

# Navadne diferencialne enačbe: Robni problem

Miha Čančula

15. marec 2012

## 1 Napeta vrv

Reševani sistem ima dva prosta parametra:  $\beta$ , ki podaja razmerje med kotno hitrostjo in težo vrvi, in razdaljo med pritrjenima točkama  $y_0$ .

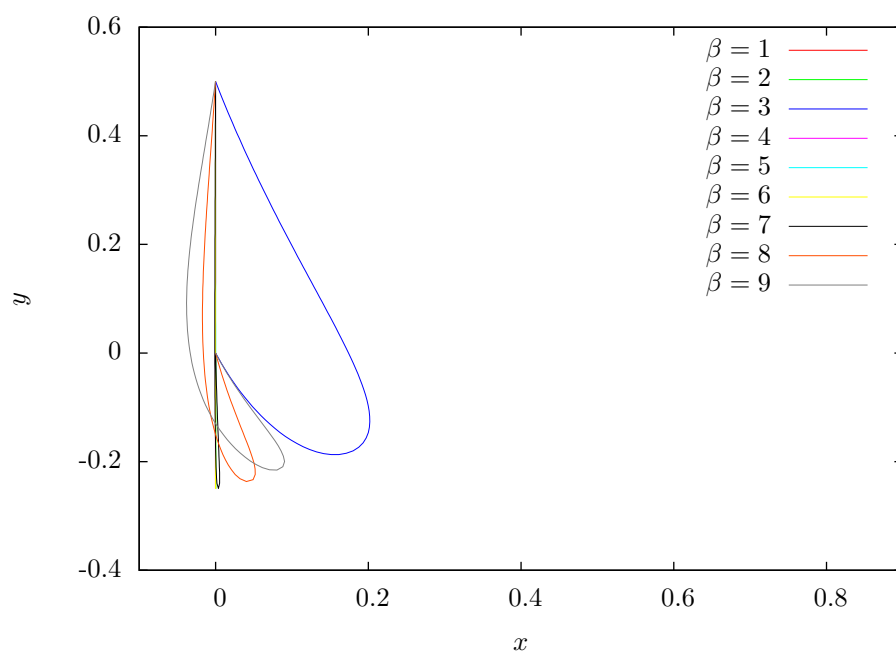
Fizikalna predstava nam pove, da ima vrv, ki jo pritrdimo na obeh koncih na vrtečo se os vsaj eno stabilno obliko. Ena izmed možnih rešitev je trivialna, kjer vrv visi navpično ob palici in ne čuti centrifugalne sile. Ta rešitev je možna in stacionarna pri vseh vrednostih  $\beta$  in  $y_0$ , ni pa vedno stabilna. V izbranem koordinatnem sistem to ustreza  $\alpha(0) = \pi/2$ , zato sem opazoval kam konvergira metoda, če začnemo z malo manjšim kotom. Stabilnost v tem primeru določa le konvergenca izbrane metode, ne pa fizikalne stabilnosti, saj metoda razen v ravnovesju nikakor ne upošteva sile na vrv oz. njene energije.

Vse možne rešitve sem našel s strelsko metodo. Prosta parametra, katerih vrednosti iščemo, sta napetost in naklon vrvi v začetni točki.

### 1.1 Rezultati

Najprej sem preizkusil stabilnost prostega visenja vrvi. Intuitivno sem domneval, da je pri majhnih  $\beta$  viseča lega edina možna rešitev, pri dovolj hitrem vrtenju pa se pojavi tudi stabilna lega, ko je vrv napeta v obliki črke D. To napoved sem preveril, tako da sem za začetno vrednost kota  $\alpha$  najprej vzel  $\alpha = -\pi/2$ , kar ustreza navpični legi vrvi.

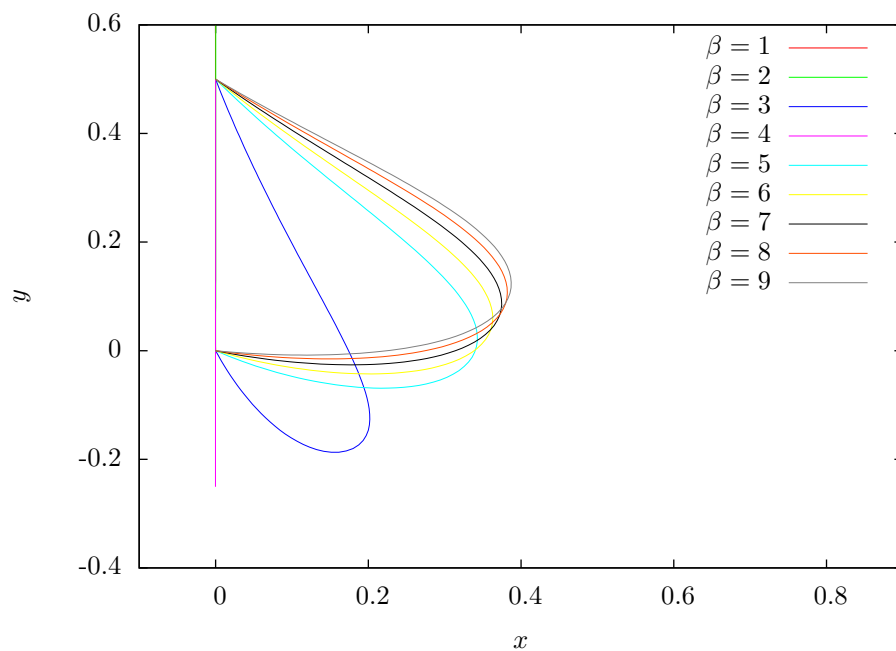
Če začnemo s točno vrednostjo  $\alpha = -\pi/2$ , potem metoda vedno obstane v viseči rešitvi. Bolj zanimivo je bilo opazovati, kaj se zgodi, če začnemo blizu tega kota. Na sliki 1 so prikazane najdene rešitve pri  $\alpha(0) = -\pi/2 + 0.2$ . Bližje navpičnega kota tudi pri velikih  $\beta$  dobimo le visečo rešitev.



Slika 1: Stabilnost navpičnega visenja

Vidimo, da je celotna slika odvisna od parametra  $\beta$ . Dobimo dve pričakovani sliki, visečo in napeto v obliki črke D. Pri hitrejšem vrtenju pa se pojavi tudi nepričakovana rešitev, kjer vrv visi na obe strani.

Nazadnje sem uporabil se začetni pogoj  $\alpha(0) = 0$ , torej sem pričakoval, da bo vrv v spodnjem pritrdišču približno vodoravna. S tem sem želel najti napeto rešitev, če ta pri določenih  $\beta$  in  $y_0$  sploh obstaja.



Slika 2: Netrivialna rešitev, če začnemo v vodoravni legi

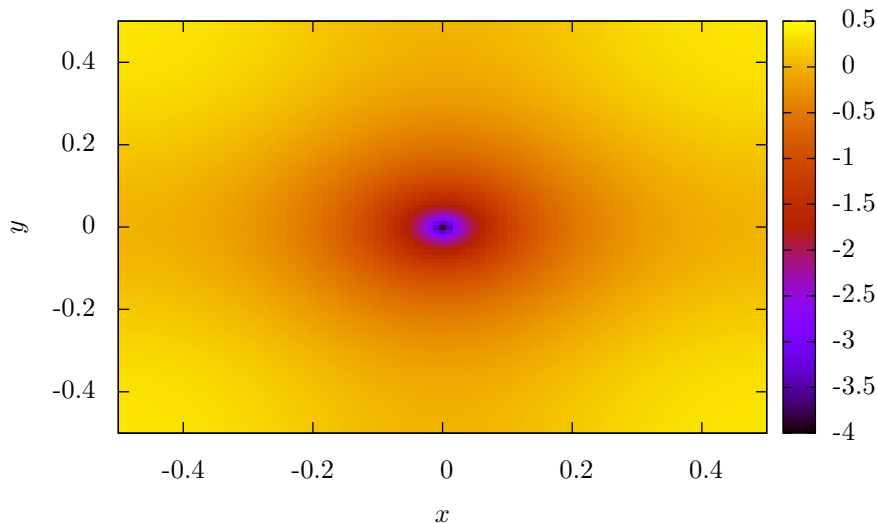
V tem primeru je meja, ko se vrv vrne v navpično stanje, nekje med 2 in 3. Obstajajo torej

določene hitrosti vrtenja, ko imamo dve stabilni stanji.

Opazimo tudi nefizikalno rešitev pri  $\beta = 2$  (zeleni črta), ko se vrh povzpne nad drugo pritrdišče.

## 2 Kristal

Opazujemo gibanje delca, ujetega v potencialu, kot je na sliki 3



Slika 3: Potencial v eni osnovni celici

### 2.1 Gibalna enačba

Ker imam podan potencial  $U(x, y)$ , lahko zapišemo Lagranžijan problema kot

$$\mathcal{L}(x, y, u, v) = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) - \frac{1}{2} \ln (\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y) \quad (1)$$

Spremenljivki  $u$  in  $v$  sta brezdimenzijska impulza v smereh  $x$  in  $y$ , ki sta že reskalirana z maso in nabojem delca. Časovna odvoda koordinat  $x$  in  $y$  sta kar impulza, časovna odvoda impulzov pa izrazimo iz Euler-Lagrangevih enačb za  $\mathcal{L}$ .

$$\dot{x} = u \quad (2)$$

$$\dot{y} = v \quad (3)$$

$$\dot{u} = -\pi \frac{\sin \pi x \cos \pi x}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y} \quad (4)$$

$$\dot{v} = -\pi \frac{\sin \pi y \cos \pi y}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y} \quad (5)$$

### 2.2 Minimizacija in streška metoda

Iskali smo sklenjene orbite za delec, ki se giblje v takšnem potencialu. Knjižnica **GSL** ima specializirane metode za iskanje korenov enačbe z enakim številom neznank kot enačb, zato sem uporabil te. Sklenjena orbita pomeni enakost štirih skalarnih količin, zato sem dovolil spreminjanje štirih vhodnih parametrov, ki so bili štirje. Trije izmed teh so določali začetni pogoji za integracijo (ker začnemo

na diagonali ostanejo prosti parametri le trije), četrti pa je določal periodo orbite oz. zgornjo mejo integracije.

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \tau \\ x_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \int_0^\tau \mathbf{F}(x, y, u, v) dt \quad (6)$$

Zaradi velikega števila prostostnih stopenj sem moral funkciji cenilki  $\mathbf{S}$  dodati nekaj omejitev.

1. Če v integral vstavimo čas  $\tau = 0$ , bomo očitno končali v isti točki kot smo začeli, čeprav temu ne moremo reči orbita. Zato sem v primerih s  $\tau < 1$  preskočil integracijo in namesto nje rešitvi priredil veliko odstopanje.
2. V težave zaidemo tudi, če sta  $u_0$  in  $v_0$  obrnjena v isto smer. Tedaj se namreč orbita delca približa singularnost potenciala, kar povzroči nenatančnosti v računanju. Temu sem se izognil na podoben način, tako da sem primerom z  $u_0 \cdot v_0 > 0$  priredil veliko odstopanje od iskane vrednosti.
3. Pri dovolj veliki oddaljenosti od sređišča potenciala ali dovolj veliki hitrosti se zgodi, da delec odleti iz osnovne celice. V tem primeru sem integracijo prekinil, cenilki pa spet dodal neko dodatno vrednost.

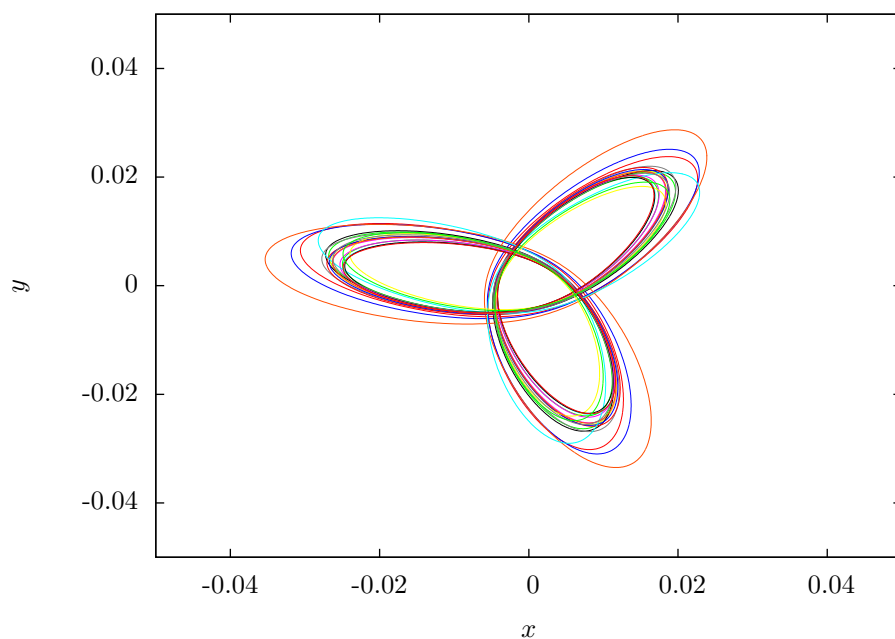
Ker metoda pri iskanju rešitve uporablja diskretno aproksimacijo za Jacobijevo matriko, sem poskrbel, da so bili pribitki tako izbrani, da je večje odstopanje od iskanega intervala pomenilo večjo napako.

Račun sem izvedel pri različnih vrednostih  $x_0$ ,  $u_0$  in  $v_0$  med 0 in  $\frac{1}{2}$ . Pri vsaki kombinaciji vhodnih podatkov sem opazoval, h kateri točki konvergira metoda.

## 2.3 Rezultati

Program sem pognal z naborom različnih začetnih pogojev, tako da sem iskal rešitev s spreminjanem  $x_0$ ,  $u_0$  in  $v_0$ . Začetni čas integracije orbite sem vzel majhno, da bi našel predvsem orbite s kratkimi periodami. Na daljših periodah se napake integracije bolj izrazijo, zlasti ker grejo takšne večkrat v bližino singularnosti potenciala.

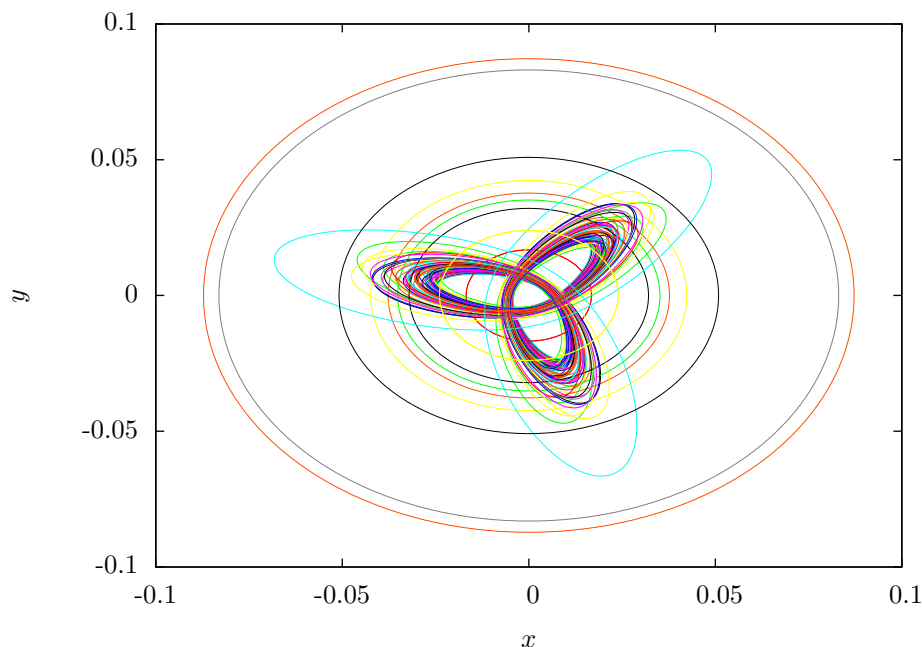
Uporabil sem približno 1000 različnih kombinacij začetnih pogojev, program je našel stabilno orbito v 300 primerih, pri tem pa se večina orbit ponavlja. Prvih 20 najdenih orbit, ki ustrezajo začetom v bližini središča osnovne celice (majhnim  $x_0$ ), je prikazanih na sliki 4.



Slika 4: Prvih 20 najdenih sklenjenih orbit

V vseh primerih je  $x_0 \approx 0.02$ . Pri tej vrednosti dobimo množico orbit, ki so med seboj le malo zasukane in raztegnjene. Razlike med njimi so morda tudi posledica numeričnih napak med integracijo. V neposredni bližini singularnosti torej najdemo predvsem triperesne orbite.

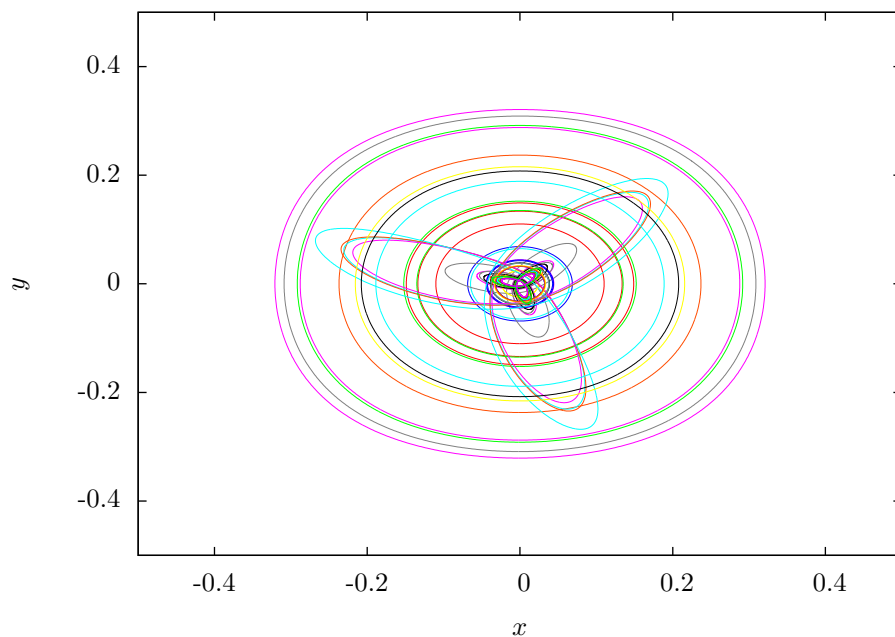
Če se bolj oddaljimo od središča se pojavijo tudi stabilne krožne orbite. Na sliki 5 je prvih 80 najdenih orbit. Na sliki sta še vedno le dve obliki orbit, krožne in triperesne.



Slika 5: Prvih 80 najdenih sklenjenih orbite

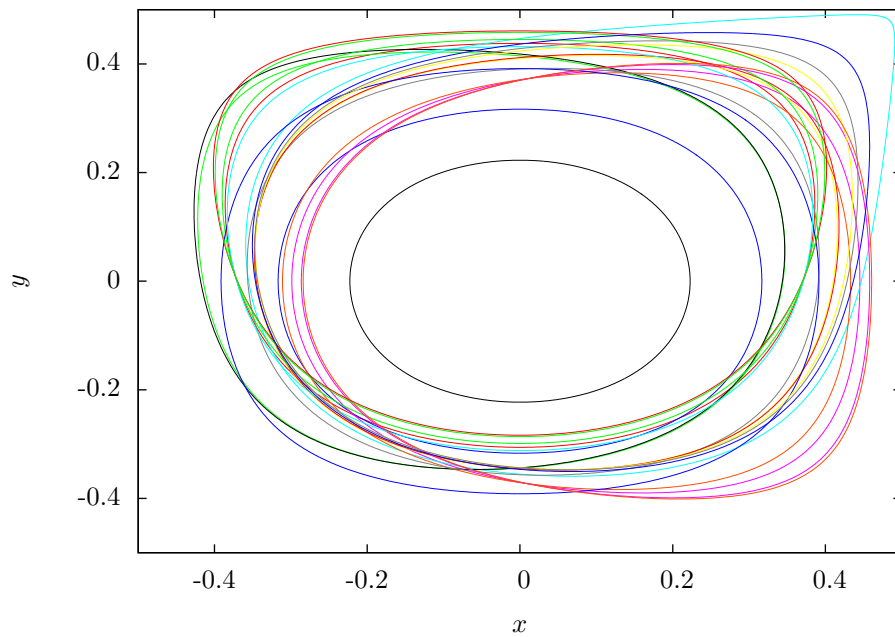
Na večji oddaljenosti pol v potencialu nima takšnega vpliva, zato dobimo večinoma krožne orbite. Predvsem pri tistih z veliko oddaljenostjo od središča pa že lahko opazimo odstopanje

od okrogle oblike. Tam potencial ni več središčno simetričen, ampak se pozna kvadratna oblika osnovne celice.



Slika 6: Sklenjene orbite na srednji oddaljenosti

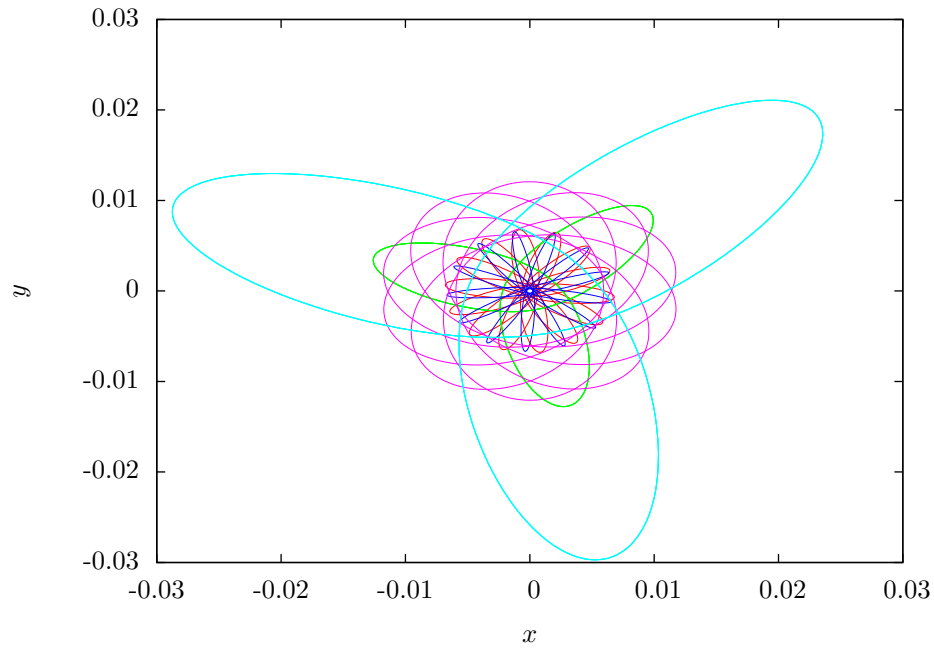
Ko začetno oddaljenost od središča večamo, pridemo do orbit na sliki 7. Zunanje orbite ne kažejo več zrcalne simetrije glede na osi  $x$  in  $y$ . Pri teh orbitah je odstopanje potenciala od krogelno simetričnega največje, kar se izrazi tudi na obliki orbit.



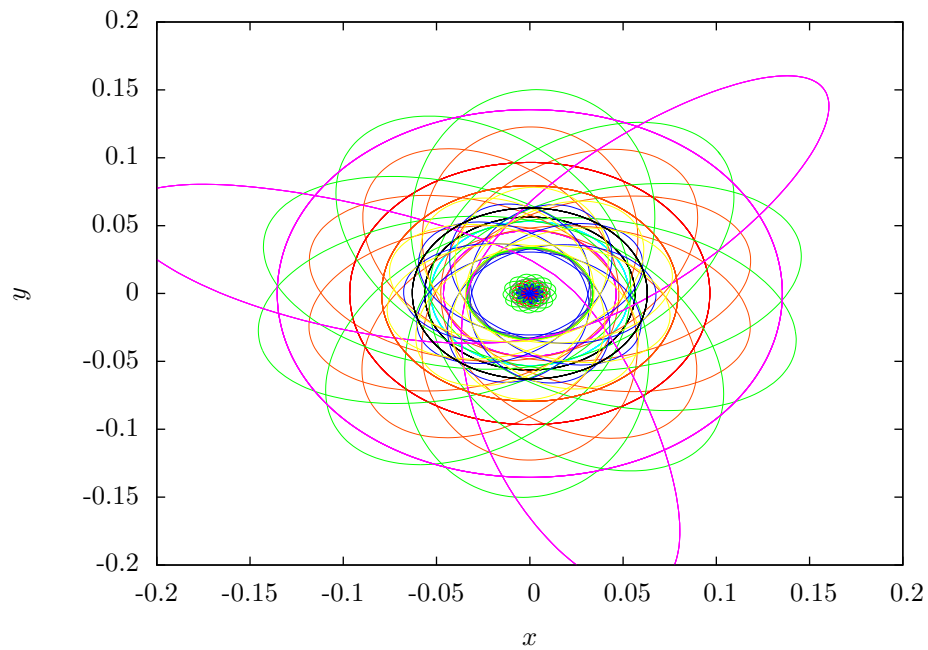
Slika 7: Sklenjene orbite z največjim radijem

Nazadnje sem pogledal še orbite s periodo, daljšo od enega obhoda. V ta namen sem le povečal

začetno vrednost za čas integracije, ostali parametri so bili enaki. S takšnim postopkom kot rešitve dobimo tudi večkratne obhode krajših orbit, ki sem jih na grafu vključil za primerjavo.



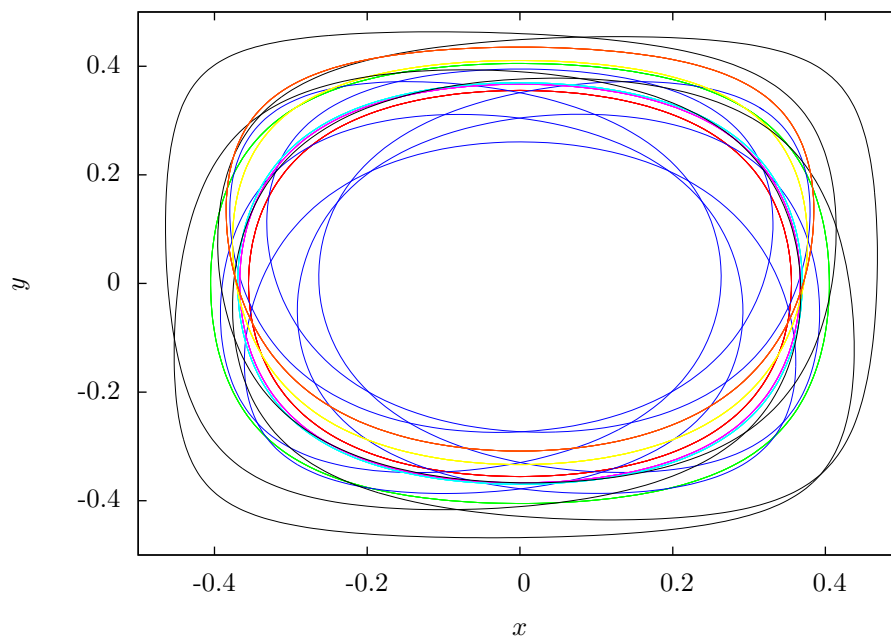
Slika 8: Sklenjene orbite z dolgo periodo in majhnim radijem



Slika 9: Sklenjene orbite z dolgo periodo in srednjim radijem

Pri majhnih in srednjih radijih se pojavijo orbite v obliki “rožic”, ki imajo največkrat po 10 listov. Ta večkratnih je najverjetneje posledica izbranega začetnega časa integracije. Pri zelo majhnih radijih (slika 8) pa najdemo tudi orbite z večjim številom “listov” (ali perihelijev). Te orbite imajo maksimalno oddaljenost od središča okrog 0.01, kar je manj od tistih s krajšimi

periodami (slika 4).



Slika 10: Sklenjene orbite z dolgo periodo in velikim radijem

Pri največjih radijih dobimo orbite, ki so podobne oblike kot pri krajših periodah, nekje med krožnicami in kvadrati. Nesimetričnost sedaj pride še bolj do izraza, saj je orbita sestavljena iz dveh ali več neenakih obletov središča.