# Stohastični populacijski modeli

Miha Čančula

2. januar 2012

## 1 Statistika časov izumrtja

Simuliral sem stohastično izumiranje populacije z dvema različnema modeloma

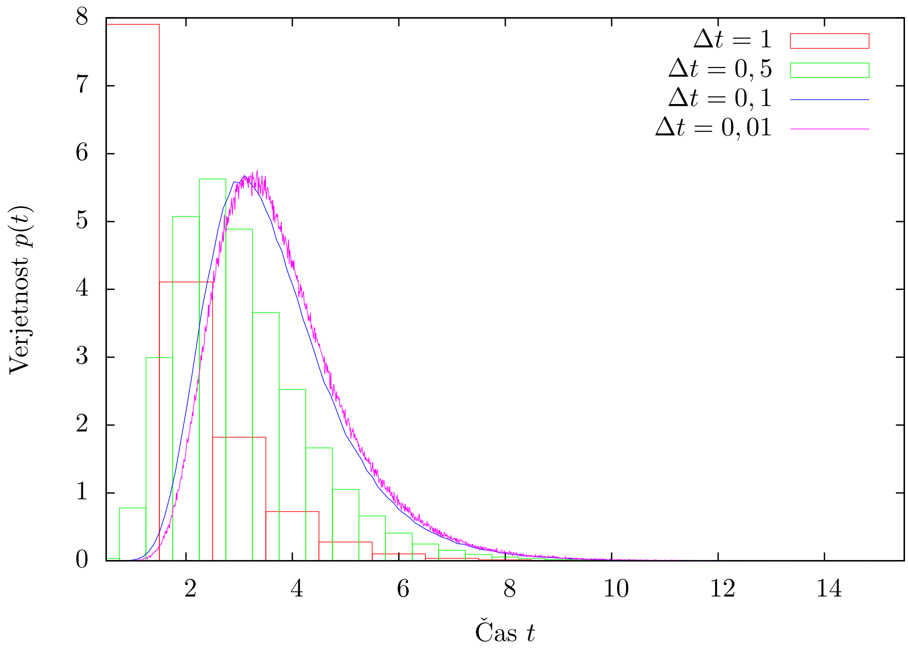
1. Eksponentno-padajoči model
2. Model z rojstvi in umiranjem

Časovne konstante sem izbral tako, da je v povprečju sprememba populacije enaka pri obeh modelih. Pri generiranju števila smrti in rojstev sem uporabil funkcijo `gsl_ran_poisson()`, ki vrne naključno število s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo.

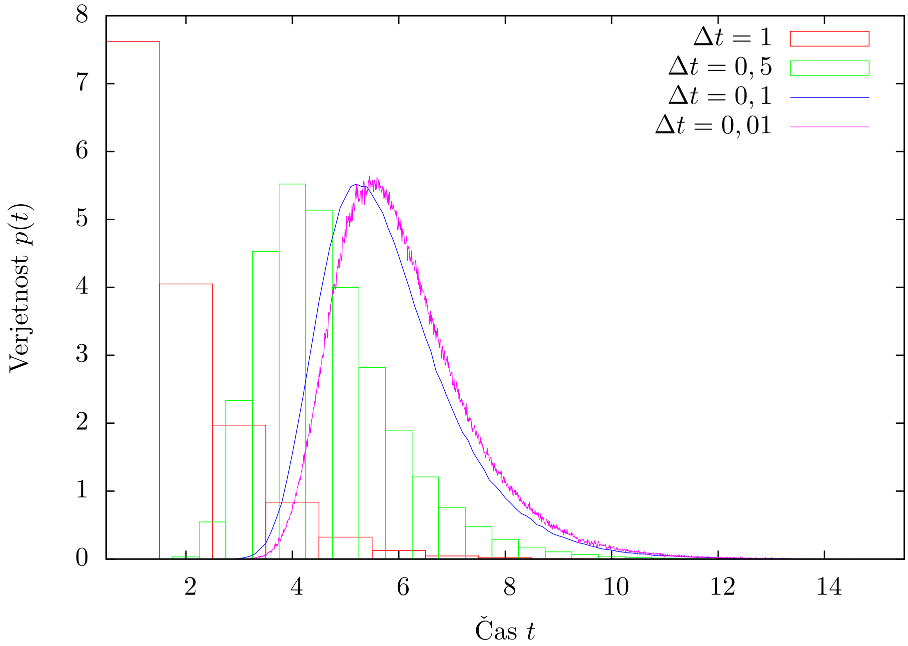
Za vsak model sem izračunal verjetnostno porazdelitev časov izumrtja.

### 1.1 Eksponentno umiranje

Ta model najbolje opisuje radioaktivne razpade jeder ali pa relaksacijo iz vzbujenega stanja atomov.



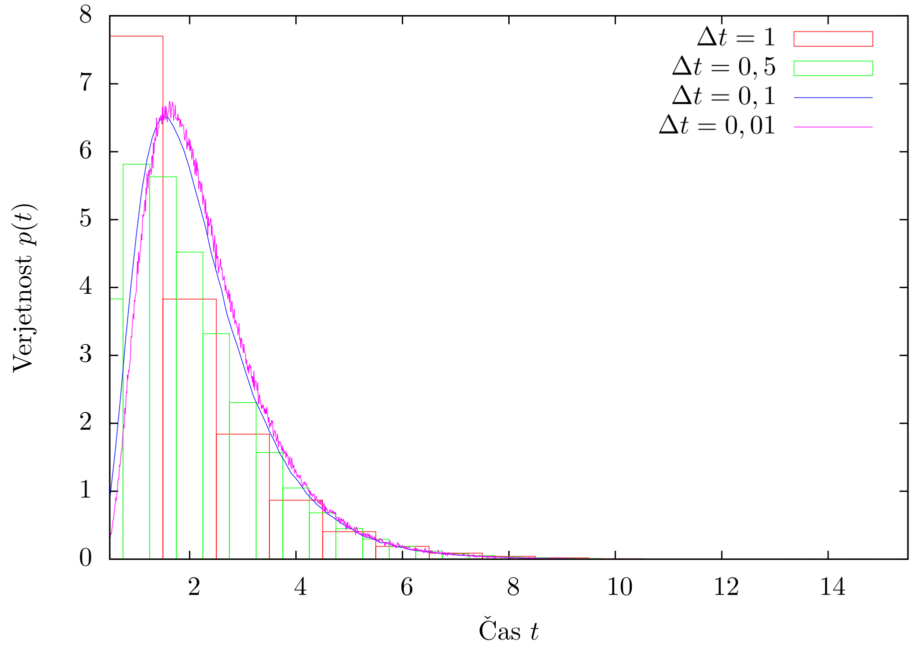
S slike razberemo, da velikost koraka vidno vpliva porazdelitev pri $\Delta t \geq 0,1$. Ko je korak dovolj majhen, da le zaneraljiv delež osebkov umre v vsakem koraku, z dodatnim manjšanjem ne pridobimo nič več na natančnosti. Podobno lahko zaključimo tudi, če začnemo v večjo populacijo. Vrh populacije se po pričakovanju premakne k daljšim časom, odvisnost od časovnega koraka pa je podobna kot prej.

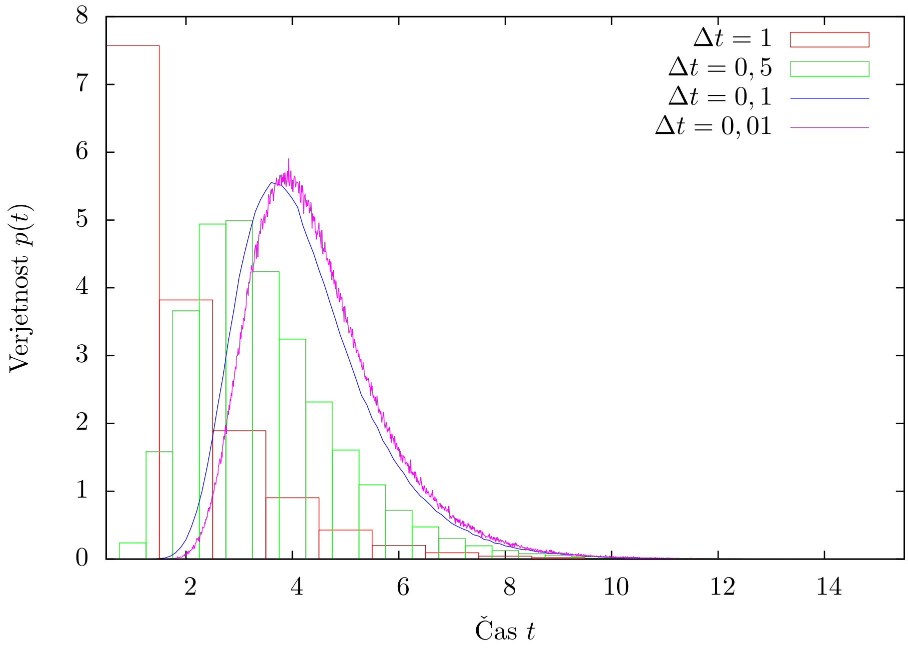



Grafa sta si zelo podobna, spodnji je le premaknjena slika zgornjega. To je za pričakovati, saj zaradi eksponentnega upadanja pričakujemo logaritemsko odvisnost življenjskega časa od $N$.

Vidimo tudi, da pri zelo velikih korakih ($\Delta t \approx 1$) velikost populacije skoraj nič ne vpliva na čas izumrtja. V obeh primerih s približno polovično verjetnostjo pride do izumrtja že po prvem koraku, naprej pa verjetnost pada eksponentno. Pri krajših korakih, že pri $\Delta t = 0,5$ pa opazimo vidno odvisnost od začetne velikosti populacije.

## 2 Rojstva in smrti




Podobno kot prej lahko tudi tu pridemo do opažanja, da pri $\Delta t = 1$ velikost populacije ne vpliva močno na čas izumrtja, pri manjših korakih pa je statistika za večjo populacijo le premaknjena v desno.

Če pa primerjamo zgorja grafa s tistimi iz prejšjnega poglavja pa vidimo, da proces z umiranjem in rojevanjem v povprečju vodi do hitrejšega izumtrja.

## 3 Matrika prehodov

Verjetnost, da v določenem koraku umre $n$ osebkov izračunamo po Poissonovi porazdelitvi:

$$\mathcal{P}(-n, \overline{n}) = \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}} \tag{1}$$

Če imamo model, kjer se osebki rojevajo in umirajo, moramo upoštevati oba člena ločeno in sešteti po vseh kombinacijah, ki nam dajo enako spremembo populacije.

$$\mathcal{P}(n, \overline{n}) = \sum_{n_r - n_s = n} \mathcal{P}(n_r, \overline{n_r}) \mathcal{P}(n_s, \overline{n_s}) = \sum_{n_r - n_s = n} \frac{\overline{n_r}^{n_r}}{n_r!} e^{-\overline{n_r}} \frac{\overline{n_s}^{n_s}}{n_s!} e^{-\overline{n_s}} \tag{2}$$

Povprečno število umrlih oz. rojenih osebkov $\overline{n_i}$ lahko izrazimo s parametrom $\beta$, velikostjo populacije in dolžino časovnega koraka

$$\overline{n_i} = \beta_i N \Delta t \tag{3}$$

Če vzamemo dovolj majhnen korak $\Delta t$, bo $\overline{n}$ mnogo manjši od 1 in bodo verjetnosti za velike spremembe števila populacije majhne. V tem primeru lahko upoštevamo le člene z $n = 0$ in $n = \pm 1$.

### 3.1 Paremetrizacija stanj

Stanje z velikostjo populacije $N$ lahko zapišemo kot vektor $\vec{v}$ z $M + 1$ komponentami, $M \geq N$, ki ima vse $N$-to komponento enako 1, ostale pa 0. Pri tem smo morali postaviti zgornjo mejo za velikost populacije $M$, vektor pa ima še dodatno komponento za stanje s populacijo 0. Stanja, ki imajo le eno neničelno komponento, so čista stanja, zaradi stohastičnosti procesa pa po vsakem koraku dobimo mešano stanje, ki pomeni, da je velikost populacije porazdeljena po neki verjetnostni porazdelitvi.

Vsak časovni korak lahko predstavimo z opracijo, ki je linearna v $v$, torej jo lahko zapišemo kot matriko dimenzije $M + 1 \times M + 1$. Elementi te matrike so verjetnosti za prehod iz $j$-tega v $i$-to stanje

$$W_{i,j} = P(j \to i) = \mathcal{P}(j - i, \overline{n}(j)) \tag{4}$$

### 3.2 Eksponentni model

Pri tem modelu se osebki ne rojevajo, zato je velikost populacije monotono padajoča, torej bo matrika prehodov spodnje trikotna. Predpostavili smo, da je $\Delta t$ tako majhen, da je $\beta N \Delta t = \varepsilon << 1$

$$W_{i,j} = \mathcal{P}(j - i, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^{(j-i)}}{(j-i)!} e^{-\varepsilon} \tag{5}$$

Ker je $\varepsilon$ majhen, lahko člene z $\varepsilon^2$ zanemarimo, tako da ostanejo le še elementi na diagonali in tik pod njo

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1 - \beta j \Delta t, & i = j \\ \beta j \Delta t, & i = j - 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \tag{6}$$

### 3.3 Rojstva in smrti

Podobno kot prej zanemarimo verjetnosti, da se rodi ali umre več kot en osebek v vsakem časovnem koraku. Tudi v verjetnosti, da se en rodi in en umre, nastopa $\varepsilon$ z drugo potenco, torej ga lahko zanemarimo. Ostanejo nam le tri možnosti: eno rojstvo, ena smrt, ali pa ohranitev istega stanja. V primerjavi s prejšjim izrazom moramo matriki dodati le še diagonalo nad glavno, ki dopušča rast populacije.

$$W_{i,j} = \begin{cases} \beta_r j \Delta t, & i = j + 1 \\ 1 - (\beta_r + \beta_s) j \Delta t, & i = j \\ \beta_s j \Delta t, & i = j - 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \tag{7}$$

### 3.4 Diferencialne enačbe

Ker matrika prehodov predstavlja en časovni korak simulacije, lahko z limitiranjem časovnega intervala pridemo do sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{\vec{v}} = W \vec{v} \tag{8}$$

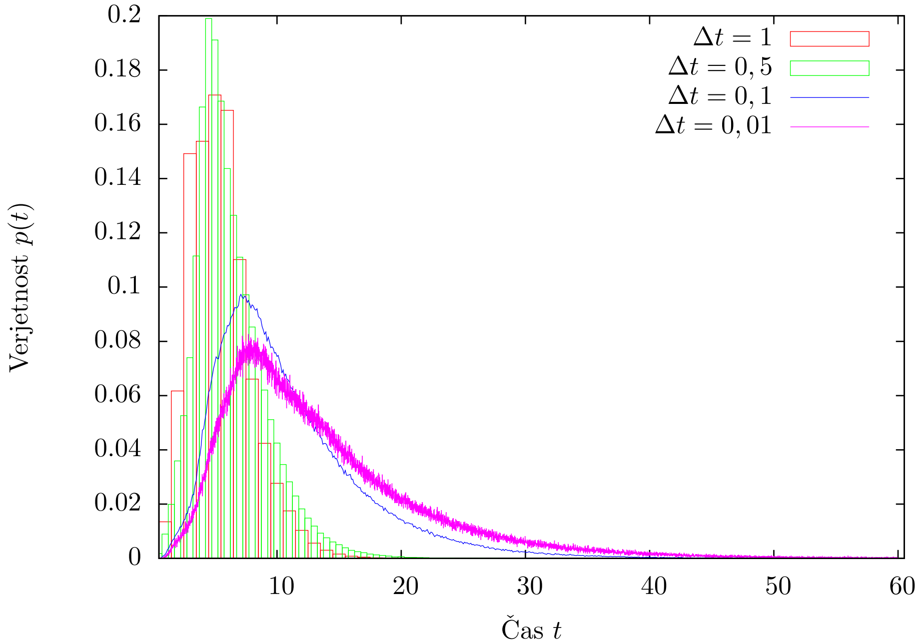
Takšen sistem znamo rešiti, tako da poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $W$.

## 4 Zajci in lisice

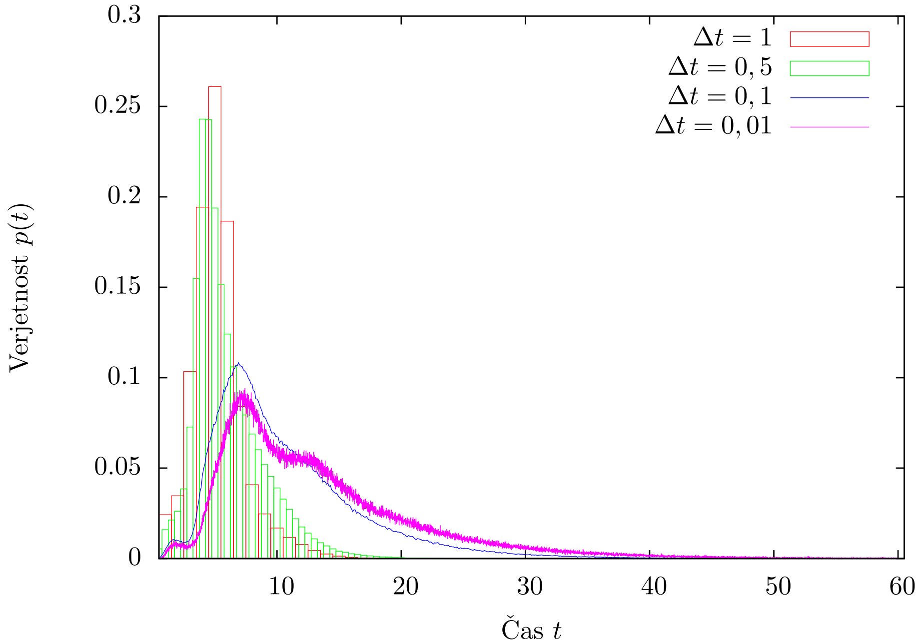
Z enakim pristopom kot eksponentnega izumiranja sem se lotil tudi problema zajcev in lisic. V teoretičnem zveznem primeru bi moral biti ta sistem obstojen, tako da do izumrtja ne bi prišlo. Če pa upoštevamo diskretno število osebkov in stohastičnost procesa, pa do izumrtja vsaj ene izmed vrst vedno pride.

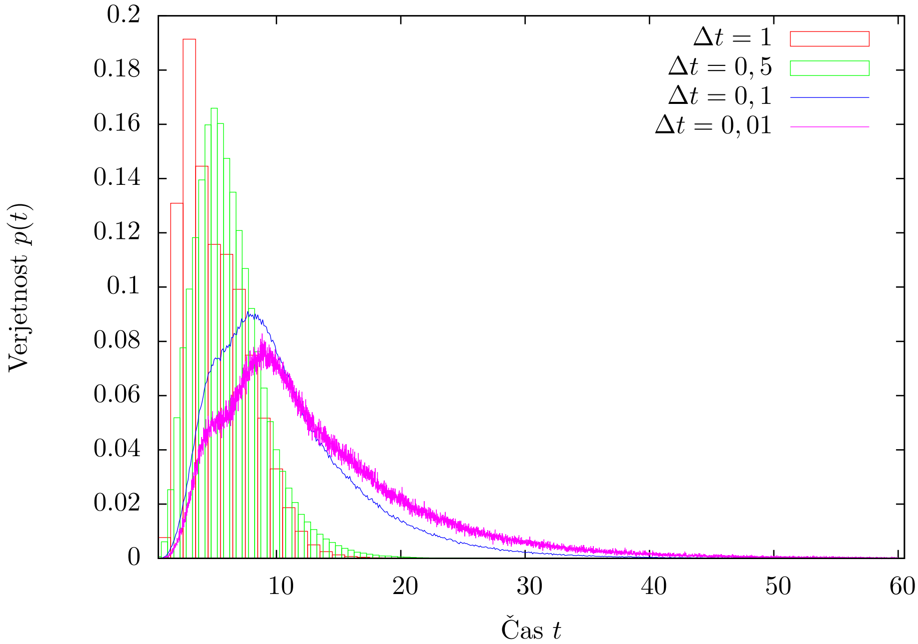
Če najprej izumrejo zajci, bodo za njimi tudi lisice, saj jim primanjkuje hrane. Če pa najprej izumrejo lisice, pa so bodo zajci eksponento namnožili, saj njihove hrane nismo upoštevali v enačbah. Da bi se izognil temu primeru sem simulacijo ustavil takoj, ko je izumrla vsaj ena izmed obeh vrst.

Tudi tu sem izračunal verjetnostno porazdelitev cašov izumrtja.




Ogledal sem si še primer, ko začnemo v legi, ki tudi v zveznem primeru ni ravnovesna. V tem primeru pričakujemo hitrejše izumrtje.





Verjetnost $p(t)$
Čas $t$
$\Delta t = 1$
$\Delta t = 0,5$
$\Delta t = 0,1$
$\Delta t = 0,01$
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2
10
20
30
40
50
60