Potovanje sonde med planeti

Miha Čančula

15. julij 2012

1 Število parametrov

Sonda se po sončnem sistemu giblje, kot to določa Newtonov zakon

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m_s} \tag{1}$$

Nanjo delujejo tri sile, to so gravitacijski privlaki sonca in obeh planetov.

$$\mathbf{F} = Gm_s \left(\frac{-M\mathbf{r}}{r^3} + \frac{m(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3} + \frac{m(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^3} \right)$$

Masa sonde se po pričakovanju krajša, ostanejo pa nam še gravitacijska konstanta in mase vseh treh nebesnih teles. Poznamo pa tudi gibanje planetov, saj krožita okrog zvezde. Njun radialni pospešek je enak

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} = -\omega^2 \mathbf{r}_i = GM\frac{-\mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{2}$$

Imamo torej zvezo med maso sonca M, gravitacijsko konstanto G, polmerom orbite planeta r_i (i je 1 ali 2) in frekvenco kroženja ω. Konstanta G nastopa povsod kot multiplikativna konstanta k drugemu časovnemu odvodu. Izbira njene vrednosti je zato enakovredna izbiri časovne skale $t \to t/\sqrt{G}$. Enak učinek ima povečanje ali zmanjšanje mase sonca in planetov za enak faktor. Vrednosti za G in M lahko torej postavimo na 1, namesto mase planeta m pa računamo z razmerjem $\mu = m/M$. Enačbo gibanja planetov rešimo enostavno, tako da zanemarimo medsebojni vpliv in privzamemo krožno gibanje. Iz zveze (2) izrazimo krožno frekvenco kot $\omega^2 = 1/r^3$.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu\frac{\mathbf{r_1} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r}|^3} + \mu\frac{\mathbf{r_2} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r}|^3} \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_i = \omega_i^{-2/3} \left[\cos(\omega_i t + \varphi_i), \sin(\omega_i t + \varphi_i)\right]^T \tag{4}$$

V nalogi je podano razmerje polmerov orbit obeh planetov $r_2 = 2r_i$. Po drugem Keplerjevem zakonu lahko to pretvorimo v razmerje krožnih frekvenc

$$\omega_1 = \sqrt{8}\omega_2 \approx 2.828\omega_2$$

Nazadnje preverimo še, ali lahko določimo tudi vrednosti za r_1 in r_2. Če vse razdalje povečamo za faktor k, se krožni frekvenci zmanjšata za $\sqrt{k^3}$, sile na sondo pa se zmanjšajo za k^2. Samo s spreminjanjem časovne skale ne moremo odpraviti parametra r_1.

2 Robni pogoji

Koordinatni sistem postavimo tako, da je sonce v središču. Ob času $t = 0$ lahko brez izgube splošnosti privzamemo, da se prvi (notranji) planet nahaja na osi x, torej je njegov kot v polarnih koordinatah enak 0. Za drugi planet tega ne moremo privzeti, saj ima lahko fazni zamik δ. Oba planeta se gibljeta po krožnih orbitah, torej lahko njun položaj po poljubnem času v polarnih koordinatah zapišemo kot

$$\mathbf{r}_1(t) = (r_1, \omega_1 t) \tag{5}$$
$$\mathbf{r}_2(t) = (r_2, \omega_2 t + \delta) \tag{6}$$

Če sonda za potovanje med planetoma potrebuje čas T, se njuna robna pogoja glasita

$$\mathbf{r}(0) = (r_1, 0) \tag{7}$$
$$\mathbf{r}(T) = (r_2, \omega_2 T + \delta) \tag{8}$$

Poznamo silo na sondo ob vsakem času, torej je enačba drugega reda, imamo pa tudi dva robna pogoja. Prost pa je še parameter T, torej bomo za pot med dvema planetoma verjetno našli več rešitev. Zato bomo lahko omejili čas potovanja T, ali pa začetno in končno hitrost sonde, da bo rešitev še vedno obstajala.

3 Približek z $\mu \ll 1$

Analitično reševenaje celotnega sistem je prezahtevno. Lahko pa točno rešimo primer, ko sta masi planetov zanemarljivi v primerjavi z maso zvezde. To je upravičen približek, v primeru Sonca, Zemlje in Marsa je vrednost reda velikosti $\mu \approx 10^{-6}$, z upoštevanjem Jupitra in Saturna pa zraste na $\mu \approx 10^{-3}$.

Če zanemarimo gravitacijska vpliva obeh planetov, dobimo Keplerjev problem, za katerega vemo, da je rešitev gibanje sonde po elipsi s Soncem z gorišču. V naših brezdimenzijskih enotah in polarnih koordinatah se rešitev glasi

$$r(\varphi) = \frac{R}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{9}$$

kjer $R = \frac{r^4\omega^2}{GM}$ konstanta gibanja, odvisna od začetnih pogojev, in je enaka razdalji, na kateri bi sonda krožila. Kot smo videli v prejšnjem poglavju, imamo za pot med dvema planetoma več možnih orbit, ki se razlikujejo ravno po konstanti R. Integralski konstanti e in φ_0 določimo iz robnih pogojev, ki trdita, da sonda leti od enega planeta do drugega.

Najbolj "ugodna" orbita za vesoljska plovila je takšna, kjer potovanje traja čim manj, hrati pa sta začetna in končna hitrost (relativno na planet) dovolj majhni, da plovilo lahko varno pristane. Potrebi po kratkotrajnem poletu je vsaj teoretično enostavno ugoditi, saj lahko pošljemo sondo z neskončno hitrostjo. Žal pa poleg tehničnih težav na ta način tudi uničimo sondo ob pristanku. Minizimacija začetne in končne hitrosti je bolj zahtevna, tudi če si dovolimo dolgotrajno pot. Sonda se ne sme gibati enako hitro kot planet, saj bi v tem primeru krožila z njim. Lahko pa skonstruiramo elipso z minimalno ekscentričnostjo, ki je tangentna na orbiti obeh planetov, tako da sta začetna in končna relativna hitrost vedno v tangentni smeri glede na sonce. Njena perioda je v iracionalnem razmerju s periodo kroženja drugega planeta, zato se bosta slej ko prej srečala.

V praksi seveda želimo nek kompromis med obema skrajnostma. Težava je, kjer v enačbi 9 čas ne nastopa, skupen čas prehoda T pa lahko izračunamo z drugim Keplerjevim zakonom.

4 Poljuben μ

Ker v znanih sončnih sistemih masa sonca močno presega mase planetov, si lahko pri iskanju splošne rešitve pomagamo s prejšnjim približkom. Za iskanje orbit zato nisem uporabil strelske metode z ugibanjem začetnih pogojev in numerično integriranjem. Namesto tega sem začel z eliptično orbito in jo relaksiral, tako da je v vsaki točki ustrezala Newtonovem zakonu. Takšna relaksacija seveda ni fizikalna, se pa je izkazala za učinkovit računski pripomoček.