih vrednosti  $Z$  je prikazano sa sliki 10



Slika 10: Spreminjanje roba opne, ki je dovolj viskozna, da prepreči razpad v kapljice. [8] Leva slika prikazuje razvoj roba pri  $Z = 0,0045$ , desna pa pri  $Z = 4,5$ .

Obe sliki se kvalitativno razlikujeta od slike 8. Valji tekočine se ne odcepljajo od roba, zato ne pride do razpada v kapljice. Za razpad milničnega mehurčka je viskoznost tekočine res ključnega pomena.

## 6 Kraški žlebiči

Žlebiči so kraška tvorba, ki nastane na nagnjenih površinah apnenčastih skal pod vplivom dežja. So vzporedni žlebovi v smeri največje strmine. Nastanejo zaradi kislih primesi v deževnici, ki počasi topijo kamnino [10, 11]. Tipično so široki nekaj centimetrov.



Slika 11: Žlebiči na slovenskem Krasu pri Nabrežini [5]

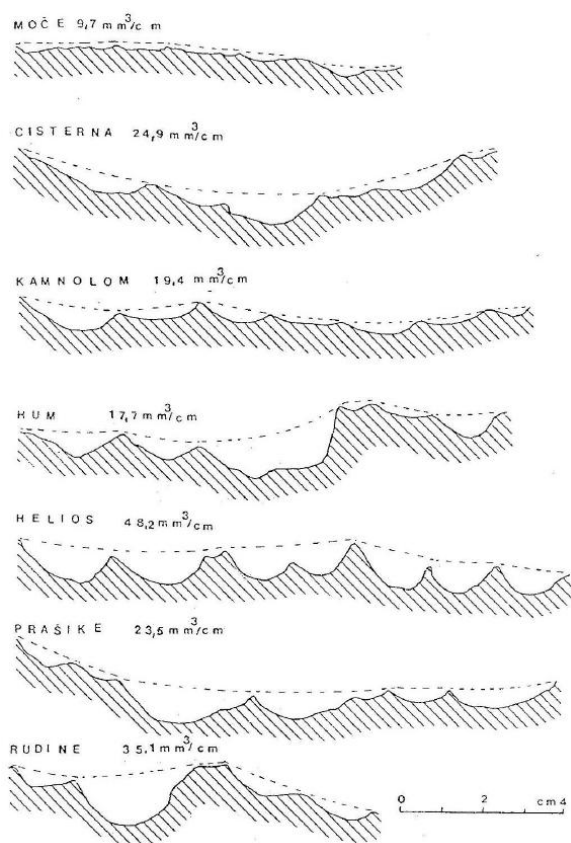
S slike 11 lahko vidimo, da žlebiči tvorijo podobno periodično strukturo kot tekočina na sliki 1. Tudi po izvoru sta pojava sorodna: na tistih mestih, kjer čez žlebič steče več vode, se tudi raztopi več apnenca, torej postane kanal še globlji in skozenj teče še več vode. Pomembna razlika pa je, da ne opazujemo nestabilnosti v samem toku tekočine, ampak v obliki podlage. Plast tekočine tu ni tako tanka, da bi površinska napetost igrala veliko vlogo, je pa še vedno debelina toka  $h$  dosti manjša od velikosti pobočja, na katerem se tvorijo žlebiči, zato lahko uporabimo lubrikacijski približek.

Proces tvorbe žlebičev je bolj zapleten kot zgoraj obravnavani primeri. Namesto znane količine vode imamo sedaj neenakomeren dež, pa tudi pobočje ni nujno ravno in homogeno. Račune oteži raztapljanje apnenca v vodi, ki je precej razvejan kemijski proces. Navier-Stokesove enačbe so zato sklopljene s kemijskimi enačbami za raztapljanje. Dež pada v obliki kapljic, ki na mesto padca prinesejo vodo brez raztopljenega apnenca, hkrati pa zmotijo tok tekočine in na skalno podlago delujejo z neko silo. Vpliva dežnih kapljic ne znamo natančno opisati, zato moramo uporabiti poenostavitve. Modeliranje nastanka dežnih žlebičev je zato zelo zahtevno.

Apnenec je slabo topen v vodi, zato je naravni proces nastajanja žlebičev prepočasen, da bi lahko z njimi izvajali fizikalne eksperimente. Kljub temu pa se ga da pospešiti, če povečamo koncentracijo kisline v vodi, namesto kamnine pa uporabimo bolj topni mavec. Pomagamo si lahko tudi s številnimi primeri žlebičev najdenih v naravi. Izvedeni poskusi kažejo, da žlebiči nastanejo na nagnjeni kamniti površini pri enakomernem dežju v obliki vodnih kapljic.

Nastajanje žlebičev je neposredna posledica nestabilnosti, le da je motnja v obliki površine, ne pa v profilu toka. Če je pobočje na začetku ravno in se bo majhna motnja





Slika 12: Zabeleženi prečni profili žlebičev (levo, [6]) in skala, prekrita z žlebiči (desno, [10])

s časom poglobljala, potem bodo sčasoma nastali globlji žlebiči. Matija Perne je v svojem diplomskem delu izvedel simulacijo, s katero je poskušal pojasniti to nestabilnost. Upošteval je, da je tok vode po pobočju stacionaren, saj je časovna skala raztapljanja površja mnogo daljša od časovne skale pojavov v vodnem toku. Zanimaril je tudi vpliv padajočih dežnih kapljic po celotnem pobočju. Pri teh predpostavkah simulacija da rezultat, pri katerem je pobočje stabilno, torej žlebiči s časom postanejo vedno bolj plitvi. Takšen rezultat nasprotuje tako opažanjem iz narave kot tudi eksperimentom in je verjetno posledica poenostavitve, kjer zanemarimo vpliv padajočega dežja na raztapljanje kamnine [10].

## 7 Zaključek

Spoznali smo nekaj primerov pojavov iz vsakdanjega življenja, kjer lahko v toku tekočine v tanki plasti opazimo nestabilnosti. V seminarju so opisani trije primeri hidrodinamskih sistemov, v katerih poljubno majhna motnja s časom narašča, tako da opazimo makroskopsko odstopanje od stacionarnega stanja. Vsi ti sistemi torej kažejo neko nestabilnost.

Pri opisu naravnih pojavov s fizikalnim modelom naletimo na težave, saj ne moremo upoštevati vseh podrobnosti. Nekaterih sploh ne poznamo, druge pa načrtno zanemarimo, da bo naš model splošnejši in enostavnejši za reševanje. Uporabiti moramo približke in poenostavitve, kot je na primer lubrikacijski približek. Zaradi teh poenostavitev izgubimo del informacije o rešitvi, še vedno pa lahko napovedujemo stabilnost ali nestabilnost sistema. V nekaterih primerih, kot je tvorba dežnih žlebičih na kraškem površju, niti ne

poznamo vseh detajlov, ki povzročijo nestabilnost površja.

Obravnavani primeri še zdaleč niso vsi naravni pojavi, kjer se v toku tekočin pojavljajo nestabilnosti. Opazimo jih lahko pri razpadu tekočinskih curkov, nastanku morskih valov in turbulentnih tokovih. Zaradi izjemno širokega nabora problemov, od katerih nekateri še niso dobro opisani, študij stabilnosti v hidrodinamiki ponuja mnogo možnosti za raziskovanje.

## Literatura

- [1] P. G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability*, Cambridge University Press (2002)
- [2] L. Kondic, SIAM Review **45**, 95 (2003)
- [3] <http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-1199149/Super-slow-motion-pictures-soap-bubble-bursting-stunning-detail.html> (23. 1. 2012)
- [4] S. Čopar, Numerična analiza nestabilnosti na robu tekočinske opne, Diplomsko delo (2009)
- [5] <http://sl.wikipedia.org/wiki/Žlebič> (2. 2. 2012)
- [6] I. Gams, Geografija in aktualna vprašanja prostorskega razvoja, 127–138 (1989)
- [7] J. Eggers in E. Villermaux, Rep. Prog. Phys. **71**, 036601 (2008)
- [8] L. J. Gordillo Zavaleta, Self-similar and travelling wave solutions in surface tension-driven thin planar films, Scientific Computing Advanced Training (2007)
- [9] A. B. Pandit in J. F. Davidson, J. Fluid Mech. **212**, 11 (1990)
- [10] M. Perne, Advektivni model topljenja openca in nastanek dežnih žlebičev, Diplomsko delo (2007)
- [11] M. Perne, Physics of karst forms: rillenkarren, Seminar (2006)