

Hidrodinamske nestabilnost v tankih plasteh

Miha Čančula

21. marec 2012

- ▶ Stabilnost
- ▶ Enačbe toka tekočin
- ▶ Lubrikacijski približek – enačba tankega filma
- ▶ Primeri
 - ▶ Plast tekočine na klancu
 - ▶ Razpad milnega mehurčka
 - ▶ Nastanek kraških žlebičev

Stabilnost

Osnovna rešitev

- ▶ Ohranja simetrijo enačbe

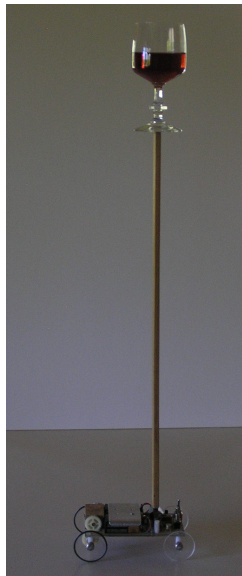
Motnja

- ▶ Krši simetrijo
- ▶ Majhna v primerjavi z osnovno rešitvijo

Stabilnost

- ▶ Majhna motnja po dolgem času ostane majhna

Stabilnost



Enačbe hidrodinamike

Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

Brezdimenzijska

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \mathbf{U}$$

Nestisljivost

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Lubrikacijski približek

Predpostavke

- ▶ Značilna dimenzija v smeri z mnogo manjša
- ▶ Hitrost v tej smeri majhna, $u_z \ll u_x, u_y$.

Učinek

- ▶ Povprečenje v z smeri \Rightarrow izgubimo profil v z smeri
- ▶ Menjava spremenljivke $\mathbf{u}(x, y, z, t) \rightarrow h(x, y, t)$
- ▶ 4 skalarne količine $(\mathbf{u}, p) \rightarrow 1$ skalarna količina.

Lineariziran problem

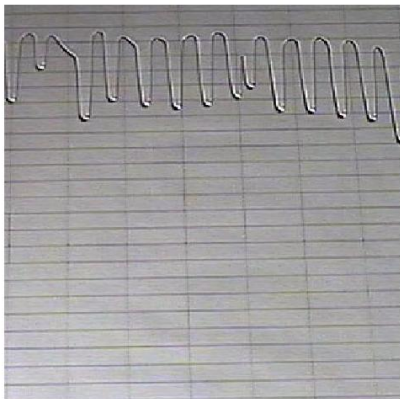
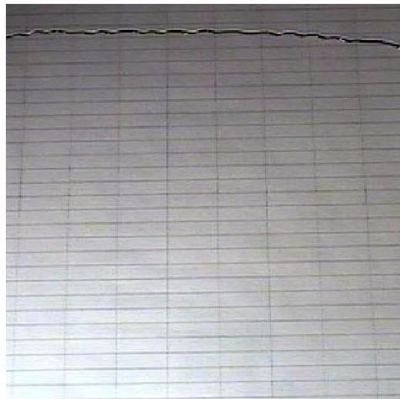
Osnovna rešitev + motnja

- ▶ $h(x, y, t) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, y, t), \quad \varepsilon \ll 1, \quad h_1 \sim h_0$
- ▶ Rešimo $h_0 \rightarrow$ enačba za h_1
- ▶ Razvoj po ε , obdržimo le do linearnega člena

Linearna enačba za h_1

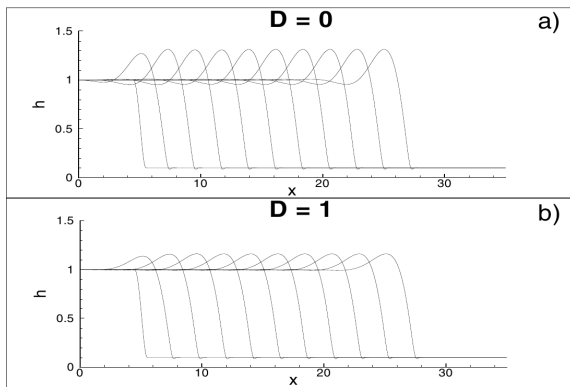
- ▶ Konstanti koeficienti $h_0 \Rightarrow$ eksponentne rešitve
- ▶ Sistem je stabilen, če je $\Re \sigma \leq 0$ za vse lastne vrednosti σ

Plast tekočine na klancu



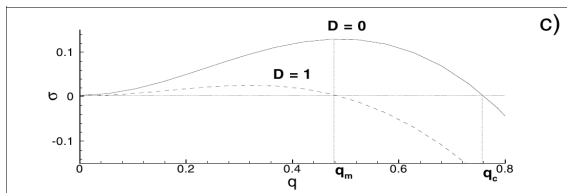
Osnovna rešitev

- ▶ Tekočina polzi po klancu z enakomerno hitrostjo
- ▶ Substitucija $\xi = x - Ut \Rightarrow h_0(\xi, y)$ je konstanta
- ▶ En parameter D : viskoznost \leftrightarrow površinska napetost



Nestabilnost

- ▶ h_1 zapišemo kot vsoto normalnih valovnih načinov
- ▶ Lastna vrednost σ odvisna od valovne dolžine motnje
- ▶ Valovna dolžina z največjo $\sigma \approx$ razmik med curki

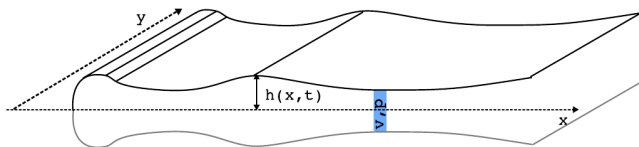


Razpad milnega mehurčka



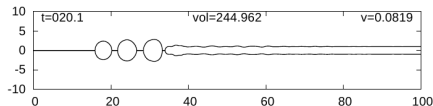
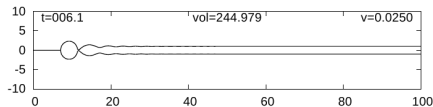
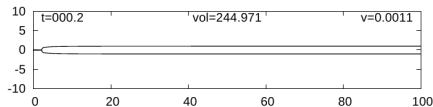
© Richard Heeks / Barcroft Media

Tanka opna



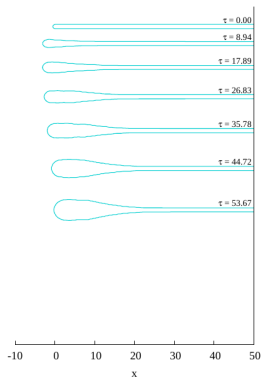
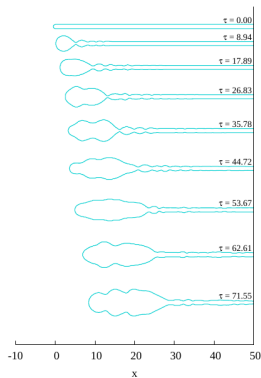
- ▶ Neuravnovešena površinska napetost
- ▶ Lubrikacijski približek
- ▶ Dve simetriji: y in $x - ct$
- ▶ Nestabilnost = razpad na kapljice
- ▶ Ključen parameter: viskoznost

Neviskozna opna



- ▶ Razpad simetrije v smeri $x \Rightarrow$ razpad opne v valje
- ▶ Valji naprej razpadejo v kapljice

Viskozna opna



- Počasnejše umikanje roba
- Opna ne razpade

Kraški žlebiči



Kraški žlebiči

Nastanek

- ▶ Na kraških pobočjih pod vplivom dežja
- ▶ Počasen proces, težko izvajati eksperimente
- ▶ Enačbe za tok tekočine sklopljen s kemijskimi enačbami za topljenje apnenca

Nestabilnost

- ▶ Neenakomernost v obliki površja
- ▶ Blagi žlebič se s časom pogloblja
- ▶ Zlom simetrije v vodoravni smeri

Zaključek

Hidrodinamika

- ▶ Navier-Stokesove enačbe
- ▶ Lubrikacijski približek
 $u \rightarrow h$

Naravni pojavi

- ▶ Tekočina na klancu
- ▶ Razpad tanke opne
- ▶ Kraško površje

Nestabilnost

- ▶ Občutljivost na majhne motnje
- ▶ Zlom simetrije
- ▶ Linearizirana enačba
- ▶ Lastne vrednosti linearnega operatorja