

Parcialne diferencialne enačbe

Robni problemi, relaksacija

Miha Čančula

29. marec 2012

1 Metoda

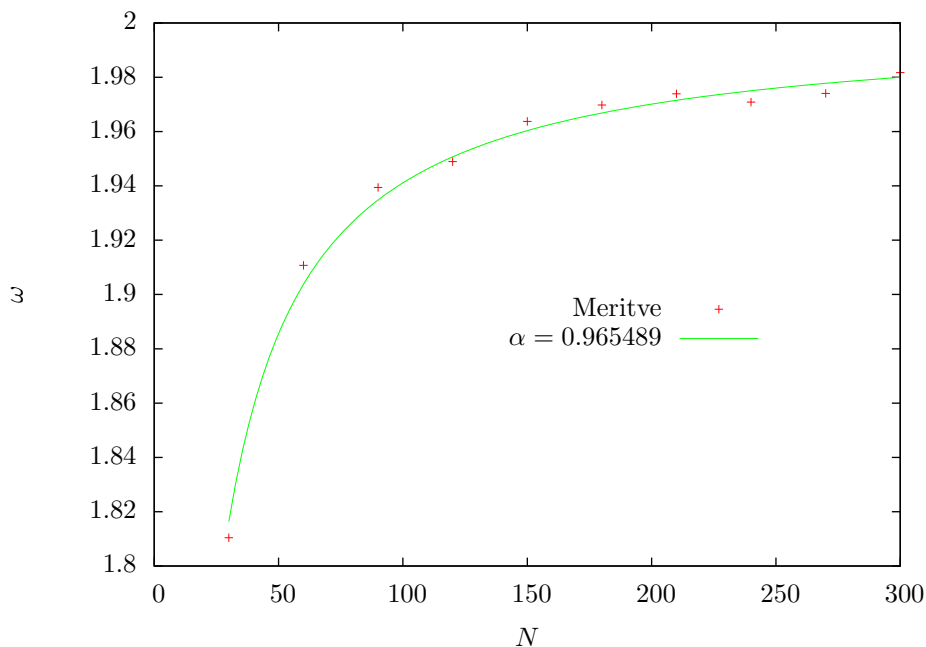
Problem sem reševal z diskretno mrežo. Ker imata obe nalogi zrcalno simetrijo, sem diskretizacijo določil tako, so bile točke na vseh robovih in tudi na simetrijski ravnini. Celotno stanje, vključno z robnimi točkami, sem predstavil z $(N + 1) \times (N/2 + 1)$ točkami. Na ta način sem lahko zagotovil, da je bila razdalja med točkami enaka v obeh dimenzijah.

Iteracijo sem izvajal tako, da sem v spominu držal le eno kopijo celotnega polja, torej po Seidlovem postopku. Za hitrejšo konvergenco sem vsak korak izvedel na lihih in sodih točkah ločeno.

Postopek sem prekinil, ko je povprečni kvadrat popravkov dosegel dovolj majhno vrednost.

2 Čebišev pospešek

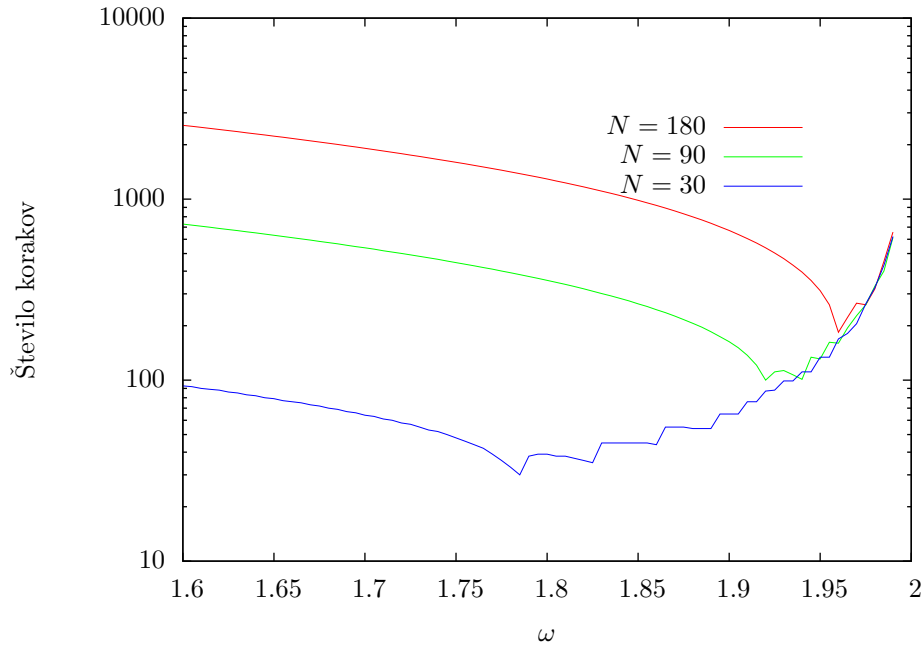
Hitrost konvergence sem meril na primeru cevi iz prve naloge. Najprej sem izračunal najugodnejšo vrednost ω . Privzel sem, da je ta vrednost med 1 in 2, nato pa optimalno vrednost našel z minimizacijo števila korakov. Rezultati so na Sliki 1.



Slika 1: Optimalen parameter α za cev z danim prerezom

Dobljena vrednost za α je malo manjša od enice, ki bi jo pričakovali za kvadratno cev.

Pri različnem številu točk sem tudi opazoval odvisnost števila potrebnih korakov od izbrane ω . Pri tem en korak pomeni popravek vrednosti funkcije u v vseh točkah. Odvisnost je prikazana na Sliki 2.

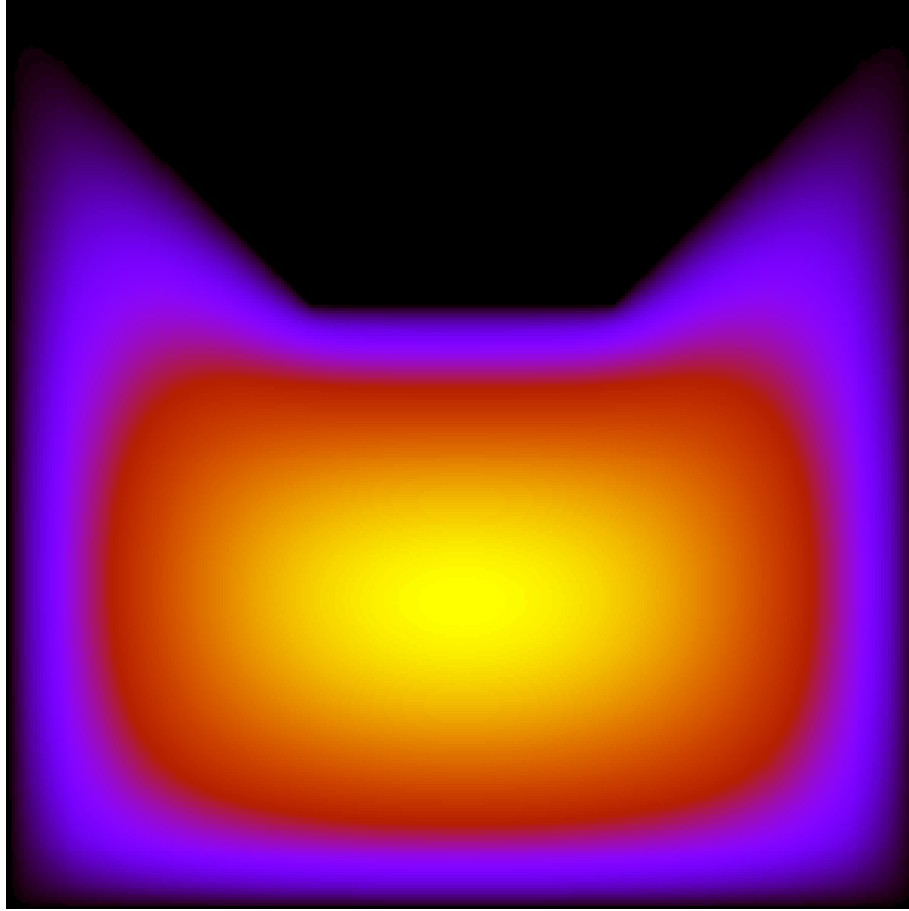


Slika 2: Odvisnost števila potrebnih korakov od parametra ω

V obeh primerih vidimo najprej počasno padanje, nato oster minimum in hitro naraščanje, ko se ω bliža 2. Če doseže 2, postopek ne konvergira več. Pri majhnih ω simulacija z večjim številom točk potrebuje tudi večje število korakov, medtem ko za velike ω razlike ni več.

3 Pretok po cevi

Tu rešujemo Poissonovo enačbo $\nabla^2 u = \rho$, kjer ρ predstavlja tlačno razliko med koncema cevi. Ker je enačba linearna, lahko postavimo $\rho = 1$, tako da imamo brezparametričen problem.



Slika 3: Pretok tekočine po cevi

Za nestisljivo tekočino je pretok \mathbf{j} sorazmeren s hitrostjo \mathbf{u} . Ker smo reševali enačbo za u , moramo za določitev skupnega pretoka le integrirati hitrost po celotnem preseku cevi.

$$\Phi = \int u \, dS \approx h^2 \sum_{i,j=0}^N u_{i,j} \quad (1)$$

V enotah, določenih z brezdimenzijsko enačbo $\nabla u = 1$, je skupni pretok (izračunan pri $N = 900$) enak $\Phi \approx 0.0163137$. Za primerjavo, pretok po kvadratni cevi je več kot še enkrat večji in znaša $\Phi_{\square} \approx 0.0351342$. Če upoštevamo različna preseka obeh cevi lahko izračunamo razmerje pretočnosti

$$\frac{\Phi}{\Phi_{\square}} \cdot \frac{S_{\square}}{S} = \frac{\Phi}{\Phi_{\square}} \cdot \frac{9}{7} \approx 0,59698975 \quad (2)$$

4 Prevajanje toplote po valju

Prevajanje toplote opisuje difuzijska enačba $\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T$. Z relaksacijo dobimo stacionarno stanje, torej $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Difuzijska enačba tedaj preide v Laplaceovo

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3)$$

Če spodnjo ploskev grejemo, bo temperatura povsod po valju večja ali enaka T_1 , zato lahko robni pogoj postavimo na $T_1 = 0$. Na greti ploskvi velja zakon o prevajanju toplote $P = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$.

Ker je celoten problem še vedno linearen, lahko konstanto P/λ določimo poljubno in robni pogoj zapišemo kot

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -1 \quad (4)$$

Za samo reševanje enačbe predznak gretja nima pomena, z minusom ga izberemo zaradi lažje predstave, saj bo v tem primeru temperatura po valju pozitivna.

Da lahko enačbo rešimo numerično moramo operator ∇^2 zapisati v cilindričnih koordinatah in ga diskretizirati.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5)$$

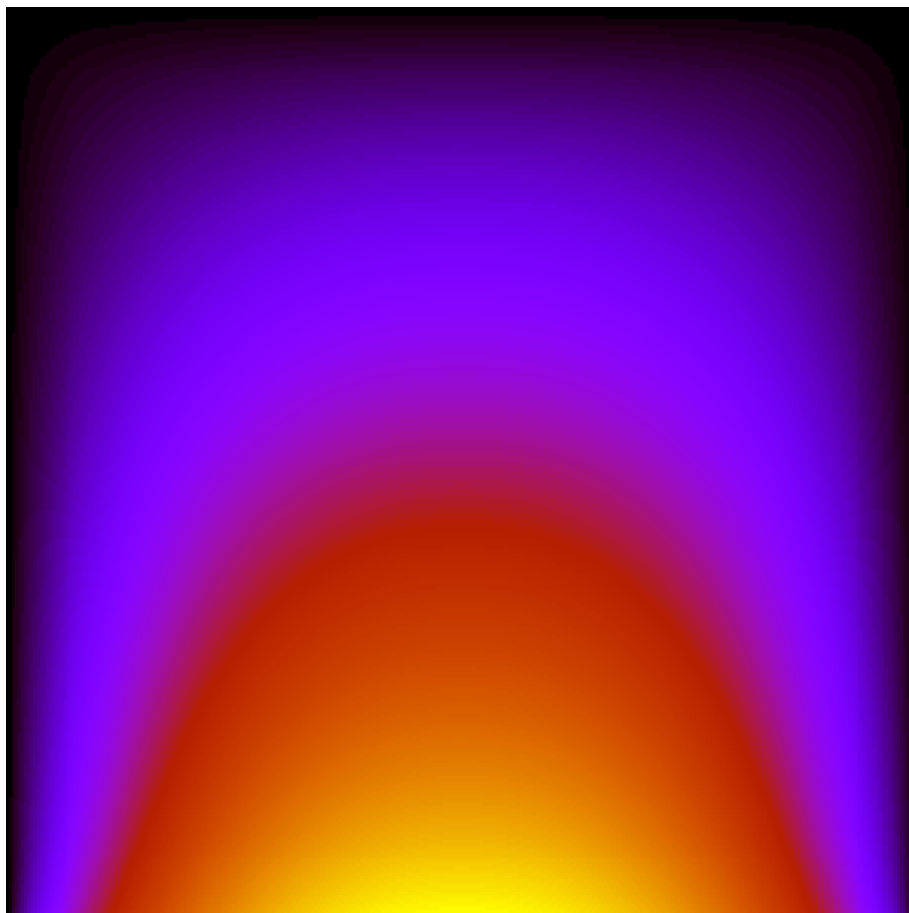
Pri tem smo privzeli simetrijo okrog navpične osi, tako da je $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$. Odvod po z lahko diskretiziramo enako kot pri prvi nalogi, nov je le prvi člen. Ker rešujemo enačbo drugega reda, lahko za prvi odvod vzamemo simetrično diskretizacijo.

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_i} \approx \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2ih^2} \quad (6)$$

$$h^2 \nabla^2 u \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2i} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} \quad (7)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2i}\right)u_{i+1,j} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} \quad (8)$$

Pri tem zapisu sem privzel, da je $r_i = i \cdot h$. V mojem primeru sem vzel $i = 0$ na robu, tako da sem v račun vstavil $N/2 - i$ namesto i . Zaradi simetrije sem lahko tudi tokrat račun izvajal le za polovico valja. Enačbo sem reševal enako kot v primeru cevi. Rezultat je na Sliki 4



Slika 4: Temperaturni profil v kovinskem valju