

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Oddelek za fiziko

Seminar – 1. letnik, II. stopnja

Hidrodinamske nestabilnosti

Avtor: Miha Čančula

Mentor: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, marec 2012

Povzetek

Kazalo

1	Uvod	2
2	Stabilnost in zlom simetrije	2
3	Hidrodinamika	3
3.1	Navier-Stokesova enačba	3
3.2	Lineariziran problem	3
4	Tanki filmi	4
4.1	Enačbe	4
4.2	Reševanje	6
4.3	Nestabilnost	6
5	Podobni pojavi	7
5.1	Milni mehurčki	7
5.2	Kraški žlebiči	8
5.3	Razpad curka	8
6	Zaključek	9

1 Uvod

2 Stabilnost in zlom simetrije

O nestabilnosti govorimo, ko infinitezimalno majhna sprememba trenutnega stanja lahko povzroči večjo, merljivo razliko po nekem končnem času [1].

Takšna definicija je precej splošna, zato jo za potrebe seminarja raje definiramo ožje in bolj eksaktno. Stabilnost sistema pomeni, da vse motnje, ki so na začetku majhne, ostanejo majhne tudi ob poljubnem času. Nasprotno, sistem je nestabilen, če vsaj ena motnja po nekem času preneha biti majhna. Običajno to pomeni, da če je motnja ob začetnem času omejena z neko zgornjo mejo, obstaja neka druga zgornja meja, ki je motnja nikoli ne preseže.

Če se poleg stabilnosti motnja s časom manjša, je tok *asimptotično stabilen*. V teoriji dinamičnih sistemov asimptotično stabilni rešitvi rečemo tudi atraktor.

Stabilnost oz. nestabilnost sistema je tesno povezana z zlomom simetrije. Predstavljajmo si sistem, katerega časovno spreminjanje lahko opišemo z eno ali več diferencialnimi enačbami, ki imajo določeno simetrijo. Z nastavkom, ki upošteva to simetrijo, dobimo rešitev enačb. Stabilnost se pokaže, ko temu nastavku dodamo majhno motnjo, ki ne upošteva simetrije. Stabilni sistem se bo vrnil v simetrično stanje, medtem ko pri nestabilnem pride do zloma simetrije.

Primer nestabilnega pojava je svinčnik, postavljen na konico. Enačba, ki opisuje njegovo gibanje, je simetrična glede na rotacijo okrog osi svinčnika. Zato lahko najdemo rešitev z enako simetrijo, to je pokončna lega. Če pa svinčnik le malo izmaknemo iz simetrične lege, bo padel in končal v stanju brez rotacijske simetrije.

Po drugi strani pa je težno nihalo stabilen sistem. Če takšno nihalo zmotimo, bo motnja vseskozi ostajala približno majhna velika, zaradi trenja in zračnega

upora se bo s časom celo manjšala. Po dolgem času bo sistem spet v simetričnem stanju.

3 Hidrodinamika

3.1 Navier-Stokesova enačba

Tok nestisljive tekočine z gostoto ρ in viskoznostjo μ se podreja Navier-Stokesovi enačbi in ohranitvi mase. Enačbi za hitrost $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ in tlak $p(\mathbf{r}, t)$ se glasita

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

kjer je ρ gostota tekočine, μ pa njena viskoznost.

Kot običajno pri reševanju enačb si jo najprej poenostavimo tako, da preidemo na brezdimenzijske spremenljivke in čimbolj minimiziramo število parametrov. Izberimo si meri za dolžino x_0 in hitrost v_0 . Če uvedemo še brezdimenzijsko Reynoldsovo število $R = v_0 x_0 / \mu$, lahko enačbo zapišemo za brezdimenzijski spremenljivki U in P .

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = -\nabla P + R^{-1} \Delta U \quad (3)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (4)$$

3.2 Lineariziran problem

Stabilnost hidrodinamskega sistema lahko študiramo tako, da najprej najdemo osnovno rešitev, ki ji v hidrodinamiki rečemo *osnovni tok*. Ta rešitev je lahko podana analitično ali numerično, vsekakor pa se podreja Navier-Stokesovi enačbi.

Nato osnovnem toku dodamo motnjo, tako da dobimo *skupni tok*, zopet podan s hitrostjo $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ in tlakom $p = P + p'$. Tudi za skupni tok mora veljati N-S enačba, iz česar lahko izpeljemo enačbo za motnjo u' in p' .

Ker nas zanimajo le majhne motnje, lahko v enačbi zanemarimo vse člene kjer motnja nastopa v drugem ali višjih redih. Na ta način sistem zreduciramo na linearno diferencialno enačbo

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \mathbf{u}' \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (6)$$

Če je osnovni tok stacionaren, so koeficienti v linearnem sistemu enačb konstantni, torej takšno enačbo znamo rešiti. Ločimo lahko spremenljivki \mathbf{r} in t , splošno rešitev pa zapišemo kot linearno kombinacijo sinusnih motenj

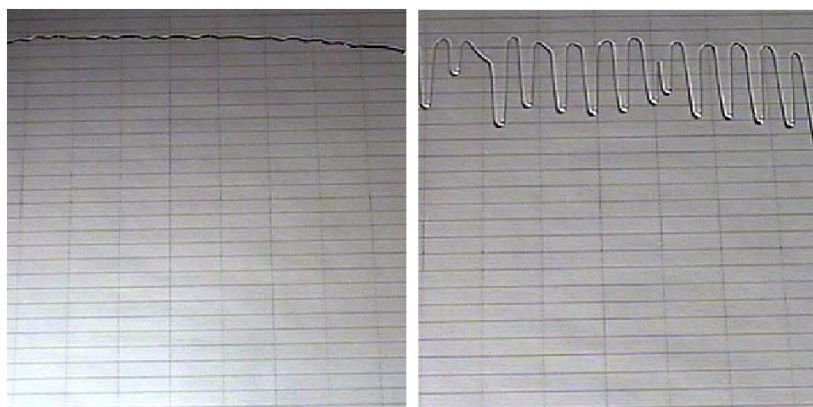
$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad (7)$$

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} p_i(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Hitro lahko vidimo, da bo tok nestabilen, če ima vsaj ena lastna vrednost s_i realni del večji od 0, v nasprotnem primeru pa bo stabilen. Problem stabilnosti sistema lahko torej prevedemo na iskanje lastnih vrednosti matrike. Sedaj tudi vidimo, da matematično natančni definiciji mere za velikost motnje in kriterija za stabilnost nimata velikega pomena, saj motnje v obliki normalnih valovnih načinov le eksponentno naraščajo ali padajo, njihova oblika pa ostaja enaka.

4 Tanki filmi

Hidrodinamsko nestabilnost lahko opazujemo pri polzenju tekočine po klančini [2]. Ta pojav je vsem dobro znan, saj ga lahko vidimo na avtomobilskih steklih v dežju, enostavno pa je tudi pripraviti poskus doma. Čeprav je samo reševanje zahteven postopek, pa lahko rezultat preverimo z eksperimentom.



Slika 1: Polzenje tanke plasti tekočine po nagnjeni površini. Majhne motnje v obliki fronte (levo) hitro prerastejo v vzorec, ki ni niti približno enakomeren, je pa periodičen (desno). Vir: [2]

Vzorec na sliki 1 lahko pojasnimo s kratkim razmislekom. Po klančini navzdol vodo poganja sila teže, zadržujeta pa jo viskoznost in površinska napetost, ki pa imata velik vpliv le na tanke plasti. Če majhna motnja ob nekem trenutku povzroči, da je na nekem mestu plast voda debelejša, imata tako viskoznost kot površinska napetost manjši vpliv na gibanje vode kot sila teže, zato bo na tistem mestu steklo več vode kot drugod, kar bo le okrepilo začetno motnjo, tako da bo na tistem mestu voda vedno lažje tekla.

Le z razmislekom pa ne znamo napovedati niti končne oblike fronte niti povprečne razdalje med mesti z večjim pretokom. Če nas to zanima, moramo tudi kaj izračunati.

4.1 Enačbe

Če privzamemo nestisljivost tekočine $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, se Navier-Stokesova enačba za tekočino na klanču poenostavi v

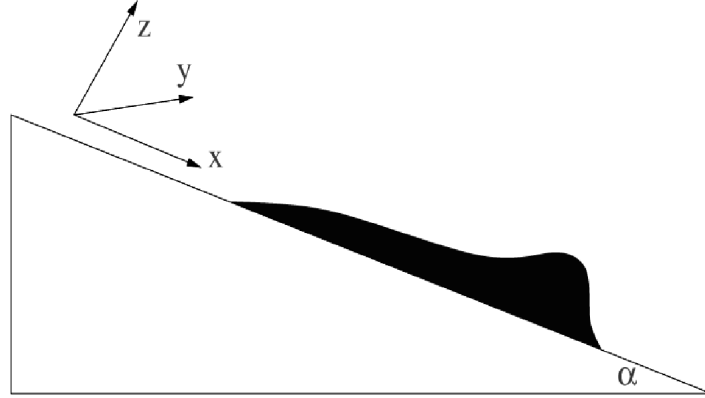
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + g(\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{k}) \quad (9)$$

kjer je \mathbf{u} hitrost tekočine, ρ njena gostota in μ viskoznost. Člena z g sta dinamična in statična komponenta sile teže. Pomembni so tudi robni pogoji, običajno se izbere sledeče:

- Na meji med tekočino in klancem tekočina ne drsi, torej je tam $\mathbf{u} = 0$.
- Na meji med tekočino in zrakom ima tlak nezveznost, ki jo sorazmerja površinski napetosti in ukrivljenosti meje κ .

Ker obravnavamo tanke filme, lahko privzamemo, da je debelina h manjša od katerekoli dolžinske skale v ravnini. S tem privzetkom lahko enačbo (9) poenostavimo v enačbo za h .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{3\mu} \nabla \cdot [\gamma h^3 \nabla \nabla^2 h - \rho g h^3 \nabla h \cos \alpha + \rho g h^2 \sin \alpha \mathbf{i}] \quad (10)$$



Slika 2: Skica tekočine v dveh dimenzijah. Viden je greben tik za fronto tekočine in pa zožitev daleč za fronto, ki je pri računih ne bomo upoštevali

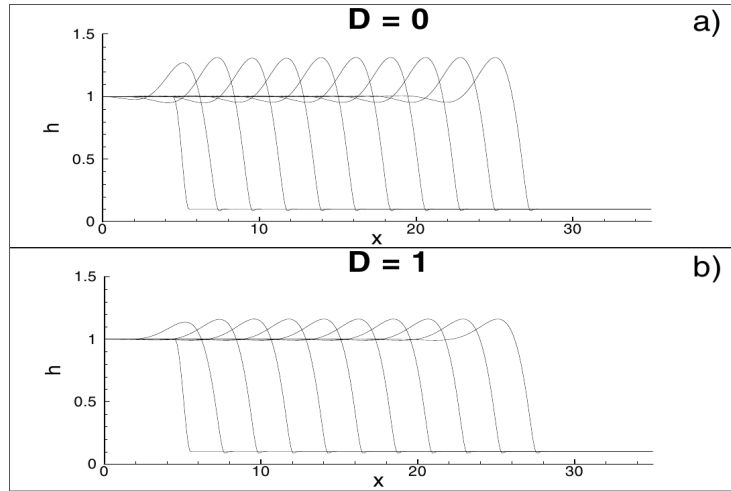
Da najdemo osnovno rešitev, najprej privzamemo, da ima rešitev enako simetrijo kot sama enačba. Postavimo se v koordinatni sistem kot na sliki 2. Klanec, po katerem teče tekočina, ima translacijsko simetrijo v smeri y , zato za osnovno rešitev velja $h_y = 0$. Ža lažje reševanje preidemo še na brezdimenzijske količine. V enačbi ostane le še en parameter $D(\alpha)$, ki podaja razmerje med vplivom viskoznosti in površinske napetosti, brezdimenzijsko dolžino klanca v smeri x pa označimo z L . Enačba za brezdimenzijske količine, ki predpostavlja simetrijo in zato opisuje osnovno rešitev problema, se glasi

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -[h^3 h_{xxx}]_x + D(\alpha) [h^3 h_x]_x - (h^3)_x \quad (11)$$

Pred začetkom reševanja moramo določiti tudi začetne in robne pogoje. Enačba je četrtega reda v x , zato potrebujemo štiri robne pogoje. Če začnemo s podobnim profilom kot na sliki 2, le da se rep nadaljuje do zgornjega roba klančine, velja $h(0, t) = 1$ po definiciji brezdimenzijse debeline, pred fronto pa je plast mnogo tanjša, $h(L, t) = b \ll 1$. Oba enakosti ne veljata le na robu območja, ampak tudi v njegovi bližini, zato za ostala dva robna pogoja vzamemo $h_x(0, t) = h_x(L, t) = 0$. Potrebujemo še začetni pogoj, ki je kar profil tekočine ob času $t = 0$. Naravna izbira je krivulja, ki povezuje dva ravna odseka z glatkim vmesnim delom.

4.2 Reševanje

Zgornja enačba je še vedno prezahtevna, da bi jo reševali analitično, zato posežemo po numeričnih metodah. Rešitev enačbe (11) lahko dobimo z uporabo metode na osnovi končnih diferenc. Enačba je prvega reda v času in četrtega reda v koordinati x , zato je najbolj pomembna izbira diskretizacije za x . Največ pozornosti moramo posvetiti diskretizaciji najvišjega člena v enačbi, ki je v našem primeru četrtega reda.



Slika 3: Profil tekočine pri različnih vrednostih parametra D . V obeh primerih se hitro oblikuje greben tik za fronto. Profili so prikazani v intervalih $\delta t = 2$, pri izbranih vrednostih $L = 40$ in $b = 0, 1$. Koordinata x je diskretizirana s korako $\Delta x = 0,05$ [2].

4.3 Nestabilnost

Osnovna rešitev $h_0(x, t)$ je sicer odvisna od časa, vendar lahko predpostavimo, da rob tekočine polzi s konstantno hitrostjo U . Časovno odvisnost koeficientov h_0 bomo torej odpravili, če se postavimo v koordinatni sistem, ki se giblje s to hitrostjo. V tem primeru uvedemo spremenljivko $\xi = x - Ut$ in $\nabla = (\partial_\xi, \partial_y)$, splošno rešitev pa lahko zapišemo v obliki

$$h(\xi, y, t) = h_0(\xi) + \varepsilon h_1(\xi, y, t) \quad (12)$$

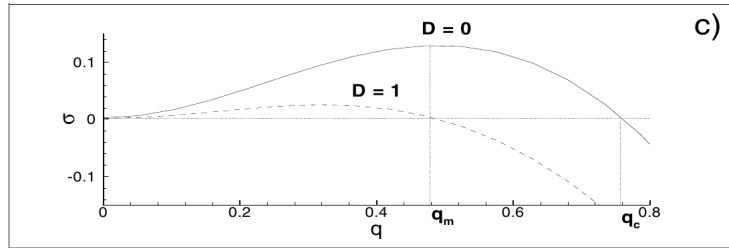
V tej sliki se h_0 ne spreminja s časom, torej smo dobili linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Ker želimo, da je motnja res majhna, predpostavimo, da sta h_0 in h_1 podobnega velikostnega reda, ε pa zelo majhen, dosti manjši od 1. Zgornji izraz vstavimo v enačbo (10) in zanemarimo vse člene z drugi in višjimi potencami ε .

Motnjo h_1 izberemo takšno, da zanjo ne drži translacijska simetrija v smeri y . Na sliki 1 vidimo, da je oblika fronte približno periodična, zato $h_1(\xi, y, t)$ raje zapišemo kot linearno kombinacijo normalnih valovnih načinov. V enačbi bo tako nastopala Fourierova transformiranka po koordinati y , ki jo označimo z $g(\xi, q, t)$, za katero velja

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\mathcal{L}g \quad (13)$$

Tu je \mathcal{L} linearni diferencialni operator s konstantnimi koeficienti. Zanimajo nas lastne vrednosti tega operatorja, zlasti tista z največjim realnim delom. Lastne vrednosti so odvisne od valovnega števila q oz valovne dolžine $\lambda = 2\pi/q$; pričakujemo, da bo valovna dolžina, pri kateri je lastna vrednost $s(q)$ največja, enaka razdalji med posameznimi pasovi na sliki 1, saj bo motnja s takšno valovno dolžino najhitreje naraščala.

Ker smo osnovno rešitev h_0 izračunali numerično, tudi matrične elemente operatorja \mathcal{L} poznamo le numerično.



Slika 4: Hitrost rasti σ majhne motnje z valovnim številom $q = 2\pi/\lambda$. Način z najhitrejšo rastjo q_m ustreza pričakovani razdalji med vzorci. [2].

5 Podobni pojavi

Polzenje tekočine po klancu seveda ni edini hidrodinamski pojav, kjer lahko opazimo nestabilnosti. Ker je to zelo široko področje, tu omenjam predvsem takšne pojave, ki so neposredno povezani s tokom tankih plasti tekočin.

5.1 Milni mehurčki

Milni mehurčki so stabilni na majhne motnje zaradi površinske napetosti tekočine. Če pa mehurček predremo v eni točki, ustvarimo rob, kjer površinska napetost ni uravnotežena, zato se rob začne umikati. Ker je opna običajno zelo tanka, je ukrivljenost na robu velika, zato fronta napreduje zelo hitro [4]. To napredovanje je pri mehurčkih tako hitro, da s prostim očesom fronte sploh ne opazimo,



Slika 5: Razpad milnega mehurčka [3].

ampak se nam zdi, da celoten mehurček razpade naenkrat. Pri opazovanju si lahko pomagamo s hitrimi kamerami, kot vidimo na sliki 5.

Podobno kot pri tankem filmu tudi tu obravnavamo tanko plast tekočine pod vplivom površinske napetosti. Pojava pa se močno razlikujeta pri viru nestabilnosti. Pri razpadu milnega mehurčka namreče ne opazimo nestabilnosti v obliki fronte, ampak v dejstvu, da opna razpade v kapljice. Pravzaprav gre za zloma dveh simetrij, ene v smeri premikanja fronte in druge v pravokotni smeri. Reševanje problema je mnogo lažje ob predpostavki, da se translacijska simetrija vzdolž roba ohranja, torej se osredotočimo le na prvi zlom simetrije. Kljub temu pa so enačbe še vedno prezapletene za analitično reševanje, zato posežemo po numeričnih metodah.

S pomočjo simulacije lahko napovemo velikost in hitrost kapljic, ki se odcepijo od opne.

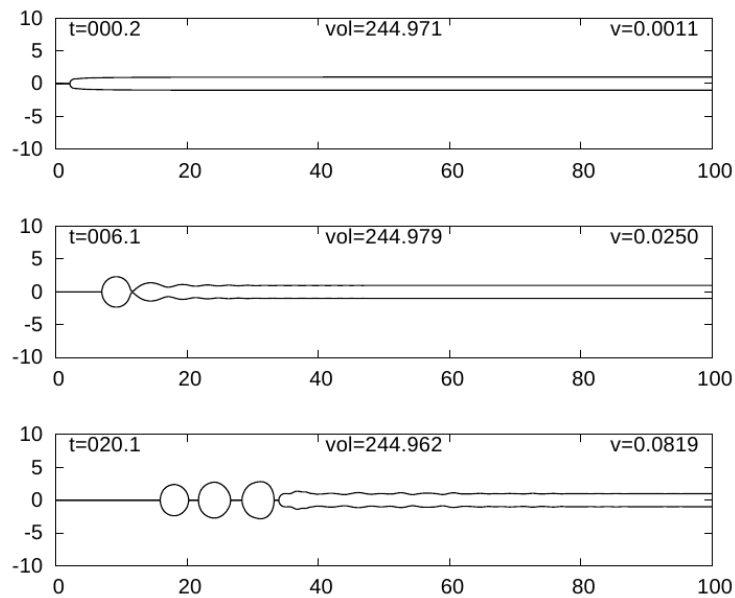
5.2 Kraški žlebiči

S slike 7 lahko vidimo, da žlebiči tvorijo podobno periodično strukturo kot tekočina na sliki 1. Tudi po izvoru sta pojava sorodna: Na tistih mestih, kjer čez žlebič steče več vode, se tudi raztopi več apnenca, torej postane kanal še globlji in skozenj teče še več vode.

Plast tekočine tu seveda ni tako tanka, da bi površinka nepotest igrala veliko vlogo, je pa še vedno debelina toka h dosti manjša od velikosti pobočja, na katerem se tvorijo žlebiči.

5.3 Razpad curka

Na nestabilnosti pogosto naletimo tudi pri študiju razpada curkov tekočin [6].



Slika 6: Časovno spreminjanje roba opne med razpadom milnega mehurčka. Vidno je premikanje fronte in tvorba kapljic s polmerom, ki je dosti večji od debeline opne.

6 Zaključek

Literatura

- [1] P. G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability*, Cambridge University Press (2002)
- [2] L. Kondic, *SIAM Review* **45**, 95 (2003)
- [3] <http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-1199149/Super-slow-motion-pictures-soap-bubble-bursting-stunning-detail.html> (23. 1. 2012)
- [4] S. Čopar, Numerična analiza nestabilnosti na robu tekočinske opne, Diplomsko delo (2009)
- [5] <http://sl.wikipedia.org/wiki/Žlebič> (2. 2. 2012)
- [6] J. Eggers in E. Villermaux, *Rep. Prog. Phys.* **71**, 036601 (2008)



Slika 7: Žlebiči na slovenskem Krasu pri Nabrežini [5]