

Metoda maksimalne entropije

Miha Čančula

26. februar 2012

1 Uvod

Spekter moči vhodnega signala smo približali z izrazom, ki ima v imenovalcu polinom stopnje m spremenljivke $z = \exp(-2\pi i \frac{1}{N})$.

$$|S(f)|^2 = \frac{C}{1 - b_1 z - b_2 z^2 - \dots} \quad (1)$$

Če koeficiente izberemo tako, da vsi razen konstante nastopajo z minusom, so b_i enaki avtoregresijskim (AR) koeficientom izvirnega signala.

$$y_n = b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \dots = \sum_{i=1}^m y_{n-1} b_i \quad (2)$$

Signal torej približamo z rešitvijo diferenčne enačbe s karakterističnim polinomom

$$Q(z) = 1 - b_1 z - b_2 z^2 - \dots \quad (3)$$

Rešitev takšne enačbe je linearna kombinacija eksponentnih funkcij, ki ima m prostih konstant, v eksponentu pa nastopajo koreni polinoma $Q(x)$. Polinom ima vedno m korenov, ki jih označimo z r_i , $i = 1 \dots m$ če so vsi koeficienti realni pa ti koreni nastopajo v konjugiranih parih.

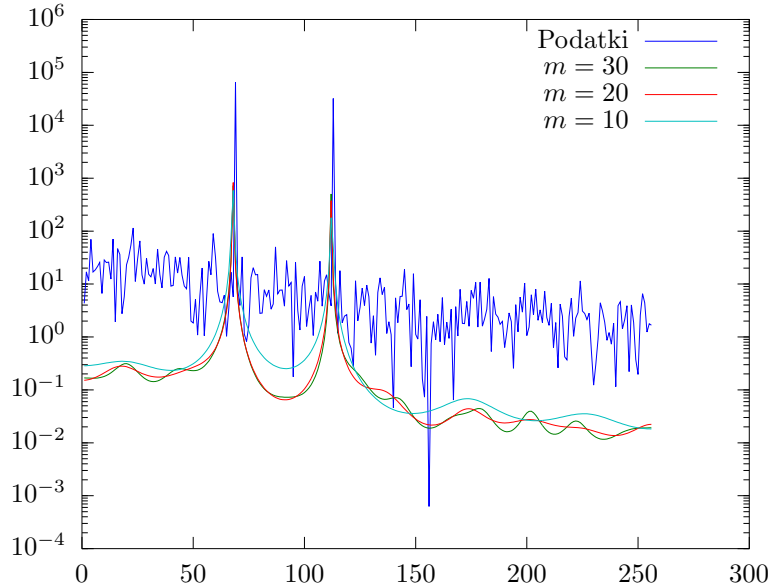
$$y_n = \sum_{i=1}^m c_i e^{r_i n} \quad (4)$$

Konstante c_i lahko izračunamo, če poznamo vrednost signala y v vsaj m točkah. V našem primeru imamo točk vedno več kot m , zato je napoved za y dobro določena. Pri svojem računu nisem uporabil formule (4), saj je nabor podatkov dovolj majhen, da sem vrednosti izračunal direktno z rekurzijo.

Avtoregresija ima širšo uporabo v obdelavi signalov, zato obstaja kar nekaj orodij, ki znajo izračunati te koeficiente. Uporabil sem paket za analizo časovnih zaporedij (Time-Series analysis - TSA) programa Octave. Koeficiente b_i izračuna z uporabo avtokovariance in Durbin-Levinsove rekurzije.

2 Frekvenčni spekter

Najprej sem za vse našete datoteke s podatki približal spekter signalov. V vseh primerih sem uporabil največ $m = 25$ koeficientov.



Slika 1: Spekter signala val2.dat

2.1 Položaj polov

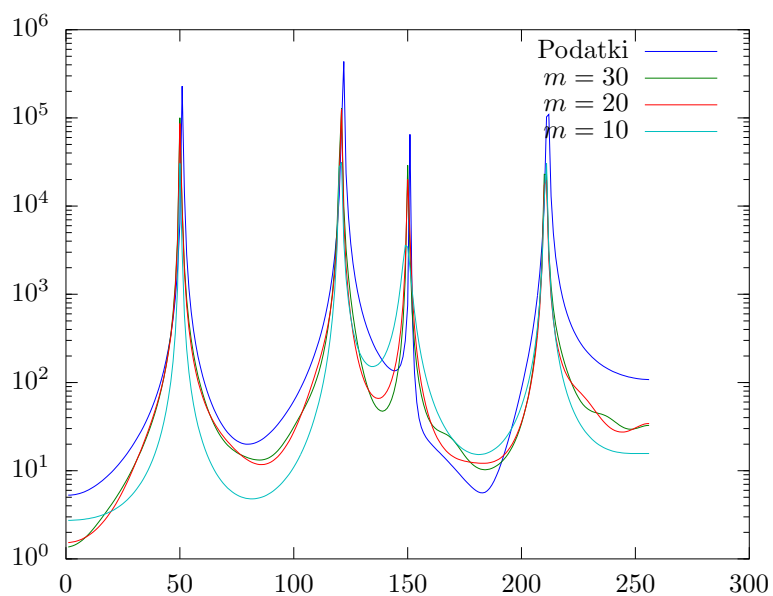
3 Ločljivost

Ločljivost metode sem definiriral kot najmanjšo razliko frekvenc $\Delta\nu$, pri kateri ima spekter signala $y(t) = \sin(\nu t) + \sin((\nu + \Delta\nu)t)$ dva vidna vrhova. Generiral sem takšen signal z osnovno frekvenco $\nu = 0.2$ in opazoval, pri kateri vrednosti $\Delta\nu$ bo imel spekter vsaj dva vrhova. To mejno frekvenca je seveda odvisna od števila dovoljenih polov, ta odvisnost je prikazana na sliki 5.

Višja ločljivost seveda pomeni manjši $\Delta\nu$, torej je po pričakovanju metoda natančnejša ob uporabi višjega števila polov oz. višje stopnje polinoma. Okrog $m = 30$, kjer sem opravljal večino izračunov, se ločljivost le malo spreminja in ostaja okrog vrednosti $\nu_1 = 0.05$. Tudi povečanje števila polov ločljivosti ne izboljša bistveno, medtem ko jo zmanjšanje števila pod 15 znatno poslabša.

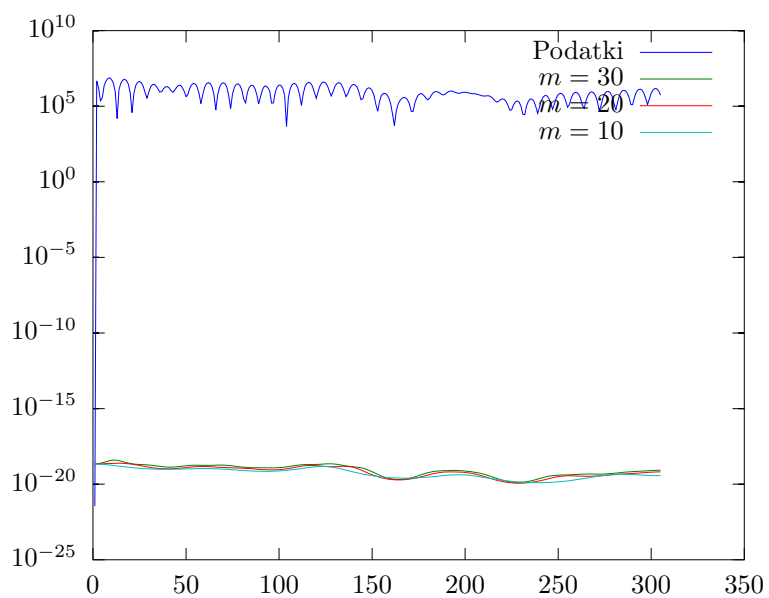
4 Napovedi

Če poznamo koeficiente avtoregresije, lahko iz dosedanjih podatkov napovemo prihodnje. Za preverjanje te napovedi sem koeficiente izračunal na podlagi polovice meritev, nato pa napovedi primerjal z drugi polovico meritev.

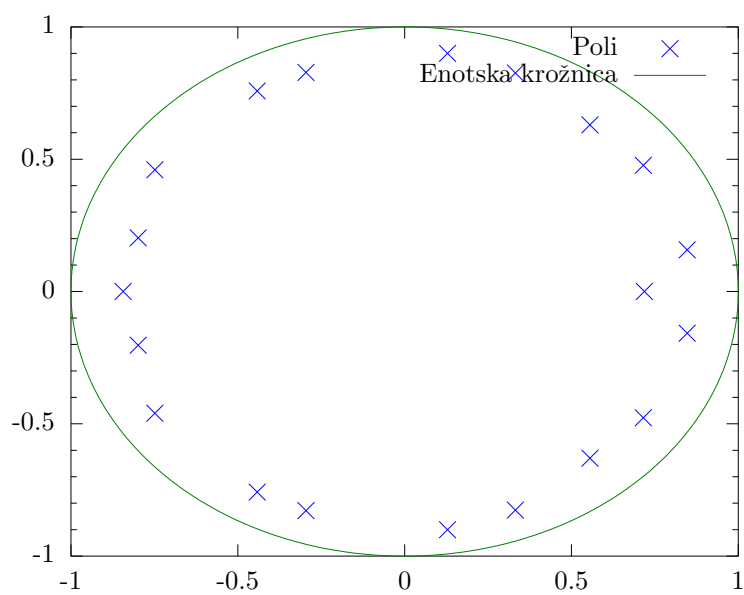


Slika 2: Spekter signala val3.dat

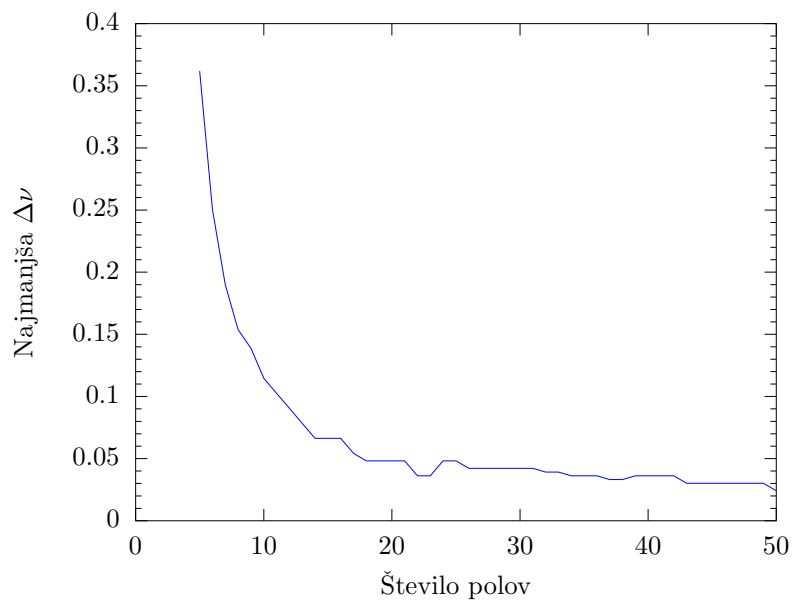
Vidimo, da napoved ni stabilna, saj se njena amplituda spreminja, kljub temu da je amplituda izvirnega signala približno konstantna. Pri obeh datotekah z valovi metoda napove eksponentno pojemanje signala. Eksponentno odvisnost pričakujemo po enačbi (4).



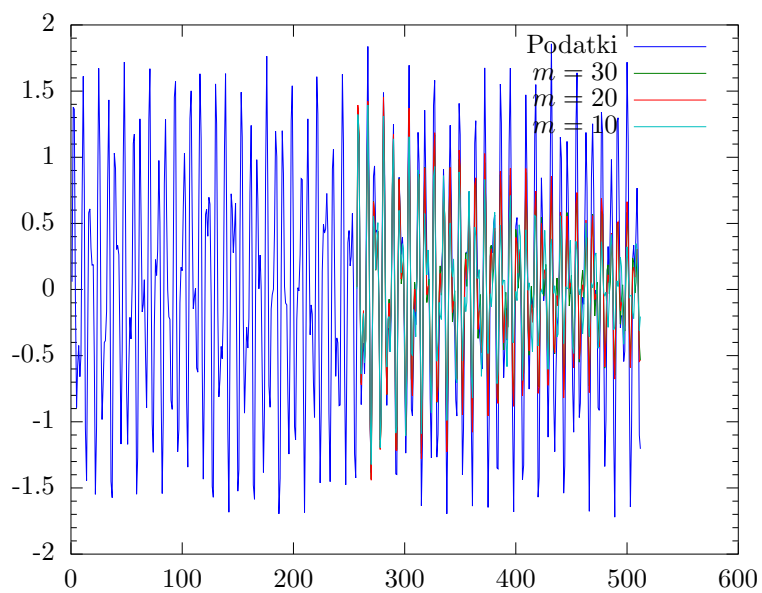
Slika 3: Spekter signala `co2.dat`



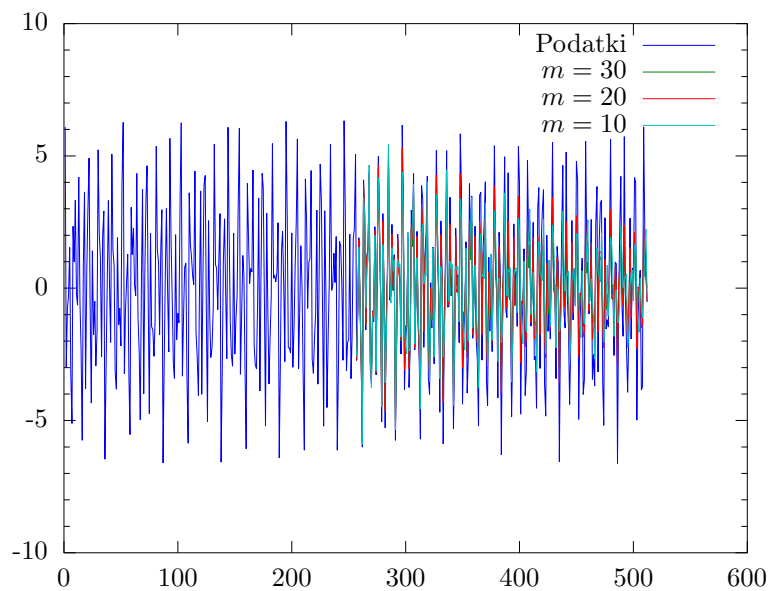
Slika 4: Poli preslikave za signal `co2.dat`



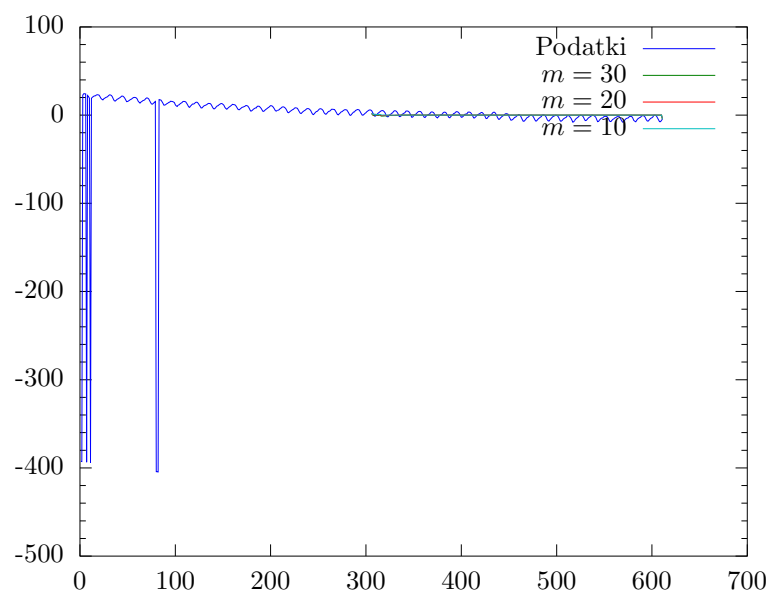
Slika 5: Ločljivost metode pri različnem številu polov



Slika 6: Napoved signala `val2.dat` z avtoregresijo



Slika 7: Napoved signala `va13.dat` z avtoregresijo



Slika 8: Napoved signala `co2.dat` z avtoregresijo