Stohastični populacijski modeli

Miha Čančula

26. december 2011

1 Statistika časov izumrtja

2 Matrika prehodov

Verjetnost, da v določenem koraku umre n osebkov izračunamo po Poissonovi porazdelitvi:

$$\mathcal{P}(-n, \overline{n}) = \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}} \tag{1}$$

Če imamo model, kjer se osebki rojevajo in umirajo, moramo upoštevati oba člena ločeno in sešteti po vseh kombinacijah, ki nam dajo enako spremembo populacije.

$$\mathcal{P}(n, \overline{n}) = \sum_{n_r - n_s = n} \mathcal{P}(n_r, \overline{n_r}) \mathcal{P}(n_s, \overline{n_s}) = \sum_{n_r - n_s = n} \frac{\overline{n_r}^{n_r}}{n_r!} e^{-\overline{n_r}} \frac{\overline{n_s}^{n_s}}{n_s!} e^{-\overline{n_s}} \tag{2}$$

Povprečno število umrlih oz. rojenih osebkov $\overline{n_i}$ lahko izrazimo s parametrom β, velikostjo populacije in dolžino časovnega koraka

$$\overline{n_i} = \beta_i N \Delta t \tag{3}$$

Če vzamemo dovolj majhnen korak Δt, bo $\overline{n}$ mnogo manjši od 1 in bodo verjetnosti za velike spremembe števila populacije majhne. V tem primeru lahko upoštevamo le člene z $n = 0$ in $n = \pm 1$.

2.1 Paremetrizacija stanj

Stanje z velikostjo populacije N lahko zapišemo kot vektor $\vec{v}$ z $M + 1$ komponentami, $M \geq N$, ki ima vse N-to komponento enako 1, ostale pa 0. Pri tem smo morali postaviti zgornjo mejo za velikost populacije M, vektor pa ima še dodatno komponento za stanje s populacijo 0. Stanja, ki imajo le eno neničelno komponento, so čista stanja, zaradi stohastičnosti procesa pa po vsakem koraku dobimo mešano stanje, ki pomeni, da je velikost populacije porazdeljena po neki verjetnostni porazdelitvi.

Vsak časovni korak lahko predstavimo z opracijo, ki je linearna v v, torej jo lahko zapišemo kot matriko dimenzije $M + 1 \times M + 1$. Elementi te matrike so verjetnosti za prehod iz j-tega v i-to stanje

$$W_{i,j} = P(j \to i) = \mathcal{P}(j - i, \overline{n}(j)) \tag{4}$$

2.2 Eksponentni model

Pri tem modelu se osebki ne rojevajo, zato je velikost populacije monotono padajoča, torej bo matrika prehodov spodnje trikotna. Predpostavili smo, da je Δt tako majhen, da je $\beta N \Delta t = \varepsilon << 1$

$$W_{i,j} = \mathcal{P}(j - i, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^{(j-i)}}{(j-i)!} e^{-\varepsilon} \tag{5}$$

Ker je ε majhen, lahko člene z ε^2 zanemarimo, tako da ostanejo le še elementi na diagonali in tik pod njo

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1 - \beta j \Delta t, & i = j \\ \beta j \Delta t, & i = j - 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \tag{6}$$

2.3 Rojstva in smrti

Podobno kot prej zanemarimo verjetnosti, da se rodi ali umre več kot en osebek v vsakem časovnem koraku. Tudi v verjetnosti, da se en rodi in en umre, nastopa ε z drugo potenco, torej ga lahko zanemarimo. Ostanejo nam le tri možnosti: eno rojstvo, ena smrt, ali pa ohranitev istega stanja. V primerjavi s prejšjim izrazom moramo matriki dodati le še diagonalo nad glavno, ki dopušča rast populacije.

$$W_{i,j} = \begin{cases} \beta_r j \Delta t, & i = j + 1 \\ 1 - (\beta_r + \beta_s) j \Delta t, & i = j \\ \beta_s j \Delta t, & i = j - 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \tag{7}$$

2.4 Diferencialne enačbe

Ker matrika prehodov predstavlja en časovni korak simulacije, lahko z limitiranjem časovnega intervala pridemo do sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{\vec{v}} = W \vec{v} \tag{8}$$

Takšen sistem znamo rešiti, tako da poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike W.