Gibanje gravitacijske vrtavke

Miha Čančula

28. avgust 2012

Povzetek

Razišči gibanje splošne gravitacijske vrtavke s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{1}{2J_s} l_s^2 + mga_s n_s \right) \tag{1}$$

kjer so l_1,l_2,l_3 komponente vrtilne količine vzdolž lastnih osi teznorja vztrajnostnega momenta J, $\mathbf{e}_s$, in $J\mathbf{e}_s = J_s\mathbf{e}_s$, n_1,n_2,n_3 pa so vertikalne komponente lastnih osi, $n_s = (0,0,1)\cdot\mathbf{e}_s$. $\mathbf{l}$ in $\mathbf{e}$ predstavljajo kanoničen set dinamičnih spremenljivk s sledečo (Liejevo) algebro Poissonovih oklepajev

$$\{l_r, l_s\} = \sum_t \varepsilon_{rst} l_t \tag{2}$$

$$\{l_r, n_s\} = \sum_t \varepsilon_{rst} n_t \tag{3}$$

$$\{n_r, n_s\} = 0 \tag{4}$$

kjer je ε_{rst} popolnoma antisimetričen Levi-Civitajev tenzor. Vzemi npr. perturbirano Langrangeovo vrtavko, s parametri (Δ, a, λ), $J_1 = J_2 = 1$ in $J_3 = \Delta$, ter $a_1 = \lambda$, $a_2 = 0$, $a_3 = a$, tako da je za $\lambda = 0$ vrtavka integrabilna. Napravi smiselno predstavitev dinamike s Poincarejevo preslikavo in poskusi določiti relativen delež kaotičnega faznega prostora (energijske lupine, pri neki energiji E) v odvisnosti od perturbacijskega parametra λ.

1 Enačbe gibanja

Enačbe gibanja vrtavke v Hamiltonovi formulaciji se glasijo

$$\dot{l}_s = \{H, l_s\} \tag{5}$$

$$\dot{n}_s = \{H, n_s\} \tag{6}$$

V Hamiltonianu nastopajo tako l_s kot n_s, njihove medsebojne Poissonove oklepaje pa poznamo. Netrivialni so le členi z l_s^2, zato moramo najprej izračunati Poissonove oklepaje oblike

$$\{l_s^2, l_r\} = \sum_i \left(\frac{\partial l_s^2}{\partial q_i}\frac{\partial l_r}{\partial p_i} - \frac{\partial l_s^2}{\partial p_i}\frac{\partial l_r}{\partial q_i} \right) = 2l_s \sum_i \left[\frac{\partial l_s}{\partial q_i}\frac{\partial l_r}{\partial p_i} - \frac{\partial l_s}{\partial p_i}\frac{\partial l_r}{\partial q_i} \right] = 2l_s\{l_s, l_r\} \tag{7}$$

Uporabili smo kanonične spremenljivke q_i in p_i, ki nastopajo v definiciji Poissonovega oklepaja. Fizika ni odvisna od izbire teh spremenjivk, in tudi v nadaljnjem računanju jih ne bomo potrebovali.

Sedaj lahko zapišemo tudi enačbe gibanja v ekplicitni obliki

$$\dot{l}_s = \{H, l_s\} = \frac{l_{s+1}}{J_{s+1}} l_{s+2} - \frac{l_{s+2}}{J_{s+2}} l_{s+1} - mga_{s+1}n_{s+2} + mga_{s+2}n_{s+1} \tag{8}$$

$$\dot{n}_s = \{H, n_s\} = \frac{l_{s+1}}{J_{s+1}} n_{s+2} - \frac{l_{s+2}}{J_{s+2}} n_{s+1} \tag{9}$$

kjer upoštevamo ciklične indekse, $l_{s+3} = l_s$.
Za naš poseben primer vrtavke, z določinim vrednostmi za J_s in a_s, se enačbe glasijo

$$\dot{l}_1 = l_2 l_3 \left(1 - \frac{1}{\Delta}\right) + mgan_2 \tag{10}$$

$$\dot{l}_2 = l_3 l_1 \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right) + mg\left(\lambda n_3 - an_1\right) \tag{11}$$

$$\dot{l}_3 = -mg\lambda n_2 \tag{12}$$

$$\dot{n}_1 = l_2 n_3 - \frac{l_3 n_2}{\Delta} \tag{13}$$

$$\dot{n}_2 = \frac{l_3 n_1}{\Delta} - l_1 n_3 \tag{14}$$

$$\dot{n}_3 = l_1 n_2 - l_2 n_1 \tag{15}$$

2 Poincarejeva preslikava

Vrtavka nima nobene lastne časovne enote ali od zunaj določene frekvence. Kljub temu pa se sistem vrti, zato je najbolj primerna Poincarejeva preslikava. Preostane nam le še izbira količine, ki jo bomo določili s sečno ploskvijo.

Element faznega prostora je podan s tremi komponentami vrtilnime količiname in tremi komponentami orientacije. Vrtilna količina v osnovi ne periodična, zato nobene izmed njenih komponent nisem upošteval pri preslikavi. Ostanejo nam tri količine, ki določajo orientacijo vrtavke.

Lagrangeva vrtavka ima dve enaki vrednosti vztrajnostnega momenta, tretja (J_3) pa je od njiju različna. Takšne so tudi običajne vrtavke, ki jih vrtimo na ravni površini. Ta asimetrija jim da preferenčno smer, iz izkušenj vemo, da se večina vrtavk vrti predvsem v smeri osi z. V tem načinu gibanja se komponenta n_3 le počasi spreminja, medtem ko n_1 in n_2 nihata s frekvenco vrtenja vrtavke. Naravni izbiri za sečno ploskev sta torej takšni, da je n_1 ali n_2 enaka nič, izbrati moramo pa še predznak njenega časovnega odvoda. Od predznaka odvoda ni nič odvisno, zato sem lahko izbral, naj bo pozitiven.

Pri nezmoteni vrtavki sma smeri x in y povsem enakovredni, zato je vseeno, katero izmed komponent n_1 ali n_2 izberemo. Motnja λ pa to simetrijo zlomi. Če izhodišče koordinatnega sistema postavimo v težišče vrtavke, je pri nemoteni prijemališče na osi z, motnja pa ga premakne nekam na ravnino xz. Edini lastni vektor, ki je še vedno pravokoten na prijemališče, je e_y oz. e_2. Za sečno ploskev sem zato izbral pogoj $n_2 = 0$ in $\dot{n}_2 > 0$.

3 Ljapunovi eksponenti

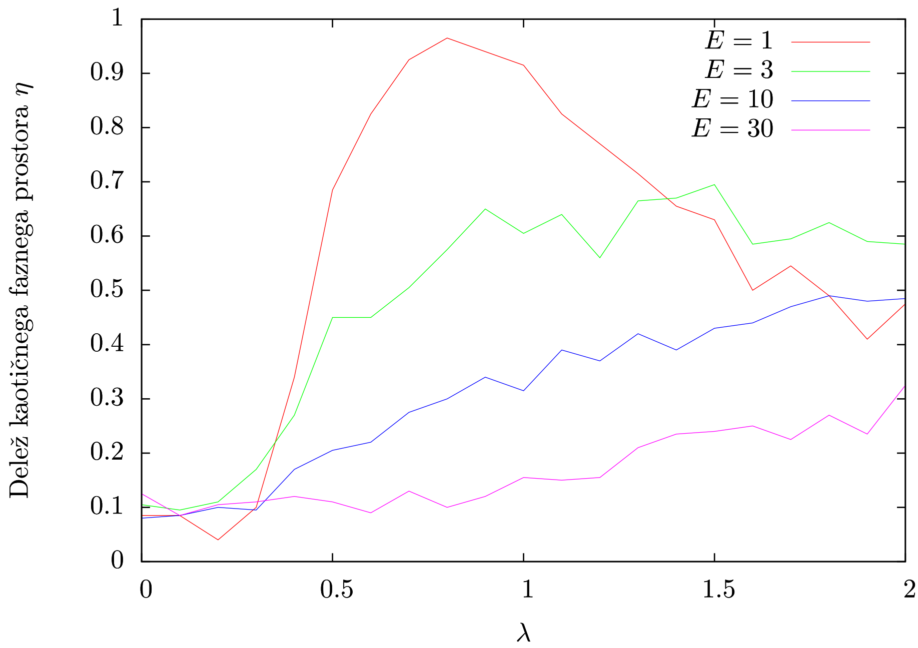
Kaotičnost sistema sem določal z največjim Ljapunovim eksponentom. Ta eksponent sem izračunal numerično, s simulacijo dveh bližnjih orbit.

Velikost eksponenta nas v resnici ne zanima, pomembno je le, ali je večji od 0. Ravno s takšnimi kriteriji imajo numerične metode največje težave. Zato sem se potrudil doseči čim večjo natančnost, tako da sem izračunal relativno razhajanje orbit po vsaki izmed 200 iteracij Poincarejeve preslikave. Logaritmom izračunanih razhajanj sem prilagodil linearno funkcijo, nato pa ugotavljal, ali je dobljeno naraščanje dovolj močno, da lahko trdimo, da je Ljapunov eksponent pozitiven.

Na vsakem koraku sem orbiti reskaliral, tako da je razlika med njima vedno ostala majhna. Velikosti relativnih skokov na vsakem koraku sem prilagodil funkcijo $y(t) = a + b/t$, saj v primeru kaosa pričakujemo konstanto, drugače pa padanje kot $\sim 1/t$. Funkcijo sem prilagajal s knjižnico `GSL`, ki vrne tudi kovariančno matriko, iz katere lahko preberemo napako posameznega koeficienta. Orbito sem štel kot kaotično, če je bil koeficient a večji od absolutne vrednosti svoje napake.

4 Delež kaotičnega faznega prostora

Fazni prostor sem omejil z največno energijo E, nato pa naključno izbral po 200 začetnih točk znotraj energijske lupine in izračunal največji Ljapunov eksponent za ta začetni pogoj. Preštel sem, v koliko primerih je bila orbita kaotična, v odvisnosti od parametra motnje λ. Rezultati so na sliki 4.



Po pričakovanju kaotičnost narašča z velikostjo motnje λ. Kljub temu, da je Lagrangeva vrtavka z $\lambda = 0$ integrabilna, sem vseeno dobil določen delež (približno 10%) kaotičnosti. To pripisujem predvsem napakam numeričnega računanja.

Nepričakovan rezultat pa je, da kaotičnost pada z naraščanjem energije, torej je kaotičen predvsem del faznega prostora z nizkimi energijami oz. počasnim vrtenjem vrtavke.