Potovanje sonde med planeti

Miha Čančula

20. september 2012

Povzetek

V sistemu dveh planetov z enakima polmeroma in masama, ki potujeta po krožnih orbitah okrog matične zvezde v isti ravnini na razdaljah v razmerju 1:2, skušamo izstreliti sondo iz prvega na drugi planet. Koliko zunanjih parametrov ima sistem (polmer planeta, ...)? Koliko parametrov lahko predpišemo, da ima problem še vedno rešitev?

1 Zapis problema

1.1 Newtonov zakon

Sonda se po sončnem sistemu giblje, kot to določa Newtonov zakon

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m_s} \tag{1}$$

Nanjo delujejo tri sile, to so gravitacijski privlaki sonca in obeh planetov.

$$\mathbf{F} = Gm_s \left(\frac{-M\mathbf{r}}{r^3} + \frac{m(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3} + \frac{m(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^3} \right)$$

Masa sonde se po pričakovanju krajša, ostanejo pa nam še gravitacijska konstanta in mase vseh treh nebesnih teles. Poznamo pa tudi gibanje planetov, saj krožita okrog zvezde. Njun radialni pospešek je enak

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} = -\omega^2 \mathbf{r}_i = GM \frac{-\mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{2}$$

Imamo torej zvezo med maso sonca M, gravitacijsko konstanto G, polmerom orbite planeta r_i (i je 1 ali 2) in frekvenco kroženja ω.

1.2 Število parametrov

Konstanta G nastopa povsod kot multiplikativna konstanta k drugemu časovnemu odvodu. Izbira njene vrednosti je zato enakovredna izbiri časovne skale $t \to t/\sqrt{G}$. Enak učinek ima povečanje ali zmanjšanje mase sonca in planetov za enak faktor. Vrednosti za G in M lahko torej postavimo na 1, namesto mase planeta m pa računamo z razmerjem $\mu = m/M$. Enačbo gibanja planetov rešimo enostavno, tako da zanemarimo medsebojni vpliv in privzamemo krožno gibanje. Iz zveze (2) izrazimo krožno frekvenco kot $\omega^2 = 1/r^3$.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu \frac{\mathbf{r_1} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r}|^3} + \mu \frac{\mathbf{r_2} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r}|^3} \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_i(t) = \omega_i^{-2/3} \left[\cos(\omega_i t + \varphi_i), \sin(\omega_i t + \varphi_i)\right]^T \tag{4}$$

V nalogi je podano razmerje polmerov orbit obeh planetov $r_2 = 2r_i$. Po drugem Keplerjevem zakonu lahko to pretvorimo v razmerje krožnih frekvenc

$$\omega_1 = \sqrt{8}\omega_2 \approx 2.828\omega_2$$

Nazadnje preverimo še, ali lahko določimo tudi vrednosti za r_1 in r_2. Če vse razdalje povečamo za faktor k, se krožni frekvenci pomnožita s $\sqrt{k^{-3}}$, sile na sondo s k^{-2}. Če spet reskaliramo časovno skalo kot $t \to t\sqrt{k^3}$, se vsi pospeški množijo s $k \cdot \sqrt{k^{-3}} \cdot \sqrt{k^{-3}} = k^{-2}$, kar se ujema z izrazom za silo. Torej oblika rešitve ni odvisna od prostorske skale, in lahko postavimo $r_1 = 1$ in $\omega_1 = 1$. Očitno je, da problem ni odvisen od orientacije koordinatnega sistema, zato lahko enega izmed kotov φ_i, na primer φ_1, postavimo na 0.

$$\mathbf{r}_1(t) = [\cos t, \sin t]^T \tag{5}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = 1/\sqrt{8}\left[\cos(\sqrt{8}t + \delta), \sin(\sqrt{8}t + \delta)\right]^T \tag{6}$$

V sistemu enačb sta ostala le še dva neodvisna parametra: relativna masa obeh planetov μ in fazni zamik med orbitama δ. Ostale količine so določene s Keplerjevim zakonov in z izbiro časovne skale.

1.3 Robni pogoji

Koordinatni sistem postavimo tako, da je sonce v središču. Ob času $t = 0$ lahko brez izgube splošnosti privzamemo, da se prvi (notranji) planet nahaja na osi x, torej je njegov kot v polarnih koordinatah enak 0. Za drugi planet tega ne moremo privzeti, saj ima lahko fazni zamik δ. Oba planeta se gibljeta po krožnih orbitah, torej lahko njun položaj po poljubnem času v polarnih koordinatah zapišemo kot

$$\mathbf{r}_1(t) = (1, t) \tag{7}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (2, \sqrt{8}t + \delta) \tag{8}$$

Če sonda za potovanje med planetoma potrebuje čas T, se njuna robna pogoja glasita

$$\mathbf{r}(0) = (1, 0) \tag{9}$$

$$\mathbf{r}(T) = (2, \sqrt{8}T + \delta) \tag{10}$$

Poznamo silo na sondo ob vsakem času, torej je enačba drugega reda, imamo pa tudi dva robna pogoja. Prost pa je še parameter T, torej bomo za pot med dvema planetoma verjetno našli več rešitev. Zato bomo lahko omejili čas potovanja T, ali pa začetno in končno hitrost sonde, da bo rešitev še vedno obstajala.

1.4 Vrednotenje rešitve

Najbolj "ugodna" orbita za vesoljska plovila je takšna, kjer potovanje traja čim manj, hrati pa sta začetna in končna hitrost (relativno na planet) dovolj majhni, da plovilo lahko varno pristane. Potrebi po kratkotrajnem poletu je vsaj teoretično enostavno ugoditi, saj lahko pošljemo sondo z neskončno hitrostjo. Žal pa poleg tehničnih težav na ta način tudi uničimo sondo ob pristanku. Minizimacija začetne in končne hitrosti je bolj zahtevna, tudi če si dovolimo dolgotrajno pot. Sonda se ne sme gibati enako hitro kot planet, saj bi v tem primeru krožila z njim. Vsaj v primeru $\mu \ll 1$ pa lahko skonstruiramo elipso z minimalno ekscentričnostjo, ki je tangentna na orbiti obeh planetov, tako da sta začetna in končna relativna hitrost vedno v tangentni smeri glede na sonce. Njena perioda je v iracionalnem razmerju s periodo kroženja drugega planeta, zato se bosta slej ko prej srečala. Takšno orbito imenujemo Hohmannova prenosna orbita, uporabna pa je predvsem za spremembe orbit satelitov. Po takšni orbiti lahko telo pošljemo z enega planeta na drugega le pri določenem faznem zamiku med orbitama planetov, torej le v ozkih izstrelitvenih oknih (launch windows).

Izkušje z medplanetarnimi poleti s človeško posadko žal še nimamo, zato sem predpostavil da je sonda robotska in lahko zdrži tudi večleten polet po sončnem sistemu. Po drugi strani pa ima omejeno zalogo goriva, torej sta začetno pospeševanje in končno zaviranje omejena. To lahko pri simulaciji upoštevamo tako, da omejimo začetno in končno hitrost, mogoče celo vsoto velikosti hitrosti glede na začetni in končni planet, $\Delta v = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| \leq C$. S takšno omejitvimo predpostavimo, da je sonda zmožnega hitrega pospeševanja (hitrega v primerjavi s trajanjem poleta), omejujoč faktor je le zaloga goriva.

Za trajanje potovanja T nimamo tako stroge omejitve, koristno je le, da najdemo rešitev s čim manjšim T.

2 Reševanje

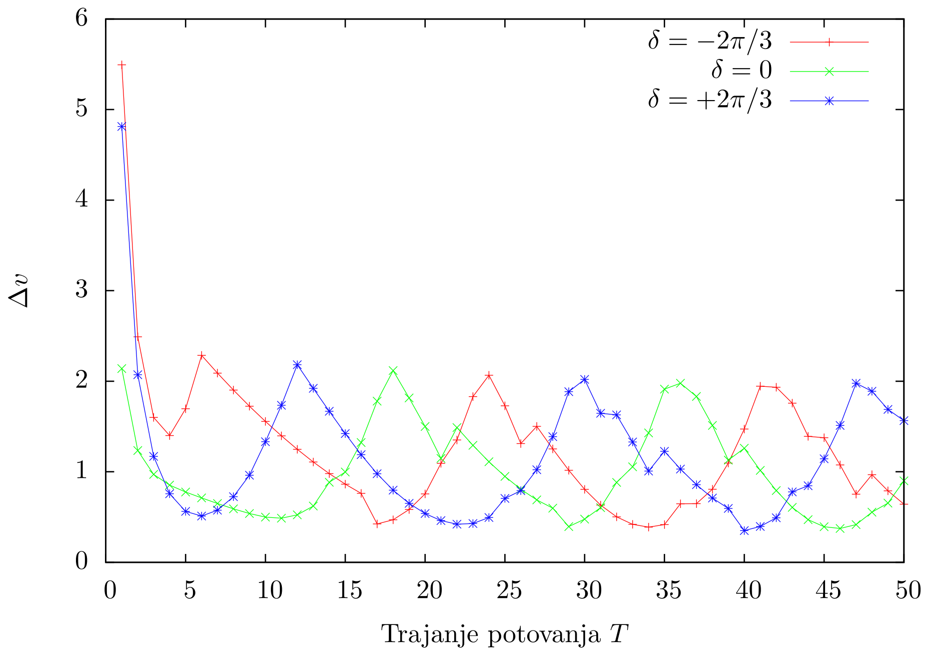
2.1 Približek z $\mu \ll 1$

Analitično reševenaje celotnega sistem je prezahtevno. Lahko pa točno rešimo primer, ko sta masi planetov zanemarljivi v primerjavi z maso zvezde. To je upravičen približek, v primeru Sonca, Zemlje in Marsa je vrednost reda velikosti $\mu \approx 10^{-6}$, z upoštevanjem Jupitra in Saturna pa zraste na $\mu \approx 10^{-3}$.

Če zanemarimo gravitacijska vpliva obeh planetov, dobimo Keplerjev problem, za katerega vemo, da je rešitev gibanje sonde po elipsi s Soncem z gorišču. Keplerjev problem s podanimi robnimi pogoji $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$ se imenuje Lambertov problem [1]. Geometrijsko je problem ekvivalenten iskanju elipse z goriščem v Soncu, ki gre skozi oba robna položaja planetov. Z enostavno geometrijo se da pokazati, da mora drugo gorišče elipse ležati na enem kraku hiperbole, torej obstaja enoparametrična družina rešitev.

Tako čas potovanja kot začetna in končna hitrost sonde so odvisni od izbrite drugega gorišča. Ker je od časa potovanja odvisen tudi končni položaj drugega planeta, sem najprej izbral vrednost za čas potovanja T, nato našel eliptično orbito sonde s takšnim časom potovanja in zapisal potrebne spremebme hitrosti za to orbito. Za iskanje parametrov elipse sem uporabil orodje `kepler_toolbox` [2], ki so ga razvili v Evropski vesoljski agenciji ESA. Orodje vrne začetno hitrost sonde, s pomočjo katere sem rekonstruiral celotno orbite z navadno integracijo po metodi RK4.

Lambertov problem s fiksnim časom potovanja ima vsaj eno rešitev, ki pa ni vedno enolična. Pri dovolj dolgih časih potovanja so možno tudi orbite, kjer sonda naredi enega ali več obratov okrog sonca preden pristane na drugem planetu. Knjižnica `kepler_toolbox` poda začetno in končno hitrost vsake orbite, iz katerih sem izračunam Δv, nato pa uporabil tisto orbito, kjer je bil Δv najmanjši. Ker nas zanima predvsem zveza med časom potovanja in potrebno spremembo hitrost, sem to zvezo narisal za nekaj rešitev Lambertovega problema na sliki 1.



Slika 1: Skupna sprememba hitrosti, potrebna za doseg drugega planeta in varno zaustavitev, pri faznih zamikih δ in pri relativni masi planetov $\mu = 0$

Če želimo doseči zelo kratke čase potovanja, moramo sondo izstreliti z veliko hitrostjo, kar vemo že iz zveze $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Zato nas ne preseneča pol pri $T = 0$ in hitro padanje potrebne hitrosti pri časih do $T = 5$. Prav tako ne preseneča periodičnost grafa pri posameznem zamiku δ. Zunanji planet kroži s periodo $t_2 = 2\pi\sqrt{8} \approx 17,8$, kar se ujema z razmikom med vrhovi na grafu.

Zanimiv vzorec pa nastane, ko skupaj narišemo odvisnost Δv od T za različne zamike δ pri istem μ. Tak prikaz je uporaben, saj mas planetov še ne znamo poljubno spreminjati, medtem ko datum vzleta in s tem fazni zamik planetov lahko izberemo. Račun sem napravil le za tri možne zamike, ki so med seboj razmaknjeni za tretjino polnega kota. Minimalen Δv pri poljubnem času poleta T pa lahko interpoliramo z grafa s pomočjo ogrinjače, ki povezuje najnižje točke na grafu. V primeru, ko zanemarimo masi planetov, je to kar premica z majhnim negativnim naklonom. Enačba ogrinjače na sliki je $\Delta v = 0{,}5 + T/300$.

Ko združimo začeten hiter padec potrebne hitrosti (in s tem količine goriva) in počasno padanje pri dolgih časih, se zdi najpremernejša izstrelitev takšna, da bo sonda potovala približno $T = 5$. V izbranih brezdimenzijskih enotah je perioda kroženja notranjega planeta 2π, torej bo sonda potovala približno 9 mesecev.

2.2 Poljuben μ

Ker v znanih sončnih sistemih masa sonca močno presega mase planetov, si lahko pri iskanju splošne rešitve pomagamo s prejšnjim približkom. Za iskanje orbit zato nisem uporabil strelske metode z ugibanjem začetnih pogojev in numerično integriranjem. Namesto tega sem začel z eliptično orbito in jo relaksiral, tako da je v vsaki točki ustrezala Newtonovem zakonu. Takšna relaksacija seveda ni fizikalna, se pa je izkazala za učinkovit računski pripomoček.

Trajektorija sonde mora v vsaki točki zadoščati pogoju (3). Drugi odvod na levi strani enačbe sem približal s končno diferenco, nato pa z metodo pospešene relaksacije SOR popravljal $r(t_i)$, dokler pogoj ni bil izpolnjen v vsaki točki.

Velika prednost pristopa z relaksacijo je ta, da lahko začetno in končno točko postavimo točno na položaj ustreznega planeta. Na ta način lahko zadenemo tudi planete, ki so dosti manjši od polmera svojega tira okrog sonca, kar definitivno drži za planetev v našem osončju. Na ta način rešitev sploh ni odvisna od polmera planeta, kar nam zmanjša število pogojev in s tem poenostavi reševanje.

Takšna relaksacija zahteva časovno diskretizacijo tira. Ni treba, da je ta diskretizacija enakomerna, moramo pa v naprej določiti število in dolžino časovnih korakov, torej moramo izbrati tudi skupen čas T. S to izbiro tedaj najdemo ustrezno orbito in izračunamo začetno in končno relativno hitrost. Za račune v tej nalogi sem izbral diskretizacijo na $N = 500$ intervalov (torej $N + 1$ točk, vključno z začetno in končno) z enakomernim časovnim korakom $\Delta t = T/N$. Z uporabo Čebiševega pospeška je bila relaksacija zelo hitra, ustavil sem jo, ko je skupen popravek vseh 500 točk znašal manj kot 10^{-10}.

Ubežna hitrost je poleg mase planeta odvisna od razdalje med težiščem planeta in krajem, kjer jo merimo. Diskretizacijo sem izbral tako, da je bila prva točka v težišču planeta, hitrost pa sem lahko izračunal le na sredini med dvema točkama. S tem sem se tudi izognil potrebi po neskončni hitrost v središču planeta, ker sem predpostavil, da so vsa telesa točkasta. Relativno hitrost tik ob prvem planetu, ki je enaka hitrosti, s katerom moramo izstreliti sondo, sem izračunal kot

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}(\Delta t) - \mathbf{r}(0) - \mathbf{r}_1(\Delta t) + \mathbf{r}_1(0) \tag{11}$$

kjer je $r(t)$ položaj sonde, $r_1(t)$ pa položaj planeta. Seveda je ta hitrost definirana ob času $\frac{\Delta t}{2}$, takratni položaj sonde pa ni dobro določen. Približamo ga lahko z $\frac{\mathbf{r}(\Delta t)+\mathbf{r}(0)}{2}$, pri čemer pa privzamemo, da je pospešek takrat majhen, kar v bližini planeta nikakor ne drži. Namesto tega sem uporabil splošnejši izraz

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\alpha \mathbf{r}(\Delta t) + (1-\alpha)\mathbf{r}(0)}{2} \tag{12}$$

Konstanto α sem določil s poskušanjem, tako da končni rezultat ni bil odvisen od koraka diskretizacije Δt. To se zgodi pri $\alpha \approx 0{,}6385$. Ker se $\mathbf{r}(\Delta t)$ razlikuje or orbite do orbite, se razlikujejo tudi razdalje od planeta $\tilde{\mathbf{r}}$, pri kateri je $\mathbf{v}_1$ merjena. Za medsebojno primerjavo sem moral hitrost skalirati tako, da sem izračunal, kolikšna mora biti hitrost sonde na fiksni razdalji od planeta h_0.

Če projektil izstrelimo s površine planeta, se njegova skupna energija ohranja.

$$E = E_p + E_k = -\frac{\mu m_s}{h} + \frac{m_s v^2}{2} = \text{konst} \tag{13}$$

Ob času $\frac{\Delta t}{2}$ poznamo položaj in hitrost sonde, torej lahko izračunamo njeno energijo. Ker je energija odvisna od mase sonde, sem raje računal specifično energijo $\varepsilon = E/m$, nato pa našel takšno hitrost $\tilde{v}_1$, kakršno ima sonda na razdalji h_0.

$$\varepsilon_1 = \frac{|\mathbf{v}_1|^2}{2} - \frac{\mu}{\tilde{r}} \tag{14}$$

$$\tilde{v}_1 = \sqrt{2(\varepsilon_1 + \mu/h_0)} = \sqrt{v_1^2 - 2\mu\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{h_0}\right)} \tag{15}$$

Podobno sem izračunal hitrost $\tilde{v}_2$, s katero sonda prileti na drugi planet. Najkrajša možna pot je dolga 1, zate sem za h_0 vzel vrednosti, ki ustreza polovici dolžini intervala na tej poti pri diskretizaciji s 500 točkami, torej $h_0 = 1/1000$.

3 Rezultati

3.1 Pospeševanje

Najprej sem izračunal odvisnost potrebne spremembe hitrosti Δv v odvisnosti od zahtevanega časa potovanja za različne mase planetov μ. Rezultati so na sliki na naslednji strani. V vseh primerih opazimo strmo naraščanje hitrosti, ko se T približuje 0. Za kratko potovanje seveda potrebujemo veliko hitrost, razdalja med planetoma ostaja približno konstantna, torej pričakujemo zvezo $\Delta v \propto 1/T$.

Nasprotno pa se grafi za velike T izravnajo, opazimo le periodično nihanje. Perioda tega nihanje se ujema s periodo kroženja zunanjega planeta $t_2 = 2\pi\sqrt{8} \approx 17,8$. Ta periodičnost pa se podre za dovolj velike maso planetov, na primer za $\mu > 0{,}01$. Takrat ima gravitacijski privlak obeh planetov dovolj velik vpliv na pot sonde, da njena orbita ni več eliptična. Predvsem na zadnjem grafu so vidni skoki pri posameznih časih T, vzorec pa ni več periodičen.

Vsi grafi se pri velikem času T približno izravnajo, tako da lahko potegnemo premico skozi najnižje točke. Seveda pa je višina oz. minimalni Δv, pri katerem se izravnajo, odvisen od mase planetov. Ne glede na dovoljen čas potovanja moramo namreč za izstrelitev sonde doseči vsaj ubežno hitrost, za varen pristanek pa moramo s te hitrosti upočasniti. Ubežna hitrost narašča s korenom mase planeta, kar lahko potrdimo tudi na grafih. Če μ pomnožimo s 100, na primer iz slike (b) na sliko (d), se minimalen Δv poveča približno za faktor 10.

Vse hitrosti so merjene pri enaki oddaljenosti od planeta h_0. Ubežna hitrost planeta na tej oddaljenosti je enaka

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = \sqrt{\frac{2GM\mu}{h_0}} = \sqrt{2000\mu} \tag{16}$$

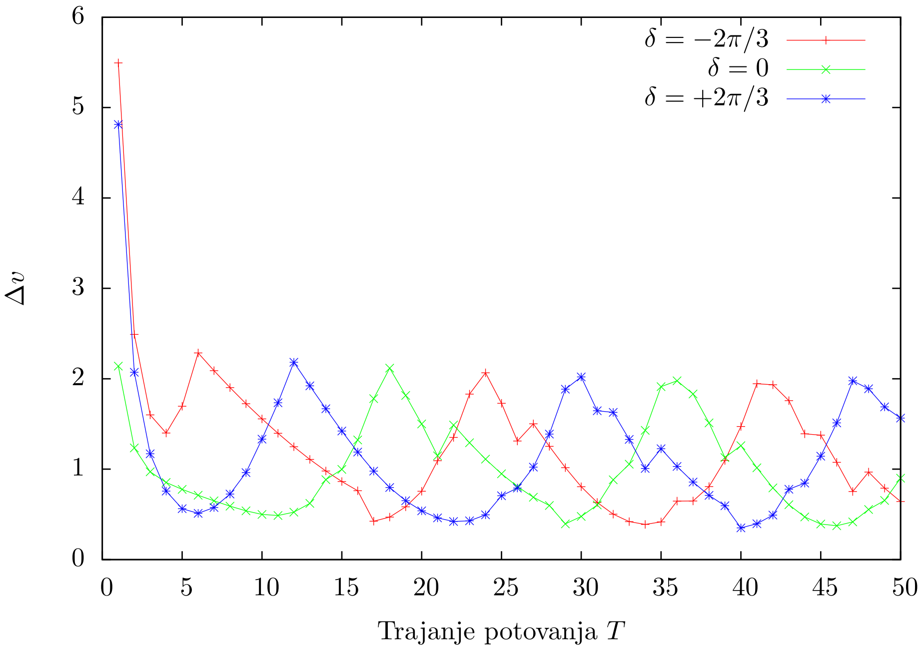
pri čemer smo upoštevali skaliranje $GM = 1$ iz uvoda in izbrano vrednost $h_0 = 1/1000$. Poleg ubežne hitrosti planetov pa mora imeti sonda dovolj veliko hitrost, da delno ubeži privlaku Sonca in preide v višjo orbito. Za prehod v višjo orbito sonda porabi $\Delta\varepsilon = \frac{GM}{1} - \frac{GM}{2} = 1/2$ specifične energije, torej mora imeti ob vzletu vsaj toliko skupne energije. To pomeni, da bo izraz pod korenom v izrazu (16), ki je enak dvakratniku potencialne energije, za 1 večji. Ta dodatek moramo upoštevati le pri vzletu, torej pri začetni hitrosti sonde, medtem ko moramo za pristanek premagati le ubežno hitrost.

$$\min v_1 = \sqrt{2000\mu + 1} \tag{17}$$

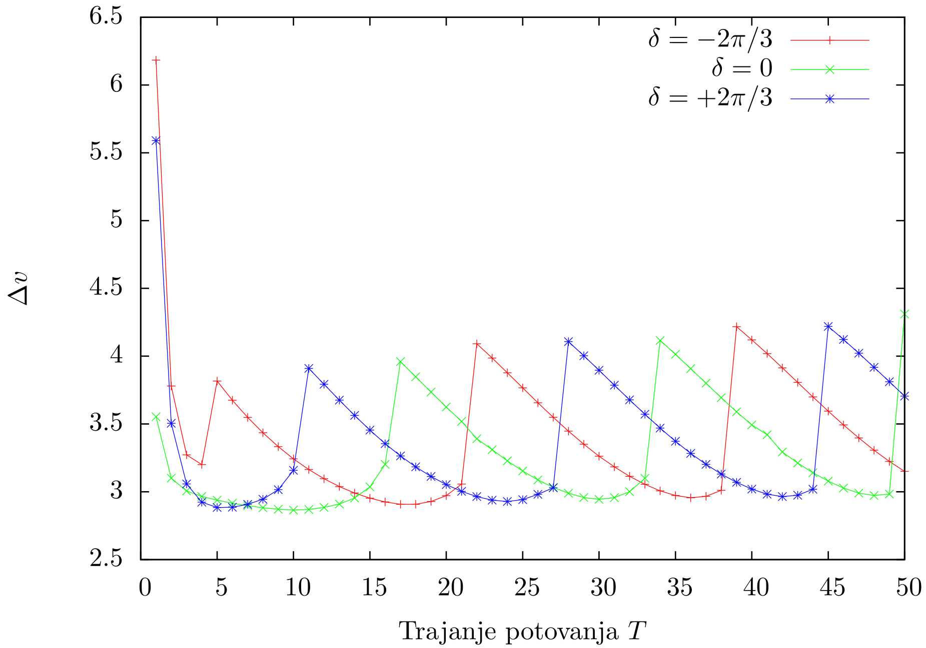
$$\min v_2 = \sqrt{2000\mu} \tag{18}$$

$$\min \Delta v = \sqrt{2000\mu + 1} + \sqrt{2000\mu} \tag{19}$$

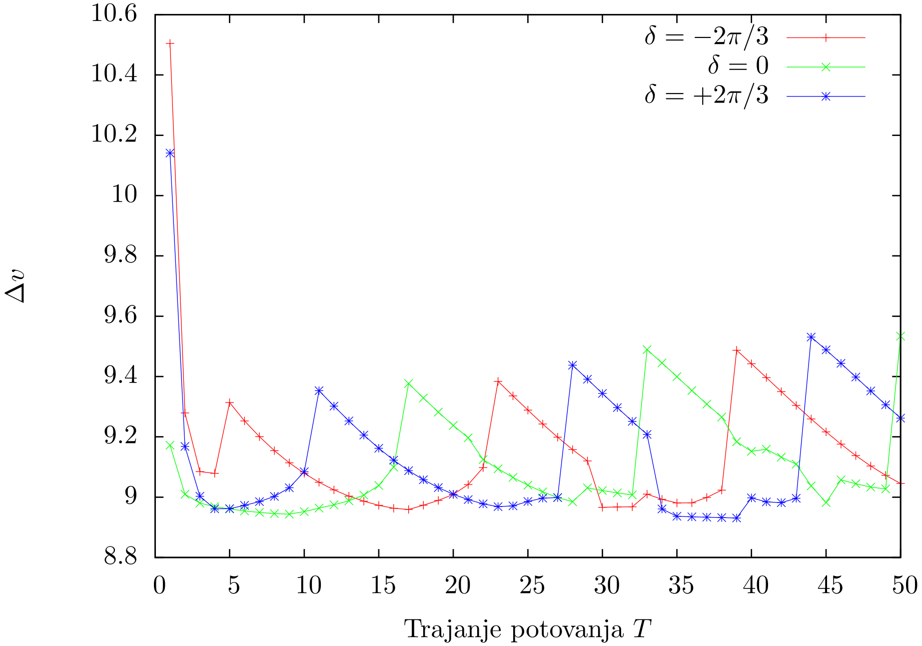
Gornji izrazi seveda niso točni, saj smo pot sonde razdelili tri dele: na pobeg od prvega planeta, pot vmes in pristanek na drugem planetu. V resnici sonda v vsaki točki čuti privlak obeh planetov in Sonca, zato ne moremo definirati meje med deli poleta. Poleg tega se planeta gibljeta, pot sonde pa je zaradi vplivov planetov in Sonca ukrivljena. Smiselnost predpostavk in ocen sem zato preveril na sliki 2.



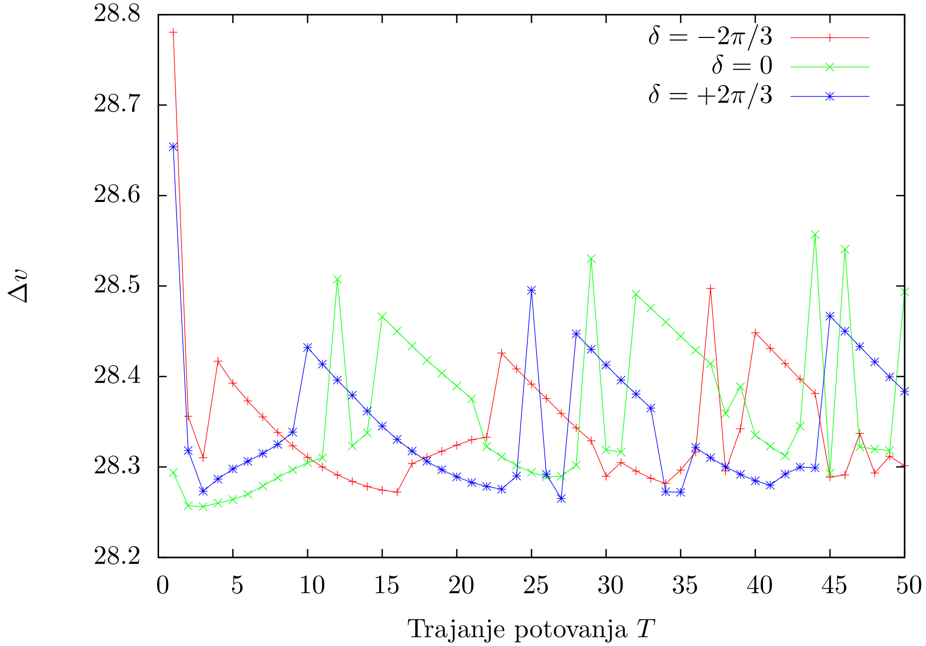
(a) $\mu = 0$



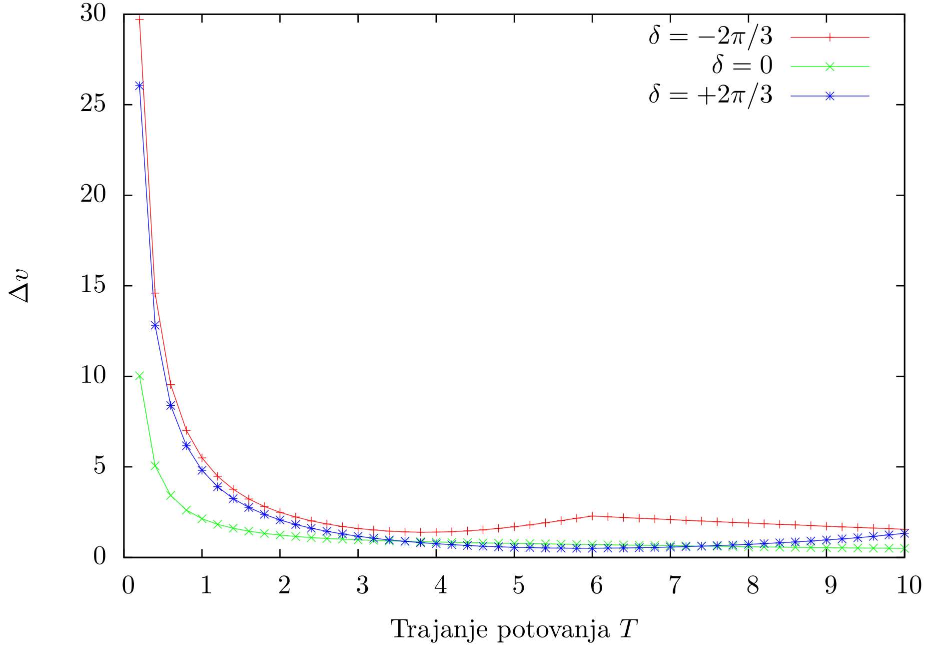
(b) $\mu = 0{,}001$



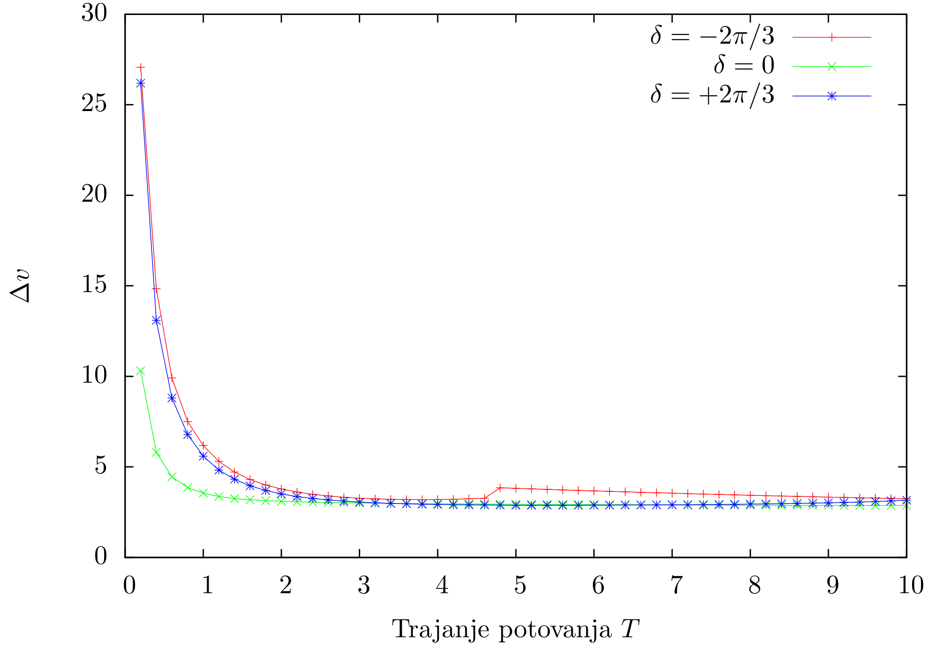
(c) $\mu = 0{,}01$



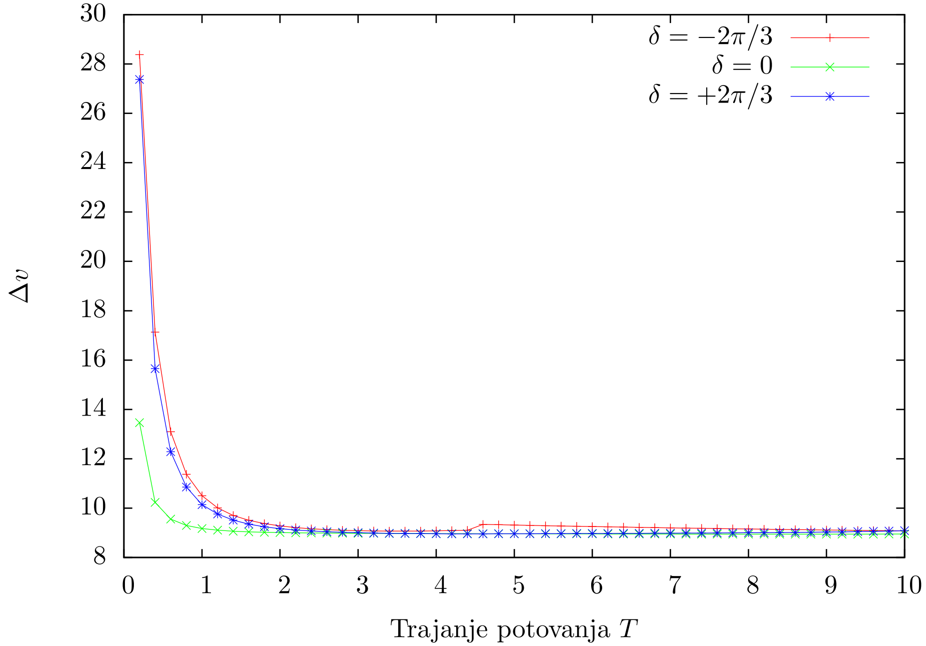
(d) $\mu = 0{,}1$



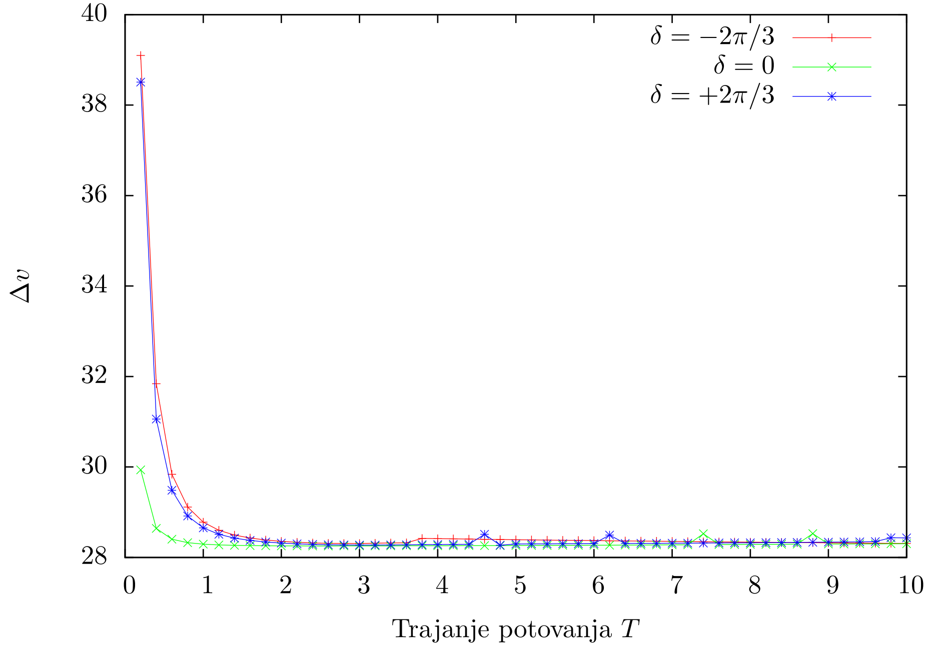
(e) $\mu = 0$



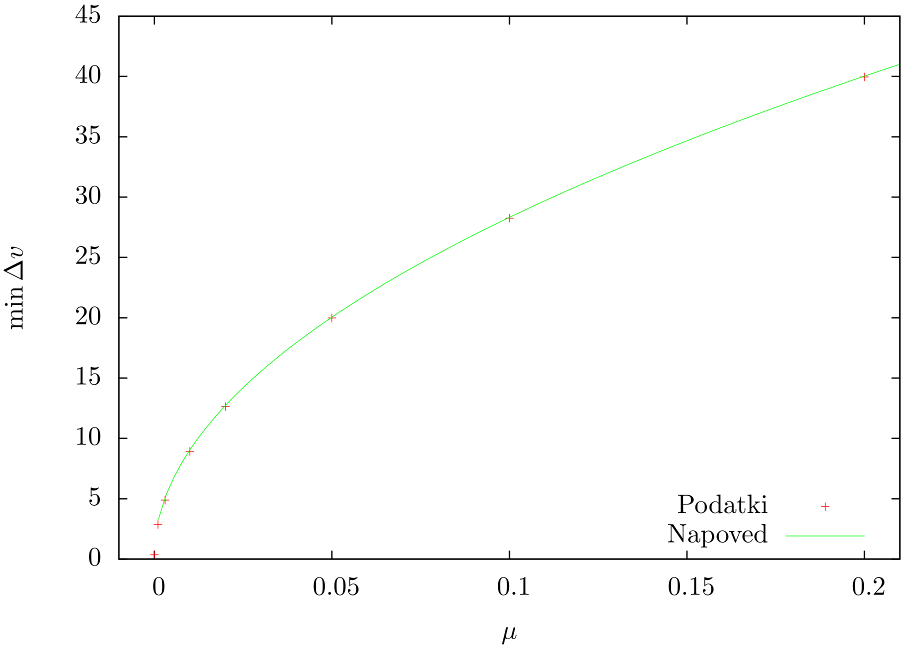
(f) $\mu = 0{,}001$



(g) $\mu = 0{,}01$



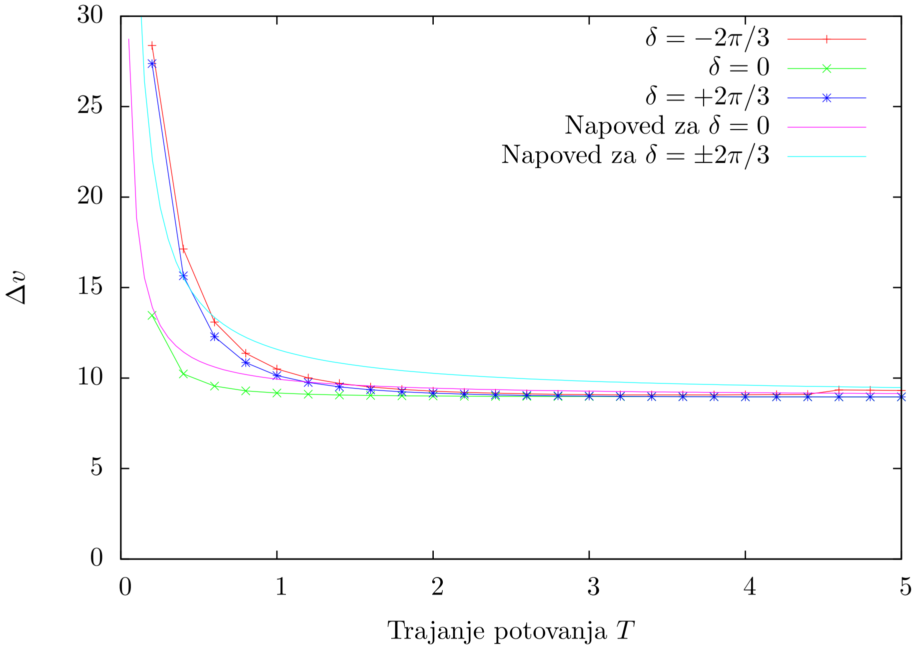
(h) $\mu = 0{,}1$



Slika 2: Odvisnost najmanjše spremembe hitrosti Δv od mase planetov

Na zgornji sliki opazimo odlično ujemanje z napovedjo (19), za vse μ od 0,001 do 0,2. Za račun minimalne porabe goriva brez omejitve časa potovanja T nam torej ni treba računati orbite, ampak lahko uporabimo zgornji izraz. Odstopanje vidimo le pri $\mu = 0$, kjer je izračunana minimalna hitrost dejansko manjša od napovedane. V tem primeru seveda ne moremo računati z ubežno hitrostjo planetov, ampak je dovolj uporabiti rešitev Lambertovega problema.

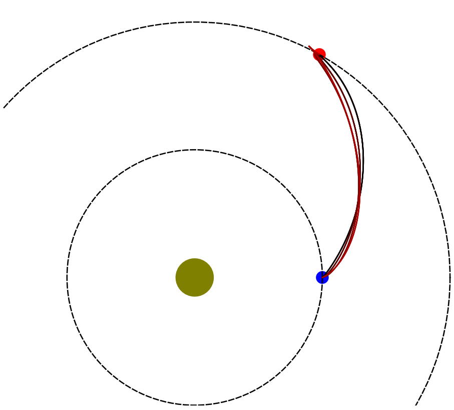
Ocenimo lahko tudi hitrost, ki jo sonda potrebuje za doseg drugega planeta ob poljubnem času T. Ne glede na čas mora sonda premagati vsaj dvakratno ubežno hitrost, po enkrat na vsakem planetu. Namesto minimalne hitrosti, s katero še doseže orbito zunanji planet, pa lahko uporabimo kar zvezo $v = s/T$. Skupno spremembo hitrosti, ki jo mora povzročiti pogon sonde, lahko torej ocenimo kot $\Delta v \approx s/T + 2v_e$. Pri kotu $\delta = 0$ je razdalja med planetoma enaka 1, torej bo za zelene črte na grafih konstanta s enaka $s_0 = 1$. V primeru $\delta = \pm 2\pi/3$ pa je dolžina poti daljša in je enaka $s_1 = \sqrt{7}$, zato so modre in rdeče črte na grafih ustrezno višje. Napoved $\Delta v \approx s/T + 2v_e$ sem primerjal z rezultati na sliki 3. Tu ujemanje ni tako dobro, saj ta zveza sledi iz mnogih poenostavitev. Zanemarili smo premik planetov v času potovanja sonde, pa tudi gravitacijske vplive obeh planetov in Sonca.



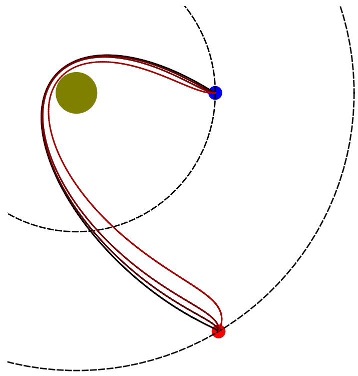
Slika 3: Odvisnost potrebne spremembe hitrosti Δv od časa potovanja T pri $\mu = 0{,}01$

3.2 Orbite

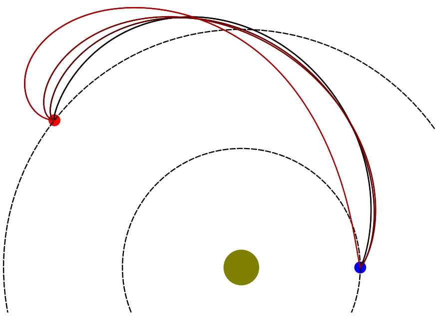
Za konec sem prikazal še nekaj orbit, po katerih se giblje sonda med obema planetoma. Polna črna črta prikazuje pot sonde v primeru z $\mu = 0$, svetlejše in bolj rdeče črte pa po vrsti ustrezajo vrednostim $\mu = 0.01, 0.03$ in 0.1.



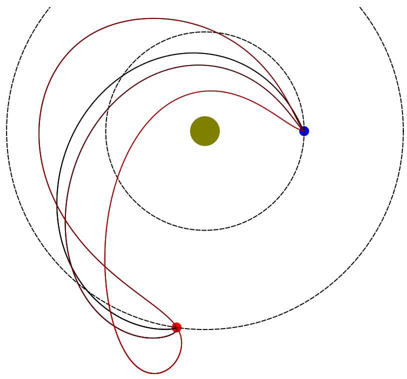
(a) $\delta = 0$, $T = 3$



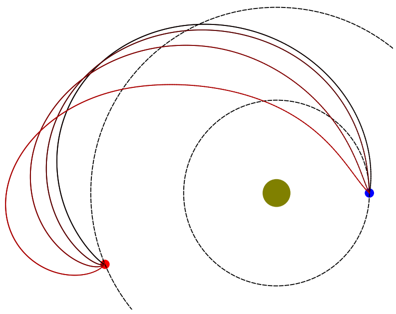
(b) $\delta = -2\pi/3$, $T = 3$



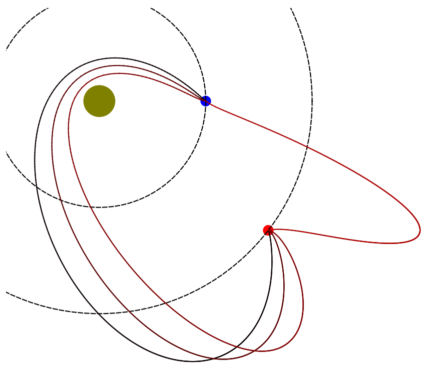
(c) $\delta = 0$, $T = 7$



(d) $\delta = -2\pi/3$, $T = 7$



(e) $\delta = 0$, $T = 10$



(f) $\delta = +2\pi/3$, $T = 10$

Pri kratkih časih potovanj, na primer na slikah (a) in (b) s časom $T = 3$, masi planetov le malo spremenita orbito sonde. Odstopanje od elipse vidimo le v bližini obeh planetov. Vpliv planetov je bolj viden pri daljših potovanjih, kjer so orbite že vidno različne od eliptičnih rešitev Lambertovega problema. Opazna je predvsem delna zanka okrog zunanjega planeta, kjer sonda uporabi gravitacijo planeta za spremembo smeri. V nekaterih primerih, kot vidimo na sliki (f), pa relaksacija konvergira k kvalitativno drugačni orbiti. Najsvetlejša orbita na sliki (f) je bolj podobna neki drugi rešitvi Lambertovega problema, ki v primeru brezmasnih planetov zahteva več pospeševanja, pri dovolj velikem μ pa je bolj ugodna.

Literatura

[1] Wikipedia: Lambert's problem (`http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert's_problem`)

[2] `http://keptoolbox.sourceforge.net`