

浙江大学 2016-2017 学年 春夏 学期

《线性代数 (甲)》课程期中考试试卷

一. (本题 10 分) 计算下列行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}, \text{其中 } x, y \text{ 为任意实常数.}$$

二. (本题 15 分) 设有 n 阶行列式如下 ($n \geq 2$ 为正整数):

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}, \text{其中 } x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ 为任意实常数,}$$

试求 $A_1 + 2A_2 + \cdots + nA_n$ 的值, 其中 A_1, A_2, \cdots, A_n 分别是 x_1, x_2, \cdots, x_n 在行列式 D 中的代数余子式.

$$\text{三. (本题 15 分) 当 } \lambda \text{ 取何值时, 线性方程组 } \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \end{cases} \text{ 无解? 有解? 有解}$$

时求该线性方程组的所有解.

四. (本题 15 分) 试叙述矩阵秩的定义; 设有 n ($n \geq 2$ 为正整数) 阶矩阵如下:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{其中 } x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ 为任意实常数,}$$

试求 A 的伴随矩阵 A^* 的秩.

五. (本题 15 分) 求解下述矩阵方程:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

六. (本题 10 分)

设 $a \neq 0$ 为实常数, 试把矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ 表示成 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ 型矩阵的乘积.

七. (本题 10 分) n (n 为正整数) 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的主对角线上元素之和 $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 称为方阵 A 的迹, 记作 $\text{tr} A$. 现设方阵 A 的秩为 r 且满足 $A^2 = A$, 试证明: $\text{tr} A = r$.

八. (本题 10 分) 设 A, B 为 n (n 为正整数) 阶方阵且满足 $A + 2B = AB$, 试证明: $A - 2E$ 可逆.