Gibanje gravitacijske vrtavke

Miha Čančula

13. junij 2012

Povzetek

Razišči gibanje splošne gravitacijske vrtavke s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{1}{2J_s} l_s^2 + mga_s n_s \right) \tag{1}$$

kjer so l_1,l_2,l_3 komponente vrtilne količine vzdolž lastnih osi teznorja vztrajnostnega momenta J, $\mathbf{e}_s$, in $J\mathbf{e}_s = J_s\mathbf{e}_s$, n_1,n_2,n_3 pa so vertikalne komponente lastnih osi, $n_s = (0, 0, 1)\cdot\mathbf{e}_s$. $\mathbf{l}$ in $\mathbf{e}$ predstavljajo kanoničen set dinamičnih spremenljivk s sledečo (Liejevo) algebro Poissonovih oklepajev

$$\{l_r, l_s\} = \sum_t \varepsilon_{rst} l_t \tag{2}$$

$$\{l_r, n_s\} = \sum_t \varepsilon_{rst} n_t \tag{3}$$

$$\{n_r, n_s\} = 0 \tag{4}$$

kjer je ε_{rst} popolnoma antisimetričen Levi-Civitajev tenzor. Vzemi npr. perturbirano Langrangeovo vrtavko, s parametri (Δ, a, λ), $J_1 = J_2 = 1$ in $J_3 = \Delta$, ter $a_1 = \lambda$, $a_2 = 0$, $a_3 = a$, tako da je za $\lambda = 0$ vrtavka integrabilna. Napravi smiselno predstavitev dinamike s Poincarejevo preslikavo in poskusi določiti relativen delež kaotičnega faznega prostora (energijske lupine, pri neki energiji E) v odvisnosti od perturbacijskega parametra λ.

1 Enačbe gibanja

Enačbe gibanja vrtavke v Hamiltonovi formulaciji se glasijo

$$\dot{l}_s = \{H, l_s\} \tag{5}$$

$$\dot{n}_s = \{H, n_s\} \tag{6}$$

V Hamiltonianu nastopajo tako l_s kot n_s, njihove medsebojne Poissonove oklepaje pa poznamo. Netrivialni so le členi z l_s^2, zato moramo najprej izračunati Poissonove oklepaje oblike

$$\{l_s^2, l_r\} = \sum_i \left(\frac{\partial l_s^2}{\partial q_i}\frac{\partial l_r}{\partial p_i} - \frac{\partial l_s^2}{\partial p_i}\frac{\partial l_r}{\partial q_i} \right) = 2l_s \sum_i \left[\frac{\partial l_s}{\partial q_i}\frac{\partial l_r}{\partial p_i} - \frac{\partial l_s}{\partial p_i}\frac{\partial l_r}{\partial q_i} \right] = 2l_s\{l_s, l_r\} \tag{7}$$

Uporabili smo kanonične spremenljivke q_i in p_i, ki nastopajo v definiciji Poissonovega oklepaja. Fizika ni odvisna od izbire teh spremenjivk, in tudi v nadaljnjem računanju jih ne bomo potrebovali.

Sedaj lahko zapišemo tudi enačbe gibanja v ekplicitni obliki

$$\dot{l}_s = \{H, l_s\} = \frac{l_{s+1}}{J_{s+1}} l_{s+2} - \frac{l_{s+2}}{J_{s+2}} l_{s+1} - mga_{s+1}n_{s+2} + mga_{s+2}n_{s+1} \tag{8}$$

$$\dot{n}_s = \{H, n_s\} = \frac{l_{s+1}}{J_{s+1}} n_{s+2} - \frac{l_{s+2}}{J_{s+2}} n_{s+1} \tag{9}$$

kjer upoštevamo ciklične indekse, $l_{s+3} = l_s$.
Za naš poseben primer vrtavke, z določinim vrednostmi za J_s in a_s, se enačbe glasijo

$$\dot{l}_1 = l_2 l_3 \left(1 - \frac{1}{\Delta}\right) + mgan_2 \tag{10}$$

$$\dot{l}_2 = l_3 l_1 \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right) + mg\left(\lambda n_3 - an_1\right) \tag{11}$$

$$\dot{l}_3 = -mg\lambda n_2 \tag{12}$$

$$\dot{n}_1 = l_2 n_3 - \frac{l_3 n_2}{\Delta} \tag{13}$$

$$\dot{n}_2 = \frac{l_3 n_1}{\Delta} - l_1 n_3 \tag{14}$$

$$\dot{n}_3 = l_1 n_2 - l_2 n_1 \tag{15}$$

2 Poincarejeva preslikava