

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Oddelek za fiziko

Seminar – 1. letnik, II. stopnja

Hidrodinamske nestabilnosti v tankih plasteh

Avtor: Miha Čančula

Mentor: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, marec 2012

Povzetek

Kazalo

1	Uvod	2
2	Stabilnost in zlom simetrije	2
3	Hidrodinamika	3
3.1	Navier-Stokesova enačba	3
3.2	Lineariziran problem	3
3.3	Lubrikacijski približek	4
4	Tekočina na klancu	4
4.1	Enačbe	5
4.2	Nestabilnost	6
5	Milni mehurčki	8
5.1	Neviskozna opna	8
5.2	Viskozna opna	10
6	Kraški žlebiči	12
7	Zaključek	13

1 Uvod

Na nestabilnosti naletimo na mnogih področjih fizike. Zaradi zapletenosti enačb in izobilja različnih pogojev so še posebej zanimive tiste, ki izhajajo iz študija gibanja tekočin, hidrodinamike.

Hidrodinamika je zelo široko področje, enačbe, ki opisujejo gibanje tekočin pa zahtevne za reševanje, zato se poslužimo določenih poenostavitev in približkov. V tem seminarju sem se posvetil le tankim plastem tekočine. Na ta način si lahko enačbe poenostavimo do takšne mere, da jim bomo znali rešiti vsaj numerično, vseeno pa tudi v tako zmanjšanem naboru sistemov najdemo veliko zanimivih problemov. Vse obravnavane primere tudi dobro poznamo iz vsakdanjega življenja.

2 Stabilnost in zlom simetrije

O nestabilnosti govorimo, ko infinitezimalno majhna sprememba trenutnega stanja lahko povzroči večjo, merljivo razliko po nekem končnem času [1].

Takšna definicija je precej splošna, zato jo za potrebe seminarja raje definiramo ožje in bolj eksaktno. Stabilnost sistema pomeni, da vse motnje, ki so na začetku majhne, ostanejo majhne tudi ob poljubnem času. Nasprotno, sistem je nestabilen, če vsaj ena motnja po nekem času preneha biti majhna. Običajno to pomeni, da za vsako motnjo, ki je ob začetnem času omejena z neko zgornjo mejo, obstaja neka druga zgornja meja, ki je motnja nikoli ne preseže.

Če se poleg stabilnosti motnja s časom manjša, je tok *asimptotično stabilen*. V teoriji dinamičnih sistemov asimptotično stabilni rešitvi rečemo tudi atraktor.

Stabilnost oz. nestabilnost sistema je tesno povezana z zlomom simetrije. Predstavljajmo si sistem, katerega časovno spreminjanje lahko opišemo z eno ali več diferencialnimi enačbami, ki imajo določeno simetrijo. Z nastavkom, ki upošteva to simetrijo, dobimo rešitev enačb. Stabilnost se pokaže, ko temu nastavku dodamo majhno motnjo, ki ne upošteva simetrije. Stabilni sistem se bo vrnil v simetrično stanje, medtem ko pri nestabilnem pride do zloma simetrije.

Primer nestabilnega pojava je svinčnik, postavljen na konico. Enačba, ki opisuje njegovo gibanje, je simetrična glede na rotacijo okrog osi svinčnika. Zato lahko najdemo rešitev z enako simetrijo, to je pokončna lega. Če pa svinčnih le malo izmaknemo iz simetrične lege, bo padel v določeno smer in končal v stanju brez rotacijske simetrije.

Po drugi strani pa je težno nihalo stabilen sistem. Če takšno nihalo zmotimo, bo motnja vseskozi ostajala približno enake velikosti, zaradi trenja in zračnega upora se bo s časom celo manjšala. Po dolgem času bo sistem spet v simetričnem stanju.

3 Hidrodinamika

3.1 Navier-Stokesova enačba

Tok nestisljive tekočine z gostoto ρ in viskoznostjo μ se podreja Navier-Stokesovi enačbi in ohranitvi mase. Enačbi za hitrost $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ in tlak $p(\mathbf{r}, t)$ se glasita

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

kjer je ρ gostota tekočine, μ pa njena viskoznost.

Enačbo lahko poenostavimo s prehodom na brezdimenzijske spremenljivke, pri tem pa lahko tudi zmanjšamo število parametrov. Izberimo si meri za dolžino x_0 in hitrost v_0 . Če uvedemo še brezdimenzijsko Reynoldsovo število $R = v_0 x_0 / \mu$, lahko enačbo zapišemo za brezdimenzijski spremenljivki U in P kot

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

V sistemu enačb nastopa le en prost parameter. Poleg tega parametra je rešitev enačbe odvisna še od začetnih in robnih pogojev. Običajno poznamo začetni profil hitrosti in tlaka, saj si ju lahko izberemo ali izmerimo s poskusom. Robni pogoji v različnih geometrijah pa so lahko zelo zapleteni in močno otežijo računanje.

3.2 Lineariziran problem

Stabilnost hidrodinamskega sistema lahko študiramo tako, da najprej najdemo osnovno rešitev, ki ji v hidrodinamiki rečemo *osnovni tok*. Ta rešitev je lahko podana analitično ali numerično, vsekakor pa se podreja Navier-Stokesovi enačbi.

Nato osnovnem toku dodamo motnjo, tako da dobimo *skupni tok*, zopet podan s hitrostjo $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ in tlakom $p = P + p'$. Tudi za skupni tok mora veljati N-S enačba, iz česar lahko izpeljemo enačbo za motnjo \mathbf{u}' in p' .

Ker nas zanimajo le majhne motnje, lahko v enačbi zanemarimo vse člene, kjer motnja nastopa v drugem ali višjih redih. Na ta način sistem zreduciramo na sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \mathbf{u}' \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (6)$$

Če je osnovni tok stacionaren, so koeficienti v linearnem sistemu enačb konstantni, torej takšno enačbo znamo rešiti. Ločimo lahko spremenljivki \mathbf{r} in t , splošno rešitev pa zapišemo kot linearno kombinacijo sinusnih motenj

$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad (7)$$

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} p_i(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Hitro vidimo, da bo tok nestabilen, če ima vsaj ena lastna vrednost s_i realni del večji od 0, v nasprotnem primeru pa bo stabilen. Problem stabilnosti sistema lahko torej prevedemo na iskanje lastnih vrednosti matrike. Sedaj tudi vidimo, da matematično natančni definiciji mere za velikost motnje in kriterija za stabilnosti nimata velikega pomena, saj motnje v obliki normalnih valovnih načinov le eksponentno naraščajo ali padajo, njihova oblika pa ostaja enaka.

3.3 Lubrikacijski približek

V geometrijah, kjer je ena izmed dimenzij mnogo manjša od ostalih, si lahko gibalne enačbe poenostavimo z lubrikacijskim približkom (angl. lubrication approximation). Odvisnost od te koordinate lahko izločimo in s tem zmanjšamo število spremenljivk v Navier-Stokesovi enačbi.

Na tanki plasti tekočine obstajata dve različni dolžinski skali, od katerih so odvisni velikostni redi nekaterih spremenljivk. Poljubna sprememba koordinate z bo vedno dosti manjša od primerljive spremembe v ravnini, iz česar lahko zaključimo

1. Komponenta hitrosti v smeri z je dosti manjša od komponent v smereh x in y .
2. Odvod poljubne spremenljivke po z je dosti večji od odvoda v ravnini.

Če nas odvisnost hitrosti od višine z ne zanima, lahko hitrost povprečimo po debelini filma

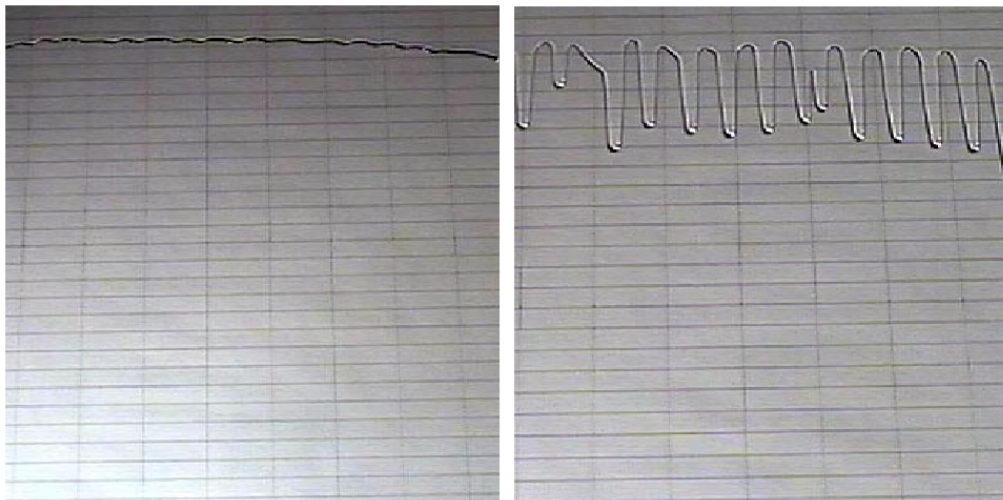
$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{u}(x, y, z) dz \quad (9)$$

kjer je $h = h(x, y)$ debelina plasti na mestu (x, y) . Ohranitev mase da enačbo za h

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0 \quad (10)$$

4 Tekočina na klancu

Hidrodinamsko nestabilnost lahko opazujemo pri polzenju tekočine po klančini [2]. Ta pojav je vsem dobro znan, saj ga lahko vidimo na avtomobilskih steklih v dežju, enostavno pa je tudi pripraviti poskus doma. Čeprav je reševanje enačb zahtevano, lahko rezultat preverimo z eksperimentom.



Slika 1: Polzenje tanke plasti tekočine po nagnjeni površini. Majhne motnje v obliki fronte (levo) hitro prerastejo v vzorec, ki ni niti približno enakomeren, je pa periodičen (desno). Vir: [2]

Vzorec na sliki 1 lahko pojasnimo s kratkim razmislekom. Po klančini navzdol vodo poganja sila teže, zadržujeta pa jo viskoznost in površinska napetost, ki pa imata velik vpliv le na tanke plasti. Če majhna motnja ob nekem trenutku povzroči, da je na nekem mestu plast voda debelejša, imata tako viskoznost kot površinska napetost manjši vpliv na gibanje vode kot sila teže, zato bo na tistem mestu steklo več vode kot drugod, kar bo le okrepilo začetno motnjo, tako da bo na tistem mestu voda vedno lažje tekla.

Le z razmislekom pa ne znamo napovedati niti končne oblike fronte niti povprečne razdalje med mesti z večjim pretokom. Če nas to zanima, moramo tudi kaj izračunati.

4.1 Enačbe

Če privzamemo nestisljivost tekočine $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, se Navier-Stokesova enačba za tekočino na klancu glasi

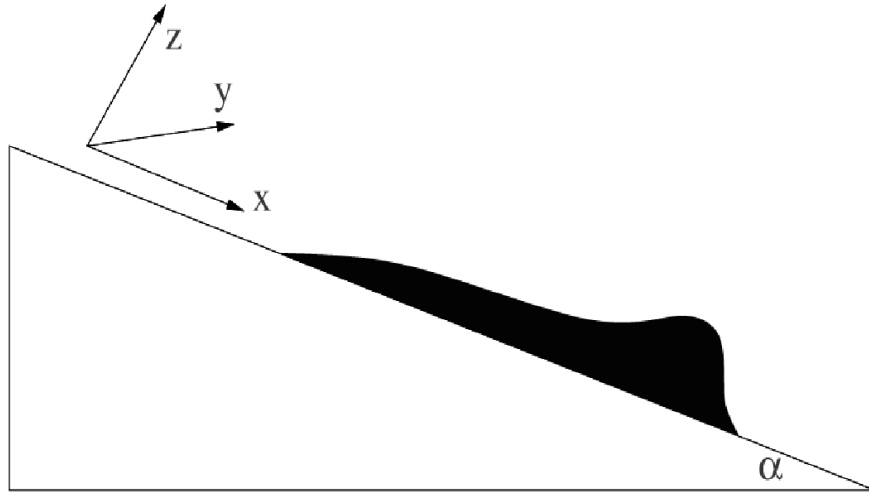
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + g(\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{k}) \quad (11)$$

kjer je \mathbf{u} hitrost tekočine, ρ njena gostota in μ viskoznost. Člena z g sta dinamična in statična komponenta sile teže. Pomembni so tudi robni pogoji, običajno se izbere sledeče:

- Na meji med tekočino in klancem tekočina ne drsi, torej je tam $\mathbf{u} = 0$.
- Na meji med tekočino in zrakom ima tlak nezveznost, ki je sorazmerno s površinsko napetostjo in ukrivljenostjo meje κ .

Ker obravnavamo tanke filme, lahko privzamemo, da je debelina h manjša od katerekoli dolžinske skale v ravnini. Uporabimo lubrikacijski približek, ukrivljenost meje med tekočino in zrakom po ocenimo s $\kappa \approx \nabla^2 h$. S tem privzetkom lahko enačbo (11) poenostavimo v enačbo za h .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{3\mu} \nabla \cdot [\gamma h^3 \nabla \nabla^2 h - \rho g h^3 \nabla h \cos \alpha + \rho g h^3 \sin \alpha \mathbf{i}] \quad (12)$$



Slika 2: Skica tekočine v dveh dimenzijah. Viden je greben tik za fronto tekočine in pa zožitev daleč za fronto, ki je pri računih ne bomo upoštevali

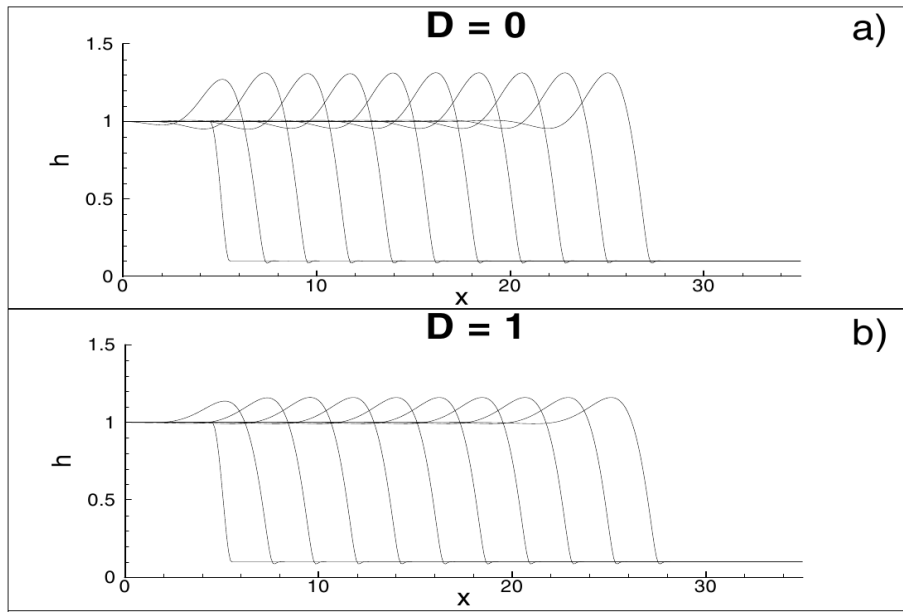
Zgornja enačba je simetrična glede na poljuben premik v kraju in času, saj te količine v njej ne nastopajo eksplicitno. Začetno stanje, kot je prikazano na sliki 2 pa podaja odvisnosti od x in z . Iz postavitve problema sklepamo, da se bo čelo tekočine s časom premikalo po klancu navzdol, torej bo profil odvisen od časa. Edina simetrija, ki ji zadoščata tako začetno stanje kot gibalna enačba je torej translacijska v smeri y .

Da najdemo osnovno rešitev, najprej privzamemo, da ima rešitev enako simetrijo kot sama enačba. Postavimo se v koordinatni sistem kot na sliki 2. Klanec, po katerem teče tekočina, ima translacijsko simetrijo v smeri y , zato za osnovno rešitev velja $h_y = 0$. Ža lažje reševanje preidemo še na brezdimenzijske količine. V enačbi ostane le še en parameter $D(\alpha)$, ki podaja razmerje med vplivom viskoznosti in površinske napetosti, brezdimenzijsko dolžino klanca v smeri x pa označimo z L . Enačba za brezdimenzijske količine, ki predpostavlja simetrijo in zato opisuje osnovno rešitev problema, se glasi

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -[h^3 h_{xxx}]_x + D(\alpha)[h^3 h_x]_x - (h^3)_x \quad (13)$$

Pred začetkom reševanja moramo določiti tudi začetne in robne pogoje. Enačba je četrtega reda v x , zato potrebujemo štiri robne pogoje. Če začnemo s podobnim profilom kot na sliki 2, le da se rep nadaljuje do zgornjega roba klančine, velja $h(0, t) = 1$ po definiciji brezdimenzijske debeline, pred fronto pa je plast mnogo tanjša, $h(L, t) = b \ll 1$. Oba enakosti ne veljata le na robu območja, ampak tudi v njegovi bližini, zato za ostala dva robna pogoja vzamemo $h_x(0, t) = h_x(L, t) = 0$. Potrebujemo še začetni pogoj, ki je kar profil tekočine ob času $t = 0$. Naravna izbira je krivulja, ki povezuje dva ravna odseka z glatkim vmesnim delom.

Zgornja enačba je še vedno prezahtevna, da bi jo reševali analitično, zato posežemo po numeričnih metodah. Rešitev enačbe (13) lahko dobimo z uporabo metode na osnovi končnih diferenc.



Slika 3: Profil tekočine pri različnih vrednostih parametra D . V obeh primerih se hitro oblikuje greben tik za fronto. Profili so prikazani v intervalih $\delta t = 2$, pri izbranih vrednostih $L = 40$ in $b = 0, 1$. Koordinata x je diskretizirana s korakom $\Delta x = 0,05$ [2].

4.2 Nestabilnost

Osnovna rešitev $h_0(x, t)$ je sicer odvisna od časa, vendar lahko predpostavimo, da čelo tekočine polzi s konstantno hitrostjo U . Časovno odvisnost koeficientov h_0 bomo torej odpravili, če se postavimo v koordinatni sistem, ki se giblje s to hitrostjo. V tem primeru uvedemo spremenljivko $\xi = x - Ut$ in $\nabla = (\partial_\xi, \partial_y)$, splošno rešitev pa lahko zapišemo v obliki

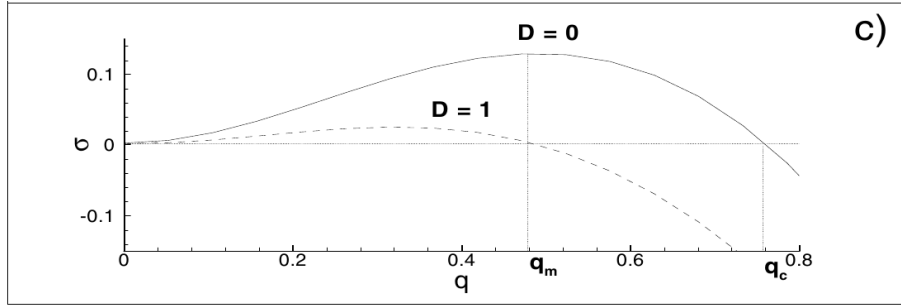
$$h(\xi, y, t) = h_0(\xi) + \varepsilon h_1(\xi, y, t) \quad (14)$$

V tej sliki se h_0 ne spreminja s časom, torej smo dobili linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Ker želimo, da je motnja res majhna, predpostavimo, da sta h_0 in h_1 podobnega velikostnega reda, ε pa zelo majhen, mnogo manjši od 1. Zgornji izraz vstavimo v enačbo (12) in zanemarimo vse člene z drugo in višjimi potencami ε .

Motnjo h_1 izberemo takšno, da zanjo ne drži translacijska simetrija v smeri y . Na sliki 1 vidimo, da je oblika fronte približno periodična, zato poskusimo s harmonično motnjo oblike $h_1(\xi, y, t) = g(\xi, t) \exp(iqy)$. Ker motnja zadošča linearni enačbi, je njena časovna odvisnost eksponentna

$$h_1(\xi, y, t) = \phi(\xi)e^{iqy}e^{\sigma t} \quad (15)$$

Tako ϕ kot σ sta lahko odvisni od valovnega števila q . Če je σ pozitivna, bo majhna motnja eksponentno naraščala in povzročila zlom simetrije. Pričakujemo, da bo valovna dolžina, pri kateri je vrednost σ največja, enaka razdalji med posameznimi pasovi na sliki 1, saj bo motnja s takšno valovno dolžino najhitreje naraščala. Odvisnost $\sigma(q)$, izračunana numerično, je prikazana na sliki 4. Valovna dolžina najhitreje rasti je odvisna od parametra D , prav tako pa tudi hitrost rasti in z njo karakteristični čas, po katerem motnja postane vidna.



Slika 4: Hitrost rasti σ majhne motnje z valovnim številom $q = 2\pi/\lambda$. Način z najhitrejšo rastjo q_m ustreza pričakovani razdalji med vzorci. [2].

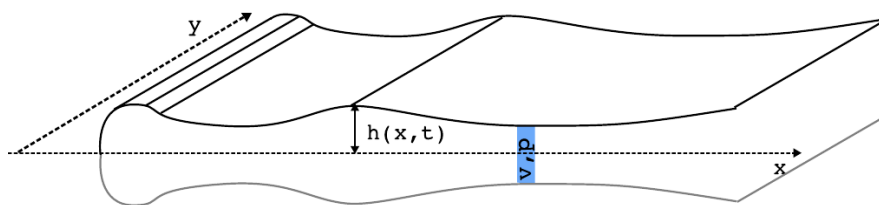
5 Milni mehurčki



Slika 5: Razpad milnega mehurčka [3].

Milni mehurčki so stabilni, saj majhne motnje v opni zaduši površinska napetost tekočine. Če pa mehurček predremo v eni točki, ustvarimo rob, kjer površinska napetost ni uravnotežena, zato se rob začne umikati. Ker je opna zelo tanka, je ukrivljenost na robu velika, zato fronta napreduje zelo hitro [4]. To napredovanje je pri mehurčkih tako hitro, da s prostim očesom fronte sploh ne opazimo, ampak se nam zdi, da celoten mehurček razpade naenkrat. Pri opazovanju si lahko pomagamo s hitrimi kamerami, kot vidimo na sliki 5.

Podobno kot pri tankem filmu tudi tu obravnavamo tanko plast tekočine pod vplivom površinske napetosti. Skica roba opne z označenimi spremenljivkami in koordinatnimi osmi je na sliki 6.



Slika 6: Profil opne s translacijsko simetrijo vzdolž roba in zrcalno simetrijo v navpični smeri. Ker je opna tanka, lahko privzamemo, da se tlak in hitrost ne spreminjata po debelini [4].

Pojav se od drsenja tekočine po klancu bistveno razlikuje v viru nestabilnosti. Pri razpadu milnega mehurčka namreč ne opazimo nestabilnosti v obliki fronte, ampak v dejstvu, da opna razpade v kapljice. Pravzaprav gre za zloma dveh simetrij, ene v smeri premikanja fronte in druge v pravokotni smeri. Reševanje problema je mnogo lažje ob predpostavki, da se translacijska simetrija vzdolž roba ohranja, torej se osredotočimo le na prvi zlom simetrije. Kljub temu pa so enačbe še vedno prezapletene za analitično reševanje, zato posežemo po numeričnih metodah.

Tako z eksperimenti kot tudi z računom lahko vidimo, da ključno vlogo pri razpadu opne igra njena viskoznost. Viskozne in neviskozne tekočine se obnašajo tako različno, da najlažje obravnavamo vsako posebej.

5.1 Neviskozna opna

Tok neviskozne in nestisljive tekočine opisuje Eulerjeva enačba

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p \quad (16)$$

Hkrati pa za opno velja tudi ohranitev prostornine, ki jo v brezdimenzijski obliki zapišemo kot

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(h\mathbf{v}) = 0 \quad (17)$$

Vemo, da opna za fronto razpade v kapljice. Njihovo število in velikost lahko določimo iz ohranitev energije in skupne prostornine. Pred razpadom je edini prispevek k energiji površinska napetost opne, po razpadu pa nastane N enako velikih kapljic z radijem r in hitrostjo v . Ohranitev energije ob razpadu odseka opne s površino S da enakost

$$\sigma N 4\pi r^2 + 2Sh_0\rho \frac{v^2}{2} = 2S\sigma \quad (18)$$

kjer je prvi člen energija površinske napetosti kapljic, drugi kinetična energija kapljic, na desni pa energija opne pred razpadom. Zvezo med površino opne S in številom kapljic N dobimo iz ohranitve volumna, tako da se ohranitev energije v brezdimenzijski obliki, kjer je r v enotah h_0 , v pa v enotah $v_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho h_0}}$, glasi

$$\frac{3}{r} + \frac{v^2}{2} = 1 \quad (19)$$

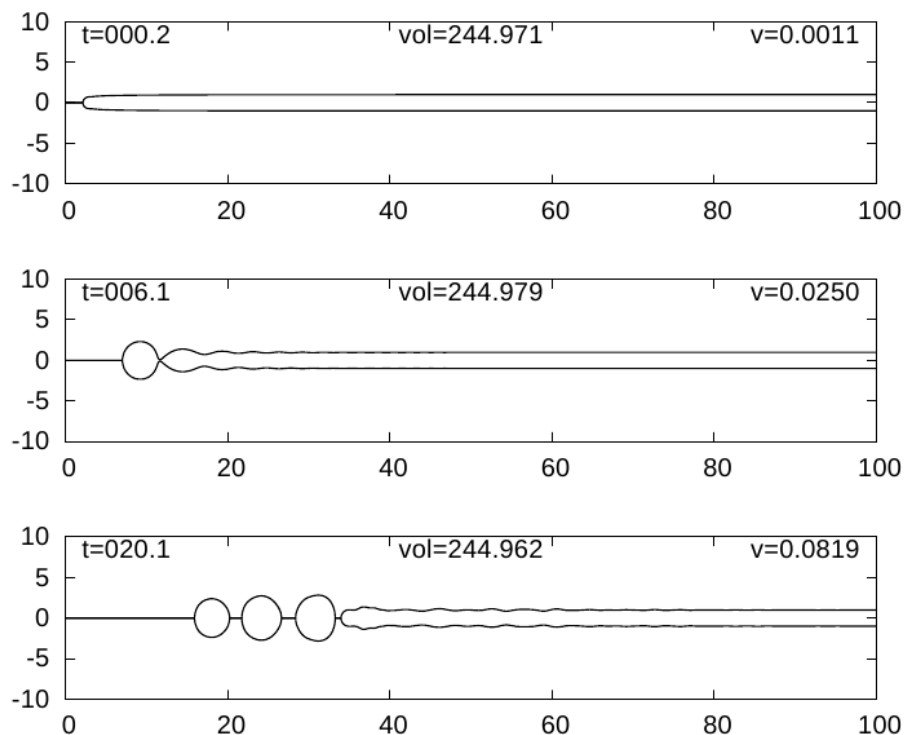
Drugo zvezo med velikostjo in hitrostjo kapljic pa dobimo ob predpostavki, da fronta s časom ohranja svojo obliko, torej jo lahko zapišemo kot potujoči val. Ker se premika le v eni smeri, uporabimo valovno enačbo prvega reda

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\nabla v = 0 \quad (20)$$

Če bi bila hitrost valovanja c manjša od hitrosti tekočine na robu v , bi bilo gibanje tekočine nadzvočno in bi nastajali udarni valovi. Če pa bi bila motnja hitrejša od tekočine, bi opna razpadala že pred fronto. Edina smiselna možnost je torej, da je $c = v$.

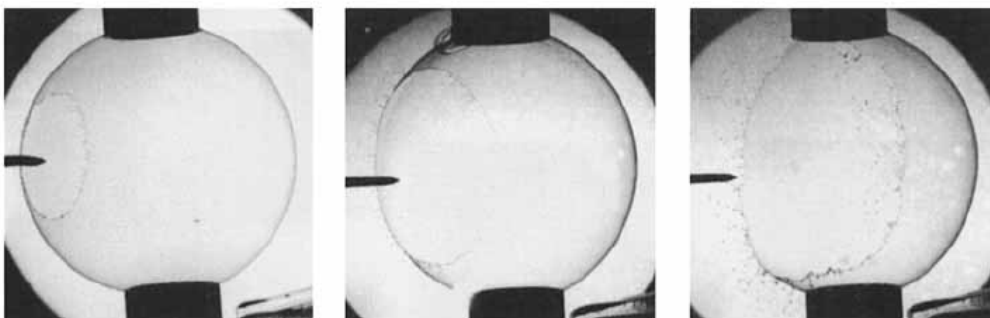
Neviskozne opne je v svojem diplomskem delu obravnaval Simon Čopar. Rezultat simulacije, ki jo je pri tem izvedel, je na sliki 7.

Dobljeno hitrost in velikost kapljic lahko preverimo, saj se morata ohranjati tako skupna energija kot tudi celotna prostornina. Skupna prostornina opne in vseh kapljic je izračunana na sliki 7, med tekom simulacije pa se spremeni za manj kot en promil. Podoben izračun lahko naredimo tudi za skupno energijo kapljic in opne.



Slika 7: Časovno spreminjanje roba opne med razpadom milnega mehurčka. Vidno je premikanje fronte in tvorba kapljic s polmerom, ki je dosti večji od debeline opne. [4]

5.2 Viskozna opna



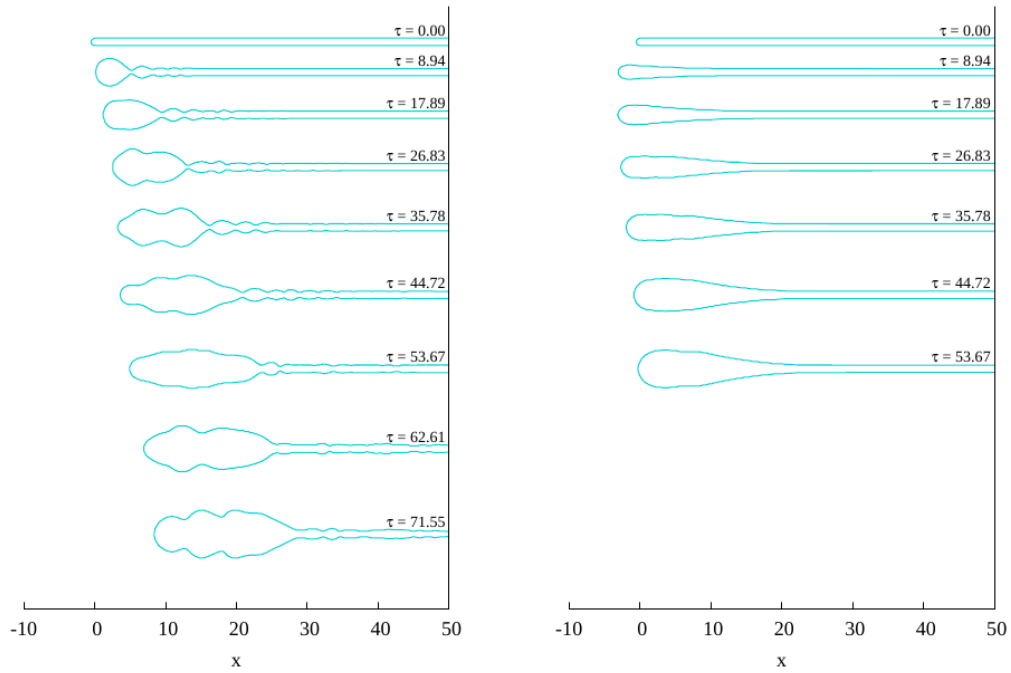
Slika 8: Razpad mehurčka iz raztopine Teepola z viskoznostjo $\mu = 6 \text{ mPa s}$. [9]

Opne viskozne tekočine se v splošnem obnašajo drugače. Poskusi kažejo, da pri dovolj visoki viskoznosti mehurček sploh ne razpade v kapljice, ampak se vsa tekočina nabere na enem mestu. Primer takšnega razpada je na sliki 8.

Če razpad takšnega mehurčka modelirati, se spet zatečemo k numeričnim metodam. Spet rešujemo Navier-Stokesovo enačbo, kjer moramo upoštevati tudi člen z viskoznostjo. Ko vse količine pretvorimo v brezdimenzijsko obliko, na gibanje roba opna vpliva le parameter Z , ki ga imenujemo Ohnesorgovo število in predstavlja razmerje med silami zaradi viskoznosti in površinsko napetostjo [8]. Podan je kot

$$Z = \mu \sqrt{\frac{\rho}{\sigma a}} \quad (21)$$

kjer je μ viskoznost tekočine, ρ njena gostota, σ površinska napetost, $2a$ pa povprečna debelina opne pred razpadom. Časovno spreminjanje roba pri različnih vrednosti Z je prikazano sa sliki 9



Slika 9: Spreminjanje roba opne, ki je dovolj viskozna, da prepreči razpad v kapljice. [8] Leva slika prikazuje razvoj roba pri $Z = 0,0045$, desna pa pri $Z = 4,5$.

6 Kraški žlebiči

Žlebiči so kraška tvorba, ki nastane na ravnih površinah apnenčastih skal pod vplivom dežja. So vzporedni žlebovi v smeri največje strmine. Nastanejo zaradi kislih primesi v deževnici, ki počasi topijo kamnino.



Slika 10: Žlebiči na slovenskem Krasu pri Nabrežini [5]

S slike 10 lahko vidimo, da žlebiči tvorijo podobno periodično strukturo kot tekočina na sliki 1. Tudi po izvoru sta pojava sorodna: Na tistih mestih, kjer čez žlebič steče več vode, se tudi raztopi več apnenca, torej postane kanal še globlji in skozenj teče še več vode. Plast tekočine tu seveda ni tako tanka, da bi površinka nepotest igrala veliko vlogo, je pa še vedno debelina toka h dosti manjša od velikosti pobočja, na katerem se tvorijo žlebiči.

Proces tvorbe žlebičev je dosti bolj zapleten kot zgoraj obravnavani primeri. Namesto znane končne količine vode imamo sedaj neenakomeren dež, pa tudi pobočje ni nujno ravno in homogeno. Kakršnekoli račune še posebej oteži raztapljanje apnenca v vodi, zapleten kemijski proces ki še vedno ni natančno pojasnjen. Znane Navier-Stokesove enačbe so zato sklopljene z enačbami za raztapljanje, ki so znane le empirično.

Vse kraške kamnine so zelo slabo topne v vodi, zato so takšni procesi prepočasni, da bi lahko z njimi izvajali fizikalne eksperimente. Kljub temu pa se da proces pospešiti, tako da povečamo koncentracijo kisline v vodi, namesto kamnine pa uporabimo bolj topni mavec. Pomagamo si lahko tudi s številnimi primeri žlebičev najdenih v naravi. Izvedeni poskusi kažejo, da pri enakomernem dežju v obliki vodnih kapljic na kamnitem pobočju nastanejo dežni žlebiči.

Modeliranje tvorbe žlebičev pa je izjemno zahtevno. Poleg reševanja Navier-Stokesove enačbe moramo upoštevati tudi raztapljanje kamnine, ki v primeru apnenca še ni povsem raziskano, zato moramo uporabiti empirične približke. Enačbe so tako zapletene, da si moramo pomagati s približki tudi pri opisu vodnega toka, saj ne znamo dobro opisati vpliva padajočih dežnih kapljic.

Nastajanje žlebičev je neposredna posledica nestabilnosti. Če je pobočje na začetku ravno in se bo majhna motnja s časom poglobljala, potem bodo sčasoma nastali globlji žlebiči. Matija Perne je v svojem diplomskem delu izvedel simulacijo, s katero je poskušal pojasniti to nestabilnost. Upošteval, da je tok vode po pobočju stacionaren, pri čemer je privzel, da je raztapljanje kamnine mnogo počasnejše od vodnega toka, zanemaril pa je tudi vpliv dežja po celotnem pobočju. Pri teh predpostavkah simulacija da rezultat, pri katerem je pobočje stabilno, torej žlebiči s časom postanejo vedno bolj plitvi. Takšen rezultat nasprotuje tako opažanjem iz narave kot tudi ekperimentom in je verjetno posledica poenostavitve, kjer zanemarimo vpliv padajočega dežja na raztapljanje kamnine [10].

7 Zaključek

Spoznali smo nekaj primerov hidrodinamskih pojavov iz vsakdanjega življenja kjer lahko opazimo nestabilnosti. Na začetku imamo ravno tanko plast tekočine, ki je sama po sebi rešitev enačbe gibanja in bi brez motenj s časom ostala nespremenjena. Stabilnost sistema pa ovrednotimo tako, da opazujemo reakcijo na majhne motnje. V seminarju so opisani trije primeri hidrodinamskih sistemov, v katerih poljubno majhna motnja s časom narašča, tako da opazimo makroskopsko odstopanje od stacionarnega stanja. Vsi ti sistemi torej kažejo neko nestabilnost.

Literatura

- [1] P. G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability*, Cambridge University Press (2002)
- [2] L. Kondic, SIAM Review **45**, 95 (2003)
- [3] <http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-1199149/Super-slow-motion-pictures-soap-bubble-bursting-stunning-detail.html> (23. 1. 2012)
- [4] S. Čopar, Numerična analiza nestabilnosti na robu tekočinske opne, Diplomsko delo (2009)
- [5] <http://sl.wikipedia.org/wiki/Žlebič> (2. 2. 2012)
- [6] I. Gams, Geografija in aktualna vprašanja prostorskega razvoja, 127–138 (1989)
- [7] J. Eggers in E. Villermaux, Rep. Prog. Phys. **71**, 036601 (2008)
- [8] L. J. Gordillo Zavaleta, Self-similar and travelling wave solutions in surface tension-driven thin planar films, Scientific Computing Advanced Training (2007)
- [9] A. B. Pandit in J. F. Davidson, J. Fluid Mech. **212**, 11 (1990)
- [10] M. Perne, Advektivni model topljenja openca in nastanek dežnih žlebičev, Diplomsko delo (2007)