

# Metoda končnih elementov: Poissonova enačba

Miha Čančula

12. april 2012

## 1 Postopek reševanja

### 1.1 Diskretizacija

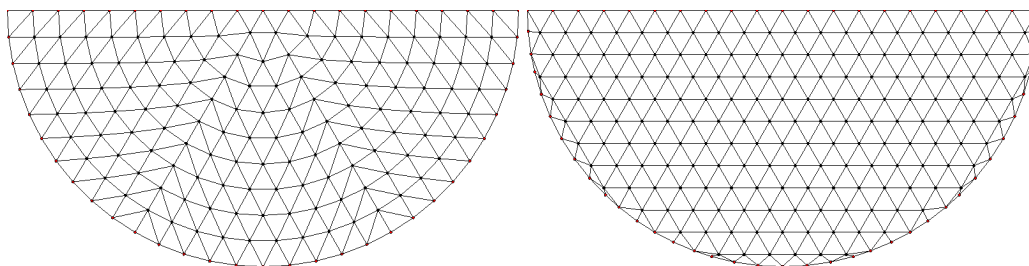
Prednost metode končnih elementov je v tem, da lahko prostor razdelimo na trikotnike s poljubnim tlakovanjem. Za čim boljšo natančnost metode je koristno, da so trikotniki približno enakostranični in enake velikosti.

#### 1.1.1 Polkrog

V polkrožni geometriji sem se temu poskušal približati na dva načina:

1. Središčno tlakovanje, pri polkrog razdelimo na kolobarje, nato pa vsak kolobar posebej tlakujemo s trikotniki.
2. Heksagonalno tlakovanje, kjer je notranjost polkroga tlakovana s pravilno mrežo, le na robu so popravki da se približamo polkrožni obliki.

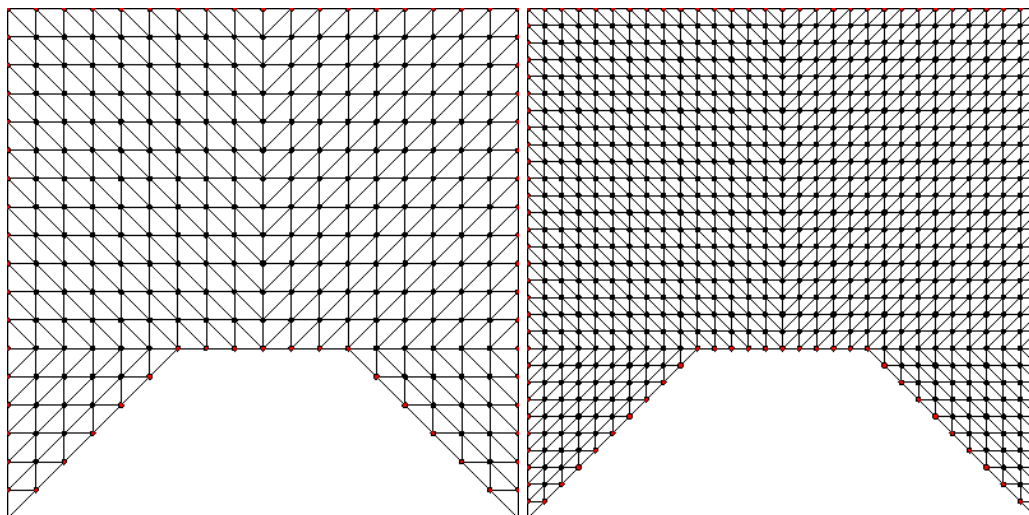
Za najtežji del naloge se je izkazalo iskanje povezav med točkami. Izbrana metoda namreč zahteva tlakovanje s samimi trikotniki, tako da moramo preprečiti križanje povezav, pa tudi povezane štirikotnike. Pri obeh izbranih metoda se izkaže, da je za dovolj grobe diskretizacije uporaben pristop, ko točke povezujemo med seboj le na podlagi medsebojne razdalje. Mejna razdalja mora biti nekje med  $a$  in  $a\sqrt{2}$ , kjer je  $a$  tipična razdalja med točkami.



Slika 1: Obe različni diskretizaciji preseka polkrožne cevi

#### 1.1.2 Izsekan kvadrat

Tlakovanje cevi iz 5. naloge je bilo lažje, saj tu nimamo okroglih oblik. Delo sem si dodatno poenostavil s tem, da nisem uporabil enakostraničnih trikotnikov, ampak enakokrake pravokotne (torej polovico kvadrata). Na ta način sem žrtvoval nekaj natančnosti, saj je hipotenuza daljša od stranice v enakostraničnem trikotniku z enako ploščino. Takšno tlakovanje pa omogoča enostavno pokritje ostrih izsekanih vogalov cevi, hkrati pa se izogne tudi mrtvim trikotnikom v pravokotnih vogalih.



Slika 2: Diskretizacija cevi s presekom v obliki izrezanega kvadrata pri različnem številu točk

Prednost takšnega tlakovanja v primerjavi s polkrožno cevjo je pri iskanju povezav. Povezave med točkami kvadratne cevi sem lahko povezal po nekem pravilu, brez da bi računal medsebojne razdalje.

## 1.2 Reševanje matričnega sistema

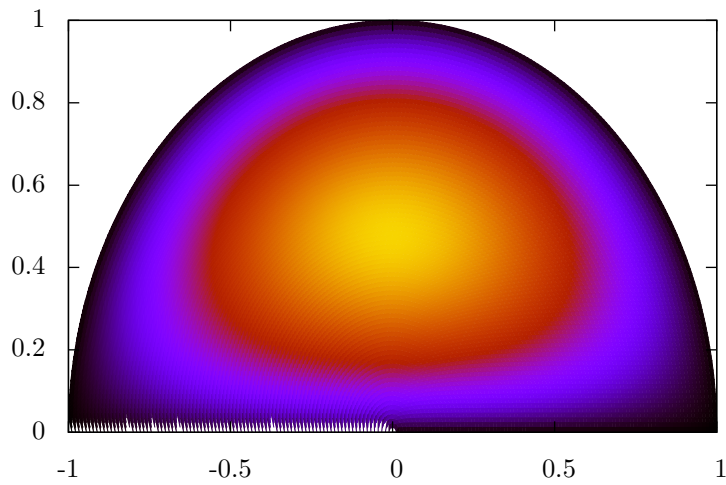
Naslednji korak po določitvi položaja točk in povezav med njimi je priprava matričnega sistema za reševanje. Pri tem nastopajo skalarni produkti konstantnih funkcij in pa ploščine trikotnikov. To lahko izračunamo s preprostimi formulami, ki so napisane tudi v navodilih. Geometrijo moramo upoštevati le še za določitev, katere točke so na robu, nato pa jo lahko pozabimo.

Pozornost pa je treba posvetiti še robnim pogojem. Računamo vrednost funkcije  $u$  le v točkah, ki niso na robu območja, saj imamo robni pogoj že podan. Notranjim točkam sem priredil vrstico, podano z elementi in desno stranjo kot so opisani v navodilih. Vrstice, ki pripadajo robnim točkam, pa so imele le diagonalni element neničeln, pripadajočo desno stran pa 0. S je bila matrika  $A$  večja, kot je nujno potrebno, kar seveda pomeni počasnejše računanje. Ker pa je matrika  $A$  redka in se za reševanje matričnega sistema uporabil knjižnico za redke matrike `cholmod`, se dodatek majhnega števila diagonalnih členov ni močno poznal.

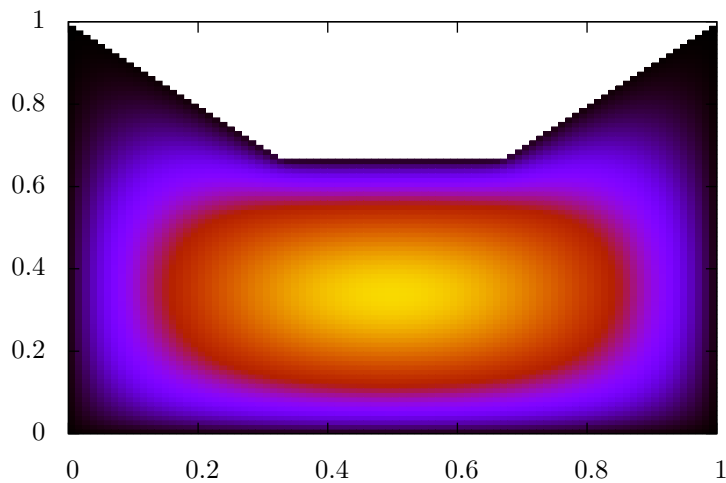
V času okrog ene minute mi je uspelo rešiti primer z nekaj več kot 10000 točk.

## 2 Rešitve

Rezultat metode FEM je težko prikazati kot 3D graf, saj točke niso enakomerno porazdeljene po ravnini  $xy$ . Zaradi pomanjkanja časa sem jih vseeno narisal kar v Gnuplotu. Na grafih sicer ne vidimo posameznih trikotnikov, pa tudi robovi so prikazani nekoliko nerodno, sama oblika rešitve pa je vseeno jasna. Zaradi drugačnega vrstnega reda točk mi ni uspelo jasno prikazati profila s heksagonalno delitvijo, sem pa preveril da je na pogled zelo podoben tistemu na Sliki 3.



Slika 3: Profil hitrosti v polkrožni cevi, središčna diskretizacija



Slika 4: Profil hitrosti v cevi z obliko izrezanega kvadrata

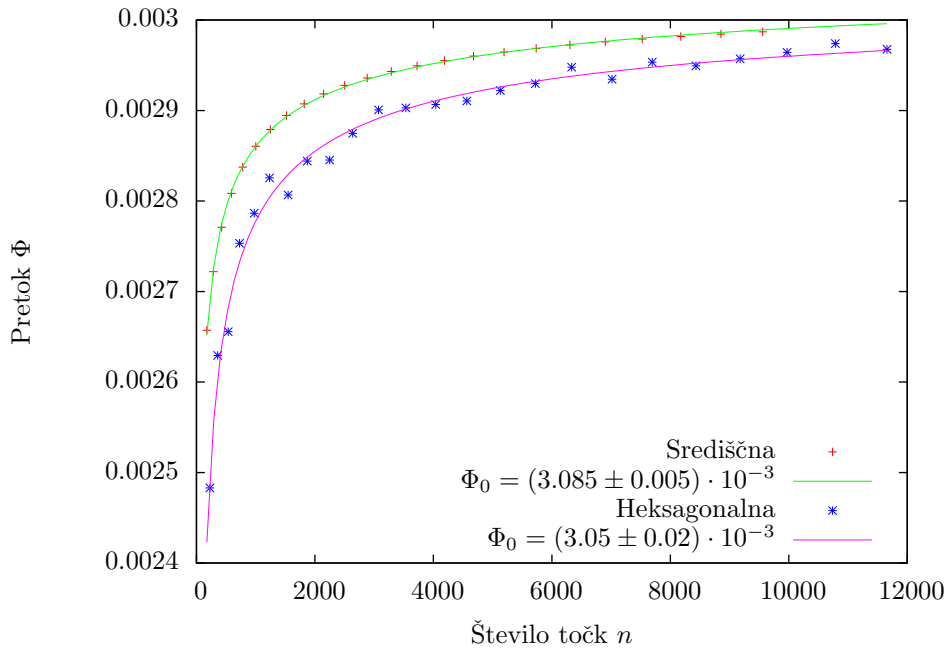
### 3 Pretok po cevi

Končno sem izračunal še pretok tekočine po cevi z izbranim profilom. Ker trikotniki nimajo enakih ploščin, je tudi teža vsakega izračunanega koeficienta različna. Pretok, ki pripada točki  $i$ , sem izrazil kot produkt vrednosti  $w_i$  in tretjine ploščin vseh trikotnikov, ki mejijo na to točko. Tretjina nastopa z enakim razlogom kot pri vektorju desnih strani, ker je  $1/3$  integral linearne funkcije po

trikotniku. Zaradi te lastnosti lahko pretok po cevi hitro izračunamo kot skalarni produkt  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$ .

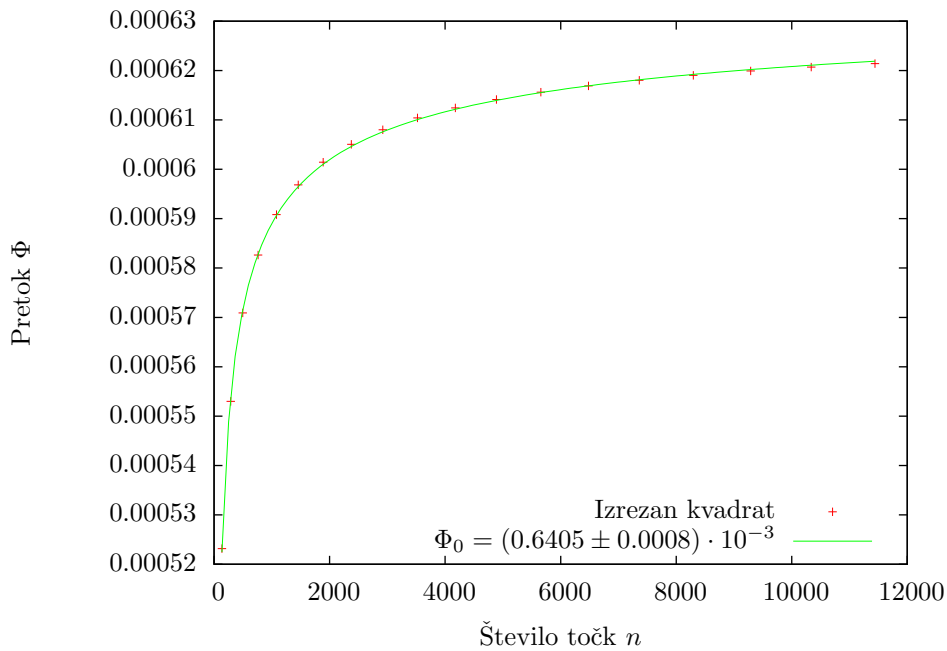
Pri izbiri matričnih elementov, kot so opisani v navodilih, pa maksimum rešitve in s tem tudi pretok narašča linearno s številom točk. Zato sem povsod risal količino

$$\Phi = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle}{n} \quad (1)$$



Slika 5: Pretok po polkrožni cevi, diskretizirani na oba načina

Opazimo razliko med obema pristopoma za diskretizacijo polkrožne cevi. Za boljšo se izkaže razdelitev na kolobarje, saj da višjo vrednost pretoka, hkrati se pa tudi bolje prilagaja modelu potenčne konvergence. Pri heksagonalni razdelitvi opazimo skoke, ki so verjetno posledica neenakomerne velikosti trikotnikov na robu.



Slika 6: Pretok po cevi v obliki izrezanega kvadrata

Prave vrednost, ki je limita pri  $n \rightarrow \infty$ , seveda ne moremo izračunati na ta način, lahko pa jo ocenimo. Pri tem nam pomaga dejstvo, da ocena za  $\Phi$  monotonno narašča s številom točk  $n$ . Privzel sem potenčno konvergenco in izračunanim vrednostim priredil funkcijo

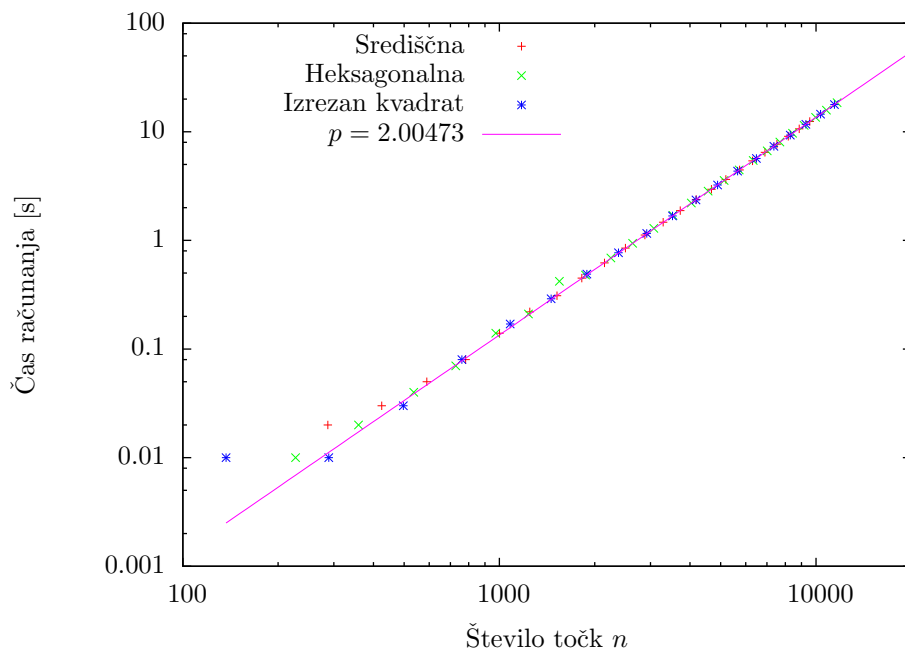
$$\Phi(n) = \Phi_0 - \alpha \cdot n^{-\beta} \quad (2)$$

Optimalno vrednost parametra  $\Phi_0$  je ocena za pretočnost cevi, potenca  $\beta$  pa stopnja konvergenca. Pri vseh treh izračunih je optimalna vrednost  $\beta$  med 0.4 in 0.5, torej nenatančnost pada približno s korenem števila točk. Konvergenca je očitno precej počasna, kar potrjujejo tudi izračuni, saj tudi pri več kot 10000 točkah pretok še vedno vztrajno narašča.

Pri reševanju pete naloge s pospešeno relaksacijo sem dobil rezultat  $\Phi_{SOR} \approx 0.01631$ . Domnevam, da je odstopanje posledica zgoraj opisane normalizacije pretoka (moral sem deliti z  $n$ ), pri čemer nastopa še neznana multiplikativna konstanta. V primeru izrezane kvadratne cevi sem dobil pretok, ki je premajhen približno za faktor 5/2.

## 4 Hitrost reševanja

Meril sem tudi čas, ki ga algoritem porabi za reševanje problema



Slika 7: Čas izvajanja programa

Z grafa lahko vidimo, da čas izvajanja ni odvisen od geometrije problema ali izbire diskretizacije, le od števila točk. V vseh treh izbranih diskretizacijah čas računanja narašča z drugo potenco  $n$ , torej je algoritem reda  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Pri majhnem številu točk je račun s kvadratno cevjo hitrejši, ker sem se lahko izognil računanju razdalj med vsemi točkami. Pri dovolj velikem  $n$  pa razlika ni več vidna, graf pa se močno približa premici.