

# Stohastični populacijski modeli

Miha Čančula

4. januar 2012

## 1 Statistika časov izumrtja

Simuliral sem stohastično izumiranje populacije z dvema različnema modeloma

1. Eksponentno-padajoči model
2. Model z rojstvi in umiranjem

Časovne konstante sem izbral tako, da je v povprečju sprememba populacije enaka pri obeh modelih. Pri generiranju števila smrti in rojstev sem uporabil funkcijo `gsl_ran_poisson()`, ki vrne naključno število s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo.

Za vsak model sem izračunal verjetnostno porazdelitev časov izumrtja z različnimi časovnimi koraki, pri eksponentnem modelu pa sem za primerjavo dodal se rezultat računa s prehodno matriko. Vsakič sem naredil  $10^6$  ponovitev simulacije in iz dobljenih podatkov napravil statistiko.

### 1.1 Eksponentno umiranje

Ta model najbolje opisuje radioaktivne razpade jeder ali pa relaksacijo iz vzbujenega stanja atomov.

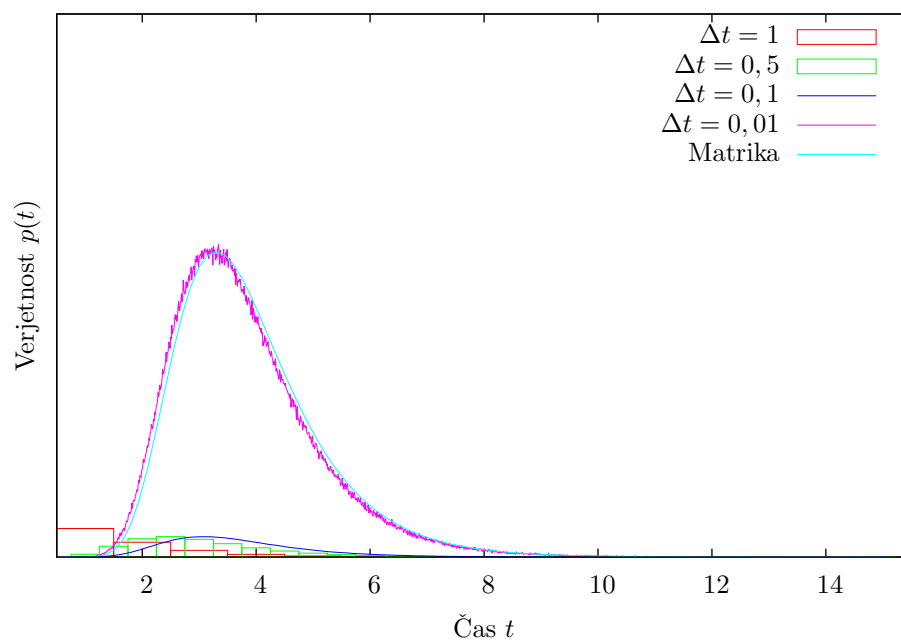
S slike razberemo, da velikost koraka vidno vpliva porazdelitev pri  $\Delta t \geq 0,1$ . Ko je korak dovolj majhen, da le zanemarljiv delež osebkov umre v vsakem koraku, z dodatnim manjšanjem ne pridobimo nič več na natančnosti. Podobno lahko zaključimo tudi, če začnemo v večjo populacijo. Vrh populacije se po pričakovanju premakne k daljšim časom, odvisnost od časovnega koraka pa je podobna kot prej.

Grafa sta si zelo podobna, spodnji je le premaknjena slika zgornjega. To je za pričakovati, saj zaradi eksponentnega upadanja pričakujemo logaritemsko odvisnost življenjskega časa od  $N$ .

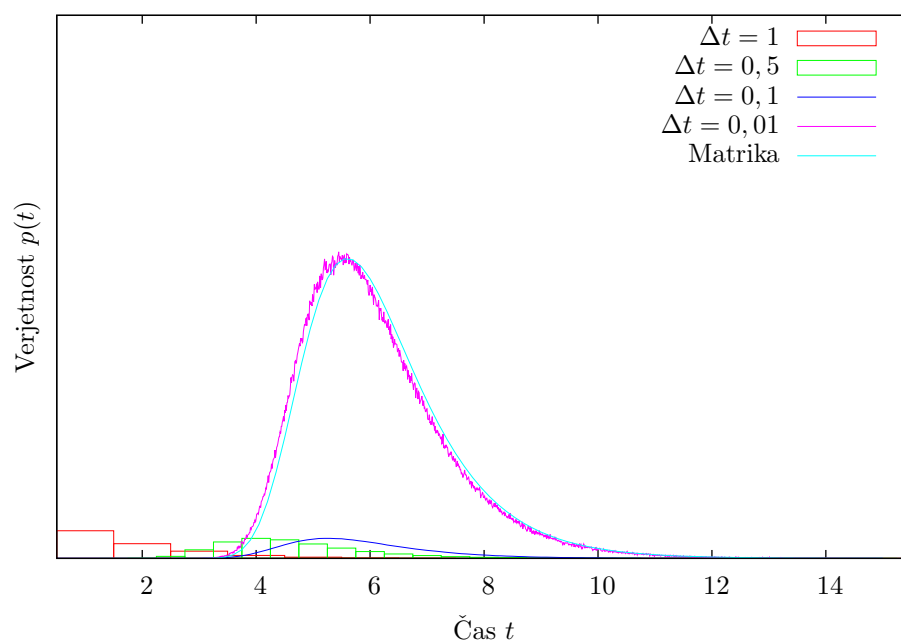
Vidimo tudi, da pri zelo velikih korakih ( $\Delta t \approx 1$ ) velikost populacije skoraj nič ne vpliva na čas izumrtja. V obeh primerih s približno polovično verjetnostjo pride do izumrtja že po prvem koraku, naprej pa verjetnost pada eksponentno. Pri krajših korakih, že pri  $\Delta t = 0,5$  pa opazimo vidno odvisnost od začetne velikosti populacije.

### 1.2 Rojstva in smrti

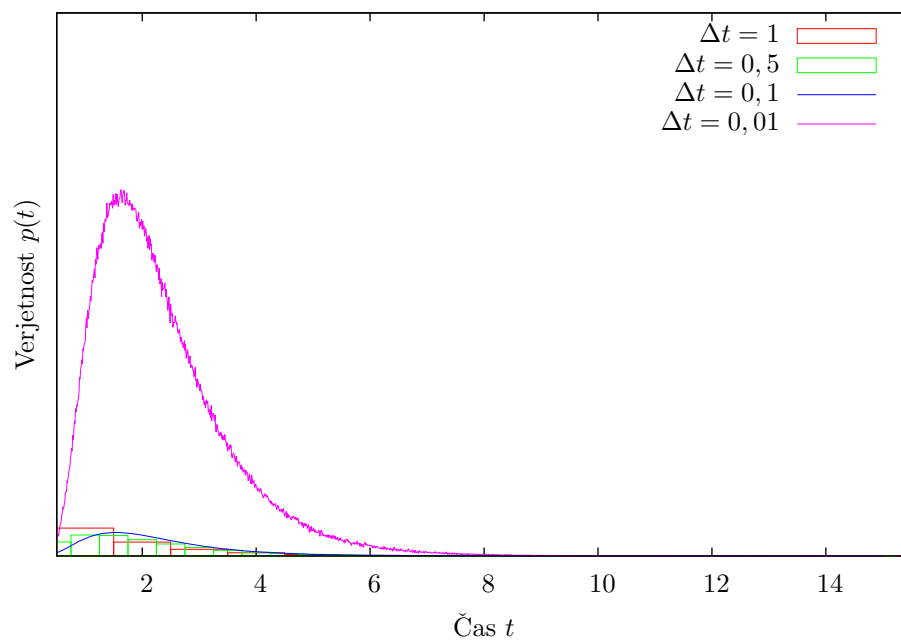
Podobno kot prej lahko tudi tu pridemo do opažanja, da pri  $\Delta t = 1$  velikost populacije ne vpliva močno na čas izumrtja, pri manjših korakih pa je statistika za večjo populacijo le premaknjena v desno.



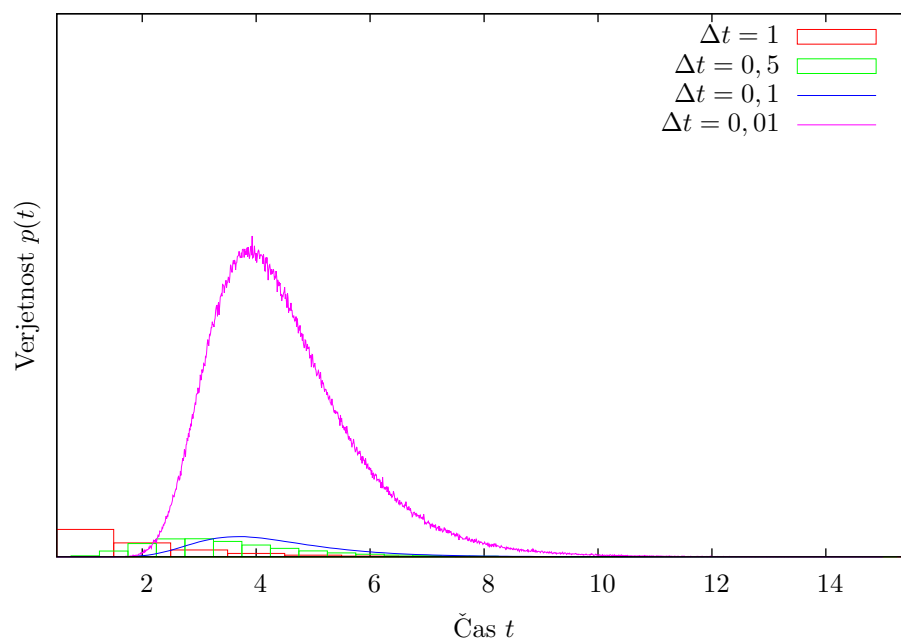
Slika 1: Eksponentni model,  $N = 25$



Slika 2: Eksponentni model,  $N = 250$



Slika 3: Rojstva in smrti,  $N = 25$



Slika 4: Rojstva in smrti,  $N = 250$

Če pa primerjamo zgorja grafa s tistimi iz prejšnjega poglavja pa vidimo, da proces z umiranjem in rojevanjem v povprečju vodi do hitrejšega izumrtja.

### 1.3 Statistika

S podatkov na zgornjih slikah sem izračunal povprečen čas izumrtja in njegovo standardno deviacijo. Dobljene vrednosti so v tabeli 1

Model	$N$	$\Delta t$	$\langle \tau \rangle$	$\sigma_\tau$
EkspONENTNI	25	1	1.7977	1.09922
		0.5	3.01617	1.26343
		0.1	3.67288	1.26503
		0.01	3.80141	1.26712
	250	1	1.85825	1.1505
		0.5	4.65363	1.27941
		0.1	5.83871	1.27863
		0.01	6.07588	1.28129
Rojstva in smrti	25	1	1.92274	1.30541
		0.5	2.02552	1.32143
		0.1	2.23531	1.1838
		0.01	2.32887	1.17102
	250	1	1.95215	1.32993
		0.5	3.46507	1.4197
		0.1	4.27771	1.2814
		0.01	4.48119	1.26931

Tabela 1: Povprečna vrednosti in standardna deviacija življenjskega časa sistema z različnimi modeli

## 2 Matrika prehodov

Verjetnost, da v določenem koraku umre  $n$  osebkov izračunamo po Poissonovi porazdelitvi:

$$\mathcal{P}(-n, \bar{n}) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (1)$$

Če imamo model, kjer se osebki rojevajo in umirajo, moramo upoštevati oba člena ločeno in sešteti po vseh kombinacijah, ki nam dajo enako spremembo populacije.

$$\mathcal{P}(n, \bar{n}) = \sum_{n_r - n_s = n} \mathcal{P}(n_r, \bar{n}_r) \mathcal{P}(n_s, \bar{n}_s) = \sum_{n_r - n_s = n} \frac{\bar{n}_r^{n_r}}{n_r!} e^{-\bar{n}_r} \frac{\bar{n}_s^{n_s}}{n_s!} e^{-\bar{n}_s} \quad (2)$$

Povprečno število umrlih oz. rojenih osebkov  $\bar{n}_i$  lahko izrazimo s parametrom  $\beta$ , velikostjo populacije in dolžino časovnega koraka

$$\bar{n}_i = \beta_i N \Delta t \quad (3)$$

Če vzamemo dovolj majhnen korak  $\Delta t$ , bo  $\bar{n}$  mnogo manjši od 1 in bodo verjetnosti za velike spremembe števila populacije majhne. V tem primeru lahko upoštevamo le člene z  $n = 0$  in  $n = \pm 1$ .

## 2.1 Paremetrizacija stanj

Stanje z velikostjo populacije  $N$  lahko zapišemo kot vektor  $\vec{v}$  z  $M + 1$  komponentami,  $M \geq N$ , ki ima vse  $N$ -to komponento enako 1, ostale pa 0. Pri tem smo morali postaviti zgornjo mejo za velikost populacije  $M$ , vektor pa ima še dodatno komponento za stanje s populacijo 0. Stanja, ki imajo le eno neničelno komponento, so čista stanja, zaradi stohastičnosti procesa pa po vsakem koraku dobimo mešano stanje, ki pomeni, da je velikost populacije porazdeljena po neki verjetnostni porazdelitvi.

Vsak časovni korak lahko predstavimo z opracijo, ki je linearna v  $v$ , torej jo lahko zapišemo kot matriko dimenzije  $M + 1 \times M + 1$ . Elementi te matrike so verjetnosti za prehod iz  $j$ -tega v  $i$ -to stanje

$$W_{i,j} = P(j \rightarrow i) = \mathcal{P}(j - i, \bar{n}(j)) \quad (4)$$

## 2.2 Eksponentni model

Pri tem modelu se osebki ne rojevajo, zato je velikost populacije monotono padajoča, torej bo matrika prehodov spodnje trikotna. Predpostavili smo, da je  $\Delta t$  tako majhen, da je  $\beta N \Delta t = \varepsilon \ll 1$

$$W_{i,j} = \mathcal{P}(j - i, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^{(j-i)}}{(j-i)!} e^{-\varepsilon} \quad (5)$$

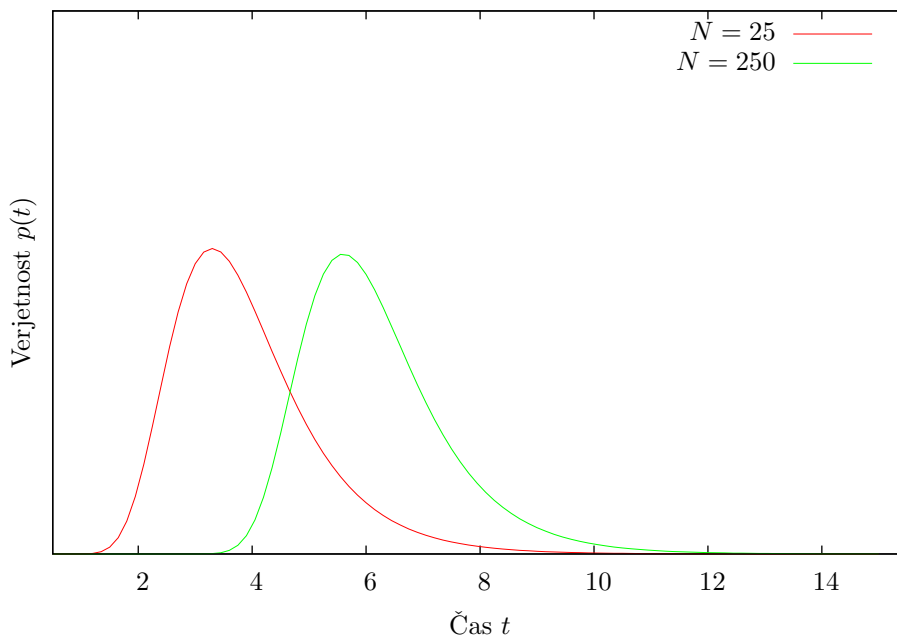
Ker je  $\varepsilon$  majhen, lahko člene z  $\varepsilon^2$  zanemarimo, tako da ostanejo le še elementi na diagonalni in tik pod njo

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1 - \beta j \Delta t, & i = j \\ \beta j \Delta t, & i = j - 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \quad (6)$$

## 2.3 Rojstva in smrti

Podobno kot prej zanemarimo verjetnosti, da se rodi ali umre več kot en osebek v vsakem časovnem koraku. Tudi v verjetnosti, da se en rodi in en umre, nastopa  $\varepsilon$  z drugo potenco, torej ga lahko zanemarimo. Ostanjejo nam le tri možnosti: eno rojstvo, ena smrt, ali pa ohranitev istega stanja. V primerjavi s prejšnjim izrazom moramo matriki dodati le še diagonalo nad glavno, ki dopušča rast populacije.

$$W_{i,j} = \begin{cases} \beta_r j \Delta t, & i = j + 1 \\ 1 - (\beta_r + \beta_s) j \Delta t, & i = j \\ \beta_s j \Delta t, & i = j - 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \quad (7)$$



Slika 5: Statistika časov izumrtja, dobljena z matriko prehodov. Primerjava z rezultati simulacije je na slikah v prvem poglavju.

## 2.4 Diferencialne enačbe

Ker matrika prehodov predstavlja en časovni korak simulacije, lahko z limitiranjem časovnega intervala pridemo do sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{\vec{v}} = W\vec{v} \quad (8)$$

Takšen sistem znamo rešiti, tako da poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike  $W$ .

## 2.5 Čas izumrtja

Za preprost eksponentni model lahko matriko zapišemo brez težav, saj je vsaka sprememba velikosti populacije možna le na en način, torej da neko število osebkov umre. Za statistiko časov izumrtja sem najprej izračunal matriko za nek majhen čas  $\Delta t$ , nato pa z njo množil trenutni vektor stanja iz ob vsakem koraku izračunal, za koliko se je povečala komponenta stanja s populacijo 0. Ta postopek je mnogo hitrejši od simulacije, saj lahko naprovimo statistiko le z eno ponovitvijo. Ker je treba matriko izračunati le enkrat, sem najprej izračunal matriko za majhen korak  $\Delta t$ , nato pa nadaljnje račune opravljal z neko potenco te matrike. Na ta način sem se lahko izognil prehitremu izumrtju, ki ga opazimo pri simulaciji s kratkim časovnim korakom, brez da bi moral žrtvovati hitrost računanja.

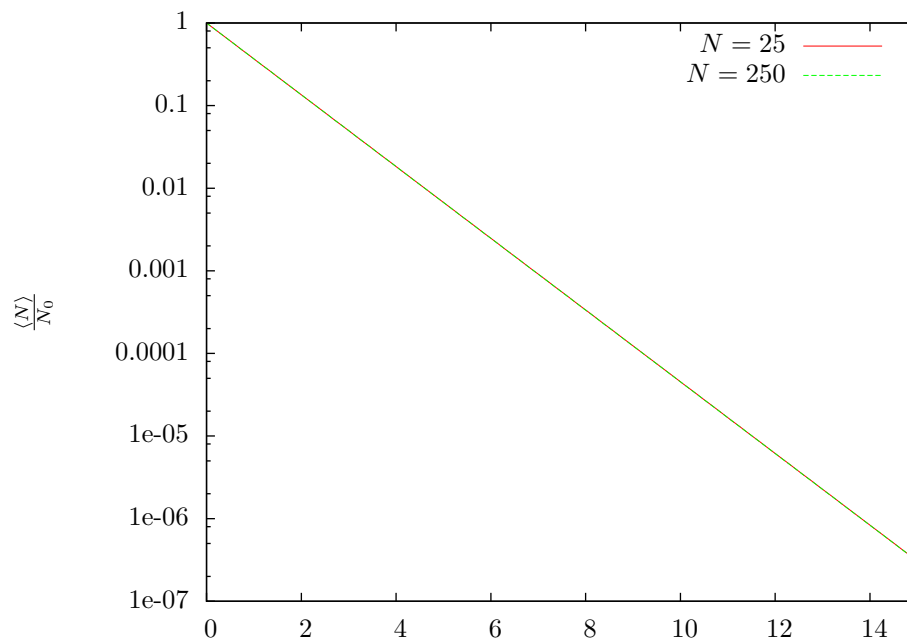
Rezultati matričnega računa za populaciji s 25 in 250 osebki so na sliki 5.

Pri modeliranju procesa z rojstvi in smrtmi pa se stvar zaplete zaradi dveh dejavnikov:

1. Možna so stanja, kjer populacija preseže začetno velikost
2. Določeno spremembo velikosti populacije  $\Delta N$  lahko dosežemo na več načinov

### 3 Povprečje in odmik porazdelitve

Z matričnim pristopom je enostavno izračunati tudi spreminjanje povprečno vrednost in standardno deviacijo velikosti populacije v odvisnosti od časa. Slika 6 potrdi naše pričakovanje, da populacija v povprečju eksponentno pada.



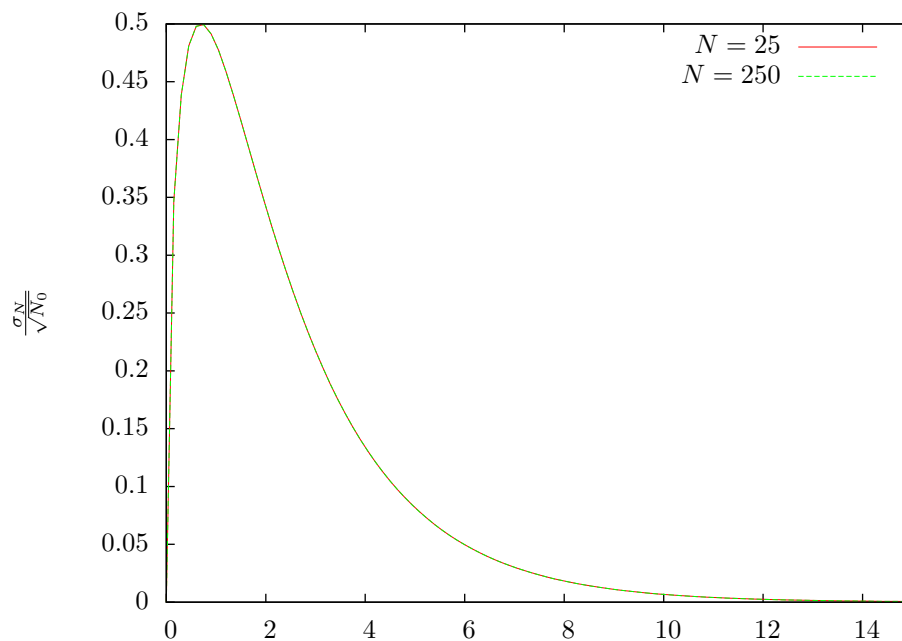
Slika 6: Spreminjanje povprečja porazdelitve s časom

Na grafu 7 pa vidimo, da po začetnem naraščanju tudi širina porazdelitve eksponentno pada.

Z obeh grafov je jasno razvidno, da velikost populacije nima nobenega vpliva na časovni potek njenega spreminjanja, le z ustreznimi konstantami moramo normirati grafa.

### 4 Zajci in lisice

Z enakim pristopom kot eksponentnega izumiranja sem se lotil tudi problema zajcev in lisic. V teoretičnem zveznem primeru bi moral biti ta sistem obstojen, tako da do izumrtja ne bi prišlo. Če pa upoštevamo diskretno število osebkov in stohastičnost procesa, pa do izumrtja vsaj ene izmed vrst vedno pride.



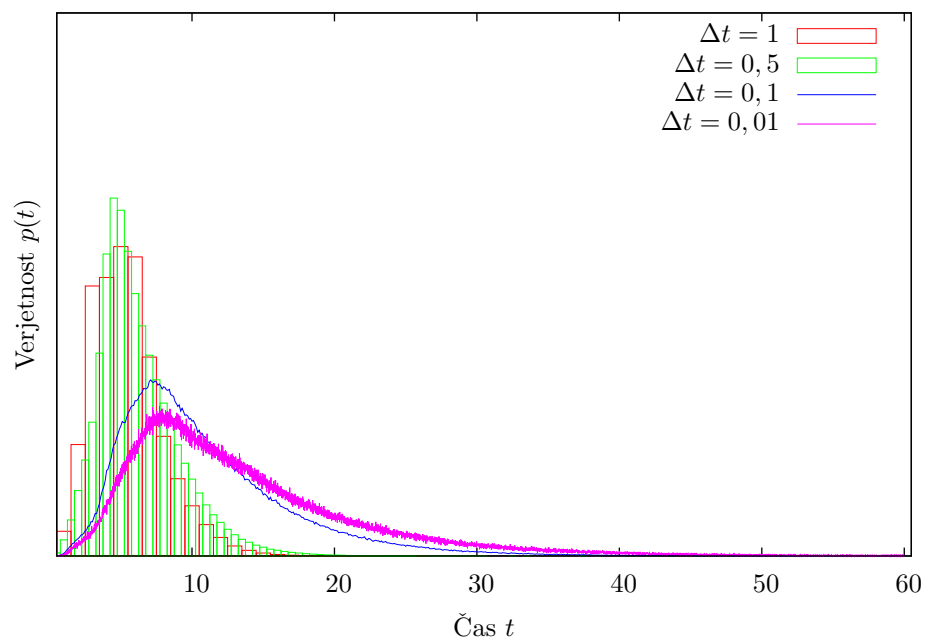
Slika 7: Spreminjanje standardne deviacije porazdelitve s časom

Če najprej izumrejo zajci, bodo za njimi tudi lisice, saj jim primanjkuje hrane. Če pa najprej izumrejo lisice, pa so bodo zajci eksponentno namnožili, saj njihove hrane nismo upoštevali v enačbah. Da bi se izognil temu primeru sem simulacijo ustavil takoj, ko je izumrla vsaj ena izmed obeh vrst.

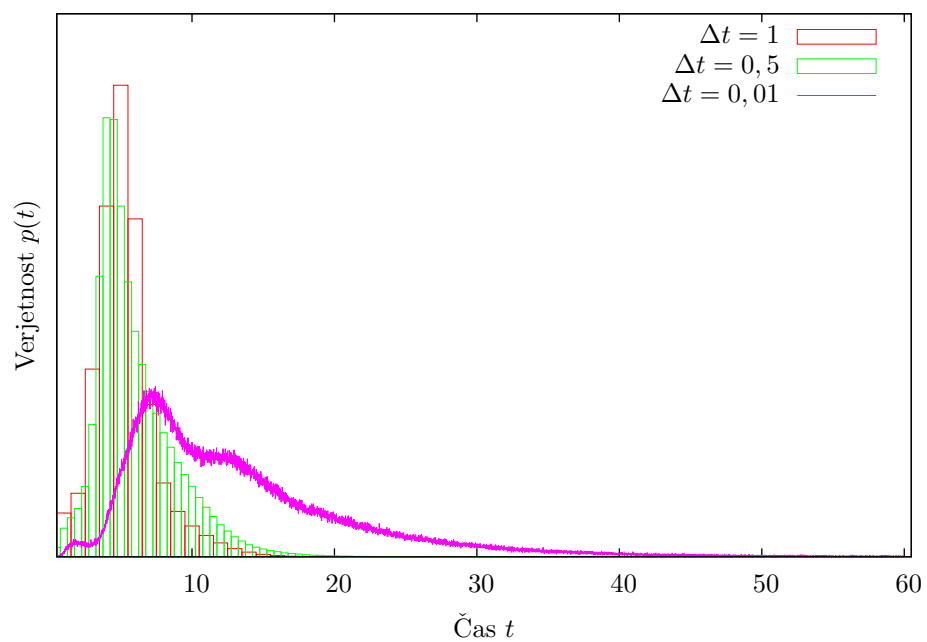
Tudi tu sem izračunal verjetnostno porazdelitev časov izumrtja.

Ogledal sem si še primer, ko začnemo v legi, ki tudi v zveznem primeru ni ravnovesna. V tem primeru pričakujemo hitrejše izumrtje.

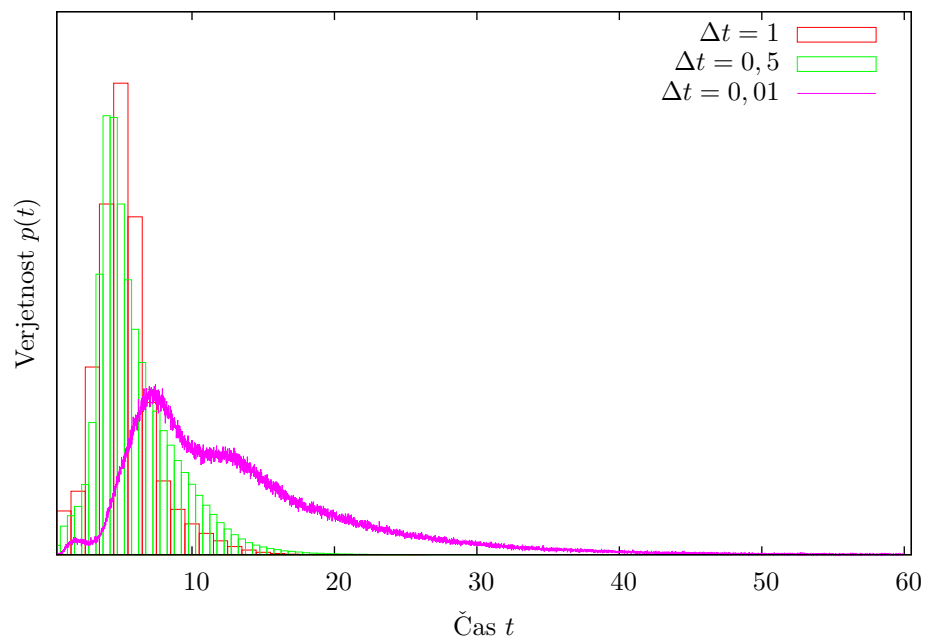




Slika 8: Zajlci in lisice,  $Z = 200$ ,  $L = 50$



Slika 9: Zajlci in lisice,  $Z = 200$ ,  $L = 40$



Slika 10: Zajlci in lisice,  $Z = 200$ ,  $L = 60$