浙江大学 2020-2021 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

一.（本题 10 分）设$D_n = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, 试证明：$D_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

二.（本题 10 分）设$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,三阶方阵满足方程$2BA + CB = O$,其中$O$为三阶零方阵，试求$|A + 3E|$.

三.（本题 15 分）设有实方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & t & 9 \end{pmatrix}$,其中$t$为实常数，已知$B$为三阶非零方阵且满足$BA = O$，其中$O$为三阶零方阵，试求$t$的值以及$B$的秩的可能取值.

四.（本题 15 分）设a, b, c为实常数，且满足$b^2 \neq ac, a + b + c = 0$，试证明线性方程组$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + c = 0 \\ bx_1 + cx_2 + a = 0 \\ cx_1 + bx_2 + b = 0 \end{cases}$有唯一解并求出这个唯一解.

五.（本题 15 分）设方阵A的伴随矩阵为$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，已知矩阵$B$满足$AB = B + 3A$，试求矩阵$B$.

六.（本题 20 分）设$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$.

求(1)一个二次实系数多项式$f(x) = x^2 + ax$使得$f(A)$为二阶零方阵;

(2)A^{100};

(3)$(A + E)^3$;

(4)$(A + E)^{-1}$.

七.（本题 8 分）设A, B是两个n阶实方阵，试证明：$r(A) = r(AB)$当且仅当存在n阶实方阵C使得$A = ABC$.

八.（本题 7 分）设A为n阶方阵，试证明：存在对称矩阵S和可逆矩阵 P 使得$A = SP$.