

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Oddelek za fiziko

Seminar – 1. letnik, II. stopnja

# Hidrodinamske nestabilnosti

Avtor: Miha Čančula

Mentor: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, marec 2012

**Povzetek**

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Stabilnost</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Hidrodinamika</b>	<b>2</b>
3.1	Navier-Stokesova enačba . . . . .	2
3.2	Lineariziran problem . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Tanki filmi</b>	<b>4</b>
4.1	Enačbe . . . . .	4
4.1.1	Brezdimenzijska oblika . . . . .	5
4.2	Nestabilnost . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Milni mehurčki</b>	<b>6</b>
5.1	Enačbe . . . . .	6
5.1.1	Gibalna enačba . . . . .	7
5.2	Numerično reševanje . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Curki</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Zaključek</b>	<b>7</b>

## 1 Uvod

## 2 Stabilnost

O nestabilnosti govorimo, ko infinitezimalno majhna sprememba trenutnega stanja lahko povzroči večjo, merljivo razliko po nekem končnem času [4].

Takšna definicija je precej splošna, zato jo za potrebe seminarja raje definiramo ožje in bolj eksaktno: Imejmo sistem, katerega časovno spreminjanje lahko z eno ali več diferencialnimi enačbami, ki imajo določeno simetrijo. Z nastavkom, ki upošteva to simetrijo, lahko dobimo rešitev enačb. Stabilnost se pokaže, ko temu nastavku dodamo majhno motnjo, ki ne upošteva simetrije. Stabilni sistem se bo vrnil v simetrično stanje, medtem ko pri nestabilnem pride do zloma simetrije.

Primer nestabilnega pojava je svinčnik, postavljen na konico. Enačba, ki opisuje njegovo gibanje, je simetrična glede na rotacijo okrog osi svinčnika. Zato lahko najdemo rešitev z enako simetrijo, to je pokončna lega. Če pa svinčnik le malo izmaknemo iz simetrične lege, bo padel in končal v stanju brez rotacijske simetrije.

## 3 Hidrodinamika

### 3.1 Navier-Stokesova enačba

Tok nestisljive tekočine z gostoto  $\rho$  in viskoznostjo  $\mu$  se podreja Navier-Stokesovi enačbi in ohranitvi mase

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Kot običajno pri reševanju enačb si jo najprej poenostavimo tako, da preidemo na brezdimenzijske spremenljivke in čimbolj minimiziramo število parametrov. Izberimo si meri za dolžino  $x_0$  in hitrost  $v_0$ . Če uvedemo še brezdimenzijsko Reynoldsovo število  $R = v_0 x_0 / \mu$ , lahko enačbo zapišemo za brezdimenzijski spremenljivki  $U$  in  $P$ .

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

### 3.2 Lineariziran problem

Stabilnost hidrodinamskega sistema lahko študiramo tako, da najprej najdemo osnovno rešitev, ki ji v hidrodinamiki rečemo *osnovni tok*. Ta rešitev je lahko podana analitično ali numerično, vsekakor pa se podreja Navier-Stokesovi enačbi. Podamo jo kot polje hitrosti  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  in tlaka  $P(\mathbf{x}, t)$ .

Nato osnovnem toku dodamo motnjo, tako da dobimo *skupni tok*, zopet podan s hitrostjo  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$  in tlakom  $p = P + p'$ . Tudi za skupni tok mora veljati N-S enačba, iz česar lahko izpeljemo enačbo za motnjo  $u'$  in  $p'$ .

Stabilnost sistema pomeni, da vse motnje, ki so na začetku majhne, ostanejo majhne tudi ob poljubnem času. Nasprotno, sistem je nestabilen, če vsaj ena motnja po nekem času preneha biti majhna. Za matematični opis moramo to difencijo formalizirati in določiti mero za velikost motnje.

Tok je *stabilen*, če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta(\varepsilon) > 0$ , tako da za

$$\|u'(\mathbf{r}, 0)\|, \|p'(\mathbf{r}, 0)\| < \delta \quad (5)$$

velja

$$\|u'(\mathbf{r}, t)\|, \|p'(\mathbf{r}, t)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0 \quad (6)$$

Če je tok stabilen in velja

$$\|u'(\mathbf{r}, t)\|, \|p'(\mathbf{r}, t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (7)$$

torej se motnja s časom manjša, je tok *asimptotično stabilen*. V teoriji dinamičnih sistemov asimptotično stabilni rešitvi rečemo tudi atraktor.

Ker nas zanimajo le majhne motnje, lahko v enačbi zanemarimo vse člene kjer motnja nastopa v drugem ali višjih redih. Na ta način sistem zreduciramo na linearno diferecialno enačbo

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \mathbf{u}' \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (9)$$

Če je osnovni tok stacionaren, so koeficienti v linearnem sistemu enačb konstantni, zato ločimo spremenljivki  $\mathbf{r}$  in  $t$ , splošno rešitev pa zapišemo kot linearno kombinacijo normalnih načinov

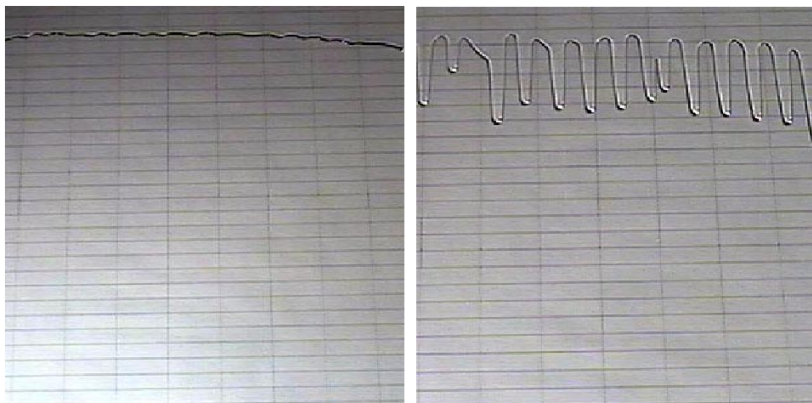
$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad (10)$$

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum e^{s_i t} p_i(\mathbf{r}) \quad (11)$$

Hitro lahko vidimo, da bo tok nestabilen, če ima vsaj ena lastna vrednost  $s_i$  realni del večji od 1, v nasprotnem primeru pa bo stabilen. Problem stabilnosti sistema lahko torej prevedemo na iskanje lastnih vrednosti matrike.

## 4 Tanki filmi

Hidrodinamsko nestabilnost lahko opazujemo pri polzenju tekočine po klančini [2].



Slika 1: Polzenje tanke plasti tekočine po nagnjeni površini. Majhne motnje v obliki fronte (levo) hitro prerastejo v vzorec, ki ni niti približno enakomeren, je pa periodičen (desno). Vir: [2]

### 4.1 Enačbe

Če privzamemo nestisljivost tekočine  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , se Navier-Stokesova enačba poenostavi v

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + g(\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{k}) \quad (12)$$

kjer je  $\mathbf{u}$  hitrost tekočine,  $\rho$  njena gostota in  $\mu$  viskoznost. Člena z  $g$  sta dinamična in statična komponenta sile teže. Pomembni so tudi robni pogoji, običajno se izbere sledeče:

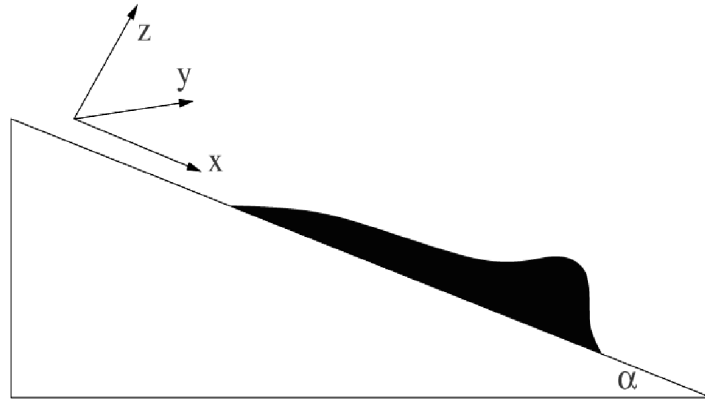
- Na meji med tekočino in klancem tekočina ne drsi, torej je tam  $\mathbf{u} = 0$ .

- Na meji med tekočino in zrakom ima tlak nezveznost, ki jo sorazmerja površinski napetosti in ukrivljenosti meje  $\kappa$ .

Ker obravnavamo tanke filme, lahko privzamemo, da je debelina  $h$  manjša od katerekoli dolžinske skale v ravnini. S tem privzetkom lahko enačbo (12) poenostavimo v enačbo za  $h$ .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{3\mu} \nabla \cdot [\gamma h^3 \nabla \nabla^2 h - \rho g h^3 \nabla h \cos \alpha + \rho g h^2 \sin \alpha \mathbf{i}] \quad (13)$$

#### 4.1.1 Brezdimenzijska oblika



Slika 2: Skica tekočine v dveh dimenzijah. Viden je greben tik za fronto tekočine in pa zožitev daleč za fronto, ki je pri računih ne bomo upoštevali

## 4.2 Nestabilnost

Osnovna rešitev  $h_0(x, t)$  je sicer odvisna od časa, vendar lahko predpostavimo, da rob tekočine polzi s konstantno hitrostjo  $U$ . Časovno odvisnost koeficientov  $h_0$  bomo torej odpravili, če se postavimo v koordinatni sistem, ki se giblje s to hitrostjo. V tem primeru uvedemo spremenljivko  $\xi = x - Ut$  in  $\nabla = (\partial_\xi, \partial_y)$ , splošno rešitev pa lahko zapišemo v obliki

$$h(\xi, y, t) = h_0(\xi) + \varepsilon h_1(\xi, y, t) \quad (14)$$

V tej sliki se  $h_0$  ne spreminja s časom, torej smo dobili linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti.

Na sliki 1 vidimo, da je oblika fronte periodična, zato  $h_1(\xi, y, t)$  raje zapišemo kot linearno kombinacijo normalnih valovnih načinov. V enačbi bo tako nastopala Fourierova transformiranka po koordinati  $y$ , ki jo označimo z  $g(\xi, q, t)$ , za katero velja

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\mathcal{L}g \quad (15)$$

Tu je  $\mathcal{L}$  linearni diferencialni operator s konstantnimi koeficienti. Zanimajo nas lastne vrednosti tega operatorja, zlasti tista z največjim realnim delom. Lastne vrednosti so odvisne od valovnega števila  $q$  oz valovne dolžine  $\lambda = 2\pi/q$ ; pričakujemo, da bo valovna dolžina, pri kateri je lastna vrednost  $s(q)$  največja, enaka razdalji med posameznimi pasovi na sliki 1, saj bo motnja s takšno valovno dolžino najhitreje naraščala.

## 5 Milni mehurčki

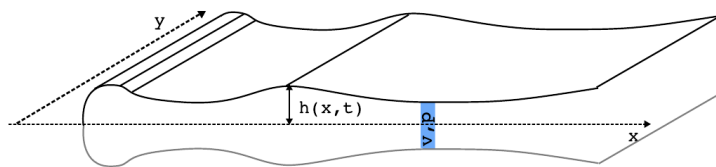
Milni mehurčki so stabilni na majhne motnje zaradi površinske napetosti tekočine. Če pa mehurček predremo v eni točki, ustvarimo rob, kjer površinska napetost ni uravnotežena, zato se rob začne umikati. Ker je opna običajno zelo tanka, je ukrivljenost na robu velika, zato fronta napreduje zelo hitro [1]. To napredovanje je pri mehurčkih tako hitro, da s prostim očesom fronte sploh ne opazimo, ampak se nam zdi, da celoten mehurček razpade naenkrat.



Slika 3: Razpad milnega mehurčka [5].

### 5.1 Enačbe

Podobno kot pri tankem filmu lahko tudi za opno predpostavimo, da je tanka, njeno debelino pa označimo s  $h = h(x, t)$ . Opna ima translacijsko simetrijo v smeri  $y$ , zato na začetku predpostavimo, da imajo takšno simetrijo tudi  $h$  ter gostota in tlak tekočine.



Slika 4: Profil opne s translacijsko simetrijo vzdolž roba in zrcalno simetrijo v navpični smeri. Ker je opna tanka, lahko privzamemo, da se tlak in hitrost ne spreminjata po debelini [1].

### 5.1.1 Gibalna enačba

Tok neviskozne in nestisljive tekočine opisuje Eulerjeva enačba

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p \quad (16)$$

Hkrati pa za opno velja tudi ohranitev prostornine, ki jo v brezdimenzijski obliki zapišemo kot

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(h\mathbf{v}) = 0 \quad (17)$$

## 5.2 Numerično reševanje

## 6 Razpad curka

Na nestabilnosti pogosto naletimo tudi pri študiju razpada curkov tekočin [3].

## 7 Zaključek

## Literatura

- [1] S. Čopar, Numerična analiza nestabilnosti na robu tekočinske opne, Diplomsko delo (2009)
- [2] L. Kondic, SIAM Review **45**, 95 (2003)
- [3] J. Eggers in E. Villermaux, Rep. Prog. Phys. **71**, 036601 (2008)
- [4] P. G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability*, Cambridge University Press (2002)
- [5] <http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-1199149/Super-slow-motion-pictures-soap-bubble-bursting-stunning-detail.html> (23. 1. 2012)