

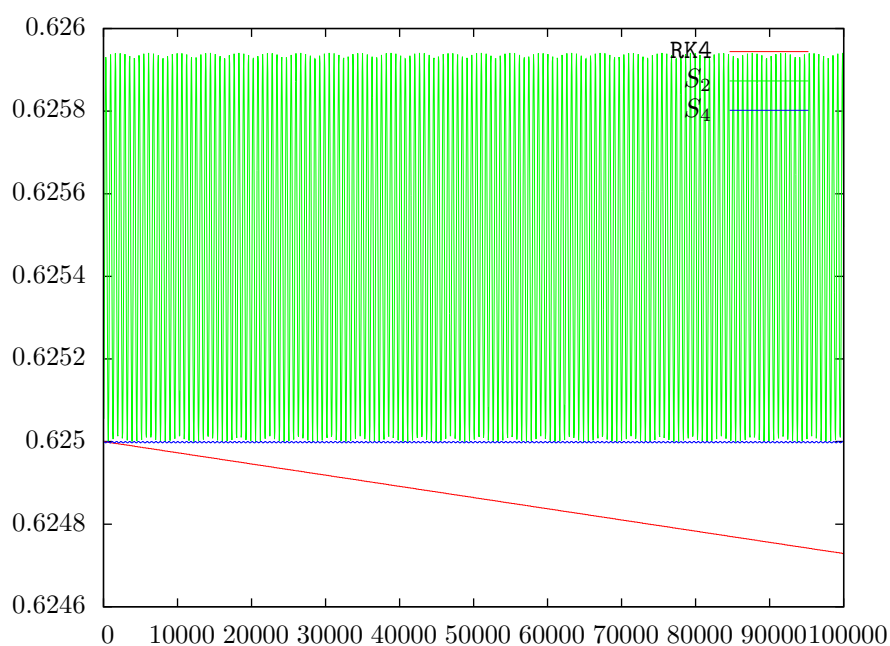
# Trotter-Suzukijev razcep, simplektična integracija

Miha Čančula

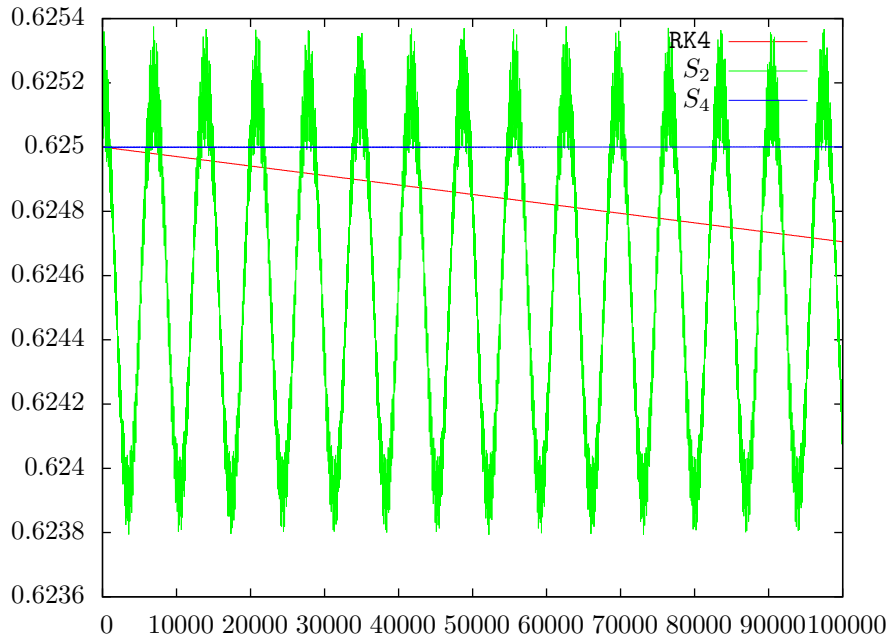
18. marec 2013

## 1 Ohranitev energije

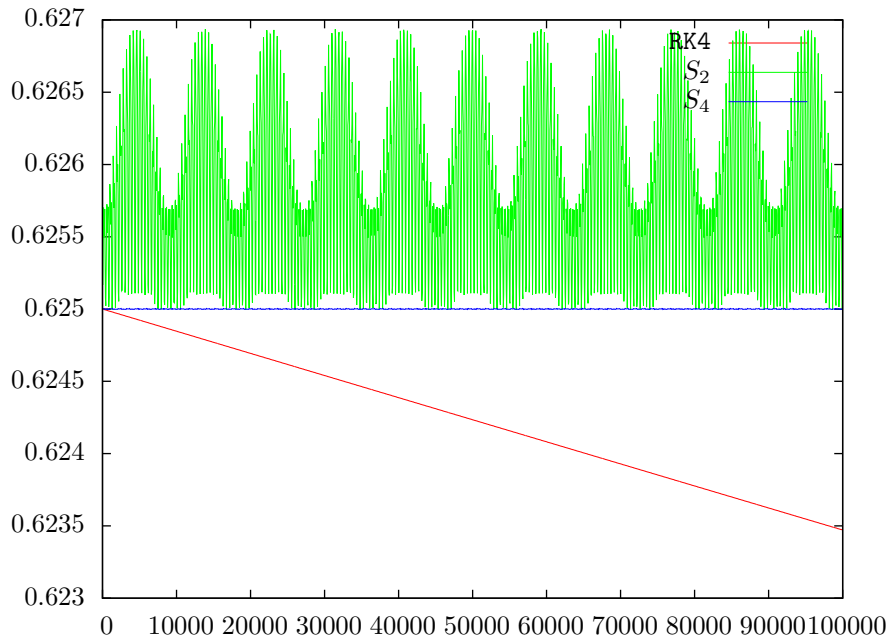
Implementiral sem integrator, ki za časovni korak uporablja Trotter-Suzukijev razcep. Izbral sem dve shemi, in sicer simetrični  $S_2$  in  $S_4$ . Za primerjavo sem dodal še znano metodo RK4. V preizkusu sem za vse tri metode nastavil enako in nespremenljivo dolžino koraka.



Slika 1: Ohranitev energije v sistemu z  $\lambda = 0$



Slika 2: Ohranitev energije v sistemu z  $\lambda = 0.1$



Slika 3: Ohranitev energije v sistemu z  $\lambda = 1$

Energijo najboljše ohranja metoda s simplektičnim integratorjem s shemo  $S_4$ . Pri uporabljeni računalniški natančnosti sploh ne opazimo odstopanj od začetne vrednosti. Pri ostalih dveh metodah se energija spreminja s časom, je pa med njima pomembna razlika. S simplektično metodo s shemo  $S_2$  energija le niha, medtem ko ne njena povprečna vrednost ne spreminja. Pri metodi Runge-Kutta pa vidimo jasen trend, ki je še izrazitejši pri večjih vrednostih  $\lambda$ .

Simplektične metode kažejo veliko prednost pred metodo Runge-Kutta pri dolgih časih integriranja in močnim odstopanjem od harmonskega potenciala.

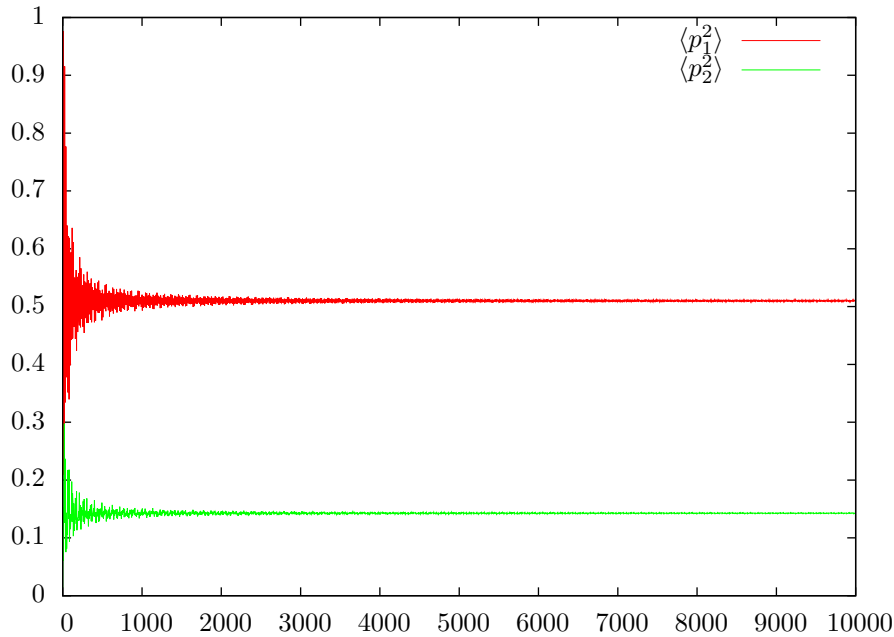
## 2 Ekvipartijski izrek

Preverjal sem tudi veljavnost ekvipartijskega izreka. Do ekvipartije naj bi prišlo, če je sistem ergodičen oz. kaotičen. V primeru dvodimenzionalnega anharmonskega oscilatorja ekvipartija pomeni, da je približno enako energije v nihanji v  $x$  smeri kot v  $y$  smeri, seveda le v časovnem povprečju po dolgem času. Izbral sem začetni pogoj, kjer to ne drži, in opazoval, po kolikšnem času se bo vzpostavila enakost energij.

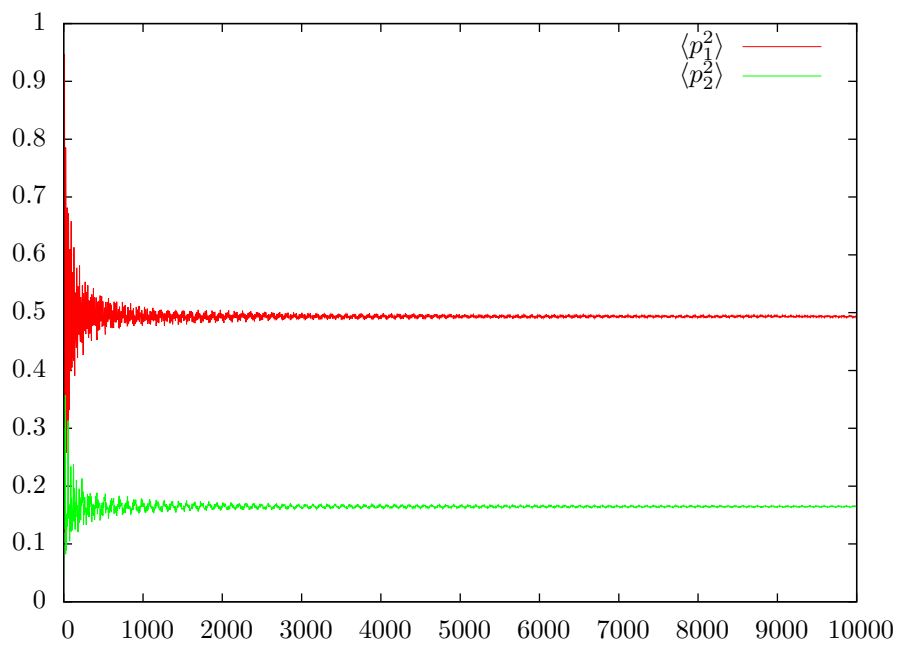
Kot kvantitativno merilo za ekvipartijo sem uporabil izraz v navodilih

$$\langle p_i^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_i^2(t) dt \quad (1)$$

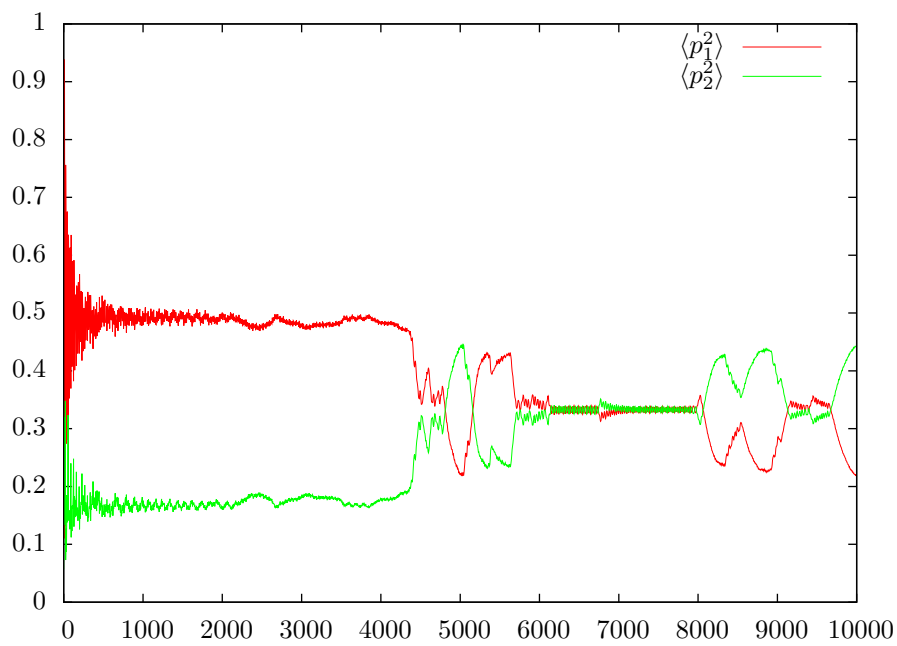
V primeru, da je sistem kaotičen, se morata izraza  $\langle p_x^2 \rangle$  in  $\langle p_y^2 \rangle$  po dovolj dolgem času izenačiti.



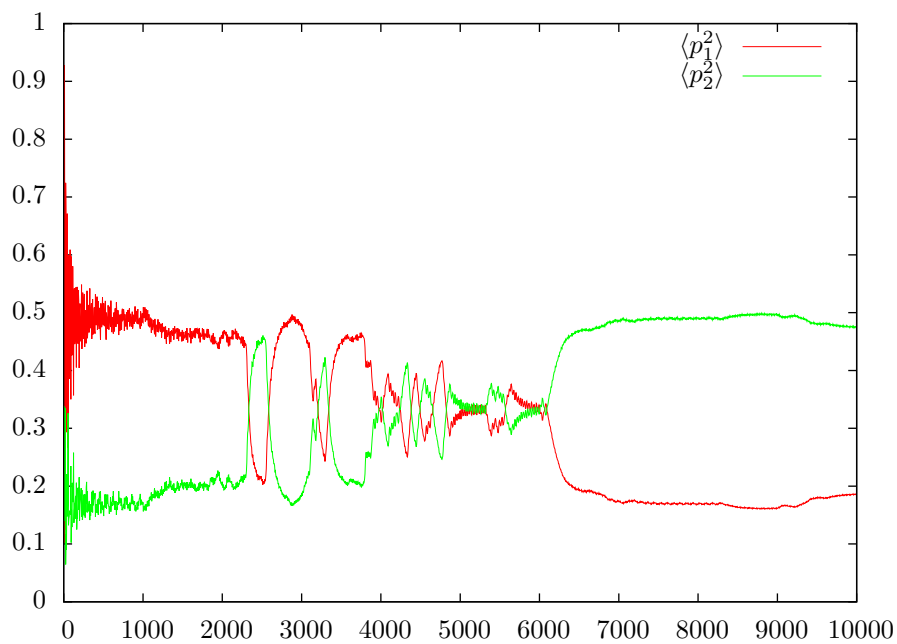
Slika 4: Ekviparticija v sistemu z  $\lambda = 1$



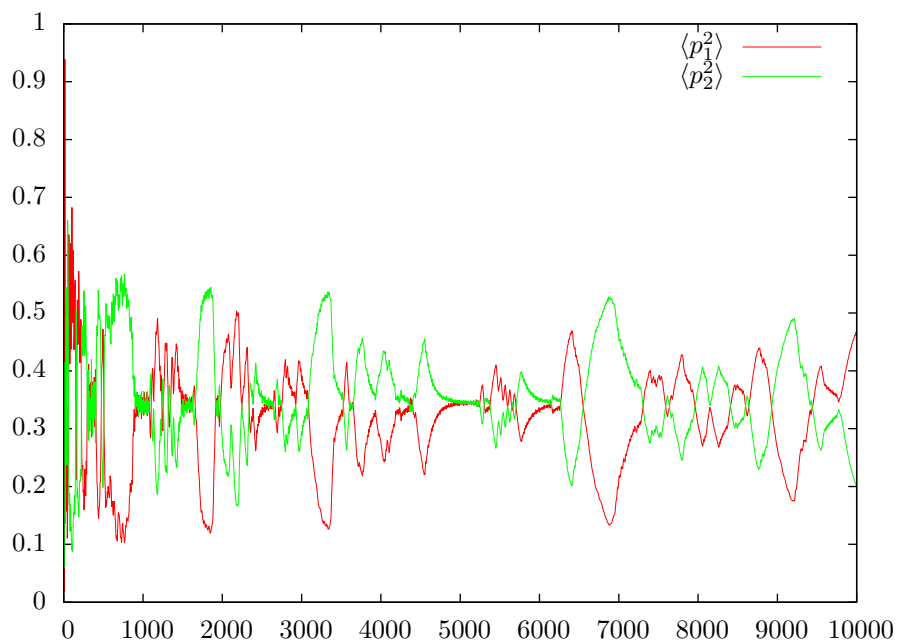
Slika 5: Ekviparticija v sistemu z  $\lambda = 1.16$



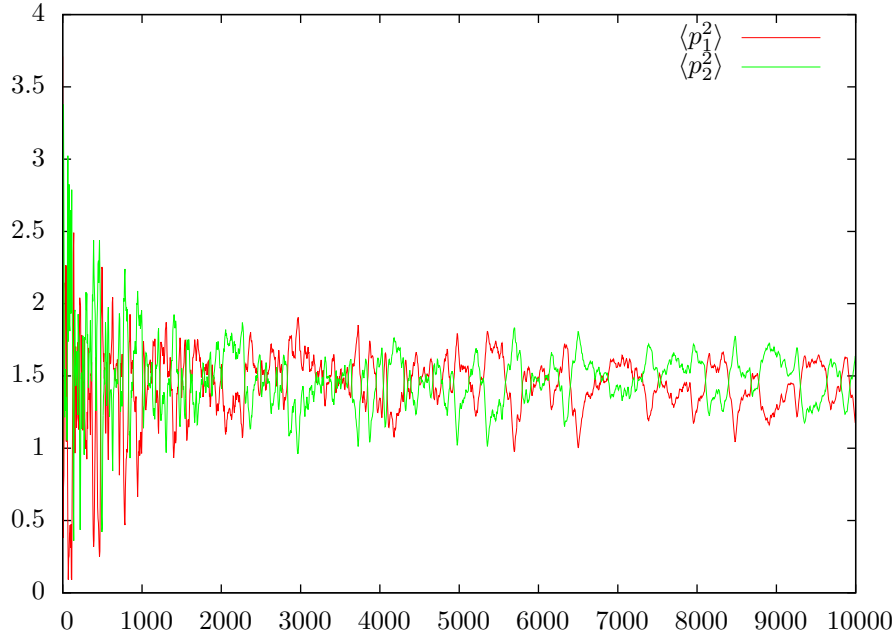
Slika 6: Ekviparticija v sistemu z  $\lambda = 1.18$



Slika 7: Ekviparticija v sistemu z  $\lambda = 1.20$



Slika 8: Ekviparticija v sistemu z  $\lambda = 2$



Slika 9: Ekviparticija v sistemu z  $\lambda = 10$

Za lažjo primerjavo sem začetni pogoj vedno postavil na  $(x, y, p_x, p_y) = (0, 1/2, 1, 0)$ . S takšno izbiro dobimo ostro spremembo dinamike v bližini  $\lambda_c = 1.18$ . Pod to mejo (sliki 4 in 5) vrednosti  $\langle p_i^2 \rangle$  sicer oscilirata, ampak njuni dolgoročni povprečji konvergirata k različnima vrednostma. Ko vrednost  $\lambda$  preseže mejo, postane dinamika kaotična, obe povprečji še močnejše oscilirata, vendar sedaj obe povprečji oscilirata okrog iste vrednosti (sliki 8 in 9). V tem primeru lahko rečemo, da imamo ekviparticijo, saj je v vsakem izmed 1D nihanj enako energije. V bližini meje, torej okrog  $\lambda = 1.2$  (sliki 6 in 7), opazimo nekako začasno ekviparticijo. Nekaj časa se sistem obnaša integrabilno, tako da sta povprečji močno različni, nekaj časa pa kaotično. Z nadaljnjim zviševanjem  $\lambda$  je sistem vse bolj kaotičen.

S spreminjanjem začetnega pogoja se spremeni tudi mejna vrednost  $\lambda_c$ . Pri povečevanju  $p_x$  ta meja pada, tako da z začetnim pogojem  $p_x = 2$  pade pod 1. Iz ostrine prehoda med nekaotično in kaotično dinamiko, ter iz odvisnosti prehoda od začetnega pogoja sklepam, da je v vsakem primeru del faznega prostora regularen, del pa kaotičen. Ko sistem enkrat zaide v kaotični del, pride do ekviparticije. V bližini meje se lahko zgodi, da sistem začasno preide iz kaotičnega dela nazaj v integrabilni del, kjer se povprečji razlikujeta. Po pričakovanju je ob večanju parametra  $\lambda$  delež kaotičnega faznega prostora vedno večji, in na neki točki ta delež zajame naš začetni pogoj.