浙江大学 2015-2016 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期中考试试卷

一、计算题

1、已知摆线的参数方程$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(a>0)$，求参数为θ_0的一点处曲率k.（10 分）

2、计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2+2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right)\right]$.（10 分）

3、计算函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$（10 分）.

4、已知$y=\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x}}+(\arcsin 2x)^{\frac{1}{4}}$，求$\dfrac{dy}{dx}$的表达式（10 分）.

5、计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+3n}\right)}$（10 分）.

6、设函数$y=y(x)$的反函数$x=x(y)$为，且满足$\dfrac{dx}{dy}\neq 0,\dfrac{dy}{dx}\neq 0$；试将$x=x(y)$的方程：

$\dfrac{d^2x}{dy^2}+y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3+\dfrac{d^3x}{dy^3}=0$变换为$y=y(x)$的方程（即用$y'''$和$y''$和$y'$表示出

$\dfrac{d^2x}{dy^2}+y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3+\dfrac{d^3x}{dy^3}=0$）（10 分）.

7、设$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，求$f^{2014}(0)$的值（$f^{(n)}(x)$为$f(x)$的$n$阶导数）（10 分）.

二、证明题：

8、奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上有二阶导数，且$f(1)=k(k>0)$.

证明：（1）存在$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=k$；（5 分）

（2）存在$\eta\in(-1,1)$，使$f''(\eta)+f'(\eta)=k$.（5 分）

9、设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导，且有$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，证明存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)\geqslant 8$.

10、证明（10 分）：若（a）$y_{n+1}>y_n(n=1,2,...)$，（b）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，（c）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在，

（1）则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$；（5 分）

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 1^p+(n-1)\cdot 3^p+...+1\cdot(2n-1)^p}{1^{p+1}+2^{p+1}+...+n^{p+1}}(p>0)$.（5 分）

浙江大学 2016-2017 学年<u> 秋冬 </u>学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期中考试试卷

一、函数极限与连续（每题 6 分，共 36 分）

1.求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}$.

2.求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$.

4.试确定常数 k,c,使得当 x→+∞时，$\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x\right)\sim\dfrac{c}{x^k}$.

5.求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

6.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_m^n}$，其中 a_1，a_2，…，a_m 均为正常数。

二、导数（每题 6 分，共 48 分）

1.设 $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$，求 y'.

2.设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq0, \\ 0, x=0. \end{cases}$ 讨论 $f'(x)$ 的连续性.

3.设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx$,其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 均为实数，又 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$,证明 $|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\leqslant1$.

4.设 $y=f(x+y)$,其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于1.求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5.设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

6.设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为何值.

7.设 $y=x^{x^x}$,求 y'.

8.例设 $x=g(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，试由 $f'(x),f''(x),f'''(x)$ 计算 $g''(y),g'''(y)$.

三、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, $\forall x\in[0,1]$, $0<f(x)<1$ 且 $f'(x)\neq1$, 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x,使 $f(x)=x$.

2.叙述拉格朗日定理，并证明拉格朗日定理.

浙江大学 2017-2018 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期中考试试卷

一、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、函数$y = \arcsin x$的定义域是________　　值域______.

2、三角函数差化积$\sin x - \sin y =$________.

3、$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} =$________.

4、设$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(ax + b + \sqrt{x^2 + 2x + 3}\right) = 2017$，则$a =$_____，$b =$______

5、设$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$在$x = 1$处可导，则$a =$_____，$b =$______。

二、数列极限(18 分，每题 6 分，共 3 题)

1、$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$

2、$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)(3+4n)}{(n+1)(n+2)}$

3、$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots \dfrac{n}{n^2+n}\right)$

三、函数极限（本题满分 18 分，每小题 6 分.

1、$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$；2、$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{x}$.；3、$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$

四、导数（18 分，每题 6 分）

1.设$y = \tan x + \arctan x$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

2.设$y = y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x = \ln(1+2t) \\ y = t + t^2 \end{cases}$所决定，求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

3.设$y = x^2 2^x$,求$\dfrac{d^n y}{dx^n}$

五、微分（本题满分 12 分，每小题 6 分）

1.设$y(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$，求$dy$

2.设$y = y(x)$是由函数$x^2 + xy + y^2 = 7$所决定，求$dy\big|_{(1,2)}$

六、证明题（本题满分 14 分，每小题 7 分）

1.用函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} = 2$；2.设$a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$，证明数列$\{a_n\}$无界

浙江大学 2018-2019 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期中考试试卷

1、（8 分）设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域为 $I=\{x|x\neq 0\}$，且 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)$，其中实常数 a,b 满足 $|a|\neq|b|$，证明：

(1)若 $g(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 也是奇函数；(2)若 $g(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 也是偶函数

2、（8 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n^2]{\pi}\cdot\sqrt[n^2]{\pi^2}\cdot\sqrt[n^2]{\pi^3}\cdots\sqrt[n^2]{\pi^n}\right)$.

3、（8 分）写出函数 $f(x)=\dfrac{x(x^2-1)}{|x-1|\sin x}$ 的间断点，并讨论是第一类型还是第二类型的间断点（讨论要用数学表达式说明理由）

4、（8 分）用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x+2}=3$.

5、（8 分）设 $x_1=1,x_{n+1}=\sqrt{x_n(5-x_n)}\,(n=1,2,3,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

6、（8 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}+\cos\frac{x}{1+x}}{2}\right)^{\frac{1}{\sin(x^2)}}$

7、（8 分）设函数 $y=\arcsin\dfrac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}+(\sec x+\tan x)^{\arctan x}$，求 y'

8、（8 分）设曲线的极坐标方程为 $r=2-\cos\theta$，求曲线上相应于 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 的点处的切线方程和法线方程

9、（10 分）设函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=-1,f''(0)=4$，又二阶可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-2xe^{y-1}=1$ 所确定，$z=f(\ln y)$. 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0},\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0},\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0},\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

10、（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ b\sqrt{4-x}+cx\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$ 求常数 a,b,c 使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可微.

11、（8 分）设函数 $f(x)=x^2\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，求 $f^{(n)}(0)\,(n\geqslant 3)$.

12、（8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续，在开区间 $(0,2)$ 上可导，且 $f(1)=2,f(0)=f(2)=0$，证：(1)存在 $\eta\in(1,2)$，使 $f(\eta)=\eta$；(2)对任意实常数 λ，存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

浙江大学 2019-2020 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期中考试试卷

一、　以下各题必须写出解题过程

1.（7 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\dfrac{5x+3}{2x^2+x+1}$；

2.（7 分）求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+10}+x\right)$

3.（7 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

二、　以下各题必须写出解题过程

4.（7 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1+\sin 1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2+\sin 2}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+\sin n}}\right)$

5.（7 分）$f(x)$是一个函数，$f(1)>0, f'(1)$存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}{f(1)}\right)^n$

三、　以下各题必须写出解题过程

6.（7 分）设 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，求 $f'(x)$；

7.（7 分）设 $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$，求 $f^{(100)}(x)$

四、　以下各题必须写出解题过程

8.（7 分）设函数 $f(u)$ 具有二阶导数，令 $y=f(\sin x^2)$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9.（7 分）令 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

五、　以下各题必须写出解题过程

10.（7 分）方程 $e^{xy}+\sin(y-x)=1+2y$ 确定隐函数 $y=y(x)$．求 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程

11.（7 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处某邻域上有定义且是偶函数，$f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$

六、　以下各题必须写出解题过程

12.（8 分）设 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x^2}, x>0 \\ 0, \qquad x\leqslant 0 \end{cases}$，问：（1）$\alpha$ 满足什么条件，$f(x)$ 是连续函数；（2）α 满足什么条件，$f(x)$ 是可导函数；（3）α 满足什么条件，$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

13.（5 分）已知 $\sqrt{2}$ 是无理数

（1）作一个数列 $\{x_n'\}$，每个 x_n' 都是无理数且 $x_n'\neq\sqrt{2}$，并满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=\sqrt{2}$（写出 x_n' 的表达式）

（2）作一个数列 $\{x_n''\}$，每个 x_n'' 都是有理数，并满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n''=\sqrt{2}$.（写出 x_n'' 的表达式）

七、　以下各题必须写出解题过程

14.（5 分）设 $\{a_n\}$ 为一个数列，且满足 $0<a_{n+1}-a_n<q^n (n=1,2,\ldots)$
这里 q 是常数，且 $0<q<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

15.（5 分）设 $x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{n}}}\ (n=1,2,\ldots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

浙江大学 2020-2021 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期中考试试卷

1. (7 分)写出函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定义，用定义证明: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-2}=-1$.

2. (7 分)计算极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin(x^2)}-1}{x\ln(1+2\tan x)}$.

3. (7 分)计算极限: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{3}{x}+\cos\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^x$.

4. (7 分)设 $x_1\geqslant 0$, $x_{n+1}=\dfrac{4+x_n}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$.证明:数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 存在极限,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5. (7 分)函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0\\ a, & x=0\\ (1+\sin bx)^{\cot x}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 a,b.

6. (7 分)求函数 $f(x)=\left(e^{\frac{x}{x-1}}-1\right)^{-1}$ 的间断点及间断点类型(需说明理由).

7. (7 分)设 $f(x)=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arccos e^x$,求导数 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

8. (7 分)函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ x^2+bx+c, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,求常数 a、b 及 c.

9. (7 分)由方程 $e^{xy}+x+y=2$ 确定隐函数 $y=f(x)$,求 $f'(0)$、$f''(0)$ 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$.

10. (7 分)由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan\sqrt{1+t^2}\\ y=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$,试求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

11. (7 分)已知函数 $f(x)$ 在 $x=4$ 处有二阶导数, $f(4)=1$, $f'(4)=2$, $f''(4)=3$, $y=f(x^x)$,求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$、$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2}$.

12.(6 分)函数 $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$,求 $f^{(n)}(0)$.

13.(6 分)函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x\cos x}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$,求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

14.(6 分)函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续、在开区间 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0)f(3)>0$、$f(0)f(2)<0$.
求证:对任意给定实数 μ,至少存在 $\xi\in(0,3)$ 满足 $f'(\xi)=\mu f(\xi)$.

15.(5 分)函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数, $f(2^{-n})=0$ $(n=1,2,\cdots)$,求证: $f''(0)=0$.

浙江大学 2021-2022 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期中考试试卷

1.已知：$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$，求常数$a$，$b$.

2.求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsin x\arctan x}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\ln(1+x)}$

3.设a，b，c为正数，求下列极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$

4.求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

5.定义函数$f(x)$在$x=0$处的值，使其在$x=0$处连续，并讨论在$x=0$处是否可导，其中：

$f(x)=\left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right)^x$.

6.设$y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$，求y'，y''.

7.设函数$y=y(x)$由方程$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$确定，求$y'(0)$，$y''(0)$.

8.设参数方程：$x=\ln(1+t^2)$，$y=t-\arctan t$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

9.求极限：$\lim\limits_{x\to0}f(x)$，其中$f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$.

10.设$f(x)=x\ln(1+x)$，求$f^{(100)}(x)$.

11.设函数$f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}-1$，求函数$\dfrac{1}{f(x)}$的间断点，并判断它们的类型.

12.设数列$\{x_n\}$满足：$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，$n=1$，$2$，$\cdots$，试证：此数列极限存在，并求极限.

13.设函数$f(x)$，$g(x)$定义在$\boldsymbol{R}$上，且有(1) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；(2) $f(x)$，$g(x)$在$x=0$处可导；(3) $f(0)=0$，$g(0)=1$，$f'(0)=1$，$g'(0)=0$.

证明：$f(x)$在$\boldsymbol{R}$上可导，且$f'(x)=g(x)$.

浙江大学 2022-2023 学年 <u>秋冬</u> 学期

《微积分（甲）I》课程期中考试试卷

1. 叙述数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ 的“$\varepsilon - N$”定义, 并利用“$\varepsilon - N$”语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n+1}{n^2+2} = 2$.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x} - \arctan x)^{\csc x}$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}\pi} \dfrac{1+2\cos x}{3x-2\pi}$.

4. 计算极限 $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+6x-1}+x+3\right)$.

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}} + \dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac{1}{2}}} + \cdots + \dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac{1}{n}}}\right)$.

6. 已知 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 求常数 a, b 的值.

7. 已知 $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$ ($a>0$ 为实常数), 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

8. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{x+y} - 2xy = e$ 所确定的隐函数.

(1) 求 $f'(0)$; (2) 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(y-1)\sin(ex)}{\sqrt{1+2x^2}-1}$.

9. 已知 $\begin{cases} x = \ln(t+\sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

10. 曲线 C 的极坐标方程为 $r = e^\theta + \theta$, 求曲线 C 在 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

11. 已知 $f(x) = \arctan x$, 求$f^{(7)}(0)$.

12. 已知 $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{\sin\pi x}{x-1}}-1}(-1<x<2)$, 试判断 $f(x)$ 的间断点并据理说明间断点的类型.

13. 叙述并证明Rolle(罗尔)定理.

14. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 3$, $2a_{n+1} = a_n + \dfrac{6}{a_n+1}(n\ge 1)$,

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(2)=-1$. 证明: (1) $\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $f'(\xi)=0$; (2) $\exists\eta\in(0,2)$ 使得 $f(\eta)+f'(\eta)=0$.