Fourierova analiza

Miha Čančula

17. januar 2012

Slika 1: Znani francoski konvolucionar Jean Baptiste Joseph Fourier

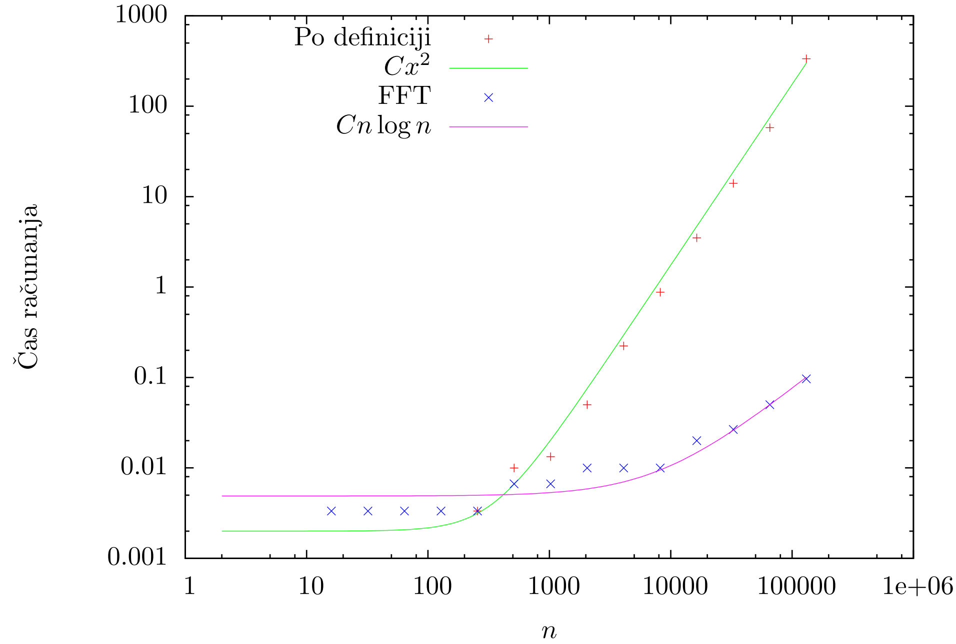
1 Konvolucija

Linearno padajočo funkcijo $f(x) = 1-x$ sem izvrednostil v N diskretnih točkah, nato pa numerično računal konvolucijo te funkcije samo s sabo. Ta račun sem ponovil pri različnih vrednostih N in ga vsakih napravil na dva načina: enkrat po definiciji konvolucije, drugič pa z uporabo Fourierove transformacije. Za vse račune sem uporabil program `GNU Octave`.

1.1 Hitrost

1.2 Natančnost

Preveril sem tudi, kako natančna je metoda s Fourierovo transformacijo. Tako direktna kot FFT metoda ne delata nobenih približkov, edini vir napake je končna natančnost računalniškega zapisa, na katerege pa sta lahko metodi različno občutljivi. Kot mero za napako metode sem izbral



Slika 2: Čas, potreben za izračun konvolucije treh linearno padajočih funkcij po obeh algoritmih

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{kN-1} (f_i^F - f_i^D)^2 \tag{1}$$

kjer so f_i^F in f_i^D koeficienti, izračunani s Fourierovo oz. direktno metodo. Če sem začel z diskretizacijo na N točk in izračunal konvolucijo k-tih enakih funkcij, ima končni izraz kN koeficientov.

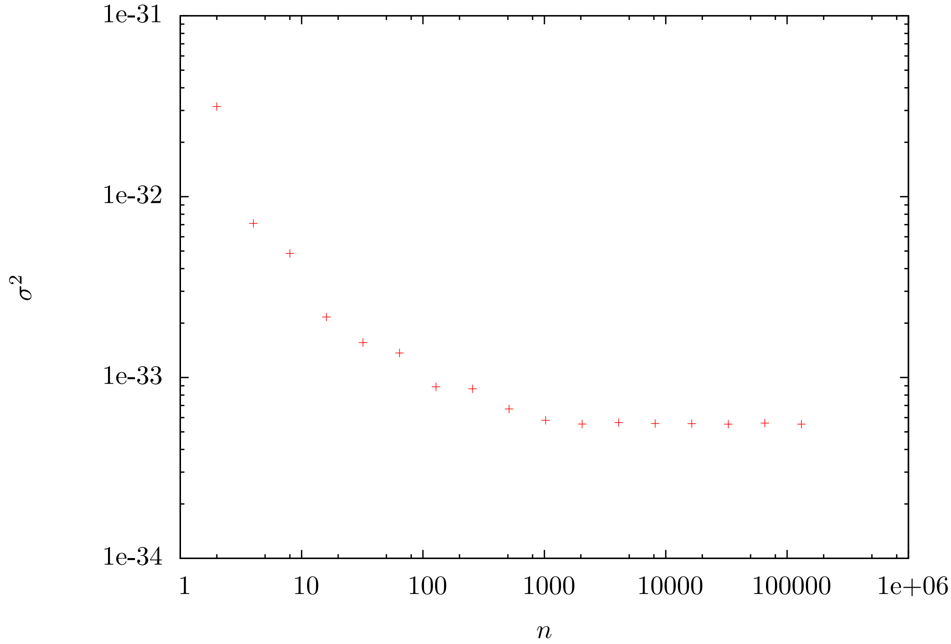
2 Dekonvolucija signala

Tokrat je bila naloga obratna, poiskati izviren signal ob poznavanju izhodnega signala in prehodne funkcije. Prehodna funkcija $G(t)$ pa je imela en neznani parameter β, ki sem ga dolocil tako, da je bil izvirni signal čim lepši. Lepoto signala pa sem definiral na različne načine.

2.1 Čim manjše spremembe

Ena možna izbira je, da iščemo signal, ki se čim počasneje spreminja. Naravna izbira je takšna, da je izraz

$$\sum_{i=0}^{N-1} |s_i - s_{i-1}|^2 \tag{2}$$



Slika 3: Napaka izračuna s Fourierovo transformacijo

čim manjši. Izkaže se, da je to pri vrednosti $\beta = 34.852$, vhodni signal pa je tedaj tak kot na sliki 4.

2.2 Čim nižje frekvence

Lepoto signala pa lahko ocenimo že po frekvenčnem spektru, tako da si želimo čim manj visokih frekvenc. V ta namen sem minimiziral izraz

$$\sum_{i=-N/2}^{N/2-1} i \cdot |S_i| \tag{3}$$

kjer so S_i komponentne Fourierove transformacije signala s_i. Ta kriterij je v bistvu zelo podoben prejšnjemu, zato je tudi optimalna vrednost β blizu, in sicer $\beta = 36.475$.

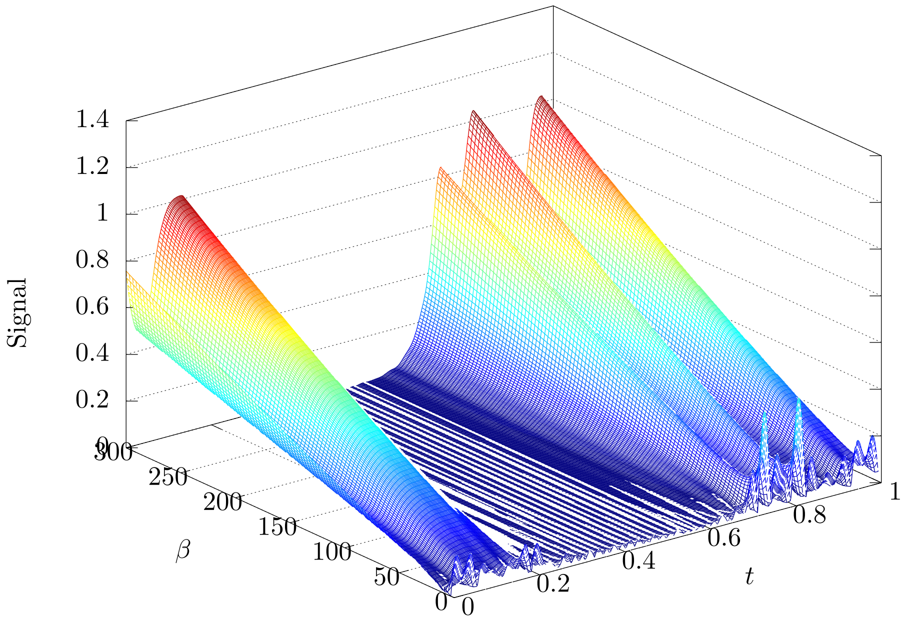
2.3 Čim manjša amplituda

Za primerjavo sem iskal tudi signal z najmanjšo amplitudo. Če privzamemo, da je signal približno sinusen, lahko njegovo amplutido ocenimo v vsaki točki.

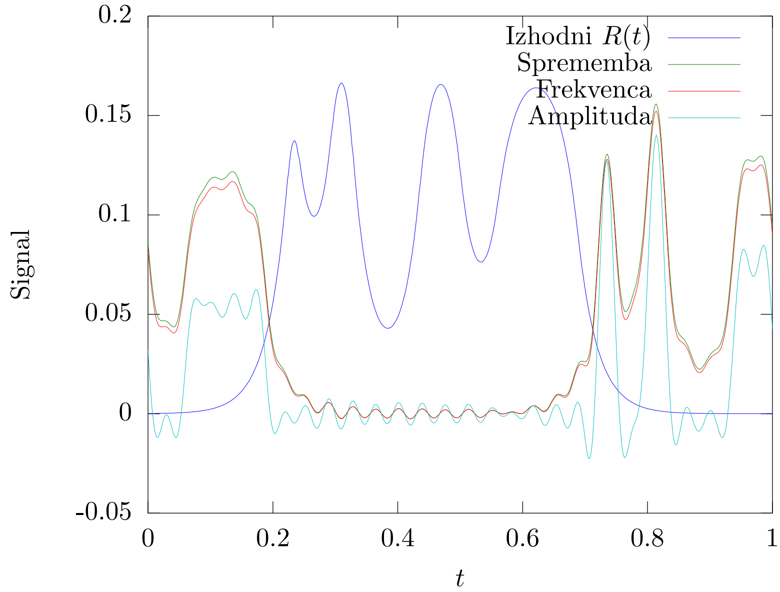
$$s(t) = A \sin \omega t \tag{4}$$

$$\dot{s}(t) = A\omega \cos \omega \tag{5}$$

$$A^2 = \omega^2 s^2 + (\dot{s})^2 \tag{6}$$



Odvod $\dot{s}$ lahko približamo s končno diferenco, frekvenčo ω pa kot po absolutni vrednosti največjo komponentno Fourierove transformiranke. Seveda naš signal ni povsem sinusen, zato se amplituda spreminja s časom, $A = A(t)$. Podobno kot v prvem primeru sem na koncu minimiziral povprečen kvadrat amplitude.



Slika 4: Vhodni in izhodni signal pri $\beta = 34.852$