Direktno reševanje Poissonove enačbe

Miha Čančula

22. maj 2012

1 Algoritem

Gibanje vrvice sem računal v korakih. Vsak korak je sestavljen iz dveh delov:

1. Ob poznavanju naklona $\varphi(s,t)$ in $\varphi(s,t-\Delta t)$ izračunomo silo $F(s,t)$
2. Ob poznavanju naklona $\varphi(s,t)$ in $\varphi(s,t-\Delta t)$ ter sile $F(s,t)$ izračunomo naklon $\varphi(s,t+\Delta t)$

Časovni korak vsebuje le druga enačba, medtem ko je prva le pomožna. Začetni pogoj nam določa pogoje prvega dela, zato začnemo s tem, nato pa izmenično izvajamo oba.

V enačbah nastopa drugi časovni odvod $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$, zato sem v spominu vedno shranjeval trenutno in prejšnjo vrednosti φ. Po drugi strani pa nikjer ne nastopa časovni odvod sile, zato mi je ni bilo treba shranjevati med koraki, ampak sem jo potreboval le na prehodu od 1. do 2. dela koraka.

1.1 Izračun sile v vrvi

Začetni pogoj nam določa, da je vrv na začetku ravna, torej je $\varphi(s,t=0)=\varphi_0$. S tem imamo podan naklon vrvi po celotni dolžini, o sili v njej pa ne vemo nič. Zato najprej izračunamo silo s pomočjo enačbe (1).

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right] F = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 \tag{1}$$

Na desni strani enačbe nastopa časovni odvod kota φ. Tega lahko izračunamo kot razliko med kotom ob trenutnem in prejšnjim času, na začetku pa uporabimo pogoj, da je vrv pri miru $\dot\varphi(s,0)=0$.

Najbolj primerno se mi je zdelo F in φ predstaviti kot vektorja, tako da vrv razdelimo na končno število enako dolgih odsekov. V takšni predstavitvi moramo diskretizirati tudi operator odvoda po s, se enačba (1) prevede na matrični sistem

$$\frac{F_{i-1}-2F_i+F_{i+1}}{h^2} - \frac{(\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1})^2}{(2h)^2}F_i = -\left(\dot\varphi_i\right)^2 \tag{2}$$

$$F_{i-1}+F_{i+1}+\left(-2-\frac{(\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1})^2}{4}\right)F_i = -h^2\left(\dot\varphi_i\right)^2 \tag{3}$$

kjer je $h=1/N$ korak diskretizacije. Ker je enačba drugega reda, sem za približek prvega odvoda $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ uporabil simetrično diferenco.

Zgornja enačba seveda velja le tam, kjer so vsi indeksi smiselni, torej povsod razen na začetku in koncu vrvi. Na robovih moramo seveda upoštevati robne pogoje. Končni robni pogoj je enostaven; tam je sila kar predpisana in je enaka nič. Zato lahko končno enačbo kar izpustimo, prav tako pa izpustimo člen z $F_{i+1}=0$ v predzadnji enačbi. S tem smo zmanjšali dimenzijo sistema in prihranili drobec računske zmogljivosti.

Robni pogoj na začetku vrvi je bolj zapleten, saj ne poznamo vrednosti sile. Poznamo pa njen prvi odvod, ki ga lahko izračunamo iz enačbe

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \sin\varphi = 0 \tag{4}$$

Prvi odvod lahko zapišemo s končno diferenco. Ker smo na začetku vrvi, ta diferenca ne more biti simetrična, zato vzamemo kar najenostavnejšo

$$F_1 - F_0 = -h\sin\varphi_0 \tag{5}$$

Pri tem sem upošteval, da odseke vrvi številčimo z $i = 0, 1, \ldots, N-1$. S φ_0 je tako označen naklon prvega odseka vrvi, ne pa naklon ob začetnem času. Sedaj imamo sistem $N-1$ enačb za $N-1$ neznank, medtem ko je zadnja neznanka (vrednost sile v zadnjem odseku vrvi) znana. Na ta način lahko izračunamo silo v vrvi ob vsakem času.

1.2 Izračun naklona vrvi

Drugi korak pa je izračun naklona vrvi, če poznamo naklon ob prejšnjem času in napetost. Za to uporabimo enačbo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 2\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial s} + F\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} \tag{6}$$

Odvode po s diskretiziramo podobno kot v prejšnjem poglavju, tako da spremenljivki F in φ obravnavamo kot vektorja. Časovni odvod pa ima tu drugačno vlogo, saj želimo simulirati gibanje vrvice z velikim številom časovnih korakov. Poleg tega poznamo le začetni pogoj, o končnem stanju pa ne vemo nič. Ker pa poznamo tako naklon kot njegov odvod ob začetnem času, je časovna odvisnost v resnici začetni problem, ki ga lahko rešimo z enostavno integracijo. Tudi čas diskretiziramo, tako da v vsakem koraku napredujemo za $\Delta t = k$.

S poznavanjem trenutnega in prejšnjega stanja lahko izračunamo naklon od naslednjem času. Za jasnejšo pisavo nisem označil implicitne krajevne odvisnosti.

$$\varphi(t+k) = 2\varphi(t) - \varphi(t-k) + k^2\left[2\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial s} + F\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial s^2}\right] \tag{7}$$

Krajevne odvode, ki nastopajo na desni strani enačbe spet nadomestimo s končnimi diferencami.

$$\begin{aligned}\varphi_i(t+k) = 2\varphi_i(t) - \varphi_i(t-k) + k^2 \Bigg[& 2\frac{(F_{i+1} - F_{i-1})(\varphi_{i+1}(t) - \varphi_{i-1}(t))}{(2h)^2} + \\ & + F_i\frac{\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i-1}(t)}{h^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{8}$$

Tudi enačba (8) velja le za odseke v notranjosti vrvi. Na krajiščih jo nadomestimo z robnimi pogoji. Tokrat nobeden izmed obeh robnih pogojev ni tako enostaven kot je bil pri računu sile, ampak dobimo dve netrivialni enačbi. Pogoj v prijemališču vrvi sledi iz Newtonovega zakona in se glasi

$$F\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \cos\varphi = 0 \tag{9}$$

Enako in kot za enačbo (4) lahko naredimo enostransko diferenco

$$\varphi_0(t+k) = \varphi_1(t+k) - \frac{h}{F_0}\cos\varphi_0(t+k) \tag{10}$$

Vrednosti φ_1 lahko izračunamo po enačbi (8), φ_0 pa je neznanka. Enačba (10) implicitna v φ_0 in transcendentna. Lahko bi jo reševali s standardnimi orodji za reševanje nelinearnih enačb (npr. Newtonovo metodo). Rešitev pa dobimo hitreje in enostavneje, če robni pogoj zapišemo s simetrično diferenco za drugi odsek vrvi

$$\varphi_0(t+k) = \varphi_2(t+k) - 2\frac{h}{F_0}\cos\varphi_1(t+k) \tag{11}$$

Zgornja enačba ni več implicitna, zato lahko φ_0 izračunamo direktno.

Robni pogoj na prostem koncu vrvi nima jasne fizikalne podlage in si ga lahko izberemo. Pogoj določa le obliko konca vrvi in ima pri večanju števila odsekov vedno manjši vpliv, zato sem si izbral enega izmed najenostavnejših, ki pa še vedno da dovolj realistično gibanje vrvi. To je pogoj $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = 0$, ki je predlagan tudi v navodilih. Ker nastopa drugi odvod, ga moramo v diskretni obliki zapisati na predzadnjem odseku vrvi (zadnji odsek je $N-1$)

$$\varphi_{N-3} - 2\varphi_{N-2} + \varphi_{N-1} = 0 \tag{12}$$

Pogoj uporabimo ob času, za katerega računamo naklon vrvi, torej $\varphi_i = \varphi_i(t+k)$. Vrednosti v točkah $N-3$ in $N-2$ izračunamo po enačbi (8), edina neznanka je φ_{N-1}, ki ga enostavno izrazimo iz zgorjnje enačbe.

2 Rezultati

Nihanje vrvice je najlažje prikazat z animacijo. Rešitvi prilagam tri animacije, ki se razlikujejo po začetnemu kotu vrvice. V vseh treh primerih sem uporabil simuliral nihanje vrvice s 100 odseki in časovnim korakom $4 \cdot 10^{-6}$ v brezdimenzijskih enotah. V eni sekundi simulacije je $2.5 \cdot 10^5$ korakov, kar ustreza nihanju vrvice s karakterističnim časom $\tau = 1$s.

3 Natančnost

Natančnost metod sem opazoval tako, da sem spreminjal število odsekov vrvi in velikost časovnega koraka.

3.1 Položaj repa

Med nihanjem vrvi se najhitreje spreminja položaj prostega konca vrvi. Že zaradi kroženja okrog prijemališča je hitrost največja na koncu vrvi, poleg tega pa se v bližini prostega konca pojavijo tudi manjša nihanja z večjimi frekvencami. Zlasti zaradi teh nihanj se mi je zdelo gibanje konca vrvi najprimernejša metoda za določanje natančnosti metode.

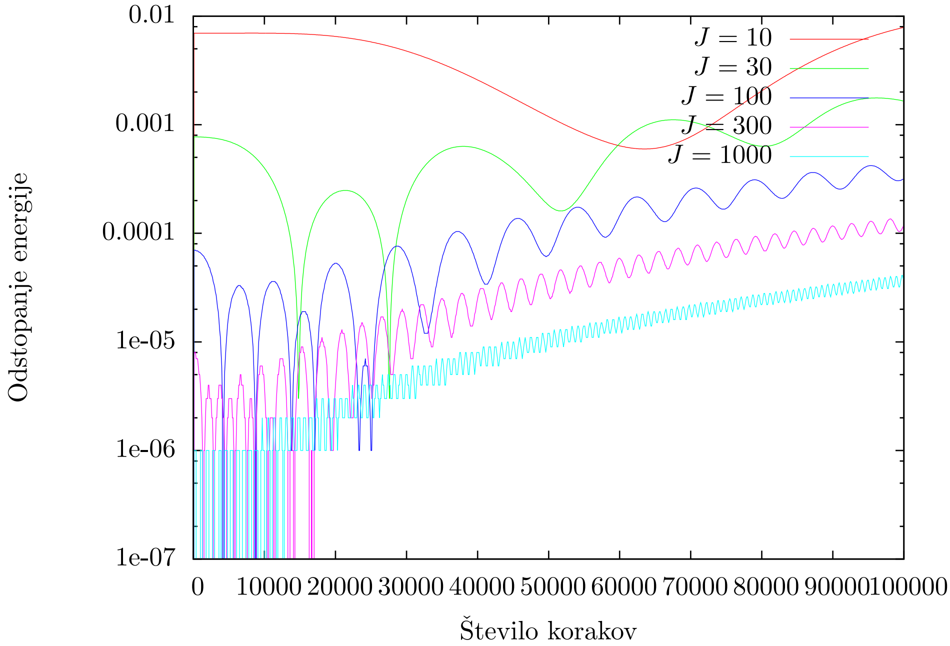
3.2 Ohranitev energije

Ker shema integracije sama po sebi ne ohranja skupne energije vrvi, je spreminjanje energije s časom primeren kriterij za določanje natančnosti. V nihanjoči vrvi imamo kinetično in potencialno energijo, medtem ko se pri neraztegljivi vrvice prožnostna ne spreminja. Kinetično energijo vsakega odseka lahko razdelimo na translacijsko in rotacijsko.

Skupno energijo enega odseka vrvi lahko zapišemo kot

$$E_i = E_{trans} + E_{rot} + E_{pot} = \frac{m_i}{2}v_i^2 + \frac{m_i l_i^2}{24}\dot{\varphi}^2 - m_i g y_i \tag{13}$$

Hitrost v_i in položaj y_i sta odvisni le od φ in $\dot{\varphi}$, zato za izračun ne bomo potrebovali sile. Navpično komponentno položaja lahko izrazimo enostavno, s seštevanjem navpičnih komponent smeri vseh prejšnjih odsekov. Ker v izrazu za potencialno energijo nastopa položaj težišča odsekov,



i-ti člen upoštevamo le polovično. Podobno lahko izračunamo tudi vodoravno komponento x, ki jo bomo potrebovali pri računu hitrosti.

$$y_i = \sum_{m=0}^{i-1} h \sin\varphi_m + \frac{1}{2} h \sin\varphi_i \tag{14}$$

$$x_i = \sum_{m=0}^{i-1} h \cos\varphi_m + \frac{1}{2} h \cos\varphi_i \tag{15}$$

Hitrost lahko izračunamo kot odvod položaja s končno diferenco. Lažje kot samo hitrost je zapisati njen kvadrat

$$v_i^2 = \frac{(y_i(t) - y_i(t-k))^2 + (x_i(t) - x_i(t-k))^2}{k^2} \tag{16}$$

Časovna odvisnost y_i je izražena le prek časovne odvisnosti φ. Ker program vedno shranjuje φ ob dveh zaporednih korakih, lahko hitrost izračunamo po vsakem koraku.

Izraza za položaj i-tega odseka vrvi lahko prepišemo v rekurzivno formulo

$$(x_0, y_0) = \frac{h}{2}(0, 0) \tag{17}$$

$$(x_i, y_i) = (x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h}{2}(\cos\varphi_{i-1} + \cos\varphi_i, \sin\varphi_{i+1} + \sin\varphi_i) \tag{18}$$

po kateri lahko celotno energijo izračunamo z enim prehodom po podatki in v linearnem času.

Energija ima še to prednost, da njeno začetno vrednost lahko izračunamo analitično. Na začetku vrvica nima kinetične energije, njena potencialna energija pa je enaka

$$E(0) = -mg\frac{l}{2} \sin\varphi(0) \tag{19}$$