

# 浙江大学 2020-2021 学年 春夏 学期

## 《线性代数 (甲)》课程期中考试试卷

一. (本题 10 分) 设  $x \neq 2$  为实常数, 若有  $n$  阶行列式如下,

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & 2 & x & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & x \end{vmatrix},$$

试证明:  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, D_n = [x + 2(n-1)](x-2)^{n-1}$ .

二. (本题 10 分) 设  $A$  为三阶方阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 已知  $|A| = \frac{1}{2}$ , 试求  $|(3A)^{-1} - 2A^*|$  的值.

三. (本题 15 分) 设  $a \neq 1$  是一个实常数, 又已知齐次线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$  与方程  $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$  有公共解, 试求  $a$  的值以及所有公共解.

四. (本题 20 分) 当实数  $a$  取何值时线性方程组  $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = a^2 \end{cases}$  无解, 有解? 有解时求出所有解.

五. (本题 10 分) 设  $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $k$  为实常数, 试求  $A$  的秩  $r(A)$ .

六. (本题 15 分) 设  $a, b$  是两个实常数,  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = (x-b)^8$ , 试求矩阵  $f(A)$ , 试给出  $f(A)$  可逆的条件, 并且当  $f(A)$  可逆时求其逆  $[f(A)]^{-1}$ .

七. (本题 15 分)

(1) 设  $A$  是一个  $n$  阶可逆矩阵, 若已知  $A$  的每一行元素之和都是常数  $c$ , 试证明:  $c \neq 0$ ;

(2) 设  $A, B$  是  $n$  阶方阵, 试证明:

$$r(AB + A + B) \leq r(A) + r(B);$$

(3) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 试证明: 若  $E + AB$  可逆, 则  $E + BA$  也可逆.

八. (本题 5 分) 试证明任何一个方阵可以表示为一个可逆矩阵和一个幂等矩阵的乘积. (若方阵  $A$  满足  $A^2 = A$  则称  $A$  是一个幂等矩阵)