Metoda končnih elementov: Poissonova enačba

Miha Čančula

17. april 2012

1 Uporabljena orodja

Za izračun lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike sem uporabil knjižnico `ARPACK`, za prikaz rešitev `MathGL`, ostalo pa sem napisal v programskem jeziku `C`.

2 Končni elementi

Najprej sem nalogo rešile z metodo končnih elementov. Celoten postopek je zelo podoben kot pri prejšnji nalogi, razlika je le v samem reševanju matričnega sistema.

3 Galerkinov nastavek

Podoben postopek lahko izvedemo tudi, če rešitev namesto po funkcijah w_i, ki so različne od 0 le na majhnem prostoru, razvijemo po zveznih funkcijah

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^m g_k^m \tag{1}$$

$$g_k^m = r^{m+k}(1-r)\sin(m\varphi) \tag{2}$$

Če usmerimo os y v smeri ravnega roba polkroga, je $\varphi \in [0, \pi]$ in so pri robnih pogojih prve vrste smiselne kotne odvisnosti le sinusi. Ti so za različne m med seboj ortogonalni, zato je matrika A bločno diagonalna in razpade na podmatrike A_m. Isto velja tudi za masno matriko B. Dovolj je torej, če izračunamo koeficiente a_k^m za vsak m posebej.

Matrične elemente A in B izrazimo kot integrale funkcij g_k^m in njihovih gradientov, ki jih lahko izračunamo analitično.

$$
\begin{aligned}
\langle g_k^m, g_l^m \rangle &= \int_0^\pi \int_0^1 r^{2m+k+l}(1-r)^2 \sin^2(m\varphi) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(r^{2m+k+l+1} - 2r^{2m+k+l+2} + r^{2m+k+l+3} \right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2m+k+l+2} - \frac{2}{2m+k+l+3} + \frac{1}{2m+k+l+4} \right) \qquad (3)\\
\nabla g_k^m &= \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(r^{m+k} - r^{m+k+1} \right) \sin(m\varphi) \\
&= \left((m+k) r^{m+k-1} - (m+k+1) r^{m+k} \right) \sin(m\varphi), \\
&\quad m \left(r^{m+k-1} - r^{m+k} \right) \cos(m\varphi) \qquad (4)\\
\langle \nabla g_k^m, \nabla g_l^m \rangle &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \Big[\left((m+k) r^{m+k-1} - (m+k+1) r^{m+k} \right) \left((m+l) r^{m+l-1} - (m+l+1) r^{m+l} \right) + \\
&\qquad + m^2 \left(r^{m+k-1} - r^{m+k} \right) \left(r^{m+l-1} - r^{m+l} \right) \Big] r \mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^{2m+k+l} \Big\{ \big[(m+k)(m+l) + m^2 \big] r^{-1} + \big[(m+k+1)(m+l+1) + m^2 \big] r - \\
&\qquad - \big[(m+k)(m+l+1) + (m+k+1)(m+l) + 2m^2 \big] \Big\} \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{kl}{2m+k+l} - 2m - \frac{k+l}{2m+k+l+1} + m + \frac{k+l+kl}{2m+k+l+2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{kl}{2m+k+l} - \frac{k+l}{2m+k+l+1} + \frac{(k+1)(l+1)}{2m+(k+1)+(l+1)} \right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Lastne vrednosti in lastni vektorji se ne spremenijo, če matriki A in B pomnožimo s konstantnim faktorjem, zato sem pri računih izpustil množenje s $\pi/2$.

3.1 Reševanje

Matriki A in B sedaj nista več redki, pri velikih k pa funkcije g postajajo vse bolj linearno odvisne, zato smo omejeni na majhne k in s tem tudi majhne matrike. Zaradi majhnih dimenzij matrik ne potrebujemo posebej optimiziranega postopka za iskanje lastnih vrednosti in vektorjev, v mojem primeru sem uporabil kar istega kot pri končnih elementih. To lahko naredimo, ker sta obe matriki še vedno simetrični.