

Parcialne diferencialne enačbe

Robni problemi, relaksacija

Miha Čančula

5. april 2012

1 Postopek reševanja

Geometrije nalogo sem približal z diskretno mrežo z N točkami na vsakem robu. Poljubno stanje opne je tedaj vektor dimenzije N^2 , operator ∇^2 pa je predstavljen z matriko A dimenzije $N^2 \times N^2$. Diskretizacijo sem izbral tako, da so bile skrajne točke za polovico koraka oddaljene od fiksnega roba opne. Na ta način je bila matrika A simetrična.

Kvadrati lastnih frekvenc so lastne vrednosti matrike A , nihajni načini pa ustrezni lastni vektorji. V prvem delu, ko sem obravnaval opno z neenakomerno maso, sem reševal posplošen problem lastnih vrednosti $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{u}$. Vse izračune sem izvedel v programu Octave s pomočjo funkcije `eigs`, ki uporablja Fortranovo knjižnico `ARPACK`. Ta knjižnica omogoča učinkovito reševanje problemov lastnih vrednosti velikih strukturiranih matrik. Matriki A in B sta zelo prazni, zato sem zanj uporabil ustrezno redko (*sparse*) predstavitev. Kljub temu mi je uspelo rešiti problem v doglednem času le do $N = 64$.

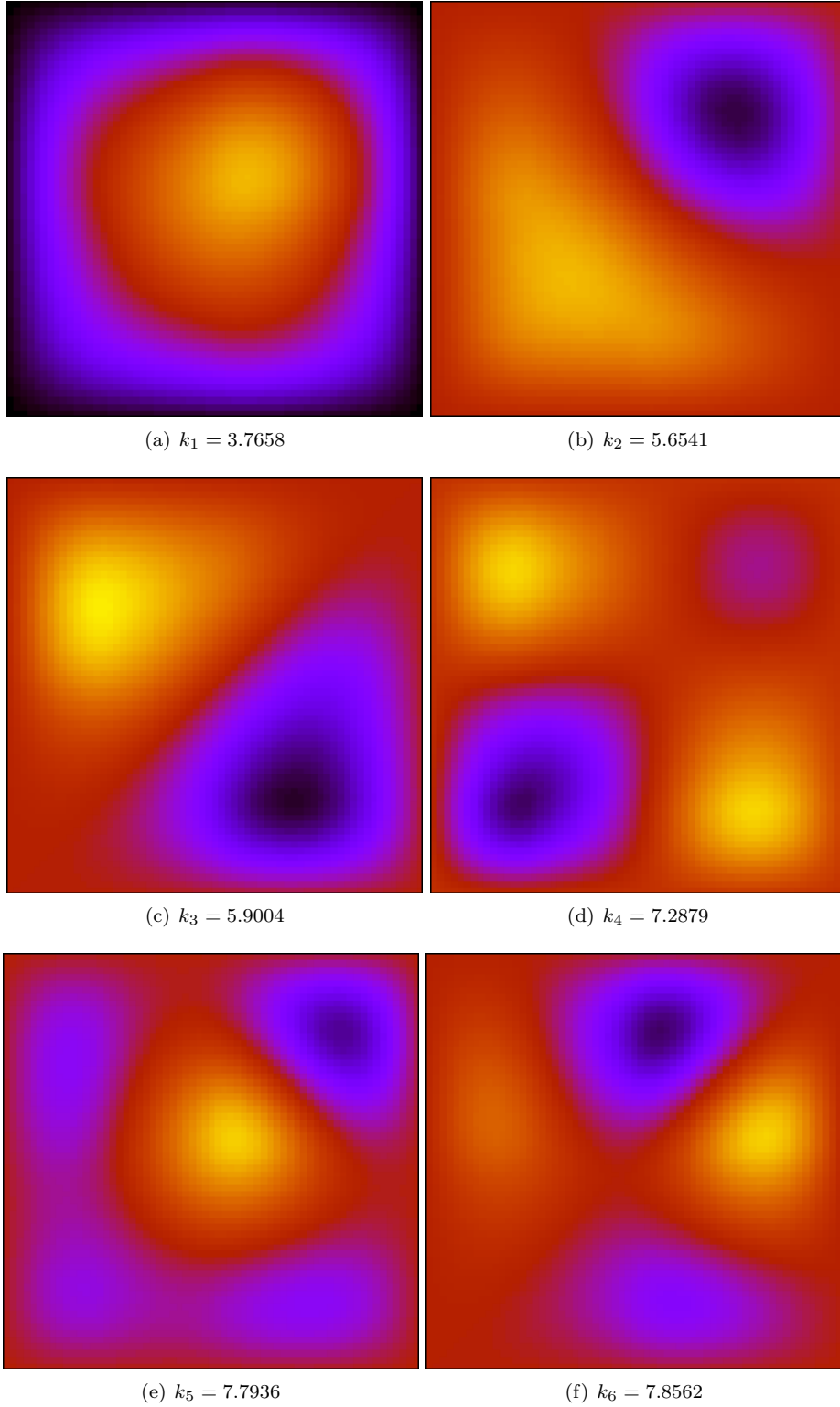
Za obe geometriji in različne porazdelitve gostote opne sem izračunal lastno frekvenco $k_i = \sqrt{-\lambda_i}$ in nihajni način, ki je lastni vektor \mathbf{u} . Namesto operatorja ∇^2 sem v matrični obliki zapisal $A = -h^2\nabla^2$, zato sem moral lastne vrednosti pomnožiti še s številom točk po enem robu, $k_i = N\sqrt{\lambda_i}$.

2 Neenakomerna kvadratna opna

Opno sem orientiral enako kot na sliki v navodilih, tako da je križ spodaj levo. Primerjal sem nekaj najnižjih lastnih nihanj opne pri različnih razmerjih gostote v krizu ρ_+ in na robu ρ . Same lastne frekvence oz. velikosti valovnih vektorjem nimajo neposrednega pomena, saj so odvisni od gostote opne. Za lažjo primerjavo sem se držal notacije v navodilih, tako da je bila $\rho_+ = 1$, gostoto na robu pa sem spreminjal.

Najprej sem izračunal primer, ko je opna v vogalih odebeljena do dvojne površinske gostote. Rezultati so na sliki 1. Ze na prvi sliki vidimo, da opna niha z večjo amplitudo v zgornjem desnem delu, torej v predelu z večjo gostoto. To je za pričakovati, saj potrebujemo večjo ukrivljenost $\nabla^2 u$ da uravnovesimo večjo maso.

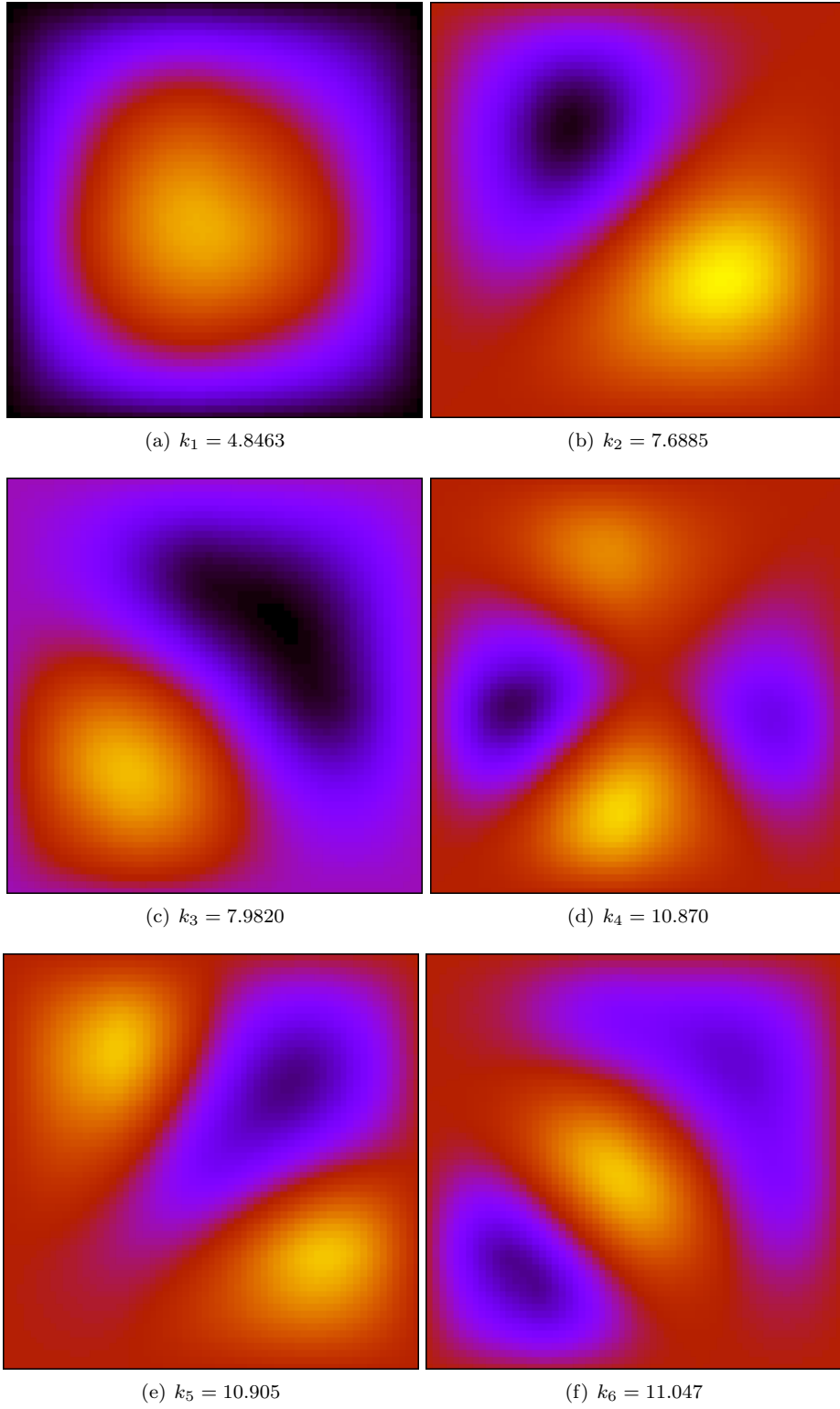
Naslednja tri nihanja imajo hrbte v dveh ali vseh štirih vogalih. Neenakomernost opne poruši rotacijsko simetrijo in povzroči, da imata prvi dve vzbujeno nihanji (b in c) rahlo različni frekvenci. Peto in šesto lastno nihanje sta že bolj zapleteni in ju iz same geometrije opne ne bi znal napovedati.



Slika 1: Prvih 6 nihajnih načinov kvadratne opne z $\rho = 2\rho_+$.

Ogledal sem si tudi dogajanje, ko ima opna v vogalih manjšo gostoto, kar je prikazano na sliki 2. Prva tri nihanja so pričakovana in približno zrcalna nihanjem na prejšnji sliki. Osnovno nihanje ima sedaj hrbet pomaknjen proti spodnjem levemu vogalu, kjer je gostota večja. Drugi dve nihanji sta zamenjali vlogi, sedaj ima nižjo frekvenco nihanje s hrbti levo zgoraj in desno spodaj. Četrta

nihanji vzorec je podoben šestemu na zgornji sliki, ostala dva pa sta nova. Zaradi manjše skupne mase so frekvence v povprečju višje.



Slika 2: Prvih 6 nihajnih načinov kvadratne opne z $\rho = \rho_+/2$.

Dodatno večanje razmerja gostot opne spremeni lastne frekvence, saj se spremeni povprečna

masa opne. Na obliko valovnih načinov, zlasti najnižjih, pa tudi velika sprememba gostote nima velikega vpliva. Zato sem prikazal le dve možnosti s kvalitativno različnima gostotama, ki pa vidno spremenita valovne načine.

3 Polkrožna opna

Za obravnavo nihanj na polkrožni opni sem prešel v polarni koordinati sistem. V tem zapisu se ∇^2 zapiše kot

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (1)$$

Ker je r med 0 in 1, φ pa med 0 in π , sem uporabil različno število točk in različen korak diskretizacije v vsaki smeri. Koraka sta določena z zvezama $h_r = 1/N_r$ in $h_\varphi = \pi/N_\varphi$, iz česar sledi njuno razmerje

$$h_\varphi = h_r \cdot \frac{\pi N_r}{N_\varphi} = h_r \sqrt{c} \quad (2)$$

Pri tem smo vpeljali konstanto c , ki nastopa v diskretizaciji operatorja ∇^2 . Najprej izraz na desni strani enačbe (1) zapišemo v diskretni obliki:

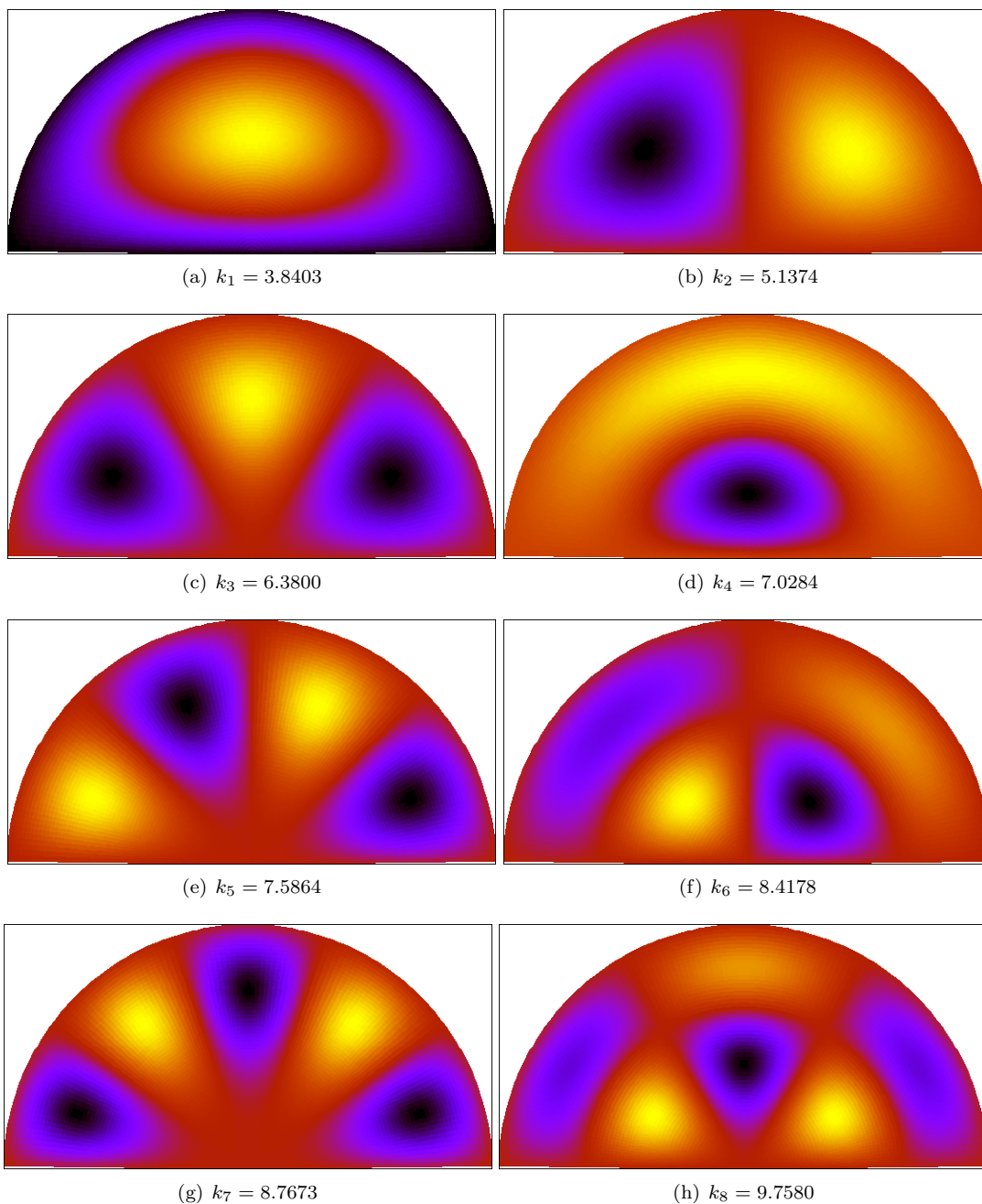
$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2r_i h} + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}}{r_i^2 \cdot c h^2} \quad (3)$$

$$-h^2 \nabla^2 u_{i,j} = \left(2 + \frac{2/c}{r_i^2} \right) u_{i,j} - \left(1 - \frac{1}{2r_i} \right) u_{i-1,j} - \left(1 + \frac{1}{2r_i} \right) u_{i+1,j} - \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{c r_i^2} \quad (4)$$

Ker sem izbral točke diskretne mreže tako, da je robna točka od roba opne oddaljena $h/2$, moram ustrezno določiti tudi radij $r_i = (i + 1/2) \cdot h$. S tem je zgornji izraz pripravljen, da ga vstavim v matriko. Vsakemu paru (i, j) pripada en indeks v matriki, koeficienti v zgornji enačbi pa postanejo neničelni elementi matrike v vrstici, ki pripada temu paru.

V tem primeru rašujemo problem pravih lastnih vrednosti $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, zaradi česar je algoritem hitrejši. Dobre rezultate sem dobil z izbiro $N_r = 64$, $N_\varphi = 2N_r = 128$.

Tokrat ima opna enakomerno gostoto, zato so nihajni načini manj zanimivi. Prvih osem sem narisal na sliki 3.



Slika 3: Prvih 6 nihajnih načinov polkrožne opne.

V enačbi $\nabla^2 u = k^2 u$ lahko ločimo spremenljivke in zapišemo $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$. Rešitve kotnega dela so tedaj harmonične funkcije $\Phi(\varphi) = \sin(m\varphi)$, $m \in \mathbb{N}$, rešitve radialnega pa Besselova funkcija $R(r) = J_m(kr)$. Zaradi robnega pogoja prve vrste $R(1) = 0$ je k je ravno ničla m -te Besselove funkcije. Ker imajo te funkcije po več ničel, vpeljemo indeks ničle n , ki predstavlja število valov v radialni smeri. Numerično izračunane vrednosti se dobro ujemajo z vrednostmi v tabelah.

i	Izračunan k_i	m	n	Tabeliran k_{mn}
1	3.8403	1	1	3.8317
2	5.1374	2	1	5.1356
3	6.3800	3	1	6.3802
4	7.0284	1	2	7.0156
5	7.5864	4	1	7.5883
6	8.4178	2	2	8.4172
7	8.7673	5	1	8.7715
8	9.7580	3	2	9.7610

Tabela 1: Izračunane in tabelirane ničle Besselovih funkcij

Z napovedjo se ujemajo tako vrednosti za k kot tudi sami nihajni načini, saj ima način (m, n) m polperiod v smeri φ in n polperiod v smeri r .