Direktno reševanje Poissonove enačbe

Miha Čančula

15. maj 2012

1 Kvadratna opna

Najprej sem na primeru kvadratne, enakomerno obtežene opne preverjal učinkovitost treh metod:

SOR Pospešeno relaksacijo smo uporabljali že pri eni izmed prejšnjih nalog, zato sem lahko uporabil kar isti algoritem.

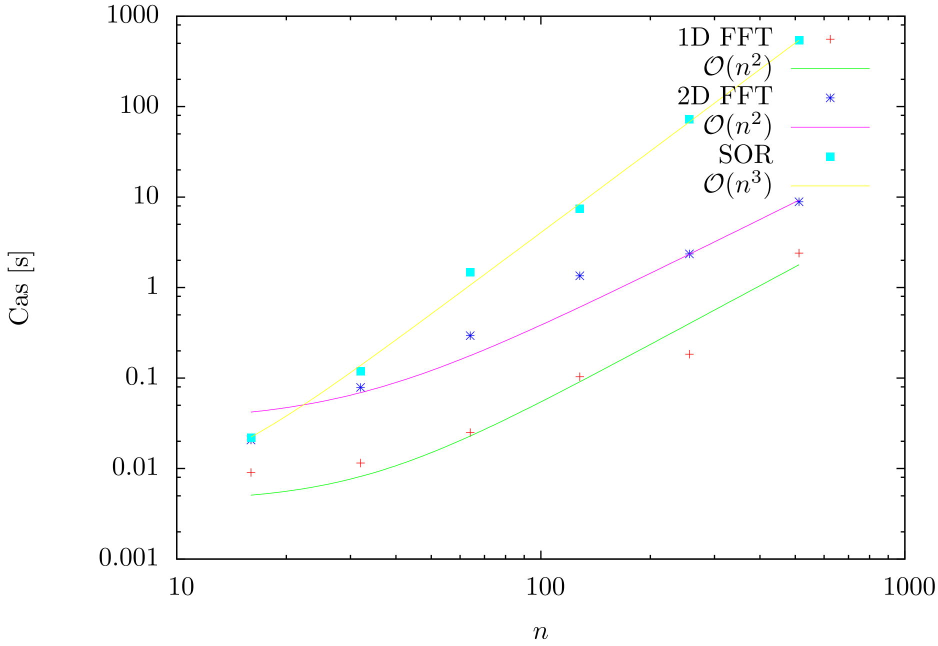
1D FFT Opno sem preslikal v frekvenčni prostor le po eni dimenziji, v drugi dimenziji pa sem nastavil in rešil tridiagonalni matrični sistem v vsaki vrstici.

2D FFT Najenostavnejša med uporabljenimi metodami pa je bila dvodimenzionalna Fourierova transformacija. Tu sem uporabil FFT v obeh dimenzijah, koeficiente delil s primernim faktorjem in tako rešil enačbo, nato pa spet uporabil dvodimenzionalno inverzno transformacijo.

Za čimbolj nepristransko primerjavo sem vse tri algoritme implementiral v jeziku Octave. Ker je ta jezik interpretiran, sem se izogibal zankam. Za Fourierovo transformacijo sem uporabil vgrajene rutine, reševanje diferencialne enačbe v eni dimenziji in relaksacijo pa sem prevedel na operacije z redkimi matrikami.

1.1 Hitrost

Najprej sem primerjal hitrost različnih algoritmov. FFT in reševanje 1D diferencialne enačbe sta direktna postopka, kjer je natančnost odvisna le od diskretizacije oz. od števila točk. Pri relaksaciji pa sem moral določiti še pogoj, kdaj ustaviti računanje. Izbral sem enakega kot pri nalogi 205, torej sem račun ustavil, ko je vsota kvadratov popravkov v enem koraku padla pod fiksno mejo 10^{-8}.

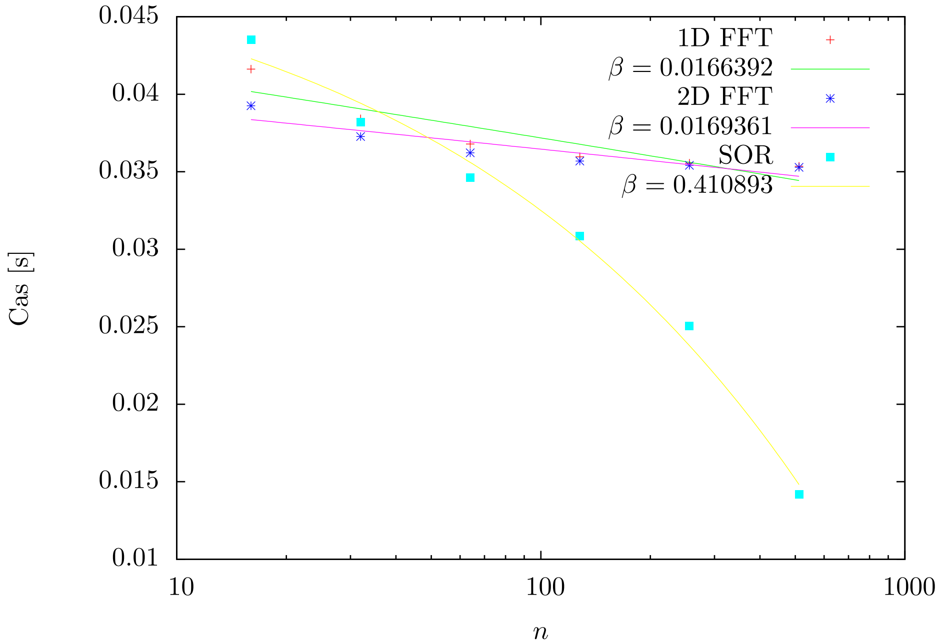


Slika 1: Časovna zahtevnost uporabljenih algoritmov

1.2 Natančnost

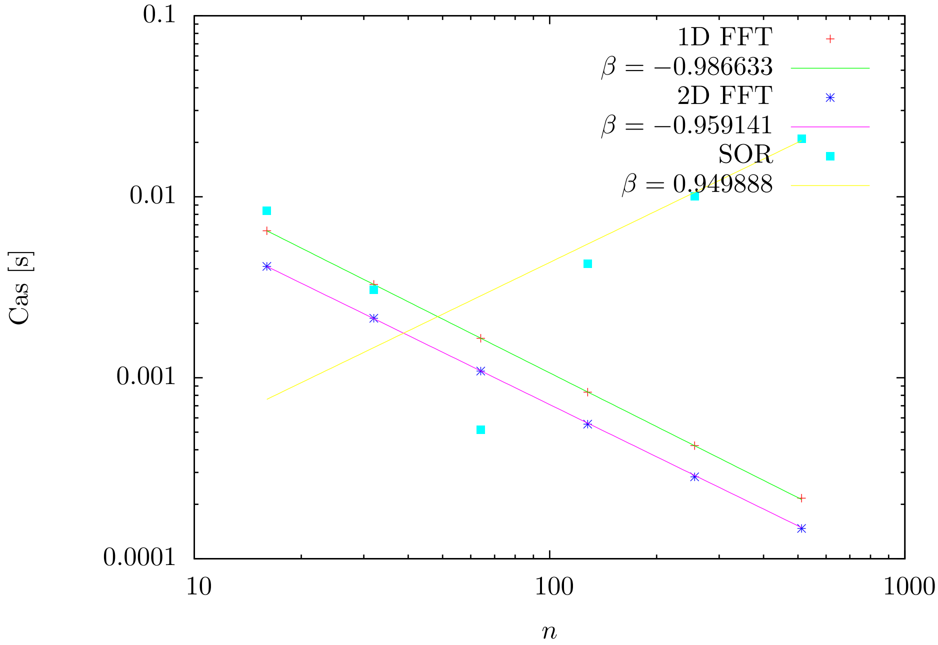
Časovna odvisnost od števila točk nam nič ne pove, če ne vemo kakšno natančnost lahko pričakujemo. Zato sem opazoval tudi hitrost konvergence posameznih metod.

Problem enakomerno obtežene opne ima rezultat, ki je skalarna spremenljivka in je enak povprečnemu povesu opne. Enaka Poissonova enačba opisuje tudi tok tekočine po cevi, kjer ima ta rezultat bolj nazoren fizikalen pomen skupnega pretoka po cevi. Na grafu 2 sem prikazal, kako se ta pretok približuje končni vrednosti, ko povečujemo število točk.



Slika 2: Konvergenca skupnega pretoka po cevi

Za kvadratno cev poznamo tudi točno rešitev, ki znaša $\Phi_{\square} \approx 0.0351342$. Natančnost metod torej bolj vidimo na logaritemskem grafu napake 3.



Slika 3: Napaka skupnega pretoka po cevi