Rešitev domače naloge 7.6

Miha Čančula

18. januar 2013

Povzetek

a) Gaussov snop pošljemo skozi tanek nelinearni kristal debeline d, kjer pride do optičnega Kerrovega pojava $n(I) = n_0 + n_2 I$. Pokaži, da tak material deluje kot leča. Izračunaj goriščnico f. Namig: vzemi intenzitetni profil $I = I_0(1 - \frac{2r^2}{w^2})$ ter upoštevaj, da je kompleksna prepustnost t za zbiralno lečo z goriščnico f sorazmerna z $\exp(-ikr^2/2f)$.

b) Izračunaj mejhno moč, pri kateri bo širina snopa v kristalu ostala konstantna

c) V kristal pošljemo tri vale s frekvencami ω_1, ω_2 in ω_3, polariziranimi v smeri x. Zapiši komponento nelinearne polarizacije $P_x^{(NL)}$ pri frekvenci ω_1 in pokaži, da se ta val širi s hitrostjo $c_0/(n + \Delta n)$, kjer je $\Delta n = n_2(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|)$, $n_2 = \frac{3}{4}\chi^{(3)}$.

1 Goriščnica

Intenziteta svetlobe v Gaussovem snopu z oddaljenostjo od osi pada kot $I = e^{-2r^2/w^2} \approx I_0(1 - \frac{2r^2}{w^2})$. Zaradi Kerrovega pojava je od oddaljenosti od osi odvisen tudi lomni količnik, in sicer

$$n(r) = n_0 + n_2 I(r) = n_0 + n_2 I_0 - 2n_2 I_0 \frac{r^2}{w^2}$$

Kompleksna prepustnost kristala je odvisna od njegove debeline in valovne dolžine svetlobe. V kristalu s Kerrovim pojavom je odvisna od radija r kot

$$t(r) \propto e^{ikd} = e^{ik_0 d n(r)} = e^{ik_0 d(n_0 + n_2 I_0)} e^{-2ik_0 d n_2 I_0 r^2/w^2}$$

Od r je odvisen le drugi faktor. Če tega primerjamo z izrazom za prepustnost zbiralne leče, lahko izračunamo goriščnico

$$-2ik_0 d n_2 r^2/w^2 = -ik_0 r^2/2f$$
$$f = \frac{w^2}{I_0 n_2 d}$$

2 Konstantna širina

Gaussov snop se znotraj kristala širi zaradi uklona svetlobe, hkrati pa se oži ker kristal deluje kot zbiralna leča. V primeru, da se oba prispevka ravno izničita, bo širina snopa ostala konstantna. Polje v Gaussovem snopu je sorazmerno z

$\exp(ikr^2/2R(z))$, kjer je $R(z) = z + z_0^2/z$. Eksponent ima nasproten predznak kot pri prepustnosti leče, zato lahko najdemo takšno kombinacijo parametrov, da se bosta prispevka ravno izničila.

2.1 Pri $z = z_0$

Privzamemo lahko, da je intenziteta dovolj velika za izrazit Kerrov pojav le znotraj grla snopa, zato se lahko postavimo v mejo grla, torej pri $z = z_0$.

$$ik\frac{r^2}{2R(z_0)} - 2ikdn_2I_0\frac{r^2}{w^2} = 0$$

Krivinskih radij valovnih front pri z_0 je enak $2z_0$, za debelino kristala pa vzamemo kar z_0. Ker nas zanima pogoj za konstantno širino snopa, se ta v kristalu ne širi, in je njegova širina povsed enaka w_0.

$$ik\frac{r^2}{4z_0} - 2ikz_0n_2I_0\frac{r^2}{w_0^2} = 0$$

$$\frac{1}{4z_0} = 2z_0n_2I_0\frac{1}{w_0^2}$$

$$I_0 = \frac{w_0^2}{8z_0^2n_2}$$

Če poznamo intenziteto I_0 in širino snopa w_0, lahko zapišemo mejno moč kot

$$P_m = 2\pi\int I_0e^{-2r^2/w_0^2}r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}I_0w_0^2\varepsilon_0c$$

$$P_m = \frac{\pi w_0^4}{16z_0^2n_2}\varepsilon_0c = \frac{\lambda^2\varepsilon_0c_0}{16\pi n_2n}$$

2.2 Pri zelo majhnem z

Zgoraj smo predpostavili, da se žarek vzdolž razdalje z_0 ne širi. Hkrati pa smo uporabili izraz za ukrivljenost Gaussovega snopa na tej dolžini, ki predpostavlja širjenje žarka. Teh nasprotujočih se predpostavk se lahko znebimo, če isti račun ponovimo za zelo majhen z. V tem primeru izraz za $1/R(z)$ razvijemo

$$1/R(z) = \frac{z}{z^2+z_0^2} \approx \frac{z}{z_0^2}$$

Ostali parametri so enaki, zato lahko kot prej izenačimo.

$$ik\frac{r^2}{2R(z_0)} - 2ikdn_2I_0\frac{r^2}{w^2} = 0$$

$$ik\frac{zr^2}{2z_0^2} - 2ikzn_2I_0\frac{r^2}{w^2} = 0$$

$$\frac{1}{2z_0^2} - 2n_2I_0\frac{1}{w^2} = 0$$

$$I_0 = \frac{w_0^2}{4z_0^2 n_2}$$

Dobili smo izraz, ki je dvakrat večji od tistega pri $z = z_0$. Ustrezno je tudi mejna moč dvakrat večja.

3 Nelinearna polarizacija

V kristalu so prisotni trije žarki z enako polarizacijo in različnimi frekvencami. Realno električno polje lahko torej zapišemo kot

$$E = \frac{1}{2}\left(E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_1^* e^{\omega t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_2^* e^{\omega_2 t} + E_3 e^{-i\omega_3 t} + E_3^* e^{\omega_3 t}\right)$$

Ker so vse tri polarizacije v smeri x, lahko računamo s skalarnimi polji, implicitno pa upoštevamo, da so to x komponente električnega polja. Nelinearno polarizacijo izrazimo kot

$$P^{(NL)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3$$

Ker nas zanima komponenta pri frekvenci ω_1, moramo upoštevati vse člene v zgornjem izrazu, kjer se frekvence seštejejo v $\pm\omega_1$. Najprej poiščimo vse člene z vsoto frekvence $+\omega_1$. V izrazu nastopa kub skupnega električnega polja, zato iščemo produkte po treh členov z vsoto frekvence ω_1. Med frekvencami no nobene povezave, zato lahko takšno vsoto dobimo le na naslednje načine

- $\omega_1 + \omega_1 - \omega_1$. Takšni členi so trije, saj lahko člen z negativno frekvenco vzamemo iz vsakega izmed treh faktorjev. Amplituda je v vseh primerih enaka $E_1 E_1 E_1^*$.
- $\omega_1 + \omega_2 - \omega_2$. Takšnih členov je 6, saj lahko člen s frekvenco ω_1 vzamemo iz vsakega izmed treh faktorjev, druga dva člena pa lahko še zamenjamo. Amplituda je v vseh primerih enaka $E_1 E_2 E_2^*$.
- $\omega_1 + \omega_3 - \omega_3$. Enak razmislek kot pri prejšnji alinei, tudi teh členov je 6, amplitude pa so enake $E_1 E_3 E_3^*$.

Ker je električno polje realna količina, je členov z negativno frekvenco enako kot tistih s pozitivno, njihove amplitude pa so ravno kompleksno konjugirane. Skupna nelinearna polarizacija pri frekvenci ω_1 je torej enaka

$$P^{(NL)}(\omega_1) = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8}\left(3|E_1|^2 + 6|E_2|^2 + 6|E_3|^3\right)\left(E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_1^* e^{i\omega_1 t}\right)$$

Fazo enega izmed valov si lahko izberemo poljubno, zato lahko privzamemo, da je skalarna količina E_1 realna zapišemo

$$P^{(NL)}(\omega_1) = \frac{3}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)}\left(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|^3\right) E_1 \cos\omega_1 t$$

Razmerje med nelinearna polarizacija in električnim poljem E_1 je popravek k kvadratu lomnega količnika

$$n^2 = n_0^2 + \Delta n^2 = n_0^2 + \frac{3}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} \left(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|^3 \right)$$

Popravek k lomnemu količniku lahko izračunamo z razvojem

$$n = n_0 + \Delta n = \sqrt{n_0^2 + \Delta n^2} \approx n_0 + \frac{\Delta n^2}{2n_0}$$

$$\Delta n = \frac{3\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8n_0} \left(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|^3 \right)$$