

# Navier-Stokesov sistem

Miha Čančula

31. maj 2012

## 1 Algoritem

Postopek reševanje sistem enačb je bil podoben kot pri prejšnji nalogi. Reševanje je potekalo v časovnih korakih, od katerih je bil vsako korak sestavljen iz treh delov:

1.  $\zeta(t) \mapsto \psi(t)$
2.  $\psi(t) \mapsto \mathbf{v}(t)$
3.  $\zeta(t), \mathbf{v}(t) \mapsto \zeta(t + \Delta t)$

Tu so hitrost  $\mathbf{v}$ , vrtinčnost  $\zeta$  in hitrostni potencial  $\psi$  definirani enako kot v navodilih. Časovno spremembo opiše le zadnji del.

Mrežo sem postavil tako, da so bile točke postavljene tudi na robu območja. S tem sem najlažje upošteval robne pogoje, saj se vrednost večine spremenljivk na robu sploh ni spreminjala. Prav zaradi robnih pogojev sem vse spremenljivke računal na isti mreži.

### 1.1 Začetno stanje

Začel sem z najbolj enostavnim začetnim pogojem, pri katerem se tekočina v votlini ne giblje. Fizikalno to ustreza poskusu, kjer od časa 0 začnemo premikati eno stranico. Za konsistentnost sem računanje začel na ta način:

1. Hitrost po celi votlini sem postavil na 0
2. Če je hitrost enaka nič, je potencial  $\varphi$  konstanten, zato sem tudi tega postavil na 0
3. Upošteval sem robni pogoj, da je hitrost v smeri  $x$  na spodnji steni votline enaka 1
4. Izračunal sem  $\zeta$  kot rotor hitrost
5. Izračunal sem  $\zeta$  ob naslednjem času

Nato sem začel delati korake, kot so opisani zgoraj.

### 1.2 Izračun potenciala $\psi$

Računsko najbolj zahteven je prvi korak, torej reševanje enačbe

$$\nabla^2 \psi = \zeta \tag{1}$$

Ker je sprememba  $\zeta$  v enem časovnem koraku majhna, je  $\psi(t - \Delta t)$  dober približek za rešitev enačbe tudi ob času  $t$ . Izmed metod za reševanje Poissonove enačbe, ki smo jih obravnavali, poznavanje začetnega približka najboljše izkoristi metoda SOR.

Hitrostni potencial je definiran le preko svojega odvoda, zato mu lahko prištejemo poljubno konstanto. To sem izbral tako, da je bila vrednosti  $\psi$  povsod na robu votline enaka nič, kar je poenostavilo korak relaksacije.

### 1.3 Izračun hitrosti v

Če poznamo potencial  $\psi$ , lahko obe komponenti hitrosti izračunamo eksplicitno iz definicije kot

$$u = v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

$$v = v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3)$$

Krajevni odvod sem zapisal s simetričnimi diferencami, robne vrednosti hitrosti pa se s časom ne spreminjajo.

### 1.4 Časovni korak vrtinčnosti $\zeta$

Tudi časovni korak se da zapisati eksplisitno. Uporabil sem enostavne difference, za časovni korak seveda enostranske, za krajevne odvode pa simetrične, saj v enačbi nastopa tudi drugi krajevni odvod.

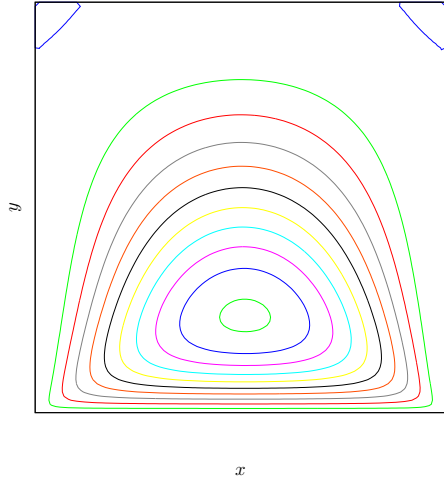
Časovni korak  $\Delta t$  sem seveda spreminjal v odvisnosti od koraka krajevne diskretizacije  $\Delta x$ . Zaradi uporabe relaksacije za izračun potenciala pa daljši časovni korak ne pomeni nujno hitrejšega računanja. Manjši  $\Delta x$  namreč povzroči, da je stanje iz prejšnjega koraka boljši približek za trenutno rešitev enačbe, zato metoda SOR hitreje konvergira. Pri dovolj velikem Reynoldsovem številu (nad 50) je bilo dovolj upoštevati Courantov pogoj, za manjša Re pa sem raje uporabil formulo  $\Delta t = \text{Re}\Delta x/400$ .

Prisilno manjšanje koraka za majhne Re pa ni velika težava zaradi samega obnašanja tekočine. V tem primeru je namreč tekočina zelo viskozna, zato se ravnovesno stanje vzpostavi že kmalu.

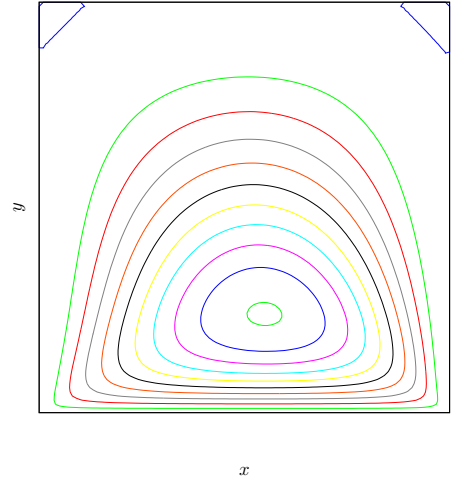
## 2 Rezultati

Najprej sem določil hitrostni profil pri nekaj različnih vrednostih za Re. Stanje po dolgem času je prikazano na slikah. Priloženi so tudi filmčki, ki prikazujejo časovni razvoj začetnega stanja.

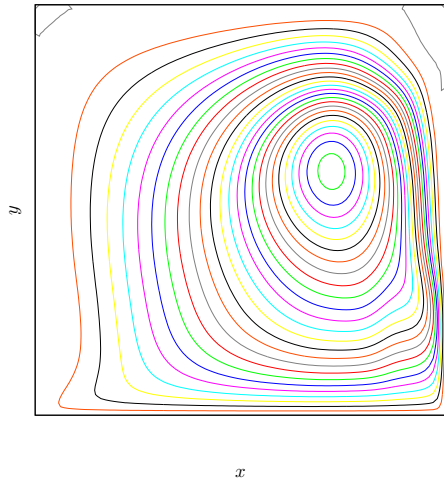
Vsi primeri so izračunani na mreži s  $100 \times 100$  točkami. Za hitrejšo računanje sem uporabil trik z mrežami različnih velikosti. Vsaka slika v animaciji je narejena tako, da sem najprej mrežo zmanjšal na  $15 \times 15$  točk, napravil nekaj časovnih korakov, in mrežo postopoma večal. Po vsaki povečavi sem seveda izvedel še nekaj korakov, njihovo število pa sem prilagajal v odvisnosti od Re. Poleg hitrejšega računanja zaradi manjšega števila točk si na manjši mreži lahko privoščimo tudi večji časovni korak.



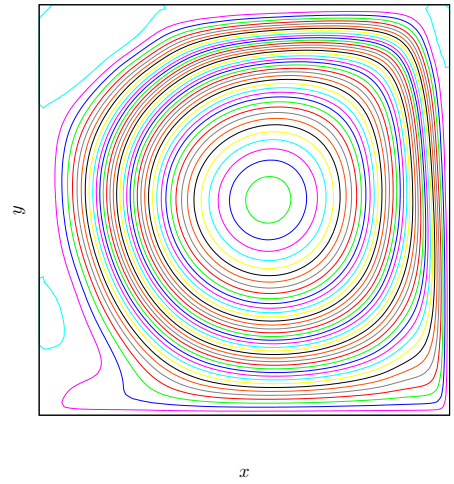
(a)  $\text{Re} = 10, T = 0.82$



(b)  $\text{Re} = 100, T = 1.53$



(c)  $\text{Re} = 1000, T = 2.39$



(d)  $\text{Re} = 1000, T = 21.9$

Oblika vrtincev se ujema s pričakovanji in s slikami v navodilih. Pri nizkem  $\text{Re}$  je vrtinec v bližini sredine gnane stene, pri velikem  $\text{Re}$  pa se približa sredini votline, povečajo pa se tudi sekundarni vrtinci. Pri velikem Reynoldsovem številu pa dodatno opazimo, da se pojavlja vedno več izohips potenciala.

Težave pa sem imel pri računu sile; ne glede na  $\text{Re}$  se sila na gnano stranico v izbranih brezdimenzijskih količinah giblje med 15 in 20. Pričakovana odvisnost je  $F \propto \text{Re}^{-1}$ , ki je pa v svojih izračunih ne opazim. Domnevam, da sem naredil kakšno napako pri normalizaciji oz. upoštevanju koraka  $\Delta x$ .