Potovanje sonde med planeti

Miha Čančula

17. september 2012

1 Zapis problema

1.1 Newtonov zakon

Sonda se po sončnem sistemu giblje, kot to določa Newtonov zakon

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m_s} \tag{1}$$

Nanjo delujejo tri sile, to so gravitacijski privlaki sonca in obeh planetov.

$$\mathbf{F} = Gm_s \left(\frac{-M\mathbf{r}}{r^3} + \frac{m(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3} + \frac{m(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^3} \right)$$

Masa sonde se po pričakovanju krajša, ostanejo pa nam še gravitacijska konstanta in mase vseh treh nebesnih teles. Poznamo pa tudi gibanje planetov, saj krožita okrog zvezde. Njun radialni pospešek je enak

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} = -\omega^2 \mathbf{r}_i = GM \frac{-\mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{2}$$

Imamo torej zvezo med maso sonca M, gravitacijsko konstanto G, polmerom orbite planeta r_i (i je 1 ali 2) in frekvenco kroženja ω.

1.2 Število parametrov

Konstanta G nastopa povsod kot multiplikativna konstanta k drugemu časovnemu odvodu. Izbira njene vrednosti je zato enakovredna izbiri časovne skale $t \to t/\sqrt{G}$. Enak učinek ima povečanje ali zmanjšanje mase sonca in planetov za enak faktor. Vrednosti za G in M lahko torej postavimo na 1, namesto mase planeta m pa računamo z razmerjem $\mu = m/M$. Enačbo gibanja planetov rešimo enostavno, tako da zanemarimo medsebojni vpliv in privzamemo krožno gibanje. Iz zveze (2) izrazimo krožno frekvenco kot $\omega^2 = 1/r^3$.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu \frac{\mathbf{r_1} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r}|^3} + \mu \frac{\mathbf{r_2} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r}|^3} \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_i(t) = \omega_i^{-2/3} \left[\cos(\omega_i t + \varphi_i), \sin(\omega_i t + \varphi_i)\right]^T \tag{4}$$

V nalogi je podano razmerje polmerov orbit obeh planetov $r_2 = 2r_i$. Po drugem Keplerjevem zakonu lahko to pretvorimo v razmerje krožnih frekvenc

$$\omega_1 = \sqrt{8}\omega_2 \approx 2.828\omega_2$$

Nazadnje preverimo še, ali lahko določimo tudi vrednosti za r_1 in r_2. Če vse razdalje povečamo za faktor k, se krožni frekvenci pomnožita s $\sqrt{k^{-3}}$, sile na sondo s k^{-2}. Če spet reskaliramo časovno skalo kot $t \to t\sqrt{k^3}$, se vsi pospeški množijo s $k \cdot \sqrt{k^{-3}} \cdot \sqrt{k^{-3}} = k^{-2}$, kar se ujema z izrazom za silo. Torej oblika rešitve ni odvisna od prostorske skale, in lahko postavimo $r_1 = 1$ in $\omega_1 = 1$. Očitno je, da problem ni odvisen od orientacije koordinatnega sistema, zato lahko enega izmed kotov φ_i, na primer φ_1, postavimo na 0.

$$\mathbf{r}_1(t) = [\cos t, \sin t]^T \tag{5}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = 1/\sqrt{8}\left[\cos(\sqrt{8}t+\delta), \sin(\sqrt{8}t+\delta)\right]^T \tag{6}$$

V sistemu enačb sta ostala le še dva neodvisna parametra: relativna masa obeh planetov μ in fazni zamik med orbitama δ. Ostale količine so določene s Keplerjevim zakonov in z izbiro časovne skale.

1.3 Robni pogoji

Koordinatni sistem postavimo tako, da je sonce v središču. Ob času $t = 0$ lahko brez izgube splošnosti privzamemo, da se prvi (notranji) planet nahaja na osi x, torej je njegov kot v polarnih koordinatah enak 0. Za drugi planet tega ne moremo privzeti, saj ima lahko fazni zamik δ. Oba planeta se gibljeta po krožnih orbitah, torej lahko njun položaj po poljubnem času v polarnih koordinatah zapišemo kot

$$\mathbf{r}_1(t) = (r_1, t) \tag{7}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (r_2, \sqrt{8}t+\delta) \tag{8}$$

Če sonda za potovanje med planetoma potrebuje čas T, se njuna robna pogoja glasita

$$\mathbf{r}(0) = (r_1, 0) \tag{9}$$

$$\mathbf{r}(T) = (r_2, \sqrt{8}T+\delta) \tag{10}$$

Poznamo silo na sondo ob vsakem času, torej je enačba drugega reda, imamo pa tudi dva robna pogoja. Prost pa je še parameter T, torej bomo za pot med dvema planetoma verjetno našli več rešitev. Zato bomo lahko omejili čas potovanja T, ali pa začetno in končno hitrost sonde, da bo rešitev še vedno obstajala.

1.4 Vrednotenje rešitve

Najbolj "ugodna" orbita za vesoljska plovila je takšna, kjer potovanje traja čim manj, hrati pa sta začetna in končna hitrost (relativno na planet) dovolj majhni, da plovilo lahko varno pristane. Potrebi po kratkotrajnem poletu je vsaj teoretično enostavno ugoditi, saj lahko pošljemo sondo z neskončno hitrostjo. Žal pa poleg tehničnih težav na ta način tudi uničimo sondo ob pristanku. Minizimacija začetne in končne hitrosti je bolj zahtevna, tudi če si dovolimo dolgotrajno pot. Sonda se ne sme gibati enako hitro kot planet, saj bi v tem primeru krožila z njim. Vsaj v primeru $\mu \ll 1$ pa lahko skonstruiramo elipso z minimalno ekscentričnostjo, ki je tangentna na orbiti obeh planetov, tako da sta začetna in končna relativna hitrost vedno v tangentni smeri glede na sonce. Njena perioda je v iracionalnem razmerju s periodo kroženja drugega planeta, zato se bosta slej ko prej srečala. Takšno orbito imenujemo Hohmannova prenosna orbita, uporabna pa je predvsem za spremebme orbit satelitov. Po takšni orbiti lahko telo pošljemo z enega planeta na drugega le pri določenem faznem zamiku med orbitama planetov, torej le v ozkih izstrelitvenih oknih (launch windows).

Izkušje z medplanetarnimi poleti s človeško posadko žal še nimamo, zato sem predpostavil da je sonda robotska in lahko zdrži tudi večleten polet po sončnem sistemu. Po drugi strani pa ima omejeno zalogo goriva, torej sta začetno pospeševanje in končno zaviranje omejena. To lahko pri simulaciji upoštevamo tako, da omejimo začetno in končno hitrost, mogoče celo vsoto velikosti hitrosti glede na začetni in končni planet, $|\delta v_1| + |\delta v_2| \leq C$. S takšno omejitvimo trdimo, da je sonda zmožnega hitrega pospeševanja (hitrega v primerjavi s trajanjem poleta), omejujoč faktor je le zaloga goriva.

Za trajanje potovanja T nimamo tako stroge omejitve, koristno je le, da najdemo rešitev s čim manjšim T.

2 Reševanje

2.1 Približek z $\mu \ll 1$

Analitično reševenaje celotnega sistem je prezahtevno. Lahko pa točno rešimo primer, ko sta masi planetov zanemarljivi v primerjavi z maso zvezde. To je upravičen približek, v primeru Sonca, Zemlje in Marsa je vrednost reda velikosti $\mu \approx 10^{-6}$, z upoštevanjem Jupitra in Saturna pa zraste na $\mu \approx 10^{-3}$.

Če zanemarimo gravitacijska vpliva obeh planetov, dobimo Keplerjev problem, za katerega vemo, da je rešitev gibanje sonde po elipsi s Soncem z gorišču. Keplerjev problem s podanimi robnimi pogoji $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$ se imenuje Lambertov problem [1]. Geometrijsko je problem ekvivalenten iskanju elipse z goriščem v Soncu, ki gre skozi oba robna položaja planetov. Z enostavno geometrijo se da pokažati, da mora drugo gorišče elipse ležati na enem kraku hiperbole, torej obstaja enoparametrična družina rešitev.

Tako čas potovanja kot začetna in končna hitrost sonde so odvisni od izbrite drugega gorišča. Ker je od časa potovanja odvisen tudi končni položaj drugega planeta, sem najprej izbral vrednost za čas potovanja T, nato našel eliptično orbito sonde s takšnim časom potovanja in zapisal potrebne spremebme hitrosti za to orbito. Za iskanje parametrov elipse sem uporabil orodje `kepler_toolbox`, ki so ga razvili v Evropski vesoljski agenciji ESA. Orodje vrne začetno hitrost sonde, s pomočjo katere sem rekonstruiral celotno orbite z navadno integracijo po metodi RK4.

Lambertov problem s fiksnim časom potovanja ima vsaj eno rešitev, ki pa ni vedno enolična. Pri dovolj dolgih časih potovanja so možno tudi orbite, kjer sonda naredi enega ali več obratov okrog sonca preden pristane na drugem planetu.

2.2 Poljuben μ

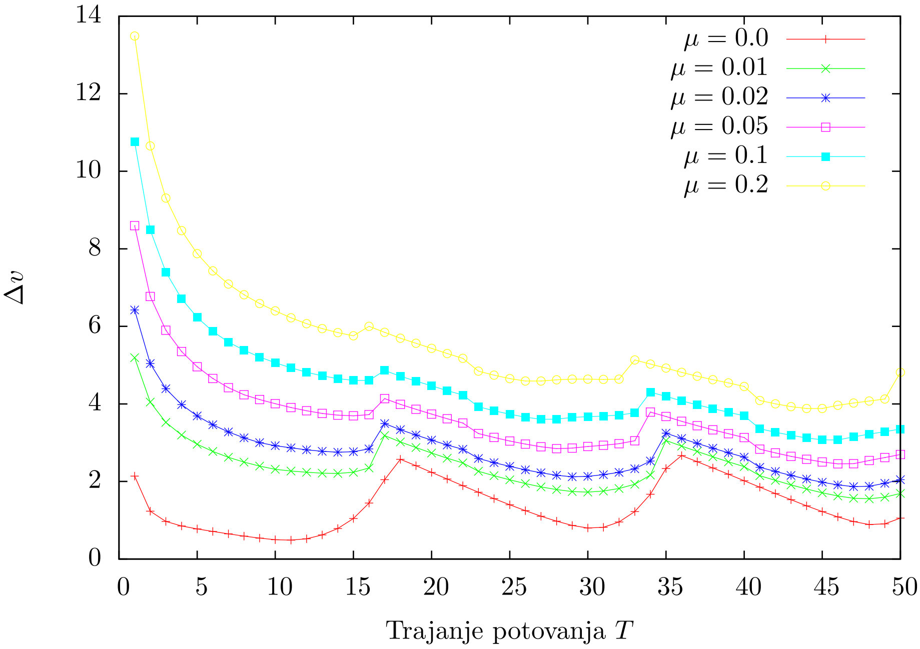
Ker v znanih sončnih sistemih masa sonca močno presega mase planetov, si lahko pri iskanju splošne rešitve pomagamo s prejšnjim približkom. Za iskanje orbit zato nisem uporabil strelske metode z ugibanjem začetnih pogojev in numerično integriranjem. Namesto tega sem začel z eliptično orbito in jo relaksiral, tako da je v vsaki točki ustrezala Newtonovem zakonu. Takšna relaksacija seveda ni fizikalna, se pa je izkazala za učinkovit računski pripomoček.

Trajektorija sonde mora v vsaki točki zadoščati pogoju (3). Drugi odvod na levi strani enačbe sem približal s končno diferenco, nato pa z metodo pospešene relaksacije SOR popravljal $r(t_i)$, dokler pogoj ni bil izpolnjen v vsaki točki.

Velika prednost pristopa z relaksacijo je ta, da lahko začetno in končno točko postavimo točno na položaj ustreznega planeta. Na ta način lahko zadenemo tudi planete, ki so dosti manjši od polmera svojega tira okrog sonca, kar definitivno drži za planetev v našem osončju. Na ta način rešitev sploh ni odvisna od polmera planeta, kar nam zmanjša število pogojev in s tem poenostavi reševanje.

2.3 Relaksacija

Takšna relaksacija zahteva časovno diskretizacijo tira. Ni treba, da je ta diskretizacija enakomerna, moramo pa v naprej določiti število in dolžino časovnih korakov, torej moramo izbrati tudi skupen čas T. S to izbiro tedaj najdemo ustrezno orbito in izračunamo začetno in končno relativno hitrost.

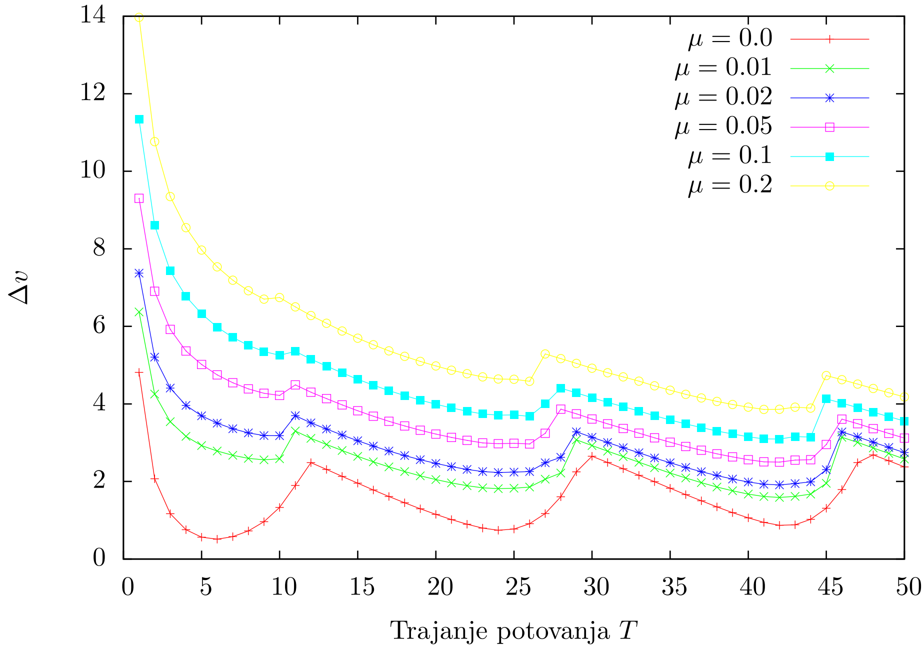


Slika 1: Skupna sprememba hitrosti, potrebna za doseg drugega planeta in varno zaustavitev, pri različnih masah planetov ($\delta = 0$)

S slike lahko razberemo, da večja masa planetov terja močnejse pospeševanje in zaviranje sonde. To sledi iz dejstva, da moramo tako pri vzletu kot pri pristanku premagovati večjo silo težnosti.

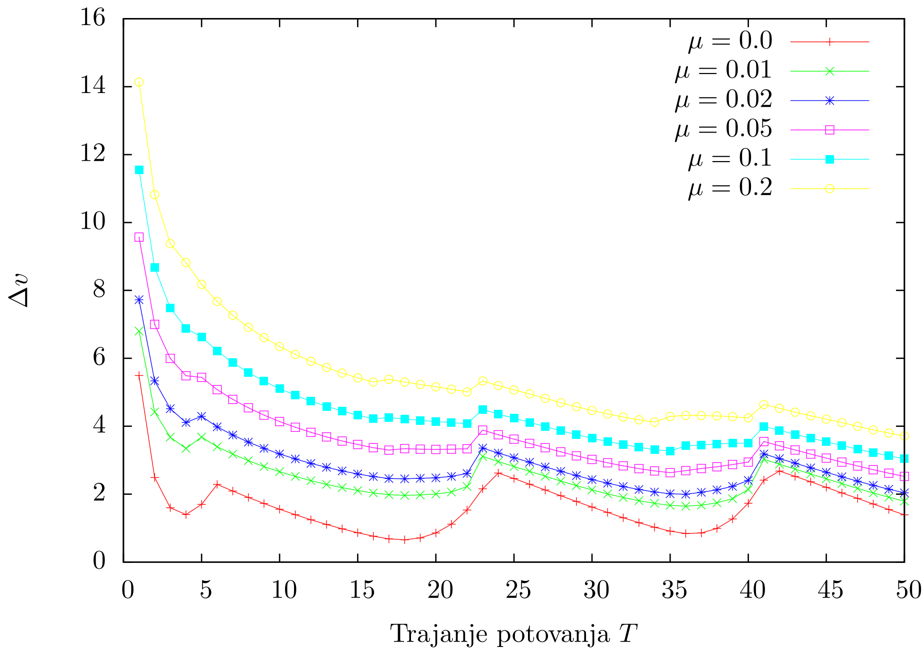
Drugo zanimivost je periodičnost grafa. Zunanji planet kroži s periodo $t_2 = 2\pi\sqrt{8} \approx 17,8$, kar se ujema z razmikom med vrhovi na grafu. Slika 2 je narejena za fazni zamik $\delta = 0$, torej so ob času izstrelitve sonce in oba planeta na isti premici. Pri takšni konfiguraciji je energijsko najugodnejša pot, ki traja malo manj kot celi večkratnik periode zunanjega planeta.

Če spremenimo fazni zamik med planetoma, kar je enakovredno izstrelitvi ob drugem času, se celoten graf ustrezno premakne. Primer z $\delta = 2\pi/3$ je na sliki 3.



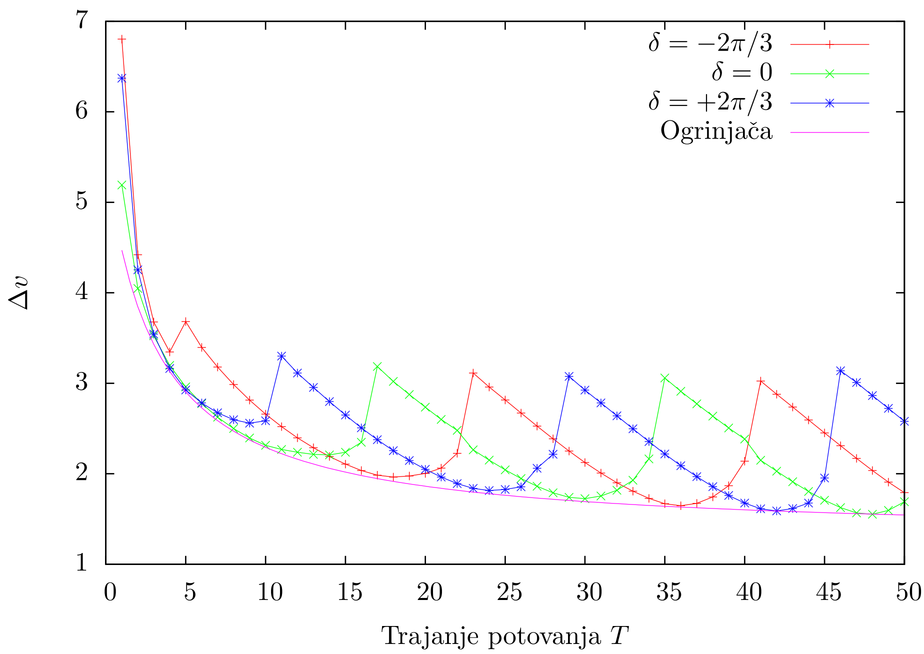
Slika 2: Skupna sprememba hitrosti, potrebna za doseg drugega planeta in varno zaustavitev, pri različnih masah planetov ($\delta = 2\pi/3$)

Vidimo podobno periodičnost kot prej, le da so vsi vrhovi premaknjeni v levo.



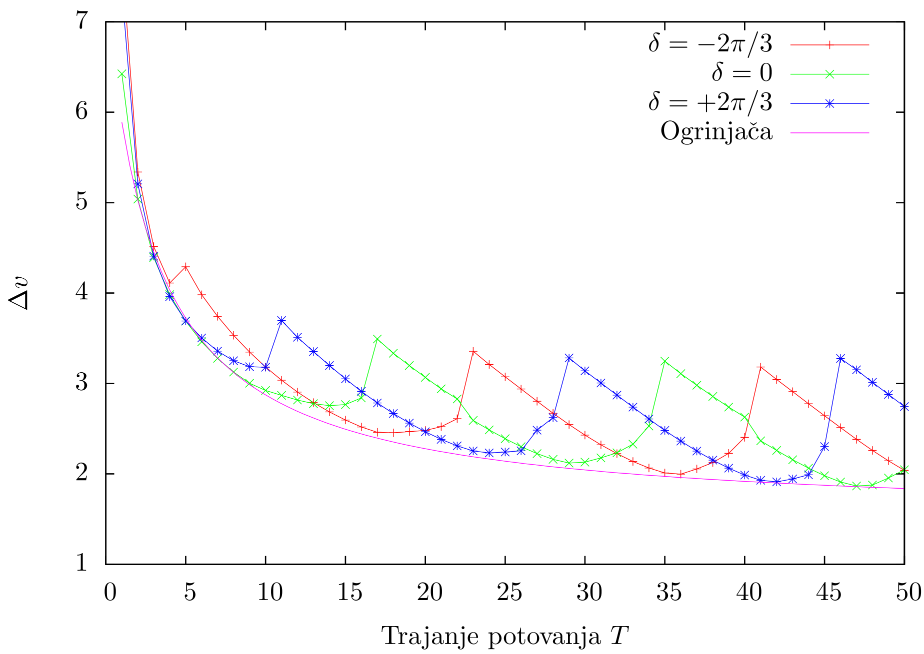
Slika 3: Skupna sprememba hitrosti, potrebna za doseg drugega planeta in varno zaustavitev, pri različnih masah planetov ($\delta = 4\pi/3$)

Zanimiv vzorec pa nastane, ko skupaj narišemo odvisnost Δv od T za različne zamike δ pri istem μ. Ta primer je bolj uporaben, saj mas planetov še ne znamo poljubno spreminjati, medtem ko datum vzleta in s tem fazni zamik planetov lahko izberemo. Račun sem napravil le za tri možne zamike, ki so med seboj razmaknjeni za tretjino polnega kota. Minimalen Δv pri poljubnem času poleta T pa lahko interpoliramo z grafa s pomočjo ogrinjače, ki povezuje najnižje točke na grafu.

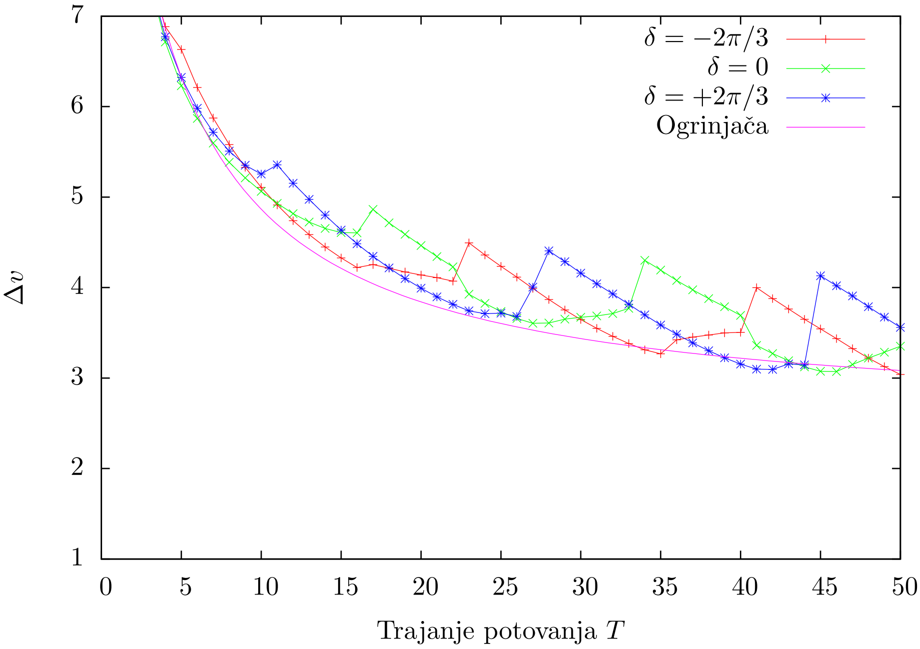


Slika 4: Skupna sprememba hitrosti, potrebna za doseg drugega planeta in varno zaustavitev, pri faznih zamikih δ in pri relativni masi planetov $\mu = 0{,}01$

Enačba ogrinjače na zgornji sliki je $\Delta v = 1{,}3 + 13/(T - 3{,}1)$. Ta zveza je monotono padajoča, torej si s podaljševanjem časa potovanja lahko privoščimo manj pospeševanja. Poleg tega pa obstaja spodnja meja za potrebno hitrost, ki je odvisna le od mase planetov.



Slika 5: Skupna sprememba hitrosti, potrebna za doseg drugega planeta in varno zaustavitev, pri faznih zamikih δ in pri relativni masi planetov $\mu = 0{,}02$



Slika 6: Skupna sprememba hitrosti, potrebna za doseg drugega planeta in varno zaustavitev, pri faznih zamikih δ in pri relativni masi planetov $\mu = 0{,}1$

Literatura

[1] Wikipedia: Lambert's problem (`http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert's_problem`)

[2] Wikipedia: Kepler's laws of planetary motion (`http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler's_laws_of_planetary_motion`)