Nelinearna minimizacija

Miha Čančula

23. oktober 2011

1 Orodja

Nalogo sem reševal s prostim programom `GNU Octave`, ki za nelinearno optimizacijo ponuja funkcijo `sqp`.

2 Thompsonov problem

Položaj diskretnih točkastih nabojev na krogli lahko opišemo z dvema koordinatama, $\vartheta \in [0, \pi]$ in $\varphi \in [0, 2\pi]$. Potencialna energija takih nabojev je odvisna le od medsebojne razdalje, zato moramo najprej izraziti razdaljo med dvema nabojema z njunima koordinatama. Kot med dvema točkama izračunamo kot skalarni produkt med njunima krajevnima vektorjema in znasa

$$\cos \alpha_{ij} = \cos(\varphi_i - \varphi_j) \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j + \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j \tag{1}$$

dejansko razdaljo med točkama pa po kosinusnem izreku

$$d_{ij} = \sqrt{2R^2(1 - \cos \alpha_{ij})} \tag{2}$$

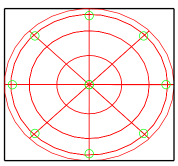
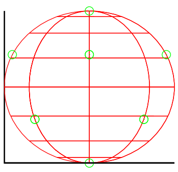
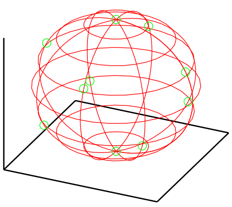
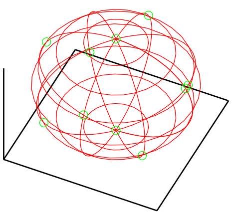
Skupna potencialna energija sistema je vsota potencialnih energij vseh parov nabitih delcev na krogli

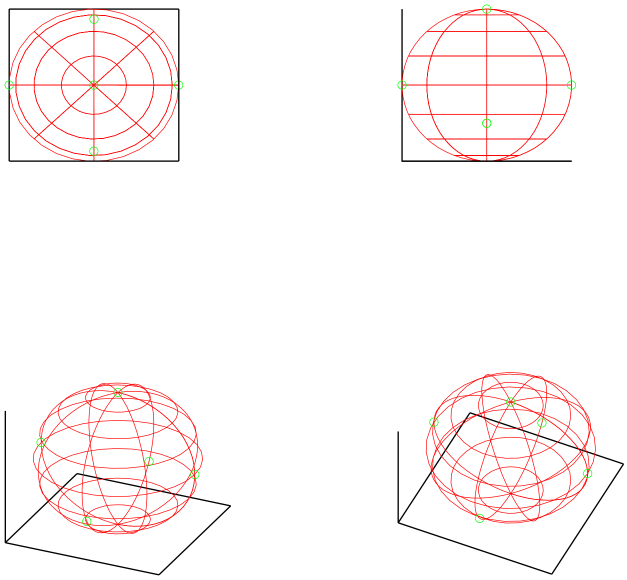
$$E = E_0 \sum_{i<j} \frac{\sqrt{2R^2}}{d_{ij}} = E_0 \sum_{i<j} [1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j) \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j - \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j]^{-1/2} \tag{3}$$

Ker multiplikativna konstanta v energiji ne spremeni optimalne razporeditve nabojev po krogli, lahko izraz pretvorim v brezdimenzijske enote. Energija $E_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ nas bo zanimala le, če bomo želeli izračunati vrednosti energije v minimumu, ne pa samega položaja minimuma.

$$y = \sum_{i<j} [1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j) \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j - \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j]^{-1/2} \tag{4}$$

Brez izgube splošnosti lahko fiksiramo tri koordinate: $\vartheta_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Na ta način preprečimo vrtenje okrog krogle med reševanje, hkrati pa pospešimo reševanje, saj zmanjšamo število prostostnih stopenj. Za problem z N naboji nam ostane $2N - 3$ prostih koordinat.



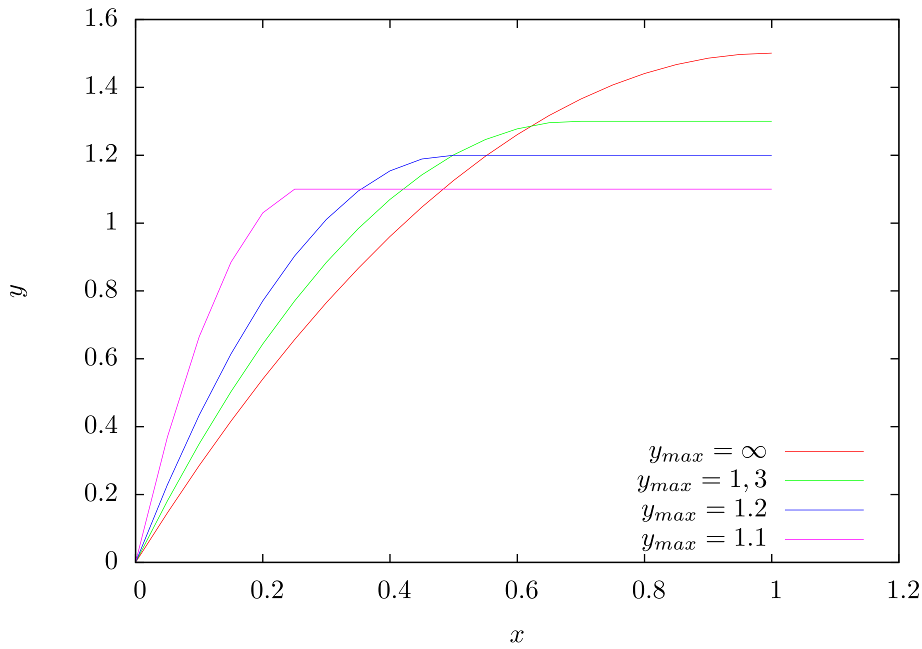
3 Voznja do semaforja

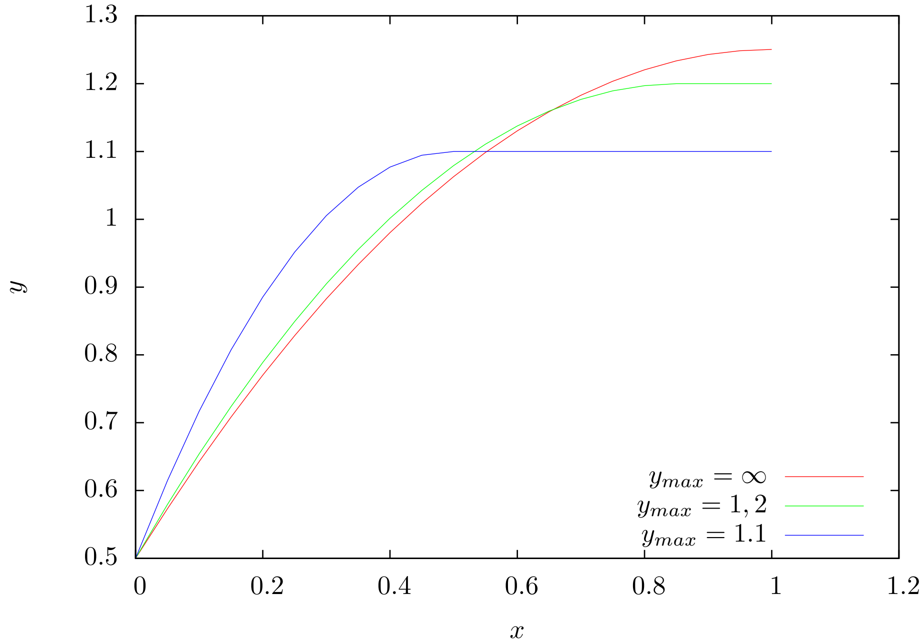
Na enak način sem reševal tudi problem iz prejšnje naloge. Časovni interval sem razdelil na N podintervalov, hitrost vožnje sem omejil med 0 in y_{max} in dodal omejitev, da je skupna pot enaka 1.

Izbral sem metodo, ki je sama določila smer najugodnejšega premikanja, brez da bi ji moral podati gradient akcije. Zato ni bilo potrebe po analitičnosti funkcije in sem lahko uporabil ostro omejitev tako da hitrost kot za pospešek. Izračun je bil dovolj hiter tudi za večje število intervalov (nekaj 100), zato ni bilo potrebe po optimizaciji, saj se večja natančnost računanja ne pozna na grafu.

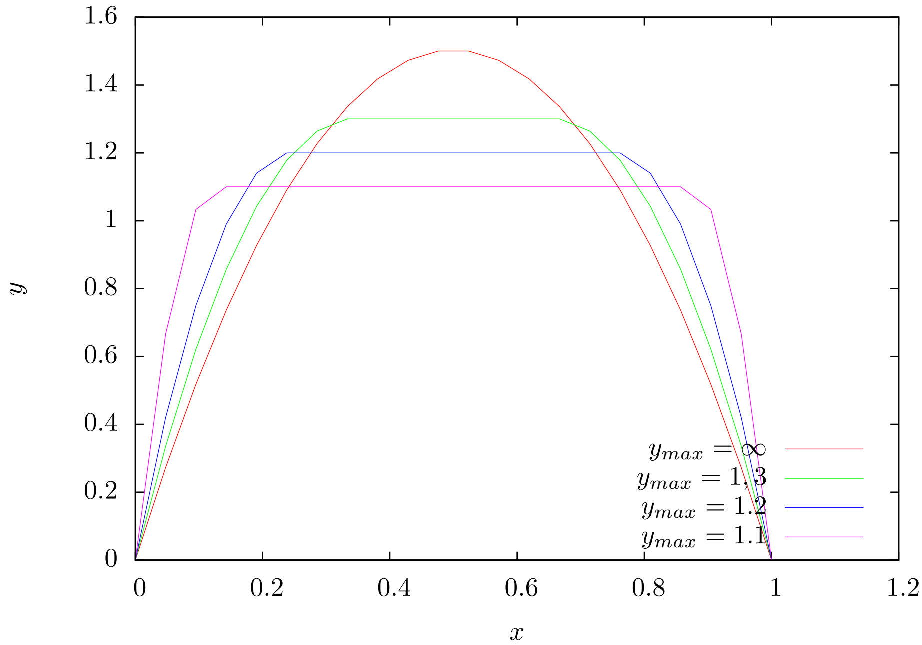
V primerjavi s prejšnjo nalogo dodatne omejitve prinesejo kar nekaj novih parametrov, zato sem narisal več grafov.

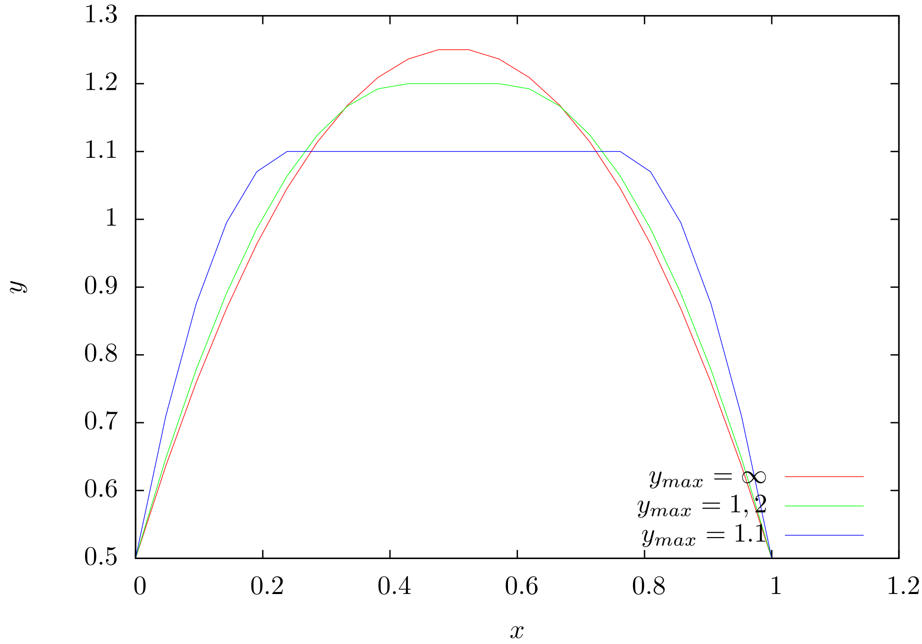
3.1 Brez končnega robnega pogoja

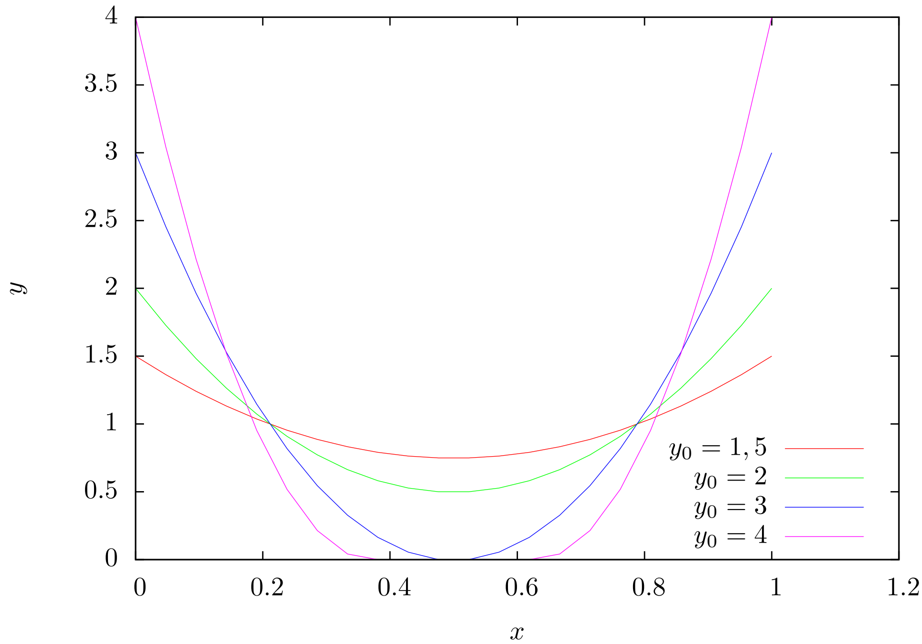




3.2 Periodična vožnja







3.3 Omejitev pospeška

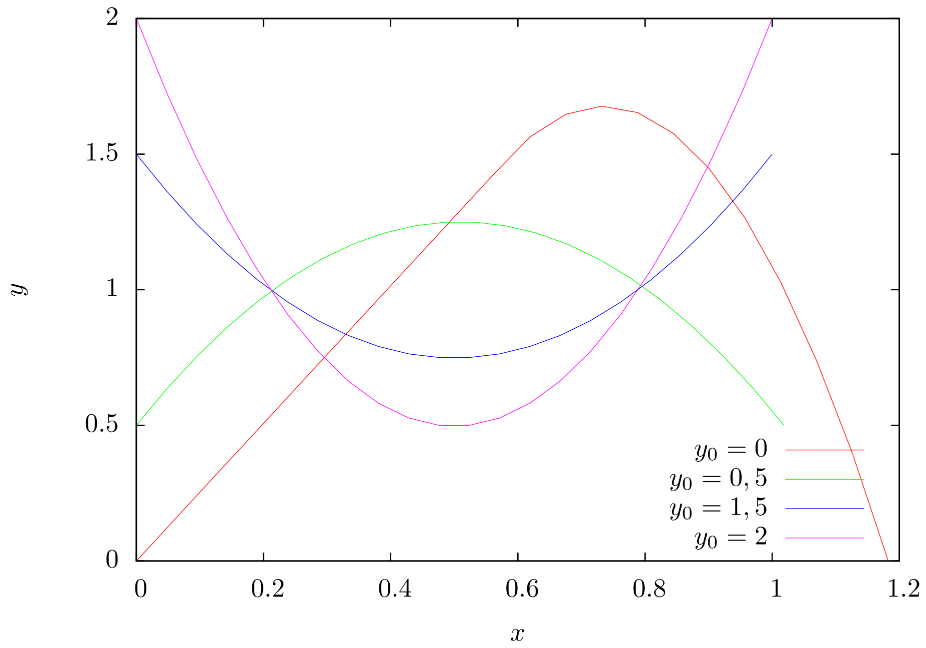
Upošteval sem tudi asimetrično omejitev pospeška $a_{min} < a < a_{max}$, kjer je $a_{min} < 0$ največji pojemek pri zaviranju in $a_{max} > 0$ največji pospešek pri pospeševanju. Običajno so avtomobili sposobni hitrejšega zaviranja kot pospeševanja. S to dodatno omejitvijo moramo biti bolj previdni pri izbiri robnih pogojev, saj moramo paziti, da rešitev se vedno obstaja.

Poleg tega rešitev postane manj zanimiva, saj avto večino časa pospešuje ali pa zavira s polno močjo. Zato sem raje upošteval neenakost v času, tako da sem dopustil možnost, da avto v križišče zapelje po tem ko se prižge zelena luč. Pri pogojih, ko je začetna hitrost prevelika, da bi avto uspel upočasniti pred prihodom v križišče, pa še vedno ne moremo najti rešitve.

Če bi dopustil poljuben čas do križišča, bi bila najugodnejša pot seveda s konstantno hitrostjo, saj bi bila v tem primeru akcija enaka 0. Zato sem moral upoštevali čas (oz prepotovano pot v fiksnem času) tudi v funkciji, ki jo želimo minimizirati. Ta funkcija je tako postala

$$S = \sum_{i=0}^{N} y_i - e^{\beta(1-s)} \tag{5}$$

Prehiter prihod do križišča sem omejil z ostro mejo, medtem ko je prepozen prihod kaznovan le z eksponentno funkcijo.



Asimetrična omejitev pospeška pride do izraza pri majhnih začetnih in končnih hitrostih, ko je treba najprej pospeševati in nato zavirati.