

Metoda končnih elementov: Poissonova enačba

Miha Čančula

25. april 2012

1 Polje kovinskega traku

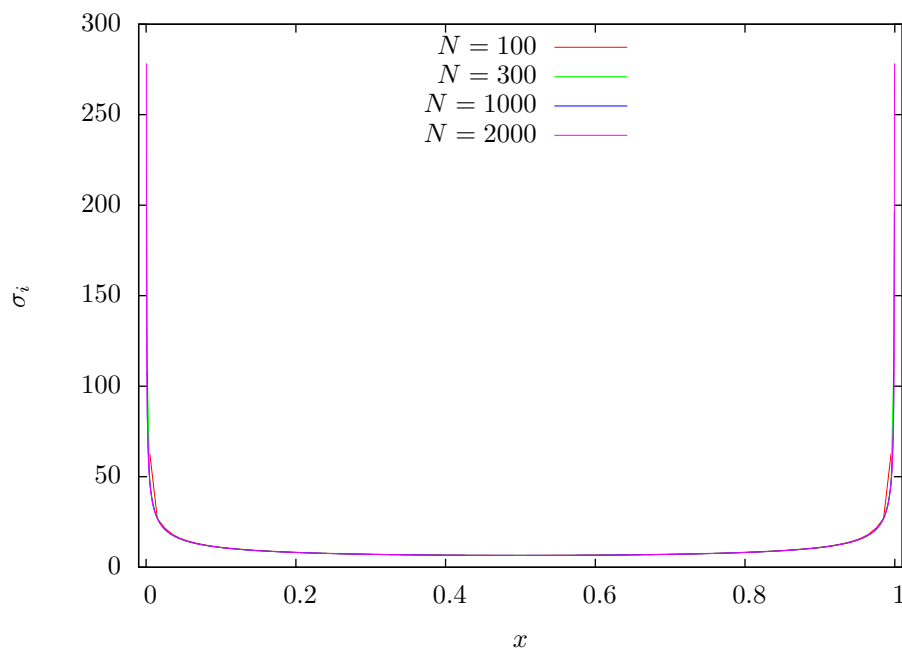
Ko kovinski trak razdelimo na panele s konstantno gostoto naboja, lahko prispevek vsakega panela na vse ostale zložimo v matriko. Na ravnem traku z enakomerno delitvijo v panele je ta matrika simetrična, saj je medsebojni vpliv dveh vzporednih panelov vedno vzajemen.

Desna stran je v tem primeru potencial na traku, ki je za prevodni trak konstanten. Ta vrednost predstavlja le multiplikativno konstanto v gostoti naboja, na kapaciteto pa sploh ne vpliva, zato sem jo postavil na 1. Gostoto naboja na posameznem panelu dobimo kot rešitev matričnega sistema.

Matrika je polna, zato reševanje sistema zahteva $\mathcal{O}(N^2)$ operacij. Ker pa v račun zajamemo le robne točke, je matrika mnogo manjša kot pri prejšnjih nalogah. Račun sem v kratkem času izvedel do $N = 2000$.

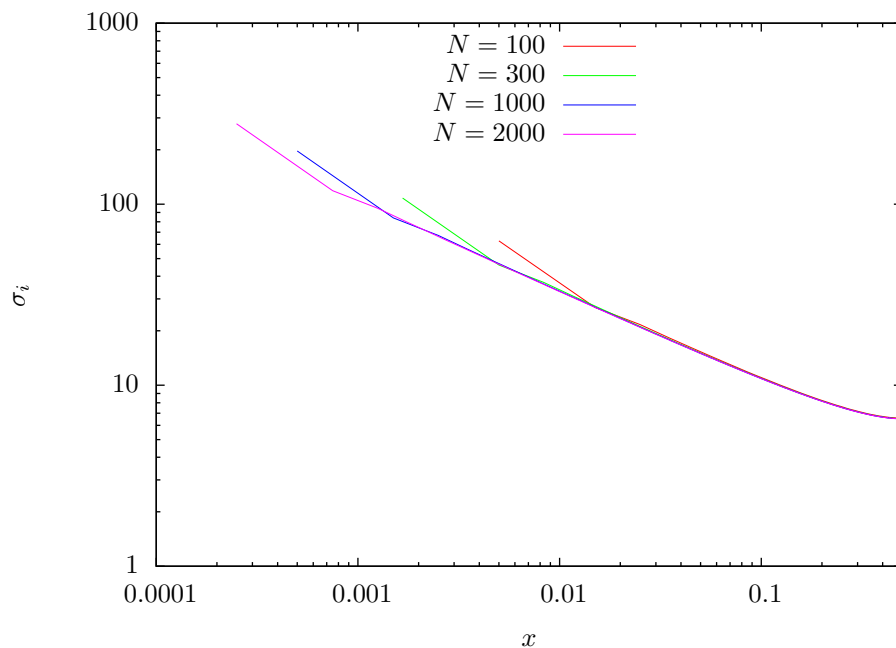
1.1 Rezultati

Račun sem delal z neskončno dolgim trakom širine 1. Direktna rešitev matričnega sistema nam poda porazdelitev naboja po traku, kot je na sliki 1. Po pričakovanju je gostota največja pri robu traku, saj se nosilci naboja razporedijo tako, da je med njimi v povprečju čim večja razdalja.



Slika 1: Gostota naboja na kovinskem traku

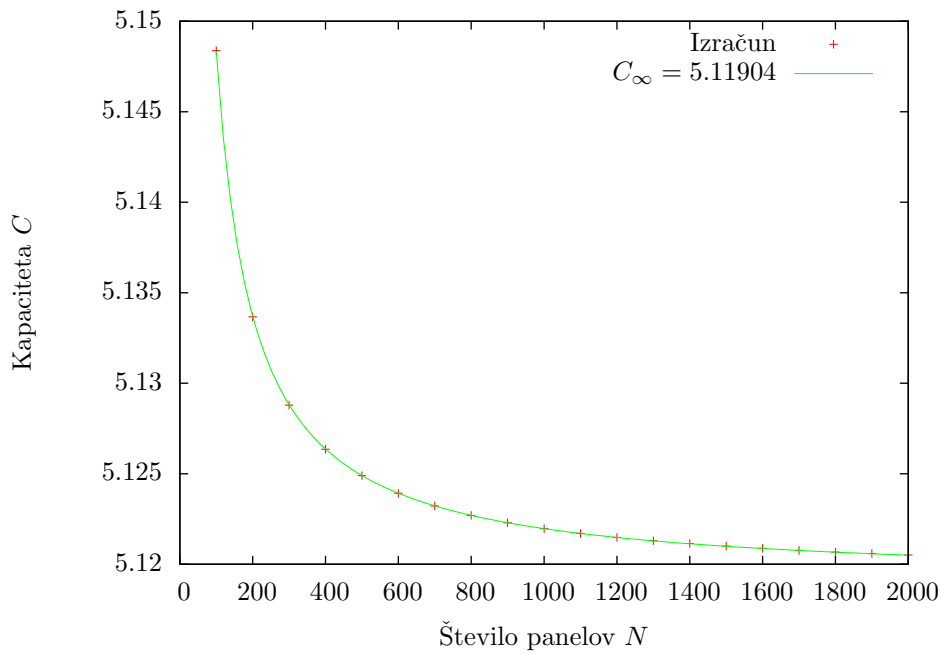
Večanje števila trakov ne prinese pomembne razlike, še najbolj opazno odstopanje je v bližini roba. Tam se gostota naboja hitro spreminja s položajem v smeri x , zato ima končna velikost panela največji vpliv. Obnašanje na robu lahko podrobneje opazujemo z logaritemskim grafom na sliki 2. Ker je porazdelitev naboja simetrična, je narisana le leva polovica traku.



Slika 2: Gostota naboja na kovinskem traku

Pri različnem številu panelov dobimo naklon premice $1/2$, kar nakazuje znano korensko singularnost na robovih traku. Diskretizacija traku največ vpliva na gostoto naboja na prvem panelu, na ostalih je ujemanje mnogo boljše.

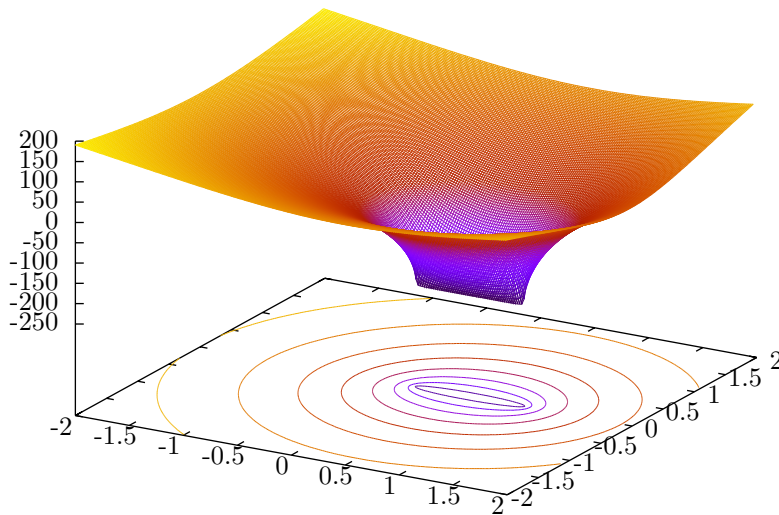
Iz znane porazdelitve naboja izračunamo kapaciteto elektrode kot razmerje med skupnim nabojem in potencialom na njej. Izračunana vrednost je odvisna od števila uporabljenih panelov, ampak pri vedno bolj finih delitvah konvergira k končni vrednosti. Ker uporabljene enačbe veljajo za neskončno dolg trak, je rešitev naloge pravzaprav dolžinska gostota naboja, tako da je izračunana kapaciteta v resnici $C^* = C/l$ kapaciteta na enoto dolžine traku.



Slika 3: Konvergenca izračunane kapacitete elektrode v odvisnosti od števila panelov

Podobno kot skalarjem v prejšnjih nalogah sem odvisnosti $C(N)$ prilagodil funkcijo $C(N) = C_\infty + B/N$. Iz dobrega prileganja (na sliki) lahko potrdimo, da kapaciteta konvergira k vrednosti $C_\infty \approx 5.119$, s podvojitvijo števila panelov pa zmanjšamo napako na polovico.

Električni potencial v okolici traku izračunamo iz porazdelitve naboja s poznavanjem Greenove funkcije. Za primer traku s 100 paneli so potencial in ekvipotencialne ploskve narisane na sliki 4.



Slika 4: Električni potencial v okolici kovinskega traka s potencialom $U = 1$

2 Problem obtekanja

Namesto električnih nabojev tokrat na površino telesa posejemo izvore hitrosti. Robni pogoj je, da tekočina ne more prehajati skozi površino telesa, zato v matrični enačbi nastopa samo pravokotna komponenta hitrosti.

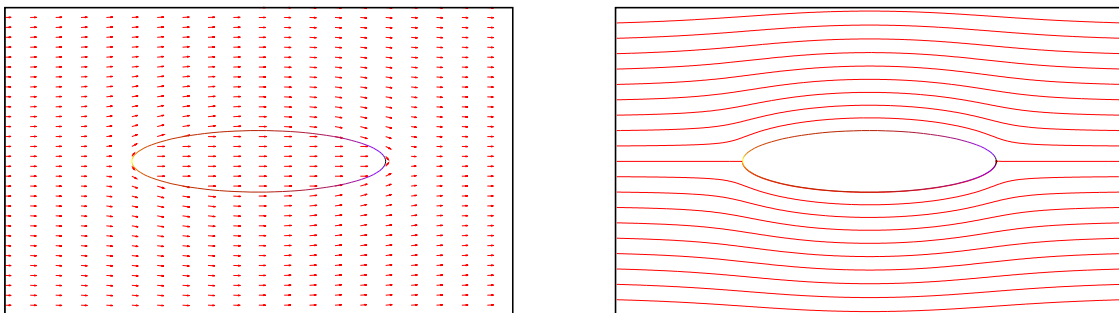
Hitrost tekočine v vsaki točki sestavljajo prispevki vseh panelov in zunanje hitrosti \mathbf{u}_∞ . Za izračun medsebojnega vpliva dveh panelov moramo najprej preslikati celotno sliko v koordinatni sistem prvega, kjer lahko uporabimo podani enačbi za $\mathbf{v} = (v_\parallel, v_\perp)$. Nato moramo izračunani hitrosti zavrteti v sistem drugega in pravokotno komponento vstaviti v matriko. Zaradi različnih velikosti panelov in kotov med njimi matrika ni več simetrična.

Rešitev sistema ima fizikalni pomen tlaka tik ob površini telesa. Za rekonstrukcijo hitrostnega polja v celotnem prostoru spet uporabimo enačbi za \mathbf{v} in seštejemo po vseh panelih. Na ta način lahko določimo tudi tangencialno komponento hitrosti ob površini, s pomočjo katere lahko izračunamo silo zaradi viskoznosti tekočine.

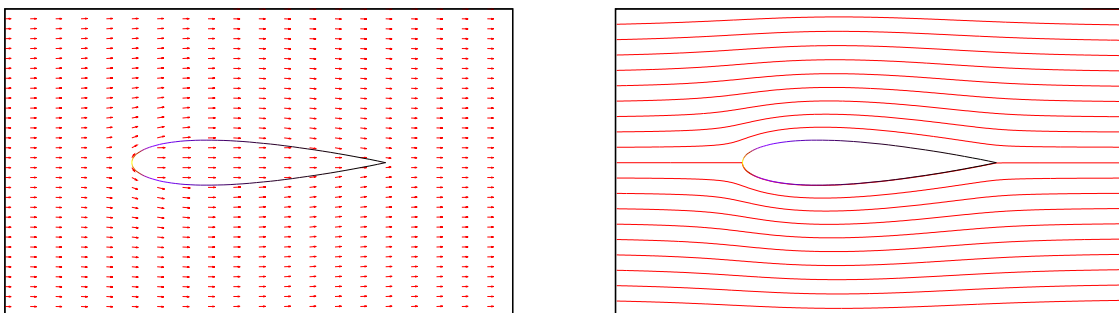
2.1 Rezultati

Za tri različne geometrije telesa sem najprej izračunal gostoto izvirov na površini, ki je na slikah ponazorjena z barvo. Nato sem izračunal hitrost in smer toka tekočine, na podlagi tega pa še tokovnice. Rezultati so na slikah 5, 6 in 8.

Tokovnice so izračunane z numeričnim reševanjem diferencialne enačbe. Pri tem je potrebno izračunati obe komponenti hitrost v vsaki točki tokovnice, zato je računanje precej počasno. Pri risanju tokovnic sem se zato omejil na $N = 100$ panelov.

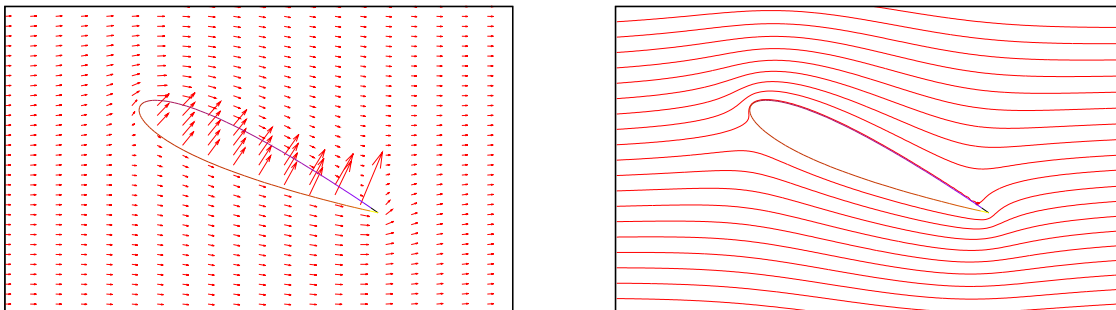


Slika 5: Obtekanje elipsoidnega valja z razmerjem stranic $b = 1/5$

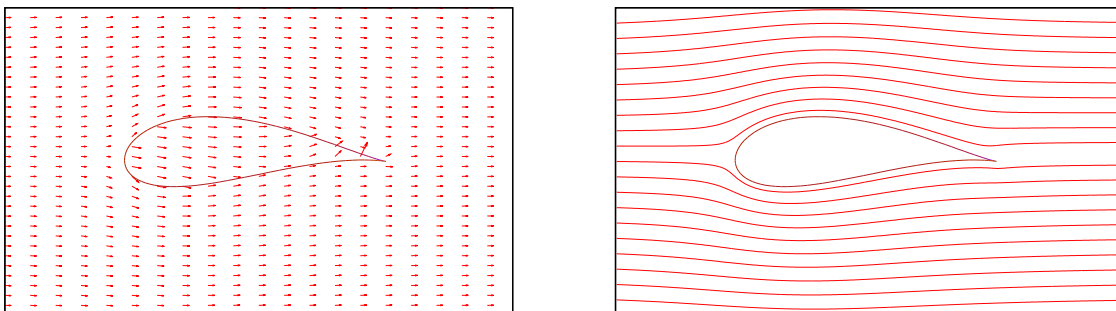


Slika 6: Obtekanje profila NACA-0015

Pri simetričnih profilih opazimo, da je hitrost znotraj telesa vedno enaka u_∞ . To sicer nima fizikalnega pomena, lahko pa služi za preverjanje metode. To pa ne drži tudi za nagnjena ali nesimetrična telesa, kot lahko vidimo na slikah 7 in 8. Rob, ki je obrnjen proti toku, ima višjo gostoto izvirov, zato so tokovnice znotraj telesa obrnjene stran od tega roba.



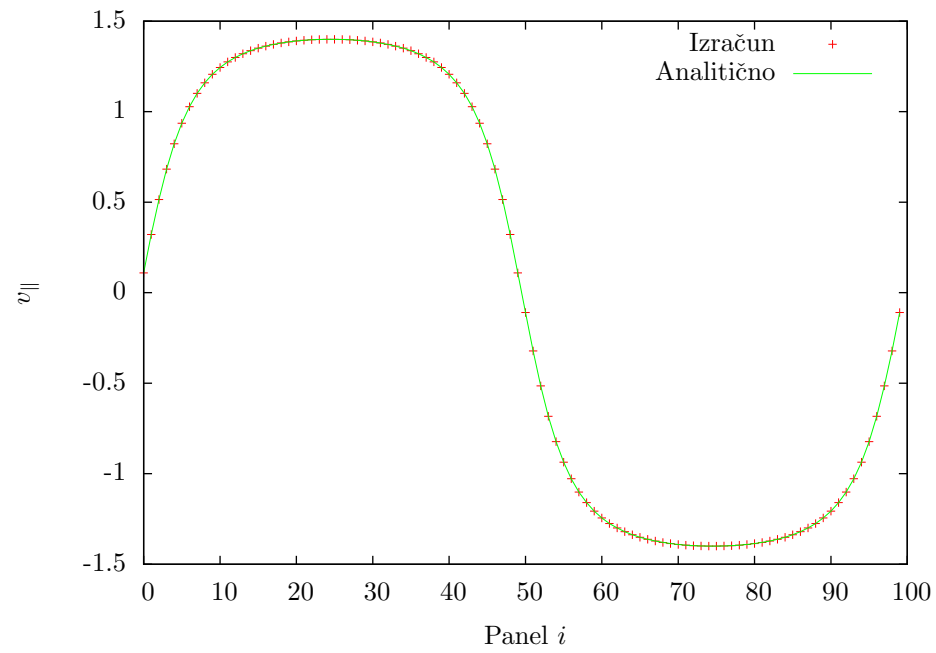
Slika 7: Obtekanje profila NACA-0015, nagnjenega za 20 stoping



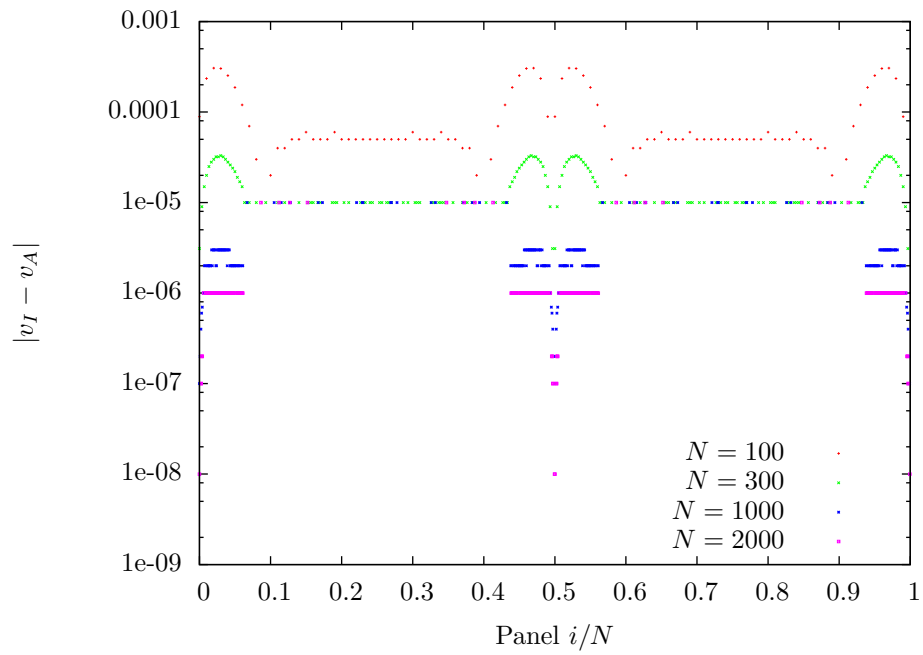
Slika 8: Obtekanje krila Žukovskega s parametri $A = -0.2$, $B = 0.1$

2.2 Tangencialna komponenta hitrosti

Ker z rešitvijo po metodi robnih elementov lahko rekonstruiramo celotno hitrostno polje, lahko izračunamo tudi hitrost tekočine tik ob telesu. Komponenta, pravokotna na telo je seveda enaka 0, vzporedno komponento pa lahko primerjamo z znano vrednostjo.



Slika 9: Analitična in izračunana hitrost ob površini telesa, pri $N = 100$ panelih



Slika 10: Absolutna razlika med analitično in izračunano hitrostjo ob površini telesa. Intervali brez pik pomenijo razliko pod strojno natančnostjo.