浙江大学 2019-2020 学年 <u>秋冬</u> 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

一.（本题 10 分）设有下列n阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}4&1&0&...&0&0\\4&4&1&0&...&0\\0&4&4&1&0&...\\&&&...&&\\0&...&0&4&4&1\\0&0&...&0&4&4\end{vmatrix},$$

试证明：$D_n=(1+n)2^n$.

二.（本题 10 分）设$\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵$A=\alpha\alpha^T$.又设n为一正整数，试求$|2E-(A^*)^n+A^n|$.

三.（本题 15 分）设有实方阵$A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&a&b\\2&0&6\\-1&1&0\end{pmatrix}$，其中$a,b$为实常数.已知$r(A)=r(B)$，且线性方程组$AX=(b,1,0)^T$有解，试求$a,b$的值.

四.（本题 20 分）当实数 a 取何值时线性方程组$\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1\\ ax_2-3ax_3=3\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷解？有解时请求出所有解.

五.（本题 15 分）设$A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\k&k&k&k\end{pmatrix}$，其中$k$为实常数，试求$A$的秩$r(A)$.

六.（本题 20 分）设A,B为 n 阶方阵，试证明：

(1)$tr(A+B)=trA+trB$;

(2)$tr(AB)=tr(BA)$;

(3)设P是一个n阶可逆矩阵，则有$tr(P^{-1}AP)=trA$;

(4)若$A=E_{ij}$，其中E_{ij}是第i行第j列处的元素为1，其余元素为全部为零的n阶方阵，试求trA.

七.（本题 5 分）设A是一个$n(\geq 2)$阶方阵.A^*是A的伴随矩阵.若存在n维非零列向量α使得$A\alpha=\theta$，其中θ为n维零列向量，且非齐次线性方程组$A^*X=\alpha$有解，试证明：$r(A)=n-1$.

八.（本题 5 分）设A为n阶可逆矩阵.α,β为两个n维列向量，试证明：$|A+\alpha\beta^T|=|A|+\beta^TA^*\alpha$.