

浙江大学 2022-2023 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

1. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

2. 已知 $n+1$ 行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n+1 \end{vmatrix}$, x_1, x_2, \dots, x_n 为任意常数,

求 $4A_1 + 9A_2 + \dots + (n+1)^2 A_n$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_n 分别为 x_1, x_2, \dots, x_n 的代数余子式.

3. 求解线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda^2. \end{cases}$

4. 用初等行变换将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 13 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 21 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 化简成行阶梯形矩阵 B , 使 B 的阶梯头为 1.

5. 设 r 为自然数.

(1) 叙述秩的定义;

(2) 证明: $r(A) \leq r$ 当且仅当 A 中 $r+1$ 阶子式 (若有) 均为 0;

(3) 设 A 通过一次行倍加得到 B , 求证: $r(B) = r(A)$.

6. 设有 $n (\geq 2)$ 阶方阵 A , A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明:

(1) $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1; \end{cases}$

(2) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$;

(3) 若 $r(A) > 0$, 则 $(A^*)^* = A$ 当且仅当 $|A|^{n-2} = 1$.

7. 设 A, C, D 均为 $m \times n$ 阶矩阵, B, D 均为 $n \times s$ 阶矩阵, 证明: $r(AB - CD) \leq r(A - C) + r(B - D)$.

8. 设 A 为 2022^{2022} 阶方阵, 用数学归纳法证明:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, (n+1)r(A^2) \leq r(A^{n+2}) + nr(A).$$