

Gibanje gravitacijske vrtavke

Miha Čančula

12. september 2012

Povzetek

Razišči gibanje splošne gravitacijske vrtavke s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \sum_{s=1}^3 \left(\frac{1}{2J_s} l_s^2 + m g a_s n_s \right) \quad (1)$$

kjer so l_1, l_2, l_3 komponente vrtilne količine vzdolž lastnih osi teznorja vztrajnostnega momenta J , \mathbf{e}_s , in $J\mathbf{e}_s = J_s\mathbf{e}_s$, n_1, n_2, n_3 pa so vertikalne komponente lastnih osi, $n_s = (0, 0, 1) \cdot \mathbf{e}_s$. \mathbf{l} in \mathbf{e} predstavljajo kanoničen set dinamičnih spremenljivk s sledečo (Liejevo) algebro Poissonovih oklepajev

$$\{l_r, l_s\} = \sum_t \varepsilon_{rst} l_t \quad (2)$$

$$\{l_r, n_s\} = \sum_t \varepsilon_{rst} n_t \quad (3)$$

$$\{n_r, n_s\} = 0 \quad (4)$$

kjer je ε_{rst} popolnoma antisimetričen Levi-Civitajev tenzor. Vzemimo npr. perturbirano Languangeovo vrtavko, s parametri (Δ, a, λ) , $J_1 = J_2 = 1$ in $J_3 = \Delta$, ter $a_1 = \lambda$, $a_2 = 0$, $a_3 = a$, tako da je za $\lambda = 0$ vrtavka integrabilna. Napravi smiselno predstavitev dinamike s Poincarejevo preslikavo in poskusi določiti relativni delež kaotičnega faznega prostora (energijske lupine, pri neki energiji E) v odvisnosti od perturbacijskega parametra λ .

1 Enačbe gibanja

Enačbe gibanja vrtavke v Hamiltonovi formulaciji se glasijo

$$\dot{l}_s = \{H, l_s\} \quad (5)$$

$$\dot{n}_s = \{H, n_s\} \quad (6)$$

V Hamiltonianu nastopajo tako l_s kot n_s , njihove medsebojne Poissonove oklepaje pa poznamo. Netrivialni so le členi z l_s^2 , zato moramo najprej izračunati Poissonove oklepaje oblike

$$\{l_s^2, l_r\} = \sum_i \left(\frac{\partial l_s^2}{\partial q_i} \frac{\partial l_r}{\partial p_i} - \frac{\partial l_s^2}{\partial p_i} \frac{\partial l_r}{\partial q_i} \right) = 2l_s \sum_i \left(\frac{\partial l_s}{\partial q_i} \frac{\partial l_r}{\partial p_i} - \frac{\partial l_s}{\partial p_i} \frac{\partial l_r}{\partial q_i} \right) = 2l_s \{l_s, l_r\} \quad (7)$$

Uporabili smo kanonične spremenljivke q_i in p_i , ki nastopajo v definiciji Poissonovega oklepaja. Fizika ni odvisna od izbire teh spremenljivk, in tudi v nadaljnjem računanju jih ne bomo potrebovali. Sedaj lahko zapišemo tudi enačbe gibanja v eksplicitni obliki

$$\dot{l}_s = \{H, l_s\} = \frac{l_{s+1}}{J_{s+1}} l_{s+2} - \frac{l_{s+2}}{J_{s+2}} l_{s+1} - m g a_{s+1} n_{s+2} + m g a_{s+2} n_{s+1} \quad (8)$$

$$\dot{n}_s = \{H, n_s\} = \frac{l_{s+1}}{J_{s+1}} n_{s+2} - \frac{l_{s+2}}{J_{s+2}} n_{s+1} \quad (9)$$

kjer upoštevamo ciklične indekse, $l_{s+3} = l_s$.

Za naš poseben primer vrtavke, z določenim vrednostmi za J_s in a_s , se enačbe glasijo

$$\dot{l}_1 = l_2 l_3 \left(1 - \frac{1}{\Delta}\right) + m g a n_2 \quad (10)$$

$$\dot{l}_2 = l_3 l_1 \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right) + m g (\lambda n_3 - a n_1) \quad (11)$$

$$\dot{l}_3 = -m g \lambda n_2 \quad (12)$$

$$\dot{n}_1 = l_2 n_3 - \frac{l_3 n_2}{\Delta} \quad (13)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{l_3 n_1}{\Delta} - l_1 n_3 \quad (14)$$

$$\dot{n}_3 = l_1 n_2 - l_2 n_1 \quad (15)$$

2 Poincarejeva preslikava

Vrtavka nima nobene lastne časovne enote ali od zunaj določene frekvence. Kljub temu pa se sistem vrti, zato je najbolj primerna Poincarejeva preslikava. Preostane nam le še izbira količine, ki jo bomo določili s sečno ploskvijo.

Element faznega prostora je podan s tremi komponentami vrtilnime količine in tremi komponentami orientacije. Vrtilna količina v osnovi ne periodična, zato nobene izmed njenih komponent nisem upošteval pri preslikavi. Ostanejo nam tri količine, ki določajo orientacijo vrtavke.

Lagrangeva vrtavka ima dve enaki vrednosti vztrajnostnega momenta, tretja (J_3) pa je od njiju različna. Takšne so tudi običajne vrtavke, ki jih vrtimo na ravni površini. Ta asimetrija jim da preferenčno smer, iz izkušenj vemo, da se večina vrtavk vrti predvsem v smeri osi z . V tem načinu gibanja se komponenta n_3 le počasi spreminja, medtem ko n_1 in n_2 nihata s frekvenco vrtenja vrtavke. Naravni izbiri za sečno ploskev sta torej takšni, da je n_1 ali n_2 enaka nič, izbrati moramo pa še predznak njenega časovnega odvoda. Od predznaka odvoda ni nič odvisno, zato sem lahko izbral, naj bo pozitiven.

Pri nezmoteni vrtavki sma smeri x in y povsem enakovredni, zato je vseeno, katero izmed komponent n_1 ali n_2 izberemo. Motnja λ pa to simetrijo zlomi. Če izhodišče koordinatnega sistema postavimo v težišče vrtavke, je pri nemoteni prijemališče na osi z , motnja pa ga premakne nekam na ravnino xz . Edini lastni vektor, ki je še vedno pravokoten na prijemališče, je e_y oz. e_2 . Za sečno ploskev sem zato izbral pogoj $n_2 = 0$ in $\dot{n}_2 > 0$.

3 Ljapunovi eksponenti

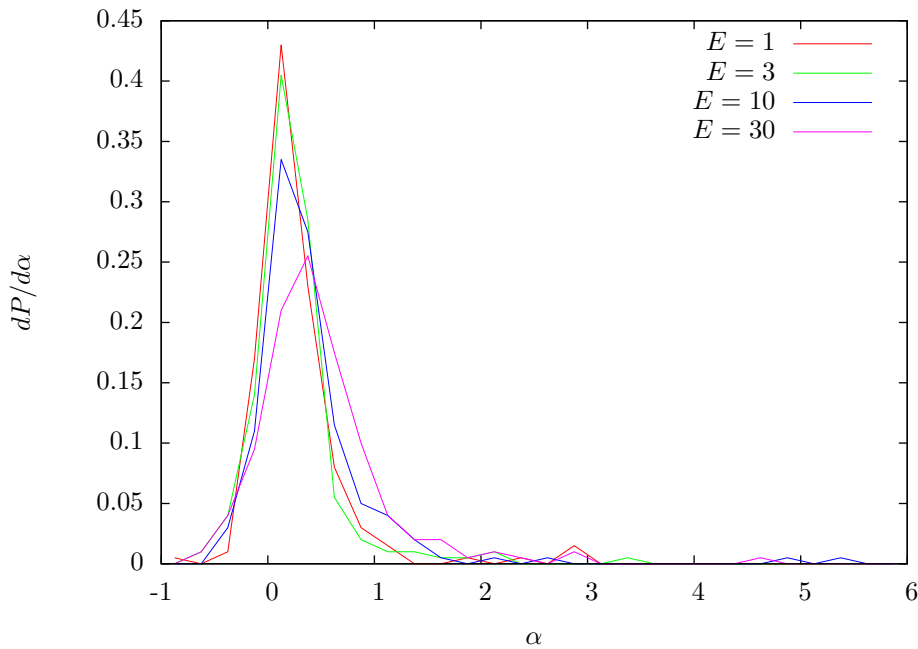
Kaotičnost sistema sem določal z največjim Ljapunovim eksponentom. Ta eksponent sem izračunal numerično, s simulacijo dveh bližnjih orbit.

Velikost eksponenta nas v resnici ne zanima, pomembno je le, ali je večji od 0. Ravno s takšnimi kriteriji imajo numerične metode največje težave. Zato sem se potrudil doseči čim večjo natančnost, tako da sem izračunal relativno razhajanje orbit po vsaki izmed 500 iteracij Poincarejeve preslikave. Logaritmom izračunanih razhajanj sem prilagodil linearno funkcijo, nato pa ugotavljal, ali je dobljeno naraščanje dovolj močno, da lahko trdimo, da je Ljapunov eksponent pozitiven. Fazni prostor sem omejil z največjo energijo E , nato pa naključno izbral po 200 začetnih točk znotraj energijske lupine in izračunal največji Ljapunov eksponent za vsak začetni pogoj. Preštel sem, v koliko primerih je bila orbita kaotična, v odvisnosti od maksimalne energije E in parametra motnje λ .

Na vsakem koraku sem orbiti reskaliral, tako da je razlika med njima vedno ostala majhna. Velikosti relativnih skokov na vsakem koraku sem prilagodil funkcijo $y(t) = a + b/t$, saj v primeru kaosa pričakujemo konstanto, drugače pa padanje kot $\sim 1/t$. Funkcijo sem prilagajal s knjižnico **GSL**, ki vrne tudi kovariančno matriko, iz katere lahko preberemo napako posameznega koeficienta. Enostaven test, ki preverja le predznak koeficienta a , za določitev deleža kaosa ni primeren, saj

zaradi nenatančnosti numeričnega računanja izmerimo pozitivno vrednost tudi za integrabilni, nemoten sistem.

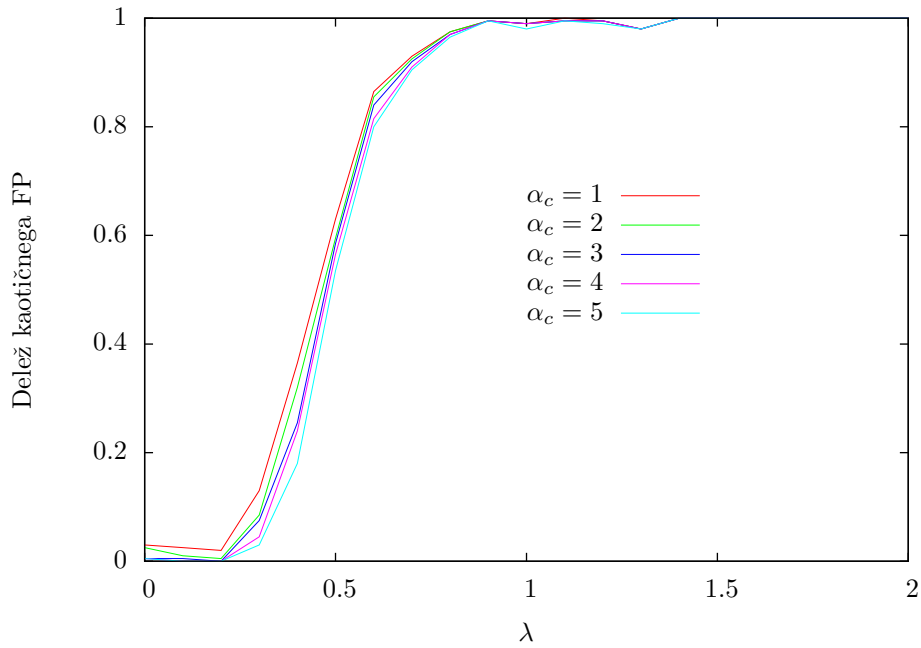
Namesto tega sem opazoval vrednost $\alpha = a/\sigma_a$, ki je povezana z gotovostjo, da je dejanska vrednost Ljapunovega eksponenta večja od 0. Orbito sem štel kot kaotično, če je bil koeficient α večji od neke kritične vrednosti α_c . Za umeritev kriterija oz. določitev kritične vrednosti sem si pomagal z verjetnostno porazdelitvijo $dP/d\alpha$ pri različnih energijskih lupinah. Vemo, da je pri vrednosti $\lambda = 0$ sistem integrabilen, torej je delež kaotičnega faznega prostora tam enak 0. Dobra izbira za vrednost α_c je takšna, da bodo pri njej vse štiri črte na grafu 1 padle na 0.



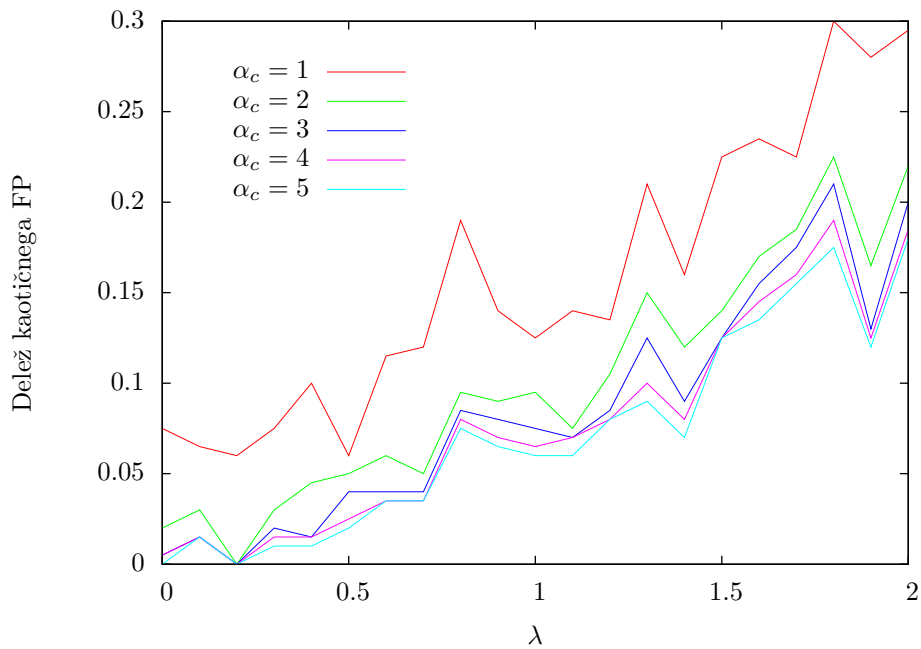
Slika 1: Umeritev mejne gotovosti α_c v sistemu brez motnje ($\lambda = 0$)

V večini primerov je izračunan največji Ljapunov eksponent med 0 in 1/2. Naivno bi lahko vse takšnje orbite klasificirali kot kaotične. Predznanje pa nam pravi, da nemotena Lagrangeva vrtavka ni kaotična, zato je pravi eksponent v teh primerih enak 0, odstopanje pa nastane zaradi numeričnih napak. Če je $\alpha < 1$, to pomeni da je izračunan LE manjši od svoje absolutne napake in ne moremo z gotovostjo trditi, da je pozitiven.

Zaradi omejene natančnosti računalnika najdemo pozitivne Ljapunove eksponente tudi z višjo gotovostjo, ampak pri $\alpha > 3$ so ti že zelo redki. Smiselna izbira za mejno vrednost se torej zdi $\alpha_c = 3$, torej upoštevamo Ljapunove eksponente, ki so pozitivni z gotovostjo vsaj 3σ oz. 99,7%. Po zgornjem grafu sodeč je to merilo dovolj strogo, saj za nemoteno vrtavko dobimo skoraj ničelni delež kaosa. Možno pa je, da je merilo prestrogo. Zato sem preveril tudi kako se delež kaotičnega faznega prostora spreminja v odvisnost od α_c pri vključeni motnji. Rezultat pri nizki energiji je na sliki 2, pri visoki energiji pa na sliki 3. Vsaka serija podatkov na posameznem grafu je bila izračunano iz istega zagona simulacije, zato se naključna odstopanja tako dobro ujemajo med seboj.



Slika 2: Odvisnost izračunanega deleža kaotičnega faznega prostora od mejne gotovosti α_c pri nizkih energijah ($E = 1$)

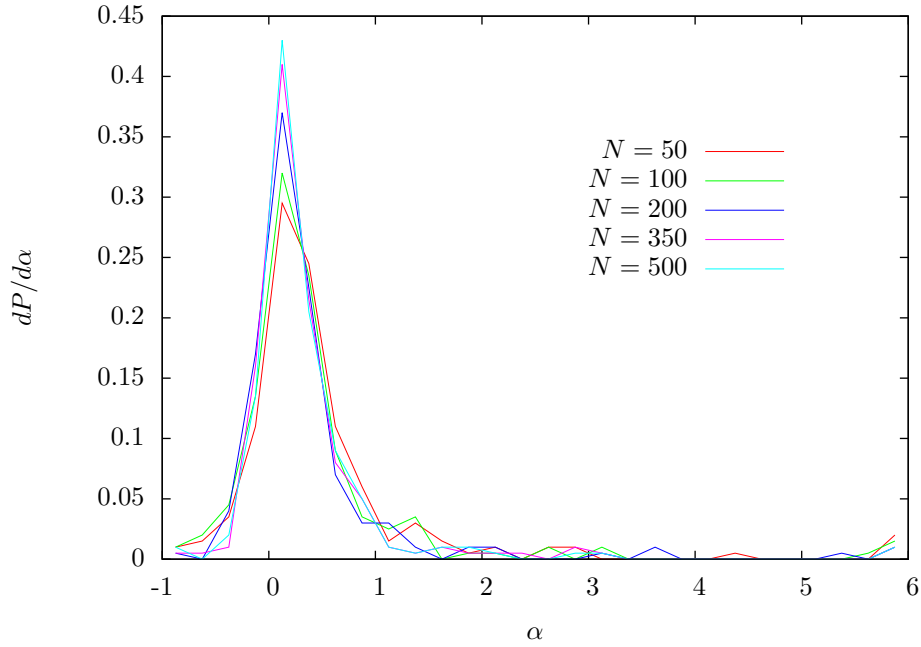


Slika 3: Odvisnost izračunanega deleža kaotičnega faznega prostora od mejne gotovosti α_c pri visokih energijah ($E = 30$)

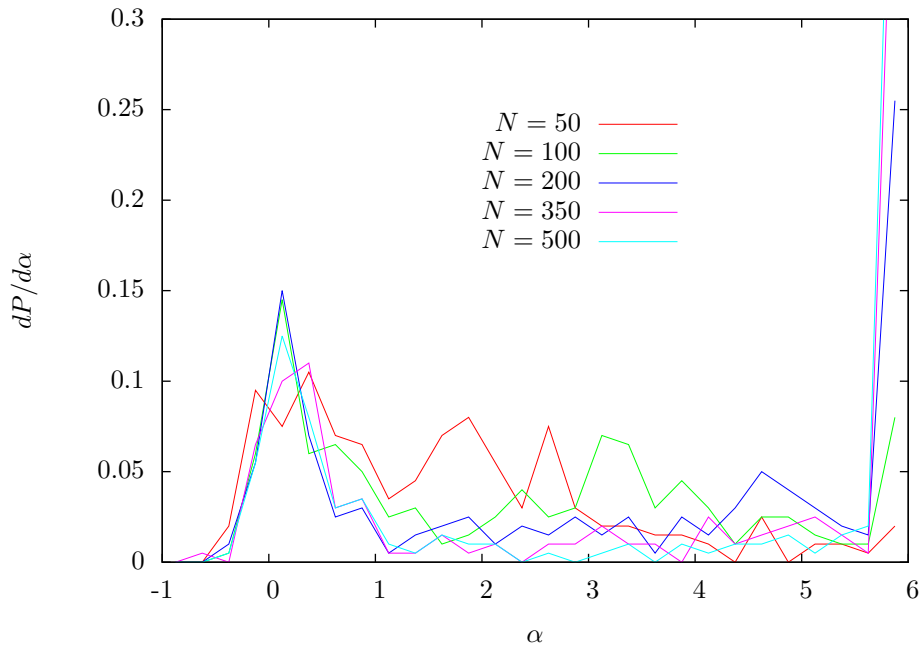
Z obeh grafov lahko vidimo, da izbira mejne vrednosti za gotovost le malo vpliva na izračunan delež kaosa. Izjema je le $\alpha_c \leq 1$, ki pri visokih energijah vrne veliko “false positive” točk in vidno odstopa od ostalih. Z izbiro $\alpha_c = 3$ torej ne postavimo prehude omejitve, hkrati pa tudi z večanjem zahteve po gotovosti Ljapunovih eksponentov le malo spremenimo rezultat. Pri takšni izbiri dobimo dobro sliko odvisnosti kaotičnosti od energije sistema in motnje λ .

4 Dolžina orbit

V zgornjih računih sem vsakič simuliral $N = 500$ iteracij Poincarejeva preslikave. Pred uporabo rezultatov je koristno preveriti, ali je to smiselna dolžina orbit. To sem preveril tako, da sem opazoval delež kaotičnega faznega prostora in porazdelitev $dP/d\alpha$ pri različnih izbirah za N .

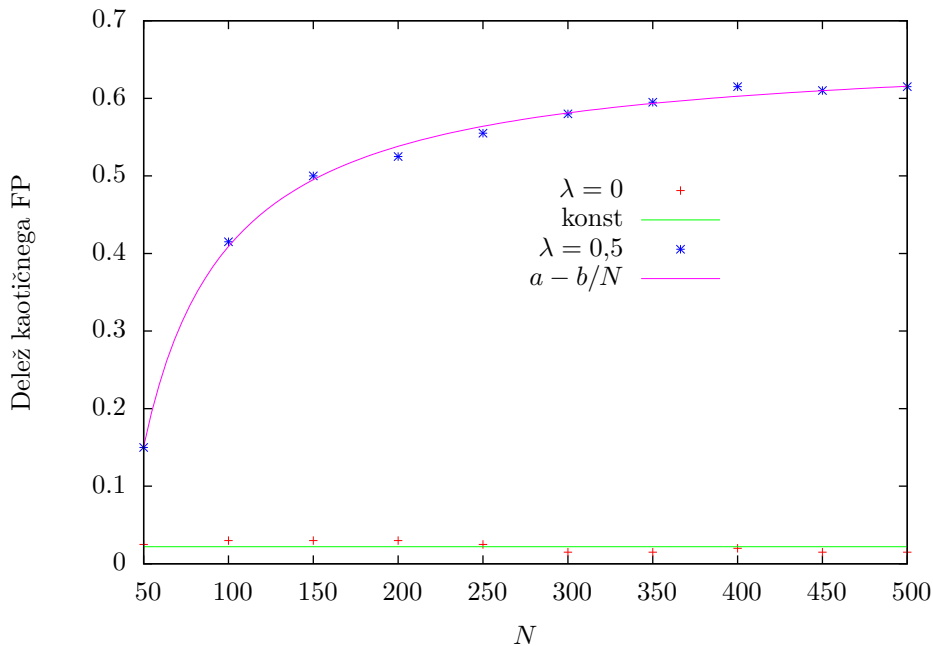


Slika 4: Odvisnost porazdelitve α od dolžine orbit N pri energiji $E = 1$ za nemoteno Lagrangevo vrtavko ($\lambda = 0$)



Slika 5: Odvisnost porazdelitve α od dolžine orbit N pri energiji $E = 1$ za moteno Lagrangevo vrtavko ($\lambda = 0,5$)

Takoj opazimo, da je v nemotenem sistemu razlika med porazdelitvama za $N = 50$ in $N = 500$ na sliki 4 majhna, zato se tam lahko zadovoljimo že s kratkimi orbitami. Podoben rezultat dobimo tudi za sisteme s pozitivno λ pri višjih energijah. Močna odvisnost od dolžine orbit pa se pojavi, če ima sistem znaten delež kaotičnega faznega prostora, kot na primer na sliki 5. Zato sem podrobno preučil le del faznega prostora z nizkimi energijami, kjer je kaotičnost največja. Takoj lahko vidimo, da za majhne N porazdelitev izgleda naključna in približno enakomerna, pri N nad 200 pa se izoblikujeta dva jasna vrhova, eden pri $\alpha \approx 0$ in drugi pri $\alpha > 6$. Izrazit vrh pri $\alpha = 6$ se pojavi, ker sem tja uvrstil tudi vse orbite z večjim α .

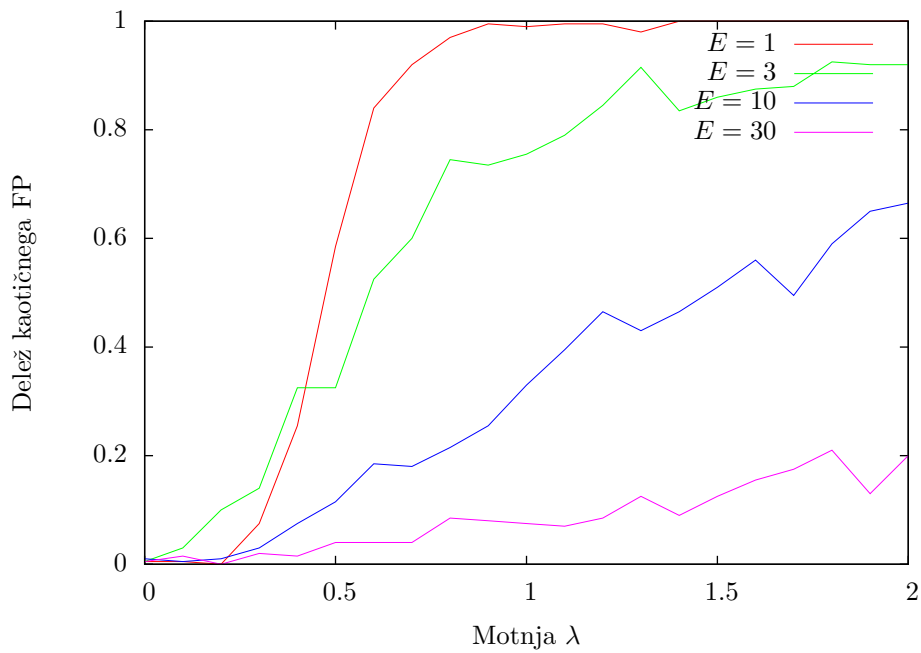


Slika 6: Izračunan delež kaotičnega FP pri energiji $E = 1$ in pogoju $\alpha_c = 3$ za dve različni veliosti motnje λ in različnih dolžinah orbit N

Ker nas v končni fazi zanima predvsem deleža kaotičnega FP, sem opazoval tudi odvisnost tega deleža od N . Rezultat za pri nizki energiji ($E = 1$) je na grafu 6. S pomočjo prilagojenih krivulj vidimo, da napaka za močno kaotičen sistem pada približno z N^{-1} , za integrabilen sistem pa je skoraj konstantna. Graf potrjuje zgornjo trditev, da je napaka največja pri močno kaotičnih sistemih, kjer je tudi konvergenca najpočasnejša, torej za natančno določitev kaotičnosti takšnih sistemov potrebujemo dolge orbite.

5 Delež kaotičnega faznega prostora

Izbral sem vrtavko s parametri $\Delta = 5$, $a = 1$ in $mg = 1$, parameter λ pa sem spreminjal od 0 do 2. Simulacijo sem pognal pri štirih različnih maksimalnih energijah E . Vsakič sem hkrati spremljal 200 parov bližnjih orbit, na vsaki orbiti pa sem naredil 500 iteracij Poincarejeve preslikave. Za kriterij kaotičnosti orbite sem uporabil mejno vrednost $\alpha_c = 3$. Končni rezultat je na sliki 5.



Slika 7: Delež faznega prostora, ki je kaotičen z gotovostjo 3σ (99,7%)

Po pričakovanju kaotičnost narašča z velikostjo motnje λ , in v določenih primerih doseže vrednost 1. Opazimo pa tudi, da kaotičnost pada z naraščanjem energije, torej je kaotičen predvsem del faznega prostora z nizkimi energijami oz. počasnim vrtenjem vrtavke. Delno lahko to odvisnost pripišemo sami uporabi Poincarejeve preslikave: pri nižjih energijah za ena iteracija preslikave traja dlje, torej imata orbiti na volje več časa za razhajanje in je Ljapunov eksponent ustrezno večji. Prav tako pa se padanje kaotičnosti ujema z znanimi lastnostmi vrtavk, ki so pri hitrem vrtenju mirne, pri počasnem vrtenju pa začnejo opletati. Rezultat na grafu 5 se torej sklada z znanimi eksperimentalnimi opažanji.