

# Metoda končnih elementov: Poissonova enačba

Miha Čančula

17. april 2012

## 1 Postopek reševanja

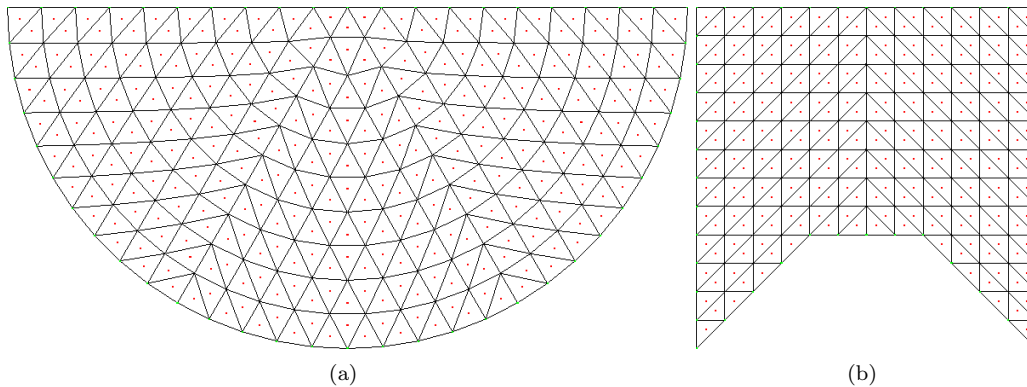
### 1.1 Diskretizacija

Prednost metode končnih elementov je v tem, da lahko prostor razdelimo na trikotnike s poljubnim tlakovanjem. Za čim boljšo natančnost metode je koristno, da so trikotniki približno enakostranični in enake velikosti.

#### 1.1.1 Polkrog

Tlakovanje, pri katerem polkrog razdelimo na kolobarje, nato pa vsak kolobar posebej tlakujemo s trikotniki, se je izkazalo za najboljše. V tem primeru so vsi trikotniki približno enako veliki, poleg tega pa je ta metoda najenostavnejša za programiranje.

Točke in povezave med njimi sem razporedil po vzorcu, prikazanem na sliki 1(a). Z zeleno barvo so označene robne točke, z rdečo pa težišča trikotnikov.



Slika 1: Diskretizaciji za obe obravnavani geometriji cevi

#### 1.1.2 Izsekan kvadrat

Tlakovanje cevi iz 5. naloge je bilo lažje, saj tu nimamo okroglih oblik. Delo sem si dodatno poenostavil s tem, da nisem uporabil enakostraničnih trikotnikov, ampak enakokrake pravokotne (torej polovico kvadrata). Na ta način sem žrtvoval nekaj natančnosti, saj je hipotenuza daljša od stranice v enakostraničnem trikotniku z enako ploščino. Takšno tlakovanje pa omogoča enostavno pokritje ostrih izsekanih vogalov cevi. Orientacijo trikotnikov sem obrnil tako, da je bila hipotenuza v smeri, kjer sem pričakoval najmanjšo ukrivljenost.

Primer takšnega tlakovanja je na sliki 1(b).

## 1.2 Reševanje matričnega sistema

Naslednji korak po določitvi položaja točk in povezav med njimi je priprava matričnega sistema za reševanje. Pri tem nastopajo skalarni produkti konstantnih funkcij in pa ploščine trikotnikov. To lahko izračunamo s preprostimi formulami, ki so napisane tudi v navodilih. Geometrijo moramo upoštevati le še za določitev, katere točke so na robu, nato pa jo lahko pozabimo.

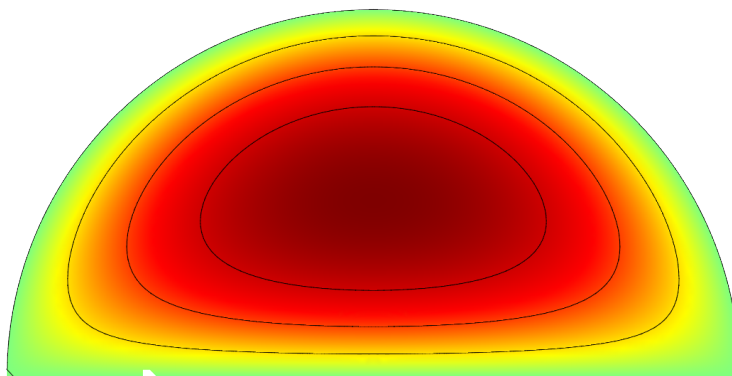
Pozornost pa je treba posvetiti še robnim pogojem. Računamo vrednost funkcije  $u$  le v točkah, ki niso na robu območja, saj imamo robni pogoj že podan. Notranjim točkam sem priredil vrstico, podano z elementi in desno stranjo kot so opisani v navodilih.

Matrika  $A$  je redka, zato sem za reševanje matričnega sistema uporabil knjižnico za redke matrike `cholmod`. Zaradi te lastnosti je matrični sistem možno rešiti v linearnem času  $\mathcal{O}(n)$ . Da ne bi po nepotrebnem uvajal kakšne višje časovne odvisnosti sem med pripravo matrike vedno sešteval po vseh trikotnikih, katerih število narašča linearno s številom točk.

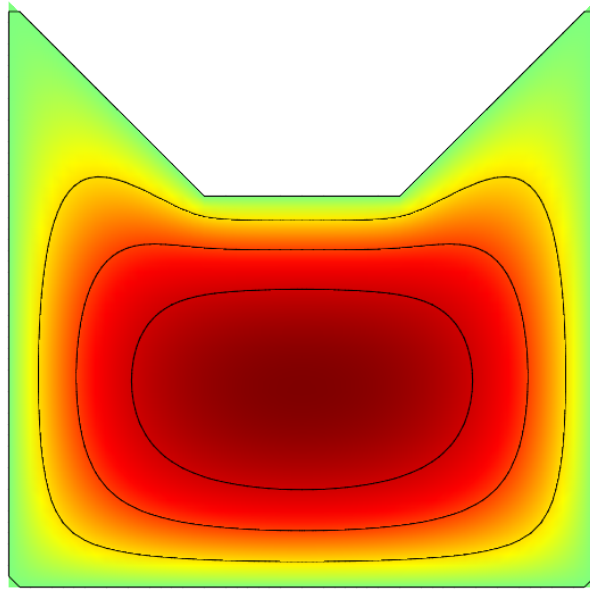
V času okrog ene minute mi je uspelo rešiti primere do okrog 100000 točk.

## 2 Rešitve

Profile hitrosti po cevi sem prikazal z uporabo knjižnice `MathGL`. Rezultati za oba preseka cevi so na slikah 2 in 4.



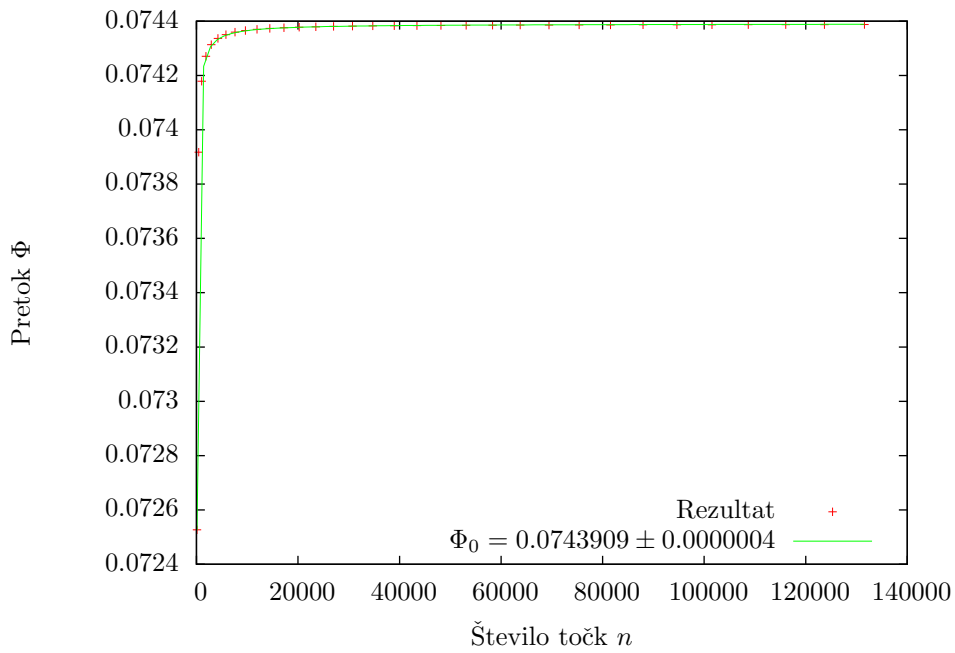
Slika 2: Profil hitrosti v polkrožni cevi, središčna diskretizacija



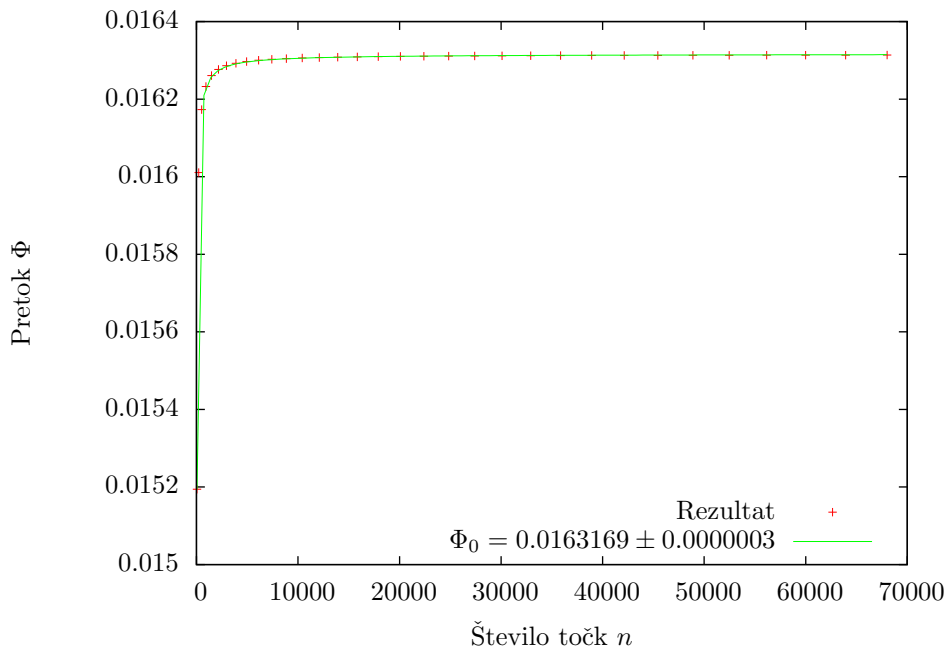
Slika 3: Profil hitrosti v cevi z obliko izrezanega kvadrata

### 3 Pretok po cevi

Končno sem izračunal še pretok tekočine po cevi z izbranim profilom. Ker trikotniki nimajo enakih ploščin, je tudi teža vsakega izračunanega koeficienta različna. Pretok, ki pripada točki  $i$ , sem izrazil kot produkt vrednosti  $w_i$  in tretjine ploščin vseh trikotnikov, ki mejijo na to točko. Tretjina nastopa z enakim razlogom kot pri vektorju desnih strani, ker je  $1/3$  integral linearne funkcije po trikotniku. Zaradi te lastnosti lahko pretok po cevi hitro izračunamo kot skalarni produkt  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$ .



Slika 4: Pretok po polkrožni cevi



Slika 5: Pretok po cevi v obliki izrezanega kvadrata

Prave vrednost, ki je limita pri  $n \rightarrow \infty$ , seveda ne moremo izračunati na ta način, lahko pa jo ocenimo. Pri tem nam pomaga dejstvo, da ocena za  $\Phi$  monotono narašča s številom točk  $n$ . Privzel sem potenčno konvergenco in izračunanim vrednostim priredil funkcijo

$$\Phi(n) = \Phi_0 - \alpha \cdot n^{-\beta} \quad (1)$$

Optimalno vrednost parametra  $\Phi_0$  je ocena za pretočnost cevi, potenca  $\beta$  pa stopnja konvergence. Pri obeh izračunih je optimalna vrednost  $\beta$  med 0.85 in 0.95, torej nenatančnost pada skoraj linearno s številom točk. Na slikah 4 in 5 vidimo, da se izračunana odvisnost zelo dobro ujema s predpostavko (1).

### 3.1 Primerjava z znanimi vrednostmi

Pri reševanju pete naloge s pospešeno relaksacijo sem dobil rezultat  $\Phi_{SOR} \approx 0.0163137$ . Ta vrednost se na 4 mesta natančno ujema z rezultatom te naloge,  $\Phi_{FEM} \approx 0.0163169$ .

Iz znanega pretoka po cevi lahko izračunamo Poiseuillov koeficient (v izbranih brezdimenzijskih enotah) kot

$$\kappa = \frac{8\pi}{S^2} \Phi \quad (2)$$

Za polkrožno cev je vrednost enaka

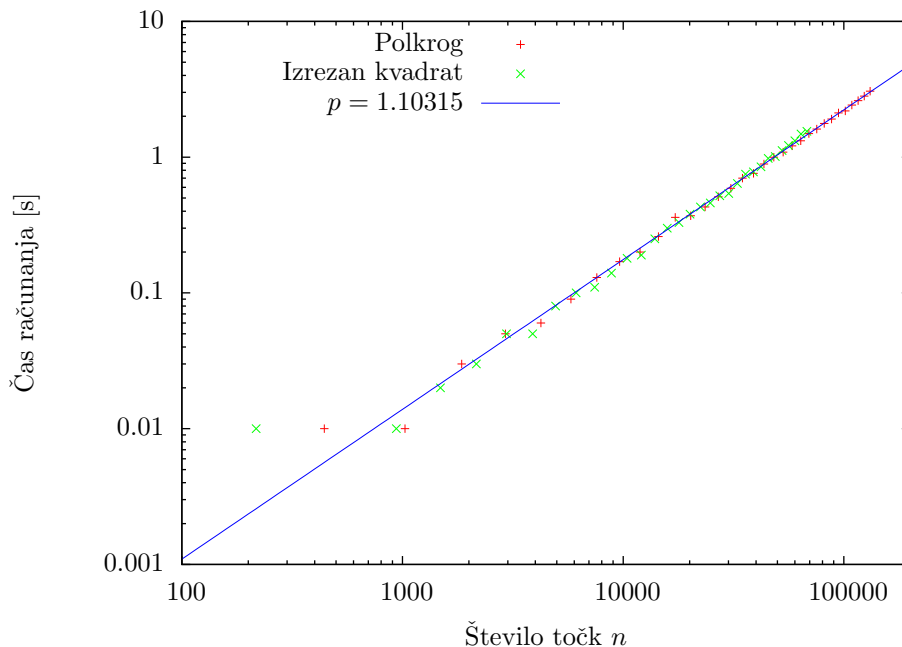
$$\kappa_p = \frac{8\pi}{S^2} \Phi_p = \frac{8\pi \cdot 4}{\pi^2} \Phi_p = \frac{32}{\pi} \Phi_p \approx 0.75774 \quad (3)$$

za izrezano kvadratno pa

$$\kappa_k = \frac{8\pi}{S^2} \Phi_k = \frac{8\pi}{(7/9)^2} \Phi_k \approx 0.67790 \quad (4)$$

## 4 Hitrost reševanja

Meril sem tudi čas, ki ga algoritem porabi za reševanje problema



Slika 6: Čas izvajanja programa

Z grafa lahko vidimo, da čas izvajanja ni odvisen od geometrije problema ali izbire diskretizacije, le od števila točk. V obeh geometrija čas računanja narašča linearno s številom točk  $n$ , torej je algoritem reda  $\mathcal{O}(n)$ .