Grafične metode in Youngovi tabloji

Miha Čančula

22. november 2012

1 Simetrična grupa

1.1 Permutacije

Simetrična grupa S_n je grupa, katere elementi so bijektivnih preslikav na n elementih, operacija pa kompozicija permutacij. Vsak element σ te grupe si lahko predstavljamo kot permutacijo množice z n elementi, na primer množice $x = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Permutacija je določena s tem, kam preslika vsak element x. Primer takšnega zapisa za element S_5 je

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

kar pomeni, da σ preslika 1 v 4, 2 v 2, 3 v 1, 4 v 3 in 5 v 5. Elementi simetrične grupe so le bijektivne preslikave, zato se vsako število od 1 do 5 v spodnji vrstici pojavi natančno enkrat. Ker ne moremo prosto izbrati vseh slik, je takšen zapis je nepotrebno dolg.

1.2 Cikli

Element simetrične grupe krajše predstavimo tako, da povemo kam se slika nek element množice x z večkratnim delovanjem permutacije σ. V zgornjem primeru se 1 preslika v 4, 4 v 3, 3 pa nazaj v 1. Če torej s permutacijo h zaporedoma delujemo na element 1, dobimo zaporedje $(1, 4, 3, 1, 4, 3, \ldots)$. Takšnemu zaporedju rečemo cikel in na kratko označimo z (143).

Vsako permutacijo v S_n lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov. V zgornjem primeru σ imamo že opisani cikel (143), ostali dve števili 2 in 5 pa se obe preslikata sami vase. To permutacijo bi lahko zapisali kot

$$\sigma = (143)(2)(5)$$

Ta zapis je enakovreden kot zgornji in popolnoma določa permutacijo. Če vemo, s katero simetrično grupo imamo opravka, lahko cikle z enim elementom pri zapisu izpustimo.

Ker cikli nimajo nobenega skupnega elementa, med seboj komutirajo, zato njihov vrstni red ni pomemben in je permutacija (123)(4)(5) enaka permutaciji (5)(4)(123). Nadalje lahko števila znotraj cikla ciklično premešamo, brez da bi spremenili permutacijo. Tako je cikel (123) enak ciklu (231), ne pa tudi ciklu (132), saj v tem primeru preureditev števil ni ciklična.

2 Cikli in razredi

2.1 Ciklične strukture in delitve

Ciklična struktura permutacije pove, koliko in kako dolge cikle vsebuje določena permutacija. Permutacija, ki ima α ciklov dolžine 1, β ciklov dolžine 2 in γ ciklov dolžine 3 ima ciklično strukturo $(1^\alpha 2^\beta 3^\gamma \cdots)$. Seveda ima več različnih permutacije enako ciklično strukturo: takšen primer sta (143)(2)(5) in (123)(4)(5). To sta različni permutaciji, obe pa imata po en 3-cikel in dva 1-cikla.

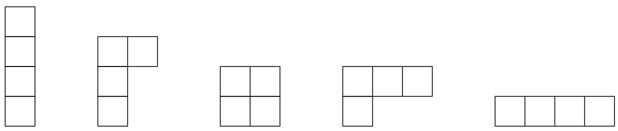
Permutacije v S_n delujejo na n elementih, cikli pa so med seboj disjunktni, zato mora biti vsota njihovih dolžin ravno enaka n. Vsaka delitev elementov množice x v cikle je torej enakovredna razdelitvi n predmetov v skupine. Formalno temu rečemo delitev (particija) števila n, predstavlja pa zapis števila

n kot vsoto naravnih števil. Število 4 lahko zapišemo kot vsoto naravnih števil na 5 načinov, zato imajo elemnti grupe S_4 natančno 5 različnih cikličnih struktur. Ker vrstni red ciklov ni pomemben, ni pomemben tudi vrsti red seštevancev v delitvi in jih lahko razvrstimo od največjega proti najmanjšemu.

Delitev	Oznaka	Ciklična struktura
$1+1+1+1$	(1,1,1,1)	(1)(2)(3)(4)
$2+1+1$	(2,1,1)	(12)(3)(4)
$2+2$	(2,2)	(12)(34)
$3+1$	(3,1)	(123)(4)
4	(4)	(1234)

Tabela 1: Vse možne delitve števila 4 in pripadajoče ciklične strukture permutacij v S_4

Namešto s števili lahko delitev prikažemo tudi grafično, tako da vsak seštevanec k napišemo v svoji vrstici, nato pa ga nadomestimo s k kvadratki v tej vrstici. Na ta način dobimo Youngov ali Ferrersov digram. Primeri Youngovih diagramov, ki ustrezajo zgoraj naštetim delitvam števila 4, so prikazani na spodnji sliki.



Slika 1: Youngovi diagrami, ki ustrezajo delitvam v tabeli 2.1

2.2 Konjugiranostni razredi

Če σ preslika zaporedje števil x v y, potem konjugirana permutacija $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ preslika $\alpha(x)$ v $\alpha(y)$. To lahko enostavno preverimo

$$\alpha\sigma\alpha^{-1}(\alpha(x)) = \alpha(\sigma x) = \alpha(y)$$

V zapisu z vrsticami je to enako, kot bi števila v zgornji in spodnji vrstici nadomestili z njihovimi slikam pri permutiranju z α

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}$$

Hitro lahko vidimo, da smo cikle (143)(2)(5) nadomestili s cikli $(\alpha_1\alpha_4\alpha_3)(\alpha_2)(\alpha_5)$. Konjugacija torej ne spremeni ciklične strukture. Velja tudi obrat prejšnjega izreka: med poljubnima permutacijama z enako ciklično strukturo lahko najdemo konjugiranostno preslikavo. Število razredov v grupi S_n je torej enako številu različnih cikličnih struktur, kar je enako število delitev števila n. To je pomembno predvsem zato, ker nam teorija grup pove, da je to število enako številu nerazcepnih upodobitev grupe S_n.

3 Karakterji nerazcepnih upodobitev

Število razredov v grupi S_n je enako številu nerazcepnih upodobitev te grupe, oboje pa je enako številu delitev števila n. To znanje nam pomaga pri izračunu vseh karakterjev nerazcepnih upodobitev te grupe.

Vsako delitev lahko predstavimo z Youngovim diagramom. Zaradi povezave s cikli lahko enostavno ugotovimo, kateri konjugiranostni razred permutacij pripada določen delitvi. Po drugi strani pa vsaki delitvi pripada tudi natančno ena nerazcepna upodobitev za S_n. Tu pa nimamo nobene enostavne zveze, ki bi povezovala izbiro delitve z določeno upodobitvijo ali obratno. Lahko pa z grafično metodo in nekaj enostavnimi predpisi določimo karakterje teh nerazcepih upodobitev.

Karakter upodobitve je ena na vseh elemntih v istem razredu, zato zadostuje le karakter vsake upodobitve na vsakem razredu. Tako upodobitev kot razred pa sta določena z izbiro ene delitve n, torej posamezen karakter indeksiramo z dvema delitvama, $\chi^{(\lambda)}_{(l)}$, kjer delitev (λ) določa upodobitev, $(l) = (l_1, l_2, l_3, \ldots)$ pa razred.

3.1 Algoritem

Najprej narišemo Youngov diagram, ki ustreza upodobitvi (λ). Nato v kvadratke po vrsti vpisujemo simbole, tako da upoštevamo pogoje

1. V i-tem koraku l_i-krat vpišemo simbol a_i.
2. Vpisovati začnemo v prvem praznem kvadratku v vrstici q, dodajamo dokler dolžina vrstice q ne preseže dolžine prejšnje vrstice, nato pa postopek nadaljujemo v prejšnji vrstici.
3. Po vsakem koraku (torej po dodatku l_i simbolov) mora biti dolžina vsake vrstice manjša ali enaka dolžini prejšnje.

Takšnemu vpisovanju simbolov v Youngov diagram pravimo regularna aplikacija. Youngovemu diagramu, ki ima v vsakem kvadratku vpisan simbol, simboli pa so vpisani po pravilih regularne aplikacije, pravimo Youngov tabló.

Pri vsakem koraku si zabeležimo število vrstic, v katere smo vpisali simbole. Če je to število liho, koraku pripišemo parnost 1, v nasprotnem primeru pa parnost -1. Če je produkt parnosti vseh korakov neke aplikacje 1, takšni aplikaciji pravimo pozitivna, če ne pa negativna aplikacija. Karakter upodobitve (λ) na razredu (l) je enak številu vseh možnih pozitivnih aplikaciji minus številu vseh možnih negativnih aplikacij.

3.2 Primer

Izračunajmo tabelo karakterjev simetrične grupe S_3, ki je izomorfna znani grupi D_3. Njena tabela karakterjev je

D_3	$\mathcal{C}(E)$	$\mathcal{C}(R_1, R_2)$	$\mathcal{C}(R_3 - R_5)$
Cikli	(1)(2)(3)	(123)	(12)(3)
Delitev	(1,1,1)	(3)	(2,1)
$T^{(1)}$	1	1	1
$T^{(2)}$	1	1	-1
$T^{(3)}$	2	-1	0

Kot rečeno, povezava med razredi v grupi in delitvami je enostavna. Ne moremo pa direktno vedeti, kateri delitvi ustreza posamezna nerazcepna upodobitev grupe D_3. V ta namen izračunajmno vse karakterje. Za enostavnejše pisanje za simbole uporabimo kar številke, $a_i = i$. Na ta način je zaporedje vpisovanja simbolov jasno že iz končne slike.

3.2.1 Upodobitev (1, 1, 1)

Youngov diagram, ki ustreza delitvi $(\lambda) = (1, 1, 1)$ je $\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$.

Razredu z enotskim elementom ustreza delitev $(l) = (1, 1, 1)$, torej bomo v diagram po vrsti vpisali eno enko, eno dvojko in eno trojko. Izpolniti moramo pogoj 3, da po vsakem koraku nobena vrstica ne sme presegati prejšnje, zato lahko vedno dodajamo le v najbolj zgornjo prosto vrstico. Edina možna možna aplikacija je $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$, in ker smo vse simbole vpisali v liho število vrstic, je aplikacija pozitivna. Karakter $\chi^{(1,1,1)}_{(1,1,1)}$ je torej enak 1.

Podobno lahko izračunamo karakter razreda (123), ki ustreza delitvi (3). Tokrat moramo vpisati tri enake simbole, kar lahko naredimo le na način $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$. Simbol 1 smo vpisali v tri vrstice, torej je aplikacija pozitivna in $\chi^{(1,1,1)}_{(3)} = 1$.

Nazadnje izračunajmo še karakter razreda (12)(3) oz. delitve $(2,1)$. Najprej vpišemo dva simbola 1, tako da začnemo v drugi vrstici. Ko vpišemo prvi simbol, druga vrstica preseže prvo, zato nadaljujemo v prvi in dobimo tabló $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 1\\ \hline \ \\ \hline\end{array}$, nato pa dopišemo se drugi simbol v edini prazen prostor $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array}$. Enki smo vpisali v dve vrstici, zato je aplikacija negativna in $\chi^{(1,1,1)}_{(2,1)} = -1$.

S primerjavo karakterjev lahko zaključimo, da je nerazcepna upodobitev, ki ustreza delitvi $(\lambda) = (1,1,1)$, upodobitev $T^{(2)}$ grupe D_3.

3.2.2 Upodobitev (3)

Youngov diagram, ki ustreza delitvi $(\lambda) = (3)$ ima tri škatlice v eni vrstici, torej je $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$. V takšen diagram lahko simbole vpisujemo le od leve proti desni, torej na en sam način. Poleg tega bodo vsi simboli v eni vrstici, zato bo aplikacija vedno pozitivna. Karakter bo zato enak 1 ne glede na razred, torej delitev (3) ustreza trivialni upodobitvi $T^{(1)}$.

3.2.3 Upodobitev (2, 1)

Tej delitvi ustreza Youngov diagram $\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}$.

Za delitev $(l) = (1,1,1)$ bomo spet vpisali tri različne simbole, na primer 1, 2 in 3. To lahko storimo na dva različna načina: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ in $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$. Obe aplikaciji sta pozitivni, zato je karakter $\chi^{(2,1)}_{(1,1,1)} = 2$.

Delitev $(l) = (3)$ je spet najbolj enostavna, saj moramo vpisati tri enake simbole. To lahko storimo na en način, in sicer $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$. Enko smo vpisali v dve vrstici, zato je aplikacija negativna, karakter $\chi^{(2,1)}_{(3)}$ pa enak -1.

Za razred $(l) = (2,1)$ moramo vpisati dva simbola 1 in en simbol dva. To lahko storimo na dva načina: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ in $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$. Prvi je pozitiven, drugi pa negativen, karakter je zato enak $\chi^{(2,1)}_{(2,1)} = 1 - 1 = 0$.

Delitvi $(\lambda) = (2,1)$ torej po pričakovanju ustreza dvodimenzionalna nerazcepna upodobitev grupe D_3, $T^{(3)}$.

3.3 Dimenzije upodobitev

Z metodo Youngovih tablójev lahko zelo enostavno izračunamo dimenzijo nerazcepnih upodobitev. Vemo, da je dimenzija nerazcepne upodobitve enaka karakterju te upodobitve v razredu z enotskim elementom. V simetrični grupi S_n enotski element vedno ustreza delitvi $(l)_e = (1,1,\ldots)$, torej moramo v diagram vpisati n različnih simbolov, vse aplikacije pa so pozitivne. Dimenzija nerazcepne upodobitve, ki ustreza delitvi (λ), je tako enaka številu načinov zlaganja Youngovega diagrama, kjer na vsakem koraku upoštevamo pogoje (1-3).

3.4 Trivialne upodobitve

Na primeru smo videli, da trivialni upodobitvi grupe S_3 ustreza delitev $(\lambda) = (3)$. To lahko posplošimo na poljuben n. Youngov diagram za delitev (n) lahko zapolnimo le na en način (simbole zlagamo po vrsti v edino vrstico), vse aplikacije pa so pozitivne. Tako brez računanja vemo, da delitvi (n) ustreza trivialna upodobitev.

Podobno lahko sklepamo za delitev $(\lambda) = (1,1,\ldots)$. Pripadajoč Youngov diagram lahko zopet zapolnimo le na en način, tako da simbole zlagamo po vrst od zgoraj navzdol. Ta aplikacija pa ni vedno pozitivna, njen predznak določa število sodih seštevancev v delitvi (l) oz. številu sodih ciklov v razredu. Vsak cikel sode dolžine je produkt lihega števila transpozicij, tako da je skupen predznak aplikacje enak predznaku permutacij v razredu (l). Delitvi $(1,1,\ldots)$ torej pripada enodimenzionalna nerazcepna upodobitev grupe S_n, ki vsaki permutaciji priredi njen predznak.