学霸助手
www.xuebazhushou.com

课后答案 | 课件 | 期末试卷

最专业的学习资料分享APP

新世纪高等院校精品教材

潘正权 诸葛向彬 编著

工程物理

习题指导

浙江大學出版社

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

新世纪高等院校本科精品教材·公共基础类

工程物理 习题指导

潘正权　诸葛向彬　编　著

浙江大學出版社

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

内容提要

本书按照《工程物理学》各章顺序编写，覆盖整个大学物理内容。每章分为3部分：基本概念和规律、解题指导、习题解答。在基本概念和规律中简练概括了该章必须掌握的物理概念及规律。在每章的解题指导中归纳和总结了求解有关物理习题的解题方法和各种技巧。所有习题解答突出物理图像和解题思路的分析，习题选择强调典型性，解题过程规范性、示范性和灵活性并重，融会了作者长期教学实践中的经验和体会。

本书可作为使用《工程物理学》(第二版)教材的师生的参考书，也可作为其他高等学校理工科学生复习和迎考各种大学物理考试的参考书，对从事大学物理教学的教师也有一定的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

工程物理习题指导 / 潘正权，诸葛向彬编著. —杭州：浙江大学出版社，2004.8
ISBN 7-308-03887-4

Ⅰ.工… Ⅱ.①潘…②诸… Ⅲ.工程物理学—高等学校—解题 Ⅳ.TB13—44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第090909号

出版发行：浙江大学出版社
（杭州浙大路38号 邮政编码310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
责任编辑：陈晓嘉
排 版 者：浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷：德清第二印刷厂
经　　销：浙江省新华书店
开　　本：787mm×1092mm 1/16
印　　张：14
字　　数：349千
版　　次：2004年8月第1版
印　　次：2004年8月第1次印刷
印　　数：0001—3000
书　　号：ISBN 7-308-03887-4/TB·033
定　　价：22.00元

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

前　言

在物理教学中，解答习题始终是教学的一个重要环节。它对于学生深入理解和巩固物理概念，掌握基本规律和基本方法，培养分析物理问题和解决物理问题的能力，都是非常重要的。

本书主要是根据诸葛向彬教授主编的浙江省高等教育重点建设教材《工程物理学》(第二版)编写的习题指导书，内容包括每章的基本概念和规律、解题指导和习题解答。在基本概念和规律中简练概括了各章必须掌握的物理概念及规律。在习题指导中，根据长期教学实践的经验和体会，作者归纳和总结了求解大学物理习题的解题思路、解题方法和各种解题技巧；并着重指出各章习题的解答运用哪些基本概念和基本规律，解题中的难点和容易犯错误的地方，以及应该注意的主要问题等。相信这些对读者学习或复习大学物理有较好的借鉴作用。在习题解答过程中，注意解题的规范性和示范性，同时强调解题的灵活性和解题技巧，并力争做到简明扼要，突出物理图像和解题思路，以便提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书由潘正权编写原《工程物理学》第一版中的所有习题解答；诸葛向彬编写各章的基本概念和规律、解题指导以及第二版新增习题的解答。全书最后由潘正权统稿。

本书既可作为使用《工程物理学》(第二版)教材的师生的参考书，也可作为其他高等学校理工科学生复习和迎考各种大学物理考试的参考书。因为《工程物理学》(第二版)在习题配置过程中进行了深入的调查和研究，使得其习题不仅内容覆盖面广、类型典型，而且与科学、技术和社会联系紧密，较好地吸收和运用了多种国内外教材的优点和特色，同时也融会了浙江大学多年来开展物理习题讨论课的经验和成果。

本书的讲义从 1999 年开始配合《工程物理学》教材在浙江大学等高校作为师生内部参考书使用，并经过 3 次修订。期间汲取了许多使用过《工程物理学》教材的高校教师和学生提供的大量反馈意见。作者在此对他们表示衷心的感谢。

限于作者的教学经验和学术水平，书中一定还存在不少缺点和错误，敬请读者批评指正。

作者

2004 年 2 月于杭州浙大求是园

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

目　　录

第 1 章　绪　论 …… 1
第 2 章　质点运动学 …… 3
第 3 章　动量·动量守恒定律 …… 10
第 4 章　能量·能量守恒定律 …… 21
第 5 章　角动量·角动量守恒定律 …… 28
第 6 章　刚体力学 …… 32
第 7 章　万有引力 …… 46
第 8 章　相对论 …… 50
第 9 章　机械振动 …… 58
第 10 章　机械波 …… 70
第 11 章　气体动理论 …… 81
第 12 章　热力学基础 …… 91
第 13 章　静电场 …… 105
第 14 章　静电场中的导体和电介质 …… 120
第 15 章　电流和磁场 …… 131
第 16 章　物质中的磁场 …… 145
第 17 章　电磁感应 …… 149
第 18 章　麦克斯韦方程·电磁波 …… 161
第 19 章　带电粒子在电场和磁场中的运动 …… 166
第 20 章　光的干涉 …… 171
第 21 章　光的衍射 …… 179
第 22 章　光的偏振 …… 186
第 23 章　量子光学基础 …… 192
第 24 章　原子的玻尔理论 …… 197
第 25 章　量子力学基础 …… 202
第 26 章　凝聚态物理 …… 209
第 27 章　核物理和粒子物理简介 …… 213
第 28 章　天体和宇宙 …… 217

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 1 章　绪　论

【基本概念和规律】

1. 国际单位制(SI)

国际单位制(SI)作为国际通行的单位制，以七个基本量的单位作为物理量的基本单位。

2. 量纲

任何一个物理量通过物理关系与基本量联系起来的关系式称为量纲式，简称为量纲。一个力学量 Q 的量纲式可表示为

$$[Q]=L^pM^qT^r$$

式中 p,q,r 为量纲指数，可以为正、为负或者为零。

只有量纲相同的物理量才能进行加减和用等号联接。

3. 科学计数法

科学计数法是用 1 与 10 之间的数乘以 10 的幂次表示极大或极小数的方法。

【解题指导】

- 学会写物理量的量纲表达式。
- 用量纲校核法估算物理公式和检验结果的正确性。
- 学会科学计数法和有效数字的选取。

【习题解答】

1-1　试写出物理量：速度 v、加速度 a、力 F、功 W、动能 E_k、势能 U、力矩 M、功率 P、动量 p、冲量 I 的量纲表达式。

解　$[v]=\frac{[l]}{[t]}=LT^{-1}$　，　$[a]=\frac{[v]}{[t]}=LT^{-2}$

$[F]=[m][a]=MLT^{-2}$　，　$[W]=[F][l]=ML^2T^{-2}$

$[E_k]=[m][v][v]=ML^2T^{-2}$，　$[U]=[m][a][l]=ML^2T^{-2}$

$[M]=[l][F]=ML^2T^{-2}$　，　$[P]=\frac{[W]}{[t]}=ML^2T^{-3}$

$[p]=[m][v]=MLT^{-1}$　，　$[I]=[F][t]=MLT^{-1}$

1-2　试用量纲方法导出质点作匀速圆周运动时所需向心力的表达式。

解　质点作圆周运动时所需的向心力主要决定于三个方面：质点的质量 m，运动速度 v

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

及圆周运动的半径 r，所以

$$F_{向} \propto m^a v^b r^c$$

其中 a,b,c 均为待定的指数。

力的量纲为 MLT^{-2}，同时 $[F_{向}]=[m^a][v^b][r^c]$，所以

$$MLT^{-2}=M^a(L/T)^bL^c=M^aL^{b+c}T^{-b}$$

令两边量纲相应的指数相等，则有

$$a=1 \quad b+c=1 \quad b=2, \quad 解之得 \quad c=-1$$

$$\therefore F_{向} \propto \frac{mv^2}{r}$$

牛顿力学中向心力的精确表达式为 $F_{向}=m\dfrac{v^2}{r}$。

量纲分析能告诉我们某个物理量跟哪些因素变化有关，公式前的常数因为没有量纲，只能由实验来测定。

1-3 某同学算得一习题答案为 $F=\dfrac{1}{3}\rho v^2$（式中 F 和 ρ 分别表示力和密度，v 表示速度），试判断该结果是否正确？

解 力 F 的量纲为 MLT^{-2}，密度 ρ 的量纲为 ML^{-3}，速度 v 的量纲为 LT^{-1}，则 $\dfrac{1}{3}\rho v^2$ 的量纲为

$$(ML^{-3})(LT^{-1})^2=ML^{-1}T^{-2}$$

此结果与力的量纲不等，故上述结果是错误的。

1-4 试确定万有引力常量 G 在 SI 中的单位。

解 由万有引力定律有

$$G=\frac{Fr^2}{m_1m_2} \qquad [G]=(MLT^{-2})(L^2)(M^{-1})^2=M^{-1}L^3T^{-2}$$

因此 G 在 SI 中的单位为 $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$。

1-5 一质量为 m 的物体悬挂在劲度系数为 k 的弹簧下面作竖直振动，不考虑空气阻力时，物体在振动过程中所受的合力为 $F=-kx$，x 为物体离开平衡位置的位移。试用量纲分析来确定物体的振动周期 T 与 k,m 的关系式。

解 振动周期 T 与劲度系数 k 和物体质量 m 有关，设关系式为

$$T \propto k^p m^q$$

两边的量纲相等，则

$$T=(MLT^{-2}L^{-1})^pM^q=M^{p+q}T^{-2p}$$

令两边的有关指数相等，则

对于 M，$0=p+q$；对于 T：$1=-2p$；解之得到 $p=-\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$，代入关系式得

$$T \propto \sqrt{\frac{m}{k}}$$

标准的计算公式应为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$，这里仅差一个常数因子 2π。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第2章

质点运动学

【基本概念和规律】

1. 参考系

参考系是描述物体运动时选作参照的物体或系统。

2. 描述质点运动的四个基本物理量

(1)位置矢量:又叫矢径,是用来确定物体位置的矢量。

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

(2)位移矢量:质点在 Δt 时间内位置的改变。

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

(3)速度矢量:质点位置矢量对时间的导数。

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

(4)加速度矢量:质点速度矢量对时间的导数。

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

【解题指导】

在微积分和矢量代数运算的基础上进行解题,而不是重复中学的解题方式做题。

● 学会解运动学的第一类问题,即已知运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,通过矢量代数运算和微分求质点运动的位移、速度和加速度。

● 学会解运动学的第二类问题,即已知速度或加速度通过积分求运动方程。

● 用解析法处理曲线运动,即选取适当的坐标系将运动加以分解。例如,对于平面曲线运动可采用直角坐标系和自然坐标系加以分解。

$$\text{直角坐标系}\begin{cases}a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\[2ex] a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\end{cases}\qquad\text{自然坐标系}\begin{cases}\text{切向}\qquad a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\[2ex] \text{法向}\qquad a_n=\dfrac{v^2}{\rho}\end{cases}$$

式中 ρ 为曲率半径。自然坐标系是大学里引入的,对处理曲线运动特别有用。同时应重点理解各种加速度的物理含义。

● 同一物体在相对作平动的两个参考系中,速度和加速度之间的变换关系为

$$\boldsymbol{v}_{\text{人对车}}=\boldsymbol{v}_{\text{人对地}}-\boldsymbol{v}_{\text{车对地}}\qquad \boldsymbol{a}_{\text{人对车}}=\boldsymbol{a}_{\text{人对地}}-\boldsymbol{a}_{\text{车对地}}$$

上述式中是用车厢里的人(研究对象)、地面和车厢(两个参考系)来加以表示的。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

● 研究质点运动应注意位置矢量，位移，速度和加速度的相对性、瞬时性和矢量性。

【习题解答】

2-1 一架小型运输机至少要达到 $360\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ 的速度才能从跑道上起飞，假定飞机加速度恒定且跑道长为 1.8km，试问飞机至少要有多大的加速度才能从静止开始起飞？

解 因为飞机作匀加速直线运动，则

$$v_t^2=v_0^2+2as \qquad v_0=0,\quad v_t=\frac{360\times10^3}{3600}=100(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

$$s=1.8\times10^3\text{m} \qquad a=\frac{v_t^2}{2s}=2.78\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

2-2 一汽车正以 $45\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ 的速度向某交叉路口驶去，当汽车离交叉路口还有 20m 时，交叉路口的红灯突然闪亮。设驾驶员的反应（从看见红灯到开始刹车）时间为 0.7s，刹车的加速度为 $-7.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$。试通过计算判断该驾驶员会不会闯红灯？（设红灯亮的时间足够长）

解 刹车前汽车速度为 $v_0=45\text{km/h}=12.5\text{m/s}$，驾驶员从看见红灯到开始刹车的时间内，汽车驶过的距离为

$$\Delta s_1=v_0t=12.5\times0.7=8.75(\text{m})$$

驾驶员刹车后汽车驶过的距离为

$$\Delta s_2=\frac{0-v_0^2}{2a}=\frac{-(12.5)^2}{2\times(-7)}=11.16(\text{m})$$

驾驶员从看见红灯到最后汽车停下来期间，汽车驶过的距离为

$$\Delta s=\Delta s_1+\Delta s_2=(8.75+11.16)\text{m}=19.91\text{m}<20\text{m}$$

故该驾驶员不会闯红灯。

2-3 已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$(SI)，求：

(1)质点轨迹；

(2)从 $t=1\text{s}$ 到 $t=2\text{s}$ 的位移；

(3)$t=1\text{s}$ 和 $t=2\text{s}$ 时的速度和加速度。

解 (1)由已知运动方程，知 $x=2t$，$y=2-t^2$，故轨道方程为

$$y=2-\frac{x^2}{4}\quad\text{（即运动轨迹为抛物线）}$$

(2)$t=1\text{s}$ 时，$\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$；$t=2\text{s}$ 时，$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$。从 $t=1\text{s}$ 到 $t=2\text{s}$ 的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})(\text{m})$$

(3)
$$\because \boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{j}$$

$\therefore t=1\text{s}$ 时，$\boldsymbol{v}_1=(2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$，$\boldsymbol{a}_1=-2\boldsymbol{j}(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$

$t=2\text{s}$ 时，$\boldsymbol{v}_2=(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$，$\boldsymbol{a}_2=-2\boldsymbol{j}(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$

2-4 一质点在 X-Y 平面内运动，其运动方程分别为 $x=3\cos4t$，$y=3\sin4t$(SI)，试求：

(1)质点任一时刻的速度和加速度的表达式；

(2)质点的切向加速度和法向加速度的大小。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 (1)
$$v_x=\frac{dx}{dt}=-12\sin4t,\quad v_y=\frac{dy}{dt}=12\cos4t$$
$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=-48\cos4t,\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-48\sin4t$$
故任一时刻速度和加速度分别为
$$\boldsymbol{v}=-12\sin4t\boldsymbol{i}+12\cos4t\boldsymbol{j}\qquad(\text{SI})$$
$$\boldsymbol{a}=-48\cos4t\boldsymbol{i}-48\sin4t\boldsymbol{j}\qquad(\text{SI})$$
(2)速度$\boldsymbol{v}$的大小为
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=12(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$
由质点运动轨迹方程
$$x^2+y^2=3^2(\cos^24t+\sin^24t)=3^2$$
可知质点作半径$R=3\text{m}$的圆周运动，故切向加速度a_τ和法向加速度a_n分别为
$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=0\qquad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(12)^2}{3}=48(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

2-5 一质点沿x轴运动，其加速度a与位置坐标x的关系为$a=4+3x^2$(SI)。若质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

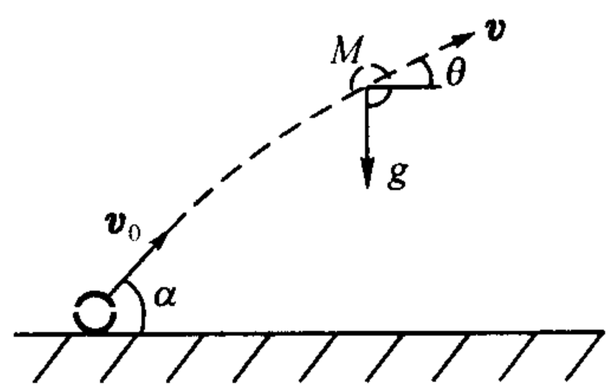
解 设质点在任一位置x处的速度为v，则
$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{vdv}{dx}=4+3x^2$$
由初始条件$\int_0^v vdv=\int_0^x(4+3x^2)dx$得
$$v=\sqrt{8x+2x^3}$$

2-6 如图所示，手球运动员以初速度$\boldsymbol{v}_0$与水平方向成α角抛出一球。当球运动到M点处，它的速度与水平方向成θ角，若忽略空气阻力，求：

(1)球在M点处速度的大小；

(2)球在M点处切向加速度和法向加速度的大小；

(3)抛物线在该点处的曲率半径。



习题 2-6 图

解 手球的运动可分解为水平方向上的匀速直线运动和竖直方向上的匀变速直线运动。

(1)水平方向上，$v_x=v_0\cos\alpha=v\cos\theta$，球在$M$处的速度为
$$v=\frac{v_0\cos\alpha}{\cos\theta}$$
(2)$a_y=-g$，在M点将g分解可得
$$a_\tau=-g\sin\theta,\quad a_n=g\cos\theta$$
(3)因为$a_n=\frac{v^2}{\rho}$，故有
$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g\cos^3\theta}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

2-7 一滑块以加速度 $a=-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t$(SI)沿直线运动。设滑块初速度 $v_0=2\pi$,且以滑块中心与坐标原点重合时为起始位置,求:

(1)滑块任意时刻的速度;

(2)滑块的运动方程。

解 滑块作匀速直线运动。

(1) $$\because a=\frac{dv}{dt}=-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t,\quad \therefore\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}tdt$$

$$\therefore v=2\pi\cos\frac{\pi}{2}t$$

(2) $$\because v=\frac{dx}{dt}=2\pi\cos\frac{\pi}{2}t,\quad \therefore\int_0^x dx=\int_0^t 2\pi\cos\frac{\pi}{2}tdt$$

$$\therefore x=4\sin\frac{\pi}{2}t$$

2-8 一人造卫星在地球表面上方 640km 的圆形轨道上运动,今测得它绕地球一周的时间为 98min,求它在轨道上的向心加速度。(取地球半径 $R=6\ 400$km)

解 $T=98\times60\text{s}=5.88\times10^3\text{s}$,人造卫星的向心加速度为

$$a=\frac{v^2}{(R+h)}=\frac{[2\pi(R+h)/T]^2}{(R+h)}=\frac{4\pi^2}{T^2}(R+h)=\frac{4\pi^2\times(6400+640)\times10^3}{(5.88\times10^3)^2}=8.03(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

2-9 一汽车沿半径 50m 的圆形公路行驶,任意时刻经过的路程 $s=10+10t-0.5t^2$(SI)。求$t=5$s时,汽车的速率以及切向加速度、法向加速度和总加速度的大小。

解 由已知路程 s 方程得 $v=\frac{ds}{dt}=10-t$,当 $t=5$s 时,$v=5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=-1\text{m}\cdot\text{s}^{-2},\ a_n=\frac{v^2}{R}=0.5\text{m}\cdot\text{s}^{-2},\ a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=1.1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

2-10 一车技演员在半径为 R 的圆形轨道内进行车技表演,其速率与时间的关系为 $v=ct^2$(式中 c 为常量),求:

(1)其运动的路程与时间的关系;

(2)t 时刻的切向加速度和法向加速度。

解 (1) $$v=\frac{ds}{dt}=ct^2,\quad \int_0^s ds=\int_0^t ct^2dt,\quad s=\frac{1}{3}ct^3$$

(2) $$a_\tau=\frac{dv}{dt}=2ct,\quad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{c^2t^4}{R}$$

2-11 一质点由静止沿半径 $R=3$m 的圆周运动,切向加速度为 $a_\tau=3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,问:

(1)经过多少时间它的总加速度与径向成 45°?

(2)在上述时间内,质点所经过的路程为多少?

解 (1)因 $a_\tau=3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$为常量,故由任一时刻的速率 $v=a_\tau t$,得

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{a_\tau^2t^2}{R}$$

当总加速度 $\boldsymbol{a}$ 与径向成 45°时,$a_n=a_\tau$,即

$$\frac{a_\tau^2t^2}{R}=a_\tau\qquad t=\sqrt{\frac{R}{a_\tau}}=1\text{s}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)在上述 0 到 1s 内，质点经过的路程为

$$s=\frac{1}{2}a_t t^2=1.50\text{m}$$

2-12 一队战士以 $1.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$的速度前进，一个通讯员从队伍末尾骑马到队伍前面，传令后又返回到队伍末尾，共计 10min。若队伍长为 1 200m，求通讯员骑马的速度。

解 设队伍前进速度为 v_1，队伍长为 s，通讯员骑马速度为 v_2，则通讯员从队尾赶到队首所用的时间

$$t_1=\frac{s}{v_2-v_1} \tag{1}$$

通讯员从队首返回队尾所用的时间

$$t_2=\frac{s}{v_2+v_1} \tag{2}$$

$$t_1+t_2=10\text{min}=600\text{s} \tag{3}$$

将(1)、(2)代入(3)式可解得

$$v_2=4.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{或} \quad -0.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}(\text{不合理，舍去})$$

2-13 一只小船在河中逆水划行，刚好在经过某座桥时，从船上掉下一个木箱，30min 后被发觉，立即掉头追赶，终于在该桥的下游 5.0km 处赶上木箱。假设小船顺流和逆流时相对水流的划行速度不变，试求小船回程追赶所需时间，并求水流速度。

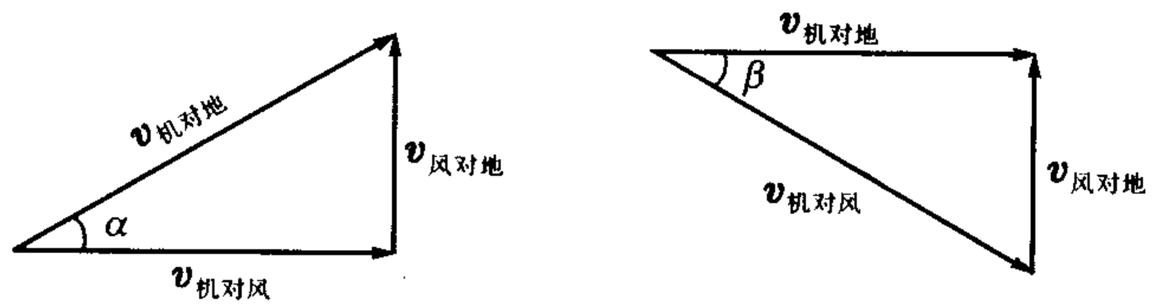
解 因小船顺流和逆流时相对水流的划行速度不变，而水箱又随水漂流，故小船回程追赶所需时间

$$t=30\text{min}=0.5\text{h} \qquad v_{水}=\frac{s}{2t}=5\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

2-14 某飞机在飞行中遇到方向稳定向北、大小为 $65\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$的风，同时飞机上的罗盘指出飞机的飞向向东(相对空气)，飞机速率指示器显示为 $215\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$，试求：

(1)飞机相对于地面的速度；

(2)如果要求飞机向东飞行，它应朝向何方飞行？相对于地面的速率大小如何？



解 2-14 图

解 由已知，有 $v_{机对地}=v_{机对风}+v_{风对地}$。

(1)如图有

$$v_{机对地}=\sqrt{v_{机对风}^2+v_{风对地}^2}=\sqrt{215^2+65^2}=225(\text{km}\cdot\text{h}^{-1})$$

$$\because \quad \tan\alpha=\frac{v_{风对地}}{v_{机对风}}=\frac{65}{215}=0.3023, \quad \therefore \quad \alpha=16.82°=16°49'$$

即飞机向正东偏北 16.82°方向飞行。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

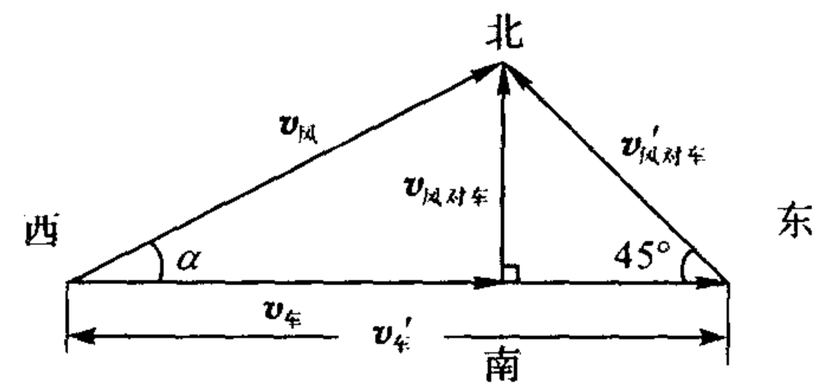
(2)如图，有 $\sin\beta=\frac{v_{风对地}}{v_{机对风}}=\frac{65}{215}=0.3023$，所以

$$\beta=17.60°=17°36'$$

即飞机应指向正东偏南 17.60°，其相对于地面的速率为

$$v'_{机对地}=\sqrt{v_{机对风}^2-v_{风对地}^2}=\sqrt{215^2-65^2}=205(\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

2-15 一人骑自行车在风中向东而行。当车速为 $10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时，觉得有南风；当车速为 $15\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时，觉得有东南风，求风的速度。



解 2-15 图

解 这是一个相对运动问题。以风为研究对象，以地面(静)和人(动)为参考系，题意如图所示。已知 $v_{车}=10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$v'_{车}=15\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，所以

$$v_{风对车}=v'_{车}-v_{车}=15-10=5(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$v_{风}=\sqrt{v_{车}^2+v_{风对车}^2}=\sqrt{(10)^2+5^2}=11.2(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

风向与朝东方向夹角为

$$\alpha=\arctan\frac{v_{风对车}}{v_{车}}=\arctan\frac{5}{10}=26.6°\approx27°$$

2-16 一升降机以加速度 $1.22\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 上升，当上升速度为 $2.44\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时，有一螺帽自升降机的顶板上落下，升降机顶板与升降机的底面相距 2.74m，问：

(1)螺帽相对于升降机作什么运动？其加速度为多少？螺帽相对于地面作什么运动？其加速度为多少？

(2)螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间？

(3)螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离？

解 (1)螺帽相对于升降机向下作匀加速直线运动，$a'=11.02\mathrm{m\cdot s^{-2}}$；相对于地面作竖直上抛运动，$a''=g=9.8\mathrm{m\cdot s^{-2}}$(取竖直向下为正)。

(2)取升降机为参考系，$v_0'=0$，则

$$h=\frac{1}{2}a't^2$$

$$\therefore\quad t=\sqrt{\frac{2h}{a'}}=\sqrt{\frac{2\times2.74}{11.02}}=0.71(\mathrm{s})$$

(3)取地面为参考系，$v_0=-2.44\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，下降距离为

$$h'=v_0t+\frac{1}{2}a''t^2=\left[(-2.44)\times0.71+\frac{1}{2}\times9.8\times(0.71)^2\right]\mathrm{m}=0.74\mathrm{m}$$

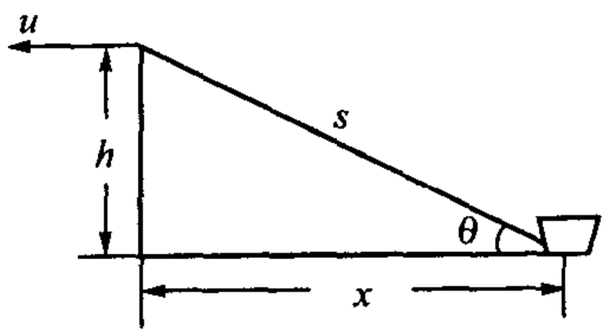
2-17 如图所示，在离水面高度为 h 的岸边上，有人用绳子拉船靠岸，收绳的速率恒为 u，求船与岸的水平距离为 x 时，船的速度和加速度的大小。(提示：绳长 $s^2=h^2+x^2$，$u=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$)

解 $\because\quad s^2=h^2+x^2,\qquad 2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad v=\frac{u}{\cos\theta}=u\sqrt{1+(\frac{h}{x})^2}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1+(\frac{h}{x})^2}=\frac{h^2u^2}{x^3}$$



习题 2-17 图

2-18 某一雨滴在下落时受到空气阻力的作用，其运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-cv$$

式中 g 为重力加速度，c 是与空气黏滞性有关的常量。请设计一个计算机程序来计算任意时刻雨滴的速度，并画出相应的 v-t 图。要求程序能输入 g，c 等值，讨论 c 取 0，0.1，0.15 和 0.30 等值时的各种情形，并进行分析总结。

[提示：方程变换后，$v=\frac{g}{c}(1-\mathrm{e}^{-ct})$，并设雨滴离地面足够高]

解 程序略。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第3章

动量·动量守恒定律

【基本概念和规律】

1. 惯性系

惯性系是牛顿第一定律成立的参考系。一切相对于惯性系作匀速直线运动的参考系都是惯性系。

2. 动量

动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ 是一个守恒量。

动量守恒定律：当质点系所受合外力为零时，$\sum_i \boldsymbol{p}_i=$ 常量(它是在惯性系中成立的)。

3. 力

力定义为物体动量的时间变化率，即在单位时间内物体在相互作用中传递的动量。

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

4. 冲量

$$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

上式表明冲量是在一段时间内力对时间的累积作用。

动量定理：$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是物体在一段时间内所受的合外力，常用平均冲力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 表示。

$$\overline{\boldsymbol{F}}\cdot\Delta t=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$$

5. 牛顿定律(只能在惯性系中成立)

第一定律：又称惯性定律(表述略)。

第二定律：$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。

第三定律：两个质点之间的作用力和反作用力大小相等，方向相反，在同一直线上。

注意：作用力和反作用力作用在不同的物体上，不能相互抵消。

6. 惯性力

惯性力是惯性在非惯性系中的反映。在平动非惯性系中，$\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$。

【解题指导】

● 应用动量定理 $\boldsymbol{F}\Delta t=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1$ 解题时，首先应注意 $\boldsymbol{F}$ 是合外力。若力是变力，可用 Δt 时间内的平均冲力代替。由于冲量和动量都是矢量，解题时可用分量式，并规定一个正方

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

向。其次应注意该定理仅适用于单个物体的问题。在解决碰撞、冲击等问题中非常有用。

● 应用动量守恒定律解题时，应注意：

(1)研究对象是系统，要分清系统的内力和外力；只要系统合外力等于零，系统的动量就守恒。

(2)若系统内力≫外力，也可以近似看作为系统动量守恒。

(3)动量守恒定律是个矢量式。由于矢量的各个分量的独立性，即使系统合外力不等于零，只要某一个方向上的合外力分量等于零，尽管系统总动量不守恒，但该方向上的动量分量保持守恒。

(4)动量守恒定律是在惯性系中成立的。因此，系统中各个物体的速度都只能相对于同一个惯性系，一般都选地球为惯性系。

● 应用牛顿定律解题的基本思路：

(1)确定研究对象(一个物体或几个物体)。

(2)画隔离体图，分析物体受力。

(3)看物体运动的物理过程，列方程，一般用分量式。

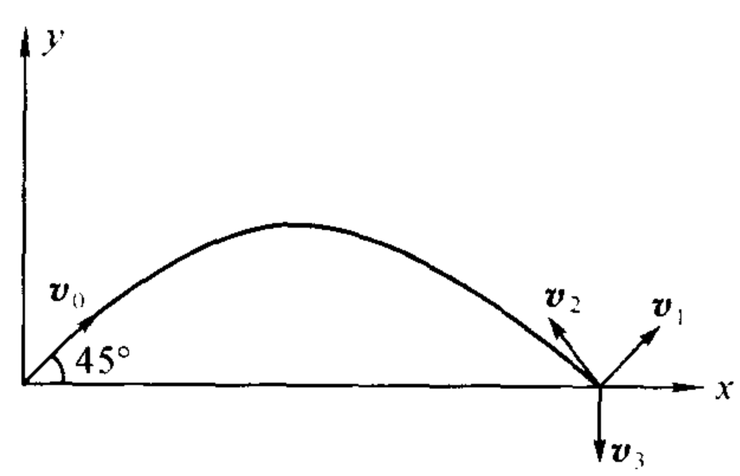
(4)注意求出各个物体加速度之间的关系。

(5)检查方程的个数是否等于未知量的个数，最后求解，分析结果的物理意义。

● 在非惯性系中求解力学问题的方法是在牛顿第二定律中加上一个惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯}$。惯性力是一种虚拟力，既没有施力者，也没有反作用力，其大小等于受力物体质量 m 乘以非惯性系相对于惯性系的加速度 a，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，即 $\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$。惯性力只出现在非惯性系中，其实质是物体的惯性在非惯性系中的反映。

【习题解答】

3-1 如图所示，一手榴弹投出的方向与水平面成 45°角，投出的速率为 $25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。若它在刚要接触与投射点在同一水平面的目标时爆炸，并分成质量相等的三块：一块以速度 $\boldsymbol{v}_3$ 竖直向下，一块顺爆炸处的切线方向以速度 $v_2=15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 飞出，一块沿轨道法线方向以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 飞出，求 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_3$。(不计空气阻力)



习题 3-1 图

解 因为不计空气阻力，故当手榴弹到达与投射点在同一水平面的目标时，其速度大小仍为 $25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，只不过方向变成与水平面成 45°斜向下(即沿轨迹切线向前)。

设手榴弹质量为 m，爆炸前速度为 v_0，爆炸过程中动量守恒，则

x 方向
$$mv_0\cos45°=\frac{m}{3}v_1\cos45°-\frac{m}{3}v_2\cos45° \tag{1}$$

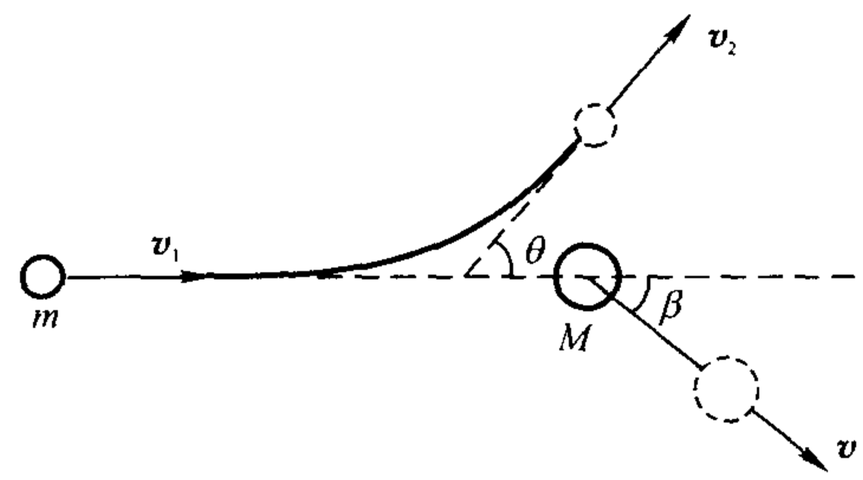
y 方向
$$-mv_0\sin45°=\frac{m}{3}v_1\sin45°+\frac{m}{3}v_2\sin45°-\frac{m}{3}v_3 \tag{2}$$

联立上二式并代入 v_0、v_2 可解得

$$v_1=90\text{m}\cdot\text{s}^{-1},\quad v_3\approx127\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

3-2 在一次 α 粒子散射过程中，α 粒子与静止的氧原子核发生“碰撞”。实验测得碰撞后 α 粒子沿与入射方向成 $\theta=72°$ 角的方向运动，而氧原子核沿与 α 粒子入射方向成 $\beta=41°$ 角方向“反冲”，如图所示。求碰撞前后 α 粒子的速率之比。



习题 3-2 图

解 设 α 粒子质量为 m，氧原子核的质量为 M，碰撞过程中动量守恒，则在水平方向（取向右为正）有

$$mv_1=mv_2\cos\theta+Mv\cos\beta \tag{1}$$

竖直方向（取向上为正）有

$$0=mv_2\sin\theta-Mv\sin\beta \tag{2}$$

联立以上二式可解得

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\beta}{\sin\beta\cos\theta+\sin\theta\cos\beta}=\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\theta)}\approx 0.71$$

3-3 一个质量为 m 的人站在质量为 M 的小船的船头上。小船以速度 v_0 在静水中向前行驶。若此人突然以相对于小船的速度 u 向船尾跑去，问小船的速度变为多少？如果人到达船尾后停止跑动，此时小船的速度又变为多少？

解 研究系统 $(m+M)$，因系统所受合外力为零，故系统动量守恒：

$$(m+M)v_0=Mv_1-m(u-v_1)$$

得

$$v_1=v_0+\frac{mu}{m+M}$$

到达船尾不动后

$$(m+M)v_0=(m+M)v_2$$

得

$$v_2=v_0$$

3-4 一垒球的质量 $m=0.20\text{kg}$，如果其投出时的速度为 $30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，被棒击回的速度为 $50\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，方向相反。试求球的动量变化和打击力的冲量。如果球与棒的接触时间为 $\Delta t=0.0020\text{s}$，求打击的平均力。

解 设投出速度方向为正方向，则 $v_1=30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$v_2=-50\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，有

$$\Delta p=mv_2-mv_1=m(v_2-v_1)=-0.2\times(50+30)=-16(\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

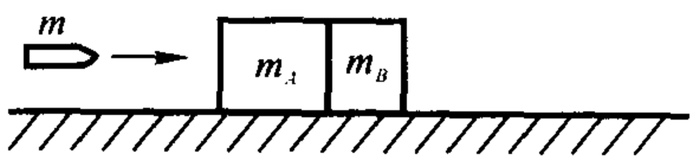
$$I=\Delta p=-16\text{N}\cdot\text{s}$$

由动量定理 $F\Delta t=\Delta p$ 得

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{-16}{0.002}=-8\times10^3(\text{N})$$

负号表示与投出时的速度方向相反。

3-5 如图所示，A 和 B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B，并排在光滑的水平面上。今有一子弹水平地穿过木块 A 和 B，所用时间分别为 Δt_1 和 Δt_2。若木块对子弹的阻力为恒力 $\boldsymbol{F}$，求子弹穿过后，两木块的速度各为多少？



习题 3-5 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 设子弹穿过后两物体的速度分别为 v_A 和 v_B，子弹穿过物体 A 时有

$$F\Delta t_1=(m_A+m_B)v_A,\quad v_A=\frac{F\Delta t_1}{m_A+m_B}$$

子弹继续穿过物体 B 时有

$$F\Delta t_2=m_Bv_B-m_Bv_A,\quad v_B=v_A+\frac{F\Delta t_2}{m_B}=\frac{F\Delta t_1}{m_A+m_B}+\frac{F\Delta t_2}{m_B}$$

3-6 一飞机以 $300\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度飞行，途中撞到了一只质量为 2.0kg 的鸟，鸟的长度为 0.3m。假设鸟撞上飞机后随飞机一起运动，试计算它们相撞过程中的平均冲力。

解 碰撞时间约为

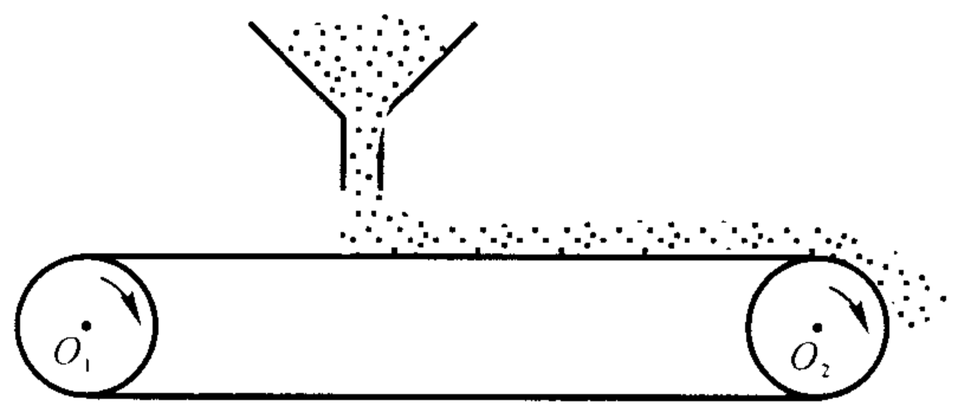
$$\Delta t=\frac{l}{v}=0.001\text{s}$$

鸟获得动量

$$\Delta p=mv=600\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

平均冲力

$$\overline{F}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=6\times10^5\text{N}$$



习题 3-7 图

3-7 如图所示，小石子从料斗中落在水平传送带上，靠传送带输送出去。设每分钟落下的小石子为 20kg，皮带速率为 $15\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，试求匀速传送时皮带作用在小石子上的水平力。

解 由动量定理，并取皮带运动方向为 x 轴正方向，则

$$I_x=\overline{F}_x\Delta t=\Delta(mv_x)$$

故皮带作用于小石子的水平力为

$$\overline{F}_x=\frac{\Delta(mv_x)}{\Delta t}=\frac{20\times15}{60}=5(\text{N})$$

3-8 在无重力场影响下，由静止发射一个质量为 6.0×10^4kg 的三级火箭。

(1)设燃料相对于火箭的喷出速率为 $v_r=2\,500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。三级火箭依次发射后，火箭主体的质量分别变为 2.0×10^4kg，$\frac{2}{3}\times10^4$kg，$\frac{2}{9}\times10^4$kg，求火箭的最终速率。

(2)若把上述火箭改装成一级火箭，发射后火箭主体质量变为 1.2×10^4kg，问火箭的最终速率是多少？

解 用动量守恒定律可推出喷气式火箭的飞行速度为

$$v_2-v_1=v_r\ln\frac{m_1}{m_2}$$

上式表示火箭质量从 m_1 减至 m_2，火箭速度相应从 v_1 增加到 v_2。

(1)对于三级火箭，第一级火箭脱离主体时主体速度为

$$v_1=v_r\ln\frac{m_{初}}{m_{末}}=v_r\ln3$$

同理，第二级、第三级火箭发射后分别有

$$v_2=v_1+v_r\ln3,\quad v_3=v_2+v_r\ln3$$

故第三级火箭最终速率为

$$v_3=3v_r\ln3=8.24\times10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)若所有燃料装在一个外壳里

$$v=v_r\ln\frac{m_{初}}{m_{末}}=v_r\ln\frac{60}{12}=v_r\ln 5=4.02\times10^3\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

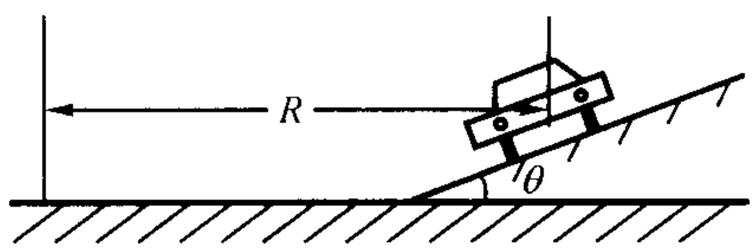
3-9 一喷气式飞机以 $200\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度飞行，燃气轮机每秒钟吸入 50kg 空气，与机上每秒喷出 2kg 的燃料混合燃烧后，相对飞机以 $400\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 向后喷出。求该燃气轮机的推力。

解 由动量定理

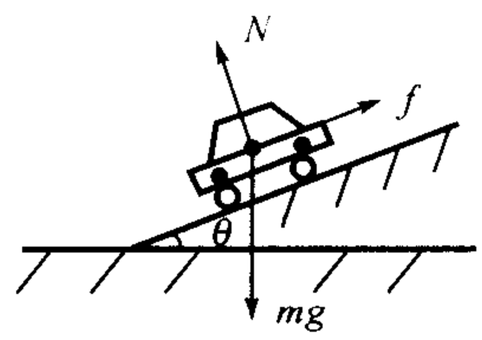
$$\overline{F}\Delta t=(\Delta m_{燃}+\Delta m_{空})(v-v_r)-(\Delta m_{燃}\cdot v+\Delta m'_{空}\cdot 0)$$

$$\overline{F}=\frac{\Delta m_{空}}{\Delta t}(v-v_r)-\frac{\Delta m_{燃}}{\Delta t}v_r=-1.08\times10^4\mathrm{N}$$

3-10 如图所示，一辆汽车驶入曲率半径为 R 的弯道；弯道路面与水平面之间倾斜一角度 θ；轮胎与路面之间的摩擦因数为 μ。求汽车在路面上不作侧向滑动时的最大和最小速率。



习题 3-10 图



解 3-10 图

解 设汽车在弯道上作半径为 R 的圆周运动，则有

$$N\sin\theta-f\cos\theta=m\frac{v^2}{R} \tag{1}$$

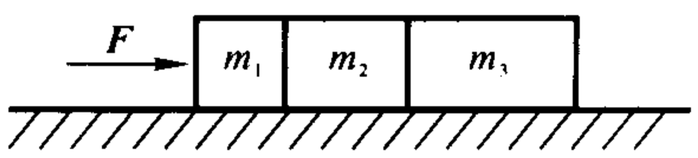
$$N\cos\theta+f\sin\theta-mg=0 \tag{2}$$

汽车在路面上不作侧向运动的条件是 $|f|\leqslant\mu N$，即 $-\mu N\leqslant f\leqslant\mu N$，代入(1)式和(2)式可解得

$$\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}gR}\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}gR}$$

$$\therefore\quad v_{\max}=\sqrt{\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}gR},\quad v_{\min}=\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}gR}$$

3-11 光滑的水平面上放着三个相互接触的物体，它们的质量分别为 $m_1=1\mathrm{kg}$，$m_2=2\mathrm{kg}$，$m_3=4\mathrm{kg}$。若用 $F=98\mathrm{N}$ 的水平力作用在 m_1 上，如图所示，求：



习题 3-11 图

(1)m_1，m_2，m_3 之间的相互作用力；

(2)若此力 F 水平向左作用在 m_3 上，情况如何？

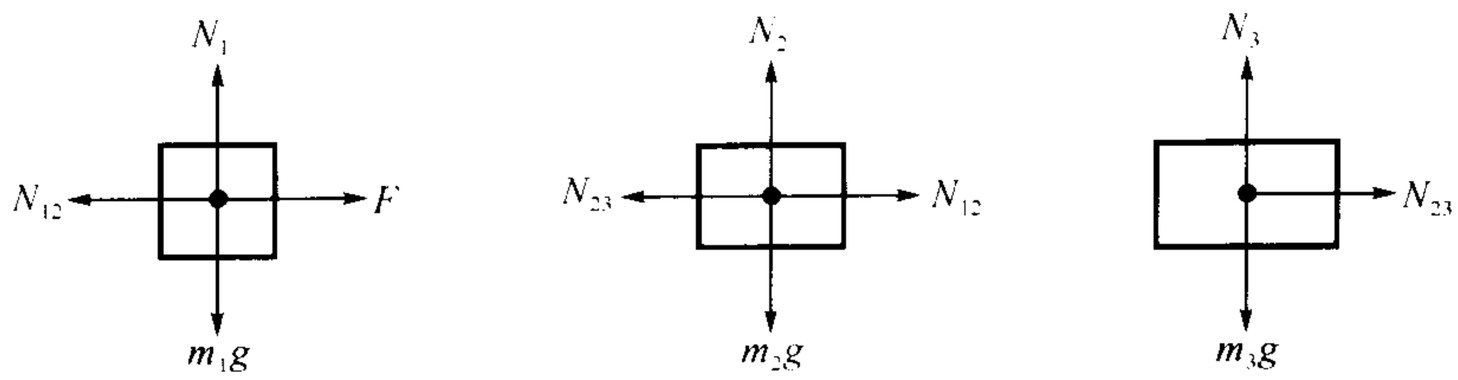
解 (1)设 m_1 和 m_2 之间的相互作用力为 N_{12}，m_2 和 m_3 之间的相互作用力为 N_{23}，因竖直方向无运动，仅列出水平方向的运动方程

$$F-N_{12}=m_1a \tag{1}$$

$$N_{12}-N_{23}=m_2a \tag{2}$$

$$N_{23}=m_3a \tag{3}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



解 3-11 图

联立(1)、(2)、(3)式得

$$a=\frac{F}{m_1+m_2+m_3}$$

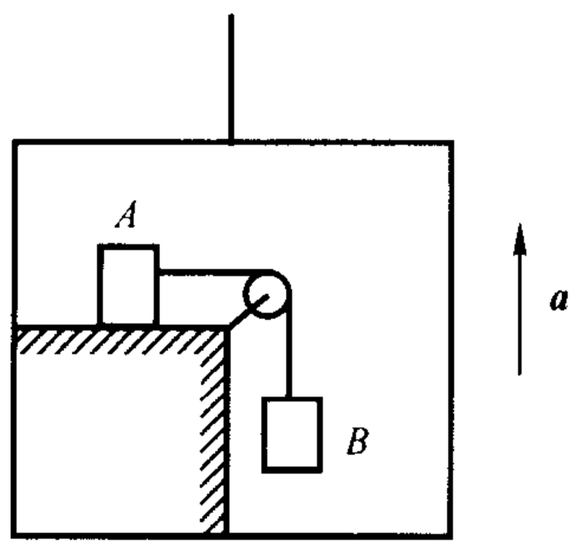
$$N_{12}=(m_2+m_3)a=\frac{(m_2+m_3)F}{m_1+m_2+m_3}=84\text{N}, \quad N_{23}=m_3a=\frac{m_3F}{m_1+m_2+m_3}=56\text{N}$$

(2)若 F 水平向左作用在 m_3 上,解题分析与上述类似,可得

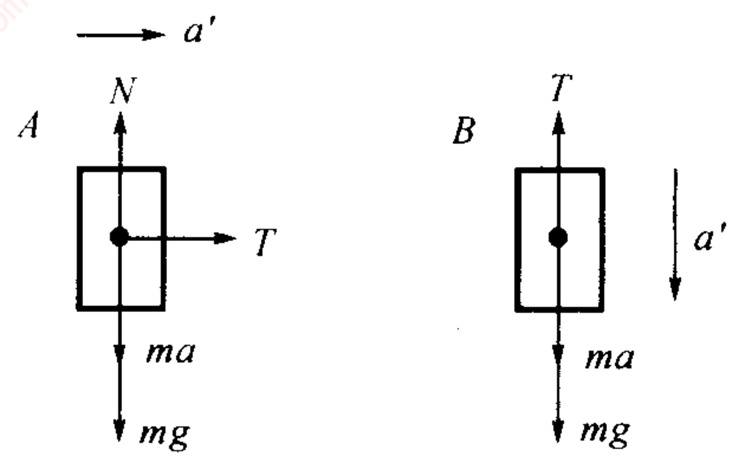
$$a'=a$$

$$N_{12}'=m_1a'=14\text{N}, \quad N_{23}'=(m_1+m_2)a'=42\text{N}$$

3-12 如图所示,升降机中水平桌面上有质量为 m 的物体 A,它以细绳与质量也为 m 的物体 B 相连。当升降机以加速度 $a=g/2$ 上升时,若略去各种摩擦,机内的人和地面上的人观测到 A 和 B 的加速度各是多少?



习题 3-12 图



解 3-12 图

解 取升降机为参考系

$$N-ma-mg=0 \tag{1}$$

$$T=ma' \tag{2}$$

$$mg+ma-T=ma' \tag{3}$$

联立(1)、(2)、(3)式得

$$a'=\frac{m(g+a)}{2m}=\frac{3}{4}g$$

所以机内的人观测到

$$\boldsymbol{a}_A'=\frac{3}{4}g\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{a}_B'=-\frac{3}{4}g\boldsymbol{j}$$

地面的人观测到

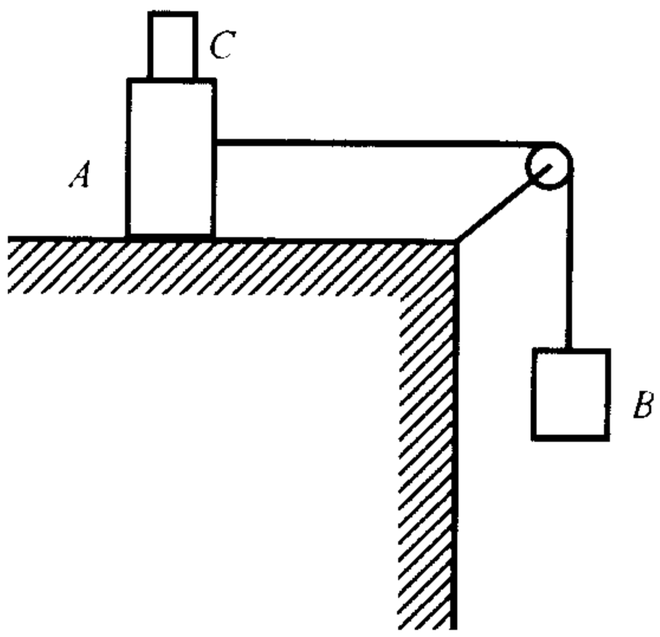
$$\boldsymbol{a}_A=\frac{3}{4}g\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}g\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{a}_B=-\frac{1}{4}g\boldsymbol{j}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

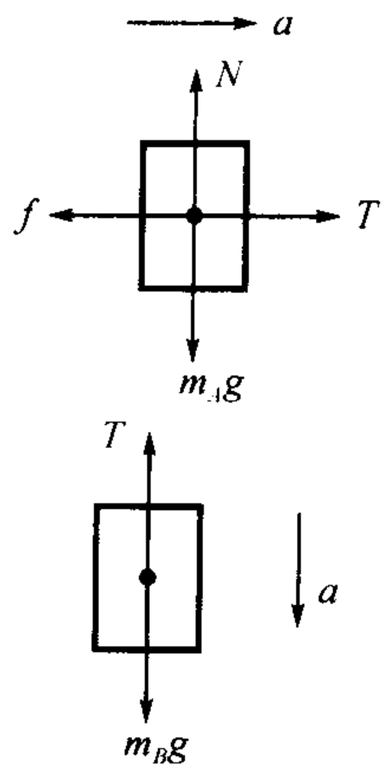
3-13 如图所示，物体 A 的质量为 4.4kg，物体 B 为 2.6kg；物体 A 与桌面间静摩擦因数为 0.18，动摩擦因数为 0.15。求：

(1)至少要在物体 A 上放置质量多大的物体 C 才能使 A 不滑动？

(2)如果突然从 A 上拿起物体 C，则物体 A 的加速度是多少？



习题 3-13 图



解 3-13 图

解 由已知，$\mu_s=0.18$，$\mu_k=0.15$，$m_A=4.4\text{kg}$，$m_B=2.6\text{kg}$。

(1)A 不滑动，整个系统保持静止，临界情况为

$$(m_A+m_C)g\mu_s=m_Bg,\quad m_C=\frac{m_B}{\mu_s}-m_A=10\text{kg}$$

(2)拿起 C 后，受力情况如图所示

$$T-f=m_Aa \tag{1}$$

$$N-m_Ag=0 \tag{2}$$

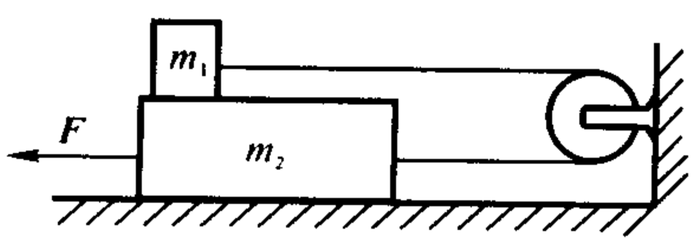
$$f=\mu_kN \tag{3}$$

$$m_Bg-T=m_Ba \tag{4}$$

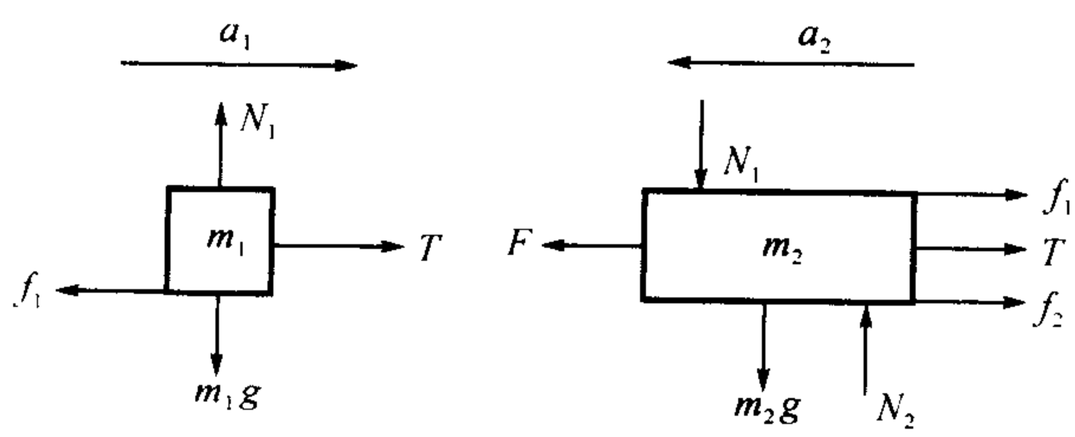
联立(1)、(2)、(3)、(4)式得

$$a=\frac{m_B-\mu_km_A}{m_A+m_B}g=2.72\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

3-14 如图所示，$m_1=1.0\text{kg}$，$m_2=5.0\text{kg}$，m_1 与 m_2 之间的摩擦因数 $\mu_1=0.10$，m_2 与地面之间的摩擦因数 $\mu_2=0.20$。m_1 与 m_2 用一跨过滑轮的轻绳相连，滑轮质量忽略不计。今用大小为 $F=19.6\text{N}$ 的力来拉 m_2，试求 m_1 及 m_2 运动时的加速度，并求绳子的张力。



习题 3-14 图



解 3-14 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 研究对象为 m_1 和 m_2，画隔离体图并分析力。由题意知 $a_1=a_2=a$，列方程式

$$T-f_1=m_1a \tag{1}$$

$$f_1=\mu_1N_1=\mu_1m_1g \tag{2}$$

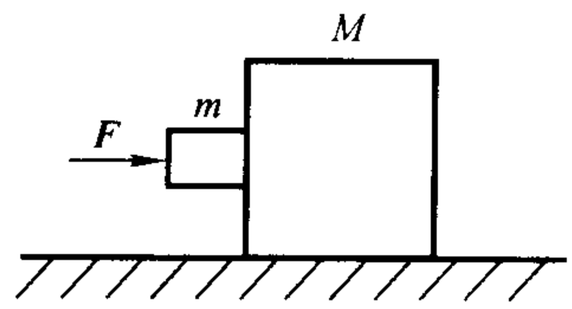
$$F-T-f_1-f_2=m_2a \tag{3}$$

$$N_2=N_1+m_2g=(m_1+m_2)g \tag{4}$$

$$f_2=\mu_2N_2=\mu_2(m_1+m_2)g \tag{5}$$

联立(1)～(5)式解得

$$a_1=a_2=a=0.98\text{m}\cdot\text{s}^{-2},\qquad T=1.96\text{N}$$



习题 3-15 图

3-15 如图所示，有两个可以自由移动的物体：$m=16\text{kg}$，$M=88\text{kg}$；两物体间的静摩擦因数 $\mu_s=0.38$，而 M 与地面间无摩擦。求要使 m 能紧贴着 M 运动的最小水平力 F。

解 要使 m 紧贴 M 运动，即两物体之间无相对滑动，则

$$F-N=ma \tag{1}$$

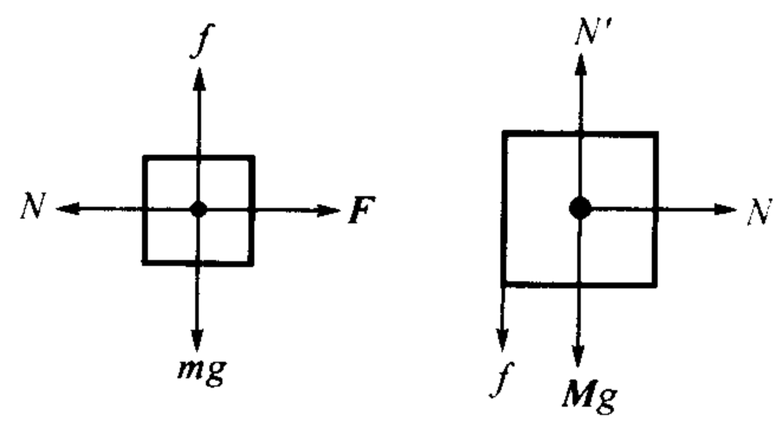
$$f-mg=0 \tag{2}$$

$$N=Ma \tag{3}$$

$$N'-Mg-f=0 \tag{4}$$

且

$$f\leqslant\mu_sN \tag{5}$$



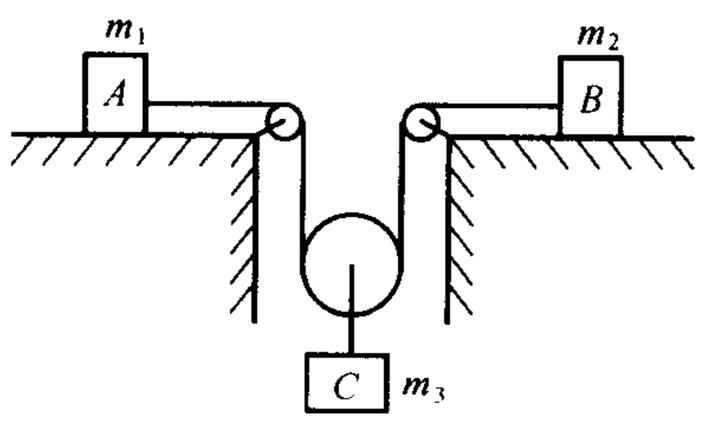
解 3-15 图

联立各式得

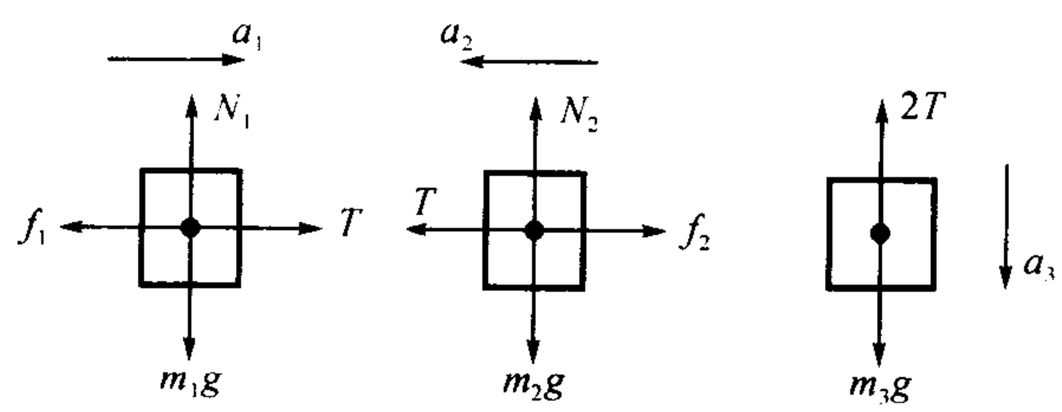
$$F\geqslant\frac{M+m}{M}\cdot\frac{mg}{\mu_s}=4.88\times10^2\text{N}$$

$$\therefore\quad F_{\min}=4.88\times10^2\text{N}$$

3-16 如图所示，物体 A,B,C 的质量各为 m_1,m_2,m_3，且有 $m_3>m_2>m_1$。若物体 A,B 与桌面的滑动摩擦因数均为 μ，求三物体的加速度及绳内的张力（不计绳和滑轮的质量及轴承摩擦，绳不可伸长）。



习题 3-16 图



解 3-16 图

解 设三物体的加速度分别为 a_1,a_2,a_3，绳子的张力为 T，则有

$$N_1-m_1g=0 \tag{1}$$

$$T-f_1=m_1a_1 \tag{2}$$

$$f_1=\mu N_1 \tag{3}$$

$$N_2-m_2g=0 \tag{4}$$

$$T-f_2=m_2a_2 \tag{5}$$

$$f_2=\mu N_2 \tag{6}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$m_3 g - 2T = m_3 a_3 \tag{7}$$

由连接关系又有

$$a_1 + a_2 = 2a_3 \tag{8}$$

联立以上各式可解得

$$T = \frac{2m_1 m_2 m_3 (1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3 + 4m_1 m_2} g, \quad a_1 = \left[\frac{2m_2 m_3 (1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3 + 4m_1 m_2} - \mu\right] g$$

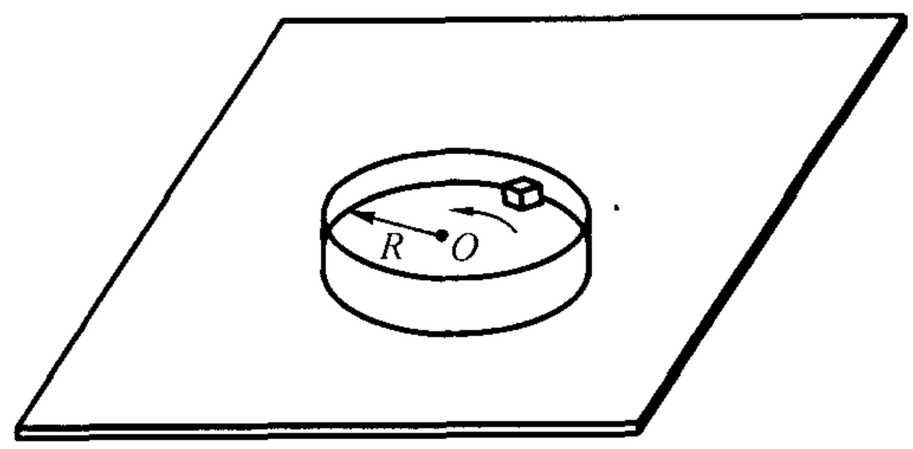
$$a_2 = \left[\frac{2m_1 m_3 (1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3 + 4m_1 m_2} - \mu\right] g, \quad a_3 = \left[\frac{(m_1+m_2)m_3 (1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3 + 4m_1 m_2} - \mu\right] g$$

3-17 如图所示，一质量为 m 的木块在一光滑水平面上沿一半径为 R 的环内侧滑动。已知木块与环面间的摩擦因数为 μ，求下列各量作为 m, R, μ 和 v 的函数表达式：

(1)任意时刻作用在木块上的摩擦力；

(2)任意时刻木块的切向加速度；

(3)木块的速率 v 由初始 v_0 降为 $v_0/3$ 所经历的时间。



习题 3-17 图

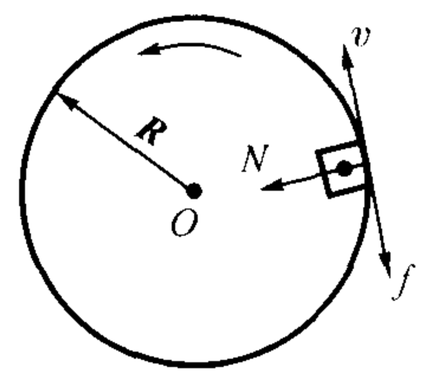
解 物体在水平面内的受力如图所示

(1)在法向

$$N = m\frac{v^2}{R} \tag{1}$$

切向摩擦力

$$f = \mu N = \mu m \frac{v^2}{R} \tag{2}$$



解 3-17 图

(2)在切向

$$-f = ma_\tau \tag{3}$$

$$\therefore \quad a_\tau = -\frac{f}{m} = -\mu\frac{v^2}{R}$$

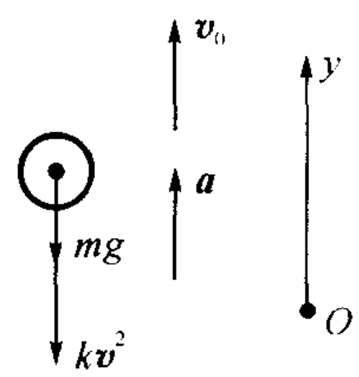
(3)

$$\because \quad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore \quad \int_{v_0}^{\frac{v_0}{3}} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t -\frac{\mu}{R}\mathrm{d}t, \quad \therefore \quad t = \frac{2R}{\mu v_0}$$

3-18 一物体以初速 v_0 从地面竖直上抛。物体质量为 m，所受空气阻力大小为 kv^2，k 为正值常量，求物体所能达到的最大高度。

解 以地面抛出处为坐标原点，并取 y 轴竖直向上，如图所示。



解 3-18 图

$$-mg - kv^2 = ma$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

$$\int_0^y -\mathrm{d}y = \int_{v_0}^{v} \frac{mv\mathrm{d}v}{mg + kv^2}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$y=\frac{m}{2k}\ln\frac{mg+kv_0^2}{mg+kv^2}$$

最高点处 $v=0$，故

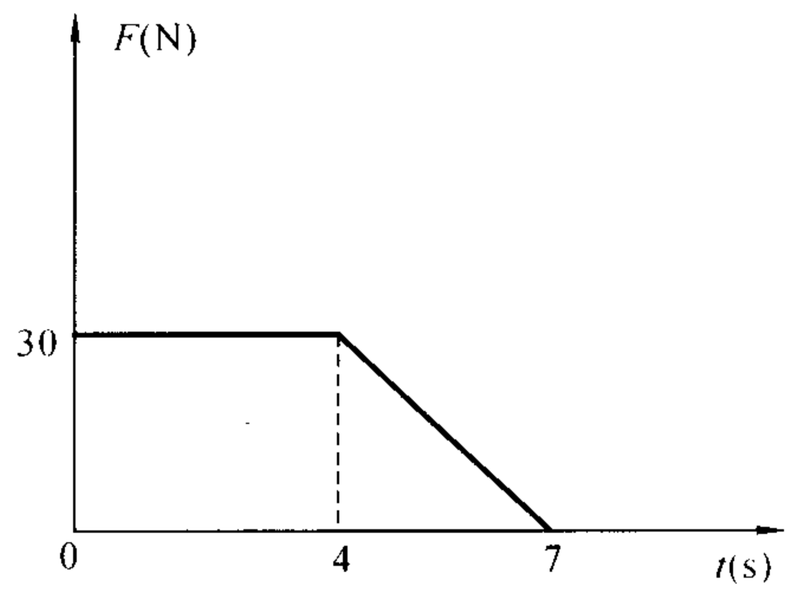
$$y_{max}=\frac{m}{2k}\ln\frac{mg+kv_0^2}{mg}$$

3-19 水平拉力 $\boldsymbol{F}$ 拉一静止在水平地面上、质量为 $m=10\text{kg}$ 的木箱。$\boldsymbol{F}$ 的大小随时间变化的关系曲线如图所示。从 $t=0$ 到 $t=4\text{s}$ 期间，$F=30\text{N}$；从 $t=4\text{s}$ 到 $t=7\text{s}$ 期间，F 由 30N 线性减小到零。木箱与地面间的摩擦因数为 $\mu=0.2$，求：

(1) $t=4\text{s}$ 时木箱的速度 v_1；

(2) $t=7\text{s}$ 时木箱的速度 v_2；

(3) $t=6\text{s}$ 时木箱的速度 v_3。



习题 3-19 图

解 (1)根据动量定理，在 $0\leqslant t\leqslant 4\text{s}$ 时

$$\int_0^{t_1}(F-\mu mg)\mathrm{d}t=mv_1-0$$

将 $t_1=4\text{s}$ 代入有

$$v_1=4.16\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2)在 $4\text{s}\leqslant t\leqslant 7\text{s}$ 时，由作用力曲线可知 $F=70-10t$

$$\int_{t_1}^{t_2}[(70-10t)-\mu mg]\mathrm{d}t=mv_2-mv_1$$

将 $t_1=4\text{s}$ 和 $t_2=7\text{s}$ 代入，有

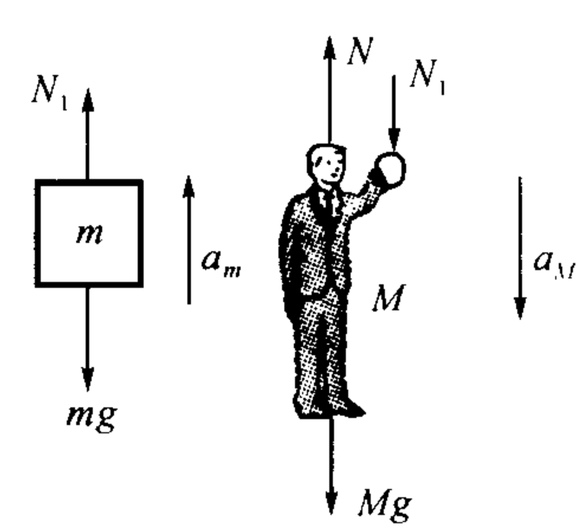
$$v_2=2.78\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(3)将 $t_1=4\text{s}$ 和 $t_2=6\text{s}$ 代入(2)中积分式，有

$$v_3=4.24\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3-20 当一电梯以 $g/3$ 的加速度下降时，电梯中质量为 M 的人开始以相对电梯为 $2g/3$ 的加速度举起一质量为 m 的物体。试分别以地面和电梯为参考系，求人对电梯底板的压力。

解 以地面为参考系，分析力时需画隔离图，如解 3-20(a)图所示。设电梯相对于地面的加速度为 $a_M=\frac{1}{3}g$，物体 m 相对于地面的加速度为



解 3-20(a)图

$$a_m=a_{m对M}-a_M=\frac{2}{3}g-\frac{1}{3}g=\frac{1}{3}g$$

$$N_1-mg=ma_m \qquad (1)$$

$$Mg+N_1+N=Ma_M \qquad (2)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

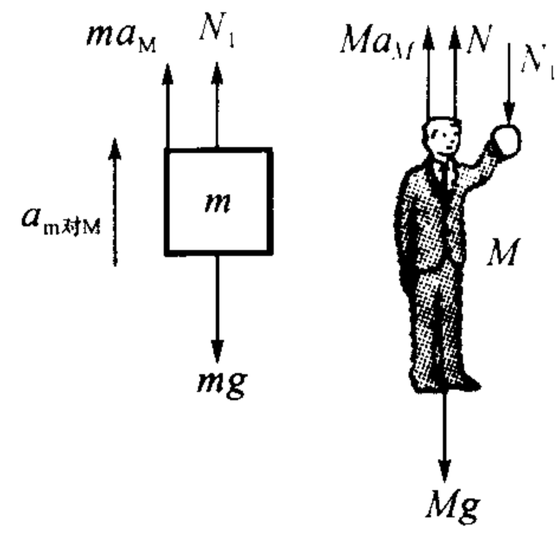
解之得

$$N=\frac{(2M+4m)}{3}g=\frac{2}{3}(M+2m)g。$$

以电梯为参考系，分析力时需加惯性力，如解 3-20(b)图所示。

$$Mg+N_1-N-Ma_M=0 \qquad (3)$$

$$N_1+ma_M-mg=ma_{m对M} \qquad (4)$$



解 3-20(b)图

解之得人对电梯底板的压力为

$$N=\frac{2}{3}(M+2m)g$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 4 章

能量·能量守恒定律

【基本概念和规律】

1. 能量

能量是一个守恒量。

(1)动能是运动状态的函数。质点动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$。

(2)势能是位置的函数。一维势能公式 $U_P(x)=\int_x^{x_0}F(x)\mathrm{d}x$，式中 x 为任意点 P 的位置，x_0 为参考点的位置。重力势能 $U_{P重}=mgh$，弹性势能 $U_{P弹}=\frac{1}{2}kx^2$。

2. 功

功的定义式 $\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=F\cos\theta\mathrm{d}s$。它是质点在力的作用下的有限运动，力做功为

$$W_{AB}=\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

3. 动能定理

合外力对质点做的功等于质点动能的增量，这就是质点的动能定理。

$$W_{AB}=E_{kB}-E_{kA}$$

4. 保守力

如果作功与路径无关，但与始末位置有关，或者说沿任意闭合回路做功为零，则称该力为保守力。保守力作的功可以用势能的变化来量度。

5. 机械能守恒定律

一个封闭保守系统的总机械能守恒，即

$$E=E_k+U=\text{常量}$$

对于任意系统，系统的外力和非保守内力所做的功等于系统机械能的增量，这就是系统的功能定理。

$$W_{外}+W_{非保守内力}=E_2-E_1$$

对于任意系统，机械能守恒的条件是系统的一切外力和非保守内力所作的总功等于零：

$$W_{外}+W_{非保守内力}=0$$

6. 一维势能曲线

(1)力 F 指向势能减少的方向，大小正比于曲线的斜率。

$$F=-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$$

(2)物体只能在势能低于总机械能的范围内运动。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(3)势能曲线的极小值对应于稳定平衡点，极大值对应于不稳定平衡点。

【解题指导】

● 应用动能定理解题时，要对物体画隔离图进行受力分析，其物理意义是合外力作功等于物体动能的增量。用这种方法计算力学问题的优点是不管外力是否是变力，也不管物体中间运动状态的变化如何复杂，合外力对物体所作的功总是决定于物体动能的增量，而不必直接去求功。

● 在应用机械能守恒定律时，首先应注意其研究的对象是系统，机械能守恒的条件是 $W_{外}+W_{非保守内力}=0$，其次，计算时各个物体的运动速度必须相对于同一惯性系。

● 熟练掌握保守力和势能之间的互求关系，保守力所做的功等于势能增量的负值，即 $W_{保}=-\Delta U=U_{初}-U_{末}$

● 能量为标量，能量守恒方程式与前述动量守恒的矢量方程式不同。

【习题解答】

4-1 一质点在几个力同时作用下的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$(m)，其中有一恒力 $\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$(N)，问该力在此过程中做功多少？

解 因为 $\boldsymbol{F}$ 是恒力，所以

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}=(3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=3\times4+(-5)(-5)+9\times6=91(\mathrm{J})$$

4-2 一电梯空载时质量为 516kg，最大载客量为 20 人，并能在 18s 内从底层到达 26 层。假定乘客的平均质量为 71kg，两楼层间的距离为 3.5m，那么该电梯马达的最小功率应为多少？(设电梯上升时所有的功均来自马达且电梯没有平衡重物，并设 g 取 $10\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)

解 电梯上升的最小作用力应等于电梯自身重力和最大载客量的重力之和

$$F=5160+20\times710=1.94\times10^4(\mathrm{N})$$

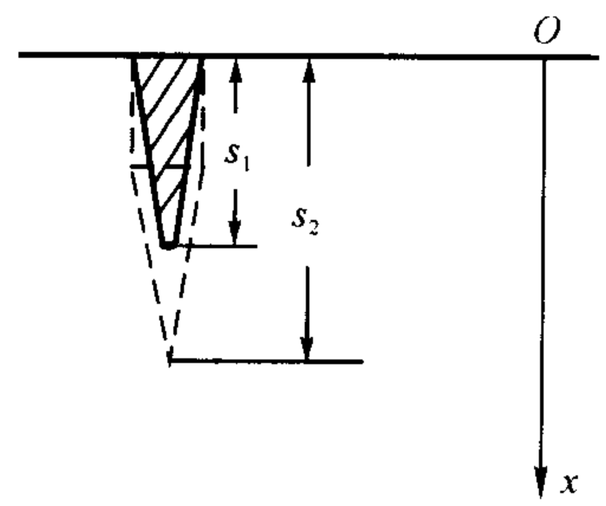
因此马达所做的最小功

$$W=Fs=1.94\times10^4\times3.5\times25=1.7\times10^6(\mathrm{J})$$

马达的最小功率

$$P=\frac{W}{t}=\frac{1.7\times10^6}{18}=9.4\times10^4(\mathrm{W})=94\mathrm{kW}$$

4-3 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比。在铁锤第一次击打时，能将铁钉击入木板内 1cm，问第二次击打能击入多深？(假设打击时铁锤没有回跳，且两次打击时的速度相同)



解 4-3 图

解 设铁锤质量为 M，铁钉的质量为 m，铁锤打击铁钉前的速度为 v_0，选向下为坐标正方向。因铁锤与铁钉打击瞬间动量守恒，即

$$Mv_0=(M+m)v$$

故铁钉向下的速度为

$$v=\frac{M}{M+m}v_0$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

由于铁钉的质量 $m \ll M$，故由上式可得铁钉向下的速度为 $v=v_0$，铁钉受到的阻力为 $f=-kx$，x 为铁钉击入木板的深度，故第一次击入 $s_1=10\text{m}$ 时，由动能定理得木板阻力所作的功

$$W_1=\int_0^{s_1}-kx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}ks_1^2=0-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{1}{2}ks_1^2=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{1}$$

第二次铁钉从深度 s_1 击入到深度 s_2，再由动能定理得

$$W_2=\int_{s_1}^{s_2}-kx\mathrm{d}x=0-\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{2}$$

由(1)、(2)式得

$$\frac{1}{2}ks_2^2-\frac{1}{2}ks_1^2=\frac{1}{2}ks_1^2,\quad s_2^2=2s_1^2,\quad s_2=\sqrt{2}s_1$$

故第二次击打时能击入深度为

$$\Delta s=s_2-s_1=(\sqrt{2}-1)s_1=(1.41-1)\times 1=0.41(\text{cm})$$

4-4 一质量 $m=10\text{kg}$ 的物体在合力 $F=3+4x(\text{SI})$ 的作用下，沿 x 轴运动。设物体开始时静止在坐标原点，求该物体经过 $x=3\text{m}$ 处时的速度。

解 由质点动能定理

$$W=\int F\mathrm{d}x=\int_0^3(3+4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv^2-0$$

得

$$v=2.3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

4-5 一质量 $m=0.3\text{kg}$ 的小球与一轻弹簧相连接；轻弹簧的另一端固定，放在光滑的水平面上。若小球运动过程中受到弹簧回复力 $F=-6x-4x^3(\text{SI})$，其中 x 为弹簧的伸长量。

(1)证明此回复力是保守力；

(2)以平衡位置为势能零点，写出势能函数；

(3)先将小球拉到 $x=0.2\text{m}$ 处，然后由静止放手，求小球运动到 $x=0.1\text{m}$ 处时的速度。

解 (1)因为 $F=-6x-4x^3$，则

$$\oint_l F\mathrm{d}x=0$$

故此回复力是保守力。

(2)
$$U(x)=\int_x^0(-6x-4x^3)\mathrm{d}x=3x^2+x^4$$

(3)由能量守恒定律得 $U_1=U_2+E_{k2}$，故

$$E_{k2}=\frac{1}{2}mv^2=U_1-U_2=(3x_1^2+x_1^4)-(3x_2^2+x_2^4)$$

解得

$$v=0.78\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

4-6 核子(如组成原子核的质子和中子)间相互作用的势能函数(Yukawa 势能)如下：

$$U(r)=-\frac{r_0}{r}U_0\mathrm{e}^{-r/r_0}$$

其中常量 $r_0=1.5\times10^{-15}\text{m}$，$U_0$ 约为 50MeV。

(1)试求相应的相互作用力表达式；

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)计算 r 为 $2r_0$，$4r_0$，$10r_0$ 时，相对于 $r=r_0$ 时力的比率。

解 (1)相应的保守力为

$$F(r)=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=-U_0\left(\frac{r_0}{r^2}+\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}$$

(2)当 $r=r_0$，$F_1=-\frac{2U_0}{r_0\mathrm{e}}$；　$r=2r_0$，$F_2=-\frac{3U_0}{4r_0\mathrm{e}^2}$；　$r=4r_0$，$F_4=-\frac{5U_0}{16r_0\mathrm{e}^4}$；　$r=10r_0$，$F_{10}=-\frac{11U_0}{100r_0\mathrm{e}^{10}}$；故有

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{3}{8\mathrm{e}}=0.14,\quad \frac{F_4}{F_1}=\frac{5}{32\mathrm{e}^3}=0.0078,\quad \frac{F_{10}}{F_1}=\frac{11}{200\mathrm{e}^9}=6.8\times10^{-6}$$

由此可见，核子间距由 r 增大到 10^{-14}m 时，$F(r)$ 快速接近于零，即这是一种短程力。

4-7 一竖直悬挂的弹簧(劲度系数为 k)下端挂一物体，平衡时弹簧已有一定伸长。若以物体的平衡位置为竖直 y 轴的原点，并作为弹性势能和重力势能的零点。试证：物体的位置坐标为 y 时，其弹性势能和重力势能之和为 $\frac{1}{2}ky^2$。

证明 取 y 轴竖直向下为正，在原点(即平衡位置)处弹簧已有伸长量 $y_0=\frac{mg}{k}$，m 为物体质量，物体在 y 处相对于原点的重力势能 $U_1=-mgy$，弹性势能为

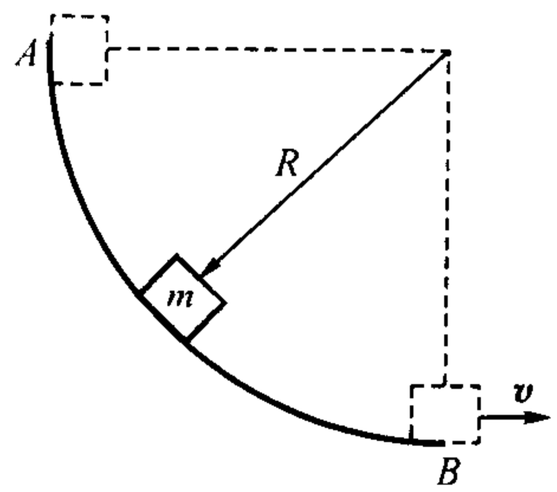
$$U_2=\int_y^0-k(y+y_0)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}ky^2+ky_0y=\frac{1}{2}ky^2+mgy$$

故

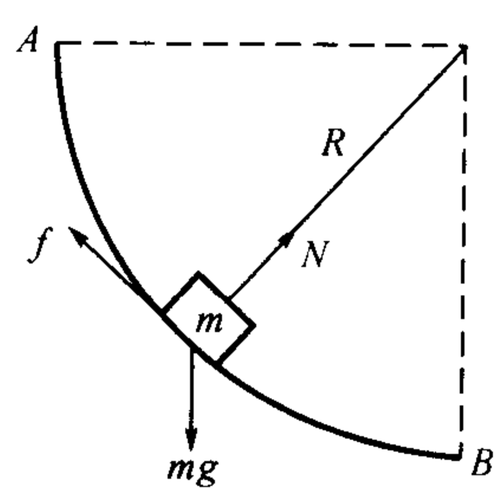
$$U=U_1+U_2=\frac{1}{2}ky^2$$

如果取 y 轴竖直向上为正，则 $y_0=-\frac{mg}{k}$，$U_1=mgy$，$U_2=\frac{1}{2}ky^2-mgy$，也得到 $U=\frac{1}{2}ky^2$。

4-8 如图所示，质量为 $m=2$kg 的物体从静止开始，沿着 1/4 圆周从 A 点滑到 B 点。在 B 点，物体的速度 $v=6\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。已知圆的半径 $R=4$m，求物体从 A 滑到 B 过程中摩擦力所做的功。



习题 4-8 图



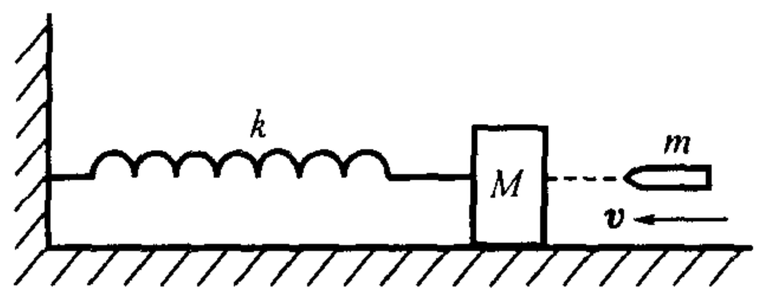
解 4-8 图

解 研究对象为系统(物体 m+地球)，画隔离图分析力，重力 mg 为保守内力，正压力 N 为外力，不作功，摩擦力 f 为外力。由功能定理得摩擦力 f 作功为

$$W_f=\frac{1}{2}mv^2-mgR=\frac{1}{2}\times2\times6^2-2\times9.8\times4=-42.4(\mathrm{J})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

4-9 测子弹速度的方法如图所示。已知子弹质量是 0.02kg，木块质量是 8.98kg，弹簧劲度系数为 $100\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$；子弹射入木块后，弹簧被压缩了 0.10m，求子弹的速度。设木块与平面间摩擦因数为 0.2。



习题 4-9 图

解 设子弹速度为 v，由动量守恒定律及功能定理

$$mv=(M+m)v_1 \tag{1}$$

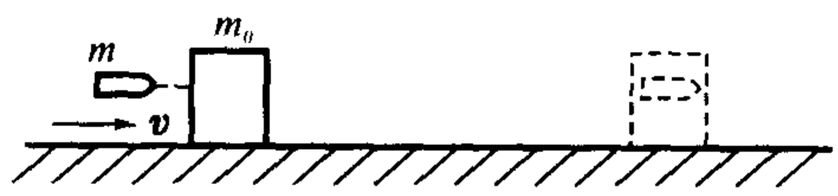
$$-fs=\frac{1}{2}ks^2-\frac{1}{2}(M+m)v_1^2 \tag{2}$$

$$f=\mu(M+m)g \tag{3}$$

联立三式可求得

$$v=319\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

4-10 在光滑水平面上放置一静止木块，木块质量为 m_0。一质量为 m 的子弹以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向射入木块，然后与木块一起运动，如图所示，试求：



习题 4-10 图

(1)木块施于子弹的力所做的功；

(2)子弹施于木块的力所做的功；

(3)碰撞过程中所损耗的机械能。

解 设子弹相对木块静止后一起运动的速度为 v'，则有

$$mv=(m_0+m)v'$$

$$v'=\frac{mv}{(m_0+m)}$$

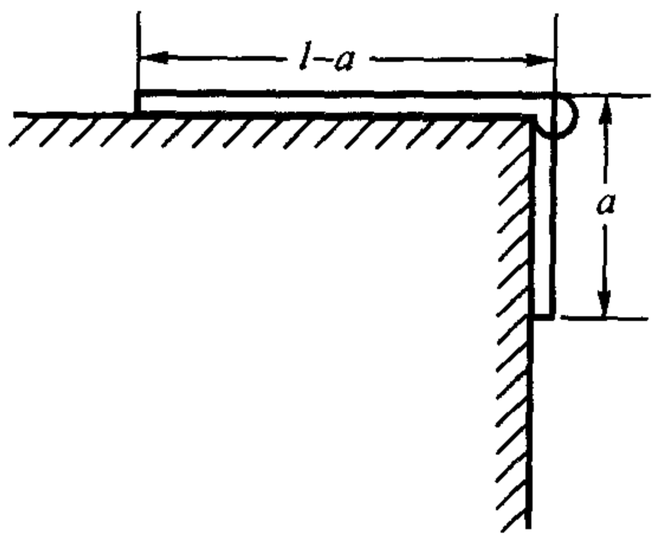
(1) $$W_f=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2=-\frac{1}{2}mv^2\left[\frac{m_0^2+2m_0m}{(m+m_0)^2}\right]$$

(2) $$W'_f=\frac{1}{2}m_0v'^2=\frac{1}{2}mv^2\left[\frac{m_0m}{(m_0+m)^2}\right]$$

(3)损失的机械能为

$$\Delta E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(m+m_0)v'^2=\frac{mm_0}{2(m+m_0)}v^2$$

4-11 如图所示，一质量为 m、长为 l 的均匀链条放在桌面上，桌面与链条间的摩擦因数为 μ。当链条通过桌面边缘处一个光滑铁环而下垂长度为 a 时，它由静止开始下滑，求链条刚好全部从桌面上经铁环滑下时的速度。



习题 4-11 图

解 由功能定理

$$W_f=(E_k+U)-(E_{k0}+U_0)$$

即

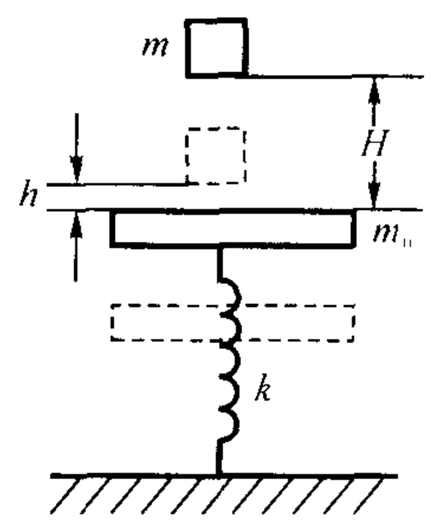
$$\int_a^l -\mu mg\frac{l-x}{l}\mathrm{d}x=\left(\frac{mv^2}{2}-mg\frac{l}{2}\right)-\left(0-\frac{ma}{l}g\cdot\frac{a}{2}\right)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

得

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2]}$$

4-12 质量为 m 的物体在离平板为 H 高处自由下落，打在平板上，弹起高度为 h。平板质量为 m_0，置于劲度系数为 k 的弹簧上，如图所示。求弹簧的最大压缩量。（设碰撞时间很短）



习题 4-12 图

解 本题可分三个阶段：第一阶段为 m 自由落体，

$$v=\sqrt{2gH} \tag{1}$$

第二阶段为 m 和 m_0 作弹性碰撞，

$$mv+0=-mv'+m_0v'' \tag{2}$$

其中 $v'=\sqrt{2gh}$，v''为平板 m_0 向下运动速度。第三阶段为平板 m_0 压缩弹簧的过程，

$$\frac{1}{2}m_0v''^2+m_0gx+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}k(x+x_0)^2 \tag{3}$$

其中 $x_0=\frac{m_0g}{k}$。化简以上三式得

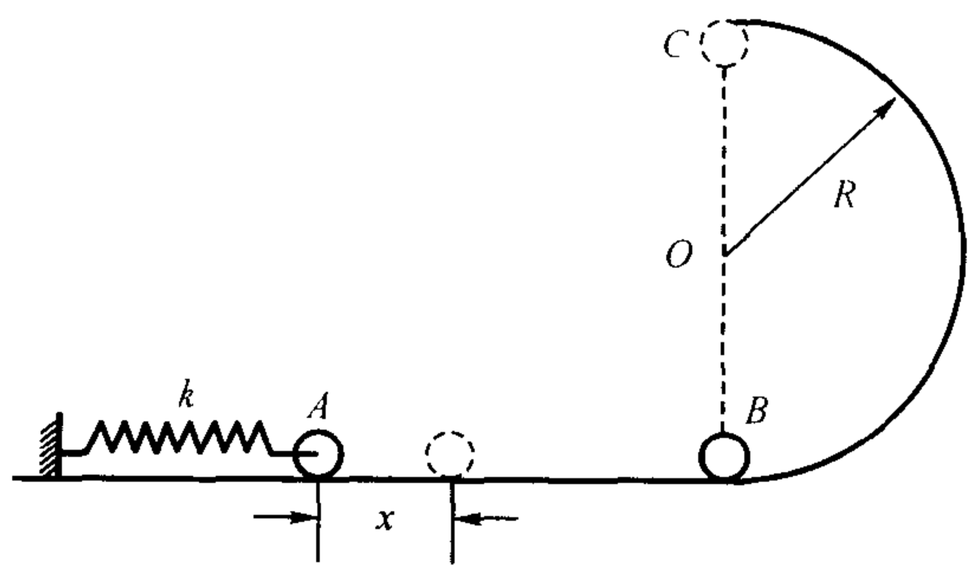
$$\frac{1}{2}m_0v''^2=\frac{1}{2}kx^2$$

$$x=\sqrt{\frac{2gm^2}{km_0}}(\sqrt{H}+\sqrt{h}) \tag{4}$$

弹簧的最大压缩量为

$$x_{\max}=x_0+x=\frac{m_0g}{k}+\sqrt{\frac{2m^2g}{km_0}}(\sqrt{H}+\sqrt{h})$$

4-13 如图所示，A 和 B 两球的质量均为 $m=0.1\text{kg}$。现用已压缩的轻弹簧将 A 球沿光滑水平面弹射出去，接着 A 球与静止的 B 球发生完全非弹性碰撞，然后沿光滑竖直圆形轨道运动。设弹簧的劲度系数 $k=196\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$，圆轨道半径 $R=0.1\text{m}$。试问弹簧至少要压缩多少后弹射 A 球，才能使两球碰撞后能沿着圆形轨道通过顶点 C？



习题 4-13 图

解 将整个物理过程分成几个阶段加以研究。

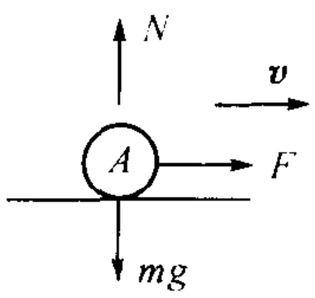
(1)轻弹簧弹射 A 球。研究对象为系统（A 球＋弹簧）。画隔离图分析力：重力 mg（保守内力）、正压力 N（外力，不作功）、弹性力 F（保守内力），显然该系统机械能守恒。设弹簧被压缩距离 x，A 球弹射速度为 v_0，则有

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)A 和 B 两球碰撞过程为完全非弹性碰撞。研究对象为系统(A 球+B 球),显然系统动量守恒,故有

$$mv_0=(m+m)v=2mv$$



解 4-13 图

(3)碰撞后,A 和 B 两球沿圆形轨道运动,研究对象为系统(A 球+B 球+地球)。同样,系统机械能守恒,故有

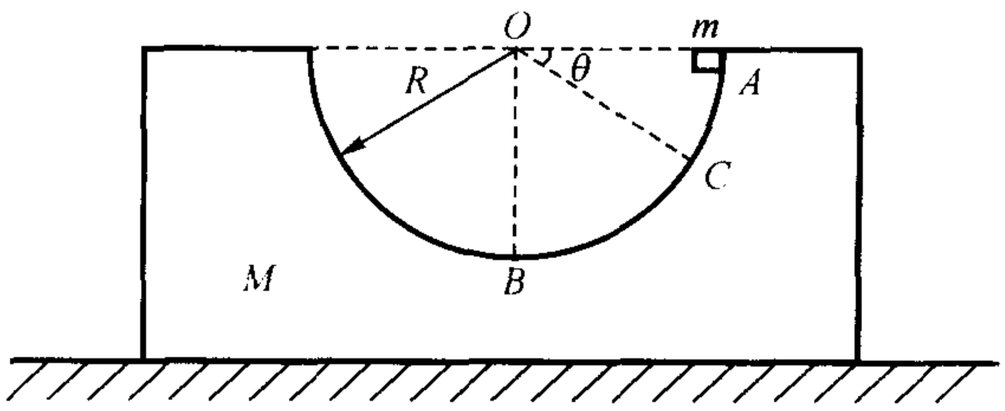
$$\frac{1}{2}\cdot 2mv^2\geqslant 2mg\cdot 2R+\frac{1}{2}2mv'^2$$

$$2mg=2m\frac{v'^2}{R}$$

联立以上四式得

$$x=2\sqrt{\frac{5mgR}{k}}=2\sqrt{\frac{5\times 0.1\times 9.8\times 0.1}{196}}=0.1(\mathrm{m})$$

4-14 质量为 m 的小物体沿半径为 R、质量为 M 的半圆形光滑槽从最高点滑下。槽放在光滑的水平桌面上。开始时槽和小物体都静止,如图所示。试求:



习题 4-14 图

(1)当小物体滑到槽中 C 点处(θ 角),小物体相对槽的速度$\boldsymbol{v}'$,槽相对于地面的速度$\boldsymbol{v}$;

(2)当小物体滑到槽最低点 B 处,槽相对地面移动的距离 S_1。

解 (1)m、M 组成的系统在水平方向上动量守恒

$$m(v'\sin\theta-v)-Mv=0$$

因机械能守恒,选 B 点为零势能点,则

$$\frac{1}{2}m(v'\sin\theta-v)^2+\frac{1}{2}m(v'\cos\theta)^2+\frac{1}{2}Mv^2=mgR\sin\theta$$

联立以上二式可解得

$$v'=\sqrt{\frac{(M+m)2gR\sin\theta}{(M+m)-m\sin^2\theta}},\quad v=\frac{m\sin\theta}{M+m}\sqrt{\frac{(M+m)2gR\sin\theta}{(M+m)-m\sin^2\theta}}$$

(2)设 m 对地面速度的水平分量为 v_x,则有

$$mv_x-Mv=0,\quad m\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}=0,\quad s_1+s_2=R$$

当 m 从 A 到 B 过程中,槽移动距离为

$$s_1=\frac{m}{M+m}R$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第5章

角动量·角动量守恒定律

【基本概念和规律】

1. 角动量

角动量是一个守恒量。

质点的角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$，质点系的角动量 $\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times m\boldsymbol{v}_i$。

2. 力矩

质点所受力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，质点系所受力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{外}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{i外}$。

3. 角动量定理

$$\boldsymbol{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

4. 角动量守恒定律

若 $\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}=0$，则 $\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=$ 常量。

【解题指导】

- 掌握质点角动量的定义式 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ 及物理意义。
- 掌握质点力矩的定义式 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 及物理意义。
- 角动量守恒定律的适用条件是 $\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}=0$。若 $\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}\neq 0$，则要考虑用角动量定理 $\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$ 解题。

【习题解答】

5-1 铁饼运动员将铁饼转动1.25圈后扔出，此时铁饼的速度达到 $v=25\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$。设转动过程中铁饼沿半径为 $R=1.0\mathrm{m}$ 的圆周运动并且均匀加速，把铁饼视为质点。求：

(1)铁饼离手时的角速度；

(2)转动过程中铁饼的角加速度；

(3)铁饼在运动员手中加速的时间。

解 (1)$v=R\omega$，　$\omega=\frac{v}{R}=\frac{25}{1}=25(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$

(2)因为 $\omega_0=0$，故得

$$\omega=\alpha t,\quad \varphi=\frac{1}{2}\alpha t^2$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

由以上两式消去 t 得

$$\alpha=\frac{\omega^2}{2\varphi}=\frac{(25)^2}{2\times1.25\times2\pi}=39.8(\mathrm{rad\cdot s^{-2}})\quad\therefore\quad t=\frac{\omega}{\alpha}=\frac{25}{39.8}=0.628(\mathrm{s})$$

5-2 一个质量为 m 的质点从 P 点由静止开始沿 y 轴自由下落，如图所示。以原点 O 为参考点，求：

(1)任意时刻作用在 m 上的力矩 $\boldsymbol{M}$；

(2)任意时刻 m 的角动量 $\boldsymbol{L}$；

(3)证明本题中 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$。

解 (1)因 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，

$$M=rF\sin\theta=mgb$$

是一个常量，方向垂直纸面向里。

(2)因 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}$，

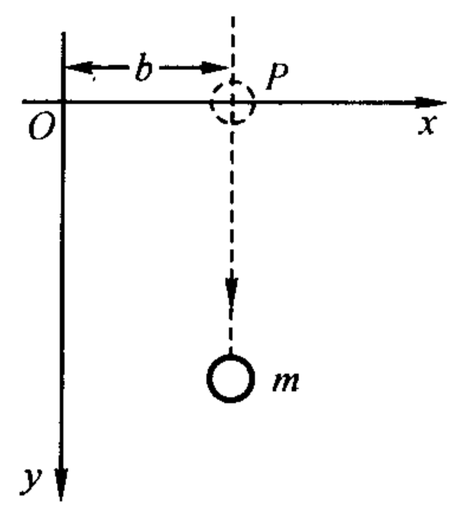
$$L=bmgt=mgbt$$

方向垂直纸面向里。

(3)因为

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mgbt)=mgb$$

再由矢量法则可知 $\boldsymbol{M}$ 与 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$ 同方向，所以 $\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$ 恒成立。

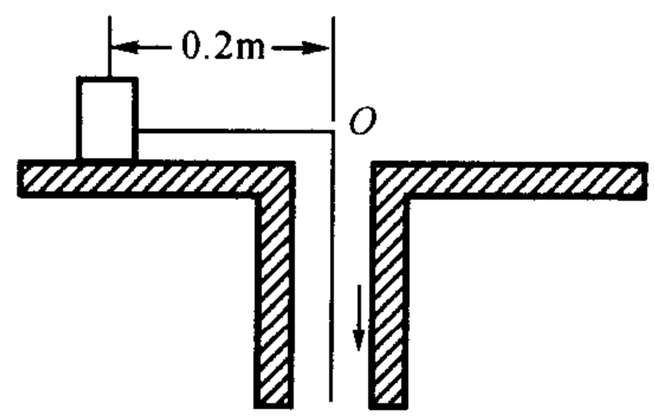


习题 5-2 图

5-3 如图所示，质量为 0.05kg 的物体置于一无摩擦的水平桌面上。有一绳连接此物体并穿过桌面中心的小孔；该物体原以 $3\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ 的角速度在距孔 0.2m 的圆周上转动。现将绳从小孔往下拉，使物体的转动半径减为 0.1m（该物体可视为质点），求：

(1)拉下后物体的角速度（圆周运动中 $v=\omega r$，ω 为角速度）；

(2)拉力作的功。



习题 5-3 图

解 $m=0.05\mathrm{kg}$，$\omega_1=3\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，$r_1=0.2\mathrm{m}$，$r_2=0.1\mathrm{m}$。

(1)下拉过程中对 O 点的力矩为零。相对 O 点角动量守恒，即

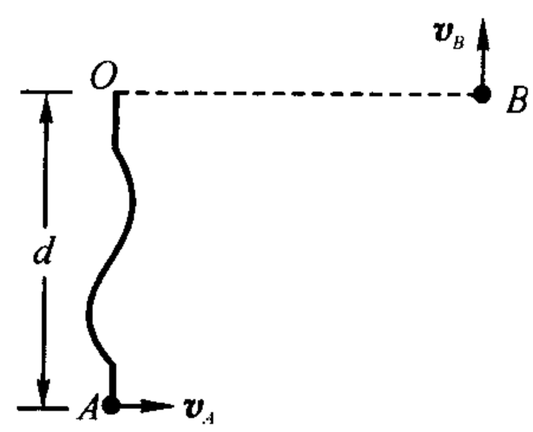
$$m\omega_1r_1^2=m\omega_2r_2^2$$

$$\therefore\quad \omega_2=12\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

(2)拉力作的功为

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m\omega_2^2r_2^2-\frac{1}{2}m\omega_1^2r_1^2=2.7\times10^{-2}\mathrm{J}$$

5-4 如图所示，在光滑的水平面上有一长 $L=2\mathrm{m}$ 的绳子，一端固定于 O 点，另一端系一质量 $m=0.5\mathrm{kg}$ 的物体。开始时，物体位于位置 A 处，OA 间的距离 $d=0.5\mathrm{m}$，绳子处于松弛状态。现在使物体以与 OA 相垂直的初速度 $v_A=4\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 向右运动，到达位置 B 时物体速度的方向与绳垂直。试求物体在 B 处的角动量和速度。



习题 5-4 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 因为合外力矩为零，故物体角动量守恒，

$$L_B = mv_B L = mv_A d = 0.5\times 4\times 0.5 = 1(\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}})$$

$$v_B = \frac{L_B}{mL} = \frac{1}{0.5\times 2} = 1(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

5-5 已知地球质量 $m_1 = 5.98\times 10^{24}\mathrm{kg}$，它离太阳的平均距离约为 $r_1 = 1.50\times 10^{11}\mathrm{m}$，绕太阳的公转周期约为 $T_1 = 3.16\times 10^7\mathrm{s}$；电子的质量 $m_2 = 9.11\times 10^{-31}\mathrm{kg}$，它到氢原子核的平均距离 $r_2 = 5.29\times 10^{-11}\mathrm{m}$，其轨道运动的角速度 $\omega_2 = 4.13\times 10^{16}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$。假设它们的运动轨道均为圆形，试计算地球绕太阳运动的角动量，以及经典图像中电子绕氢原子核运动的角动量。

解 由角动量定义 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$。因两者均作圆周运动，地球绕太阳运动的角动量为

$$L_{地} = m_1 v_1 r_1 = m_1\omega_1 r_1^2 = m_1 r_1^2\frac{2\pi}{T_1} = 2.68\times 10^{40}\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

电子绕氢原子核运动的角动量为

$$L_{电} = m_2 v_2 r_2 = m_2\omega_2 r_2^2 = 1.05\times 10^{-34}\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

5-6 地球在远日点时，离太阳的距离为 $r_{max} = 1.52\times 10^{11}\mathrm{m}$，运动速率 $v_1 = 2.93\times 10^4\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。试问：半年之后，当地球处在距离太阳为 $r_{min} = 1.47\times 10^{11}\mathrm{m}$ 的近日点时，运动速率 v_2 为多大？上述两种情况下地球绕太阳运动的角速度 ω_1 和 ω_2 多大？

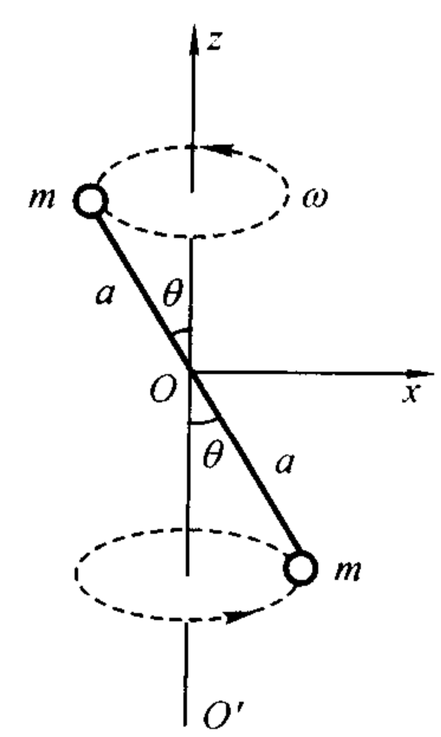
解 将地球、太阳视为一个系统，它们之间的相互作用力为有心力，此系统中角动量守恒。设地球质量为 m，则

$$mv_1 r_{max} = mv_2 r_{min},\quad v_2 = \frac{v_1 r_{max}}{r_{min}} = 3.03\times 10^4\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

相应的角速度为

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_{max}} = 1.93\times 10^{-7}\mathrm{rad\cdot s^{-1}},\quad \omega_2 = \frac{v_2}{r_{min}} = 2.06\times 10^{-7}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

5-7 两个质量均为 m 的质点用一根长为 $2a$、质量可以忽略不计的轻杆相连，构成一个简单的质点组。如图所示，两质点绕固定轴 $O'z$ 以匀角速度 ω 转动，轴线通过杆的中点 O 与杆的夹角为 θ，求质点组对 O 点的角动量的大小及方向。



习题 5-7 图

解 因杆的质量不计，只需计算两质点对 O 点的角动量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_1\times m\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2\times m\boldsymbol{v}_2$$

$$\boldsymbol{L} = 2\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

$$\therefore\quad L = 2ma^2\omega\sin\theta$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 的方向由 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 来决定，本题中 $\boldsymbol{L}$ 位于 xOz 平面内与 z 轴夹角为 $(\frac{\pi}{2}-\theta)$。

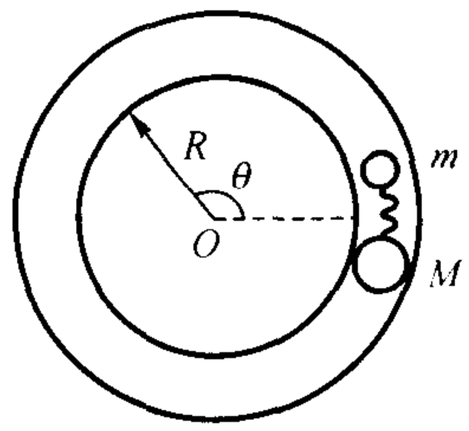
5-8 在一固定半径为 R 的水平光滑圆形沟槽内，放有两个质量分别为 m 和 M 的小球。一轻弹簧被压缩在两球间（未与球连接）。用线将两球缚紧，并使之静止，如图所示。

(1)将线剪断，则两球被弹开后沿相反方向在沟槽内运动，问此后 m 转过多大角度就要

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

与 M 相碰？

(2)设原来储存在被压缩弹簧中的势能为 U_0，问线断后两球经过多长时间才会相撞？



习题 5-8 图

解 (1)线剪断后，两球运动过程中对 O 点的角动量始终守恒

$$MR^2\omega_M - mR^2\omega_m = 0 \tag{1}$$

由上式可得

$$M\omega_M = m\omega_m \tag{2}$$

设两者再相遇时，M 转过了 θ_M 角，m 转过了 θ_m 角，则有

$$\theta_M + \theta_m = 2\pi \tag{3}$$

由于运动时间相等

$$\frac{\theta_M}{\omega_M} = \frac{\theta_m}{\omega_m} = \Delta t \tag{4}$$

联立以上各式可得

$$\theta_m = \frac{2\pi M}{M+m}$$

(2)由机械能守恒

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_M^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega_m^2 = U_0 \tag{5}$$

再用(1)小题中关系可解得

$$\omega_m = \left[\frac{2MU_0}{m(M+m)R^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta t = \frac{\theta_m}{\omega_m} = \left[\frac{2\pi^2 mMR^2}{(M+m)U_0}\right]^{\frac{1}{2}}$$

5-9 我国第一颗人造卫星绕地球沿椭圆轨道运动时，地球中心在该椭圆的一个焦点上。已知地球的平均半径 $R=6\ 378\text{km}$，人造卫星距离地面的最近距离 $l_1=439\text{km}$，最远距离 $l_2=2\ 384\text{km}$。若人造卫星在近地点的速度 $v_1=8.10\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$，试求其在远地点的速度 v_2。

解 设卫星质量为 m，卫星运动时仅受到地球对它的引力，此力为有心力，故卫星角动量守恒

$$mv_1(R+l_1) = mv_2(R+l_2), \quad v_2 = \frac{R+l_1}{R+l_2}v_1 = 6.30\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$$

5-10 一轻绳跨过轻定滑轮，一猴子抓住绳的一端，滑轮另一侧的绳子则挂一质量与猴子相等的重物。若猴子从静止开始以速度 v 相对绳子向上爬，求重物上升的速度。

解 由题意可知，猴子和重物对定滑轮轴角动量守恒。设重物上升的速度为 u(相对地)，则有

$$muR - m(v-u)R = 0$$

$$\therefore \quad u = \frac{v}{2}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第6章

刚体力学

【基本概念和规律】

1. 描述刚体定轴转动的四个物理量为：

角位置 $\varphi(t)$，角位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$，角速度 $\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$，角加速度 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$。

2. 线量和角量的关系

$$v=R\omega,\qquad a_n=R\omega^2,\qquad a_\tau=r\alpha$$

3. 刚体作匀角加速转动的运动学公式

$$\omega=\omega_0+\alpha t,\qquad \varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2,\qquad \omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\varphi-\varphi_0)$$

4. 刚体的质心运动

(1)质心是描述刚体整体运动的一个特殊点。在直角坐标系中，质点系的质心坐标为

$$x_c=\frac{\sum_i m_i x_i}{m},\quad y_c=\frac{\sum_i m_i y_i}{m},\quad z_c=\frac{\sum_i m_i z_i}{m}$$

刚体的质心坐标为

$$x_c=\frac{\int x\mathrm{d}m}{m},\quad y_c=\frac{\int y\mathrm{d}m}{m},\quad z_c=\frac{\int z\mathrm{d}m}{m}$$

(2)质心运动定理 $\boldsymbol{F}_{外}=m\boldsymbol{a}_c$，式中 $\boldsymbol{F}_{外}$ 为作用在刚体上的合外力，$\boldsymbol{a}_c$ 为质心加速度。

5. 刚体的定轴转动

(1)刚体相对于定轴的角动量 $\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$。

(2)作用于刚体的力相对于定轴的力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$。式中 $\boldsymbol{r}$ 垂直于定轴，力 $\boldsymbol{F}$ 在转动平面内，力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向沿着 z 轴。

(3)刚体的定轴转动定律 $\boldsymbol{M}_{外}=I\boldsymbol{\alpha}$。

6. 刚体的转动惯量

(1)定义式 $I=\sum_i m_i r_i^2$，$I=\int r^2\mathrm{d}m$。

(2)平行轴定理：$I=I_c+md^2$，式中 d 为两平行轴之间的垂直距离。

7. 刚体的角动量定理

$$\int_0^t \boldsymbol{M}_{外}\,\mathrm{d}t=I\boldsymbol{\omega}-I\boldsymbol{\omega}_0$$

8. 刚体的角动量守恒定律

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

当刚体(系统)所受外力相对于定轴的合外力矩为零,即 $\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}=0$ 时,刚体相对于该轴的总角动量守恒,即 $\sum I\omega=$ 常量。

9. 刚体的机械能守恒定律

当只有保守力的力矩作功时,刚体的总机械能守恒,即

$$\frac{1}{2}I\omega^2+mgh_c=\text{常量} \qquad h_c \text{ 为刚体质心位置的高度}$$

10. 刚体绕定轴转动的动能定理

$$W_{外}=\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2$$

11. 刚体的平面平行运动

(1)动力学方程为质心的平动:$\boldsymbol{F}_{外}=m\boldsymbol{a}_c$ 和绕质心的转动:$\boldsymbol{M}_{c外}=I_c\boldsymbol{\alpha}$。

(2)机械能:动能 $E_k=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv_c^2$;重力势能 $U=mgh_c$。

【解题指导】

● 刚体定轴转动的运动学问题可分为两类:

(1)由定轴转动的运动方程通过求导得到角速度、角加速度,即 $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$,$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$。

(2) 由角速度、角加速度通过积分得到定轴转动的运动方程,即 $\varphi=\int\omega dt$,$\omega=\int\alpha dt$。

● 解决刚体定轴转动问题的关键是画隔离图分析力,找力矩,正确应用定轴转动定律。在应用该定律时,应注意合外力矩 $\boldsymbol{M}_{外}$、转动惯量 I 及角加速度 α 都是相对于同一轴而言的。

● 求解定轴转动的刚体和物体(质点)联动问题时应注意:

(1)对转动的刚体,在力的分析基础上求出对定轴的合外力矩,然后写出刚体的定轴转动方程。

(2)对作平动的物体,应分别进行力的分析后列出各个物体的牛顿方程。

(3)根据角量和线量的关系,找出平动与转动之间的关系,即

$$a=r\alpha, \qquad v=R\omega$$

● 遇到求解一端固定、一端自由的约束刚体与物体(质点)碰撞的问题时,因为根据动量守恒和角动量守恒的条件,碰撞时系统动量不守恒,故应该用角动量守恒去解决问题。这一点特别要注意。

● 在包含有刚体定轴转动的系统中,要正确应用机械能守恒定律和角动量守恒定律,正确计算刚体的转动动能、重力势能及刚体对固定轴的角动量。

● 刚体平面平行运动的问题可分解为质心的平动和绕质心的转动来求解。二者的刚体动力学方程分别为:

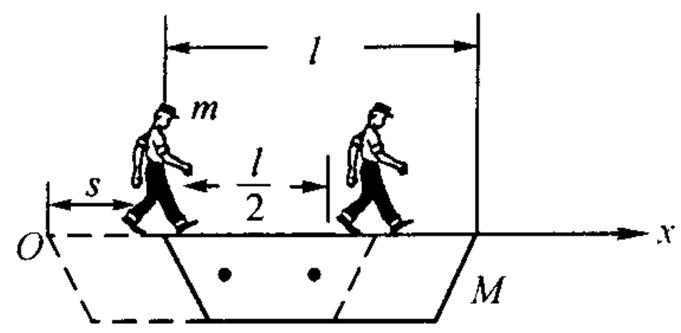
质心的平动: $\boldsymbol{F}_{外}=m\boldsymbol{a}_c$; 绕质心的转动: $\boldsymbol{M}_{c外}=I_c\boldsymbol{\alpha}$。

● 刚体定轴转动的主要特征是有相同的角量变化,刚体转动中的角量与质点平动中的线量具有一一对应的关系。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【习题解答】

6-1 一小船质量为 100kg，船头到船尾的长度为 3.6m，现有一质量为 50kg 的人从船尾走到船头时，不计水的阻力，问船在水中移动了多少距离？（提示：用系统质心方法求解）



解 6-1 图

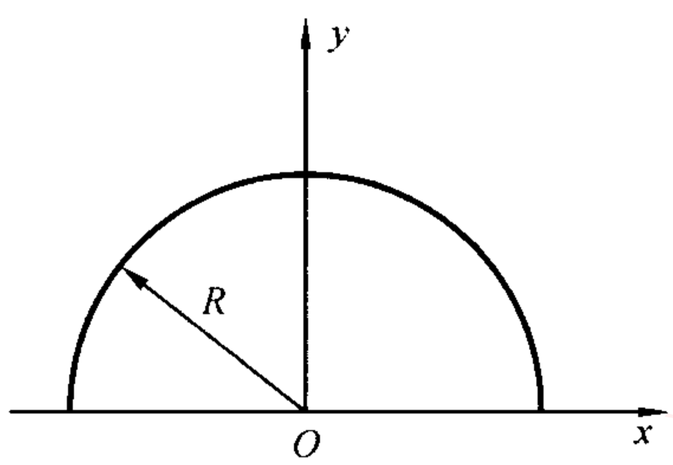
解 设人的质量为 m，船的质量为 M，船长为 l，船向后移动距离为 s。因为该系统（人＋船）在运动中水平方向不受外力作用，故系统质心 x_c 位置不变。以船移动后的船尾位置为坐标原点 O，则有

$$x_c=\frac{ms+M\left(\frac{l}{2}+s\right)}{m+M}=\frac{ml+M\frac{l}{2}}{m+M}$$

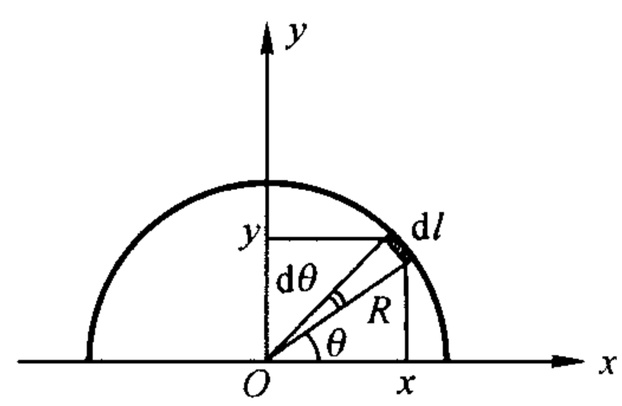
解之得船向后移动距离为

$$s=\frac{ml}{m+M}=\frac{50\times 3.6}{50+100}=1.2(\mathrm{m})$$

6-2 如图所示，一质量均匀分布的细杆弯成半圆形，其半径为 R，求其质心的位置。



习题 6-2 图



解 6-2 图

解 设细杆的质量线密度为 λ，杆的质量 $m=\pi\lambda R$，任取一质量元 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l=\lambda R\mathrm{d}\theta$，由质心坐标公式

$$x_c=\frac{\int x\mathrm{d}m}{m}=\frac{\int_0^{\pi}R\cos\theta\lambda R\mathrm{d}\theta}{m}=0$$

$$y_c=\frac{\int y\mathrm{d}m}{m}=\frac{\int_0^{\pi}R^2\lambda\sin\theta\mathrm{d}\theta}{m}=\frac{2R^2\lambda}{\pi R\lambda}=\frac{2R}{\pi}$$

6-3 如图所示，四个质点牢固地安装在很轻的圆形框架上，求：

(1)此系统对通过圆心并垂直纸面轴的转动惯量；

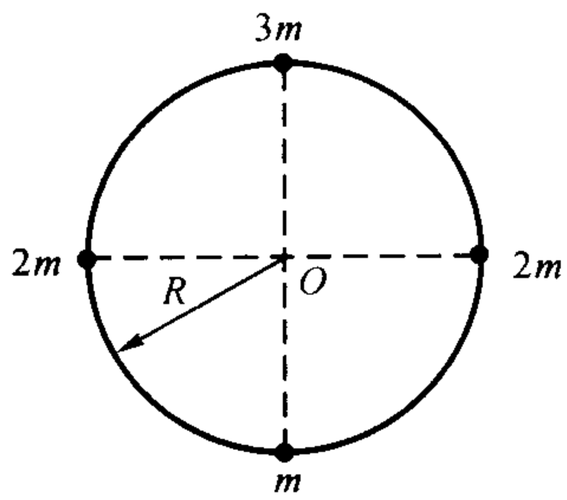
(2)绕通过此系统质心并垂直纸面轴的转动惯量。

解 (1)$I_0=\sum m_ir_i^2=2mR^2+2mR^2+3mR^2+mR^2=8mR^2$

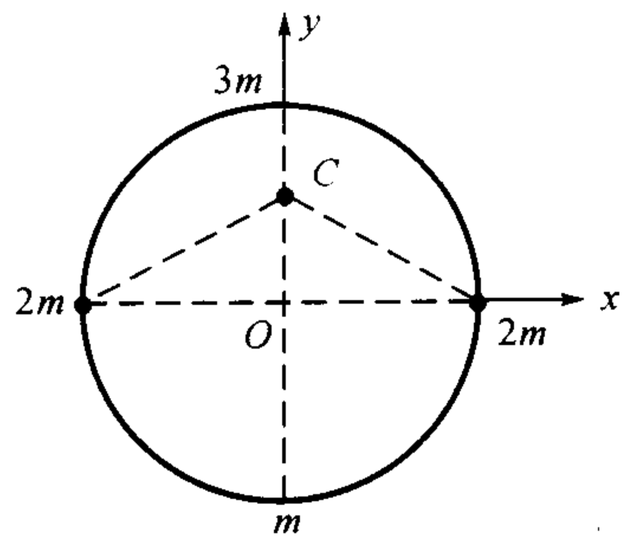
(2)取圆心 O 为坐标原点，建立如图所示的坐标系，由于对称性

$$x_c=\frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}=0,\quad y_c=\frac{\sum_i m_iy_i}{\sum_i m_i}=\frac{3mR-mR}{8m}=\frac{1}{4}R$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



习题 6-3 图



解 6-3 图

根据平行轴定理有

$$I_c = I_0 - 8my_c^2 = 7.5mR^2$$

6-4 一电机在达到 20rev·s^{-1}的转速时电源关闭。若令电机仅在摩擦力矩的作用下减速，需 240s 才停下来；若加上阻滞力矩 500N·m，则在 40s 内即可停止。试计算电机的转动惯量。

解 设电机的转动惯量为 I，摩擦力矩为 M_f，则

$$\omega_0 = 2\pi n_0 = 40\pi(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}),\quad \alpha_1 = \frac{M_f}{I},\quad \alpha_2 = \frac{M_f + M_{f1}}{I}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha_1 \Delta t_1 = \omega_0 - \alpha_2 \cdot \Delta t_2 = 0$$

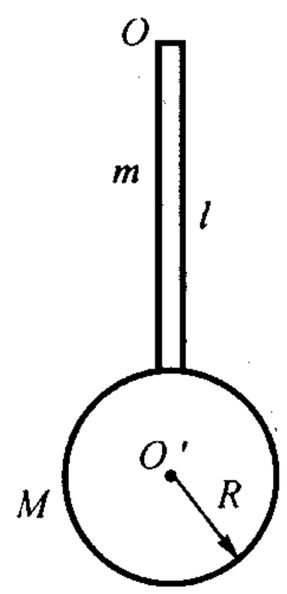
将 $\Delta t_1 = 240\text{s}$，$\Delta t_2 = 40\text{s}$，$M_{f1} = 500(\text{N}\cdot\text{m})$，代入可得

$$M_f = 100(\text{N}\cdot\text{m}),\quad I = 191(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$$

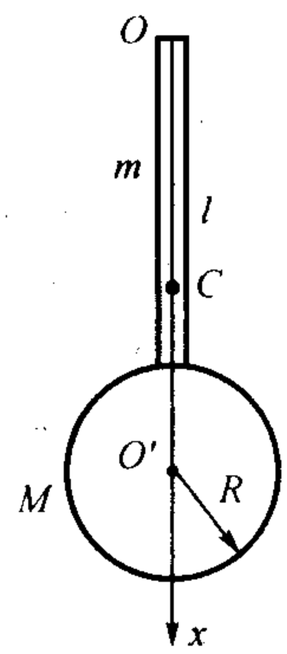
6-5 如图所示，钟摆可绕 O 轴转动。设细杆长 l，质量为 m；圆盘半径为 R，质量为 M。求：

(1)钟摆对 O 轴的转动惯量；

(2)钟摆质心 C 位置和相对质心轴的转动惯量。



习题 6-5 图



解 6-5 图

解 (1)由平行轴定理和转动惯量的可加性

$$I_0 = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(l+R)^2$$

(2)以 O 为原点，沿杆长方向建立 x 轴。如图所示，钟摆的质心坐标为

$$x_c = \frac{m\dfrac{l}{2} + M(l+R)}{M+m}$$

由平行轴定理

$$I_0 = I_c + (M+m)x_c^2$$

$$I_c = I_0 - \frac{[ml + 2M(l+R)]^2}{4(M+m)}$$

6-6 如图所示，一大圆板内挖去一个直径为大圆板半径的圆孔，如果剩余部分质量为 m，求它对经过 O 点且与板平面垂直轴的转动惯量。

解 由叠加原理可知

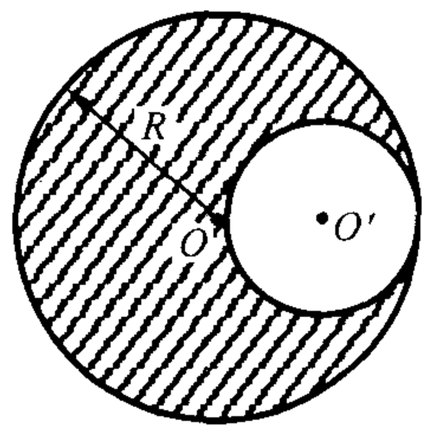
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$I_{剩}=I_{盘}-I_{孔}$$

$$m_{盘}=\pi R^2\frac{m}{\pi R^2-\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}m$$

$$m_{孔}=\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{m}{\pi R^2-\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}m$$

$$\therefore\quad I_{盘}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}m\cdot R^2$$

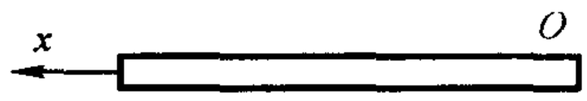


习题 6-6 图

由平行轴定理

$$\therefore\quad I_{孔}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2+\frac{1}{3}m\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\qquad\therefore\quad I_{剩}=\frac{13}{24}mR^2$$

6-7 如图所示，一直杆质量线密度 $\lambda=kx$（其中 k 为常量），长为 l，试求：



习题 6-7 图

(1)此杆的质心位置；

(2)此杆对通过 O 点并与杆垂直的轴的转动惯量。

解 (1)杆上任取一小段线元 $\mathrm{d}x$，其质量为 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x$，杆的质心位置为

$$x_c=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int_0^l xkx\mathrm{d}x}{\int_0^l kx\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{3}kl^3}{\frac{1}{2}kl^2}=\frac{2}{3}l$$

(2) $I_0=\int x^2\mathrm{d}m=\int_0^l x^2kx\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kl^4$

6-8 一蒸汽机飞轮的质量为 200kg，回转半径为 2m，当此飞轮以 $120\mathrm{rev}\cdot\mathrm{min}^{-1}$ 的转速转动时，把蒸汽关闭：

(1)假定飞轮经 5min 停止，试求由于轴上的摩擦而施于飞轮上的阻力矩；

(2)在这段时间内，阻力矩所作的功等于多少？

解 飞轮的转动惯量为

$$I=mr_g^2=800\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2,\quad\omega_0=2\pi n_0=4\pi\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

(1)$\alpha=\frac{0-\omega_0}{\Delta t}$，$M_f=I\alpha=-\frac{800\times4\pi}{5\times60}=-33.5(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$

(2)由刚体定轴转动的动能定理

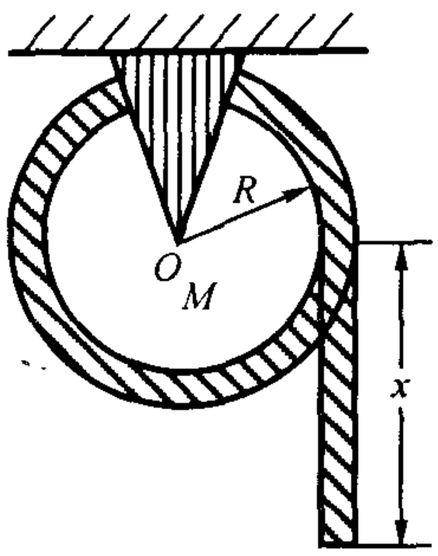
$$W_f=0-\frac{1}{2}I\omega_0^2=-6.32\times10^4\mathrm{J}$$

6-9 一长为 l、质量为 m 的橡皮绳单层绕在一个滑轮上；滑轮的质量为 M，半径为 R，可绕固定轴自由转动。设绳悬挂在滑轮外，长度为 x，如图所示。试求滑轮转动时角加速度与 x 之间的关系式（设绕在滑轮上那部分橡皮绳的质心恰好通过转轴，绳与滑轮间无相对滑动。）

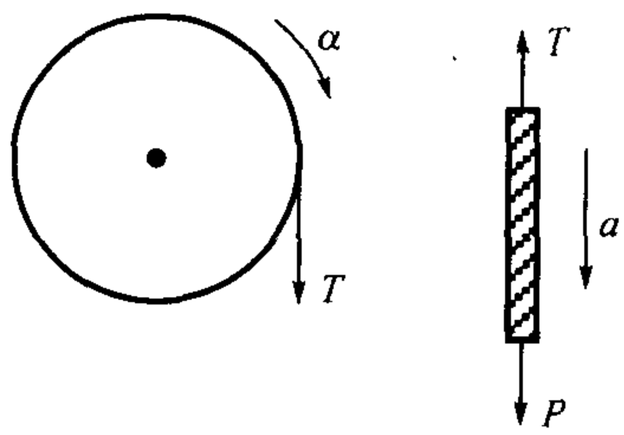
解 绳子所受的重力为

$$P=\frac{m}{l}xg$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



习题 6-9 图



解 6-9 图

$$P-T=\frac{m}{l}xa$$

$$TR=I\alpha$$

$$I=\frac{1}{2}MR^2+\frac{m}{l}(l-x)R^2$$

$$a=R\alpha$$

取立以上各式可得

$$\alpha=\frac{mgx}{\left(\frac{1}{2}M+m\right)lR}$$

6-10 如图所示，有质量为 m_1 和 m_2 的两物体分别悬挂在两个不同半径的组合轮上，求物体的加速度和绳的张力。设两轮相对于轴的转动惯量分别为 I_1 和 I_2，半径为 r 和 R，轮和轴间摩擦不计。

解 由牛顿定律和刚体定轴转动定律

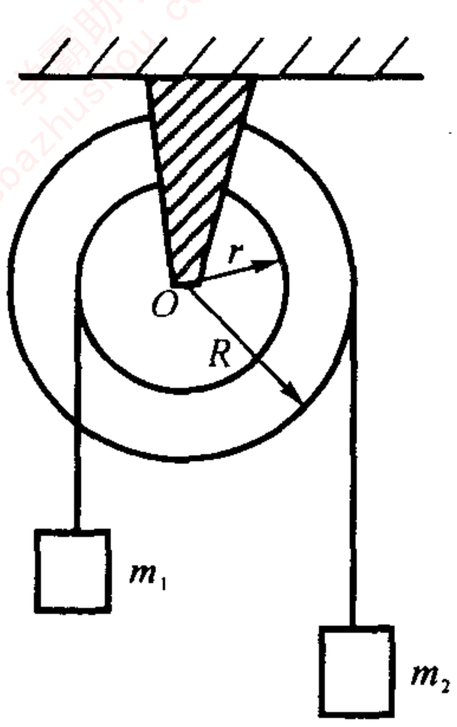
$$T_1-m_1g=m_1a_1 \qquad (1)$$

$$m_2g-T_2=m_2a_2 \qquad (2)$$

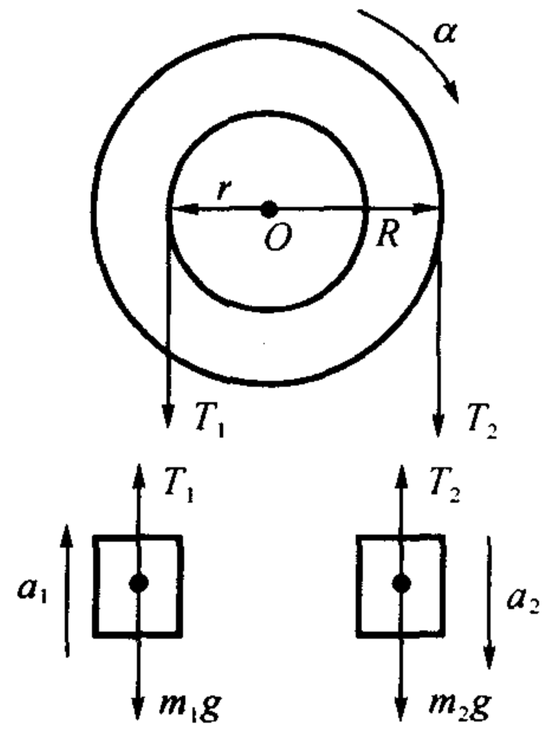
$$T_2R-T_1r=I\alpha \qquad (I=I_1+I_2) \qquad (3)$$

$$a_1=r\alpha \qquad (4)$$

$$a_2=R\alpha \qquad (5)$$



习题 6-10 图



解 6-10 图

联立各式可解得

$$\alpha=\frac{(m_2R-m_1r)g}{I_1+I_2+m_1r^2+m_2R^2},\quad a_1=\frac{(m_2R-m_1r)gr}{I_1+I_2+m_1r^2+m_2R^2},\quad a_2=\frac{(m_2R-m_1r)gR}{I_1+I_2+m_1r^2+m_2R^2}$$

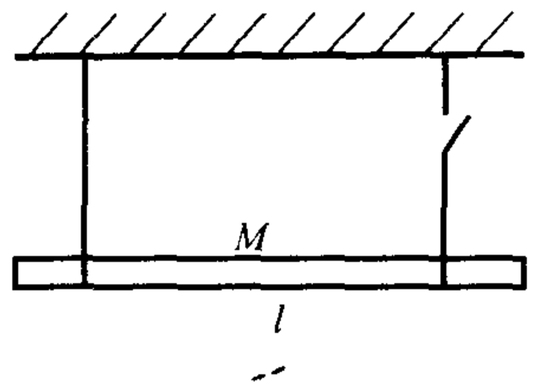
$$T_1=\frac{I_1+I_2+m_1r(R+r)}{I_1+I_2+m_1r^2+m_2R^2}m_1g,\quad T_2=\frac{I_1+I_2+m_1r(R+r)}{I_1+I_2+m_1r^2+m_2R^2}m_2g$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

6-11 如图所示，一质量为 M、长为 l 的匀质杆两端用细线悬挂起来，杆的方向是水平的。设突然将杆右端的悬线剪断，问：

(1)在这瞬间杆将如何运动？

(2)另一根悬线上的张力如何？



习题 6-11 图

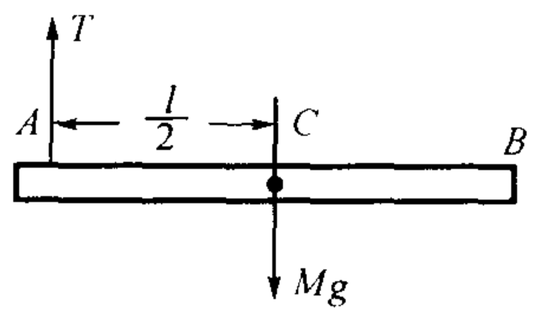
解 (1)在这瞬间杆尚处在静止状态($\omega=0$)，此后将绕过 A 点与杆垂直的水平轴转动。

(2)由质心运动定理和定轴转动定律

$$Mg-T=Ma_c \tag{1}$$

$$Mg\frac{l}{2}=I_A\alpha \qquad \left(I_A=\frac{1}{3}Ml^2\right) \tag{2}$$

$$a_c=\alpha\frac{l}{2} \tag{3}$$



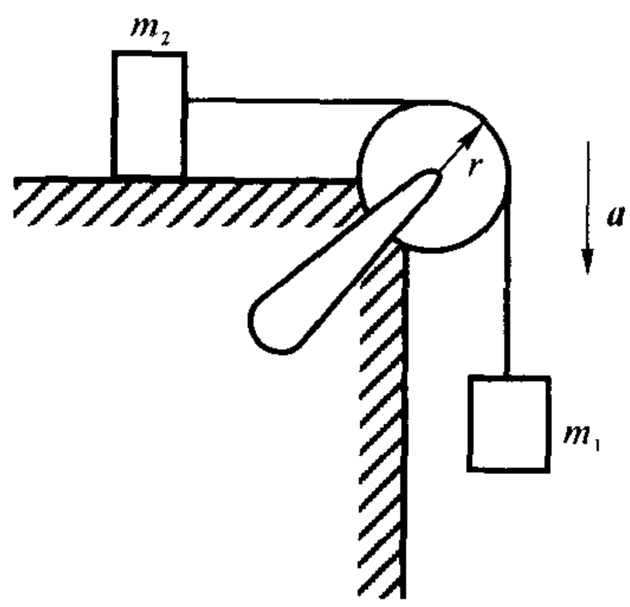
解 6-11 图

$$\therefore \quad \alpha=\frac{3g}{2l}, \quad a_c=\frac{3}{4}g, \quad T=\frac{1}{4}Mg$$

6-12 如图所示，两物体的质量分别为 m_1 和 m_2；滑轮的转动惯量为 I，半径为 r。设绳的质量不计，且与滑轮无相对滑动。

(1)如果质量为 m_2 的物体与桌面间的滑动摩擦因数为 μ，求两物体加速度的大小 a 及它们所受绳的拉力 T_1 和 T_2；

(2)如果桌面光滑，求两物体的加速度 a 及拉力 T_1 和 T_2。



习题 6-12 图

解 (1)由牛顿定律和转动定律

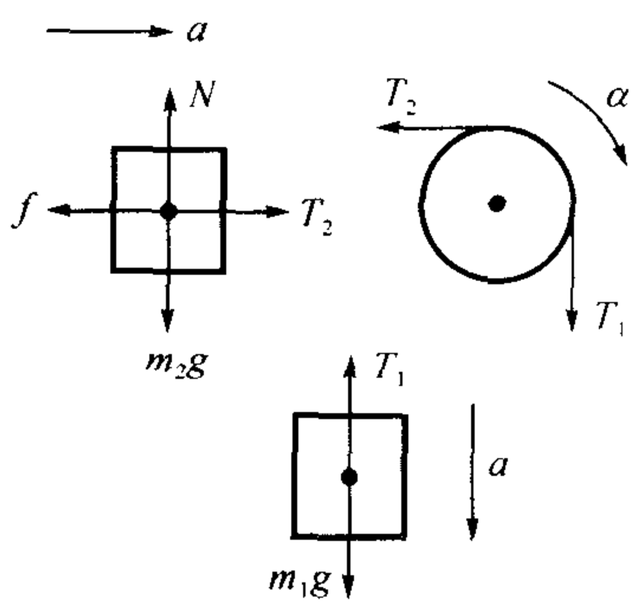
$$m_1g-T_1=m_1a \tag{1}$$

$$T_2-f=m_2a \tag{2}$$

$$f=\mu N=\mu m_2g \tag{3}$$

$$T_1r-T_2r=I\alpha \tag{4}$$

$$a=\alpha r \tag{5}$$



解 6-12 图

$$\therefore \quad a=\frac{(m_1-\mu m_2)g}{m_1+m_2+\frac{I}{r^2}}, \quad T_1=\frac{m_2+\mu m_2+\frac{I}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{I}{r^2}}m_1g$$

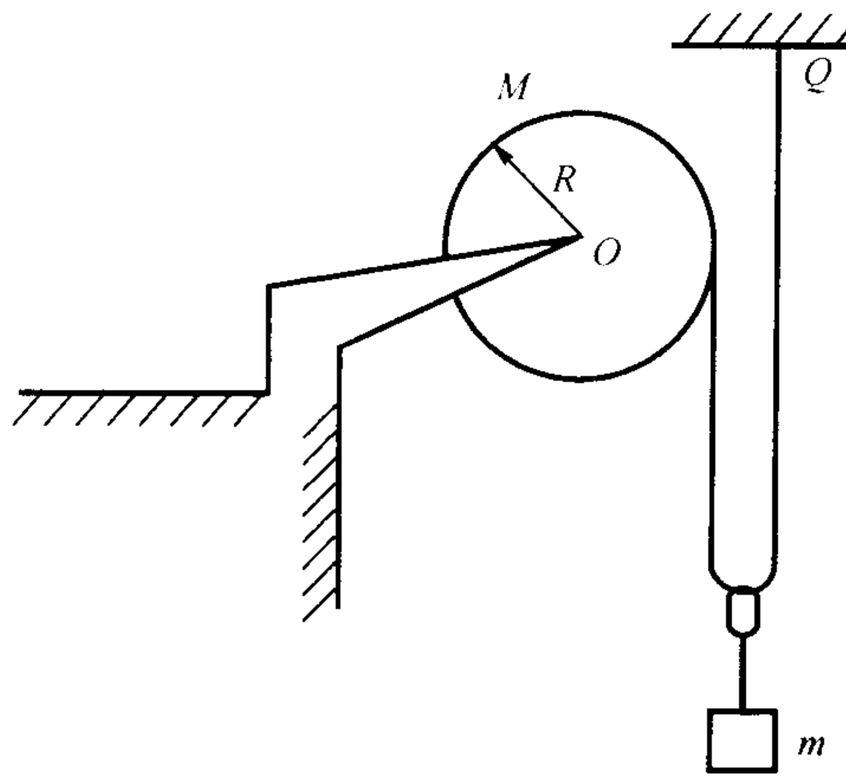
$$T_2=\frac{m_1+\mu m_1+\frac{\mu I}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{I}{r^2}}m_2g$$

(2)无摩擦时，即 $\mu=0$，得

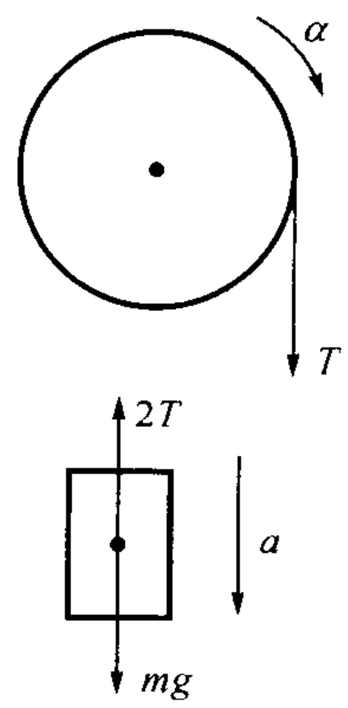
$$a=\frac{m_1g}{m_1+m_2+\frac{I}{r^2}}, \quad T_1=\frac{m_2+\frac{I}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{I}{r^2}}m_1g, \quad T_2=\frac{m_1}{m_1+m_2+\frac{I}{r^2}}m_2g$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

6-13 如图所示，有一根轻绳绕在一圆盘上，圆盘质量 $M=0.60\text{kg}$，半径 $R=0.08\text{m}$。若此绳另一端无摩擦地通过一小环，再悬挂在 Q 点；在小环下悬挂一个质量为 $m=2.4\text{kg}$ 的物体，求物体 m 的加速度。



习题 6-13 图



解 6-13 图

解 由牛顿定律和定轴转动定律

$$mg-2T=ma \tag{1}$$

$$TR=\frac{1}{2}MR^2\alpha \tag{2}$$

$$\alpha R=2a \tag{3}$$

$$\therefore \quad a=\frac{mg}{2M+m}=\frac{2}{3}g=6.53(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

6-14 假设地球为一质量不变的匀质实心球，现在的半径为 6 370km。从对地球上三亿六千多万年前的珊瑚虫生长规律的分析，可推知当时地球一年有 480 天，试计算那时地球的半径大约是多少？

解 地球运动受到其他天体的力均是有心力，故角动量守恒

$$I_1\omega_1=I_2\omega_2, \quad \frac{2}{5}mR_1^2\cdot\frac{2\pi}{T_1}=\frac{2}{5}mR_2^2\cdot\frac{2\pi}{T_2}$$

$$\therefore \quad R_1=R_2\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}=6370\sqrt{\frac{1/480}{1/365}}=6370\sqrt{\frac{365}{480}}=5555(\text{km})$$

6-15 机械冲床利用飞轮的转动动能通过曲柄联杆结构的传动，带动冲头在铁板上穿孔。已知飞轮的半径为 $r=0.4\text{m}$，质量为 $m=600\text{kg}$，可视为均匀圆盘。若飞轮的正常转速为 $n_1=240\text{rev}\cdot\text{min}^{-1}$，冲一次孔转速减低 20%。求冲一次孔，冲头做了多少功？

解 飞轮绕过质心轴的转动惯量 $I=\frac{1}{2}mr^2$，冲孔前角速度 $\omega_1=2\pi n_1=2\pi\times240/60=8\pi$，冲一次孔后角速度变为 $\omega_2=(1-20\%)\omega_1=6.4\pi$。由刚体定轴转动的动能定理，冲头做功为

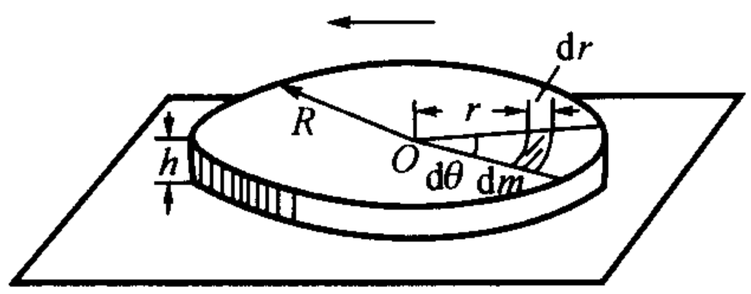
$$W=\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2=\frac{1}{2}I(\omega_2^2-\omega_1^2)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times600\times(0.4)^2[(6.4\pi)^2-(8\pi)^2]=-5.45\times10^3(\mathrm{J})$$

6-16 半径为 R、质量为 m 的匀质圆盘，放在粗糙桌面上，盘可绕竖直中心轴在桌面上转动，盘与桌面间的摩擦因数为 μ。设圆盘的初始角速度为 ω_0，问经过多长时间后，盘将停止转动？摩擦阻力共做多少功？

解 圆盘绕过质心 O 轴在粗糙的水平桌面上转动，转动惯量 $I=\frac{1}{2}mR^2$，所受摩擦力矩为 M_f。根据转动定律 $-M_f=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，可得 $-M_f\mathrm{d}t=I\mathrm{d}\omega$，再通过积分可求得时间 t。但求摩擦力矩是一个难点，为此，可如图把圆盘分成许多质量元 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho h\mathrm{d}S=\rho hr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$，这里 ρ 和 h 分别为圆盘的密度和厚度。质量元 $\mathrm{d}m$ 所受摩擦力矩为 $\mathrm{d}M_f=r\mathrm{d}F_f=r\mu\mathrm{d}mg$，故圆盘所受的总摩擦力矩为



解 6-16 图

$$M_f=\int\mathrm{d}M_f=\int r\mu\mathrm{d}mg=\int\mu g\rho hr^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\mu g\rho h\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\mu g(\rho h\pi R^2)\frac{2}{3}R=\frac{2}{3}\mu mgR$$

也可以将圆盘分成许多小圆环来积分

$$\mathrm{d}m=\rho h2\pi r\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}M_f=r\mu\mathrm{d}mg$$

$$M_f=\int\mathrm{d}M_f=\int_0^R\mu g\rho h\cdot2\pi r^2\cdot\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\mu mgR$$

于是根据前面的分析有

$$-\frac{2}{3}\mu mgR\mathrm{d}t=I\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}mR^2\mathrm{d}\omega$$

两边积分得

$$-\frac{2}{3}\mu mgR\int_0^t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mR^2\int_{\omega_0}^0\mathrm{d}\omega\quad 即\quad -\frac{2}{3}\mu gt=-\frac{1}{2}R\omega_0$$

$$\therefore\quad t=\frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

摩擦阻力做功可由定轴转动动能定理得

$$W_f=0-\frac{1}{2}I\omega_0^2=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2=-\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2$$

6-17 有一个脉冲星（中子密聚而成）质量为 $m=1.5\times10^{30}\mathrm{kg}$，半径 $R=20\mathrm{km}$，自旋转速为 $2.1\mathrm{rev}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，且以 $1.0\times10^{-15}\mathrm{rev}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ 的变化率减慢。试问此时刻它的动能以多大的变化率减少？如果这一动能变化率保持不变，这个脉冲星约经过多长时间停止自转？（设脉冲星可视为匀质实心球）

解 由题意

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)=I\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{5}mR^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{2}{5}\times1.5\times10^{30}\times(20\times10^3)^2\times2\pi\times2.1\times(-2\pi\times1.0\times10^{-15})$$

$$=-1.99\times10^{25}(\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1})=-1.99\times10^{25}(\mathrm{W})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

到停止自转时所经过的时间为

$$\Delta t=\frac{\Delta E_k}{\frac{dE_k}{dt}}=\frac{-\frac{1}{2}I\omega^2}{I\omega\frac{d\omega}{dt}}=\frac{1}{2}\frac{\omega}{-\frac{d\omega}{dt}}=1.05\times10^{15}(s)=3.33\times10^7(y)$$

6-18 由于潮汐对海岸的摩擦作用，地球每经过一年，其自转周期将增加 3.5×10^{-5}s。假设地球对自转轴的转动惯量为$\frac{1}{3}MR^2$，M 为地球质量，$M=5.98\times10^{24}$kg；R 为地球半径，$R=6.37\times10^6$m，试求：

(1)地球每年自转动能减少多少？

(2)潮汐对地球的平均阻力矩多大？

(提示：$\frac{dE_k}{E_k}=2\frac{d\omega}{\omega}=-2\frac{dT}{T}$)

解 (1)因为 $E_k=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$， $\frac{dE_k}{dT}=I\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(-\frac{2\pi}{T^2}\right)$

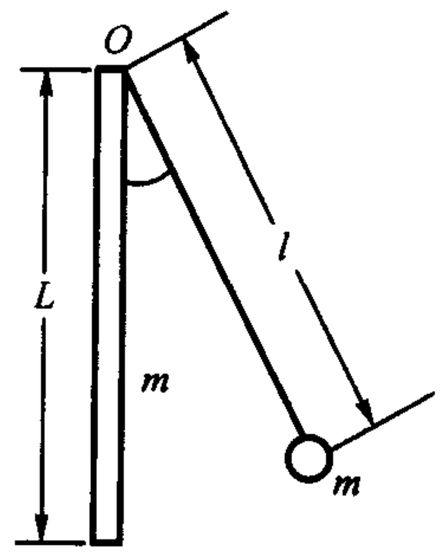
$$\therefore\quad \Delta E_k=-\frac{4\pi^2I}{T^3}\Delta T=\frac{-4\pi^2\times0.33\times5.98\times10^{24}\times(6.37\times10^6)^2}{(24\times60\times60)^3}\times3.5\times10^{-5}$$

$$=-1.72\times10^{20}(J)$$

(2) $\because\quad W=\overline{M}_f\Delta\theta=\Delta E_k$

$$\therefore\quad \overline{M}_f=\frac{\Delta E_k}{2\pi\times365}=-7.5\times10^{16}(N\cdot m)$$

6-19 一长为 L、质量为 m 的均匀细棒一端悬挂在 O 点上，可绕水平轴无摩擦地转动。在同一悬挂点，有长为 l 的轻绳悬一小球，质量也为 m。当小球悬线偏离铅直方向某一角度时，由静止释放(如图所示)，则小球在悬点正下方与静止的细棒发生完全弹性碰撞。问当绳的长度为多少时，小球与棒碰撞后，小球刚好静止？(略去空气阻力)



习题 6-19 图

解 碰撞过程中，小球和棒组成的系统机械能守恒和对 O 轴的角动量守恒。设碰撞小球的速度为 v，碰后静止

$$\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

$$I\omega=mvl \tag{2}$$

$$I=\frac{1}{3}mL^2 \tag{3}$$

解得

$$l=\frac{\sqrt{3}}{3}L$$

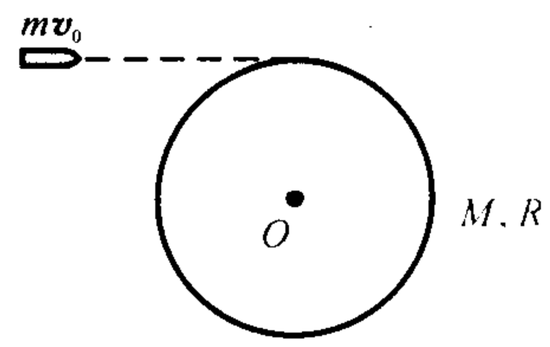
6-20 设一圆盘，质量为 M，半径为 R，可绕通过中心并垂直盘面的固定水平轴转动。开始时，圆盘处于静止状态。现有一质量为 m 的子弹，以速度v_0 水平地射向圆盘边缘，如图所示。求：

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(1)当子弹嵌入圆盘边缘时，圆盘的角速度为多少？

(2)当子弹与圆盘边缘相擦而过，子弹速度变为v_1，圆盘的角速度为多少？

(3)两种情况下能量是否守恒？



习题 6-20 图

解 (1)由于对固定轴的合外力矩为零，角动量守恒，故

$$mv_0R=I\omega=\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega,\quad \omega=\frac{mv_0}{\frac{1}{2}MR+mR}$$

(2)角动量仍然守恒，故

$$mv_0R=mv_1R+\frac{1}{2}MR^2\omega,\quad \omega=\frac{2m(v_0-v_1)}{MR}$$

(3)两种情况下能量均不守恒。

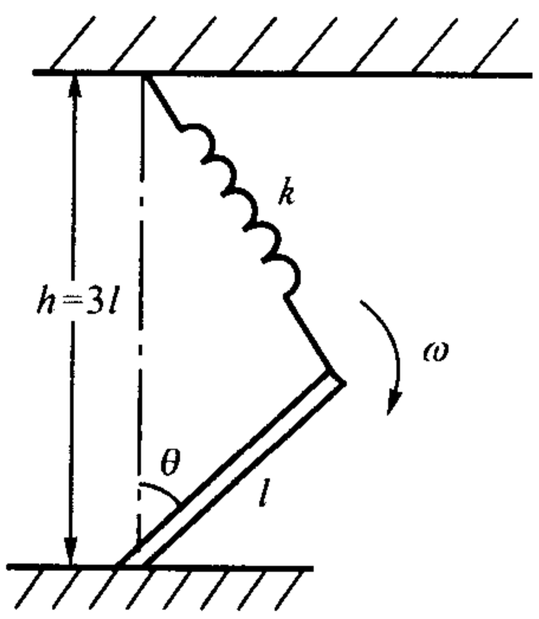
6-21 一质量为 m 的人站在质量为 M、长为 l 的竹筏(可视作均匀细杆)的一端，竹筏静止在河水中，水的阻力可忽略。若人以速度$\boldsymbol{v}$(相对于河岸)沿垂直于竹筏的方向跳出，试求竹筏获得的角速度。

解 这是质点和自由刚体的碰撞，系统角动量、动量均守恒。取杆质心所在的位置为轴(相对于河面)，其角动量守恒式为

$$0=mv\frac{l}{2}-\frac{1}{12}Ml^2\omega,\quad \omega=\frac{6mv}{Ml}$$

说明：本题也可用相对河水静止的瞬时轴来解，结果一致。

6-22 一劲度系数为 k 的轻弹簧与一均匀细棒相连。如图所示，细棒的质量为 m，长度为 l。当 $\theta=0°$时，弹簧无伸长，试问细棒至少应以多大的角速度 ω 才能使棒从 $\theta=0°$的位置转到水平位置？



习题 6-22 图

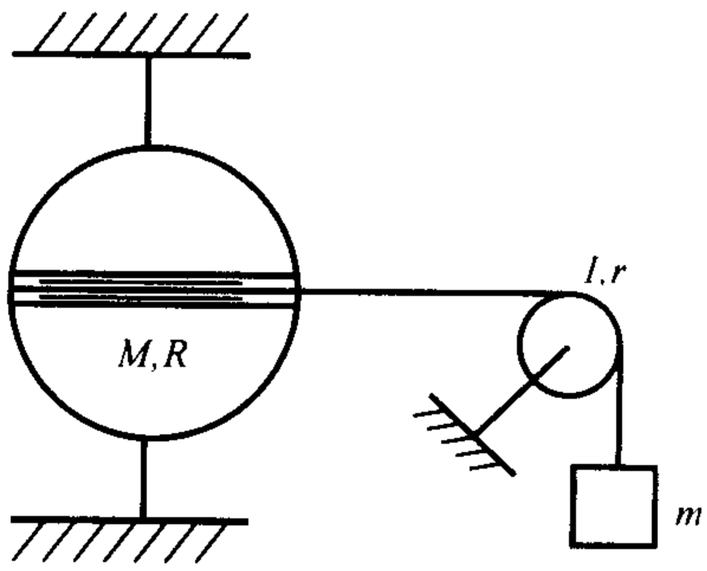
解 棒在转动过程中，整个系统只有弹性力、重力作功，故机械能守恒，即

$$mg\frac{l}{2}+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}k(\sqrt{10}l-2l)^2 \qquad (1)$$

$$I=\frac{1}{3}ml^2 \qquad (2)$$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{3(1.35kl-mg)}{ml}}$$

6-23 如图所示，一质量为 M、半径为 R 的均匀球体赤道上绕有轻绳，绳的另一端跨过转动惯量为 I、半径为 r 的定滑轮，其上悬挂一个质量为 m 的物体。设均匀球可绕通过球心的光滑竖直轴转动，物体 m 由静止开始向下运动。试求物体向下运动距离为 h 时的速度。



习题 6-23 图

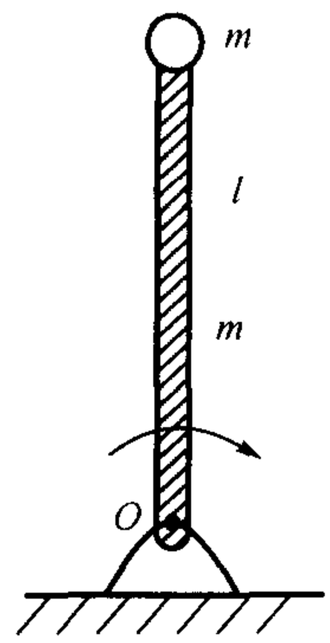
解 由于静摩擦力在本题中不作功，故系统机械能守恒

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\cdot\omega_2^2 \quad (1)$$

$$v=\omega_1 r=\omega_2 R \quad (2)$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{2M}{5}+\frac{I}{r^2}}}$$



习题 6-24 图

6-24 如图所示，一质量为 m、长为 l 的均匀细杆上端连接一个质量也为 m 的小球，杆可绕通过下端并与杆垂直的水平轴自由转动。设杆最初静止于竖直位置，受扰动而往下转动，试求当杆转到水平位置时：

(1)杆的角速度；

(2)杆的角加速度；

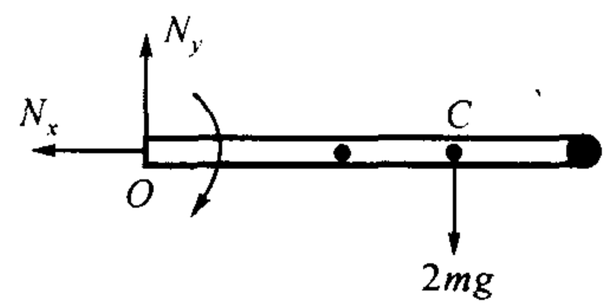
(3)轴对杆的作用力。

解 (1)机械能守恒

$$\frac{1}{2}I\omega^2=mg\frac{l}{2}+mgl \quad (1)$$

$$I=\frac{1}{3}ml^2+ml^2 \quad (2)$$

$$\therefore \quad \omega=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$$



解 6-24 图

(2)定轴转动定律

$$mg\frac{l}{2}+mgl=I\alpha \quad (3)$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{9g}{8l}$$

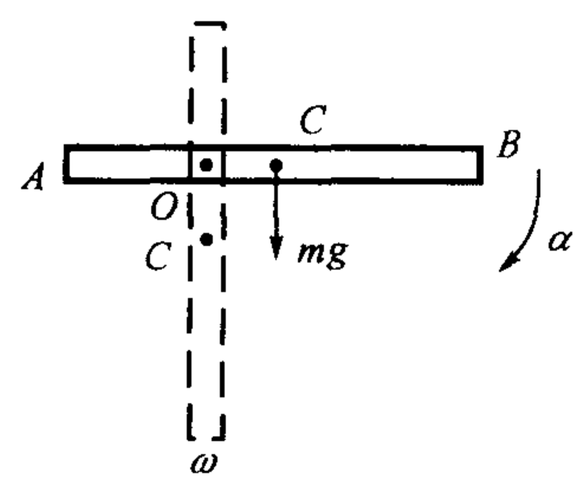
(3)质心运动定律

$$N_x=2ma_{cn}=2mr_c\omega^2 \quad (4)$$

$$2mg-N_y=2mg_{c\tau}=2mr_c\alpha \quad (5)$$

$$\because \quad r_c=\frac{m\frac{l}{2}+ml}{2m}=\frac{3}{4}l, \quad \therefore \quad N=\frac{27}{8}mgi+\frac{5}{16}mgj$$

6-25 在一根质量均匀分布的米尺上 60cm 处钻孔，将其钉在墙上，并使其可以在竖直平面内自由转动。先用手使米尺保持水平，然后释放，求刚释放时米尺的角加速度和米尺到竖直位置时的角速度。



解 6-25 图

解 设米尺长为 $l=1\text{m}$，OB 长为 $\frac{3}{5}l=0.6\text{m}$，质心 C 到 O 轴的距离 $l_c=\frac{3}{5}l-\frac{1}{2}l=\frac{1}{10}l$。由转动定律得

$$mgl_c=I_O\alpha$$

根据平行轴定理

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

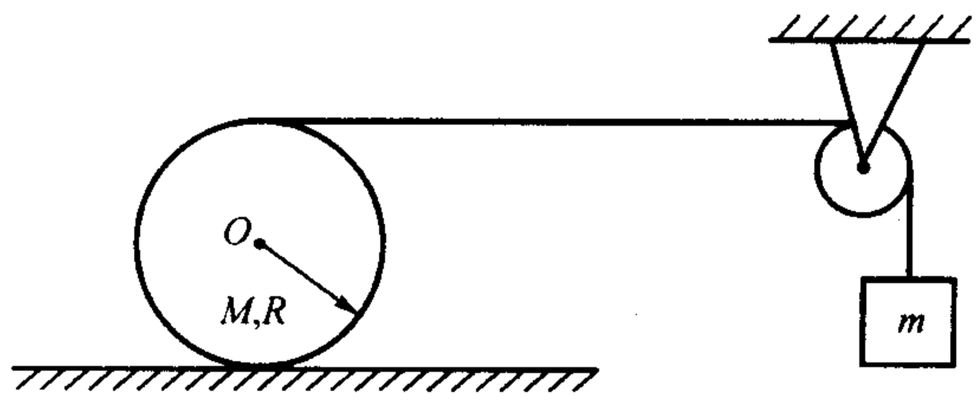
$$I_O=I_c+ml_c^2=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{10}\right)^2=\frac{112}{1200}ml^2$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{mgl_c}{I_O}=\frac{mg\frac{1}{10}l}{\frac{112}{1200}ml^2}=\frac{120g}{112l}=10.5(\mathrm{rad\cdot s^{-2}})$$

由水平转至竖直位置时，外力不作功，故系统（棒＋地球）机械能守恒，即

$$mgl_c=\frac{1}{2}I_O\omega^2,\quad \omega=\sqrt{\frac{2mgl_c}{I_O}}=\sqrt{\frac{2mg\frac{1}{10}l}{\frac{112}{1200}ml^2}}=\sqrt{\frac{15g}{7l}}=4.58(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$$

6-26 如图所示，质量为 M、半径为 R 的匀质圆柱体放在粗糙的水平面上。圆柱体的外侧绕有细绳，绳子跨过一个质量忽略不记的小滑轮，并挂有一质量为 m 的物体。设圆柱体在地面只滚不滑，并且圆柱体与滑轮之间的绳子是水平的。试求：

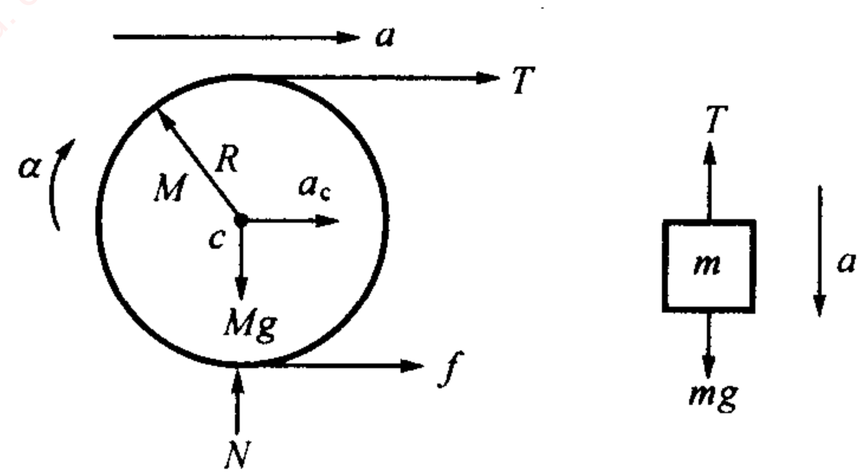


习题 6-26 图

(1)圆柱体的质心加速度 a_c、物体的加速度 a 和绳子的张力 T；

(2)当物体从静止开始释放，下落距离为 h 时，圆柱体转动的角速度为多大？

解 (1)画隔离图分析力。因物体 m 作平动，故有



解 6-26 图

$$mg-T=ma \tag{1}$$

因圆柱体作平面平行运动，得

$$T+f=Ma_c \tag{2}$$

$$TR-fR=I_c\alpha \tag{3}$$

$$a=a_c+R\alpha \tag{4}$$

$$a_c=R\alpha \tag{5}$$

联立(1)～(5)式解得

$$a_c=\frac{4mg}{8m+3M},\quad a=\frac{8mg}{8m+3M},\quad T=\frac{3Mmg}{8m+3M};$$

(2)

$$v^2=2ah \tag{6}$$

$$v_c=R\omega \tag{7}$$

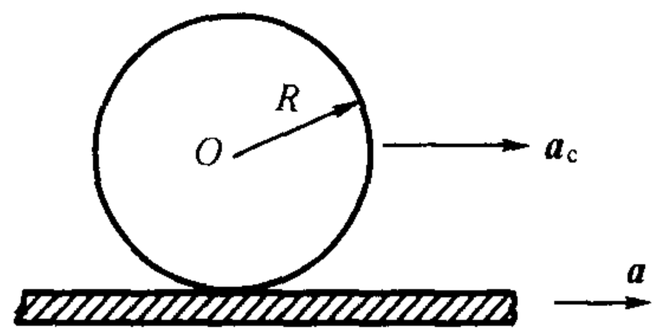
$$v=v_c+R\omega=2R\omega \tag{8}$$

联立(6)～(8)式得

$$\omega=\sqrt{\frac{ah}{2R^2}}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4mgh}{8m+3M}}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

6-27 在一个表面很粗糙的平板上放有一个匀质的实心球，球的半径为 R，只能在平板上做纯滚动。设用力拉此平板，使其有一加速度 $\boldsymbol{a}$，问该球相对于地面的质心加速度 $\boldsymbol{a}_c$ 有多大？



习题 6-27 图

解 圆球所受摩擦力 f 与平板加速度 $\boldsymbol{a}$ 同方向，由质心运动定理得

$$f=ma_c$$

由定轴转动定律得

$$fR=I\alpha=\frac{2}{5}mR^2\alpha,\quad a_c=a-R\alpha$$

$$\therefore\quad a_c=\frac{2}{7}a$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第7章

万有引力

【基本概念和规律】

1. 万有引力定律

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

2. 引力势能

$$U=-G\frac{Mm}{r},\qquad \text{选无限远处的引力势能为零，即 } U(\infty)=0$$

【解题指导】

● 万有引力定律仅适用于质点，若其中一个物体不是质点，则求引力时需要把物体分为质量元，然后通过积分处理。

● 引力势能 $U=-G\frac{mM}{r}$ 是负值，在参考点∞处，引力势能 $U(\infty)=0$。若其中有一物体质量是连续分布的，则求引力势能时同样需要把物体分为质量元，然后通过积分处理。

● 在质量均匀分布的球壳内，任意质点受到球壳的引力为零；而在计算球壳外任意质点所受球壳的引力时，则可把球壳看成质量集中在球心处的质点来处理。

【习题解答】

7-1 试计算下列物体间的万有引力：

(1)相距为 0.65m、质量为 7.3kg 的两个铅球；

(2)地球与月亮($M_e=5.98\times10^{24}$kg，$M_m=7.36\times10^{22}$kg，两者相距 $d=3.82\times10^8$m)。

解 (1)$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}=\frac{6.67\times10^{-11}\times7.3\times7.3}{(0.65)^2}=8.41\times10^{-9}$(N)

(2)$F=G\frac{M_eM_m}{d^2}=\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times7.36\times10^{22}}{(3.82\times10^8)^2}=2.01\times10^{20}$(N)

7-2 如图所示，一半径为 R 的铅制球体中有一位于表面与中心之间的空洞；在该球体的右侧有一质量为 m 的质点，该质点位于铅球和空洞的连心线上，离铅球球心的距离为 d。设该铅球未挖空前的质量为 M，试求这一中空铅球与质点之间的万有引力。

解 球形空腔可看成实心大球减去空腔位置处的实心小球，这样处理后，就可以利用球体外一质点的引力结果通过力的叠加原理的方法来求解了。由题意知，球体被挖去部分的质量为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

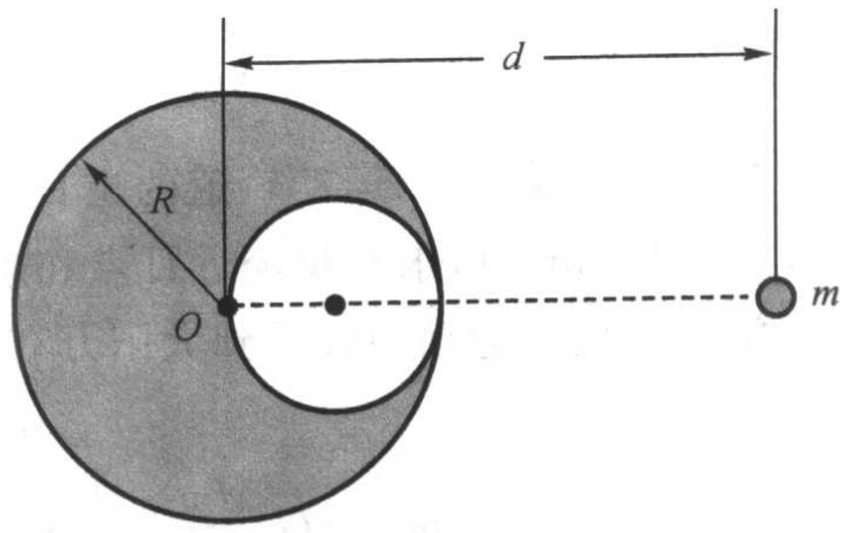
$$m_0=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3=\frac{M}{8}$$

质点 m 受到实心大球 M 的引力为

$$F_1=G\frac{mM}{d^2}$$

质点 m 受到实心小球 m_0 的引力为

$$F_2=G\frac{mm_0}{\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}=G\frac{mM}{8\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$$



习题 7-2 图

根据力的叠加原理，质点 m 受到球形空腔的引力为

$$F=F_1-F_2=G\frac{Mm}{d^2}-G\frac{Mm}{8\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$$

7-3 要将一颗同步通讯卫星送到地球赤道上方的轨道中，该轨道离地面的高度 h 应为多少？

解 同步通讯卫星的运转角速度等于地球自转角速度，已知地球质量 $M=5.98\times10^{24}\text{kg}$，$R_{地}=6.37\times10^6\text{m}$，$T=8.64\times10^4\text{s}$，万有引力提供向心力

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\omega^2r=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r \qquad r=\left(\frac{GT^2M}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}=4.22\times10^7\text{m}$$

$$\therefore\quad h=r-R_{地}=3.58\times10^7\text{m}$$

7-4 已知地球质量为 M，半径为 R。现有一质量为 m 的人造卫星在离地面高度 $2R$ 处。以地球和卫星为系统，若取地面的引力势能为零，则系统的引力势能为多少？若取无限远处引力势能为零，则系统的引力势能又为多少？

解 由势能定义，取地面为势能零点，则

$$U_1=\int_{3R}^{R}-G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=G\frac{Mm}{R}-G\frac{Mm}{3R}=\frac{2GMm}{3R}$$

若取无穷远处为势能零点，则

$$U_2=\int_{3R}^{\infty}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{3R}^{\infty}-G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{GMm}{3R}$$

7-5 有一陨石，质量为 $5\times10^3\text{kg}$，从天外落到地球上，求万有引力所作的功。(已知地球质量 $M\approx6.0\times10^{24}\text{kg}$，半径 $R\approx6.4\times10^6\text{m}$)

解

$$W=U_\infty-U_0=0-\left(-G\frac{Mm}{R}\right)=3.1\times10^{11}\text{J}$$

7-6 两个质点的质量分别为 m_1 和 m_2，只受相互间的万有引力作用。开始时，它们之间的距离为 a，都处于静止状态。试求当它们的距离为 $a/2$ 时，速度各为多少？

解 由机械能守恒定律

$$-G\frac{m_1m_2}{a}=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-G\frac{m_1m_2}{a/2} \tag{1}$$

由动量守恒定律

$$m_1v_1-m_2v_2=0 \tag{2}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad v_1=m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)a}}, \quad v_2=m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)a}}$$

7-7 水星绕太阳运动轨道的近日点距太阳为 $r_{min}=4.59\times10^{10}$m，远日点距太阳为 $r_{max}=6.98\times10^{10}$m。试求水星经近日点和远日点时的运动速率 v_1 和 v_2。

解 水星在运动中仅受到太阳万有引力的作用，角动量和机械能守恒

$$mv_1r_{min}=mv_2r_{max} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{Mm}{r_{min}}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{r_{max}} \qquad (M=1.99\times10^{30}\text{kg}) \tag{2}$$

$$\therefore \quad v_1=\sqrt{2GM\frac{r_{max}}{r_{min}(r_{min}+r_{max})}}=5.91\times10^4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_2=\frac{r_{min}}{r_{max}}v_1=3.88\times10^4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

7-8 人造地球卫星的椭圆轨道离地心最近距离为 $3R$（R 为地球半径），最远距离为 $6R$。取地球表面的重力加速度为 g，求此卫星的最小速率和最大速率。

解 对于有心力场，由角动量守恒，

$$mv_{max}3R=mv_{min}6R \tag{1}$$

对于系统（卫星＋地球）来说，因为只有引力，而且是保守内力，故系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2-G\frac{Mm}{(3R)^2}=\frac{1}{2}mv_{min}^2-G\frac{Mm}{(6R)^2} \tag{2}$$

$$\therefore \quad v_{max}=\sqrt{2GM\frac{6R}{3R(3R+6R)}}=\frac{2}{3}\sqrt{gR}, \quad v_{min}=\frac{3R}{6R}v_{max}=\frac{1}{3}\sqrt{gR}$$

7-9 有一宇宙飞船欲考察质量为 M、半径为 R 的某星球。当它静止于空中离星球中心为 $5R$ 处时，以初速 $\boldsymbol{v}_0$ 发射一质量为 m 的仪器仓，且 $m\ll M$。过球心作一直线与 $\boldsymbol{v}_0$ 平行，问飞船与此直线间的垂直距离 b（称为瞄准距离）多大时，仪器仓恰好掠过此星球的表面而着陆？

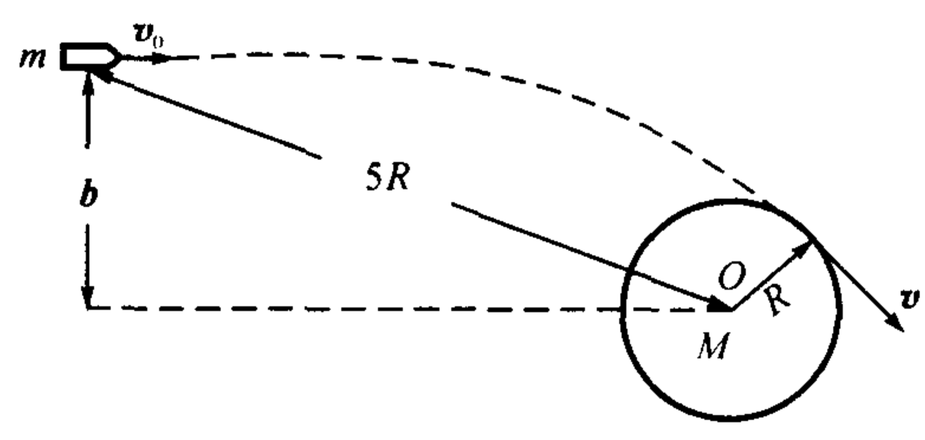
解 因角动量守恒，

$$mvR=mv_0b$$

因机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{5R}$$

$$\therefore \quad b=\sqrt{R^2+\frac{8GMR}{5v_0^2}}=R\sqrt{1+\frac{8GM}{5Rv_0^2}}$$



解 7-9 图

7-10 一个没有大气层的静止球状行星质量为 M，半径为 R。从它的表面上发射一质量为 m 的粒子，发射速率等于逃逸速率的 3/4。试计算下列情况下，粒子

(1)沿径向发射所能达到的最远距离；

(2)沿切向发射所能达到的最远距离。

（从行星中心算起，逃逸速率 $v=\sqrt{2GM/R}$，提示：总能量和角动量守恒）

解 (1)机械能守恒，且 $v=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2Gm}{R}}$，

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r}$$

代入 v 得

$$r = \frac{16}{7}R$$

(2)由机械能和角动量守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv'^2 - G\frac{Mm}{r} \tag{1}$$

$$mvR = mv'r \tag{2}$$

$$\therefore \quad 7r^2 - 16Rr + 9R^2 = 0, \quad r = \frac{9}{7}R(\text{另一解 } r = R \text{ 为发射时刻})$$

7-11 人造卫星在万有引力作用下绕地球作圆周运动。请编一计算机程序来演示人造卫星的运动轨道，要求能输入卫星的初始位置 x_0, y_0；初速度 v_{0x}, v_{0y}，并讨论下列两种情况：

(1) $x_0 = 0, y_0 = R + h = 6.57 \times 10^6\text{m}, v_{0x} = 8 \times 10^3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, v_{0y} = 0$；

(2) $x_0 = 0, y_0 = 6.57 \times 10^6\text{m}, v_{0x} = 10 \times 10^3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, v_{0y} = -2 \times 10^3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$。

(提示：万有引力 $\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ 可分解为 $F_x = -G\frac{m_1 m_2 x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, F_y = -G\frac{m_1 m_2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$)

解 程序(略)

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第8章

相对论

【基本概念和规律】

1. 爱因斯坦的两个基本假设

(1)相对性原理:物理规律对一切惯性系的观察者来说都是等价的。

(2)光速不变原理:在一切惯性系中测得真空中的光速都是 c。

2. 洛伦兹坐标变换

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

这些式子的逆变换为

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

3. 相对论的时空观

(1)同时的相对性:在某一参考系内同时($\Delta t'=t_2'-t_1'=0$)异地发生的两个事件,在其他参考系中就不是同时的,即

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(2)长度的收缩:当物体和测量者有相对运动时,测量者测得物体沿运动方向的长度变短了,即

$$l=l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

(3)时间的延缓:与发生事件的地点有相对运动的观察者测得该事件经历的时间将延长。

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

4. 相对论的速度变换

$$\begin{cases}u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-u_xv/c^2}\\[2ex] u_y'=\dfrac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_xv/c^2}\\[2ex] u_z'=\dfrac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_xv/c^2}\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}u_x=\dfrac{u_x'+v}{1+u_x'v/c^2}\\[2ex] u_y=\dfrac{u_y'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u_x'v/c^2}\\[2ex] u_z=\dfrac{u_z'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u_x'v/c^2}\end{cases}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

5. 相对论动力学

(1)相对论质量与速度的关系

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (m_0 \text{ 为静止质量})$$

(2)相对论动量

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(3)相对论能量

①粒子的总能量： $E=mc^2$

②粒子的静止能量： $E_0=m_0c^2$

③相对论动能： $E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$

④相对论能量和动量的关系式： $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$

【解题指导】

● 同时的相对性中，两个事件是发生在两个不同的位置。若在一个惯性系中测得两个事件是同时发生的，则在另一个惯性系中并不同时发生。

● 长度收缩效应中，必须在同一时间测量运动物体的长度。长度收缩公式 $l=l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$，式中 l_0 是物体的固有长度。求解问题时容易犯的一个错误是，简单地用 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 去乘一个给定的空间间隔。如果求的是物体的长度，那是对的；如果求的是非同时发生的两个事件之间的空间间隔那就错了，这时必须用洛伦兹坐标变换公式来得到答案。

● 时间延缓效应中测量的是在同一地点发生的两个事件之间的时间间隔。时间延缓公式 $\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 中，τ_0 是固有时间。如果观察者测量的是在不同空间位置发生的两个事件之间的时间间隔，那么，就不可以用时间延缓公式。

● 在许多相对论问题中，空间和时间的测量是经常放在一起的，称为相对论的时-空测量。

● 相对论中的质量随速度而变，其公式为 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，式中 m_0 是静止质量。

相对论中的总能量 $E=mc^2$，静止能量是 $E_0=m_0c^2$。动能的正确表达式应为

$$E_k=mc^2-m_0c^2=(m-m_0)c^2$$

求解相对论动能问题时常犯的一个错误是，使用了错误的动能表达式。这里要注意的是 $E_{k0}\neq\frac{1}{2}m_0v^2$ 和 $E_k\neq\frac{1}{2}mv^2$。

同样，关于动量，我们应注意 $p\neq m_0v$，正确的应该是 $p=mv$。

【习题解答】

8-1 在 S 系中观测到同一地点发生两个事件，第二事件发生在第一事件之后 2 秒钟。在 S' 系中观测到第二事件发生在第一事件后 3 秒钟。求在 S' 系中两事件的空间距离。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 已知 $\Delta x=0,\Delta t=2\text{s},\Delta t'=3\text{s}$，由洛伦兹坐标变换

$$\Delta t'=\frac{\left(\Delta t-\frac{v\Delta x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad v=c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}c$$

故在 S' 系中的空间距离

$$|\Delta x'|=\left|\frac{\Delta x-v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|=6.71\times10^8\text{m}$$

8-2 一火箭的固有长度为 L，其相对地面作匀速直线运动的速率为 v。火箭上有一个人从火箭的后端向前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭速率为 v' 的子弹，求在地面上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔。

解 选地面为 S 系，火箭为 S' 系，则在 S' 系中

$$\Delta x'=L,\quad \Delta t'=\frac{L}{v'}$$

$$\therefore\quad \Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\frac{L}{v'}+\frac{vL}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

8-3 在海拔 50km 处，由高能宇宙线产生的 π^+ 介子以 $0.995c$ 的速度垂直飞向地球表面。已知其固有的平均寿命 $\tau=2.6\times10^{-8}\text{s}$，问：

(1)从地球系来看，π^+ 介子的平均寿命是多少？它在平均海拔多少米处衰变？

(2)若不是由于相对论效应，它只能飞越多少距离？

解 (1)从地球上观测，其平均寿命为

$$\tau'=\frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=2.6\times10^{-7}\text{s}$$

π^+ 介子衰变前飞行的距离为

$$l'=v\tau'=0.995\times3\times10^8\times2.6\times10^{-7}=77.6(\text{m})$$

它衰变的平均高度为

$$h'=h-l'=49.9\text{km}$$

(2)若不计相对论效应，它能飞行的距离为

$$l=v\tau=7.76\text{m}$$

8-4 一列静止长度为 150m 的火车，以 30m/s 的速度在地面上匀速直线前进。地面上的观察者发现有两个闪电同时击中车头和车尾，问火车上的观察者测得这两个闪电的时间间隔为多少？

解 这是一个同时的相对性问题，由洛伦兹坐标变换得到两个闪电的时间间隔为

$$\Delta t=\frac{\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\frac{30}{(3\times10^8)^2}\times150}{1}=5\times10^{-14}(\text{s})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

8-5 一短跑运动员在地球上以 10s 的时间跑完了 100m。对沿短跑方向飞行速度为 0.98c 的飞船中的观察者来看，这运动员跑了多长时间和多长距离？

解 取地球为 S 系、飞船为 S' 系，设起跑和到达终点这两个事件的时空坐标在 S 系中为 (x_1,t_1) 和 (x_2,t_2)，在 S' 系中为 (x_1',t_1') 和 (x_2',t_2')，且已知 $v=0.98c$，$x_2-x_1=100\text{m}$，$t_2-t_1=10\text{s}$，则在 S' 系中跑的时间和距离分别为

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-v\dfrac{(x_2-x_1)}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=50.25\text{s}$$

$$|x_2'-x_1'|=\left|\frac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right|=1.48\times10^{10}\text{m}$$

8-6 远方的一颗星以 0.8c 的速度离开我们。若接收到它辐射出来的闪光按 5 昼夜的周期变化，固定在此星上的参考系测得的闪光周期为多少？它在每一周期间相对我们走了多远？

解 固定在此星上的参考系测得的周期为

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad T_0=T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=3\text{ 昼夜}$$

在一周期内相对我们离去的距离为

$$l=vT=0.8\times3\times10^8\times5\times24\times3600=1.04\times10^{14}(\text{m})$$

8-7 一根米尺与 S' 系固连，它与 S' 系的 x' 轴成 30°角。如果该米尺与 S 系的 x 轴成 45°角，则 S' 相对 S 系的速度必须是多少？由 S 系测得的米尺的长度是多少？

解 在 S' 系中，尺静长 $l_0=1.0\text{m}$，

$$l_{0x}=l_0\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{m},\quad l_{0y}=l_0\sin30°=0.5\text{m}$$

在 S 系中，由题意可知

$$l_x=l_y=l_{0y}=0.5\text{m}(\text{因 } y \text{ 方向不收缩})$$

$$\text{而 } l_x=l_{0x}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\quad\therefore\quad v=c\sqrt{1-\left(\frac{l_x}{l_{0x}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}c=0.816c$$

$$l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}=\sqrt{2}\,l_x=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{m}=0.707(\text{m})$$

8-8 试证明：

(1)如果两个事件在某惯性系中同一地点发生，则对一切惯性系来说，这两个事件的时间间隔只有在此惯性系中最短。

(2)如果两个事件在某惯性系中是同时发生的，则对一切惯性系来说，这两个事件的空间距离只有在此惯性系中最短。

证明 略。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

8-9 一原子核以 $0.5c$ 的速度离开一观察者而运动。若原子核先在它运动方向上向前发射一电子，该电子相对核有 $0.8c$ 的速度；此原子核又向后发射一光子指向观察者。对观察者来讲，电子和光子各具有多大的速度？

解 取观察者为 S 系，原子核为 S' 系，则 $v=0.5c$，$u_x'=0.8c$，对观察者而言，电子速度为

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}=0.93c$$

对于光子，$u_x'=-c$，光子相对观察者的速度为

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}=-c$$

这是光速不变原理的必然结果。

8-10 两宇宙飞船相对于某遥远恒星以 $0.8c$ 的速率朝相反方向离开。试求两飞船的相对速度，并将结果与伽利略速度变换所得的结果进行比较分析。

解 取恒星为 S 系，其中一飞船为 S' 系，则有 $v=0.8c$，另一飞船相对于 S 系的速度为 $u_x=-0.8c$

另一飞船相对于 S' 系的速度（即为两飞船的相对速度）为

$$u_x'=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{-0.8c-0.8c}{1-\frac{0.8c\times(-0.8c)}{c^2}}=-0.976c$$

由伽利略速度变换

$$u_x'=u_x-v=-1.6c$$

绝对值大于光速，显然是错误的。

8-11 地球上的观察者发现，一只以速率 $0.6c$ 向东航行的宇宙飞船将在 5s 钟后同一个以 $0.8c$ 速率向西飞行的彗星相撞。问：

(1)飞船中的人们看到彗星以多大的速率向他们接近？

(2)按照飞船上的钟，还有多少时间允许他们离开原来航线避免碰撞？

解 取地面为 S 系，飞船为 S' 系，则有 $v=0.60c$，慧星相对于 S 系的速度为 $u_x=-0.80c$

(1)S' 系中彗星速度

$$u_x'=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=-0.946c$$

(2)若飞船测得的时间为 Δt_0，地面测得为 Δt，则

$$\Delta t_0=\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=4.0\text{s}$$

8-12 设有两把互相平行的尺子在各自静止的参考系中的长度均为 l_0。若它们以相同的速率 v 相对于某一惯性系运动，两把尺都与运动方向平行，但彼此的运动方向相反。求在与其中某一尺固连的参考系中测量的另一把尺子的长度是多少？

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 取上述惯性系为 S 系，与某一尺固定的参考系为 S' 系，则 v 已知，且 $u_x=-v$，另一尺相对于 S' 系的速度为

$$u_x'=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

另一尺在 S' 系中的长度为

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{u_x'^2}{c^2}}=l_0\left(\frac{c^2-v^2}{c^2+v^2}\right)=l_0\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

8-13 一观察者测得某电子质量为 $2m_0$，求电子的速率、动量和能量各为多少？

解 由质速关系 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 得

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}c=0.866c$$

相应的动量和能量分别为

$$p=mv=1.732m_0c,\quad E=2m_0c^2$$

8-14 一电子在实验室中以 $0.6c$ 的速率运动，观察者 A 沿电子运动方向以 $0.8c$ 相对于实验室运动，问 A 观察到的电子的动能和能量各为多少？

解 取实验室为 S 系，观察者为 S' 系，则有 $v=0.80c$，电子相对于 S 系的速度为

$$u_x=0.60c$$

电子相对于观察者（S' 系）的速度为

$$u_x'=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{0.60c-0.80c}{1-\frac{0.8c\times0.6c}{c^2}}=-0.3846c$$

则电子的质量 m、能量 E 和动能 E_k 分别为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_x'^2}{c^2}}}=1.083m_0,\quad E=mc^2=1.083m_0c^2,\quad E_k=mc^2-m_0c^2=0.083m_0c^2$$

8-15 设快速运动的介子能量约为 3 000MeV，而这种介子在静止时的能量为 100MeV。若这种介子的固有寿命为 2×10^{-6}s，求它运动的距离。

解 由质能关系可求出介子的动质量和静止质量。

$$m=\frac{E}{c^2},\quad m_0=\frac{E_0}{c^2},\quad \frac{m_0}{m}=\frac{E_0/c^2}{E/c^2}=\frac{E_0}{E}=\frac{100}{3000}=\frac{1}{30}$$

由动质量公式可求出快速运动介子的速度

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

化简后得

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0}{m}=\frac{1}{30},\quad v=\frac{29.98}{30}c$$

由时间延缓公式

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\tau_0}{1/30}=30\tau_0$$

则快速运动介子走过的距离为

$$l=v\tau=30v\tau_0=30\times\frac{29.98}{30}\times3\times10^8\times2\times10^{-6}=1.799\times10^4(\mathrm{m})$$

8-16 一粒子的静止质量为$\frac{1}{3}\times10^{-26}$kg，以速率$\frac{3}{5}c$垂直进入水泥墙。设墙厚为50cm，粒子从墙的另一面穿出时的速率减少为$\frac{5}{13}c$，求：

(1)粒子受到的墙的平均阻力；

(2)粒子穿过墙所需的时间。

解 $m_0=\frac{1}{3}\times10^{-26}\mathrm{kg}, v_1=\frac{3}{5}c, d=0.5\mathrm{m}, v_2=\frac{5}{13}c$

(1)由功能定理

$$W=\overline{F}d=E_2-E_1=m_2c^2-m_1c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$$

$$\overline{F}=\frac{m_0c^2}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\right)=-10^{-10}\mathrm{N}$$

负号表示阻力。

(2)由冲量定理

$$\overline{F}\cdot\Delta t=m_2v_2-m_1v_1$$

$$\Delta t=\frac{m_2v_2-m_1v_1}{\overline{F}}=\frac{\frac{13}{12}m_0\times\frac{5}{13}c-\frac{5}{4}m_0\times\frac{3}{5}c}{-10^{-10}}=\frac{1}{3}\times10^{-8}(\mathrm{s})$$

8-17 太阳由于向四面空间辐射能量，每秒损失质量4×10^9kg。求太阳的辐射功率。

解 太阳每秒钟辐射的能量为

$$\Delta E=\Delta m\cdot c^2=3.6\times10^{26}\mathrm{J}$$

辐射功率为

$$P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=3.6\times10^{26}\mathrm{W}$$

8-18 在某聚变过程中，四个氢核转变成一个氦核，同时以各种辐射的形式放出能量。已知氢核的静止质量为1.008 1原子质量单位，而一个氦核的静止质量为4.003 9原子质量单位，试计算四个氢核聚变成一个氦核时所释放出来的能量。

解 核反应中能量守恒

$$4m_{\mathrm{H}}c^2=m_{\mathrm{He}}c^2+\Delta E$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

反应中释放出能量为

$$\Delta E=(4m_{\mathrm{H}}-m_{\mathrm{He}})c^2=(4\times1.0081-4.0039)\times1.66\times10^{-27}\times(3.0\times10^8)^2$$
$$=4.258\times10^{-12}(\mathrm{J})$$

8-19 两个相同粒子的静质量为 m_0。若粒子 A 静止，粒子 B 以 $0.6c$ 的速率向 A 碰撞，设碰撞是完全非弹性的，求碰撞后复合粒子的质量、动量及能量。

解 碰撞前后总能量和总动量守恒

$$mc^2+m_0c^2=Mc^2 \tag{1}$$

$$mv=Mv' \tag{2}$$

而

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

$$\therefore\quad M=\frac{9}{4}m_0=2.25m_0,\quad v'=\frac{m}{M}v=\frac{1}{3}c=0.33c$$

其动量 p 和能量 E 分别为

$$p=Mv'=mv=0.75m_0c,$$
$$E=Mc^2=2.25m_0c^2$$

8-20 设有一 π^+ 介子在静止下来后衰变为 μ^+ 子和中微子 ν，三者的静止质量分别为 m_π，m_μ 和 0，求 μ^+ 子和中微子的动能。

解 由已知 $\pi^+\rightarrow\mu^++\nu$，因为能量守恒

$$E_\mu+E_\nu=m_\pi c^2 \tag{1}$$

再由能量和动量关系式

$$E_\mu^2=m_\mu^2c^4+p_\mu^2c^2 \tag{2}$$

$$E_\nu=p_\nu c \tag{3}$$

前后动量守恒

$$p_\mu-p_\nu=0 \tag{4}$$

联立各式解得

$$E_{\mathrm{k}\mu}=E_\mu-m_\mu c^2=\frac{(m_\pi-m_\mu)^2c^2}{2m_\pi},\qquad E_{\mathrm{k}\nu}=E_\nu=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第9章

机械振动

【基本概念和规律】

1. 简谐振动表达式

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

式中振幅 A 表示振动的强弱，角频率 ω 描述时间的周期性，相位 $(\omega t+\varphi)$ 表示 t 时刻的运动状态，初相 φ 表示 $t=0$ 时刻的相位。

2. 简谐振动的能量

$$E=E_k+U=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$$

3. 简谐振动的合成

(1)两个同方向、同频率谐振动的合成

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

式中

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},\quad \varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

①两分振动同相，即

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$$

此时合振动加强，合振幅最大

$$A_{max}=A_1+A_2$$

②两分振动反相，即

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$$

此时合振动减弱，合振幅最小

$$A_{min}=|A_1-A_2|$$

(2)两个同方向、不同频率的谐振动合成：当 $\nu_1+\nu_2\gg|\nu_2-\nu_1|$ 时，产生拍的现象。拍频

$$\nu_{拍}=|\nu_2-\nu_1|$$

(3)两个相互垂直，同频率谐振动合成的轨迹一般是椭圆。

①$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$ 时，运动轨迹为通过原点、斜率为 $\frac{A_2}{A_1}$ 的直线。合振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$。

②$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$ 时，运动轨迹为通过原点、斜率为 $-\frac{A_2}{A_1}$ 的直线。合振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$。

③$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ 时，运动轨迹为右旋正椭圆。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

①$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$时，运动轨迹为左旋正椭圆。

(4)两个相互垂直、不同频率，且两频率成整数比的振动，其合成运动轨迹为李萨如图形，而且是测量频率的一种方法，即 $n_1/n_2=\nu_2/\nu_1$。

【解题指导】

● 证明物体是否作谐振动的方法，首先是分析力。若物体运动能写成 $F=-kx$ 或 $a=-\omega^2x$（ω 是常量）的形式，则物体作谐振动，这两种方法是常用的。若物体运动满足 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，则物体同样作谐振动。

● 求简谐振动表达式的方法是：先写出简谐振动的标准表达式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，由 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 或 $\omega=\sqrt{g/l}$ 等确定系统振动的固有角频率 ω，然后：

(1)由初位移 x_0 和初速度 v_0 求出振幅 A，初相 φ，即

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}},\quad \tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}$$

这里要注意初位移 x_0 和初速度 v_0 的方向（正负号）。

(2)由振动曲线写振动表达式。从振动曲线一般可得到的信息是初位移或某个已知时刻的位移，初速度只知道方向，但大小不知道，以及振动周期等。利用这些信息，通过分析法或旋转矢量法求得振幅 A、初相 φ 及振动频率 ω。若直接在题目中用文字告知上述信息，则写振动表达式的方法与上述一样。

【习题解答】

9-1 已知简谐振动表达式 $x=0.1\cos(8\pi t+\frac{2}{3}\pi)$(SI)，求：

(1)振动频率、周期、振幅、初相，以及速度、加速度的最大值；

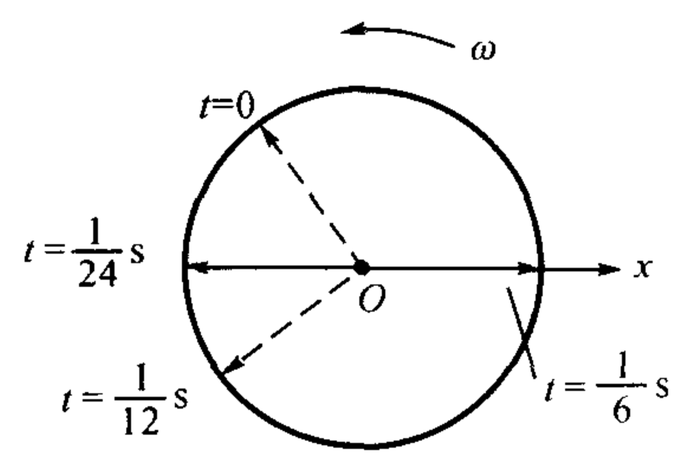
(2)$t=\frac{1}{24}$s，$\frac{1}{12}$s，$\frac{1}{6}$s 等时刻的相位，并用旋转矢量图表示。

解 (1)将振动表达式与标准式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 相比较得

$$A=0.1\text{m},\quad \omega=8\pi\text{rad}\cdot\text{s}^{-1},\quad \varphi=\frac{2}{3}\pi$$

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=4\text{Hz},\quad T=\frac{1}{\nu}=0.25\text{s}$$

$$v_m=A\omega=2.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1},\quad a_m=A\omega^2=63\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$



解 9-1 图

(2)任一时刻的相位

$$\varphi(t)=\omega t+\varphi=8\pi t+\frac{2\pi}{3}$$

分别代入 t 值后得

$$\varphi_1=\pi,\quad \varphi_2=\frac{4}{3}\pi,\quad \varphi_3=2\pi$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

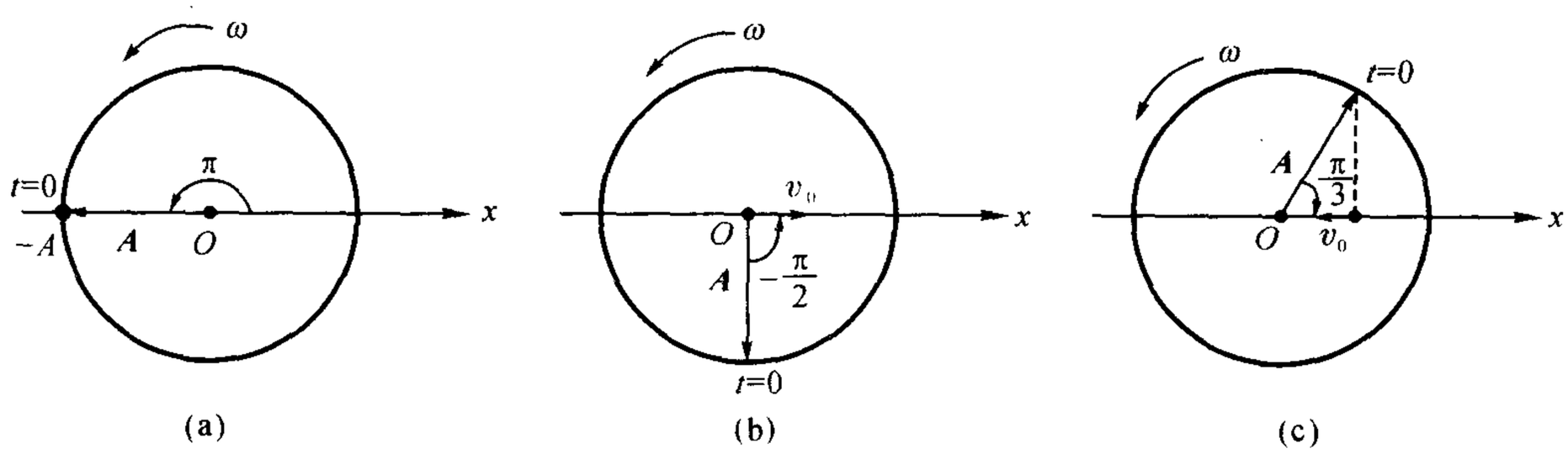
相应的旋转矢量如图所示。

9-2 一弹簧振子沿 x 轴作振幅为 A 的简谐振动，该简谐振动的表达式可用余弦函数表示。若 $t=0$ 时，振动物体的运动状态分别如下，试用旋转矢量图分别确定相应的初相。

(1) $x_0=-A$；

(2) 过平衡位置向 x 轴正方向运动；

(3) 过 $x=\frac{A}{2}$ 处，且向 x 轴负方向运动。



解 9-2 图

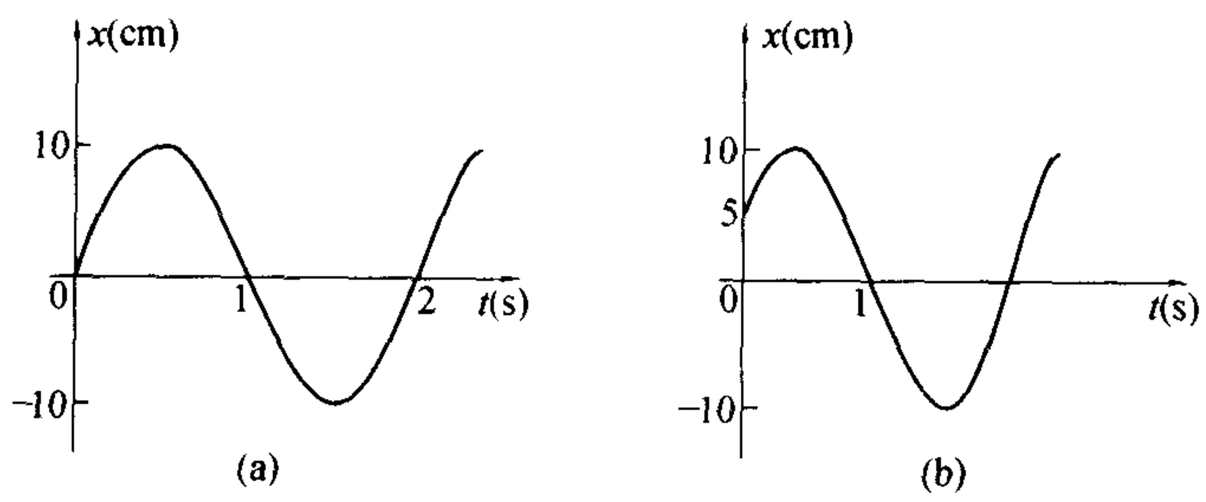
解 (1) $\varphi=\pi$；(2) $\varphi=-\frac{\pi}{2}$；(3) $\varphi=\frac{\pi}{3}$。

9-3 两个小球都在竖直方向上作周期相同的简谐振动，第二个小球的振幅是第一个小球的两倍。当小球 1 自振动正方向回到平衡位置时，小球 2 恰在振动的正方向端点。已知小球 1 的简谐振动表达式为 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$，试写出小球 2 的简谐振动表达式。

解 由题意，小球 1 比小球 2 相应超前 $\frac{\pi}{2}$，故小球 2 的振动表达式为

$$y=2A\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

9-4 如图所示为两谐振动的 x-t 曲线，试分别写出其谐振动表达式。



习题 9-4 图

解 图(a)中，$A=10\text{cm}=0.1\text{m}$，$T=2\text{s}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$。$t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0>0$，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，故有

$$x=0.1\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)(\text{SI})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

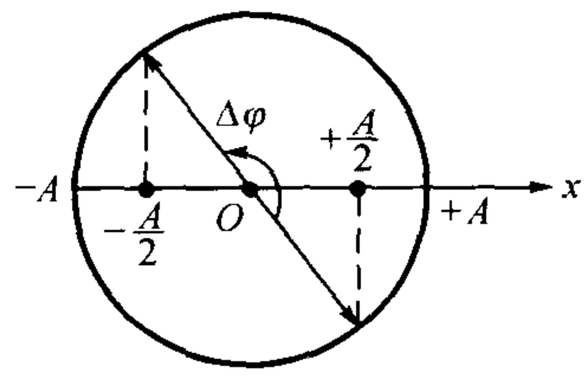
图(b)中 $A=0.1\text{m}$，$t=0$ 时，$x_0=\frac{A}{2}$，$v_0>0$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$。$t=1\text{s}$ 时，$x_1=0$，$v_1<0$，$\varphi_1=\frac{\pi}{2}$，$\varphi_1=\omega t_1+\varphi$，$\omega=\frac{5\pi}{6}$，故有

$$x=0.1\cos\left(\frac{5\pi}{6}t-\frac{\pi}{3}\right)(\text{SI})$$

9-5 一质量为 0.01kg 的物体作谐振动，其振幅为 0.24m，周期为 4s。当 $t=0$ 时，位移为 0.12m，且向 x 轴正方向运动。试求：

(1)$t=1\text{s}$ 时物体所在的位置和所受的力；

(2)由起始位置第一次运动到 $x=-0.12\text{m}$ 处所需的时间。



解 9-5 图

解 由题意，$A=0.24\text{m}$，$T=4\text{s}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$。

$t=0$ 时，$x_0=\frac{A}{2}$，$v_0>0$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，故振动表达式为

$$x=0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)(\text{SI})$$

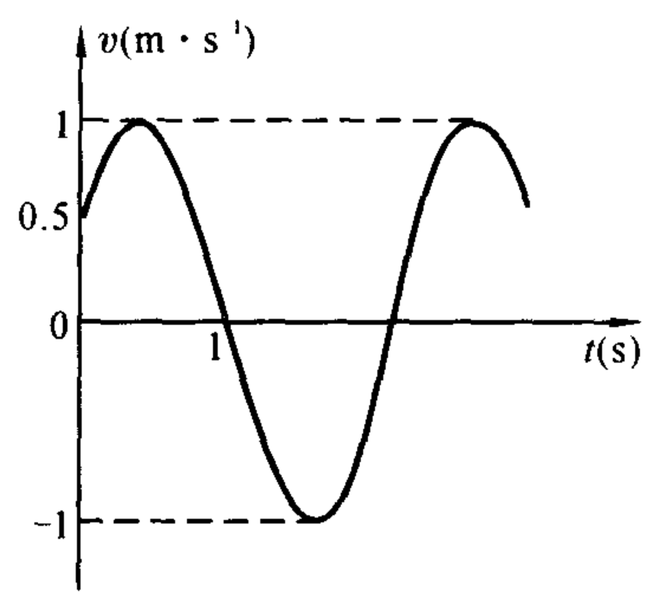
(1)$t=1\text{s}$ 时，

$$x_1=0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0.21\text{m},\quad a_1=-\omega^2x_1,\quad F=ma_1=-5.18\times10^{-3}\text{N}$$

(2)由旋转矢量图可知，从起始位置第一次运动到 $x=-0.12\text{m}$ 处的相位最小改变量 $\Delta\varphi_{\min}=\pi$，故得

$$\Delta t=\frac{\Delta\varphi_{\min}}{\omega}=2\text{s}$$

9-6 已知某物体作简谐振动的 v-t 曲线如图所示，试求此简谐振动的振动表达式。



习题 9-6 图

解 $t=0$ 时，$v_0=\frac{v_m}{2}>0$，且在不断增大，表明质点在接近平衡位置，即 $t=0$ 时，

$$\frac{v_m}{2}=-v_m\sin\varphi,\quad \sin\varphi=\frac{1}{2}$$

因为 $v_0>0$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{6},-\frac{5}{6}\pi$。

再由图示知，v_0 不断增大并接近最大值 v_m，故得

$$x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}A,\quad \varphi=-\frac{5\pi}{6}$$

$t=1\text{s}$ 时，$v_1=0$，下一时刻 $v<0$，同时

$$x_1=A,\quad \varphi_1=0=\omega t+\varphi,\quad \omega=\frac{5\pi}{6}$$

另外因为 $v_m=\omega A$，所以

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$A=\frac{v_m}{\omega}=0.38\text{m}$$

$$\therefore\quad x=0.38\cos\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{5\pi}{6}\right)(\text{SI})$$

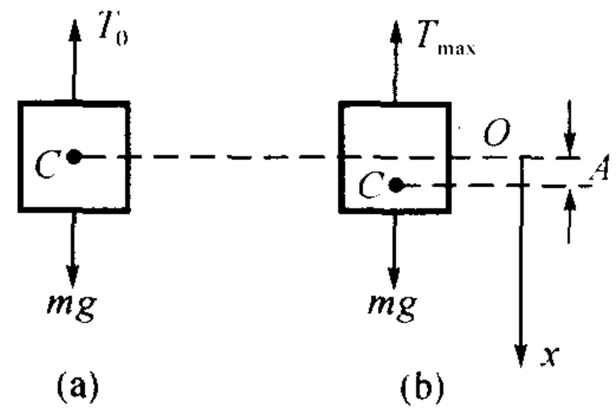
9-7 工地上某卷扬机正在吊一质量为 3 吨的重物，当重物在以 $3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度下降时，卷扬机上吊重物的钢丝绳（其劲度系数为 $2.7\times10^6\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$）的上端突然因故被卡住，问该重物上下振动时产生的最大振幅为多少？钢丝绳受到的最大拉力为多大？

解 振动频率

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{2.7\times10^6}{3\times10^3}}=30(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

由题意知，$t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\frac{v_0}{\omega}=\frac{3}{30}=0.1(\text{m})$$



解 9-7 图

重物处于平衡状态时（解 9-7(a)图），拉力大小为 $T_0=mg$，

取重物平衡时质心 C 位置为坐标原点 O（解 9-7(b)图），向下为 x 轴正方向。当重物向下移动 x 位移时，重物所受合外力为

$$mg-T=-kx$$

当重物向下移动到最大位移，即 $x=A$ 时，钢丝绳受到拉力最大

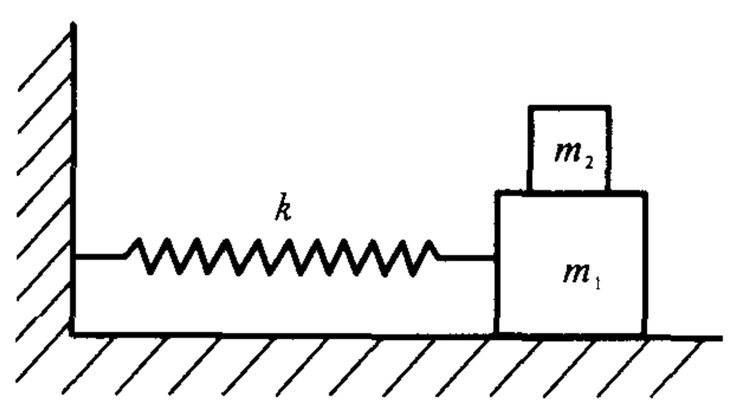
$$T_{max}=mg+kA=3\times10^3\times9.8+2.7\times10^6\times0.1=3\times10^5(\text{N})$$

9-8 播音员是通过扬声器的膜片振动发出动听悦耳的声音的。若扬声器膜片的振幅最大为 $1.0\times10^{-6}\text{m}$，问播音员必须以多高的频率说话才能使膜片的加速度超过 g？

解 已知 $A=1.0\times10^{-6}\text{m}$，则

$$a_{max}=\omega^2A=4\pi^2\nu^2A\geqslant g,\qquad\therefore\quad \nu\geqslant\sqrt{\frac{g}{4\pi^2A}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}=498\text{Hz}$$

9-9 如图所示的系统在光滑的水平面上作简谐振动。弹簧的劲度系数 $k=2.5\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$，物体 $m_1=0.06\text{kg}$，$m_2=0.04\text{kg}$，m_1 和 m_2 之间的静摩擦因数 $\mu_s=0.5$。问要使 m_2 和 m_1 之间无相对滑动，简谐振动的最大振幅和最大动能各是多少？



习题 9-9 图

解 作用在 m_2 上的是 m_1 和 m_2 之间的最大静摩擦力

$$f_{max}=\mu_s m_2 g \tag{1}$$

无相对滑动时

$$a_{max}=\omega^2A_{max}\leqslant\frac{f_{max}}{m_2} \tag{2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \tag{3}$$

联立各式解得

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

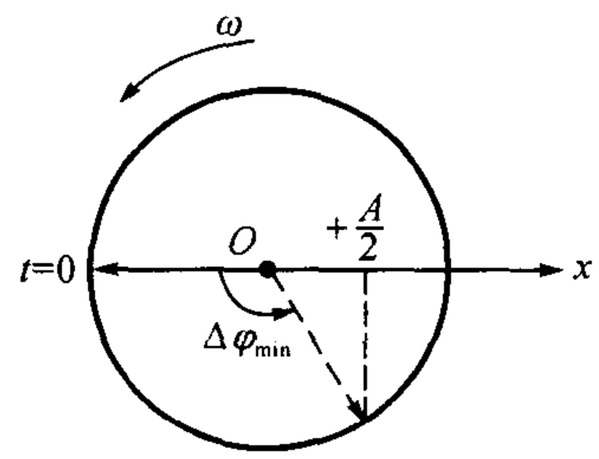
$$A_{max}=\frac{m_1+m_2}{k}\mu_s g=0.196\text{m}, \quad E_{k,max}=\frac{1}{2}kA_{max}^2=4.8\times10^{-2}\text{J}$$

9-10 有一弹簧振子，其弹簧的劲度系数$k=4.5\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$，物体质量$m=0.02\text{kg}$。今把弹簧压缩0.02m后放手，任其自由振动。以放手时刻为计时起点，求：

(1)简谐振动的表达式；

(2)从起始时刻运动到弹簧伸长 0.01m 处所需的最短时间和在这段时间内相位的改变量；

(3)弹簧伸长 0.01m 时振动系统的总能量、势能和动能。



解 9-10 图

解 (1)取物体平衡位置为坐标原点，弹簧拉伸方向为x轴正方向，则由已知，$t=0$时，

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=15\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_0=0, \quad x_0=-0.02\text{m}$$

$$\varphi=\pi, \quad A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.02\text{m}$$

$$x=0.02\cos(15t+\pi)(\text{SI})$$

(2)由旋转矢量图可知，相位最小改变量$\Delta\varphi_{min}=\frac{2}{3}\pi$，最短时间为

$$\Delta t_{min}=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=0.14\text{s}$$

(3)总能量为

$$E=\frac{1}{2}kA^2=9\times10^{-4}\text{J}$$

势能和动能分别为

$$U=\frac{1}{2}kx^2=2.25\times10^{-4}\text{J}, \quad E_k=E-U=6.75\times10^{-4}\text{J}$$

9-11 有一单摆摆线长$l=1.0\text{m}$，摆锤质量$m=0.01\text{kg}$。$t=0$时，摆角$\theta_0=-0.06\text{rad}$，角速度$\Omega_0=0.2\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$。若摆向平衡位置摆动，求：

(1)简谐振动表达式；

(2)初始时刻单摆的势能和动能。

解 (1)单摆振动的圆频率ω、最大摆角θ_m、相位角φ分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=3.31\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}, \quad \theta_m=\sqrt{\theta_0^2+\frac{\Omega_0^2}{\omega^2}}=8.8\times10^{-2}\text{rad}, \quad \varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{\Omega_0}{\omega\theta_0}\right)=3.96\text{rad}$$

$$\therefore \quad \theta=8.8\times10^{-2}\cos(3.13t+3.96)(\text{SI})$$

(2)$t=0$时，单摆的势能U、动能E_k分别为

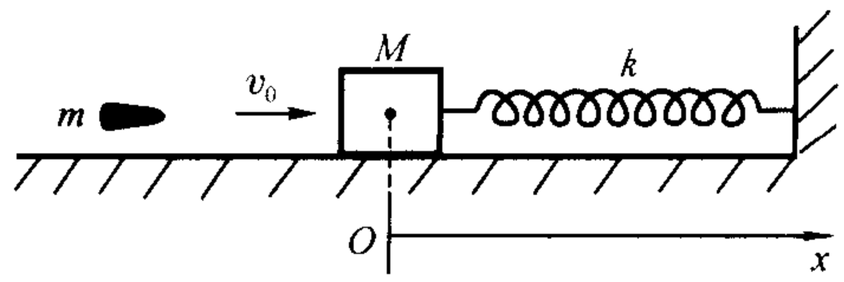
$$U=mgl(1-\cos\theta_0)=1.77\times10^{-4}\text{J}$$

$$E_k=\frac{1}{2}I\Omega_0^2=\frac{1}{2}ml^2\Omega_0^2=2\times10^{-4}\text{J}$$

9-12 如图所示，质量$M=0.99\text{kg}$的滑块和劲度系数$k=10^4\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$的弹簧组成一弹

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

簧振子，静止在光滑水平面上。一质量为 $m=0.01\text{kg}$ 的子弹以速率 $v_0=400\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 沿水平方向射入滑块内，并和滑块一起振动。以滑块开始运动作为计时起点，写出滑块的振动方程。



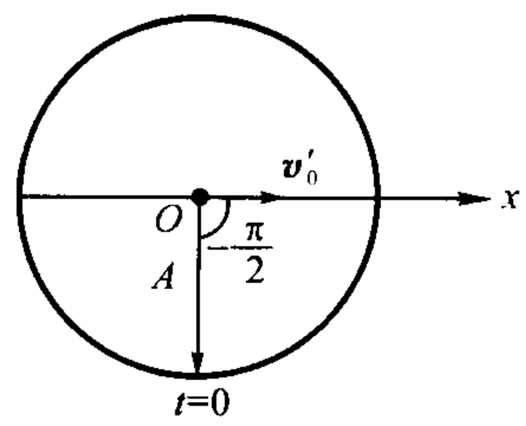
习题 9-12 图

解 子弹射入滑块过程中，系统（子弹＋滑块）动量守恒，其碰撞后的共同速度为

$$v=\frac{mv_0}{m+M}=\frac{0.01\times400}{0.01+0.99}=4(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

碰撞后的过程是以子弹和滑块为弹簧振子的简谐振动，振动频率为

$$\omega=\sqrt{k/(m+M)}=\sqrt{\frac{10^4}{0.01+0.99}}$$
$$=100(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$



解 9-12 图

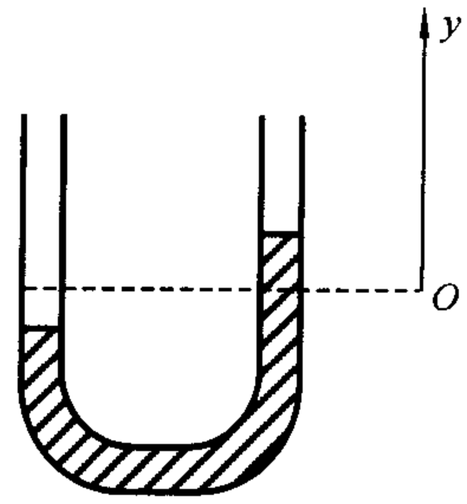
初始条件为 $t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0'=v=4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，

$$\therefore\quad A=\sqrt{x_0^2+(v_0'/\omega)^2}=\frac{v_0'}{\omega}=\frac{4}{100}=4\times10^{-2}(\text{m})$$

由弹簧振子的旋转矢量图可知 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，故滑块的简谐振动方程为

$$x=4\times10^{-2}\cos(100t-\frac{\pi}{2})(\text{SI})$$

9-13 一竖直放置的 U 形管横截面积为 S，管内盛有水银，其密度为 ρ，质量为 m。现使水银在管内作微振动，忽略摩擦阻力，求其振动周期。



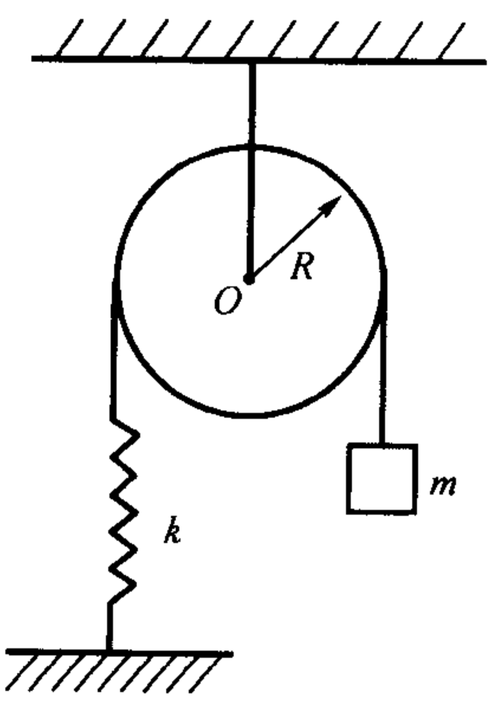
习题 9-13 图

解 设右侧水银柱上升一小段位移 y，相应左侧水银柱下降 y，两侧的压力差为

$$-2\rho Sgy=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{2\rho Sg}{m}y$$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}$$

9-14 一定滑轮半径为 R，转动惯量为 I，其上挂一轻绳，绳的一端系一质量为 m 的物体，另一端与一固定的轻弹簧相连，如图所示。弹簧劲度系数为 k，绳与滑轮间无相对滑动，滑轮转轴处的摩擦力可以忽略。将物体从平衡位置拉下一微小距离后放手，试证明物体作简谐振动，并求出振动周期。



习题 9-14 图

证明 取振动物体平衡位置处为坐标原点 O'，竖直向下为 x 轴正方向。设平衡时，弹簧伸长量为 x_0，则

$$x_0=\frac{mg}{k}\qquad(1)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

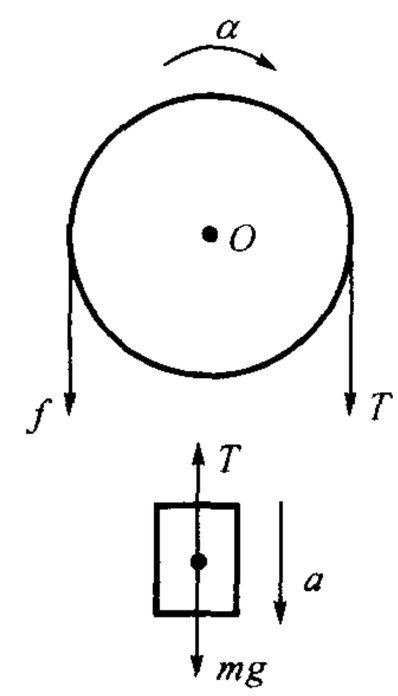
设物体从平衡位置沿 x 轴向下运动 x 时

$$mg-T=ma=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

$$TR-fR=I\alpha \tag{3}$$

$$a=R\alpha \tag{4}$$

$$f=k(x+x_0) \tag{5}$$



解 9-14 图

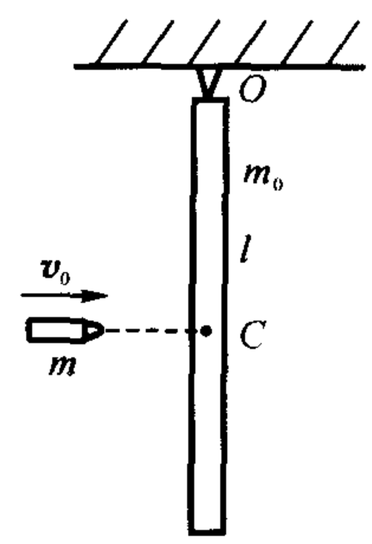
联立各式可得

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m+\frac{I}{R^2}}x$$

因此物体作简谐振动，

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{I}{R^2}}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{mR^2+I}{kR^2}}$$

9-15 如图所示，质量为 m_0、长为 l 的匀质细棒可绕轴自由转动。若有一质量为 m 的子弹，以水平速度 $\boldsymbol{v}_0$ 射入棒的中心 C 处后，棒作谐振动（即摆角 θ 较小），试计算它的振动周期及振动表达式（以子弹射入棒瞬间为计时起点）。



习题 9-15 图

解 因为子弹射入棒过程中，系统角动量守恒（对过 O 点的水平轴），

$$\therefore\quad mv_0\frac{l}{2}=I\Omega_0=\left(\frac{1}{3}m_0l^2+\frac{1}{4}ml^2\right)\Omega_0$$

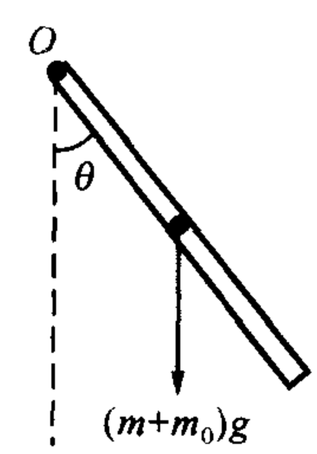
$$\Omega_0=\frac{6mv_0}{(4m_0+3m)l}$$

最大摆角 θ_m 满足

$$\frac{1}{2}I\Omega_0^2=(m+m_0)g\frac{l}{2}(1-\cos\theta_m)$$

设任一时刻摆角为 θ，由定轴转动定律

$$-(m+m_0)g\frac{l}{2}\sin\theta=I\alpha=\left(\frac{1}{3}m_0l^2+\frac{1}{4}ml^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



解 9-15 图

由于 θ 很小，$\sin\theta\approx\theta$，故有

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{6(m_0+m)g}{(4m_0+3m)l}\theta$$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{6(m+m_0)g}{(4m_0+3m)l}},\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{(4m_0+3m)l}{6(m_0+m)g}}$$

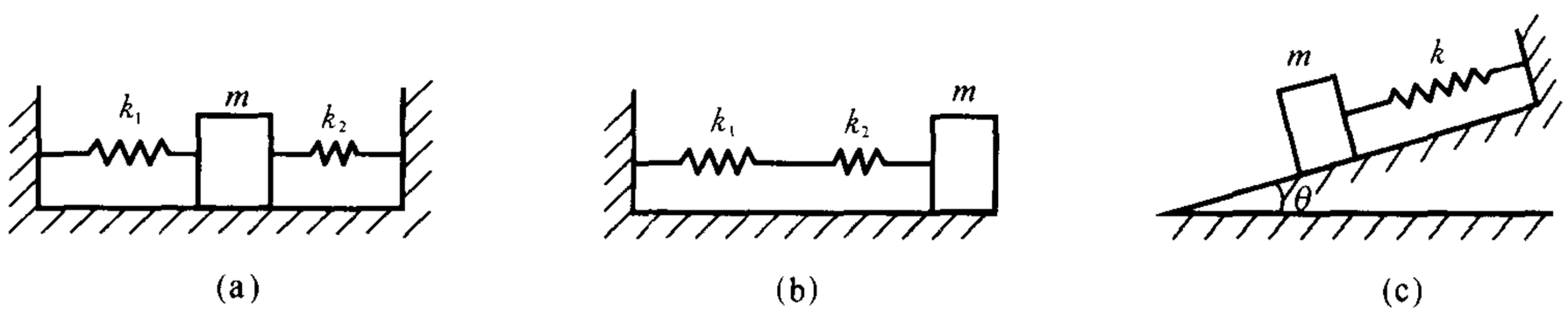
因为 $t=0$ 时，$\Omega_0=\Omega_{\max}>0$，$\theta_0=0$，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，故振动表达式为

$$\theta=\theta_m\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

9-16 如图所示的三种振动系统中，k_1，k_2，k 分别为弹簧的劲度系数，m 为物体的质量。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

若弹簧的质量和物体 m 与接触面之间的摩擦可以忽略，试分别计算三种系统的固有频率。



习题 9-16 图

解 这三种系统均为弹簧振子系统，由此可得(a)、(b)、(c)中固有频率分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}},\quad \omega=\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}},\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

9-17 固体中原子在常温下的振动频率约为 10THz($1\text{THz}=10^{12}\text{Hz}$)，假想原子间以类似“弹簧”的作用相连。若在这种情况下，一个银原子以上述频率振动，而其他原子均保持静止，试计算该谐振动的“劲度系数”k。(1mol 银原子有 6.02×10^{23}个原子，其摩尔质量为 0.108kg)

解 每个银原子质量 $m=\dfrac{0.108}{6.02\times10^{23}}=1.794\times10^{-25}(\text{kg})$，振动频率 $\nu=10^{13}\text{Hz}$，类似于弹簧振子，故

$$\omega=\sqrt{k/m},\quad k=4\pi^2\nu^2m=708\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

9-18 就竖直振动而言，可以认为一辆汽车是被安装在一弹簧上的。若汽车质量为 3×10^3kg，其固有振动频率为 3Hz，试求：

(1)弹簧的劲度系数；

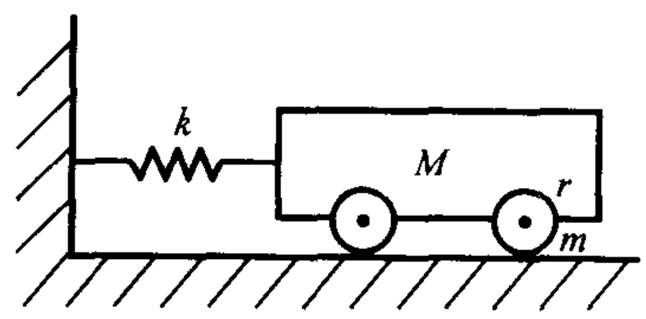
(2)若汽车载重物的质量为 10^3kg，其载重后的振动频率为多少？

解 (1)已知 $m=3\times10^3\text{kg}$，$\nu=3\text{Hz}$，故

$$\omega=2\pi\nu=\sqrt{k/m},\quad k=4\pi^2\nu^2m=1.066\times10^6\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

(2)$\omega'^2=\dfrac{k}{m+M}$，$\quad \nu'=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}=2.6\text{Hz}$

9-19 如图所示，一辆小车由车体和装在光滑轴上的四个车轮组成。设车体的质量为 M，每个轮子可看作半径为 r、质量为 m 的均匀圆盘。若小车在所系弹簧作用下在水平路面上作来回无滑动的运动，弹簧的劲度系数为 k，求小车的振动频率。



习题 9-19 图

解 设小车某时刻离开平衡位置(坐标原点)O 的距离为 x，速度为 v，由于在整个运动中小车作纯滚动，故机械能守恒：

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}Mv^2+4\cdot\frac{1}{2}mv^2+4\cdot\frac{1}{2}I_c\omega^2=\text{恒量}$$

$$\omega=\frac{v}{r},\quad I_c=\frac{1}{2}mr^2$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(M+6m)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\text{恒量}$$

对上式用时间求一次导数得

$$kx+(M+6m)\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \therefore\omega=\sqrt{\frac{k}{M+6m}},\quad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+6m}}$$

9-20 沿轨道匀速行驶的火车经过接轨处时都要受到震动，从而使车厢在弹簧上作上下振动。设每段铁轨长为 12.5m，弹簧每受 10^4N 的重力作用即压缩 1.6×10^{-3}m。若空气阻力不计，每根弹簧所支持的车厢及其载重共为 0.5×10^3kg，火车的危险速度为多少？

解 这是一个近似无阻尼的强迫振动

$$k=\frac{10^4}{1.6\times10^{-3}}=6.25\times10^6(\mathrm{N\cdot m^{-1}}),\quad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6.25\times10^6}{0.5\times10^3}}=17.8(\mathrm{Hz})$$

故危险速率为

$$v=\nu L=222.5\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

9-21 有两个同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1=0.05\cos(10t+\frac{3}{4}\pi),\qquad x_2=0.06\cos(10t+\frac{\pi}{4})(\mathrm{SI})$$

试求：(1)合振动的振幅和初相；

(2)若另有一方向和频率均相同的简谐振动 $x_3=0.07\cos(10t+\varphi_3)$(SI)，问当 φ_3 为何值时，x_1+x_3 的振幅最大？

(3)φ_3 为何值时，x_2+x_3 的振幅最小？

解 (1)由同方向、同频率两个谐振动合成的结果得

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}=0.078\mathrm{m}\quad \varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=84.8^\circ$$

(2)当 $\varphi_3-\frac{3}{4}\pi=0$，$\varphi_3=\frac{3}{4}\pi$ 时，x_1+x_3 振幅最大。

(3)$\varphi_3-\frac{\pi}{4}=\pi$，$\varphi_3=\frac{5\pi}{4}$时，$x_2+x_3$ 振幅最小。

9-22 有两个同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1=0.4\cos(4\pi t+\frac{\pi}{6}),\qquad x_2=0.2\cos(4\pi t+\frac{5\pi}{6})(\mathrm{SI})$$

试写出这两谐振动合成的振动表达式。

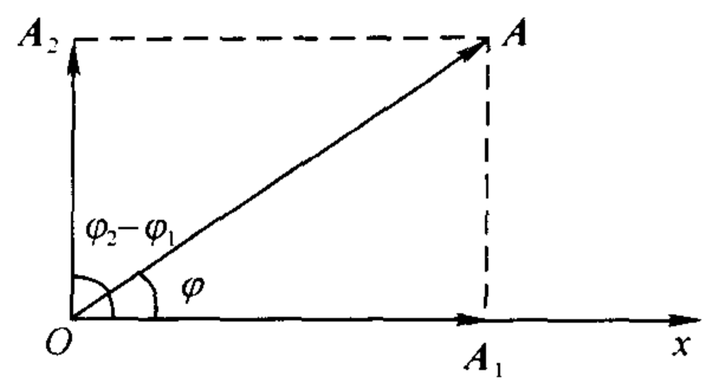
解∵ $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}=0.346\mathrm{m}$，$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=\frac{\pi}{3}$

故合振动表达式为

$$x=0.346\cos(4\pi t+\frac{\pi}{3})(\mathrm{SI})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

9-23 有两个同方向、同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 0.2m，相位与第一振动的相位差为$\frac{\pi}{6}$。若第一振动的振幅为$\sqrt{3}\times10^{-1}$m，求第二振动的振幅及第一、第二两个振动之间的相位差。



解 9-23 图

解 可用旋转矢量法合成图求解。如解 9-23 图所示，可得第二个振动的振幅为

$$A_2=\sqrt{A_1^2+A^2-2A_1A\cos\varphi}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}\times10^{-1})^2+(0.2)^2-2(\sqrt{3}\times10^{-1})\times0.2\cos\frac{\pi}{6}}=0.10(\text{m})$$

$$\because\quad A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{A^2-A_1^2-A_2^2}{2A_1A_2}=0$$

两振动的相位差为

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

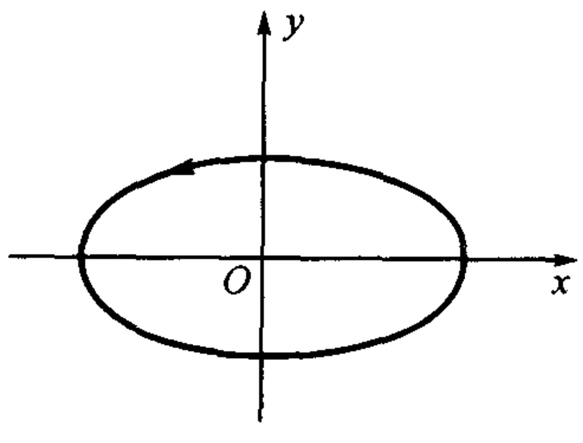
9-24 质量为 m 的质点同时参与互相垂直的两个振动，其振动表达式为

$$x=0.06\cos(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}),\qquad y=0.03\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6})(\text{SI})$$

求：(1)用旋转矢量法求出质点的运动轨迹，并指明它是顺时针旋转还是逆时针旋转？

(2)质点在任意位置所受的作用力。

解 (1)因 $\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$，质点运动轨迹为正椭圆，逆时针方向旋转(左旋)，如图所示。



解 9-24 图

(2)任一位置质点受力为

$$F_x=ma_x=-m\omega^2x,\quad F_y=ma_y=-m\omega^2y$$

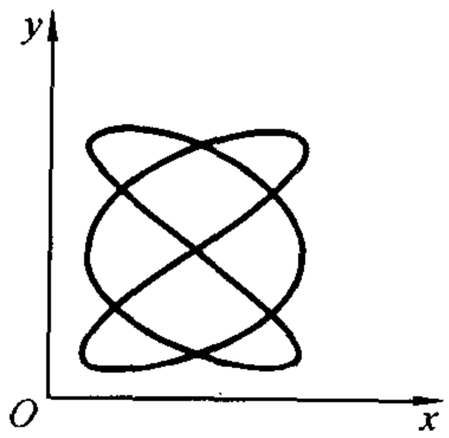
$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$$

9-25 为了测待测音叉的频率，可使其和标准音叉(频率为 256Hz)同时发音，听到时强时弱的嗡嗡声。若测得在 30s 内，音响的强弱变化为 75 次，问待测音叉的频率是多少？

解 由题意知拍频为

$$\nu_b=\frac{75}{30}=2.5(\text{Hz}),\quad \nu_{待}=\nu_{标}\pm\nu_b=256\pm2.5\text{Hz}$$

9-26 在示波器的水平和垂直输入端分别加上余弦式的交流电压，荧光屏上出现如图所示的闭合曲线。已知水平方向振动的交流电频率为 2.70×10^4Hz，求垂直方向振动的交流电频率。



习题 9-26 图

解 图形与水平线的交点数 $n_x=4$，与竖直线的交点数为 $n_y=6$，则垂直与水平方向振动的交流电频率之比为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\frac{\nu_y}{\nu_x}=\frac{n_x}{n_y}$$

$$\nu_y=\frac{n_x}{n_y}\nu_x=\frac{4}{6}\times 2.7\times 10^4=1.8\times 10^4(\mathrm{Hz})$$

9-27 设有一质点同时参与两个振动方向相互垂直的简谐振动：

$$x=A_1\cos 2\pi\nu_1 t,\qquad y=A_2\cos(2\pi\nu_2 t+\Delta\varphi)$$

请设计一个计算机程序来演示质点的合成运动轨迹。要求程序可以输入两振动的振幅 A_1 和 A_2、振动频率 ν_1 和 ν_2 及它们的相位差 $\Delta\varphi$，并分下列两种情况进行分析：(为简单计，可假设 $A_1=A_2$)

(1) $\nu_1=\nu_2$，$\Delta\varphi$ 取 $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{3\pi}{2}$ 等值；

(2) $\nu_1=50,\nu_2=100,\Delta\varphi=0,\frac{\pi}{4}$；$\nu_1=200,\nu_2=300,\Delta\varphi=0,\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}$。

解 程序略。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第10章

机械波

【基本概念和规律】

1. 平面简谐波表达式

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi],\quad y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi],\quad y=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut-x)+\varphi]$$

2. 波速、波长和频率间的关系为

$$u=\lambda\nu$$

$u=\lambda\nu$

3. 平面简谐波表达式的物理意义

(1)x 给定，y 只是 t 的函数，平面简谐波表达式变为该点的振动表达式。

(2)t 给定，y 只是 x 的函数，平面简谐波表达式变为该时刻的波形图。

(3)x 和 t 都变化，平面简谐波表达式反映了波形的传播。

4. 机械波的能量和能流

(1)平均能量密度：$\overline{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

(2)平均能流密度(波的强度)：$I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

5. 波的干涉

(1)波的干涉现象：指两列相干波叠加时振动强度出现稳定的加强或减弱的现象。

(2)波的相干条件：两列波振动方向相同，频率相同，有恒定的相位差。

(3)波的干涉加强和减弱条件是：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\begin{cases}\pm 2k\pi, & k=0,1,2,\cdots\text{干涉加强}\\ \pm(2k+1)\pi, & k=0,1,2,\cdots\text{干涉减弱}\end{cases}$$

6. 驻波

驻波是一种特殊的干涉现象。两列振幅相同的相干波在同一直线上沿相反方向传播时形成驻波。

波节：合振幅始终为零的各点。

波腹：合振幅最大的各点。

相邻两波节或波腹之间的距离为 $\lambda/2$。

驻波的波形不前进，能量也不向前传播，只是动能和势能在波腹和波节附近不断地进行相互转换。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

7. 半波损失

当行波从波疏介质(ρu 较小)入射到波密介质(ρu 较大),在波密介质界面上反射时,反射波的相位产生 π 的突变,称为半波损失。计算波程时要附加 $\lambda/2$。

8. 多普勒效应

波源和观察者有相对运动时,观察者接收到的频率与波源的振动频率不同。这种现象称为多普勒效应。

当观察者和声源相互接近时:$\nu_r=\dfrac{u+v_r}{u-v_s}\nu_s$

当观察者和声源彼此离开时:$\nu_r=\dfrac{u-v_r}{u+v_s}\nu_s$

【解题指导】

● 已知波的表达式求解波长、频率和波速等物理量的方法,是将已知波的表达式与波的表达式的标准形式进行比较,求出相应的物理量,这种方法称为波的表达式系数比较法。

● 建立波的表达式的方法可归纳如下:

(1)写出波在介质中某点 A 的振动表达式;

(2)建立坐标系;

(3)在坐标轴上任取一点,求出该点相对于 A 点振动的落后(或超前)时间 t';

(4)将 A 点振动表达式中的 t 减去落后时间 t'(或加上超前时间 t')后,即为波的表达式。

● 利用波形图亦可建立波的表达式。我们只要利用波形图提供的信息写出某点的振动表达式,其他步骤与上述方法一样。

● 在建立入射波和反射波的表达式时,要注意共用一个坐标系和同一时间起点。这对研究驻波表达式也是很重要的。另外,在写反射波的表达式时,还要注意考虑有无半波损失。

● 解决相干波干涉问题应注意三点:

(1)两波是相干波,否则不能形成干涉;

(2)在同一坐标系,同一时间起点建立两波的表达式;

(3)关键是求出两波在某点振动的相位差,若相位差 $\Delta\varphi=2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,则两波在该点干涉加强,若相位差 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,则两波在该点干涉减弱。

两波干涉的本质是两波在空间某点各自产生的两个简谐振动的合成。

● 解决经典多普勒效应问题时,要注意三点:

(1)波的频率公式和概念。$\nu=u/\lambda$,即单位时间内通过某点的波数;

(2)观察者运动改变波速。接近波源,波速变大,离开波源,波速变小;

(3)波源运动改变波长。接近观察者,波长变短,离开观察者,波长变长。

【习题解答】

10-1 潮汐波在太平洋中的速率约为 $740\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$,波长为 300km,问其频率为多大?从日本到美国旧金山的距离为 $8\times10^3\text{km}$,问潮汐波传播所需的时间?

解 $\nu=\dfrac{u}{\lambda}=\dfrac{740/3600}{300}=6.85\times10^{-4}(\text{Hz})$, $t=\dfrac{s}{u}=\dfrac{8\times10^3}{740}=10.8(\text{h})$

$\nu=\frac{u}{\lambda}$ $t=\frac{s}{u}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

10-2 (1)频率在 $20\sim20\times10^3$Hz 的弹性波能触发人耳的听觉。设空气里的声速为 $330\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,求这两个频率声波的波长;

(2)人眼所能见到的光(可见光)的波长范围是 400nm(紫光)到 760nm(红光),求可见光的频率范围。($1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$,光速 $c=3\times10^8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

解 (1)∵ $\nu=20\sim20\times10^3\text{Hz}$, $u=330\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, ∴ $\lambda_1=\dfrac{u}{\nu_1}=16.5\text{m}$, $\lambda_2=\dfrac{u}{\nu_2}=1.65\times10^{-2}\text{m}$

(2)∵ $\lambda=400\sim760\text{nm}$, $c=3\times10^8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, ∴ $\nu=\dfrac{c}{\lambda}=7.5\times10^{14}\sim3.95\times10^{14}\text{Hz}$

10-3 据报道,1976 年唐山大地震,有些物体曾被猛地向上抛起 2m 高。设地震横波为简谐波,且频率为 1Hz,波速为 $3\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$。问此地震波的波长多大?振幅多大?

解 波长 $\lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{3\times10^3}{1}=3\times10^3(\text{m})$,振幅 $A=\dfrac{2}{2}=1\text{m}$。

10-4 频率为 500Hz 的平面波,波速 $u=350\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。问:

(1)同一波线上,相位差为 $\pi/3$ 的两点相距多远?

(2)介质中某质元在时间间隔为 10^{-3}s 的两个振动状态的相位差是多少?

解 (1)由 $\Delta\varphi=2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}$, $\lambda=\dfrac{u}{\nu}$,得 $\Delta x=\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\dfrac{u}{\nu}=0.117\text{m}$

(2)$\Delta\varphi=\omega\Delta t=2\pi\nu\Delta t=\pi$

10-5 频率为 3.0×10^3Hz、振幅为 1.0×10^{-3}m 的声波,以波速 $u=1.56\times10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$沿 x 轴正方向传播,已知 x 轴上 A 和 B 两点的距离为 $x_B-x_A=0.13\text{m}$。求:

(1)波长 λ;

(2)波从 A 传至 B 所需的时间;

(3)同一时刻,B 点的振动相位比 A 点的振动相位落后多少?

(4)质点振动速度和加速度的最大值。

解 (1)$\lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{1.56\times10^3}{3.0\times10^3}=0.52(\text{m})$

(2)$\Delta t=\dfrac{\Delta x}{u}=\dfrac{0.13}{1.56\times10^3}=8.3\times10^{-5}(\text{s})$

(3)$\Delta\varphi=2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}=2\pi\times\dfrac{0.13}{0.52}=\dfrac{\pi}{2}$

(4)$v_m=A\omega=A2\pi\nu=18.8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $a_m=A\omega^2=3.55\times10^5\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

10-6 已知一平面简谐波的表达式为 $y=5\cos(8t+3x+\dfrac{\pi}{4})$ (SI),问:

(1)该平面波沿什么方向传播?

(2)它的频率、波长和波速各是多少?

(3)表达式中的 $\pi/4$ 有什么意义?

解 (1)因为沿 x 轴负方向平面简谐波的表达式的标准形式为

$$y=A\cos\left[2\pi\left(\nu t+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

比较后得该平面波沿 x 轴负方向传播。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)将已知波的表达式与标准形式进行系数比较后得

$$2\pi\nu=8,\nu=\frac{4}{\pi}\ \text{Hz};\quad \frac{2\pi}{\lambda}=3,\lambda=\frac{2}{3}\pi\text{m};\quad u=\lambda\nu=\frac{2}{3}\pi\times\frac{4}{\pi}=\frac{8}{3}(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

(3)$\frac{\pi}{4}$表示波在坐标原点 $x=0$ 处,$t=0$ 时刻的初相。

10-7 某潜艇声纳发出的超声波表达式为:

$$y=1.20\times10^{-3}\cos(10^5\pi t-220x)(\text{SI})$$

求:(1)波源的振幅和频率;

(2)海水中超声波的波长和波速;

(3)距波源为 $x_1=8.00\text{m}$ 与 $x_2=8.05\text{m}$ 处两质点的振动相位差。

解 (1)由波动的表达式可知振幅 A、频率 ν 分别为

$$A=1.2\times10^{-3}\text{m},\quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{10^5\pi}{2\pi}=5\times10^4(\text{Hz})$$

(2)波长 λ 和波速 u 分别为 $\lambda=\frac{2\pi}{220}=2.85\times10^{-2}(\text{m})$, $u=\lambda\nu=1.43\times10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

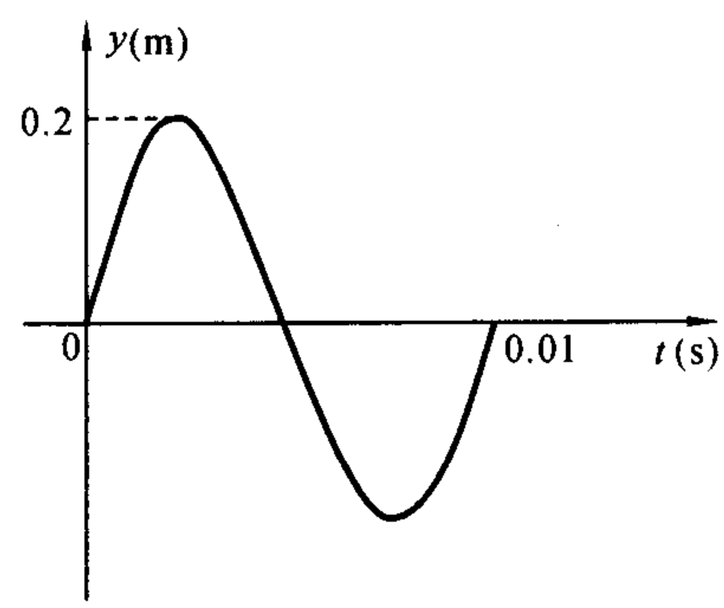
(3)振动相位差 $\Delta\varphi$ 为:$\Delta\varphi=2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}=220\times0.05=11(\text{rad})$

10-8 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播,波速 $u=400\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$x=0$ 处质点的简谐振动曲线如图所示。求:

(1)平面简谐波的表达式;

(2)$x=2\text{m}$ 处质点的振动表达式;

(3)$x_1=15\text{m}$ 和 $x_2=16\text{m}$ 处两质点的相位差。



习题 10-8 图

解 (1)由振动曲线可知,$t=0$ 时

$$y_0=A\cos\varphi=0,\quad \cos\varphi=0,\quad \varphi=\pm\frac{\pi}{2},$$

$$v_0=-A\omega\sin\varphi>0,\quad \sin\varphi<0,$$

故 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, $T=0.01\text{s}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=200\pi$

$$y_{(0,t)}=0.2\cos(200\pi t-\frac{\pi}{2})(\text{SI})$$

平面简谐表达式为

$$y_{(x,t)}=0.2\cos\left[200\pi\left(t-\frac{x}{400}\right)-\frac{\pi}{2}\right](\text{SI})$$

(2)将 $x=2\text{m}$ 代入波动表达式得

$$y_{(2,t)}=0.2\cos\left(200\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)(\text{SI})$$

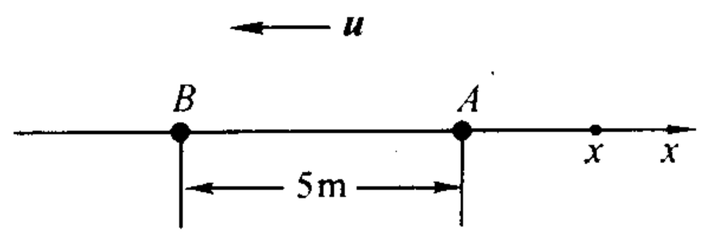
(3)
$$\Delta\varphi=\omega\Delta t=\omega\frac{\Delta x}{u}=200\pi\times\frac{16-15}{400}=\frac{\pi}{2}$$

10-9 一平面简谐波以速度 $u=10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$沿 x 轴负方向传播,波线上 A 点的振动表达式 $y_A=2\cos(2\pi t+\varphi)(\text{SI})$,$B$ 点和 A 点相距 5m,如图所示。试分别以 A 和 B 为坐标原点写

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

出平面简谐波的表达式。

解 取 A 点为坐标原点，只需将振动表达式中的 t 换成 $t+\frac{x}{u}$ 就是波动的表达式，即



习题 10-9 图

$$y=2\cos\left[2\pi\left(t+\frac{x}{10}\right)+\varphi\right](\mathrm{SI})$$

取 B 点为坐标原点，在轴上任取一点 x，该点振动比 A 点振动超前时间 $t'=\frac{x-5}{10}$，故得波动表达式为

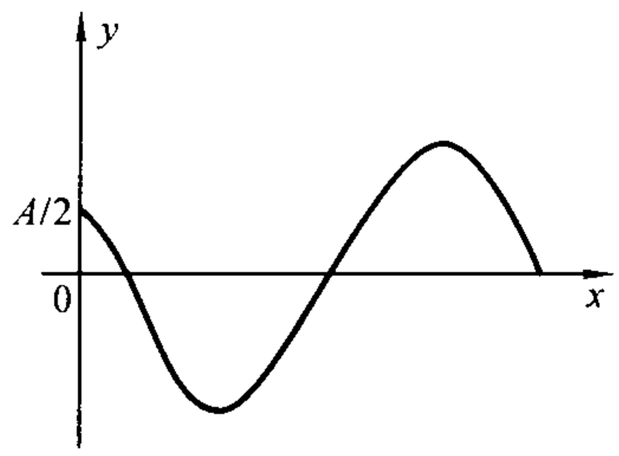
$$y=2\cos\left[2\pi\left(t+\frac{x-5}{10}\right)+\varphi\right],\quad y=2\cos\left[2\pi\left(t+\frac{x}{10}\right)-\pi+\varphi\right](\mathrm{SI})$$

10-10 沿 x 轴正方向传播的平面简谐波在 $t=0$ 时的波形曲线如图所示，波长 $\lambda=1\mathrm{m}$，波速 $u=10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，振幅 $A=0.1\mathrm{m}$。试写出：

(1)O 点的振动表达式；

(2)平面简谐波表达式；

(3)$x=1.5\mathrm{m}$ 处质点的振动表达式。



习题 10-10 图

解 (1)$t=0$ 时，$y_0=\frac{A}{2}=A\cos\varphi,\cos\varphi=\frac{1}{2},\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$

$$v_0=-A\omega\sin\varphi>0,\quad \sin\varphi<0,$$

故

$$\varphi=-\frac{\pi}{3},T=\frac{\lambda}{u}=0.1\mathrm{s},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=20\pi\mathrm{s}^{-1}$$

$$\therefore\quad y_{(0,t)}=0.1\cos\left(20\pi t-\frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{SI})$$

(2)$y_{(x,t)}=0.1\cos\left[20\pi\left(t-\frac{x}{10}\right)-\frac{\pi}{3}\right](\mathrm{SI})$

(3)将 $x=1.5\mathrm{m}$ 代入 $y_{(x,t)}$ 得

$$y_{(1.5,t)}=0.1\cos\left(20\pi t-\frac{10}{3}\pi\right)=0.1\cos\left(20\pi t-\frac{4}{3}\pi\right)(\mathrm{SI})$$

10-11 一电台的功率为 500W，求距电台 500km 处电磁波的平均能流密度(设电磁波为球面波)。

解 波的平均能流密度为

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\frac{500}{4\pi(5\times10^5)^2}=1.6\times10^{-10}(\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2})$$

10-12 一平面简谐波在介质中传播，波速 $u=10^3\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，振幅 $A=1.0\times10^{-4}\mathrm{m}$，频率 $\nu=10^3\mathrm{Hz}$，介质密度 $\rho=800\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$。求：

(1)波的强度；

(2)60s 内通过垂直于波传播方向上面积为 $S=4\times10^{-4}\mathrm{m}^2$ 平面的能量。

解 (1)波的强度为

$$I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u=\frac{1}{2}\times800\times(1.0\times10^{-4})^2\times(2\pi\times10^3)^2\times10^3=1.58\times10^5(\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2})$$

(2)60s 内通过 S 的能量为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$E=ISt=1.58\times10^{-}\times4\times10^{-4}\times60=3.79\times10^{3}(\mathrm{J})$$

10-13 S_1 和 S_2 是两个相干波源，相距为 1/4 波长，S_1 比 S_2 相位超前 $\pi/2$。设两波在 S_1 和 S_2 连线方向的强度相同且不随距离变化，皆等于 I_1。问此连线上在 S_2 外侧各点合成波的强度是多少？S_1 外侧各点合成波的强度是多少？

解 在 S_2 外侧

$$\because\quad \Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1S_2}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}=0,$$

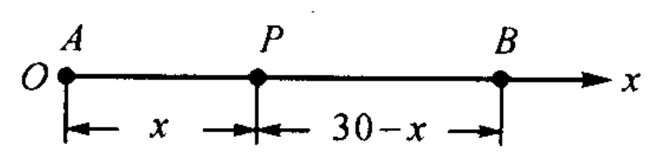
$$\therefore\quad A=2A_1,\quad I=4I_1$$

在 S_1 外侧

$$\therefore\quad \Delta\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}=\pi,\quad \therefore\quad A=0,\quad I=0$$

10-14 同一介质中 A 和 B 两点有两个相干波源 S_1 和 S_2，其振幅相等，频率均为 100Hz，相位差为 π。若 A 和 B 相距 30m，波在介质中的传播速度为 $400\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，试求 AB 连线上因干涉而静止的各点位置。

解 取 A 点为坐标原点，以 AB 连线为 x 轴建立坐标系，则



解 10-14 图

$$\varphi_2-\varphi_1=\pi,\quad \lambda=\frac{u}{\nu}=4\mathrm{m}$$

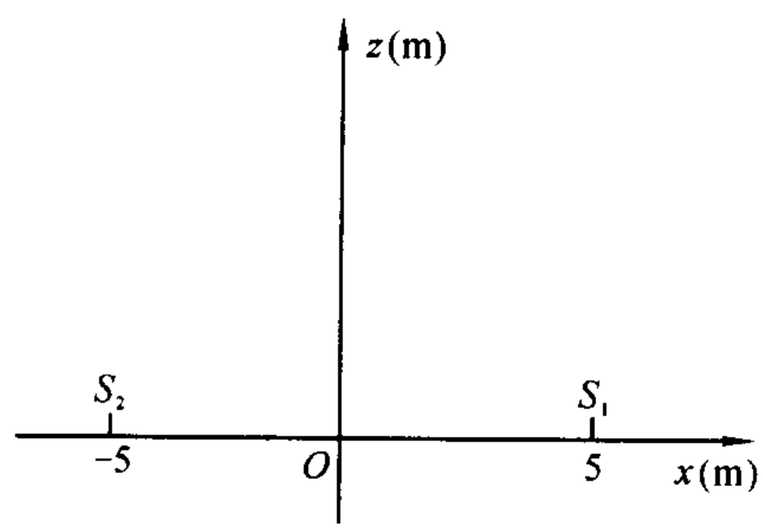
在 A 和 B 连线任取一点 P，有 $r_1=x$，$r_2=30-x$，

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pi-2\pi\frac{30-x-x}{4}$$

静止各点位置

$$\pi-2\pi\frac{30-2x}{4}=(2k+1)\pi,\quad x=2k+15(\mathrm{m})\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm7$$

10-15 两相干点波源 S_1 和 S_2，已知 S_1 的相位比 S_2 超前 π，它们在坐标系中的位置如图所示，其振动方向垂直纸面（即 y 轴方向），并以 $u=100\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 的速度在 xoz 平面内向四周传播，波的频率为 25Hz，试求：



习题 10-15 图

(1)在两波源连线的垂直平分线上（即 z 轴上）干涉加强或减弱点的位置；

(2)在两波源连线上 S_1 右侧干涉加强或减弱点的位置；

(3)在两波源连线上 S_1 和 S_2 之间干涉加强点的位置。

解 (1)由题意知，$A_1=A_2=A$，$\nu_1=\nu_2=\nu=25\mathrm{Hz}$，$\varphi_1-\varphi_2=\pi$，$u=100\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，在 z 轴上任取一点 P，则 $\overline{PS_1}=\overline{PS_2}=r$，两波在 P 点的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{\overline{PS_2}-\overline{PS_1}}{\lambda}=-\pi$$

故得 z 轴上所有点均为干涉减弱点。

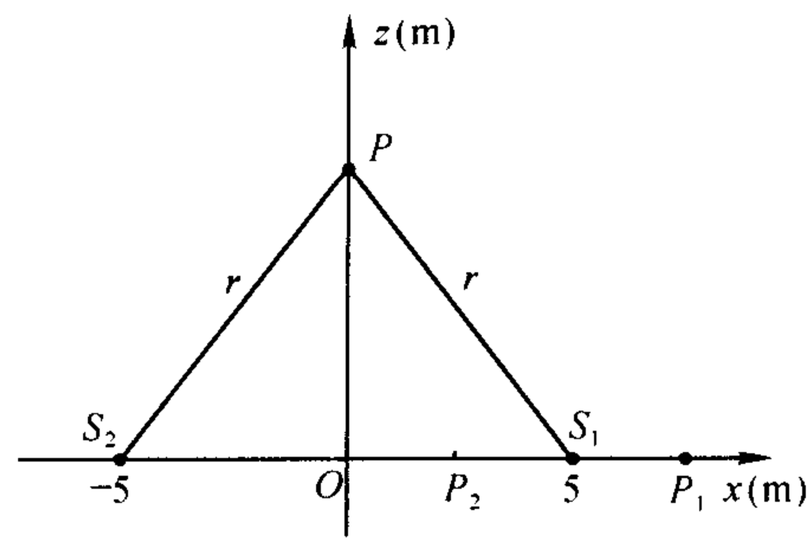
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)由题意知，两波长相等，$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{100}{25}=4$(m)，在连线上 S_1 右侧任取一点 P_1，则两波在该点的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{\overline{P_1S_2}-\overline{P_1S_1}}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{10}{4}=-6\pi$$

故得连线上 S_1 右侧所有点均为干涉加强点。

(3)在连线 S_1 和 S_2 之间任取一点 P_2，则两波在该点的相位差为



解 10-15 图

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{\overline{P_2S_2}-\overline{P_2S_1}}{\lambda}$$

$$=-\pi-2\pi\frac{(5+x)-(5-x)}{4}=-(x+1)\pi=2k\pi$$

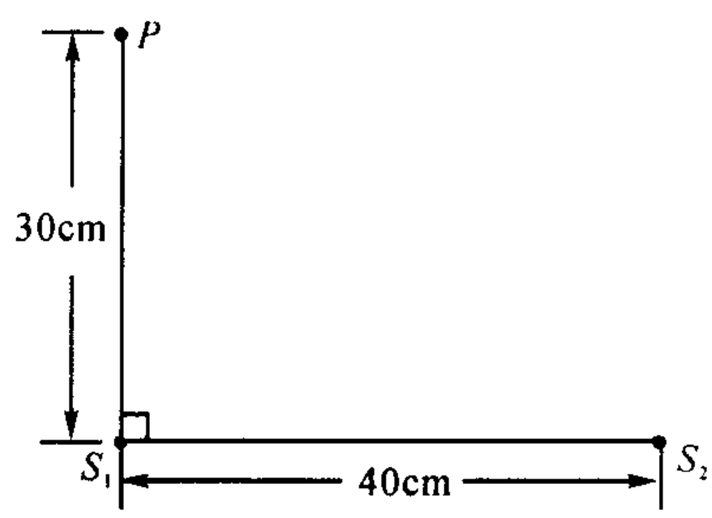
因为 x 的范围在 $-5\leqslant x\leqslant 5$，故

$$-x-1=2k,\quad x=-2k-1(\mathrm{m}),k=0,\pm1,\pm2,-3$$

故 S_1 和 S_2 连线之间干涉加强点的位置为

$$x=\pm1\mathrm{m},\pm3\mathrm{m},\pm5\mathrm{m}$$

10-16 同一介质中的两个相干波源 S_1 和 S_2 的振幅皆为 $A=0.33\mathrm{m}$，如图所示。当 S_1 点为波峰时，S_2 恰为波谷。设介质中的波速为 $100\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，欲使两列波在 P 点干涉后得到加强，这两列波的最小频率为多少？



习题 10-16 图

解 由图可知

$$r_1=\overline{S_1P}=0.3\mathrm{m}$$

$$r_2=\overline{S_2P}=\sqrt{0.3^2+0.4^2}=0.5(\mathrm{m})$$

合成点 P 处干涉后加强的条件为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=2k\pi,\quad \varphi_2-\varphi_1=\pi,\quad r_2-r_1=0.2\mathrm{m}$$

$$\therefore\quad \pi-\frac{0.4\pi}{\lambda}=2k\pi,\quad \lambda=\frac{0.4}{1-2k}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因为 λ 必须大于 0，故

$$\lambda_{\max}=\frac{0.4}{1-2k}\bigg|_{k=0}=0.4(\mathrm{m}),\quad \nu_{\min}=\frac{u}{\lambda_{\max}}=\frac{100}{0.4}=250(\mathrm{Hz})$$

10-17 两列相向传播的平面简谐波为

$$y_1=6.0\times10^{-2}\cos\frac{\pi}{2}(2.0x-8.0t)(\mathrm{SI})$$

$$y_2=6.0\times10^{-2}\cos\frac{\pi}{2}(2.0x+8.0t)(\mathrm{SI})$$

求：(1)简谐波的频率、波长和波速；

(2)合成波波节和波腹的位置。

解 (1)将 y_1 与 $y=A\cos2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$ 比较有

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\lambda=2.0\text{m},\quad T=0.5\text{s}$$

$$\therefore\quad \nu=\frac{1}{T}=2.0\text{Hz},\quad u=\lambda\nu=4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2)合成波表达式为

$$y=y_1+y_2=0.12\cos\pi x\cos 4\pi t(\text{SI})$$

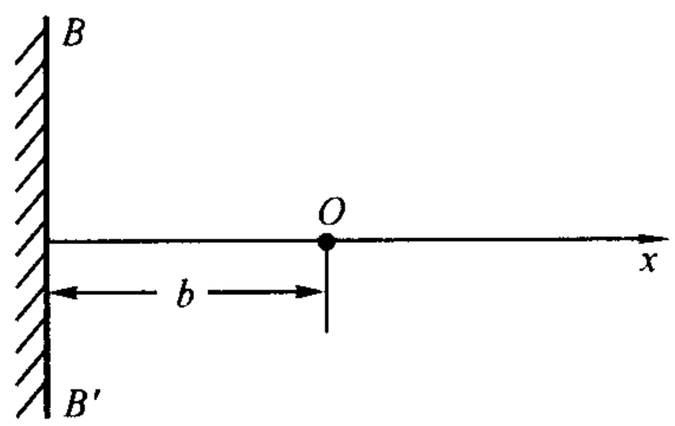
波节位置

$$\cos\pi x=0,\quad x=\pm\left(k+\frac{1}{2}\right)(\text{m})\qquad k=0,1,2,\cdots$$

波腹位置

$$|\cos\pi x|=1\quad x=\pm k(\text{m})\quad k=0,1,2,\cdots$$

10-18 波速为 u 的平面简谐波沿 x 轴负方向传播。已知 O 点的简谐振动表达式为 $y_0=A\cos(\omega t+\varphi)$，此波在平面 BB' 处全反射，如图所示，反射点为波节，试写出反射波表达式。



习题 10-18 图

解 入射波的表达式为

$$y_1=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

入射波在反射点引起的振动为

$$y_1(-b,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{b}{u}\right)+\varphi\right]$$

因为反射点为波节，故有半波损失，反射波在反射点引起的振动为

$$y_2(-b,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{b}{u}\right)+\pi+\varphi\right]$$

故反射波表达式为

$$y_2=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi'\right]$$

将 $x=-b$ 代入上式，与 $y_2(-b,t)$ 比较可得 $\varphi'=\varphi+\pi-\frac{2\omega b}{u}$，所以

$$y_2=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x+2b}{u}\right)+\pi+\varphi\right](\text{SI})$$

10-19 一平面简谐波 $y_1=A\cos(\omega t-kx)$（$k=\frac{2\pi}{\lambda}$称为波数）向右传播。若其在距坐标原点为 $x_0=4\lambda$ 处被墙壁反射，反射处可视为波节。试求：

(1)反射波的表达式；

(2)驻波的表达式；

(3)原点与 x_0 处之间各个波节和波腹的位置。

解 (1)入射波在反射点的振动表达式为

$$y_1(4\lambda,t)=A\cos(\omega t-4k\lambda)=A\cos(\omega t-8\pi)$$

考虑到半波损失，反射波在反射点的振动表达式为

$$y_2(4\lambda,t)=A\cos(\omega t-7\pi)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

反射波表达式为

$$y_2=A\cos(\omega t+kx+\varphi')$$

将 $x_0=4\lambda$ 代入上式并与 $y_2(4\lambda,t)$ 比较可得 $\varphi'=-15\pi$，

$$\therefore\quad y_2=A\cos(\omega t+kx-15\pi)=A\cos(\omega t+kx-\pi)$$

(2)驻波的表达式为

$$y=y_1+y_2=2A\cos\left(kx-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2A\sin kx\sin\omega t$$

(3)在波节位置，$\sin kx=0$，则 $kx=n\pi$，

$$\therefore\quad x=\frac{n\pi}{k}=\frac{n\lambda}{2}\quad n=0,1,2,\cdots,8$$

在波腹位置，$kx=(2n+1)\frac{\pi}{2}$，

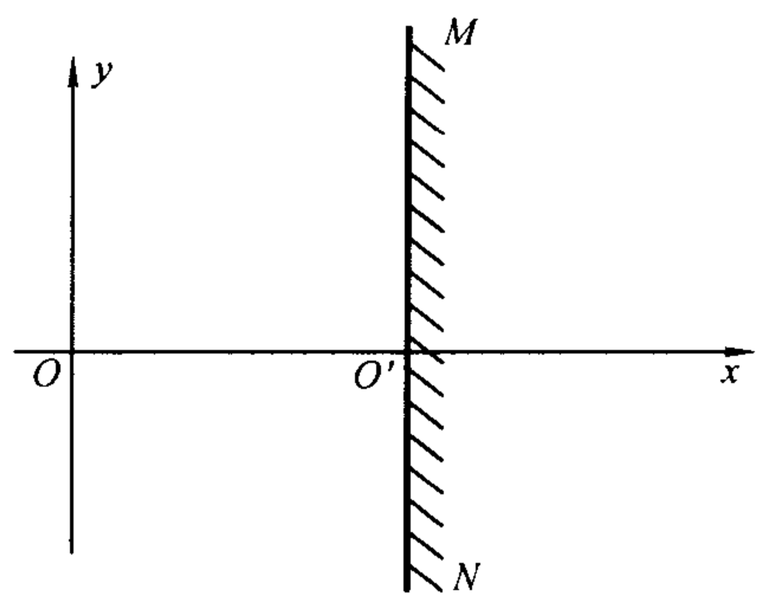
$$\therefore\quad x=(2n+1)\frac{\lambda}{4}\quad n=0,1,2,\cdots,7$$

10-20 如图所示，一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，波速 $u=40\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。已知在坐标原点 O 引起的振动方程 $y_0=A\cos(10\pi t+\frac{\pi}{2})$ (SI)，MN 是垂直于 x 轴的波密介质反射面，已知 $\overline{OO'}=14\text{m}$，设反射波不衰减，试求：

(1)入射波和反射波的表达式；

(2)驻波的表达式；

(3)驻波波腹和波节的位置。



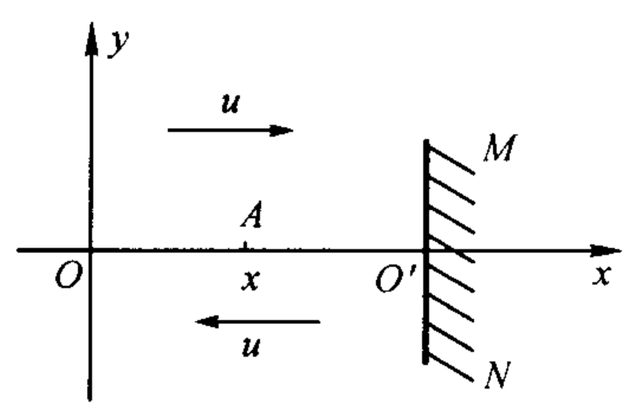
习题 10-20 图

解 (1)已知原点 O 的振动表达式为

$$y_0=A\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

在 x 轴上任取一点 A，该点比原点 O 的振动落后的时间为 $t'=\frac{x}{u}$，故入射波的表达式为

$$y_\lambda=A\cos\left[10\pi\left(t-\frac{x}{u}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=A\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}\right)\text{(SI)}$$



解 10-20 图

当 $x=\overline{OO'}=14\text{m}$ 时，入射波的表达式变为 O' 点的振动表达式

$$y_{O'}=A\cos\left(10\pi t-\frac{7}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos(10\pi t-3\pi)$$

考虑到波传到 O' 点时有半波损失，故得到反射波在 O' 点的振动表达式为

$$y'_{O'}=A\cos(10\pi t-3\pi+\pi)=A\cos(10\pi t-2\pi)$$

在 x 轴上任取一点 A，该点比反射面 O' 点的振动落后的时间为 $\frac{14-x}{u}=\frac{14-x}{40}$，故反射波的表达式为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$y_{反}=A\cos\left[10\pi\left(t-\frac{14-x}{40}\right)-2\pi\right]=A\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{4}x-\frac{11}{2}\pi\right)=A\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}\right)\text{(SI)}$$

(2) $y=y_{入}+y_{反}=2A\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ (SI)

(3)波腹位置

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right|=1,\quad \frac{\pi}{4}x=k\pi,\therefore\quad x=4k(\text{m})\qquad k=0,1,2,3$$

波节位置

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)=0,\quad \frac{\pi}{4}x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\therefore\quad x=2(2k+1)(\text{m}),\quad k=0,1,2,3$$

10-21 一警报器发出频率为 1 000Hz 的声波，以速率 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$离开观测者向悬崖运动。已知声速 $u=340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，问观测者接收到的下列频率是多少？

(1)直接从警报器发出的声波；

(2)从悬崖反射的声波。

解 (1) $\nu_r=\frac{u}{u+v_s}\nu_s=\frac{340}{340+10}\times1000=971(\text{Hz})$

(2) $\nu_r=\frac{u}{u-v_s}\nu_s=\frac{340}{340-10}\times1000=1030(\text{Hz})$

10-22 一个观测者在铁路边，一列火车从远处开来。他接收到的火车汽笛声的频率为 650Hz。当火车从身旁驰过而远离他时，他测出的汽笛声频率为 540Hz。已知空气中声速为 $340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，求火车行驶的速度。

解 火车接近时，观测者接收到的频率为

$$\nu_1=\frac{u}{u-v_s}\nu_s=650\text{Hz}$$

火车远离时，观测者接收到的频率为

$$\nu_2=\frac{u}{u+v_s}\nu_s=540\text{Hz}$$

联立上两式得

$$v_s=\frac{650-540}{650+540}\times340=31.4(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

10-23 x 轴上 A 和 B 两点的坐标分别为 $x_A=1\text{m}$，$x_B=1.5\text{m}$。波源位于 x 轴负半轴上，其速率 $v_s=100\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，频率 $\nu_s=200\text{Hz}$，波速 $u=200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。求下列情况下，$A$ 和 B 两点的相位差 $\varphi_A-\varphi_B$：

(1)波源接近 A，B；

(2)波源离开 A，B。

解 (1)波源接近 A 和 B 两点时，波长 $\lambda=\frac{u-v_s}{\nu_s}$，所以

$$\varphi_A-\varphi_B=\frac{2\pi}{\lambda}(x_B-x_A)=\frac{2\pi\nu_s}{u-v_s}(x_B-x_A)=\frac{2\times3.14\times200}{200-100}\times(1.5-1)=6.28(\text{rad})=2\pi$$

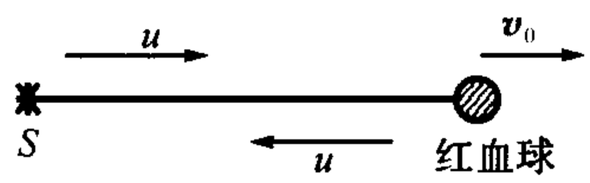
(2)波源离开 A 和 B 两点时，波长 $\lambda=\frac{u+v_s}{\nu_s}$，同理

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\varphi_A-\varphi_B=\frac{2\pi\nu_s}{u+v_s}(x_S-x_A)=2.09\text{rad}=\frac{2\pi}{3}$$

10-24 人体主动脉内血液的流速一般是 $0.32\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。现在沿血液流动方向发射4.0MHz的超声波，被红血球反射回来的波与原发射波之间形成的拍频为多大？已知超声波在人体内的传播速度为 $1.54\times10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。

解 此问题可分两步考虑，超声波向着红血球传播并被红血球接收，这时波源是静止的；红血球作为观察者离开波源而去。设超声波频率 ν，波速为 u，红血球流速为 v，则红血球接收到的频率为



解 10-24 图

$$\nu'=\frac{u-v}{u}\nu$$

第二步，超声波从红血球反射回来，这时红血球作为波源离开接收器运动，发出的频率为 ν'，接收器接收到的反射波的频率为

$$\nu''=\frac{u}{u+v}\nu'=\frac{u}{u+v}\cdot\frac{u-v}{u}\nu=\frac{u-v}{u+v}\nu=\frac{1540-0.32}{1540+0.32}\times4\times10^6=3.99834\times10^6(\text{Hz})$$

接收器直接接收到的超声波频率 $\nu=4\times10^6\text{Hz}$，故超声波反射波和原发射波相遇时形成的拍频为

$$\Delta\nu=\nu-\nu''=4\times10^6-3.99834\times10^6=1.66\times10^3(\text{Hz})$$

10-25 设计一个计算机程序来动态演示平面简谐波 $y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$ 在传播过程中遇到反射端形成反射波和驻波的过程。要求程序能够选择反射处为固定端或自由端，并可在一定范围内改变波的周期 T、波长 λ 和反射端所处的位置。（提示：选择反射端为固定端或自由端，应在程序起始处通过设定标志值来区分，如 $k=-1$ 为固定端，$k=1$ 为自由端。选择 k 值后程序应会运行不同的子程序）

解 程序略。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 11 章

气体动理论

【基本概念和规律】

1. 理想气体状态方程

$$pV=\frac{M}{\mu}RT=\nu RT \quad , \quad p=nkT$$

2. 理想气体压强公式

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n(\frac{1}{2}m\overline{v^2})=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$$

3. 理想气体温度公式

$$\overline{\varepsilon_t}=\frac{3}{2}kT$$

4. 能量均分定理

(1)气体分子每个平动自由度和转动自由度的平均能量：$\overline{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}kT$

(2)气体分子的平均能量： $\overline{\varepsilon}=\frac{i}{2}kT$，式中 i 为刚性气体分子的总自由度。

(3)质量为 M 的理想气体的热力学能： $E=\frac{M}{\mu}\frac{i}{2}RT$

5. 麦克斯韦速率分布律

(1) 速率分布函数： $f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}$，归一化条件 $\int_0^{\infty}f(v)\mathrm{d}v=1$

(2)麦克斯韦速率分布律： $\frac{\mathrm{d}N}{N}=f(v)\mathrm{d}v=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v$

(3)气体分子的三种统计速率

①最概然速率： $v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$

②平均速率： $\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$

③方均根速率： $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$

6. 玻尔兹曼分布律

在平衡态下，某状态区间的粒子数按能量分布的规律。

(1)重力场中气体分子数密度按高度分布： $n=n_0\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{kT}}$

(2)等温气压公式： $p=p_0\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{kT}}=p_0\mathrm{e}^{-\frac{\mu gh}{RT}}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

7. 气体分子的平均碰撞频率和平均自由程

(1)平均碰撞频率： $\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n$

(2)平均自由程： $\bar{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$

8. 气体的输运现象

(1)黏滞现象:输运气体分子定向运动动量。

(2)热传导现象:输运气体分子热运动能量。

(3)扩散现象:输运气体分子质量。

9. 范德瓦尔斯方程

有分子吸引力和有分子体积的刚性球分子模型,接近实际气体性质的状态方程。

$$\left(p+\frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{M}{\mu}b\right)=\frac{M}{\mu}RT$$

【解题指导】

● 本章主要介绍了两个宏观物理量:压强 p 和温度 T 的微观本质。用压强公式 $p=\frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right)$ 和温度公式 $\frac{1}{2}m\bar{v}^2=\frac{3}{2}kT$ 解题时注意物理量的单位。

● 本章共介绍了理想气体在平衡态下的三个统计规律:

(1)能量按自由度均分定理。要弄清气体分子每个自由度具有的平均能量,一个气体分子的平均能量和理想气体的热力学能(内能)的概念。

(2)麦克斯韦速率分布律。重要的是弄清气体分子数按速率分布的概念和物理含义,以及由定义式求平均速率 $\bar{v}$,方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 和最概然速率 v_p。

(3)气体分子的平均碰撞频率和平均自由程。弄清平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 公式的物理图像。

【习题解答】

11-1 一个篮球在温度为 0℃时打入空气,直到球内的压强达到 1.5×10^5Pa。如果

(1)在篮球比赛时,受到拍打后篮球的内部温度升高到 30℃,问这时球内的压强多大?

(2)在篮球比赛过程中,球被刺破一小孔而漏气,问当球赛结束后,篮球的温度又恢复到 0℃时,最终漏掉的空气是球内原有空气的百分之几?

解 (1)由压强公式,比赛前蓝球内气体压强为 $p_1=nkT_1$,所以比赛时球内压强为

$$p_2=nkT_2=\frac{p_1}{T_1}T_2=1.66\times10^5\text{Pa}$$

(2)球赛结束后,球内压强与大气压强 p_0 相等,分子数密度为 n',由压强公式得

$$p_0=n'kT_1$$

故漏掉的空气是球内原有空气的百分比为

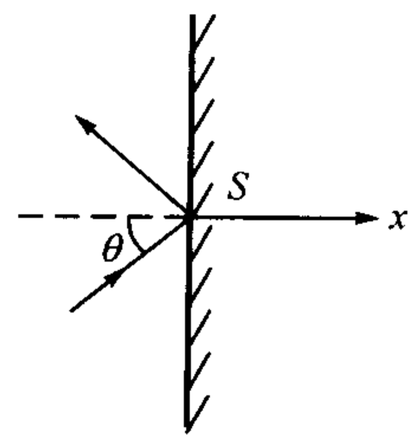
$$P=\frac{n-n'}{n}\times100\%=\left(1-\frac{n'}{n}\right)\times100\%=\left(1-\frac{p_0/kT_1}{p_1/kT_1}\right)\times100\%$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$=\left(1-\frac{p_0}{p_1}\right)\times 100\%=\left(1-\frac{1\times 10^5}{1.5\times 10^5}\right)\times 100\%=33.3\%$$

11-2 设想每秒钟有 $n=10^{23}$ 个氧分子以速率 $v=500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 沿着与器壁法线成 $\theta=45°$ 角的方向，撞在面积为 $S=2\times 10^{-4}\text{m}^2$ 的器壁上，求这群分子作用在面积 S 上的压强。

解 因为每个分子在碰撞中动量的改变为 $2mv_x=2mv\cos\theta$，故这群分子作用 S 上的压强为



解 11-2 图

$$p=\frac{\overline{F}}{S}=\frac{2nmv\cos\theta}{S}$$

$$=\frac{2\times 10^{23}\times\frac{32\times 10^{-3}}{6.02\times 10^{23}}\times 500\times\cos 45°}{2\times 10^{-4}}=1.88\times 10^4(\text{Pa})$$

11-3 容器内装有压强 $p=1.0\times 10^5\text{Pa}$、温度 $t=27℃$ 的氮气，求：

(1)单位体积内的分子数；

(2)分子的质量；

(3)气体的密度；

(4)分子的方均根速率；

(5)分子的平均平动动能。

解 (1) $\because p=1.0\times 10^5\text{Pa}$， $T=27+273=300(\text{K})$，

$$\therefore\quad n=\frac{p}{kT}=\frac{1.0\times 10^5}{1.38\times 10^{-23}\times 300}=2.41\times 10^{25}(\text{m}^{-3})$$

(2) $m=\frac{\mu}{N_A}=\frac{28\times 10^{-3}}{6.02\times 10^{23}}=4.65\times 10^{-26}(\text{kg})$

(3) $\rho=\frac{M}{V}=\frac{p\mu}{RT}=\frac{1.0\times 10^5\times 28\times 10^{-3}}{8.31\times 300}=1.12(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$

(4) $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{3\times 8.31\times 300}{28\times 10^{-3}}}=517(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$

(5) $\overline{\varepsilon_t}=\frac{3}{2}kT=\frac{3\times 1.38\times 10^{-23}\times 300}{2}=6.21\times 10^{-21}(\text{J})$

11-4 设空气(气体的摩尔质量为 $28.9\times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$)的温度为 0℃，求：

(1)空气分子的平均平动动能和平均转动动能；

(2)10g 空气的热力学能。

解 (1)空气分子的平均平动动能为

$$\overline{\varepsilon_t}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 273=5.65\times 10^{-21}(\text{J})$$

空气分子的平均转动动能为

$$\overline{\varepsilon_r}=\frac{2}{2}kT=1.38\times 10^{-23}\times 273=3.77\times 10^{-21}(\text{J})$$

(2)热力学能为

$$E=\frac{M}{\mu}\frac{i}{2}RT=\frac{10\times 10^{-3}}{28.9\times 10^{-3}}\times\frac{5}{2}\times 8.31\times 273=1.96\times 10^3(\text{J})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

11-5 容积为 0.01 m^3的盒子以速率 $v=200m\cdot s^{-1}$匀速运动，盒内装有质量为 0.05kg 的氧气。若盒子突然停止，假定全部定向运动的能量都变为分子的热运动能量，求盒内气体达到平衡后，温度与压强各增加多少？

解 由题意

$$\frac{1}{2}Mv^2=\Delta E=\frac{M}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T,\quad \therefore\quad \Delta T=\frac{\mu v^2}{iR}=\frac{32\times10^{-3}\times(200)^2}{5\times8.31}=30.8(K)$$

由 $p=nkT$ 得

$$\Delta p=nk\Delta T=\frac{N}{V}\frac{R}{N_A}\frac{\mu v^2}{iR}=\frac{\mu v^2}{iV}\frac{N}{N_A}=\frac{\mu v^2}{iV}\frac{M}{\mu}=\frac{Mv^2}{iV}=\frac{0.05\times(200)^2}{0.01\times5}=4.0\times10^4(Pa)$$

11-6 有下列的一群粒子(n_i 表示速度为 v_i 的粒子数)

n_i	$v_i(km\cdot s^{-1})$
2	1
4	2
6	3
8	4
2	5

试计算：(1)平均速率 $\bar{v}$；

(2)方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$；

(3)在上述的速率分布中，这群粒子的最概然速率 v_p。

解 (1)由平均速率定义

$$\bar{v}=\frac{\sum_i n_i v_i}{\sum n_i}=\frac{2\times1+4\times2+6\times3+8\times4+2\times5}{2+4+6+8+2}=\frac{70}{22}=3.18(km\cdot s^{-1})$$

(2) $$\sqrt{\overline{v^2}}=\left(\frac{\sum_i n_i v_i^2}{\sum n_i}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\times1^2+4\times2^2+6\times3^3+8\times4^2+2\times5^2}{2+4+6+8+2}\right)^{\frac{1}{2}}=3.37(km\cdot s^{-1})$$

(3)从分子速率分布可知，速率为 $4km\cdot s^{-1}$的分子数最多，故

$$v_p=4km\cdot s^{-1}$$

11-7 某恒星的温度达到 10^8K，在此温度下，物质已不以原子形式存在，只有质子存在，试求：

(1)质子的平均动能是多少电子伏？

(2)质子的方均根速率多大？(质子质量 $m=1.67\times10^{-27}kg$)

解 (1) $$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times10^8=2.07\times10^{-15}(J)=1.29\times10^4(eV)$$

(2) $$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3\times1.38\times10^{-23}\times10^8}{1.67\times10^{-27}}}=1.57\times10^6(m\cdot s^{-1})$$

11-8 若能量为 10^{12}eV 的宇宙射线粒子射入一氖管，其能量全部被氖气分子所吸收。现知氖管中有氖气 0.01mol，如果有 10^4 个宇宙粒子射入氖管，问氖气的温度升高多少？

解 由能量守恒定律有 $\nu\frac{i}{2}R\Delta T=10^4\varepsilon$，故

$$\Delta T=\frac{2\times10^4\varepsilon}{i\nu R}=\frac{2\times10^4\times10^{12}\times1.6\times10^{-19}}{3\times0.01\times8.31}=1.28\times10^{-2}(K)$$

11-9 设想太阳是由氢原子组成的密度均匀的理想气体系统。若已知太阳中心的压强为 $p=1.35\times10^{14}$Pa，试估计太阳中心温度和此状态下氢原子的方均根速率。已知太阳质量

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$M=1.99\times10^{30}$kg，太阳半径 $R=6.96\times10^{8}$m，氢原子质量 $m=1.67\times10^{-27}$kg。

解 ∵ $n=\frac{N}{V}=\frac{M/m}{(4/3)\pi R^3}=\frac{3M}{4\pi R^3 m}$，由 $p=nkT$ 得

$$T=\frac{p}{nk}=\frac{4\pi R^3 mp}{3kM}=\frac{4\times3.14\times(6.96\times10^8)^3\times1.67\times10^{-27}\times1.35\times10^{14}}{3\times1.38\times10^{-23}\times1.99\times10^{30}}$$
$$=1.16\times10^7(\mathrm{K})$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3\times1.38\times10^{-23}\times1.16\times10^7}{1.67\times10^{-27}}}=5.36\times10^5(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

11-10 一容器内贮有 1mol 的某种气体，今自外界输入 209J 的热量后，测得其温度升高了 10K，求该气体分子的自由度。

解 由理想气体热力学能（内能）公式得 $\Delta E=\nu\frac{i}{2}R\Delta T$，故该气体分子的自由度为

$$i=\frac{2\Delta E}{\nu R\Delta T}=\frac{2\times209}{1\times8.31\times10}=5$$

11-11 现有氢气、氦气和氨气各 1mol，求它们在温度为 27℃时各自具有的热力学能。当温度升高 1℃时，其热力学能各增加多少？（双原子或多原子分子均视为刚性分子）

解 1mol 理想气体的热力学能为 $E_{\mathrm{mol}}=\frac{i}{2}RT$，

H_2： $E_{\mathrm{mol}}=\frac{5}{2}RT=2.5\times8.31\times300=6.23\times10^3(\mathrm{J})$

He： $E_{\mathrm{mol}}=\frac{3}{2}RT=1.5\times8.31\times300=3.74\times10^3(\mathrm{J})$

NH_3： $E_{\mathrm{mol}}=\frac{6}{2}RT=3\times8.31\times300=7.48\times10^3(\mathrm{J})$

而 $\Delta E_{\mathrm{mol}}=\frac{i}{2}R\Delta T$，$\Delta T=1\mathrm{K}$，所以

H_2： $\Delta E_{\mathrm{mol}}=\frac{5}{2}R=20.8(\mathrm{J})$

He： $\Delta E_{\mathrm{mol}}=\frac{3}{2}R=12.5(\mathrm{J})$

NH_3： $\Delta E_{\mathrm{mol}}=3R=24.9(\mathrm{J})$

11-12 设某房间充满着双原子分子理想气体，房间体积为 V，冬天室温为 T_1，压强为 p_0。现用取暖器将室温提高到 T_2，因房间不是封闭的，室内压强仍为 p_0。试证明：室温由 T_1 升高到 T_2 过程中房间内气体的热力学能不变，并说明取暖器加热的作用。

证明 当温度为 T_1 时，室内热力学能为 $E_1=\frac{M_1}{\mu}\frac{i}{2}RT_1$，由理想气体状态方程 $p_0V=\frac{M_1}{\mu}RT_1$，故有

$$E_1=\frac{i}{2}p_0V=\frac{5}{2}p_0V$$

同理可证

$$E_2=\frac{i}{2}p_0V=\frac{5}{2}p_0V$$

$$\therefore\quad E_1=E_2$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

在升温过程中，房间内气压不变，室内气体的热力学能就不变。原因是房间不封闭，有气体跑出室外。当温度升高时，分子平均平动动能增加，热运动加剧，使人感到温暖。

11-13 已知某氢气系统处在平衡态，其分子的最概然速率为 $1\ 000\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。试问系统的温度是多少？并求出此温度时氢气分子的平均速率和方均根速率。

解 因 $v_p=\sqrt{2RT/\mu}$，故氢气温度为

$$T=\frac{\mu v_p^2}{2R}=\frac{2\times10^{-3}\times(1000)^2}{2\times8.31}=120(\mathrm{K})$$

此时平均速率 $\bar{v}$ 和方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 分别为

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}=\sqrt{\frac{8\times8.31\times120}{3.14\times2\times10^{-3}}}=1.13\times10^3(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{3\times8.31\times120}{2\times10^{-3}}}=1.22\times10^3(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

11-14 设氢气的温度为 300K，求速率在 $3\ 000\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 到 $3\ 010\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 之间的分子数 ΔN_1 与速率在 $1\ 500\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 到 $1\ 510\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 之间的分子数 ΔN_2 之比。

解 设氢气总分子数为 N，由麦克斯韦速率分布律得

$$\frac{\Delta N_1}{N}\approx f(v_1)\Delta v_1=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}v_1^2\Delta v_1$$

$$\frac{\Delta N_2}{N}\approx f(v_2)\Delta v_2=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}v_2^2\Delta v_2$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{v_1^2}{v_2^2}\mathrm{e}^{\frac{-m(v_1^2-v_2^2)}{2kT}}\cdot\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\mathrm{e}^{\frac{\mu(v_2^2-v_1^2)}{2RT}}$$

$$=\left(\frac{3000}{1500}\right)^2\exp\left\{\frac{2\times10^{-3}}{2\times8.31\times300}[(1500)^2-(3000)^2]\right\}=0.27$$

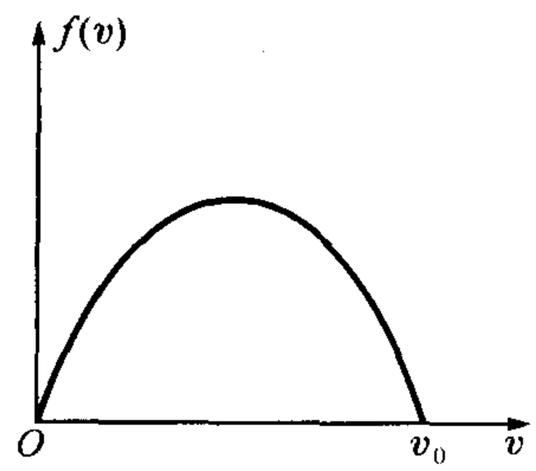
11-15 设由 N 个气体分子组成一热力学系统，其速率分布函数为

$$f(v)=\begin{cases}-k(v-v_0)v & (0<v<v_0)\quad k\text{ 为常量}\\ 0 & (v>v_0)\end{cases}$$

(1)画出速率分布曲线；

(2)用 v_0 定出常量 k；

(3)求出分子的 $v_p,\bar{v},\sqrt{\overline{v^2}}$。



解 11-15 图

解 (1)其速率分布曲线为一抛物线，如图所示。

(2)由归一化条件 $\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v=1$ 有

$$\int_0^{v_0}f(v)\mathrm{d}v+\int_{v_0}^\infty 0\cdot\mathrm{d}v=\int_0^{v_0}-k(v-v_0)v\mathrm{d}v=-\frac{1}{3}kv_0^3+\frac{1}{2}kv_0^3=1$$

$$\therefore\quad k=\frac{6}{v_0^3}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(3) 由$\left.\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}\right|_{v=v_p}=0$，得 $v_p=\frac{v_0}{2}$，所以

$$\bar{v}=\int_0^{\infty}vf(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0}-\frac{6}{v_0^3}(v-v_0)v^2\mathrm{d}v=\frac{v_0}{2}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\left[\int_0^{\infty}v^2f(v)\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_0^{v_0}-\frac{6}{v_0^3}(v-v_0)v^3\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.3v_0^2}=0.55v_0$$

11-16 有 N 个气体分子，分子质量为 m，速率分布曲线如图所示。试求：

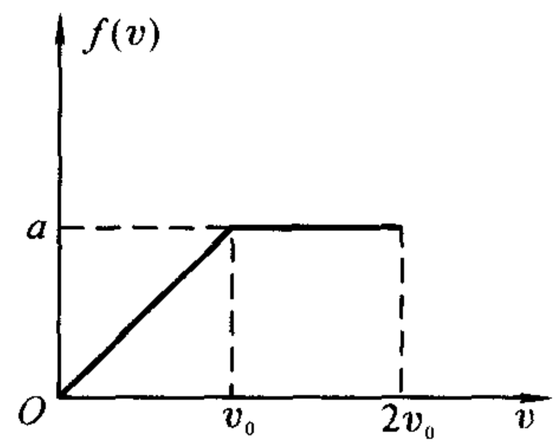
(1)速率分布函数；

(2)a 值；

(3)速率在 $0.5v_0$ 到 $1.5v_0$ 区间的分子数；

(4)分子的平均速率；

(5)分子的平均平动动能。



习题 11-16 图

解 (1)速率分布函数为

$$f(v)=\begin{cases}kv=\frac{a}{v_0}v & 0\leqslant v\leqslant v_0\\ a & v_0\leqslant v\leqslant 2v_0\\ 0 & v>2v_0\end{cases}$$

(2)由归一化条件 $\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0}v\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}a\mathrm{d}v=1$ 解得

$$a=\frac{2}{3v_0}$$

(3)$\Delta N=N\int_{0.5v_0}^{1.5v_0}f(v)\mathrm{d}v=N\int_{0.5v_0}^{v_0}\frac{a}{v_0}v\mathrm{d}v+N\int_{v_0}^{1.5v_0}a\mathrm{d}v$

$$=Na\left(\frac{v_0}{2}-\frac{v_0}{8}+1.5v_0-v_0\right)=\frac{7}{12}N$$

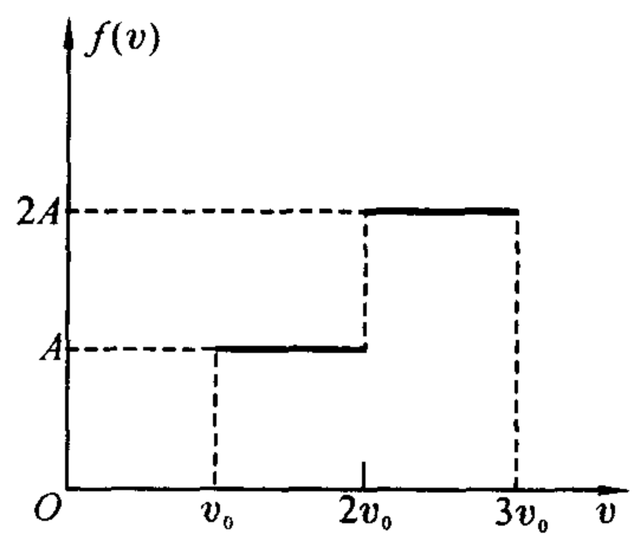
(4)$\bar{v}=\int_0^{\infty}vf(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0}v^2\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}av\mathrm{d}v=\frac{11}{9}v_0$

(5)$\bar{\varepsilon}_t=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}mv^2f(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}m\left[\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0}v^3\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}av^2\mathrm{d}v\right]=\frac{31}{36}mv_0^2$

11-17 某一气体系统的总分子数为 N，其速率分布曲线如图所示。设图中的 v_0 为已知，由图可知，分子速率大小从 0 到 v_0 的范围内，速率分布函数为 0；分子速率大小从 v_0 到 $2v_0$ 的范围内速率分布函数为 A；分子速率大小从 $2v_0$ 到 $3v_0$ 的范围内速率分布函数为 $2A$；分子速率大于 $3v_0$ 的速率分布函数为 0。试求：

(1)分子速率在 v_0 到 $2v_0$ 之间的分子数占总分子数的百分数；

(2)所有分子的平均速率。



习题 11-17 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 (1)由归一化条件得

$$\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v = \int_{v_0}^{2v_0} A\mathrm{d}v + \int_{2v_0}^{3v_0} 2A\mathrm{d}v = Av_0 + 2Av_0 = 3Av_0 = 1$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{3v_0}$$

分子速率在 v_0 到 $2v_0$ 之间的分子数占总分子数的百分数为

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_0}^{2v_0} f(v)\mathrm{d}v = \int_{v_0}^{2v_0} A\mathrm{d}v = Av_0 = \frac{1}{3v_0}\cdot v_0 = \frac{1}{3} = 33.3\%$$

(2) 由平均速率定义

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vf(v)\mathrm{d}v = \int_{v_0}^{2v_0} Av\mathrm{d}v + \int_{2v_0}^{3v_0} 2Av\mathrm{d}v$$

$$= \frac{3}{2}Av_0^2 + 5Av_0^2 = A\left(\frac{3}{2}v_0^2 + 5v_0^2\right) = \frac{1}{3v_0}\times\frac{13}{2}v_0^2 = \frac{13}{6}v_0$$

11-18 设空气的温度均为 0℃,问飞机上升到多少高度处大气压力降为地面的 75%?(空气的摩尔质量为 $0.028\ 9\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$)

解 由玻尔兹曼分布律得到气压公式 $p=p_0\mathrm{e}^{-\frac{\mu gh}{RT}}$,故有

$$h=-\frac{RT}{\mu g}\ln\frac{p}{p_0}=2.3\times10^3\mathrm{m}=2.3\mathrm{km}$$

11-19 在质子回旋加速器中,要使质子在 10^5km 的路径上不和空气分子碰撞,真空室内的压强应为多大?设真空室温度为 300K,质子的有效直径比空气分子的有效直径小得多,可以忽略不计,空气分子可认为静止不动。(设空气分子直径 $d=3\times10^{-10}$m)

解 因为质子有效直径≪空气分子直径 d,质子可视为质点。假设空气分子静止不动,则平均碰撞频率为

$$\bar{Z}=\frac{\pi d^2}{4}\bar{v}n$$

而 $\bar{\lambda}=\frac{\bar{v}}{\bar{Z}}=\frac{4}{\pi d^2 n}$,将 $p=nkT$ 代入有

$$\bar{\lambda}=\frac{4kT}{\pi d^2 p}$$

$$\therefore \quad p=\frac{4kT}{\pi d^2\bar{\lambda}}=\frac{4\times1.38\times10^{-23}\times300}{3.14\times(3\times10^{-10})^2\times10^5\times10^3}=5.85\times10^{-10}(\mathrm{Pa})$$

11-20 在室温($t=27$℃)和标准大气压($p=1.013\times10^5$Pa)情况下,试计算氢气分子的平均自由程和平均碰撞频率。(H_2 分子有效直径 $d=2.3\times10^{-10}$m)

解 因为 $T=27+273=300$K,$p=1.013\times10^5$Pa,由平均自由程公式

$$\bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}=\frac{1.38\times10^{-23}\times300}{\sqrt{2}\pi\times(2.3\times10^{-10})^2\times1.013\times10^5}=1.74\times10^{-7}(\mathrm{m})$$

分子的平均速率为

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}=\sqrt{\frac{8\times8.31\times300}{3.14\times2\times10^{-3}}}\approx1.78\times10^3(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\bar{Z}=\frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}=1.02\times10^{10}(\text{次}\cdot\text{s}^{-1})$$

11-21 一定量的理想气体贮于固定体积的容器中，初态温度 T_0，平均速率$\bar{v}_0$，平均碰撞频率 $\bar{Z}_0$，平均自由程$\bar{\lambda}_0$。若温度升高为 $4T_0$ 时；求 $\bar{v}$，$\bar{Z}$，$\bar{\lambda}$ 各变为多少？

解 由题意

$$\bar{v}_0=\sqrt{\frac{8RT_0}{\pi\mu}},\quad \bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}=\sqrt{\frac{8R\cdot4T_0}{\pi\mu}}=2\bar{v}_0$$

而 $\bar{Z}_0=\sqrt{2}\pi d^2n\bar{v}_0$，$\therefore\quad \bar{Z}=\sqrt{2}\pi d^2n\bar{v}=2\bar{Z}_0$，$\quad \bar{\lambda}=\frac{\bar{v}}{\bar{Z}}=\frac{2\bar{v}_0}{2\bar{Z}_0}=\bar{\lambda}_0$

11-22 假设地面上的风速为 $60\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$。考虑此风中的一氮气分子，它的热运动平均速率约为 $500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。该分子连续两次与其他分子碰撞之间的自由飞行时间平均为 10^{-10}s，则当此分子顺风移动 1cm 时，它经历了多少个平均自由程？总共运动了多少路程？

解 风速 $u=60\text{km}\cdot\text{h}^{-1}=\frac{1}{6}\times10^2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，氮气分子顺风移动 1cm 所需的时间 $\Delta t'=\frac{1\times10^{-2}}{(1/6)\times10^2}=6\times10^{-4}(\text{s})$，故它经历的平均自由程个数为

$$N=\frac{\Delta t'}{\Delta t}=\frac{6\times10^{-4}}{10^{-10}}=6\times10^6(\text{个})$$

总共运动了的路程为

$$s=\bar{v}\Delta t'=500\times6\times10^{-4}=0.3(\text{m})=30(\text{cm})$$

11-23 用 $\varepsilon_k=\frac{1}{2}mv^2$ 表示气体分子的动能，试根据关系式$\frac{dN}{N}=f(v)dv=f(\varepsilon_k)d\varepsilon_k$ 确定遵从麦克斯韦速率分布律的空气分子按动能分布的分布函数 $f(\varepsilon_k)$和最概然动能。

解 由 $\varepsilon_k=\frac{1}{2}mv^2$ 得 $d\varepsilon_k=mvdv$，所以

$$\frac{dN}{N}=f(v)dv=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dv=4\pi(2\pi kT)^{-\frac{3}{2}}m\sqrt{m}e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}v^2\frac{1}{mv}d\varepsilon_k$$

$$=4\pi(2\pi kT)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}\sqrt{2\varepsilon_k}d\varepsilon_k=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}d\varepsilon_k$$

分子数按动能分布的分布函数为

$$f(\varepsilon_k)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}$$

由极值条件$\frac{df(\varepsilon_k)}{d\varepsilon_k}=0$，得最概然动能为

$$\varepsilon_{kp}=\frac{1}{2}kT$$

11-24 飞机在高空中以 $360\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$的航速飞行，由于空气的黏滞作用，机翼能带动 4cm 厚的空气层。求作用在机翼表面积 1m^2 上的切向阻力。已知空气的黏滞系数 $\eta=0.18\times10^{-4}\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 速度梯度为

$$\frac{\Delta u}{\Delta l}=\frac{\frac{360\times10^3}{3600}-0}{4\times10^{-2}}=\frac{100}{4\times10^{-2}}$$

则切向黏滞力为

$$f=\eta\frac{\Delta u}{\Delta l}\Delta S=0.18\times10^{-4}\times\frac{100}{4\times10^{-2}}\times1=0.045=4.5\times10^{-2}(\mathrm{N})$$

11-25 现有 20mol 的 N_2，将其不断压缩至极限，试求：

(1)它最终所能接近的体积；

(2)此时由于分子间引力而产生的附加压强。

(设 N_2 遵循范德瓦耳斯方程，其中范德瓦耳斯常量为 $a=0.141\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^6\cdot\mathrm{mol}^{-2}$，$b=39\times10^{-6}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{mol}^{-1}$)

解 (1)$p\to\infty$时气体体积趋向于

$$V=\nu b=7.8\times10^{-4}\mathrm{m}^3$$

(2)附加压强为

$$p=a\left(\frac{\nu}{V}\right)^2=\frac{a}{b^2}=9.3\times10^7\mathrm{Pa}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第12章

热力学基础

【基本概念和规律】

1. 准静态过程

若过程进行中的所有中间状态都无限接近于平衡态，称该过程为准静态过程。

2. 准静态过程中理想气体的作功

$$W=\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$$

3. 热量

$$Q=\frac{M}{\mu}C_{\mathrm{m}}(T_2-T_1)$$

4. 理想气体的热力学能增量

$$\Delta E=E_2-E_1=\frac{M}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$$

5. 热力学第一定律

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}E+\mathrm{d}W,\quad Q=E_2-E_1+W$$

6. 热容量

$$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$$

(1)摩尔热容：

$$C_{\mathrm{m}}=\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$$

(2)理想气体定体摩尔热容：

$$C_{V,\mathrm{m}}=\frac{i}{2}R$$

(3)理想气体定压摩尔热容：

$$C_{p,\mathrm{m}}=\frac{i+2}{2}R$$

(4)迈尔公式： $C_{p,\mathrm{m}}-C_{V,\mathrm{m}}=R$

(5)比热容比： $\gamma=\frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}=\frac{i+2}{i}$

理想气体的 $C_{V,\mathrm{m}}$，$C_{p,\mathrm{m}}$，γ 和 i 四个量中已知任何一个，就可以算出另外三个。

7. 理想气体准静态过程公式表

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

过程	特征	过程方程	能量转换关系	热力学能增量 E_2-E_1	功 W	热量 Q
等体	$V=C$	$\frac{p}{T}=C$	$Q=E_2-E_1$	$\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$	0	$\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$
等压	$p=C$	$\frac{V}{T}=C$	$Q=E_2-E_1+W$	$\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$	$p(V_2-V_1)$ $\frac{M}{\mu}R(T_2-T_1)$	$\frac{M}{\mu}C_{p,m}(T_2-T_1)$
等温	$T=C$	$pV=C$	$Q=W$	0	$\frac{M}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$ $\frac{M}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$	$\frac{M}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$ $\frac{M}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$
绝热	$dQ=0$	$pV^{\gamma}=C$ $TV^{\gamma-1}=C$	$E_2-E_1=-W$	$\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$	$\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$ $\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}$	0

8. 循环过程及其效率

(1)循环特征：$\Delta E=0$，　$W=Q_1-Q_2$（Q_1 为循环过程总吸热，Q_2 为循环过程总放热的绝对值）

(2)热机效率：$\eta=\frac{W}{Q_1}$，　$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}$

(3)致冷机致冷系数：$w=\frac{Q_2}{W}$，　$w=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}$

(4)卡诺正循环效率：$\eta_{卡}=1-\frac{T_2}{T_1}$

(5)卡诺逆循环致冷系数：$w_{卡}=\frac{T_2}{T_1-T_2}$

9. 热力学第二定律(开尔文表述和克劳修斯表述)。

热力学第二定律是关于热力学过程进行方向的规律，其实质是指出一切实际的宏观过程都是不可逆过程。

10. 熵·熵增加原理

(1)熵是系统的状态函数，是系统无序性的量度。

(2)克劳修斯熵公式：$S_B-S_A=\int_{A\,(可逆过程)}^{B}\frac{dQ_r}{T}$

(3)理想气体的熵变公式：$S_B-S_A=\frac{M}{\mu}C_{V,m}\ln\frac{T_B}{T_A}+\frac{M}{\mu}R\ln\frac{V_B}{V_A}$

$$S_B-S_A=\frac{M}{\mu}C_{p,m}\ln\frac{T_B}{T_A}-\frac{M}{\mu}R\ln\frac{p_B}{p_A}$$

$$S_B-S_A=\frac{M}{\mu}C_{p,m}\ln\frac{V_B}{V_A}+\frac{M}{\mu}C_{V,m}\ln\frac{p_B}{p_A}$$

(4)熵增加原理：在孤立系统或绝热系统中，系统的熵永不减少；可逆绝热过程熵不变，不可逆绝热过程熵增加，即 $dS\geqslant 0$。

(5)玻尔兹曼关系：熵与热力学概率的关系式为 $S=k\ln\Omega$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【解题指导】

● 正确理解热力学第一定律及在理想气体准静态过程(等体、等压、等温及绝热过程)中的应用。应用中要充分利用 p-V 图。

● 注意功和热量是过程量,与具体过程有关;热力学能(内能)是状态的单值函数与过程无关。对理想气体来说,它们仅与温度有关。

● 求解热机效率时要注意循环中各过程的热量和功的正负。由于循环的特征是 $\Delta E=0$,所以循环作的净功 $W_{净}=Q_{吸}-|Q_{放}|$,因此,不必分别去求各个过程中作功多少,掌握这一点可省下许多力气和麻烦。另外,还要注意热机效率公式 $\eta=\frac{W_{净}}{Q_{吸}}$ 中的 $Q_{吸}$ 是整个循环中的总吸热,不是部分吸热,这一点要特别留意。

● 求解热力学问题的一般方法:

(1)首先是画 p-V 图,指出过程的方向,根据过程的特征,判断吸热还是放热,正功还是负功。

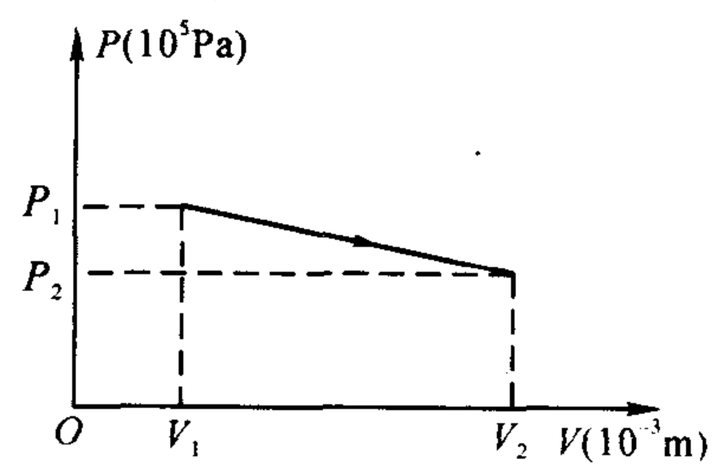
(2)分清哪些态参量已知,哪些态参量未知,然后利用状态方程或过程方程,求出必须知道的态参量。这里要注意,不需要的未知态参量不一定要求出。

(3)在利用各过程的公式求热量 Q、功 W、热力学能(内能)增量 ΔE 时,可以先求出两个容易计算的物理量,然后再利用热力学第一定律求出第三个物理量,这样,既省力又省时间。

● 熵是系统的状态函数。这一点很重要,一定要弄明白。在计算理想气体的熵变时,可按推出的熵变公式选择使用,这样解题的准确率高,不容易出差错。

【习题解答】

12-1 设 1mol 氮气作极其缓慢的减压膨胀,其压强与体积的关系为 $p=(40-4000V)\times10^5$Pa;开始时,气体的体积 $V_1=1\times10^{-3}\text{m}^3$;终止时,气体的体积 $V_2=4\times10^{-3}\text{m}^3$。求该氮气在上述过程中做的功、吸收的热量和热力学能的增量。



解 12-1 图

解 作 p-V 图,氮气作功为

$$W=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}(40-4000V)\times10^5\mathrm{d}V$$

$$=40(V_2-V_1)\times10^5-4000\times\frac{(V_2^2-V_1^2)}{2}\times10^5=12\times10^3-3\times10^3=9\times10^3(\mathrm{J})$$

$$p_1=(40-4000V_1)\times10^5=3.6\times10^6(\mathrm{Pa})$$

$$p_2=(40-4000V_2)\times10^5=2.4\times10^6(\mathrm{Pa})$$

利用状态方程式 $pV=\frac{M}{\mu}RT$ 得

$$T_1=\frac{p_1V_1}{(M/\mu)R}=\frac{3.6\times10^6\times1\times10^{-3}}{1\times8.31}=433(\mathrm{K})$$

$$T_2=\frac{p_2V_2}{(M/\mu)R}=\frac{2.4\times10^6\times4\times10^{-3}}{1\times8.31}=1155(\mathrm{K})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

氮气是双原子分子，$i=5$，故热力学能的增量为

$$\Delta E=\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)=1\times\frac{5}{2}\times 8.31(1155-433)=1.5\times 10^4(\mathrm{J})$$

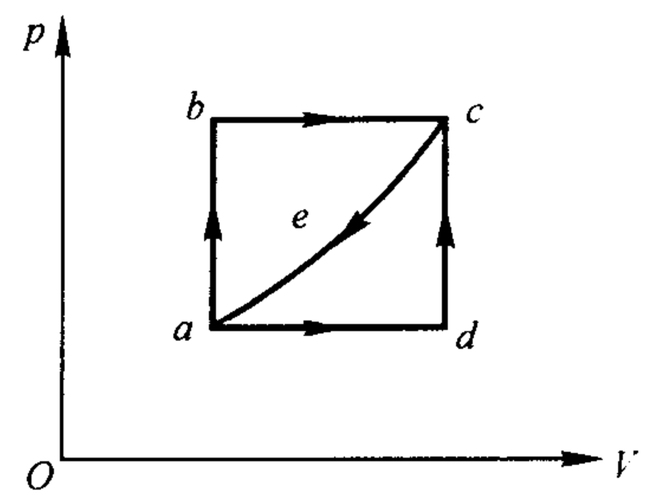
由热力学第一定律，吸收热量为

$$Q=W+\Delta E=9\times 10^3+1.5\times 10^4=2.4\times 10^4(\mathrm{J})$$

12-2 如图所示，一系统由 a 态出发，沿 abc 到达 c 态，吸收了 400J 的热量，并对外做功 200J，问：

(1)沿 adc 过程，系统对外做功 100J，吸收多少热量？

(2)系统由 c 态沿曲线 cea 返回 a 态时，若外界对系统做功 130J，系统吸热还是放热？热量传递是多少？



习题 12-2 图

解 (1)由热力学第一定律

$$\Delta E_{ac}=E_c-E_a=Q_1-W_1=400-200=200(\mathrm{J})$$

故沿 adc 过程吸收的热量为

$$Q_2=\Delta E_{ac}+W=200+100=300(\mathrm{J})$$

(2)在 cea 过程中热量传递为

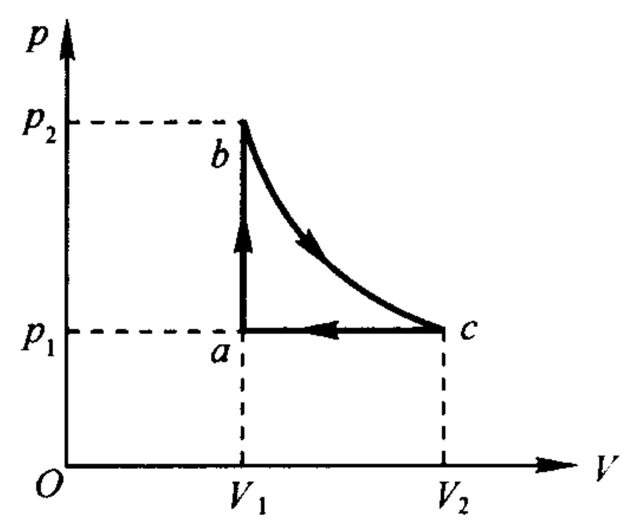
$$Q_3=-\Delta E_{ac}+W_2=-200-130=-330(\mathrm{J})$$

负号表示放热。

12-3 质量 $M=2.8\times 10^{-3}\mathrm{kg}$ 的氮气，经历如图所示的 $abca$ 过程。其中，ab 是等体过程；bc 是等温过程；ca 是等压过程。已知 $p_1=1.0\times 10^5\mathrm{Pa}$，$p_2=3p_1$，$T_a=300\mathrm{K}$，求：

(1)V_1，V_2，T_b；

(2)ab，bc，ca 三过程中 W，ΔE，Q。



习题 12-3 图

解 (1)由理想气体状态方程得

$$V_1=\frac{MRT_a}{\mu p_1}=\frac{2.8\times 10^{-3}\times 8.31\times 300}{28\times 10^{-3}\times 1.0\times 10^5}=2.49\times 10^{-3}(\mathrm{m}^3)$$

$$T_b=\frac{p_2}{p_1}T_a=\frac{3p_1}{p_1}\times 300=900(\mathrm{K})$$

$$V_2=\frac{T_c}{T_a}V_1=\frac{T_b}{T_a}V_1=\frac{900}{300}\times 2.49\times 10^{-3}=7.47\times 10^{-3}(\mathrm{m}^3)$$

(2)在过程 ab 中，$W_{ab}=0$

$$\Delta E_{ab}=E_b-E_a=\frac{M}{\mu}\frac{i}{2}R(T_b-T_a)=\frac{2.8\times 10^{-3}}{28\times 10^{-3}}\times\frac{5}{2}\times 8.31\times(900-300)=1.25\times 10^3(\mathrm{J})$$

$$Q_{ab}=\Delta E_{ab}=1.25\times 10^3\mathrm{J}$$

在过程 bc 中

$$\Delta E_{bc}=E_c-E_b=0$$

$$W_{bc}=\nu RT_b\ln\frac{V_2}{V_1}=0.1\times 8.31\times 900\ln\frac{7.47\times 10^{-3}}{2.49\times 10^{-3}}=822(\mathrm{J})$$

$$Q_{bc}=W_{bc}=822\mathrm{J}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

在过程 ca 中

$$W_{ca}=p_1(V_1-V_2)=1.0\times10^5\times(2.49\times10^{-3}-7.47\times10^{-3})=-498(\mathrm{J})$$

$$\Delta E_{ca}=E_a-E_c=\nu\frac{i}{2}R(T_a-T_c)=0.1\times\frac{5}{2}\times8.31\times(300-900)=-1.25\times10^3\mathrm{J}$$

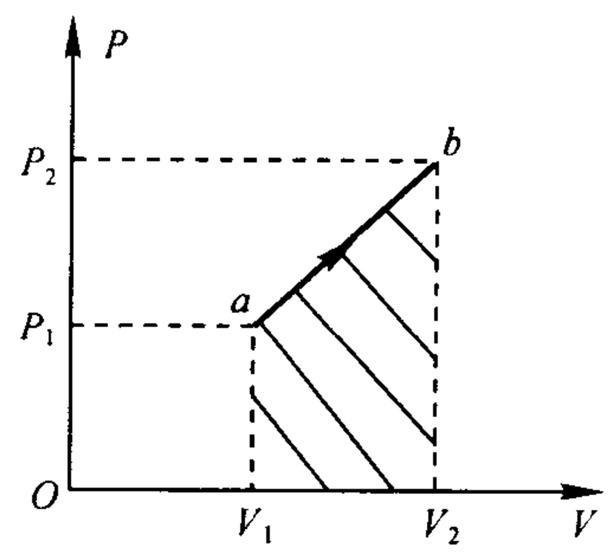
$$Q_{ca}=\Delta E_{ca}+W_{ca}=-1.75\times10^3\mathrm{J}$$

12-4 10mol 单原子分子理想气体在压缩过程中，外力对它做功 209J，气体温度升高 1K，求气体热力学能的增量。问在此过程中，气体吸收的热量和气体的摩尔热容为多少？

解 ∵ $\Delta E=\nu\frac{i}{2}R\Delta T=10\times\frac{3}{2}\times8.31\times1=124.7(\mathrm{J})$，$W=-209\mathrm{J}$，而 $Q=\Delta E+W=-84.3\mathrm{J}$，故摩尔热容为

$$C_m=\frac{Q}{\nu\Delta T}=\frac{-84.3}{10\times1}=-8.43(\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}})$$

12-5 如图所示，某种双原子气体从状态 a 缓慢变化到状态 b。已知 $p_2=2p_1$，$V_2=2V_1$，求该气体的摩尔热容。



习题 12-5 图

解 已知 $p_2=2p_1$，$V_2=2V_1$，由状态方程式

$$p_1V_1=\frac{M}{\mu}RT_1,\quad p_2V_2=\frac{M}{\mu}RT_2$$

得 $T_2=4T_1$，此过程中，吸收热量

$$Q=\frac{M}{\mu}C_m(T_2-T_1)=3\frac{M}{\mu}C_mT_1$$

作功

$$W=\frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2}=\frac{3}{2}p_1V_1=\frac{3}{2}\frac{M}{\mu}RT_1$$

热力学能增量

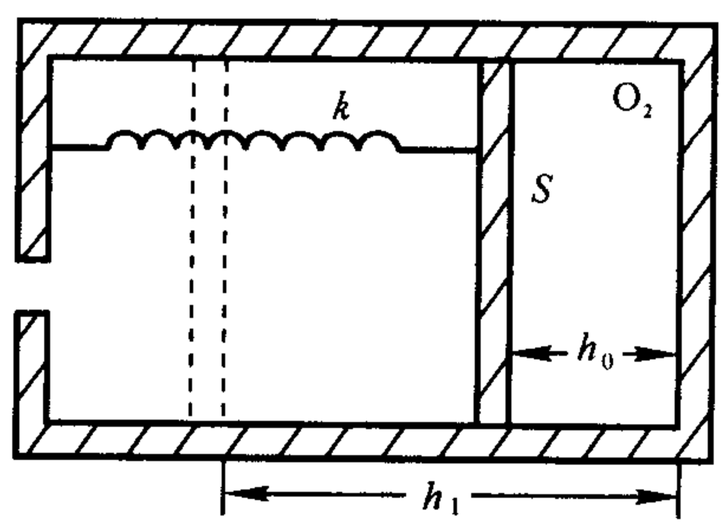
$$\Delta E=\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)=\frac{15}{2}\frac{M}{\mu}RT_1,$$

由热力学第一定律 $Q=W+\Delta E$ 得

$$3\frac{M}{\mu}C_mT_1=\frac{3}{2}\frac{M}{\mu}RT_1+\frac{15}{2}\frac{M}{\mu}RT_1$$

$$\therefore\quad C_m=\frac{R}{2}+\frac{5}{2}R=3R=24.93(\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}})$$

12-6 一圆柱形汽缸横截面积为 $S=0.06\mathrm{m}^2$，汽缸内活塞用劲度系数为 $k=1.0\times10^4\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ 的弹簧与汽缸的左端壁相连接，如图所示。不计活塞与汽缸壁之间的摩擦。汽缸的左室通大气，大气压为 $p_0=1.0\times10^5\mathrm{Pa}$；右室内盛有 0.1mol 分子氧气。当氧气温度 $T=300\mathrm{K}$ 时，活塞处于平衡状态，此时弹簧处于自然伸展状态，活塞离汽缸右端壁的距离为 $h_0=0.04\mathrm{m}$。今将氧气慢慢加热，使活塞向左移动到 $h_1=0.1\mathrm{m}$，试求：



习题 12-6 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(1)此过程中，氧气对外做功多少？

(2)氧气的热力学能增加多少？

解 (1)氧气对外作功为

$$W=\int F\mathrm{d}x=\int_{h_0}^{h_1}p_0S\mathrm{d}x+\int_0^{h_1-h_0}kx\mathrm{d}x=p_0S(h_1-h_0)+\frac{1}{2}k(h_1-h_0)^2=378\mathrm{J}$$

(2)气缸右室内末态压强为 $p_1=p_0+\frac{k(h_1-h_0)}{S}=1.1\times10^5\mathrm{Pa}$，末态体积为 $V_1=h_1S=6\times10^{-3}\mathrm{m}^3$，故氧气的热力学能增量

$$\Delta E=\nu C_{V,\mathrm{m}}(T_1-T_0)=\nu\frac{i}{2}R(T_1-T_0)=\frac{i}{2}(p_1V_1-p_0V_0)$$

$$=\frac{5}{2}(1.1\times10^5\times6\times10^{-3}-1.0\times10^5\times0.04\times0.06)=1.05\times10^3(\mathrm{J})$$

12-7 1mol 双原子分子理想气体由同一状态(p_0,V_0,T_0)出发，分别经过：①等压过程、②等温过程、③绝热过程，体积都增加到 $2V_0$，求这三个过程中气体的温度变化、对外作的功和吸收的热量。

解 (1)等压过程中，

$$T=\frac{V}{V_0}T_0=2T_0$$

温度增量为

$$\Delta T=2T_0-T_0=T_0$$

对外作功为

$$W=p_0\Delta V=p_0V_0=RT_0$$

吸收热量为

$$Q=\nu C_{p,\mathrm{m}}\Delta T=1\times\frac{7}{2}RT_0=\frac{7}{2}RT_0$$

(2)等温过程中，$\Delta T=0$，

$$W=RT_0\ln\frac{V}{V_0}=RT_0\ln2=0.693RT_0$$

$$Q=W=0.693RT_0$$

(3)绝热过程中，$Q=0$，

$$T=\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}T_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{1.4-1}T_0=0.758T_0$$

$$\Delta T=T-T_0=-0.242T_0$$

$$W=\nu C_{V,\mathrm{m}}(T_0-T)=\nu\frac{i}{2}R(T_0-T)=\frac{5}{2}R\times0.242T_0=0.605RT_0$$

12-8 今有 0.016kg 的氧气在标准状态下经过下列过程并吸收 300J 热量：

(1)若为等温过程，求终态体积；

(2)若为等体过程，求终态压强；

(3)若为等压过程，求热力学能的变化。

解 (1)等温过程，由 $Q=\frac{M}{\mu}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$ 得

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$V_2=V_1e^{\frac{\mu Q}{MRT_1}}=11.2\times10^{-3}\exp\left[\frac{32\times10^{-3}\times300}{16\times10^{-3}\times8.31\times273}\right]=1.46\times10^{-2}(\mathrm{m}^3)$$

(2)等体过程中$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}$,再由 $Q_V=\frac{M}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$消去 T_2 得

$$p_2=\frac{p_1}{T_1}\left(\frac{\mu Q}{MC_{V,\mathrm{m}}}+T_1\right)=\frac{1.01\times10^5}{273}\times\left(\frac{32\times10^{-3}\times300}{16\times10^{-3}\times(5/2)\times8.31}+273\right)=1.12\times10^5(\mathrm{Pa})$$

(3)等压过程中 $\Delta E=\frac{M}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$, $Q_p=\frac{M}{\mu}C_{p,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$

$$\therefore\quad \Delta E=\frac{C_{V,\mathrm{m}}}{C_{p,\mathrm{m}}}Q_p=\frac{(5/2)\times300}{7/2}=214.3(\mathrm{J})$$

12-9 一定量的单原子分子理想气体初态 $p_1=1\times10^5\mathrm{Pa}$,$V_1=0.1\mathrm{m}^3$。先对气体等压加热,体积膨胀为 $2V_1$;然后等体加热,压强增大为 $2p_1$;最后绝热膨胀,直到温度恢复到初态温度为止。试在 p-V 图上画出过程曲线,并求:

(1)全过程中热力学能的变化;

(2)全过程中气体吸收的热量;

(3)全过程中气体所做的功。

解 其过程曲线如图所示。

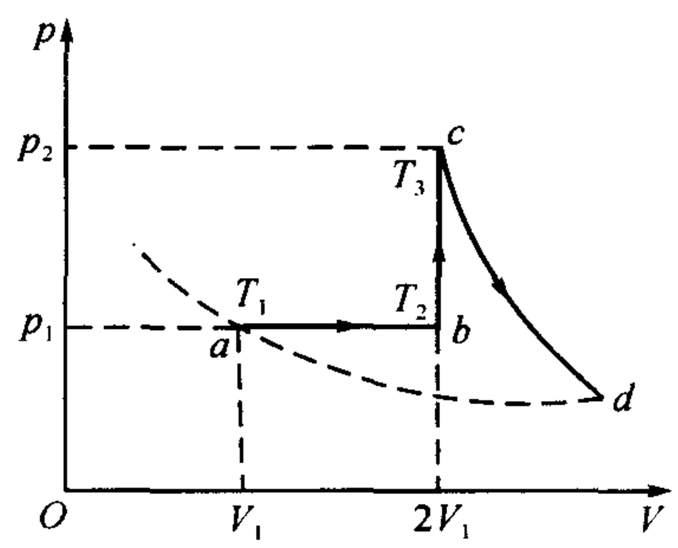
(1)气体从 T_1 经 T_2、T_3 又回到 T_1,所以

$$\Delta E=0$$

(2)$a\to b$ 过程中

$$Q_p=\nu\frac{i+2}{2}R(T_2-T_1)$$

$$=\frac{i+2}{2}(p_1 2V_1-p_1V_1)=\frac{i+2}{2}p_1V_1$$



解 12-9 图

$b\to c$ 过程中

$$Q_V=\nu\frac{i}{2}R(T_3-T_2)=\frac{i}{2}(2p_1 2V_1-p_1 2V_1)=ip_1V_1$$

$$Q=Q_V+Q_p=\frac{3i+2}{2}p_1V_1=\frac{3\times3+2}{2}\times1.0\times10^5\times0.1=5.5\times10^4(\mathrm{J})$$

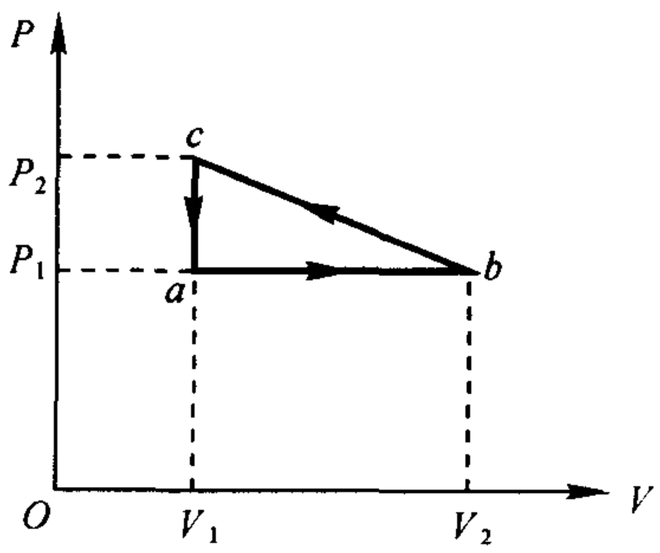
(3)由热力学第一定律有

$$W=Q=5.5\times10^4\mathrm{J}$$

12-10 0.1mol 氦气经历如图所示的 $abca$ 过程。已知 $p_1=1.0\times10^5\mathrm{Pa}$,$p_2=1.5\times10^5\mathrm{Pa}$,$V_1=1.0\times10^{-3}\mathrm{m}^3$,$V_2=3.0\times10^{-3}\mathrm{m}^3$,试求:

(1)T_a,T_b,T_c;

(2)bc 过程中 W,ΔE 和 Q。



习题 12-10 图

解 (1)由理想气体状态方程得

$$T_a=\frac{p_1V_1}{\nu R}=120\mathrm{K},\quad T_b=\frac{p_1V_2}{\nu R}=361\mathrm{K}$$

$$T_c=\frac{p_2V_1}{\nu R}=181\mathrm{K}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2) $$W_{bc}=-\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)=-250\text{J}$$

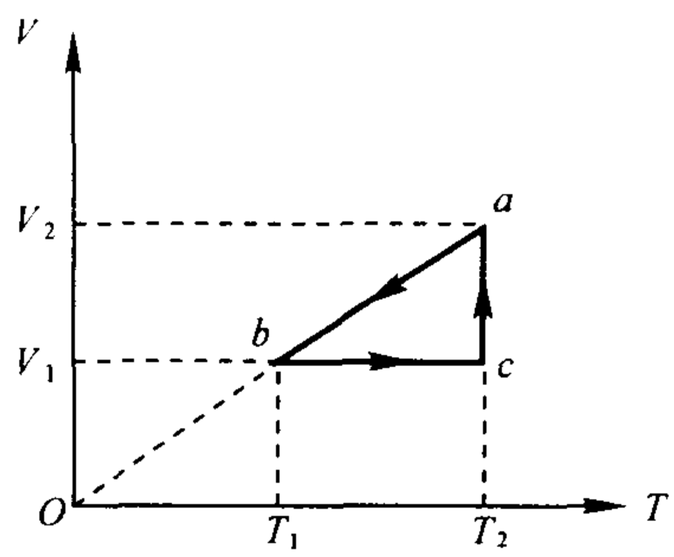
$$\Delta E_{bc}=E_c-E_b=\nu\frac{i}{2}R(T_c-T_b)=0.1\times\frac{3}{2}\times8.31\times(181-361)=-224(\text{J})$$

$$Q_{bc}=\Delta E_{bc}+W_{bc}=-474\text{J}$$

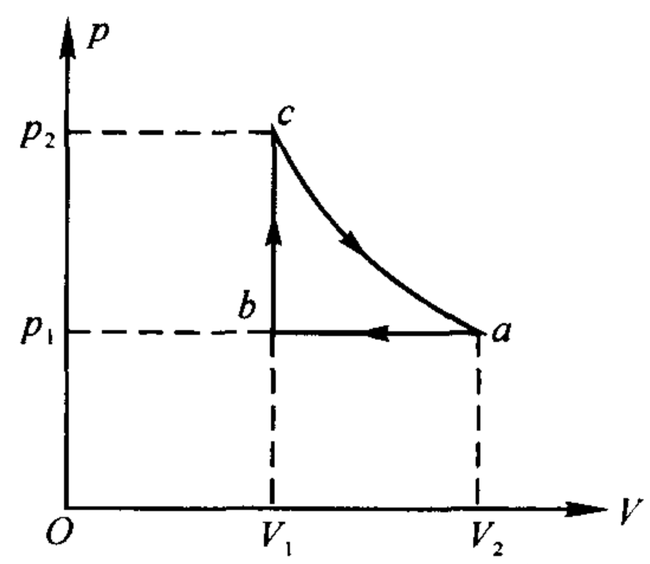
12-11 1mol 单原子分子理想气体经历如图所示的 $abca$ 过程。已知 $V_1=2.0\times10^{-2}\text{m}^3$，$T_1=300\text{K}$，$T_2=600\text{K}$，试求：

(1)a 点的体积 V_2 和压强 p_a；

(2)判断 ab，bc，ca 过程中 W，Q，ΔE 的正负或零。



习题 12-11 图



解 12-11 图

解 如图所示，ab 为等压过程，bc 是等体过程，ca 是等温过程，在 p-V 图上表示出来。

(1)$V_2=\frac{T_2}{T_1}V_1=2\times10^{-2}\times\frac{600}{300}=4.0\times10^{-2}(\text{m}^3)$

$$p_a=p_b=\nu R\frac{T_1}{V_1}=1\times8.31\times\frac{300}{2\times10^{-2}}=1.25\times10^5(\text{Pa})$$

(2)ab 过程中

$$\Delta T<0,\quad dV<0;\quad \Delta E_{ab}<0,\quad W_{ab}<0,\quad Q_{ab}<0$$

bc 过程中

$$dV=0,\quad \Delta T>0;\quad W_{bc}=0,\quad \Delta E_{bc}>0,\quad Q_{bc}>0$$

ca 过程中

$$\Delta T=0,\quad dV>0;\quad \Delta E_{ca}=0,\quad W_{ca}>0,\quad Q_{ca}>0$$

12-12 某汽缸内贮有压强为 $1.013\times10^5\text{Pa}$、体积为 10^{-2}m^3、热力学温度为 283K 的空气，今将空气绝热压缩，最终空气体积压缩到原来的 1/12。试求：

(1)在压缩终了时空气的压强和温度；

(2)在压缩过程中，外界对空气所做的功及气体热力学能的变化。(设空气可视为刚性双原子分子理想气体)

解 (1)绝热压缩过程有 $p_1V_1^\gamma=p_2V_2^\gamma$，即

$$p_2=p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma=1.013\times10^5\times\left(\frac{10^{-2}}{10^{-2}/12}\right)^{1.4}$$
$$=3.28\times10^6(\text{Pa})$$

又由 $T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1}$，得

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=283\times(12)^{0.4}=764.6(\mathrm{K})$$

$$(2)W=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}=\frac{1.013\times10^5\times10^{-2}-3.28\times10^6\times(10^{-2}/12)}{1.4-1}$$

$$=-4.31\times10^3(\mathrm{J})$$

$$\because\quad Q=0,\therefore\quad \Delta E=-W=4.31\times10^3\mathrm{J}$$

12-13 在 1.013×10^5Pa 压强下，1mol 水在 100℃时变成水蒸气，问它的热力学能增加多少？已知在此温度和压强下，水和水蒸气的摩尔体积分别为 $V_{水}=1.88\times10^{-6}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{mol}^{-1}$，$V_{气}=3.10\times10^{-2}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{mol}^{-1}$，水的汽化热为 $\lambda=4.06\times10^4\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$。

解 $Q=\nu\lambda=1\times4.06\times10^4=4.06\times10^4(\mathrm{J})$

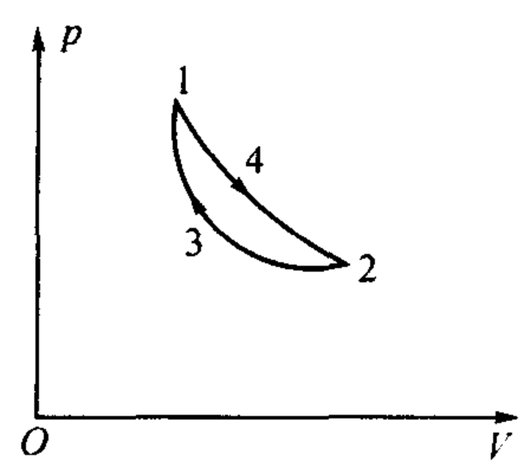
$$W=p(V_{气}-V_{水})=1.013\times10^5\times(3.01\times10^{-2}-1.88\times10^{-6})=3.05\times10^3(\mathrm{J})$$

故水变成水蒸气时热力学能增量为

$$\Delta E=Q-W=3.76\times10^4\mathrm{J}$$

12-14 证明一条等温线与一条绝热线不能有两个交点。

证明 用反证法。设构造一条等温线 1→4→2 与一条绝热线 2→3→1 相交于 1、2 两点，如图所示，则构成一循环过程 14231，而这一循环只有一个热源 T，却能对外作功，这种单热源的热机是违背热力学第二定律的，故假设不成立，即一条等温线和一条绝热线不可能有两个交点。



解 12-14 图

12-15 一卡诺循环的高温热源温度是 400K，每一次循环从高温热源吸收热量 400J，并向低温热源放出热量 320J。求：

(1)低温热源的温度；

(2)循环的热效率。

解 $(1)T_2=\frac{Q_2}{Q_1}T_1=\frac{320}{400}\times400=320(\mathrm{K})$

$(2)\eta_{卡}=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{320}{400}=20\%$

12-16 现有 1.5mol 氧气在 400K 和 300K 之间作卡诺循环。已知循环中氧气的最小体积为 $1.2\times10^{-2}\mathrm{m}^3$，最大体积为 $4.8\times10^{-2}\mathrm{m}^3$。计算该氧气在此循环中所做的功，以及从高温热源吸收的热量和向低温热源放出的热量。

解 最大体积 $V_3=4.8\times10^{-2}\mathrm{m}^3$，最小体积 $V_1=1.2\times10^{-2}\mathrm{m}^3$，由绝热过程方程和氧气的比热容比 $\gamma=1.4$ 得

$$T_1V_2^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_2}{V_3}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\left(\frac{300}{400}\right)^{\frac{1}{1.4-1}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{0.4}}=0.487$$

$$V_2=0.487V_3=0.487\times4.8\times10^{-2}=2.338\times10^{-2}(\mathrm{m}^3)$$

故吸收热量

$$Q_1=\frac{M}{\mu}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}=1.5\times8.31\times400\ln\frac{2.338\times10^{-2}}{1.2\times10^{-2}}=3.33\times10^3(\mathrm{J})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

放出热量$|Q_2|$可利用卡诺循环效率来求：

$$\eta=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

$$|Q_2|=\frac{T_2}{T_1}Q_1=\frac{300}{400}\times 3.33\times 10^3=2.5\times 10^3(\mathrm{J})$$

循环中做功为

$$W_{净}=Q_1-|Q_2|=8.3\times 10^2\mathrm{J}$$

12-17 设想利用表层海水和深层海水的温差来制成热机。已知热带水域表层水温约25℃，300m深处水温约5℃。问：

(1)在这两个温度之间工作的卡诺热机的效率有多大？

(2)如果有一发电站在最大理论效率下工作时获得的机械功率为1MW，则该发电站每秒钟将排出多少废热？

解 (1)高温热源温度$T_1=273+25=298\mathrm{K}$，低温热源温度$T_2=273+5=278\mathrm{K}$，卡诺热机效率为

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{278}{298}=6.7\%$$

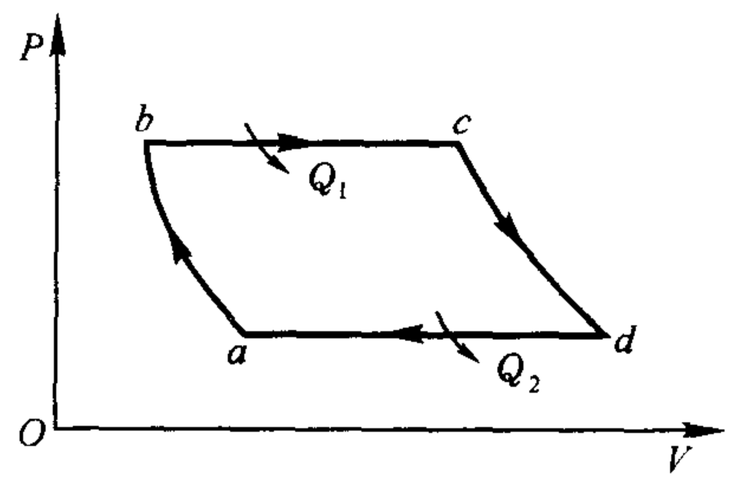
(2) $$Q_{吸}=\frac{W_{净}}{\eta}=\frac{Pt}{\eta}=\frac{10^6}{0.067}=15\times 10^6(\mathrm{W})=15(\mathrm{MW})$$

因为$W_{净}=Q_{吸}-|Q_{放}|$，故

$$|Q_{放}|=Q_{吸}-W_{净}=15\mathrm{MW}-1\mathrm{MW}=14\mathrm{MW}=14\times 10^6\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

12-18 喷气发动机内的工作循环可近似地用如图所示的循环来表示。其中ab、cd分别代表绝热过程，bc、da分别代表等压过程。试证明当发动机内的工作物质为理想气体时，该循环的热效率为

$$\eta=1-\frac{T_d}{T_c}=1-\frac{T_a}{T_b}。$$



习题12-18图

解

$$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{\left|\frac{M}{\mu}C_{p,\mathrm{m}}(T_a-T_d)\right|}{\frac{M}{\mu}C_{p,\mathrm{m}}(T_c-T_b)}$$

$$=1-\frac{T_d}{T_c}\left(1-\frac{T_a}{T_d}\right)\Big/\left(1-\frac{T_b}{T_c}\right) \tag{1}$$

与求证结果比较后可知，只需证明$\frac{T_a}{T_d}=\frac{T_b}{T_c}$就可以了。为此，对四个过程分别列出过程方程

$$a\to b,\qquad T_aV_a^{\gamma-1}=T_bV_b^{\gamma-1} \tag{2}$$

$$b\to c,\qquad \frac{V_b}{T_b}=\frac{V_c}{T_c} \tag{3}$$

$$c\to d,\qquad T_cV_c^{\gamma-1}=T_dV_d^{\gamma-1} \tag{4}$$

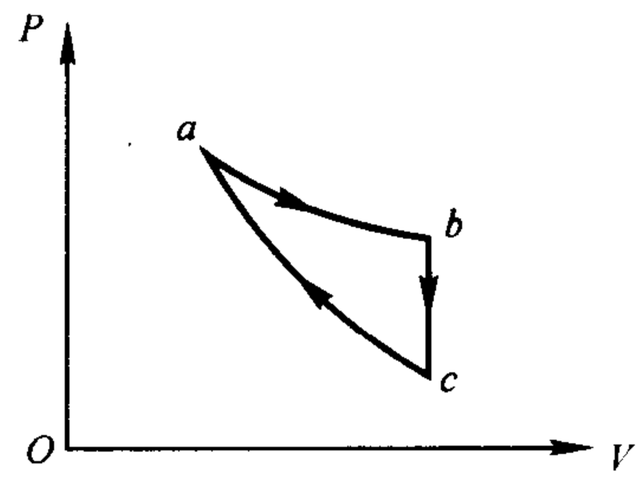
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$d \to a, \qquad \frac{V_d}{T_d}=\frac{V_a}{T_a} \tag{5}$$

联立(1)～(5)式，可证明得到

$$\eta=1-\frac{T_d}{T_c}=1-\frac{T_a}{T_b}$$

12-19 1mol 双原子分子理想气体经历如图所示的循环 $abca$，其中 ab 是等温过程，bc 是等体过程，ca 是绝热过程。试求该循环过程的热效率。（已知 $T_a=500\text{K}$，$T_c=300\text{K}$）



习题 12-19 图

解

$$V_b=V_c$$

$$T_cV_c^{\gamma-1}=T_aV_a^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_b}{V_a}=\frac{V_c}{V_a}=\left(\frac{T_a}{T_c}\right)^{1/\gamma-1}$$

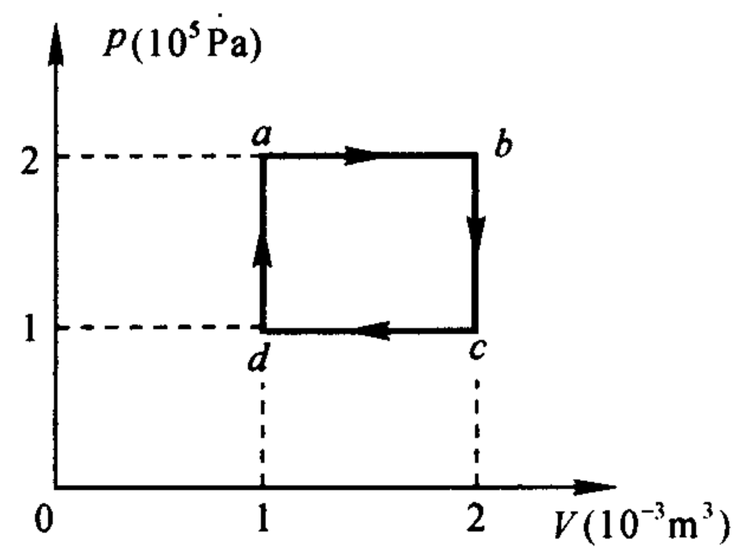
$$Q_1=Q_{ab}=\nu RT_a\ln\frac{V_b}{V_a}=\frac{\nu RT_a}{\gamma-1}\ln\frac{T_a}{T_c}$$

$$Q_2=|Q_{bc}|=\nu\frac{i}{2}R(T_b-T_c)$$

$$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{\frac{i}{2}(\gamma-1)(T_b-T_c)}{T_a\ln\frac{T_a}{T_c}}$$

$$=1-\frac{(5/2)\times(1.4-1)\times(500-300)}{500\ln(5/3)}=21.7\%$$

12-20 1mol 理想气体氦经历如图所示的循环，求该循环的热效率。



习题 12-20 图

解 该循环中气体对外界作功

$W=(p_2-p_1)(V_2-V_1)=(2-1)(2-1)\times10^5\times10^{-3}$
$=100(\text{J})$

吸收的热量

$$Q_1=Q_{da}+Q_{ab}$$
$$=\nu C_{V,\text{m}}(T_a-T_d)+\nu C_{p,\text{m}}(T_b-T_a)$$
$$=\nu\frac{i}{2}R(T_a-T_d)+\nu\frac{i+2}{2}R(T_b-T_a)$$
$$=\frac{i}{2}(p_2V_1-p_1V_1)+\frac{i+2}{2}(p_2V_2-p_2V_1)$$
$$=\frac{3}{2}\times(2-1)\times10^2+\frac{5}{2}\times(4-2)\times10^2=650(\text{J})$$

该循环的热效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=15.4\%$$

12-21 如图所示，AB 和 DC 是绝热过程，CEA 是等温过程，BED 是任意过程，它们组成 $ABEDCEA$ 循环。若 EDC 面积表示的功是 70J，EAB 面积表示的功为 30J，CEA 过程中

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

放出的热量 $Q_{CEA}=100\text{J}$，求 Q_{BED} 及循环的热效率 η。

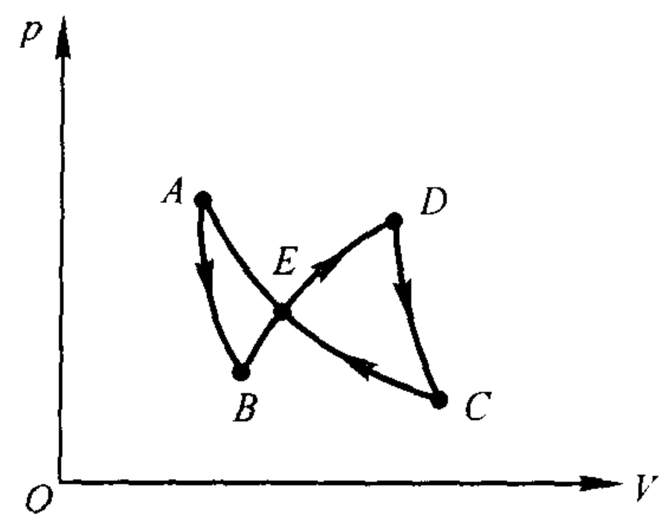
解 循环中气体对外作的总功为

$$W=70+(-30)=40(\text{J})$$

又因 AB、DC 为绝热过程，整个循环 $\Delta E=0$，而

$$Q_{BED}+Q_{CEA}=W+\Delta E,\quad Q_{BED}=140\text{J}$$

$$\therefore\quad \eta=\frac{W}{Q_{BED}}=28.6\%$$



习题 12-21 图

12-22 一台可视作理想卡诺致冷机的家用电冰箱处在室温为27℃的房间内，设做一盘－13℃的冰块需从冷冻室取走 2.09×10^5J 的热量，试求：

(1)做一盘冰块所需要的功；

(2)若此冰箱能以 $2.09\times10^2\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率取出热量，此冰箱所要求的电功率；

(3)做上述冰块所需时间。

解 (1)卡诺致冷机致冷系数为

$$w=\frac{T_2}{T_1-T_2}=\frac{260}{300-260}=6.5$$

又因为 $w=Q_2/W$

$$\therefore\quad W=\frac{Q_2}{w}=\frac{2.09\times10^5}{6.5}=3.22\times10^4(\text{J})$$

(2)电功率

$$P=\frac{q}{w}=\frac{2.09\times10^2}{6.5}=32.2(\text{W})$$

(3)所需时间

$$\Delta t=\frac{Q_2}{q}=10^3\text{s}$$

12-23 将温度为20℃的1kg水放到100℃的炉子上加热，最后水也被加热到100℃，已知水的比热为 $4.18\times10^3\text{J}\cdot(\text{kg}\cdot\text{K})^{-1}$。试问上述过程中水和炉子的熵分别变化了多少？

解 由熵变定义式得水的熵变为

$$\Delta S_{水}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}Q_r}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{Mc\mathrm{d}T}{T}=Mc\ln\frac{T_2}{T_1}=1\times4.18\times10^3\ln\frac{373}{293}=1.01\times10^3\times(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$$

炉子的熵变为

$$\Delta S_{炉}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}Q_r}{T}=\frac{-Mc(T_2-T_1)}{T_2}=-\frac{1\times4.18\times10^3\times(373-293)}{373}=-9\times10^2(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$$

12-24 0.1mol 氧气(可视作刚性分子理想气体)经历 abc 过程，如图所示，求：

(1)此过程中气体对外所作的功；

(2)此过程中气体吸收的净热；

(3)过程前后，气体熵的增量。

解 (1)如图所示，气体对外所作的功等于 abc 下的面积

$$W=\frac{1}{2}(p_a+p_b)(V_b-V_a)+\frac{1}{2}(p_b+p_c)(V_c-V_b)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$=1.3\times10^3\text{J}$$

(2)其热力学能变化为

$$\Delta E=\nu\frac{i}{2}R(T_c-T_a)$$

$$=\frac{i}{2}(p_cV_c-p_aV_a)=1.5\times10^3\text{J}$$

吸收的热量

$$Q=\Delta E+W=2.8\times10^3\text{J}$$

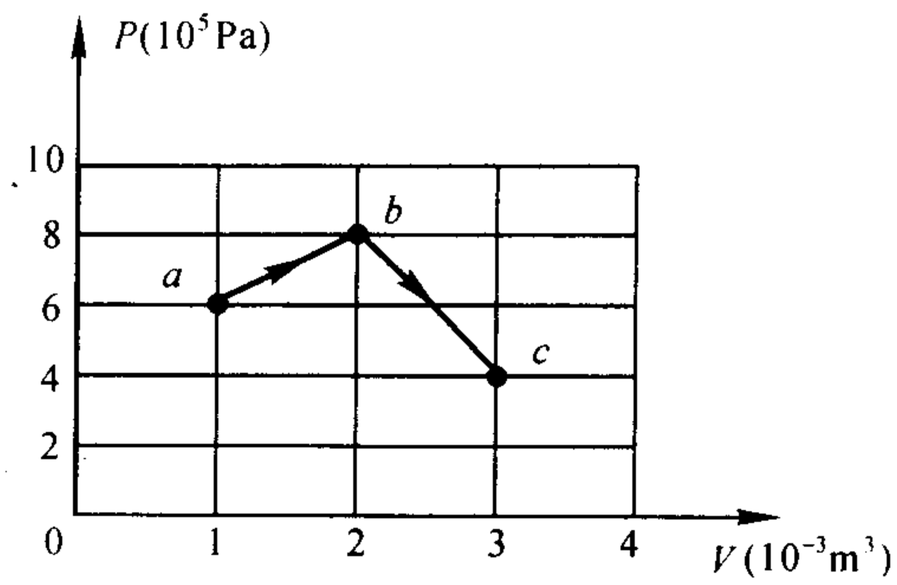
(3)熵的变化为

$$\Delta S_{ac}=\nu\left(C_{p,\text{m}}\ln\frac{V_c}{V_a}+C_{V,\text{m}}\ln\frac{p_c}{p_a}\right)$$

$$=\nu\left(\frac{7}{2}R\ln\frac{V_c}{V_a}+\frac{5}{2}R\ln\frac{p_c}{p_a}\right)$$

$$=0.1\times\frac{7}{2}\times8.31\times\ln3+\frac{5}{2}\times8.31\times\ln\frac{2}{3}$$

$$=2.35(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$$



习题 12-24 图

12-25 1mol 双原子分子理想气体,体积由 V_0 膨胀到 $4V_0$,过程方程为 $pV^2=$常量,求:

(1)气体对外界所做的功(用 p_0,V_0 表示);

(2)气体的熵变。

解 (1)$W=\int_{V_0}^{4V_0}p\text{d}V=\int_{V_0}^{4V_0}\frac{C}{V^2}\text{d}V=C\left(\frac{1}{V_0}-\frac{1}{4V_0}\right)=p_0V_0^2\cdot\frac{3}{4V_0}=\frac{3}{4}p_0V_0$

(2)由 $p_0V_0^2=p(4V_0)^2$ 得

$$p=\frac{1}{16}p_0$$

$$\therefore\quad\Delta S=\nu C_{p,\text{m}}\ln\frac{V}{V_0}+\nu C_{V,\text{m}}\ln\frac{p}{p_0}=1\times\frac{7}{2}\times8.31\times\ln4+1\times\frac{5}{2}\times8.31\times\ln\frac{1}{16}$$

$$=-17.3(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$$

12-26 现有 2mol 双原子分子理想气体由$V_0=10\times10^{-3}\text{m}^3$,$p_0=5\times10^5\text{Pa}$ 的状态绝热不可逆膨胀到 $V_1=20\times10^{-3}\text{m}^3$,$p_1=3\times10^5\text{Pa}$,求此过程中气体的熵变。

解 由熵变公式得

$$\Delta S=\nu C_{V,\text{m}}\frac{P_1}{P_0}+\nu C_{p,\text{m}}\ln\frac{V_1}{V_0}$$

$$=2\times\frac{5}{2}\times8.31\times\ln\frac{3}{5}+2\times\frac{7}{2}\times8.31\times\ln2=19.1(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$$

12-27 已知在 0℃,1mol 的冰熔解为 1mol 的水需要吸热 6 000J,求:

(1)在 0℃时,这些冰化为水时的熵变;

(2)0℃时这些水的微观状态数与冰的微观状态数之比。

解 (1)$\Delta S=\int\frac{\text{d}Q}{T}=\frac{Q}{T}=\frac{6000}{273}=22.0(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$

(2)$\Delta S=S_{水}-S_{冰}=k\ln\Omega_{水}-k\ln\Omega_{冰}=k\ln\frac{\Omega_{水}}{\Omega_{冰}}$

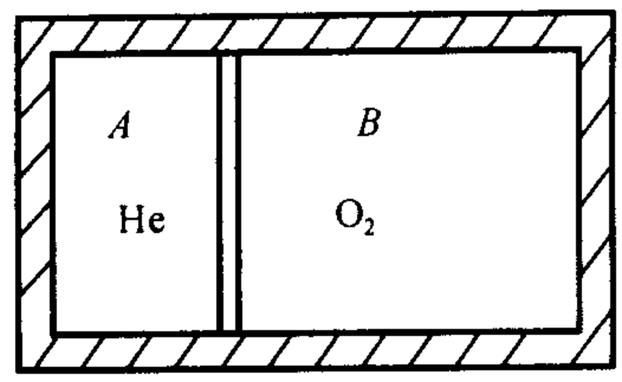
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad \frac{\Omega_{水}}{\Omega_{冰}} = e^{\frac{\Delta S}{k}} = \exp\left[\frac{22.0}{1.38\times10^{-23}}\right] = 10^{6.90\times10^{23}}$$

12-28 如图所示，在绝热容器中有一可移动且导热的隔板，将容器分成 A 和 B 两部分。A 中有 1mol 氦气，B 中有 1mol 氧气，初态 $T_A=300\text{K}$，$T_B=600\text{K}$，压强均为 1.0×10^5 Pa。试求：

(1)整个系统达到平衡时的温度和压强；

(2)氦气和氧气各自的熵变。



习题 12-28 图

解 (1)系统与外界无能量交换，故总热力学能不变

$$\frac{3}{2}RT_A+\frac{5}{2}RT_B=\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)RT$$

整个系统平衡时的温度为

$$T=\frac{3T_A+5T_B}{3+5}=\frac{3\times300+5\times600}{8}=488(\text{K})$$

再由 $V_A+V_B=V_A'+V_B'$ 和 $V_A=\frac{RT_A}{p_A}$，$V_B=\frac{RT_B}{p_B}$，$V_A'=V_B'=\frac{RT}{p}$

整个系统平衡时的压强为

$$p=\frac{2Tp_A}{T_A+T_B}=\frac{2\times488\times1.0\times10^5}{300+600}=1.08\times10^5(\text{Pa})$$

(2)氦气的熵变为

$$\Delta S_{\text{He}}=C_{p,\text{m}}\ln\frac{T}{T_A}-R\ln\frac{p}{p_A}=\frac{5}{2}\times8.31\times\ln\frac{488}{300}-8.31\times\ln\frac{1.08\times10^5}{1.0\times10^5}=9.47(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$$

氧气的熵变为

$$\Delta S_{\text{O}_2}=C_{p,\text{m}}\ln\frac{T}{T_B}-R\ln\frac{p}{p_B}=\frac{7}{2}\times8.31\times\ln\frac{488}{600}-8.31\times\ln\frac{1.08\times10^5}{1.0\times10^5}=-6.65(\text{J}\cdot\text{K}^{-1})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 13 章

静电场

【基本概念和规律】

1. 静电场中两个基本物理量

(1)电场强度 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\boldsymbol{F}}{q_0}$

(2)电势 $V_P=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

2. 静电场中两个基本定理

(1)高斯定理：$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i(内)}$

(2) 场强环流定理：$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，表明静电场是保守力场。

3. 点电荷和电荷连续分布的电场强度计算

(1)点电荷的场强公式：$\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$

(2)电荷连续分布的场强计算公式：$\boldsymbol{E}=\int\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$，是一个矢量积分，具体计算时用分量式分别积分。

4. 电通量

$$\Phi_E=\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

5. 点电荷和电荷连续分布的电势计算

(1)点电荷电势公式：$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

(2)电荷连续分布的电势计算公式：$V=\int\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，是一个标量积分。

6. 电势差

$$V_a-V_b=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

7. 在静电场中移动电荷 q_0 时电场力作功

$$W_{ab}=q_0(V_a-V_b)$$

8. 电势梯度

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【解题指导】

● 求电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方法：

(1)首先要记住点电荷的电场强度公式 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$，这是解题的基础。

(2)点电荷的场强积分法。主要用于对电荷连续分布且电场分布不具备对称性的问题求场强。我们把带电体看作是许多电荷元的集合，电荷元可以是线元、面积元和体积元，并视为点电荷 $\mathrm{d}q$，电场中某点 P 的场强即为点电荷 $\mathrm{d}q$(即电荷元)的场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的矢量积分

$$\boldsymbol{E}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

上式积分要遍及整个带电体。注意，在这个积分中，因电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的大小、方向均变化，故应首先把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分解为 $\mathrm{d}E_x$、$\mathrm{d}E_y$，(这里仅考虑平面问题)，然后把矢量积分写成分量形式，再进行具体标量积分计算，即

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x,\quad E_y=\int\mathrm{d}E_y$$

最后求出 P 点场强的大小为 $E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$，其方向用场强 $\boldsymbol{E}$ 和 x 轴的夹角 $\theta=\arctan\frac{E_y}{E_x}$ 表示。

在某些特殊情况下，各电荷元的 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 都沿同一方向，这时 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 就不必分解，用 $E=\int\mathrm{d}E$ 直接积分就可以了。若带电体分布具有对称轴，则电荷元的 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在垂直于对称轴的方向上的分量互相抵消，该方向的场强分量为零。我们只要对一个方向的分量积分就得到最后的结果了。例如，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在垂直于 x 轴的方向上的分量 $\mathrm{d}E_y$ 互相抵消，则 $E_y=0$，因此，P 点场强为 $E=E_x$。故在进行矢量积分时要进行对称性分析，这样，可以省很多力气。

(3)利用高斯定理求解。运用高斯定理方法求场强 $\boldsymbol{E}$ 的适用条件是电场具有一定的对称性，否则积分十分困难。该方法的关键是选取方便、合适的封闭面，即通常称的高斯面。高斯面要过所求场强的点，其形状要和电场分布相似，高斯面可以是整个球面，也可以把高斯面分成几个部分组成，或者一部分面和场强 $\boldsymbol{E}$ 平行，则通过该部分的电通量为零；或者一部分面和场强 $\boldsymbol{E}$ 垂直，且面上各点 $\boldsymbol{E}$ 的大小都相等，则通过该部分的电通量 $\Phi_E=ES$，这样，就便于计算了。

(4)利用电势梯度求场强 $\boldsymbol{E}$。这里顺便说明一下，如果我们同时要求场强和电势，由于电势是标量，用标量积分计算电势比用矢量积分计算场强简便得多，所以往往先求出电势，然后利用电势梯度的方法求场强。

● 求电势 V 的方法：

(1)首先记住点电荷电势的公式 $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$。

(2)从电势定义出发求解。若取无穷远处为电势参考点，则电场中某点 P 的电势为

$$V_P=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

这里要注意两点：

①要分段积分。不同的积分段，$\boldsymbol{E}$ 的表达式不同，同一积分段中，$\boldsymbol{E}$ 的表达式相同。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

②要选择一条方便的积分路线。

(3)点电荷的电势积分法。若电荷是连续分布的，则可把带电体看成是由许多点电荷(电荷元)dq 的集合，然后将点电荷 dq 在某点 P 产生的电势 dV 进行标量积分就可求得电场中某点 P 的电势为

$$V_P=\int dV=\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

● 静电场中两个重要的基本物理量，即电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电势 V 的解题思路：

(1)有对称性分布的静电场先求 $\boldsymbol{E}$，后求 V。

(2)无对称性分布的静电场先求 V，后求 $\boldsymbol{E}$。

(3)利用典型带电体的场强 $\boldsymbol{E}$ 和电势 V 的结果进行积分计算来求一般带电体的场强 $\boldsymbol{E}$ 和电势 V。

● 电场力作功可用电势差表示为

$$W_{ab}=q_0(V_a-V_b)$$

由于实际应用中常遇到电势差，用上述公式计算电场力作功十分方便。故尽量不要用功的定义式求解电场力作功，那样计算会比较麻烦。

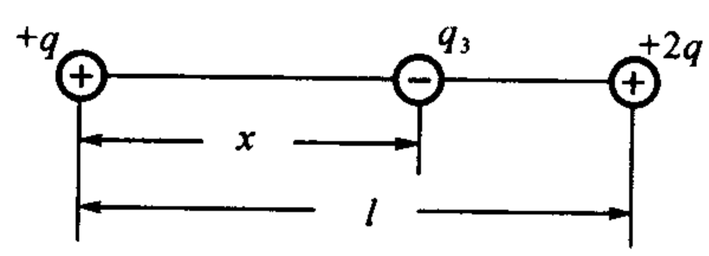
【习题解答】

13-1 最新研究表明，质子、中子和介子等基本粒子由更小的夸克(quark)组成。如一个正 π 介子由一个 u 夸克和一个反 d 夸克组成，u 夸克带电量为 $\frac{2}{3}e$，反 d 夸克带电量为 $\frac{1}{3}e$。将夸克看作点电荷，试计算正 π 介子中夸克间的电场力(设两夸克之间的距离为 1.0×10^{-15} m)。

解
$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{2}{3}e\cdot\frac{1}{3}e}{r^2}=9\times10^9\frac{\frac{2}{9}\times(1.6\times10^{-19})^2}{(1\times10^{-15})^2}=51.2(\mathrm{N})$$

13-2 两个正点电荷 q 和 $2q$ 相距为 l，试问将第三个点电荷放在何处、电量与符号应如何设置，才能使所有三个电荷均处于平衡？

解 由库仑定律可知，q_3 只能放在 q 和 $2q$ 的连线之间，而且是负电荷，才能使三个电荷均处于平衡。设 q_3 离 q 的距离为 x，向右为正方向



解 13-2 图

对 q

$$-\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}+\frac{qq_3}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=0 \qquad (1)$$

对 q_3

$$-\frac{qq_3}{4\pi\varepsilon_0 x^2}+\frac{2qq_3}{4\pi\varepsilon_0(l-x)^2}=0 \qquad (2)$$

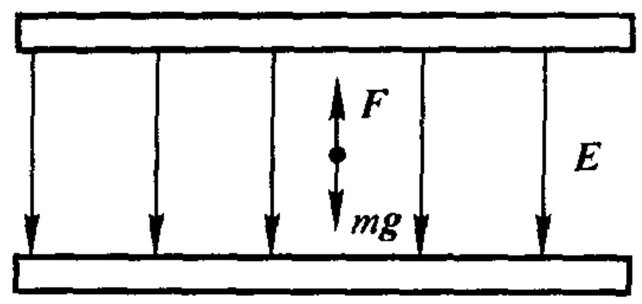
联立(1)、(2)式解得

$$x=(\sqrt{2}-1)l,\qquad q_3=(6-4\sqrt{2})q$$

显然，带的是负电荷。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

13-3 电子所带的电量($-e$)最先是由密立根通过油滴实验测出的。如图所示,一个很小的油滴在均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 中所受的静电力恰好与重力平衡。如果油滴半径为 $R=2.76\times10^{-6}\mathrm{m}$,密度 $\rho=920\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$,场强 $E=1.65\times10^{6}\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$,试求油滴上的电荷并说明共带有几个电子。



习题 13-3 图

解 规定向下为正方向,设油滴上的电荷电量为 q,电荷受力为

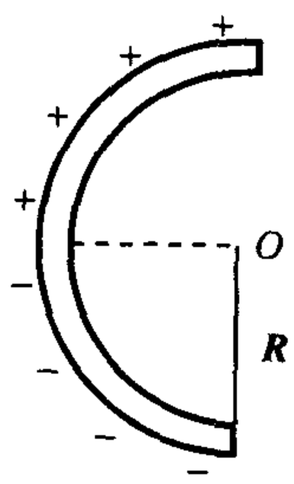
$$mg+qE=0$$

$$q=-\frac{mg}{E}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho g}{E}=\frac{\frac{4}{3}\times3.14\times(2.76\times10^{-6})^3\times920\times9.8}{1.65\times10^{6}}=-4.8\times10^{-19}(\mathrm{C})$$

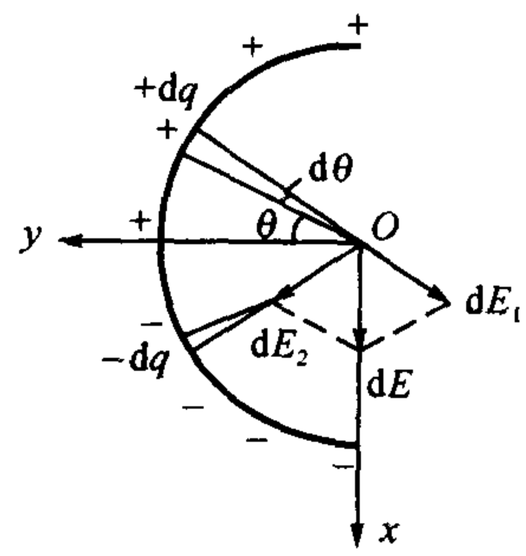
带有的电子数为

$$n=\frac{q}{-e}=\frac{-4.8\times10^{-19}}{-1.6\times10^{-19}}=3$$

13-4 有一细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形,其上半部均匀带有电荷 $+Q$,下半部均匀带有电荷 $-Q$,如图所示。试求半圆中心 O 处的场强。



习题 13-4 图



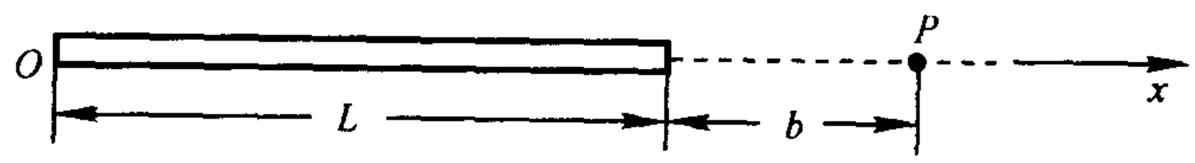
解 13-4 图

解 如图所示,建立坐标系。上下两段电荷线密度分别为 $\pm\lambda=\pm\frac{Q}{(1/2)\pi R}$。在夹角为 $\pm\theta$ 处,各取对称的电荷元 $\pm\mathrm{d}q=\pm\lambda R\mathrm{d}\theta$,它们在圆心 O 点产生的场强分别为 $\mathrm{d}E_1$ 和 $\mathrm{d}E_2$。由对称性可知,两者合成的 $\mathrm{d}E$ 沿 x 轴正方向,大小为

$$\mathrm{d}E=2\cdot\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\sin\theta=\frac{\lambda\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0R}$$

$$\therefore\quad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0R}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0R}=\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

13-5 如图所示,一带电细棒长为 L,沿 x 轴正方向平行放置,其一端在原点。设单位长度的电荷 $\lambda=kx$,式中 k 为正常量,求 x 轴上 $x=L+b$ 处的电场强度。



习题 13-5 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 在带电细棒上取任一电荷元 $dq=\lambda dx$，dq 在 P 点产生的场强 dE 沿 x 轴正方向

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(L+b-x)^2}=\frac{kxdx}{4\pi\varepsilon_0(L+b-x)^2}$$

$$E=\int_0^L\frac{kxdx}{4\pi\varepsilon_0(L+b-x)^2}=\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\frac{xdx}{(L+b-x)^2}$$

令 $L+b-x=x'$，$dx=-dx'$

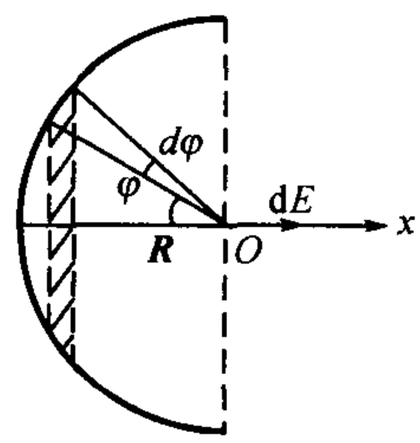
$$E=\left[\int_{L+b}^{b}\frac{-(L+b-x')dx'}{x'^2}\right]\cdot\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}=\left[\int_{L+b}^{b}-\frac{L+b}{x'^2}dx+\int_{L+b}^{b}\frac{dx'}{x'}\right]\cdot\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$=\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{L}{b}+\ln\frac{b}{L+b}\right]=\frac{kL}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{L+b}$$

13-6 半径为 R 的非导体半球壳均匀带电，总电量为 q。求球心 O 处的电场强度。

解 建立如图坐标系，球壳电荷面密度为 $\sigma=\frac{q}{2\pi R^2}$。取窄圆环如图，其面积为 $dS=2\pi R\sin\varphi Rd\varphi$，相应电荷元 $dq=\sigma dS=2\pi\sigma R^2\sin\varphi\, d\varphi$。

由对称性可知，该带电窄圆环在球心 O 处的场强 $d\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴正方向，大小为

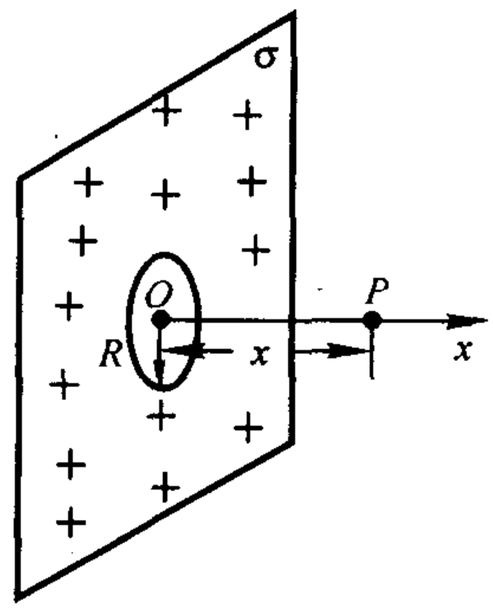


解 13-6 图

$$dE=\frac{dq\cdot R\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

13-7 如图所示，一无限大均匀带电平面的电荷面密度为 σ，现在其上挖去一个半径为 R 的圆孔。在通过孔中心并垂直于平面的直线上有一点 P，$OP=x$，求 P 处的电场强度。



习题 13-7 图

解 如图所示，挖去圆孔后平面在 P 点的场强 E，可以看成均匀带电、面密度为 σ 的无限大平面在 P 点产生的场强 $E_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，减去半径为 R 的均匀带电、面密度为 σ 的圆平面在 P 点产生的场强 $E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$，故总电场为

$$E_P=E_1-E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

其方向沿 x 轴正方向。

13-8 实验表明：在靠近地面处有相当强的电场，大小约为 $200\mathrm{N\cdot C^{-1}}$，方向垂直地面向下。试求地球带的总电量。（地球半径 $R=6.37\times10^6\mathrm{m}$）

解 由高斯定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=-E\cdot 4\pi R^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$Q=-4\pi\varepsilon_0 R^2E=-4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times(6.37\times10^6)^2\times200=-9.02\times10^5(\mathrm{C})$$

13-9 一边长为 $l=2\mathrm{m}$ 的正方体的一个顶点在坐标原点，三条边分别为 x,y,z 轴。今有 $\boldsymbol{E}=200\boldsymbol{i}+400\boldsymbol{j}(\mathrm{N\cdot C^{-1}})$，求通过三个面（$xy,yz,zx$）的电通量。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 由电通量定义，通过三个面的电通量依次为

$$\Phi_{xy}=|\boldsymbol{E}\cdot S_{xy}\boldsymbol{k}|=0$$

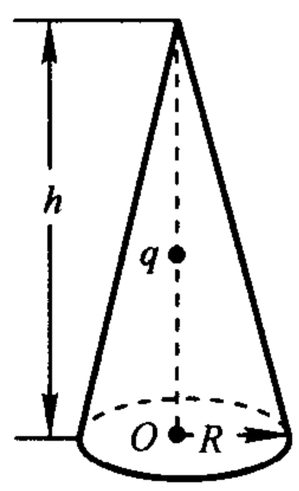
$$\Phi_{yz}=|\boldsymbol{E}\cdot S_{yz}\boldsymbol{i}|=|(200\boldsymbol{i}+400\boldsymbol{j})\cdot l^2\boldsymbol{i}|$$

$$=200l^2=8.0\times10^2(\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}})$$

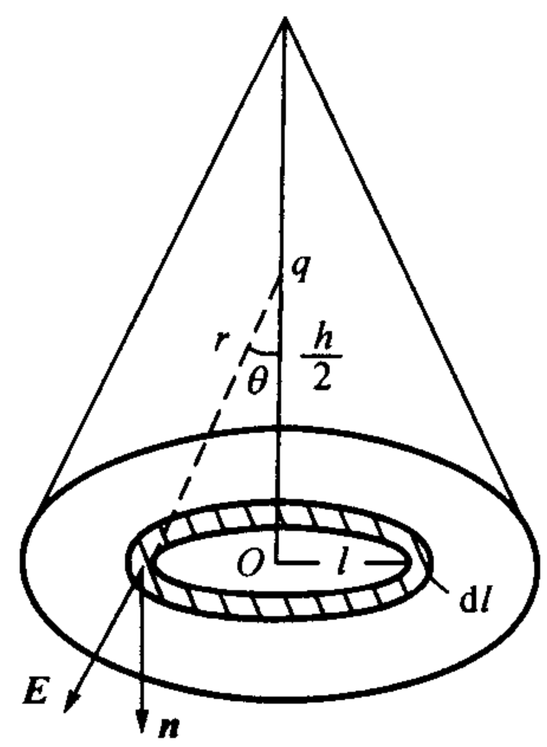
$$\Phi_{zx}=|\boldsymbol{E}\cdot S_{zx}\boldsymbol{j}|=|(200\boldsymbol{i}+400\boldsymbol{j})\cdot l^2\boldsymbol{j}|$$

$$=400l^2=1.6\times10^3(\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}})$$

13-10 如图所示，一高为 $h=0.2\mathrm{m}$、底面半径 $R=0.1\mathrm{m}$ 的圆锥体，其顶点与底面圆心连线的中点上放置一个 $q=10^{-6}\mathrm{C}$ 的点电荷，求通过该圆锥体侧面的电通量。



习题 13-10 图



解 13-10 图

解 由高斯定理可知，通过圆锥面的总电通量为 $\frac{q}{\varepsilon_0}$，而通过其底面的电通量为

$$\Phi_{底}=\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^R\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\cdot2\pi l\mathrm{d}l\,\frac{h/2}{r}$$

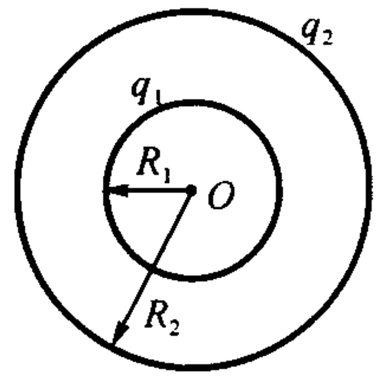
$$=\int_0^R\frac{qhl\mathrm{d}l}{4\varepsilon_0\left(l^2+\frac{h^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{q}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-h}{2\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}+1\right]$$

$$=1.65\times10^4(\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}})$$

所以通过侧面的电通量为

$$\Phi_{侧}=\frac{q}{\varepsilon_0}-\Phi_{底}=9.65\times10^4(\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}})$$

13-11 两个均匀带电的同心球面，内球面带有净电荷 q_1，外球面带有净电荷 q_2。两球面之间的电场强度为 $\frac{3000}{r^2}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$，且方向沿半径向内；球外的电场强度为 $\frac{2000}{r^2}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$，且方向沿半径向外。试求 q_1 和 q_2 各等于多少？



解 13-11 图

解 设内球面半径为 R_1，外球面半径为 R_2，由高斯定理得

$$R_1<r<R_2,\quad \oint_S\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-E_1\cdot4\pi r^2=\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$q_1=-4\pi\varepsilon_0 r^2 E_1=-4\pi\varepsilon_0 r^2\frac{3000}{r^2}=\frac{-1}{9\times10^9}\times3\times10^3=-\frac{1}{3}\times10^{-6}(\mathrm{C})$$

$r>R_2$，
$$\oint_S \boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E_2\cdot4\pi r^2=\frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0}$$

$$q_1+q_2=4\pi\varepsilon_0 r^2 E_2=4\pi\varepsilon_0 r^2\frac{2000}{r^2}=\frac{1}{9\times10^9}\times2\times10^3=\frac{2}{9}\times10^{-6}(\mathrm{C})$$

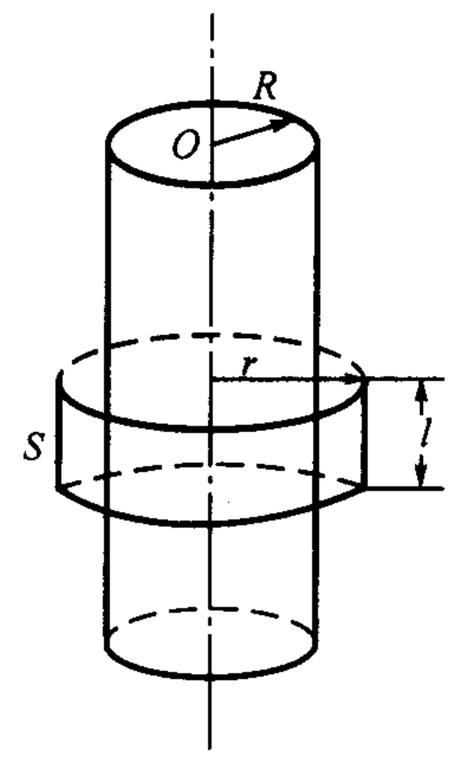
$$q_2=\frac{2}{9}\times10^{-6}-q_1=\frac{2}{9}\times10^{-6}+\frac{1}{3}\times10^{-6}=\frac{5}{9}\times10^{-6}(\mathrm{C})$$

13-12 半径为 R 的长直圆柱体均匀带电，电荷体密度为 ρ。试求下列各处的场强分布：

(1)在圆柱体外；

(2)在圆柱体内；

(3)电场在何处最强？何处最弱？



解 13-12 图

解 (1)根据高斯定理，作同轴的高斯面 S，在圆柱体外

$$\Phi_E=E\cdot2\pi rl=\frac{\pi R^2 l\rho}{\varepsilon_0},\qquad E_1=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

(2)在圆柱体内，同理

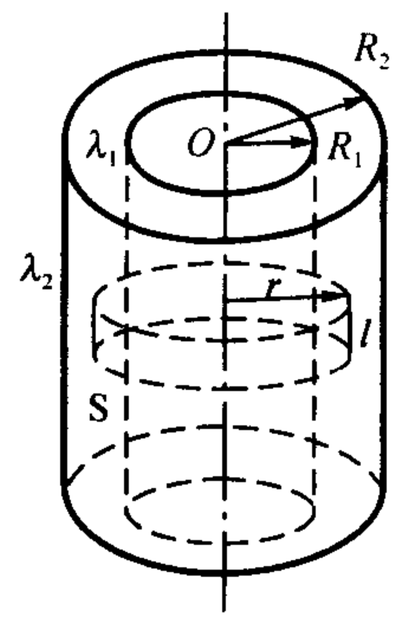
$$\Phi_E=E_2\cdot2\pi rl=\frac{\pi r^2 l\rho}{\varepsilon_0},\qquad E_2=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

(3)由以上结果可知 $r=R$ 处，E 最强；$r=\infty$ 或 $r=0$ 处(轴线上)，E 最弱。

13-13 一对均匀带电无限长的共轴圆柱面半径分别为 R_1 和 R_2，沿轴向单位长度上的带电量分别为 λ_1 和 λ_2($\lambda_1>0,\lambda_2>0$)。求：

(1)各电场区域内的场强分布；

(2)若 $\lambda_2=-\lambda_1$，情况如何？试画出其 E-r 分布曲线。



解 13-13(a)图

解 (1)作同轴封闭圆柱形高斯面 S，如图(a)所示，根据高斯定理

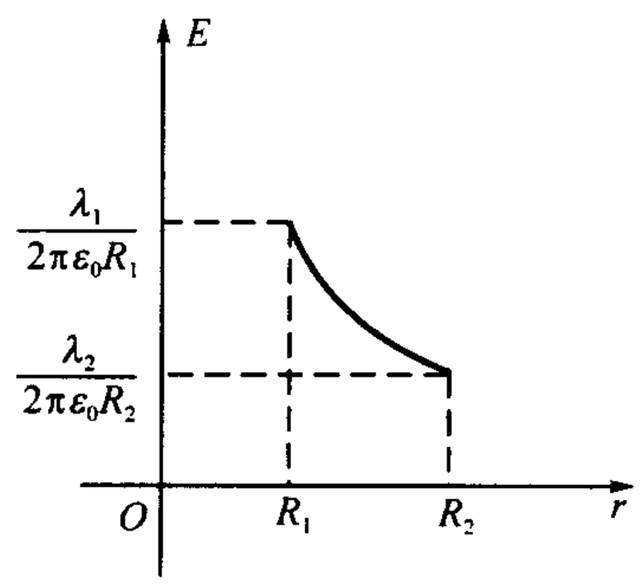
$$\Phi_E=2\pi rl\cdot E=\frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

当 $r<R_1$，
$$E_1=0$$

$R_1<r<R_2$，
$$2\pi rl\cdot E_2=\frac{l\lambda_1}{\varepsilon_0},\qquad E_2=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$r>R_2$，
$$2\pi rl\cdot E_3=\frac{l\lambda_1+l\lambda_2}{\varepsilon_0},\qquad E_3=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(2)如 $\lambda_2=-\lambda_1$，则 $E_3=0$，其 E-r 曲线如图(b)所示。



解 13-13(b)图

13-14 两根无限长的均匀带电直线相互平行。相距为 $2a$，电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，求带电直线单位长度所受的电场力。

解 电荷线密度为 $+\lambda$ 的无限长均匀带电直线产生的电场分布是轴对称的，故以直线为轴，取半径为 $2a$、长度为 l

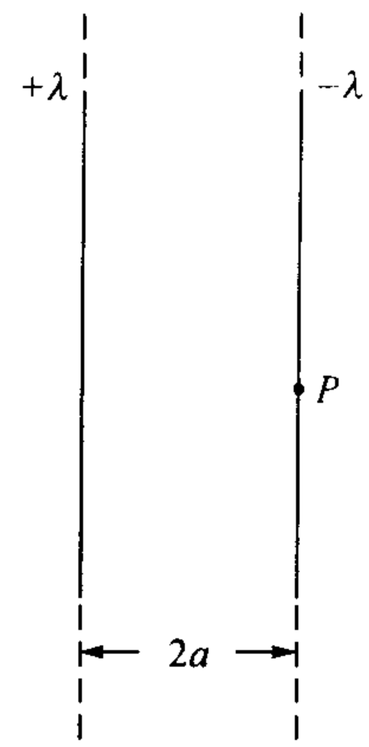
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

的过 P 点的封闭圆柱面，由高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\cdot 2\pi 2al = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},\quad \therefore\quad E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\qquad (\text{方向向右})$$

故电荷线密度为 $-\lambda$ 的另一无限长带电直线单位长度上所受电场力的大小为

$$F = \lambda E = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\qquad \text{方向垂直于带电直线向左，两直线相互吸引}$$



解 13-14 图

13-15 半径为 R 的非导体带电球体，已知 $\rho=\rho_0(1-\frac{r}{R})$。其中 ρ_0 为一正常量，r 为带电球体中某点离球心距离，试求：

(1)球内外电场强度分布；

(2)r 为多大时电场强度最大？$E_{\max}$ 为多少？

解 (1)由于电荷分布具有球对称性，作半径为 r 的同心球面 S 为高斯面，由高斯定理

$$\Phi_E = 4\pi r^2\cdot E = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

当 $r<R$ 时，$\sum q_{内} = \int_0^r 4\pi l^2\mathrm{d}l\cdot\rho = \int_0^r \pi\rho_0\left(1-\frac{l}{R}\right)l^2\mathrm{d}l = \rho_0\frac{4\pi r^3}{3}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)$

当 $r>R$ 时，$\sum q_{内} = \int_0^R 4\pi l^2\mathrm{d}l\cdot\rho = \int_0^R \pi\rho_0\left(1-\frac{l}{R}\right)l^2\mathrm{d}l = \frac{\rho_0\pi R^3}{3}$

$$\therefore\quad E = \begin{cases}\dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{3r}{4R}\right) & (r<R)\\[2ex] \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\end{cases}$$

(2)$\because\quad \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = \begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}-\dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0 R} & (r<R)\\[2ex] -\dfrac{\rho_0 R^3}{6\varepsilon_0 r^3} & (r>R)\end{cases}$，当 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=0$ 时，$r=\dfrac{2}{3}R$，并且有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=\frac{2}{3}R} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R}<0$$

故当 $r=\dfrac{2}{3}R$，E 有最大值

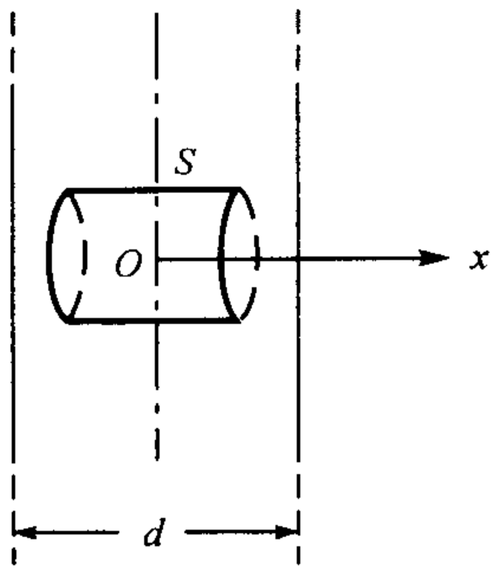
$$E_{\max} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{2}{3}R\left(1-\frac{3\cdot\frac{2}{3}R}{4R}\right) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$$

13-16 一厚度为 d 的无限大平板均匀带电，电荷体密度为 ρ。求平板内外场强的分布，并以其对称面为坐标原点作出 E-x 分布曲线。

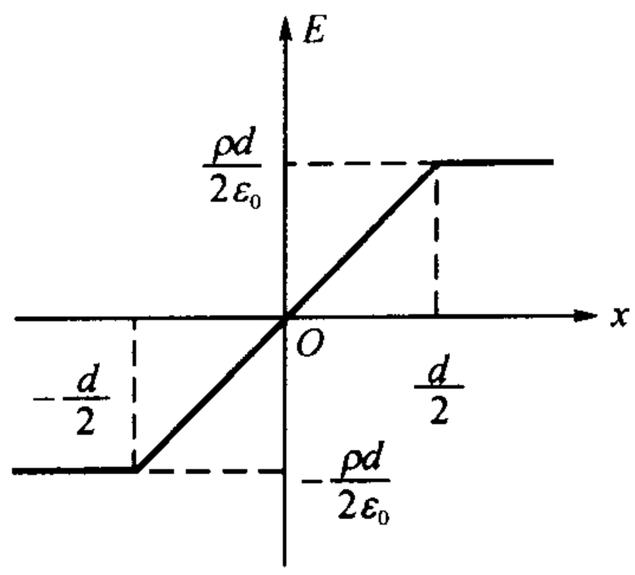
解 建议如图(a)所示的坐标系，由于电荷分布具有面对称性，作关于面对称的封闭圆柱面 S，由高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\Delta S\cdot E = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



解 13-16(a)图



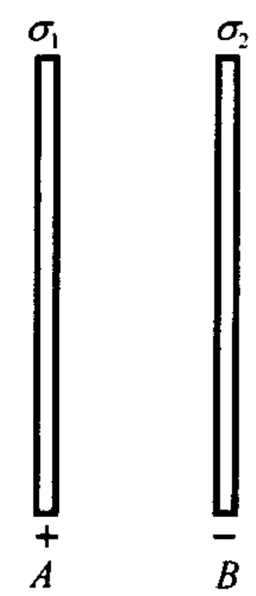
解 13-16(b)图

$$\sum q_{内}=\int \rho \mathrm{d}V=\begin{cases}\rho 2|x|\Delta S & \left(|x|<\frac{d}{2}\right)\\ \rho \Delta S d & \left(|x|>\frac{d}{2}\right)\end{cases},\quad |E|=\begin{cases}\frac{|\rho x|}{\varepsilon_0} & \left(|x|<\frac{d}{2}\right)\\ \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} & \left(|x|>\frac{d}{2}\right)\end{cases}$$

考虑方向后，其 E-x 分布曲线如图(b)所示。

13-17 两个无限大均匀带电平面，电荷面密度分别为 $\sigma_1=4\times10^{-11}\mathrm{C\cdot m^{-2}}$ 和 $\sigma_2=-2\times10^{-11}\mathrm{C\cdot m^{-2}}$。求此带电系统的电场分布。

解 由高斯定理知，一块电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面其电场分布是面对称的，两侧是均匀场强 $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，方向垂直于平面，故在 σ_1 板外侧，由场强叠加原理得



解 13-17 图

$$E_1=E_A-E_B=\frac{\sigma_1}{2\sigma_0}-\frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-|\sigma_2|)$$

$$=\frac{1}{2\times8.85\times10^{-12}}(4\times10^{-11}-2\times10^{-11})=1.13(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

方向垂直平板向左。两板之间

$$E_2=E_A+E_B=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+|\sigma_2|)$$

$$=\frac{1}{2\times8.85\times10^{-12}}(4\times10^{-11}+2\times10^{-11})=3.39(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

方向垂直平板向右。在 σ_2 板外侧

$$E_3=E_A-E_B=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-|\sigma_2|)$$

$$=\frac{1}{2\times8.85\times10^{-12}}(4\times10^{-11}-2\times10^{-11})=1.13(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

方向垂直平板向右。

13-18 已知空气的击穿场强为 $3.0\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，一处于空气中的半径为 1.0m 的导体球，电荷仅分布在其表面，问该球能够带有的最大电量为多少？在这种条件下能达到多高的电势？由此得到什么结论？

解 本题相当于一个均匀带电球面的场强分布，根据高斯定理有当 $r<R$ 时，$E_1=0$；当 $r>R$ 时，

$$E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

由此可见，靠近导体球面处场强最大，最容易击穿

$$E_{max}=\frac{Q_{max}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=3.0\times10^6\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$$

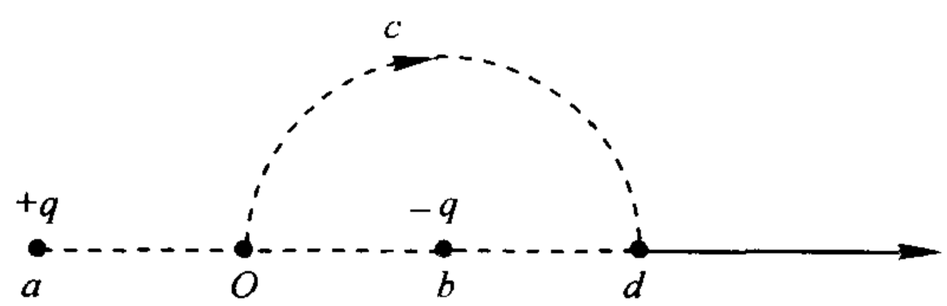
$$Q_{max}=4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1^2\times3.0\times10^6$$
$$=3.33\times10^{-4}(\text{C})$$

球面处电势为

$$V=\int_R^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},\quad V_{max}=\frac{Q_{max}}{4\pi\varepsilon_0 R}=3.0\times10^6\text{V}$$

由此可见一般孤立导体的带电量不可能无限增大，它有一个最大带电量，超过这个带电量就要击穿空气漏电。

13-19 如图所示，a 点放有正点电荷 $+q$，b 点放有负点电荷 $-q$，$\overline{ab}$长为 $2l$，$\overset{\frown}{Ocd}$是以 b 为中心、l 为半径的半圆，试求：



习题 13-19 图

(1)将单位正电荷从 O 点沿$\overset{\frown}{Ocd}$移到 d 点，静电力对它作了多少功？

(2)把单位负电荷从 d 点沿$\overline{ab}$的延长线移到无限远处，静电力对它作了多少功？

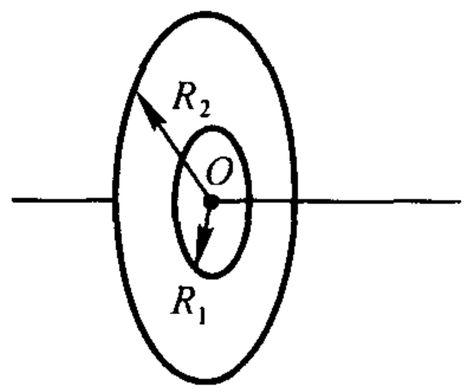
解 (1)先求空间各点的电势，取 $V_\infty=0$，

$$V_O=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0,\quad V_d=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3l}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

$$W_{Ocd}=q_1(V_O-V_d)=1\times\left[0-\left(-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}\right)\right]=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}(\text{J})$$

(2) $$W_{d\to\infty}=q_2(V_d-V_\infty)=-1\times\left(-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}-0\right)=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}(\text{J})$$

13-20 如图所示，在静电透镜实验装置中，有一均匀带电圆环，其内半径 $R_1=0.4\text{m}$，外半径 $R_2=0.8\text{m}$，总电量 $Q=-6\times10^{-7}$ C。现有一电子沿轴线从无限远处射向带负电的圆环。欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少要多大？



习题 13-20 图

解 圆环的电荷面密度

$$\sigma=\frac{Q}{\pi(R_2^2-R_1^2)}$$

先求圆环中心的电势。取半径为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的窄圆环，由于窄圆环带电 $\mathrm{d}q=2\pi r\mathrm{d}r\cdot\sigma$，故在圆心处产生的电势

$$\mathrm{d}V_O=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

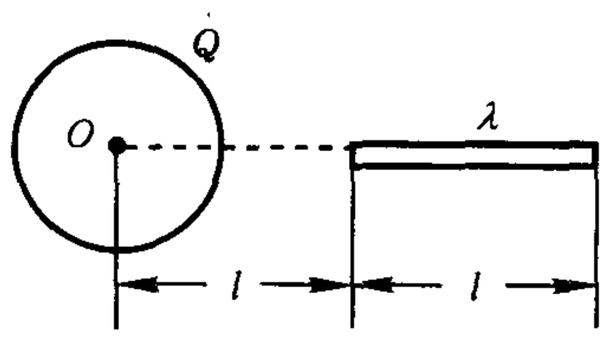
$$\therefore \quad V_O=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma \mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$$

当电子($q=-e$)从无限远处射穿圆环中心,须克服静电力作功

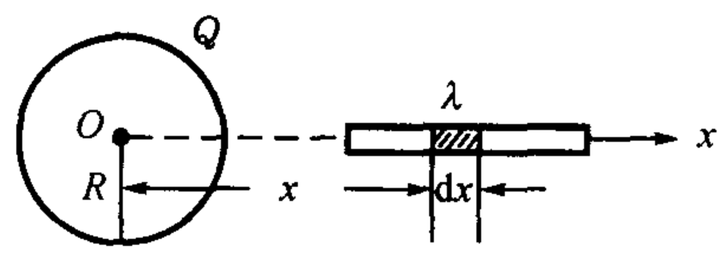
$$W=q(V_\infty-V_O)=0-E_k$$

$$E_k=\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}=\frac{(-6)\times10^{-7}\times(-1.6)\times10^{-19}}{2\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times(0.4+0.8)}=1.44\times10^{-15}(\mathrm{J})$$

13-21 半径为 R 的均匀带电球面带电量为 Q;沿半径方向上有一均匀带电细棒,电荷线密度为 λ,长度为 l,细棒近端离球心距离也为 l,如图所示。假设球和细棒上的电荷分布保持不变,求细棒的电势能。



习题 13-21 图



解 13-21 图

解 建立如图所示的坐标系,在细棒上取一电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$,则 $\mathrm{d}q$ 在 Q 的电场中具有电势能为

$$\mathrm{d}U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\cdot\mathrm{d}q=\frac{Q\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

$$\therefore \quad U=\int_l^{2l}\frac{Q\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln2$$

13-22 有一点电荷带电量 $q=10^{-9}\mathrm{C}$,与它在同一直线上的 A,B,C 三点分别距 q 为 0.1m,0.2m,0.3m,如图所示。若选 B 为电势零点,试求 A,C 两点的电势 V_A,V_C。

习题 13-22 图

解 $r_A=0.1\mathrm{m}$,$r_B=0.2\mathrm{m}$,$r_C=0.3\mathrm{m}$,选 B 点为电势零点,由电势定义

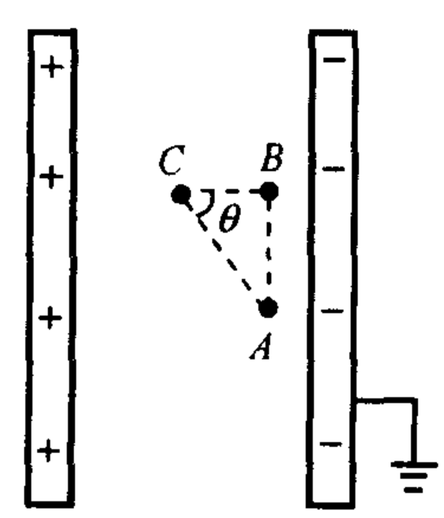
$$V_A=\int_{r_A}^{r_B}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{r_A}^{r_B}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)=45\mathrm{V}$$

$$V_C=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_B}\right)=-15\mathrm{V}$$

13-23 有两块带等量异号电荷的大金属平板,负板接地(电势为零),如图所示。若各板电荷面密度均为 $\sigma=1.77\times10^{-6}\mathrm{C\cdot m^{-2}}$;在两板间有 A,B,C 三点,它们离负板距离分别为 0.1cm,0.1cm,0.3cm,试求:

(1)A,B,C 三点的电势各为多少?

(2)把一个 $q=-1.5\times10^{-8}\mathrm{C}$ 的点电荷从 A 点移到 C 点,静电力做功多少?



习题 13-23 图

解 (1)由高斯定理可知,两极板间的电场为匀强电场,$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$,负板接地,所以

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$V_A=V_B=Ed_1=\frac{1.77\times10^{-6}}{8.85\times10^{-12}}\times0.001=2\times10^2(\mathrm{V})$$

$$V_C=Ed_2=\frac{1.77\times10^{-6}}{8.85\times10^{-12}}\times0.003=6\times10^2(\mathrm{V})$$

(2) $W_{A\to C}=q(V_A-V_C)=-1.5\times10^{-8}\times(2\times10^2-6\times10^2)=6\times10^{-6}(\mathrm{J})$

13-24 在氢原子中，正常状态下电子和质子(原子核)的距离约为5.29×10^{-11}m。已知氢原子核和电子带电分别为$+e$和$-e$。把正常状态中的电子拉到无限远处所需的能量称为氢原子的电离能，求此电离能是多少电子伏？折合为多少焦？

解 设质子不动，并取无限远处为电势零点，把电子拉到无限远处静电力作功为

$$W=-e(V_1-V_\infty)$$

V_1为质子在电子处产生的电势

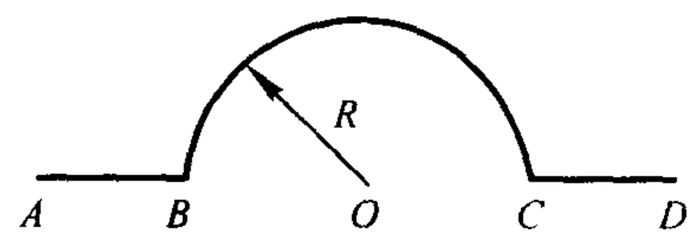
$$V_1=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\therefore\quad E_{电离能}=-W=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$=\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times5.29\times10^{-11}}=4.35\times10^{-18}(\mathrm{J})=27.2(\mathrm{eV})$$

应该指出，本题的结论是不精确的，原因是没有考虑正常状态下电子绕原子作圆周运动时的动能。

13-25 一电荷线密度为λ的均匀带电线弯成如图所示的形状，其中AB段和CD段的长度均为R，试求圆心O点的电势。



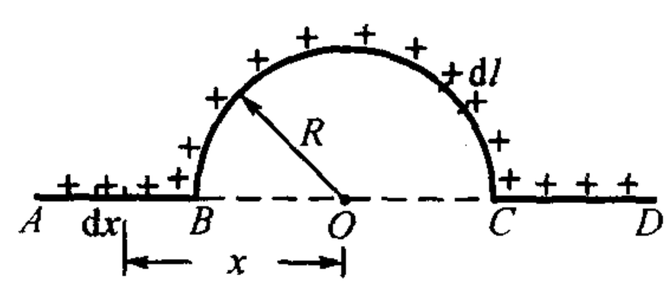
习题 13-25 图

解 由题意知，带电直线在圆心O处产生的电势相等，在$\overline{AB}$上取线元$\mathrm{d}x$，带电量$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，其在$O$处产生的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

故$\overline{AB}$和$\overline{CD}$在O处产生电势为

$$V_1=V_2=\int_R^{2R}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln2$$



解 13-25 图

半圆$\overset{\frown}{BC}$在O处产生的电势同样可用点电荷电势积分法求解，即取线元$\mathrm{d}l$，带电量$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$，视其为点电荷，于是有

$$V_3=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\int_0^{\pi R}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\pi R=\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

由电势叠加原理得圆心O点的电势为

$$V_O=V_1+V_2+V_3=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}(2\ln2+\pi)$$

13-26 一无限长的均匀带电直线，电荷线密度为$\lambda=4\times10^{-9}\mathrm{C\cdot m^{-1}}$。带电直线附近有

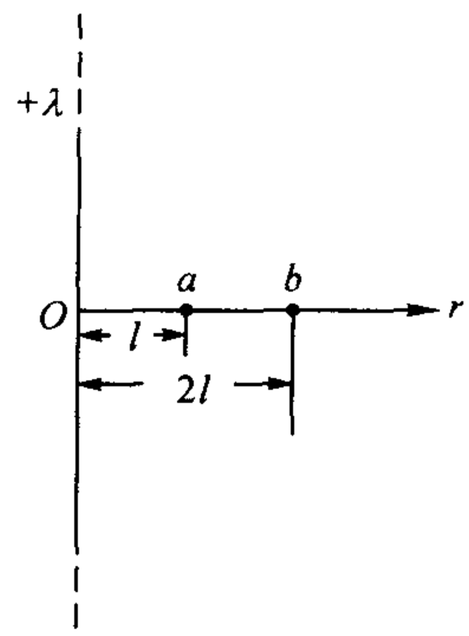
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

a、b 两点，如果 b 点离带电直线的距离是 a 点的两倍，求 a、b 两点间的电势差。

解 由高斯定理知，电荷线密度为 λ 的无限长直线在轴外任一点的场强 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$。设 a，b 两点离直线垂直距离分别为 l 和 $2l$，则 a 和 b 两点间的电势差为

$$V_{ab}=V_a-V_b=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_l^{2l}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

$$=4\times10^{-9}\times2\times9\times10^{9}\times0.693=49.9(\mathrm{V})$$

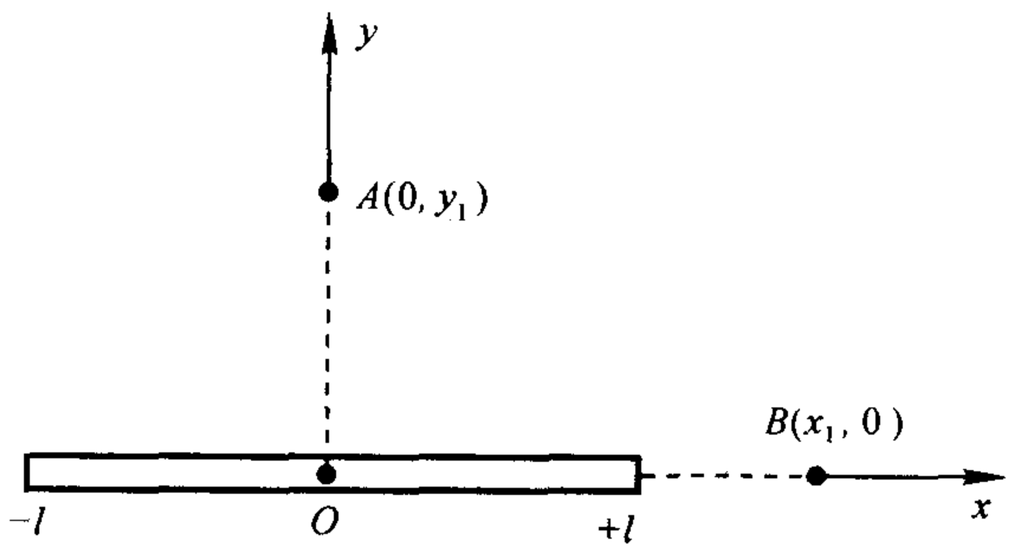


解 13-26 图

13-27 如图所示，有一长为 $2l$、带电量为 Q 的均匀带电细棒，求：

(1)求在带电细棒的中垂线上，离棒中心距离为 y_1 的 A 点的电势 V_A 和场强 $\boldsymbol{E}_A$；

(2)求在带电细棒的延长线上离中心为 x_1 处的 B 点的电势 V_B 和场强 $\boldsymbol{E}_B$。



习题 13-27 图

解 (1)细棒带电线密度 $\lambda=\frac{Q}{2l}$，在细棒上取一段 $\mathrm{d}x$，相应电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}q$ 在 A 点产生的电势为

$$\mathrm{d}V_A=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}$$

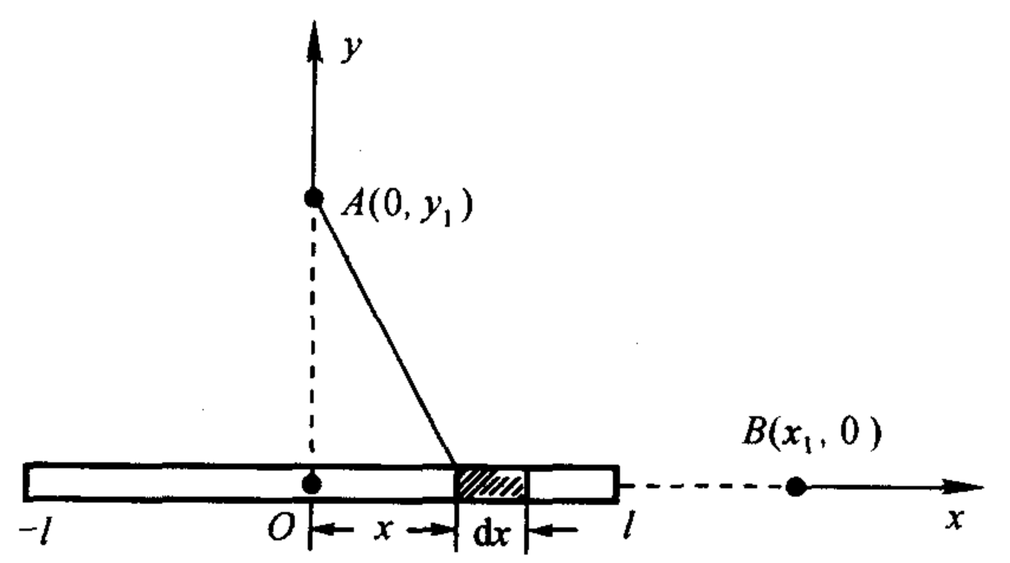
$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}$$

$$V_A=\int_{-l}^{l}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l+\sqrt{l^2+y_1^2}}{y_1}$$

$$\boldsymbol{E}_A=-\frac{\partial V_A}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial V_A}{\partial y_1}\boldsymbol{j}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{y_1\sqrt{l^2+y_1^2}}\boldsymbol{j}$$



解 13-27 图

(2) 同理 $\mathrm{d}V_B=\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x_1-x)}$

$$V_B=\int_{-l}^{l}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\frac{\mathrm{d}x}{(x_1-x)}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{x_1+l}{x_1-l}$$

$$\boldsymbol{E}_B=-\frac{\partial V_B}{\partial x_1}\boldsymbol{i}-\frac{\partial V_B}{\partial y}\boldsymbol{j}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x_1^2-l^2)}\boldsymbol{i}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

13-28 两个同心的均匀带电球面，半径分别为 $R_1=0.05\text{m}$，$R_2=0.2\text{m}$，已知内球面的电势为 $V_1=60\text{V}$，外球面的电势为 $V_2=-30\text{V}$。

(1)求内、外球面上所带的电量；

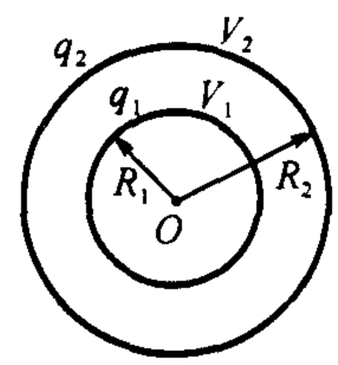
(2)两球面间何处的电势为零？

解 (1)设内、外球面上所带的电量分别为 q_1 和 q_2，由高斯定理得

$$E_1=0 \qquad (r<R_1)$$

$$E_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$E_3=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r>R_2)$$



解 13-28 图

则内球面的电势为

$$V_1=\int_{R1}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{R_2}E_2\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}E_3\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right)=60\text{V} \tag{1}$$

外球面的电势为

$$V_2=\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=-30\text{V} \tag{2}$$

联立(1)、(2)式解得内、外球面上所带电量为

$$q_1=6.7\times10^{-10}\text{C},\quad q_2=-1.3\times10^{-9}\text{C}$$

(2)用叠加法求解很方便。设两球面间离球心 O 距离为 r 处电势为零，有

$$V_r=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

$$r=-\frac{q_1}{q_2}R_2=-\frac{6.7\times10^{-10}}{-1.3\times10^{-9}}\times0.2=0.1(\text{m})$$

13-29 某电场的电势分布函数为 $V=a(x^2+y^2)+bz^2$，其中 a、b 为常量。求该电场中任一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$。

解 由电势梯度可得

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-2ax,\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-2ay,\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-2bz$$

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}+E_z\boldsymbol{k}=-2a(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})-2bz\boldsymbol{k}$$

13-30 (1)设计一个计算机程序来计算点电荷系的电场分布。输入带电粒子的数目、带电量、位置坐标，然后输入需计算场强点的坐标。要求程序在演示前一点后能接受新的所求点。为简单起见，假定所有电荷及所求点均分布在 xy 平面内。假设点电荷 q_i 位于 (x_i,y_i)，则其对所求点 (x,y) 处产生的场强为 $E_{ix}=\frac{q_i(x-x_i)}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}$，$E_{iy}=\frac{q_i(y-y_i)}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}$，$E_{iz}=0$，其中 $r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$。最后算出所求场强的大小和场强与 x 轴的夹角。

(2)假设有两个点电荷均位于 x 轴上：$q_1=6\times10^{-9}\text{C}$，位于 $x_1=0.03\text{m}$ 处；$q_2=3.0\times10^{-9}\text{C}$，位于 $x_2=0.03\text{m}$ 处。用你设计的程序计算 y 轴上下列各点的场强：$y=0,0.050,0.100,0.150,0.200\text{m}$。用计算机画图表示出电荷的位置及用矢量线表示各点的场强，矢量

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

线的相对长度表示该处场强的大小，其与 x 轴的夹角表示方向。

(3)用你的程序计算 y 轴上下列点的场强：$y=-0.050,-0.100,-0.150,-0.200\text{m}$；画出场强分布图；说明 $y=0.050$ 处与 $y=-0.050$ 处场强的 x 分量、y 分量的联系；其余各对应点之间的关系。

解 程序略。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第14章

静电场中的导体和电介质

【基本概念和规律】

1. 导体静电平衡条件

$E_{内}=0$，$E_{表面}$垂直导体表面，导体是等势体，且和表面电势相等。

2. 导体静电平衡时，导体上电荷的分布

导体内部$q_{内}=0$，电荷分布在外表面上。导体表面附近的场强为$E_{表面}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$。导体表面曲率半径大处，表面上面电荷密度小；表面曲率半径小处，表面上面电荷密度大。

3. 电容

(1)电容器的电容定义式：$C=\frac{q}{V_1-V_2}$。

(2)孤立导体球电容：$C=4\pi\varepsilon_0 R$。

(3)真空中，平行板电容器的电容：$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$。

(4)真空中，球形电容器的电容：$C=4\pi\varepsilon_0\frac{R_A R_B}{R_B-R_A}$。

(5)真空中，圆柱形电容器的电容：$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln R_B/R_A}$。

(6)电容器的串联：$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N}$。

电容器的并联：$C=C_1+C_2+\cdots+C_N$。

4. 电介质

(1)电介质在外电场中极化产生束缚电荷。束缚电荷面密度：$\sigma'=P\cos\theta=P_n$。在各向同性介质中，电介质极化强度 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}$。

(2)电位移矢量：$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{E}$。有电介质时的高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_i q_{i内,自由}$。

(3)电介质充满电容器的电容：$C=\varepsilon C_0$，式中ε为电介质的相对介电常数，C_0为空气电容器的电容。

5. 电场的能量

(1)电容器的能量：$U_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV$。

(2)电场的能量密度：$u_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2$

电场的能量：$U_e=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 dV$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【解题指导】

● 理解和运用导体静电平衡条件是解决静电场中导体问题的关键和难点。当导体引入到静电场时，导体和静电场相互作用的结果是导体原来的静电平衡破坏，要通过导体上电荷的重新分布，使导体达到新的静电平衡。这时导体是一个等势体，内部场强等于零。

● 静电场中有导体存在时，计算导体内外的电场强度和电势的基本依据是：①导体静电平衡条件；②电荷守恒；③高斯定理。

● 计算均匀带电导体球外一点的场强和电势时，可将电量看作集中于球心，应用点电荷的场强公式 $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 和电势公式 $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 来求。式中 r 为该点到球心的距离。导体球内（不论空心或实心）的 $E=0$，电势不等于零，是等势体，球内任一点电势等于球表面上的电势 $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$。求场强 $\boldsymbol{E}$ 和电势 V 时，要将形成电场的所有表面上的电荷都考虑到，然后对场强 $\boldsymbol{E}$ 求矢量和，对电势 V 求代数和。

● 对于同心的球体（或球面）套球壳问题，求电势最方便的方法是叠加法。例如，有三个带电球表面，求某点 P 的电势时，必须分别考虑三个球表面对 P 点的作用。即考虑球表面 1 时，球表面 2 和 3 可暂时不考虑，好像不存在一样，而且，必须注意 P 点位于球表面 1 的内部还是外部，如在球内，应该和球表面的电势相等；如在球外，则可视作电荷集中在球心，当作点电荷电势计算。在计算球表面 2 和 3 时，方法同上。最后对所有球表面（1，2 和 3）在某点 P 处产生的电势求代数和即可得结果。

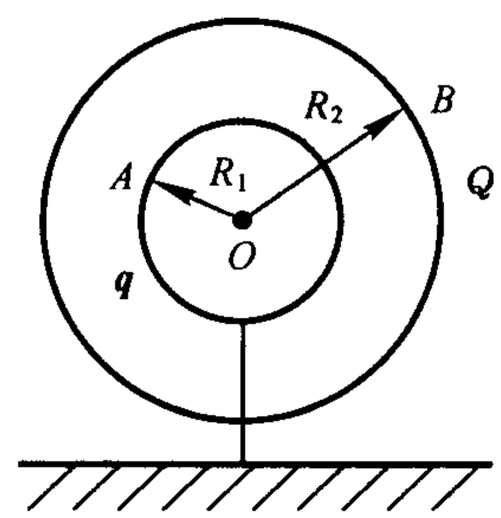
● 静电场中存在电介质时，电介质要极化，产生束缚电荷。在解电介质内外的场强时，一般都用有电介质时的高斯定理，先求电位移矢量 $\boldsymbol{D}$，然后再求场强 $\boldsymbol{E}$。这是由于避开了束缚电荷，使问题大为简化，具体公式为

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{(S_{内})} q_0$$

$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{E}$（有电介质存在时），　　$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$（在空气中）

● 电容器充满电介质后，其电容量增加 ε 倍，即 $C=\varepsilon C_0$（C_0 为空气电容器的电容）。运算时，应识别具体问题中电容器的串并联。

● 求电场能量时，首先考虑能否将系统看成求解电容器中的能量问题。若可以，就尽量用电容器的能量公式求解。若不行，再考虑用电场能量密度积分计算能量。



习题 14-1 图

【习题解答】

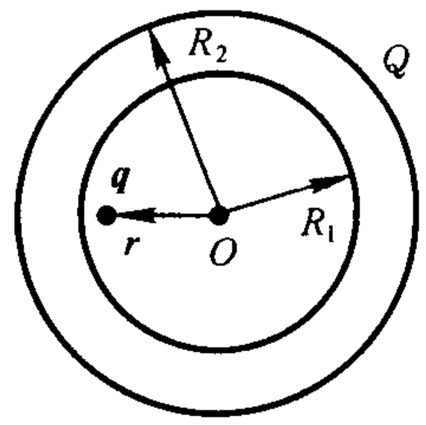
14-1　有一球形电容器，内球 A 半径为 R_1，外球壳 B 半径为 R_2；内球带有电荷 q，外球壳带有电荷 Q，如图所示。现将内球 A 接地，求其上的电量。

解　设接地后 A 球的带电量为 q'，由电势叠加原理，A 球的电势为

$$V_A=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad q' = -\frac{R_1}{R_2}Q$$

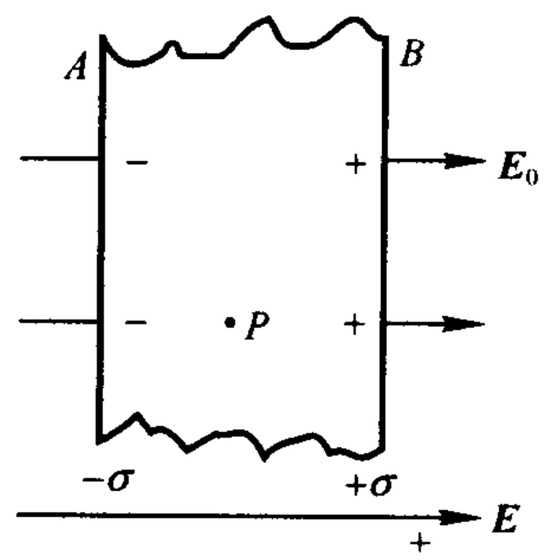


习题 14-2 图

14-2 如图所示，有一球形金属空腔，内半径为 R_1；外半径为 R_2，其上带有电荷 $+Q$；空腔内与球心 O 相距 r 处有一点电荷 q。求球心处的电势。

解 由于静电感应，空腔内表面带电为 $-q$，外表面带电为 $Q+q$，根据电势叠加原理，球心 O 处电势为

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



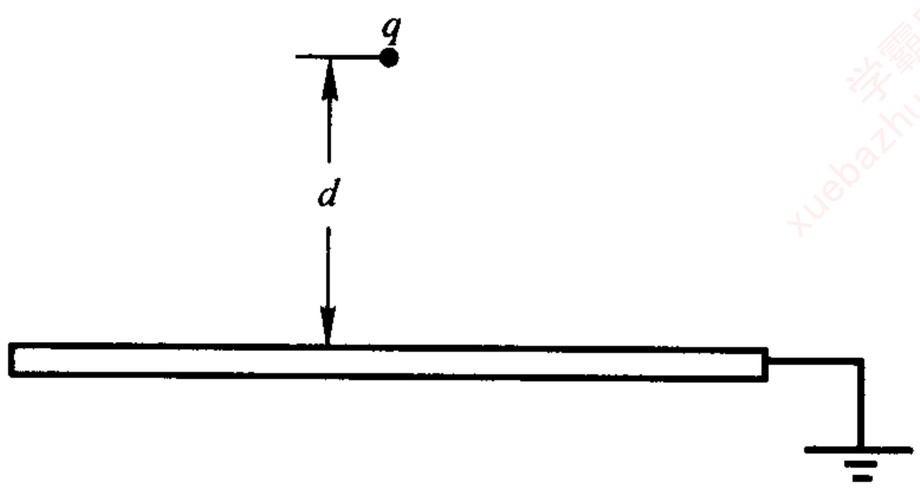
习题 14-3 图

14-3 如图所示，把一无限大的金属平板置于电场强度为 E_0 的匀强电场中，试求平板上的感应电荷面密度。

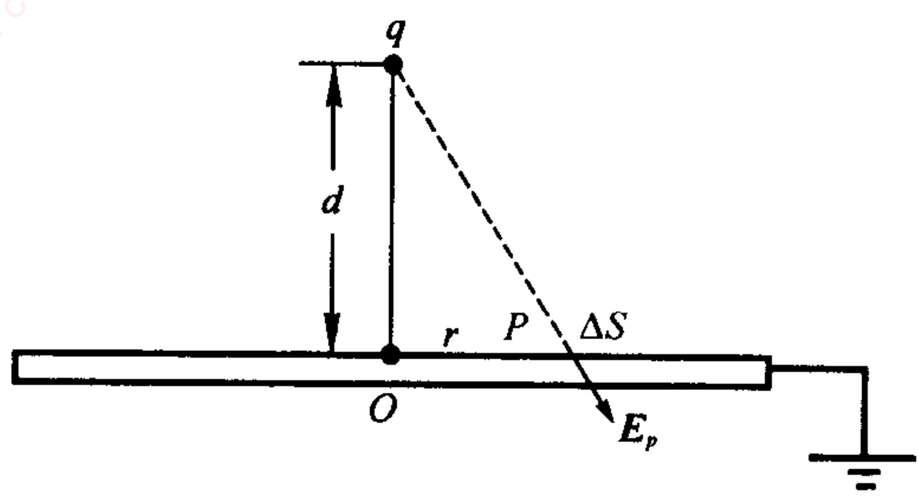
解 先规定向右为电场强度的正方向。设感应电荷面密度为 σ，由导体静电平衡条件，金属平板上任一点 P 的场强为零，即

$$E_P = E_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad \therefore \quad \sigma = \varepsilon_0 E_0$$

14-4 在距一个接地的无限大导体板距离 d 处有一点电荷 q，如图所示，求导体板表面各点的感应电荷面密度 σ。



习题 14-4 图



解 14-4 图

解 从 q 点向无限大导体板作垂线交于 O 点，由对称性可知感应电荷分布相对于 O 点具有对称性，在导体板上任取一点 P，P 到 O 点的距离为 r，在面上取一个包含 P 的面元 ΔS。如将 P 点视为导体内的点，$E_P=0$，其法向分量

$$E_{Pn} = \frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+d^2)} \cdot \frac{d}{(r^2+d^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\therefore \quad \sigma_P = -\frac{qd}{2\pi(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

14-5 两同心导体球壳的内球壳半径为 a，外球壳半径为 b。设球壳极薄，若使内球壳带上电量 Q，试问：

(1)外球壳内表面 $S_{内}$ 和外表面 $S_{外}$ 上的电荷如何分布？

(2)若要使内球壳电势为零，则外球壳必须带多大电量？

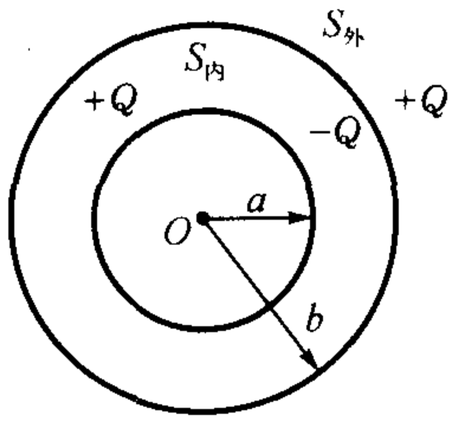
解 (1)由静电平衡条件可知，外球壳 $S_{内}$ 上的电荷为 $-Q$，$S_{外}$ 上的电荷为 Q。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)若要使内球壳电势为零，设外球壳须带有净电荷 Q'，此时 $S_{内}$ 上电荷仍为 $-Q$，$S_{外}$ 上电荷为 $Q+Q'$，由电势叠加原理，内球壳电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 b}=0$$

$$\therefore\quad Q'=-\frac{b}{a}Q$$



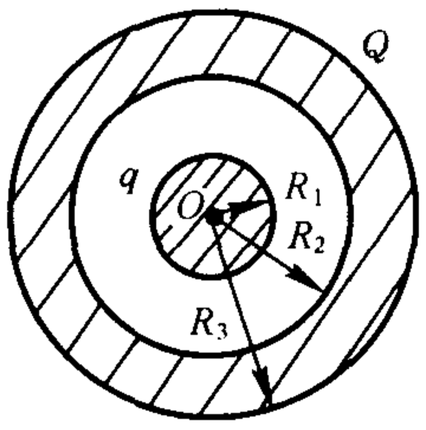
解 14-5 图

14-6 半径为 R_1 的导体球带有电荷 q，球外有一个内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳，球壳上带有电荷 Q，如图所示。试求：

(1)内、外两球的电势 V_1 和 V_2 及它们的电势差 ΔV；

(2)将外球壳接地，V_1 和 V_2 及 ΔV 变为多少？

(3)在情形(1)中，用导线将球和球壳连接，则 V_1 和 V_2 及 ΔV 又变为多少？



习题 14-6 图

解 (1)由于静电感应，外球壳内表面的电荷为 $-q$，外表面电荷为 $Q+q$，由电势叠加原理有

$$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$\Delta V=V_1-V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(2)外球壳接地，外表面电荷为零，$V_2=0$，

$$\Delta V=V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

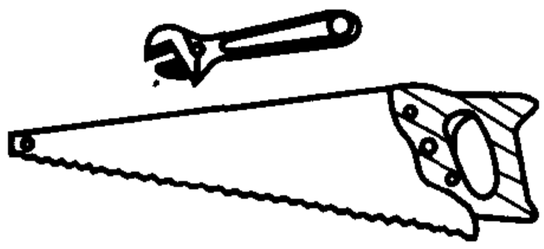
(3)将内球和外球壳相连后成一个导体，电荷 $Q+q$ 全部分布在外球壳外表面上，所以

$$V_1=V_2=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3},\qquad \Delta V=0$$

14-7 如图所示的两个金属物体各带有净电荷 3.8×10^{-11}C和 -3.8×10^{-11}C，从而在它们之间产生 19.0V 的电势差。问：

(1)该系统的电容多大？

(2)如果使两物体的带电量分别增加到 7.6×10^{-11}C 和 -7.6×10^{-11}C，则该系统的电容变为多少？两物体间的电势差变为多少？


习题 14-7 图

解 (1)由电容定义

$$C=\frac{Q}{V_1-V_2}=\frac{3.8\times10^{-11}}{19}=2.0\times10^{-12}(\mathrm{F})=2.0(\mathrm{pF})$$

(2)电容 C 与物体带电量无关，仍为 2pF，而电势差变为

$$V_1'-V_2'=\frac{Q'}{C}=\frac{7.6\times10^{-11}}{2.0\times10^{-12}}=38(\mathrm{V})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

14-8 研究表明，生物的细胞膜系统都有一定的电容。如果已知细胞膜的面积为 $5\times10^{-6}\text{cm}^2$，细胞膜的极性脂质双分子层膜的厚度为 10^{-6}cm，膜中脂质分子的相对介电常数 $\varepsilon=3$，试计算该细胞膜电容的大小。当膜两侧的电势差为 0.085V 时，细胞膜两侧的电荷为多少？如果是钾离子(K^+)造成了这种电势差，则需要多少个钾离子？

解 细胞膜电容的大小为

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}=\frac{8.85\times10^{-12}\times3\times5\times10^{-6}\times10^{-4}}{10^{-6}\times10^{-2}}=1.33\times10^{-12}(\text{F})$$

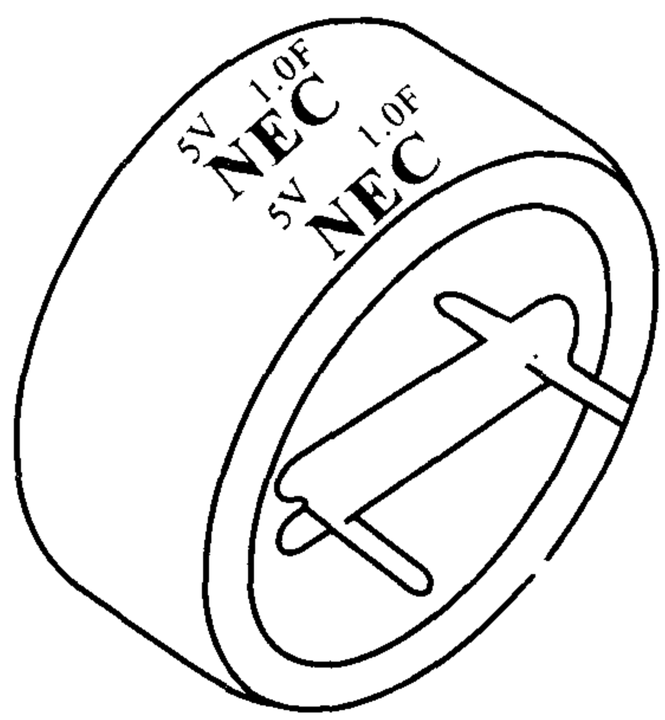
膜两侧的电荷为

$$Q=CV=1.33\times10^{-12}\times0.085=1.13\times10^{-13}(\text{C})$$

所需钾离子数

$$N=\frac{Q}{e}=\frac{1.13\times10^{-13}}{1.6\times10^{-19}}=7.06\times10^{5}(\text{个})$$

14-9 若把半径为 6 370km 的地球视为一个孤立导体球，则其电容有多大？如果要制成学生实验室中电容为 1F 的电容器，其几何尺寸只有几个厘米，如图所示，你觉得可能吗？如何才能制成功？



习题 14-9 图

解 作为孤立导体球的地球电容为

$$C=4\pi\varepsilon_0R=4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times6.37\times10^{6}$$
$$=7.1\times10^{-4}(\text{F})=710(\mu\text{F})$$

要在实验室中制成 $C=1\text{F}$ 的电容是完全可能的，只要做成有两个极板的电容器，如平行板电容器的 $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$，减小 d，增大介质的 ε 都可以实现。

14-10 实验仪器中常用的盖革计数管由一根细金属丝和包围它的同轴导体圆筒组成，丝的直径为 $2.5\times10^{-5}\text{m}$，圆筒直径为 $2.5\times10^{-2}\text{m}$，管长为 0.1m，试计算此盖革计数管的电容。(设导体间为真空，忽略边缘效应)

解 盖革计数器是一个圆筒形电容器，其电容为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{2\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times0.1}{\ln1000}=8.05\times10^{-13}(\text{F})$$

14-11 计算机键盘的每一个键下面均连有一小块金属片，它下面隔一定的空气隙是一块固定的金属片，这样两块金属片就组成了一个小平行板电容器。当键被按下时，此小电容器的电容就发生变化，与之相连的电子线路就能检测出是哪个键被按下了，从而给出相应的信号。设每个金属片的面积为 50mm^2，两金属片之间的距离为 0.6mm。如果电子线路能检测出的电容变化是 0.25pF，那么需要将键按下多大的距离才能给出必要的信号？

解 按键前电容为 $C_0=\frac{\varepsilon_0S}{d}$，按键后电容为 $C=\frac{\varepsilon_0S}{d-\Delta d}$，故电容变化为

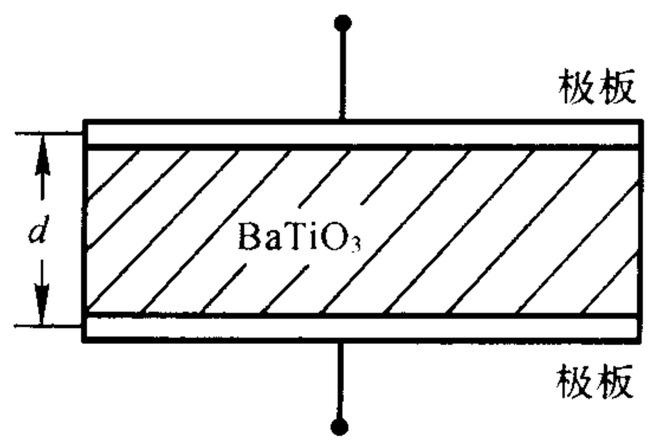
$$\Delta C=C-C_0=\frac{\varepsilon_0S}{d-\Delta d}-\frac{\varepsilon_0S}{d}$$

化简后得键按下的距离为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\Delta d=\frac{d}{1+\frac{\varepsilon_0 S}{d\Delta C}}=\frac{0.6\times10^{-3}}{1+\frac{8.85\times10^{-12}\times50\times10^{-6}}{0.6\times10^{-3}\times0.25\times10^{-12}}}=0.152\times10^{-3}(\mathrm{m})=0.152(\mathrm{mm})$$

14-12 电介质的相对介电常数是材料的重要参数之一，利用平行板电容器就可测定材料的相对介电常数。现有某介质材料（如 $BaTiO_3$）样品，其厚度为 $d=5\times10^{-3}\mathrm{m}$，面积 $S=7.85\times10^{-5}\mathrm{m}^2$。把样品放入如图所示的平行板电容器，在精密的电容电导电桥上测得电容值 $C=873\mathrm{pF}$，试求此材料的相对介电常数。



习题 14-12 图

解 平行板电容器的电容为

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

相对介电常数为

$$\varepsilon=\frac{Cd}{\varepsilon_0 S}=\frac{873\times10^{-12}\times5\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times7.85\times10^{-5}}=6283$$

14-13 一圆柱形电容器外圆柱面的内半径 $R_2=2\times10^{-2}\mathrm{m}$，内圆柱面的半径 $R_1=1\times10^{-2}\mathrm{m}$，两圆柱面间充满击穿电场强度为 $2.0\times10^7\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ 的电介质，问该电容器能承受的最大电压是多少？

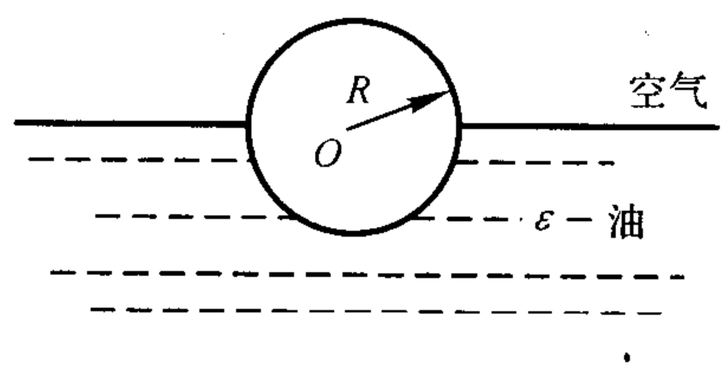
解 设该圆柱形电容器两极沿轴线单位长度上所带的电量分别为 λ 和 $-\lambda$，电介质击穿场强为 $E_{\max}$。由高斯定理，两导体间场强为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

当 $r=R_1$ 时，$E=E_{\max}$，所以 $\lambda_{\max}=2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1E_{\max}$，此时电容器上的电压为

$$V_{\max}=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda_{\max}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\lambda_{\max}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}=R_1E_{\max}\ln\frac{R_2}{R_1}$$
$$=1.0\times10^{-2}\times2.0\times10^7\ln2=1.39\times10^5(\mathrm{V})$$

14-14 一个黄铜做的金属球一半浸在油中，一半在空气中，如图所示。已知油的相对介电常数 $\varepsilon=3$，球上带有净电荷 $2.0\times10^{-6}\mathrm{C}$，试求球上、下两部分各带有多少电荷？



习题 14-14 图

解 整个铜球是孤立导体球，上半球在空气中的电容为

$$C_{上}=2\pi\varepsilon_0R$$

下半球在油中的电容为

$$C_{下}=2\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

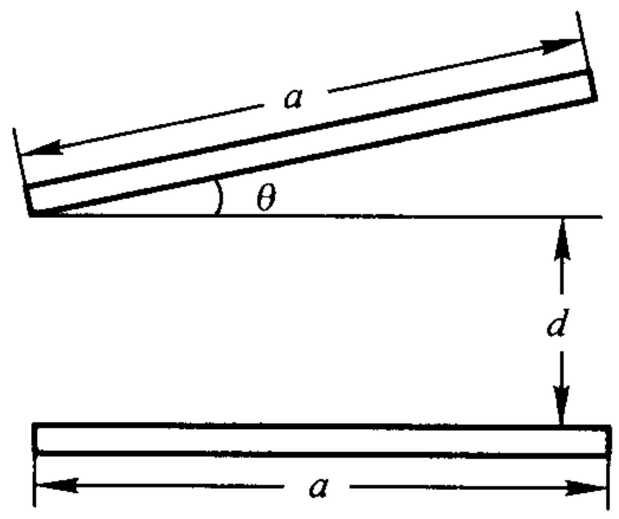
铜球是等势体，$V_{上}=V_{下}=V$，上下两个电容器并联（另一极均在无限远处），$C=C_{上}+C_{下}$。由 $V=\frac{Q}{C}$ 可知

$$Q_{上}=C_{上}V_{上}=C_{上}V=C_{上}\frac{Q}{C}=\frac{C_{上}Q}{C_{上}+C_{下}}=\frac{Q}{\varepsilon+1}=5.0\times10^{-7}(\mathrm{C})$$

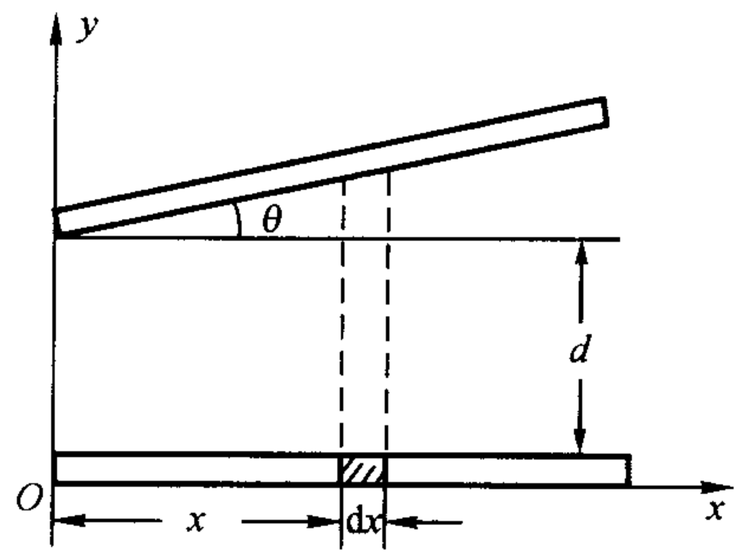
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$Q_{下}=Q-Q_{上}=1.5\times10^{-6}\mathrm{C}$$

14-15 一电容器的两极板均为边长为 a 的正方形，两板间成 θ 角，如图所示。试证明：当 θ 角很小时，它的电容为 $C=\frac{\varepsilon_0 a^2}{d}(1-\frac{a\theta}{2d})$。



习题 14-15 图



解 14-15 图

证明 建立如图所示的坐标系。可近似认为该电容器是由许多板面积 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}x$，板间距 $y=d+x\tan\theta$ 的小平行板电容器并联而成，其小平行板电容为

$$\mathrm{d}C=\frac{\varepsilon_0\mathrm{d}S}{y}=\frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{d+x\tan\theta}$$

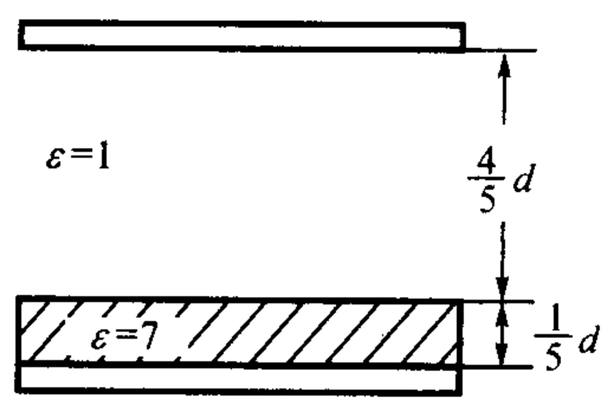
$$\therefore\quad C=\int_0^a\frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{d+x\tan\theta}=\frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta}\ln\left(1+\frac{a\tan\theta}{d}\right)$$

当 θ 很小时，$\tan\theta\to\theta$，$\frac{a\tan\theta}{d}\to\frac{a\theta}{d}\ll1$，故有，

$$\ln\left(1+\frac{a\tan\theta}{d}\right)\approx\ln\left(1+\frac{a\theta}{d}\right)\approx\frac{a\theta}{d}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{d^2}$$

$$\therefore\quad C=\frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta}\ln\left(1+\frac{a\tan\theta}{d}\right)=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left(\frac{a\theta}{d}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{d^2}\right)=\frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1-\frac{a\theta}{2d}\right)$$

14-16 一空气平行板电容器，两极板间距 $d=1.5\times10^{-2}\mathrm{m}$，接在 $3.9\times10^4\mathrm{V}$ 的电源上。如果空气的击穿电场强度为 $3\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，电容器会被击穿吗？现将一厚度为 $\frac{1}{5}d$、相对介电常数 $\varepsilon=7$ 的玻璃板平行插入此电容器。若玻璃的击穿电场强度为 $1.0\times10^7\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，这时该电容器会被击穿吗？



解 14-16 图

解 插入玻璃前，板间场强为

$$E_1=\frac{V}{d}=\frac{3.9\times10^4}{1.5\times10^{-2}}=2.6\times10^6(\mathrm{V\cdot m^{-1}})<3.0\times10^6(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

故不会被击穿。

插入玻璃后，如图所示，设空气中的场强为 E_1'，玻璃中场强为 E_2，且考虑到 $E_2=E_1'/\varepsilon$，则

$$V=E_1'\frac{4}{5}d+E_2\frac{1}{5}d$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$E_1'=\frac{V}{\frac{4}{5}d+\frac{(1/5)d}{\varepsilon}}=\frac{3.9\times10^4}{\left(1.2+\frac{0.3}{7}\right)\times10^{-2}}=3.13\times10^6(\mathrm{V\cdot m^{-1}})>3.0\times10^6(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

故空气层被击穿，随后全部电压加在玻璃层上，使玻璃中电场强度变为

$$E_3=\frac{V}{(1/5)d}=\frac{3.9\times10^4}{0.3\times10^{-2}}=1.3\times10^7(\mathrm{V\cdot m^{-1}})>1.0\times10^7(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

玻璃层也被击穿，故整个电容器都被击穿。

14-17 空气的击穿电场强度为 $3.0\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，试求空气中半径为 1.0cm，1.0mm，0.1mm 的长直导线上，单位长度最多各能带多少电荷？

解 无限长直均匀带电导线外一点的场强为 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$，故最多能带电荷为

$$\lambda_{\max}=2\pi\varepsilon_0 rE_{\max}$$

半径 $r_1=1.0\mathrm{cm}$ 时， $\lambda_{\max,1}=2\pi\varepsilon_0 r_1E_{\max}=2\pi\times8.85\times10^{-12}\times1\times10^{-2}\times3\times10^6$
$=1.7\times10^{-6}(\mathrm{C\cdot m^{-1}})$

半径 $r_2=1.0\mathrm{mm}$ 时， $\lambda_{\max,2}=2\pi\varepsilon_0 r_2E_{\max}=1.7\times10^{-7}\mathrm{C\cdot m^{-1}}$

半径 $r_3=0.1\mathrm{mm}$ 时， $\lambda_{\max,3}=2\pi\varepsilon_0 r_3E_{\max}=1.7\times10^{-8}\mathrm{C\cdot m^{-1}}$

14-18 一平行板电容器两极板上带有等量异号电荷，两板间充满相对介电常数为 $\varepsilon=3$ 的电介质。已知电介质中的 $E=1\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，试求：

(1)电介质中 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{P}$ 的大小；

(2)极板上自由电荷及介质束缚电荷分别产生的场强 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{E}'$ 的大小。

解 (1)介质中

$$D=\varepsilon_0\varepsilon E=8.85\times10^{-12}\times3\times1.0\times10^6=2.655\times10^{-5}(\mathrm{C\cdot m^{-2}})$$

$$P=D-\varepsilon_0E=2.655\times10^{-5}-8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^6=1.77\times10^{-5}(\mathrm{C\cdot m^{-2}})$$

(2)极板上的自由电荷面密度 $\sigma=D=2.655\times10^{-5}\mathrm{C\cdot m^{-2}}$，介质中束缚电荷面密度 $\sigma'=P=1.77\times10^{-5}\mathrm{C\cdot m^{-2}}$，产生的场强分别为

$$E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{2.655\times10^{-5}}{8.85\times10^{-12}}=3.0\times10^6(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

$$E'=\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}=\frac{1.77\times10^{-5}}{8.85\times10^{-12}}=2\times10^6(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

14-19 一圆柱形电容器是由半径为 R_1 的圆柱导体和与它同轴的导体圆筒构成，圆筒的内半径为 R_2，长为 $l(l\gg R_1、R_2)$，其间充满相对介电常数为 ε 的电介质。设沿轴向单位长度带电量分别为 $+\lambda_0$ 与 $-\lambda_0$，略去边缘效应，试求：

(1)电介质中的 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}$；

(2)两极板间的电势差；

(3)电介质表面的束缚电荷面密度 σ'。

解 (1)根据介质中高斯定理得

$$D=\frac{\lambda_0}{2\pi r},\quad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r},\quad P=D-\varepsilon_0E=\frac{\lambda_0}{2\pi r}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon r}(\varepsilon-1)$$

方向均垂直轴线指向外。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)两极的电势差为

$$V_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

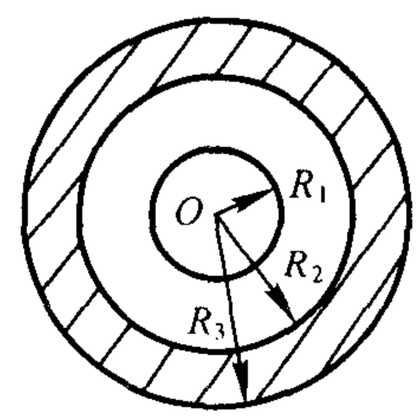
(3)$\sigma'=P\cos\theta$,介质内表面 $\theta=\pi$,介质外表面 $\theta=0$,对应的 σ'_1 和 σ'_2 分别为

$$\sigma_1'=-P_1=-\frac{\lambda_0(\varepsilon-1)}{2\pi\varepsilon R_1},\quad \sigma_2'=P_2=\frac{\lambda_0(\varepsilon-1)}{2\pi\varepsilon R_2}$$

14-20 一半径为 R_1 的导体球带电量为 Q,球外有一层用均匀电介质做成的同心球壳,其内、外半径分别为 R_2 和 R_3,电介质的相对介电常数为 ε,如图所示。试求:

(1)电介质内、外的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分布;

(2)电介质内 $\boldsymbol{P}$ 和介质表面的束缚电荷面密度 σ'。



习题 14-20 图

解 (1)根据介质中高斯定理有

$$r<R_1,\quad D=0,\quad E=0,$$

$$R_1<r<R_2,\quad D=\frac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\frac{D}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$R_2<r<R_3,\quad D=\frac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$$

$$r>R_3,\quad D=\frac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\frac{D}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

方向均沿径向向外。

(2)在介质中,$R_2<r<R_3$ 范围为

$$P=D-\varepsilon_0E=\frac{Q}{4\pi r^2}-\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}=\frac{Q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}$$

方向也沿径向向外。介质内表面上和外表面上对应的 σ'_1 和 σ'_2 分别为

$$\sigma_1'=P_1\cos\theta=-P_1=-\frac{Q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon R_2^2},\quad \sigma_2'=P_2\cos\theta=P_2=\frac{Q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon R_3^2}$$

14-21 一空气平行板电容器两极板的间距为 d,板面积为 S。将其充电到带电荷 Q 后与电源断开,然后用外力缓慢地把两极板间距拉大到 $2d$。试求在拉大过程中:

(1)电容器内电场能量的变化;

(2)外力所作的功;

(3)讨论其中的功能转换关系。

解 在拉大过程中,Q 保持不变

(1)开始时,$C_1=\varepsilon_0S/d$,后来 $C_2=\varepsilon_0S/(2d)$,电容器内电场能量变化

$$\Delta U_e=U_2-U_1=\frac{Q^2}{2C_2}-\frac{Q^2}{2C_1}=\frac{Q^2d}{\varepsilon_0S}-\frac{Q^2d}{2\varepsilon_0S}=\frac{Q^2d}{2\varepsilon_0S}>0$$

说明上述过程中能量增加。

(2)拉大过程中 Q 不变,σ 不变,故 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 也保持不变,因为两极相吸,吸力的大小为 $F_{电}=QE'$,其中 E' 为一个极板产生的场强 $E'=\frac{1}{2}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0S}$。由于是缓慢拉大,$F_{外}=F_{电}$,

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

故外力做的功为

$$W_{外}=F_{外}\,d=Q\,\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}d=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

(3)比较以上计算结果可知

$$W_{外}=\Delta U_e$$

即外力对电容器所做的功等于电容器中电场能量的增量。

14-22 半径为 a 的长直导线外面套有内半径为 b 的同轴导体圆筒，两导体间充满相对介电常数为 ε 的均匀电介质；沿轴向单位长度上的导线带电 $+\lambda$，圆筒带电 $-\lambda$。忽略边缘效应，求沿轴向单位长度的电场能量。

解 由高斯定理，两导体间的电介质中

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r},\quad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

电场能量密度为

$$u_e=\frac{1}{2}DE=\frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^2}$$

沿轴向长度为 Δl 的区域内，介质中的电场能量为

$$U_e=\int_a^b\frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cdot 2\pi r\Delta l\mathrm{d}r=\frac{\lambda^2\Delta l}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

单位长度上电场能量为

$$U_e'=\frac{U_e}{\Delta l}=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

14-23 有一半径为 R 的导体球，其上带有电荷 Q，处在一无限大的均匀电介质中。若电介质的相对介电常数为 ε，试求：

(1)电场的总能量；

(2)电场能量的一半分布在半径多大的球面内？

解 (1)由介质中的高斯定理有

$r<R$，　　$D=0,\quad E=0$

$r>R$，　　$D=\dfrac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$

电场能量密度为

$$u_e=\frac{1}{2}DE=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4}$$

电场总能量为

$$U_e=\int_R^\infty\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0\varepsilon r^4}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

(2)设在半径 R_1 的球面内场能占总能量的一半，则

$$\frac{1}{2}U_e=\int_R^{R_1}\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

即 $\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R_1}=\dfrac{1}{2R}$，所以 $R_1=2R$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

14-24 地球表面附近晴天时的电场强度约为 $100\mathrm{V\cdot m^{-1}}$。

(1)相应的电场能量密度多大?

(2)假设地球表面以上 10km 范围内的电场强度都是这一数值,那么在此范围内所储存的电场能量有多少?

解 (1)$u_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}\times8.85\times10^{-12}\times(10^2)^2=4.4\times10^{-8}(\mathrm{J\cdot m^{-3}})$

(2)$U=u_eV=u_e\left[\frac{4}{3}\pi(R+h)^3-\frac{4}{3}\pi R^3\right]=u_e\frac{4}{3}\pi[(R+h)^3-R^3]$

$=4.4\times10^{-8}\times\frac{4}{3}\times3.14[(6370\times10^3+10\times10^3)^3-(6370\times10^3)^3]$

$=2.31\times10^{11}(\mathrm{J})$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第15章

电流和磁场

【基本概念和规律】

1. 毕奥-萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

式中 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表示电流元，r 表示从电流元到场点的距离，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 是单位矢量。

2. 磁场的叠加原理

$$\boldsymbol{B}=\sum_i\boldsymbol{B}_i \qquad 或 \qquad \boldsymbol{B}=\int_L\mathrm{d}\boldsymbol{B}$$

3. 磁场的高斯定理

$$\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

4. 安培环路定理

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_{(L内)}I_i$$

5. 几种典型电流磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分布

(1)有限长直载流导线的磁场：$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$。式中 r_0 为场点到长直导线的垂直距离；θ_1 和 θ_2 分别是导线两端电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 间的夹角。

(2)无限长直载流导线的磁场：$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$。式中 r_0 为场点与载流直导线之间的垂直距离。

(3)圆电流圆心处的磁场：$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$， R 为圆电流的半径。

(4)载流直导线延长线上一点的磁场：$B=0$。

(5)载流长直密绕螺线管的磁场：$B=\mu_0 nI$， n 为单位长度的线圈匝数。

(6)载流密绕螺绕环磁场：$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$， N 为螺绕环线圈总匝数。

6. 运动电荷的磁场

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

式中运动电荷 q 为正时，$\boldsymbol{B}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}$ 的方向相同，当 q 为负时，$\boldsymbol{B}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}$ 的方向相反。

7. 洛伦兹力

运动电荷在磁场中所受的磁力为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

式中运动电荷 q 为正时，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 方向相同；q 为负时，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 方向相反。

8. 安培定律

电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中所受的安培力：$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$；一段载流导线在磁场中所受的安培力：

$$\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}。$$

9. 均匀磁场对载流线圈的作用

载流线圈所受合力等于零，载流线圈所受磁力矩为：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B}$，　$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}=NIS$ 称为载流线圈的磁矩。

【解题指导】

● 求稳恒电流产生磁场的方法。

(1)利用毕奥-萨伐尔定律求磁场。先求出任一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在某点 P 产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$，再用矢量积分求出整段载流导线在该点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\int_L\mathrm{d}\boldsymbol{B}$。由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 在积分中大小和方向都在变化，故一般要建立坐标系，把 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 分解为 $\mathrm{d}B_x$，$\mathrm{d}B_y$（大学物理中一般遇到的是平面问题），然后用标量积分求出 $\boldsymbol{B}$ 的各个分量

$$B_x=\int\mathrm{d}B_x,\quad B_y=\int\mathrm{d}B_y$$

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小及方向（可用 $\boldsymbol{B}$ 与 x 轴夹角 θ 表示）为

$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2},\quad \theta=\arctan\frac{B_y}{B_x}$$

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 也可以表示为

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}$$

(2)利用安培环路定理求磁场。这里必须指出，只有在磁场分布具有对称性时，用该定理解题才是方便的，否则数学上的积分将很麻烦。其次，还要搞清该定理的一些物理概念问题。

(3)利用一些典型电流磁场的结果进行矢量叠加或矢量积分来求解磁场。这里特别要记住以下典型电流的磁场。

①有限长载流直导线的磁场：$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$。

②无限长载流直导线的磁场：$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$。

③半无限长载流直导线的磁场：$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$。

④载流直导线在延长线上一点的磁场：$B=0$。

⑤圆弧电流在圆心处磁场：$B=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$，$\theta$ 为圆弧电流对应的圆心角。

● 求磁场对电流的作用力的方法。

(1)利用安培定律求磁力。首先求出电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$，然后用

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

矢量积分求出一段载流导线在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力 $\boldsymbol{F}=\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$。具体求解时，同样要建立坐标系，把 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 分解为 $\mathrm{d}F_x$，$\mathrm{d}F_y$，然后积分求出磁力 $\boldsymbol{F}$ 的各个分量

$$F_x=\int_L \mathrm{d}F_x,\quad F_y=\int_L \mathrm{d}F_y$$

磁力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向（可用 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴夹角 θ 表示）为

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2},\quad \theta=\arctan\frac{F_y}{F_x}$$

磁力 $\boldsymbol{F}$ 也可表示为

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$$

(2)对于运动电荷 q，在磁场中受到的洛伦兹力为 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ $(q>0)$。若 q 为负电荷，则洛伦兹力的方向与正电荷的受力方向相反，这一点要特别注意。对于运动电荷在磁场中受力问题，解题时首先要明确运动电荷的类型和运动方向，并且要熟悉用右手螺旋法则，决定矢量叉积的方向。

(3)求均匀磁场对平面载流线圈所受磁力矩的方法。

①记住磁矩的定义式 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}=NIS\boldsymbol{n}$，任意线圈法线 $\boldsymbol{n}$ 方向与电流 I 方向满足右手螺旋法则。

②磁力矩公式 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B}$ 求解。

③磁矩和磁力矩公式中，线圈形状是任意的。

【习题解答】

15-1 已知电视显像管中一电子束的电流为 $1.6\mu\mathrm{A}$，试求每秒钟撞击荧光屏幕的电子数。（每个电子所带的电量大小为 $1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$）

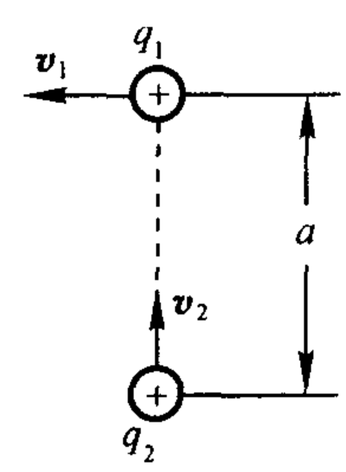
解 $N=\dfrac{Q}{e}=\dfrac{It}{e}=\dfrac{1.6\times10^{-6}\times1}{1.6\times10^{-19}}=10^{13}$（个）

15-2 两个正点电荷 q_1 和 q_2 分别以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 运动，当它们运动到相距为 a 的图示位置时，求：

(1)q_1 在 q_2 处所产生的磁感应强度和作用在 q_2 上的力。

(2)q_2 在 q_1 处所产生的磁感应强度和作用在 q_1 上的力。

(3)它们之间的相互作用力满足牛顿第三定律吗？为什么？



习题 15-2 图

解 (1)q_1 在 q_2 处产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0 q_1\boldsymbol{v}_1\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi a^2},\quad B_1=\frac{\mu_0 q_1 v_1}{4\pi a^2}$$

方向垂直纸面向外。q_2 受到的磁力：

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}2}=q_2\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B}_1,\quad F_{\mathrm{m}2}=\frac{\mu_0 q_1 q_1 v_1 v_2}{4\pi a^2}$$

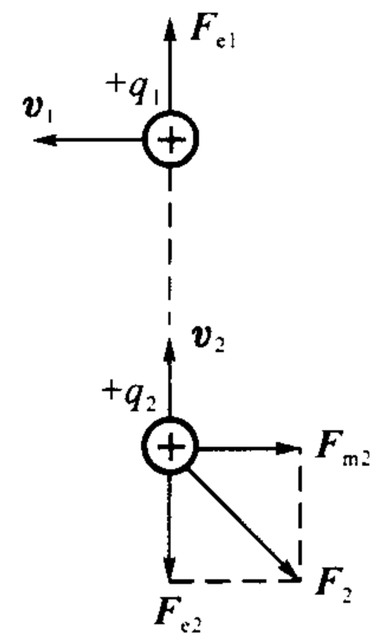
q_2 受到的电力：

$$F_{\mathrm{e}2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{a^2}$$

q_1 作用在 q_2 上的力

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$F_2=\sqrt{F_{m2}^2+F_{e2}^2}=\frac{q_1q_2}{4\pi a^2}\sqrt{\mu_0^2v_1^2v_2^2+\frac{1}{\varepsilon_0^2}}$$



解 15-2 图

(2)同理分析可得

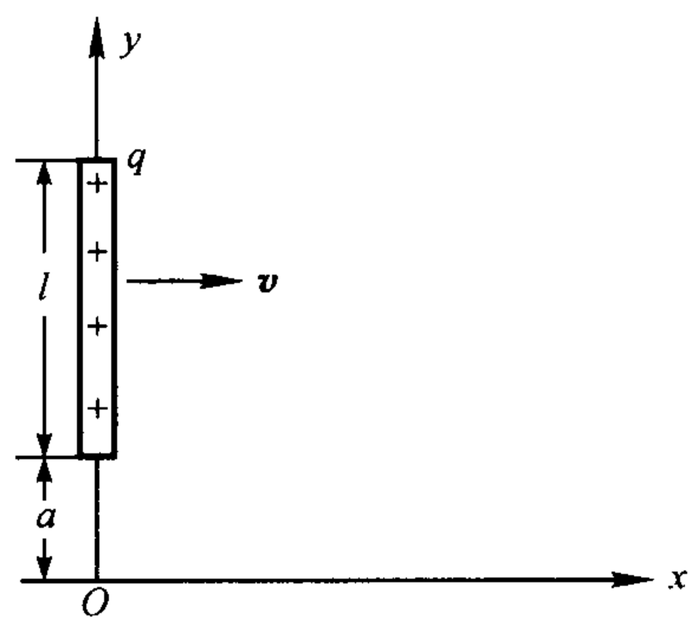
$$B_2=0,\quad F_{m1}=0,\quad F_1=F_{e1}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0a^2}$$

(3)当 $v_1,v_2\ll c$ 时,应该说它们仍可认为满足牛顿第三定律,因为真空中光速 $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$,故有

$$F_2=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0a^2}\sqrt{1+\frac{v_1^2v_2^2}{c^4}}\approx\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0a^2}=F_1$$

当 v_1,v_2 接近光速时,牛顿第三定律不再适用。

15-3 有一均匀带电细棒以速度 $v=1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 沿图中 x 轴正方向运动,棒长 $l=0.1\text{m}$,带电 $q=10^{-10}\text{C}$。试求棒运动到图示位置时坐标原点 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。(图中 $a=0.1\text{m}$)



习题 15-3 图

解 此时在带电棒上取一线元 $\mathrm{d}y$,带电量为 $\mathrm{d}q=\frac{q}{l}\cdot\mathrm{d}y$,在 O 点产生的磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}qv\sin 90^\circ}{y^2}$$

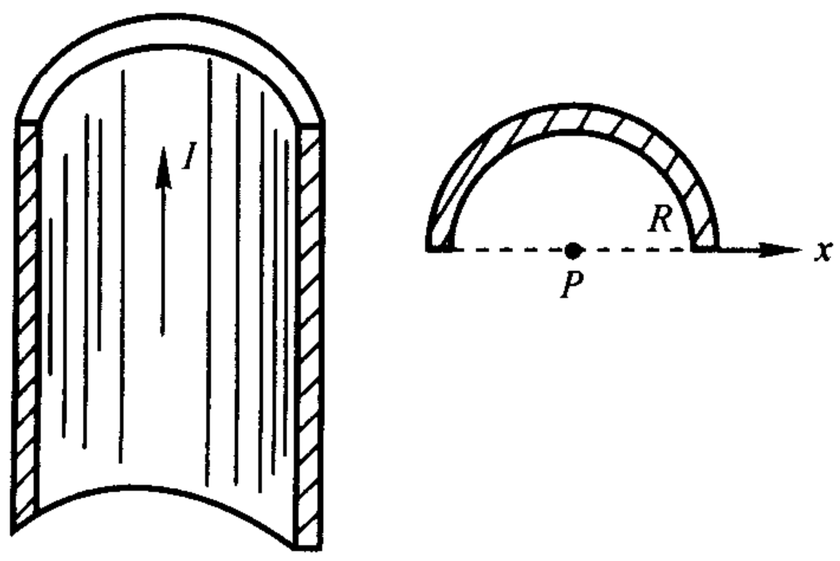
整根棒在 O 点的磁感应强度为

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_a^{a+l}\frac{\mu_0vq}{4\pi l}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

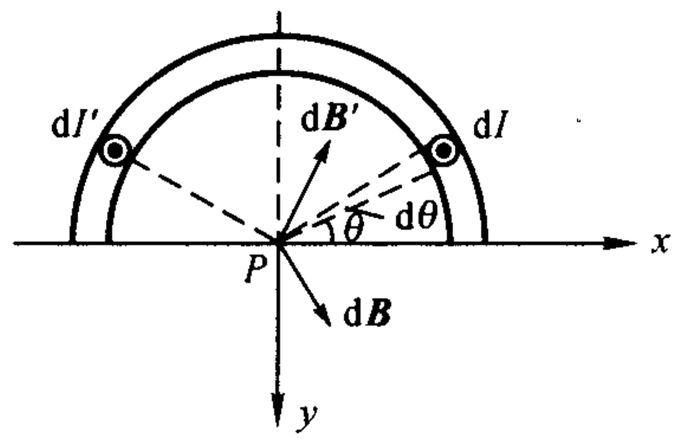
$$=\frac{\mu_0vq}{4\pi l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{l+a}\right)=5.0\times10^{-16}(\text{T})$$

方向垂直纸面向里。

15-4 在半径 $R=0.01\text{m}$ 的无限长半圆筒形金属薄壁上,自下而上地通过电流 $I=5.0\text{A}$。设电流均匀地分布在薄壁上,如图所示,试求轴线上任意一点 P 处的磁感应强度的大小和方向。



习题 15-4 图



解 15-4 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 建立如图所示的坐标系，取无限长直电流元 $dI=\frac{I}{\pi R}\cdot Rd\theta$，$dI$ 在 P 点产生的磁场 $d\boldsymbol{B}$ 的大小

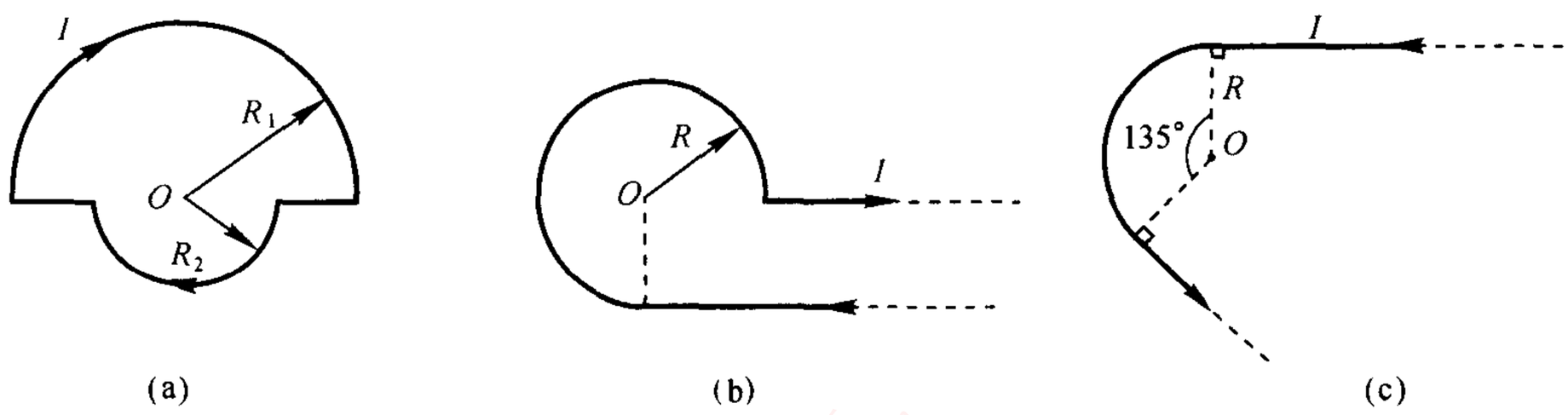
$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi R}$$

再取关于 y 轴对称的电流元 $dI'=dI$，dI' 在 P 点产生 $d\boldsymbol{B}'$，由对称性分析可知，$d\boldsymbol{B}$ 和 $d\boldsymbol{B}'$ 叠加后只有 x 轴方向的分量，$dB_x=2dB\sin\theta$，故 P 点的总磁感应强度的大小为

$$B=B_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\frac{\mu_0 dI}{2\pi R}\sin\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times5.0}{\pi^2\times0.01}=6.37\times10^{-5}(\mathrm{T})$$

方向沿 x 轴正方向。

15-5 若通以电流为 I 的导线弯曲成如图所示的形状（直线带虚线的部分伸长至无限远），试分别求出 O 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。



习题 15-5 图

解 (a)由毕-萨定律可知，圆弧电流在圆心处的磁感应强度为 $B=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$，$\theta$ 为圆弧电流所张的圆心角，直导线电流的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$$

用叠加原理可求得总的磁应强度为

$$B_O=\frac{\mu_0 I}{4R_1}+\frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

方向垂直纸面向里。

(b)同理

$$B_O=\frac{3\mu_0 I}{8R}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

方向垂直纸面向里。

(c)同理

$$B_O=\frac{3\mu_0 I}{16R}+\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

方向垂直纸面向外。

15-6 如图所示，正方形线圈 $ABCD$ 的边长为 0.1m，载有电流为 0.5A，试求正方形中心 O 处磁感应强度的大小。

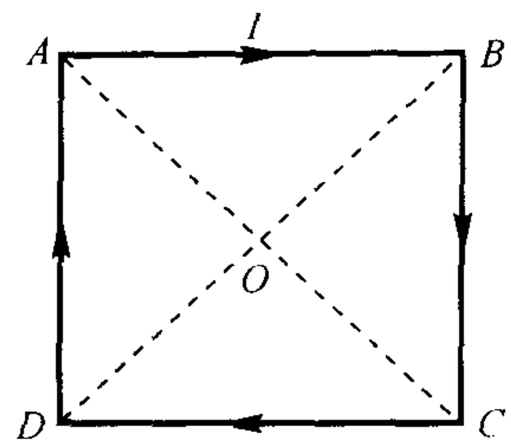
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 正方形线圈每边在 O 点产生的磁场大小和方向均相同，到 O 点的垂直距离均为 $r_0=0.05\text{m}$，故在正方形中心 O 处产生的磁场为

$$B_O=4B_{\overline{AB}}=4\times\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$$=4\,\frac{4\pi\times10^{-7}\times0.5}{4\pi\times0.05}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$$

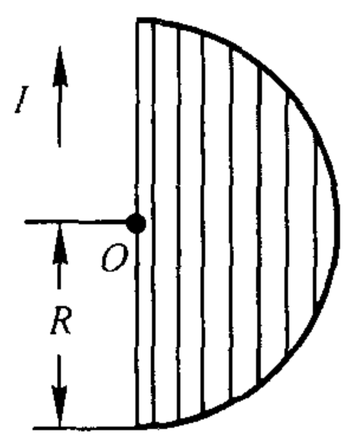
$$=5.64\times10^{-6}(\text{T})$$



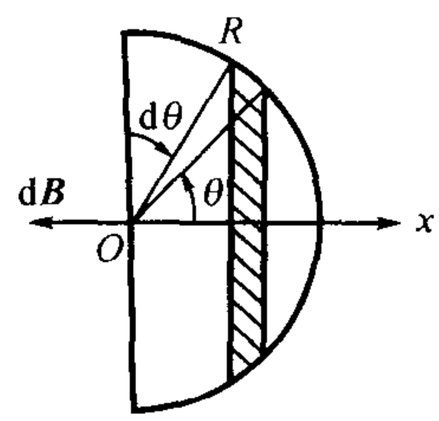
习题 15-6 图

方向垂直纸面向下。

15-7 在半径为 R 的木球上密绕着细导线，相邻的线圈彼此平行地靠着，以单层排列并盖住半个球面，共有 N 匝，如图所示，当导线中通有电流 I 时，求球心 O 处的磁感应强度。



习题 15-7 图



解 15-7 图

解 建立如图所示的坐标系，在 θ 处 $\mathrm{d}\theta$ 范围的线圈匝数为

$$\mathrm{d}N=\frac{N}{\pi/2}\cdot\mathrm{d}\theta=\frac{2N}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

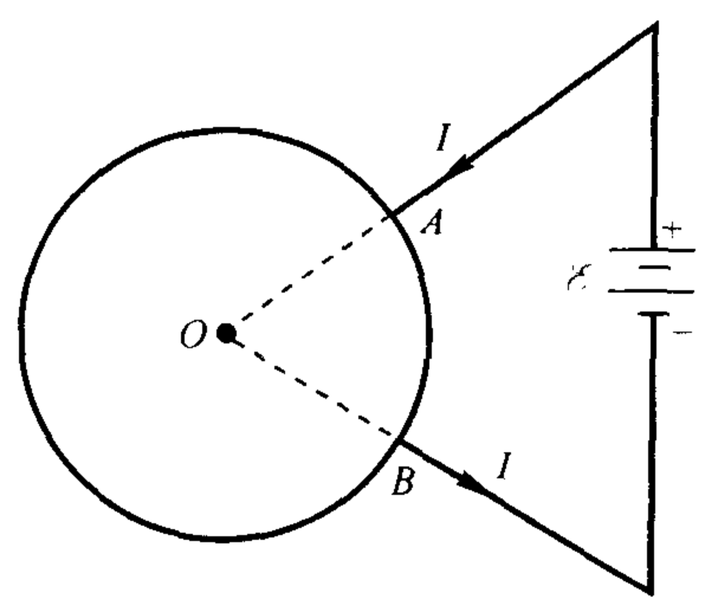
在 O 点处 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 方向沿 x 轴负方向，根据圆电流在轴线上任一点的磁感应强度公式有

$$\mathrm{d}B=\mathrm{d}B_x=-\frac{\mu\mathrm{d}NI(R\sin\theta)^2}{2R^3}=-\frac{\mu_0 NI}{\pi R}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$B=-\frac{\mu NI}{\pi R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\mathrm{d}\theta=-\frac{\mu_0 NI}{4R}$$

负号表示 $\boldsymbol{B}$ 的方向沿 x 轴负方向。

15-8 如图所示，两根直导线沿半径方向引到导线环上的 A，B 两点，并在很远处与电源相连。已知导体圆环的粗细和密度都是均匀的，求环中心 O 点的磁感应强度。



习题 15-8 图

解 设 A、B 两点将圆环分成两部分，一部分圆弧长为 l_1，另一部分为 l_2

$$l_1+l_2=2\pi R$$

设通过 l_1 上的电流 I_1，l_2 上的电流为 I_2

$$I_1+I_2=I$$

由毕-萨定律有

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$B_O=\frac{\mu_0 I_1\theta_1}{4\pi R}-\frac{\mu_0 I_2\theta_2}{4\pi R}=\frac{\mu_0 I_1\frac{l_1}{R}}{4\pi R}-\frac{\mu_0 I_2\frac{l_2}{R}}{4\pi R}=\frac{\mu_0}{4\pi R^2}(I_1 l_1-I_2 l_2)$$

由于 $V_{l1}=V_{l2}$，即 $I_1\rho\frac{l_1}{S}=I_2\rho\frac{l_2}{S}$，所以

$$I_1 l_1=I_2 l_2,\quad B_O=0$$

15-9 某地区的一条高压输电线在地面上空约 5m 处，通过电流大小为 1.8×10^3A，试求：

(1)该电流在地面上所产生的磁感应强度大小；

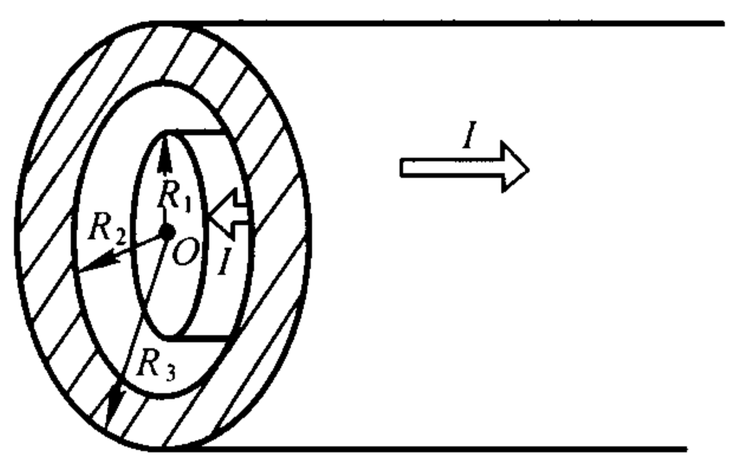
(2)在该地区，地磁场大小为 6.0×10^{-5}T，试比较输电线产生的磁场和地磁场的大小。

解 (1)由安培环路定理有

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1.8\times10^3}{2\pi\times5}=7.2\times10^{-5}(\mathrm{T})$$

(2)
$$\frac{B}{B_{地}}=\frac{7.2\times10^{-5}}{6.0\times10^{-5}}=1.2$$

15-10 由同轴实心圆柱形导体与圆筒形导体构成一长的同轴电缆，其尺寸如图所示。使电缆中的电流 I 从导体圆柱输出，从导体圆筒流回。设电流都是均匀分布在导体的横截面上的，求下列各处的磁感应强度：



习题 15-10 图

(1)导体圆柱内($r<R_1$)；

(2)两导体之间($R_1<r<R_2$)；

(3)导体圆筒内($R_2<r<R_3$)；

(4)电缆外($r>R_3$)。

解 (1)由安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$

$$r<R_1,\qquad B_1\cdot2\pi r=\mu_0\frac{I}{\pi R_1^2}\cdot\pi r^2,\quad\therefore\quad B_1=\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$(2)R_1<r<R_2,\quad B_2\cdot2\pi r=\mu_0 I,\quad\therefore\quad B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$(3)R_2\leqslant r<R_3,\quad B_3\cdot2\pi r=\mu_0\left[I-\frac{I}{\pi(R_3^2-R_2^2)}\cdot\pi(r^2-R_2^2)\right],$$

$$\therefore\quad B_3=\frac{\mu_0 I(R_3^2-r^2)}{2\pi r(R_3^2-R_2^2)}$$

$$(4)r>R_3,\qquad B_4\cdot2\pi r=\mu_0(I-I),\quad\therefore\quad B_4=0$$

15-11 两无限大的平行导体平面分别载有均匀分布的电流，面电流密度分别为 j_1 和 j_2，且 $j_1>j_2$，如图所示。试求两平面间和两平面外的磁感应强度。

解 由安培环路定理可求得无限大均匀载流平面两侧的磁场为 $B=\mu_0 j/2$，大小与距离无关，方向与 j 垂直，且平行于平面。根据叠加原理有

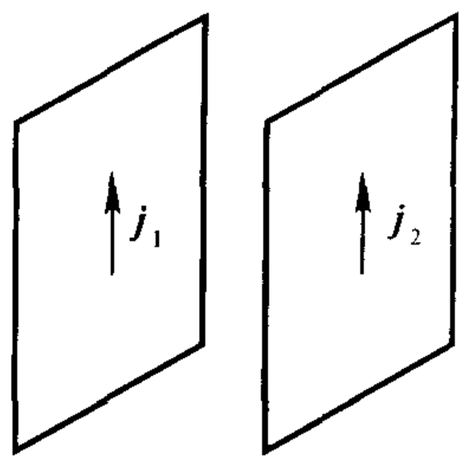
$$B_{内}=\frac{\mu_0 j_1}{2}-\frac{\mu_0 j_2}{2}=\frac{\mu_0}{2}(j_1-j_2)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

方向垂直纸面向里。

$$B_{外}=\frac{\mu_0 j_1}{2}+\frac{\mu_0 j_2}{2}=\frac{\mu_0}{2}(j_1+j_2)$$

左外侧 $\boldsymbol{B}_{外}$ 的方向垂直纸面向外，右外侧 $\boldsymbol{B}_{外}$ 的方向垂直纸面向里。

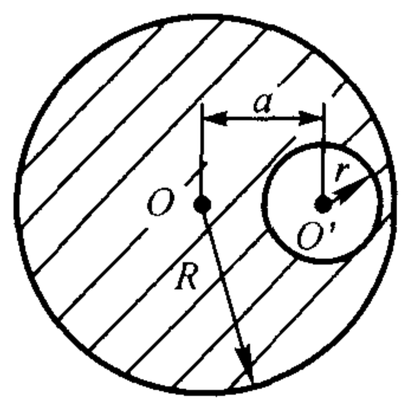


习题 15-11 图

15-12 在半径为 R 的长直圆柱导体内部，与轴线平行地挖去一块半径为 $r(r<R/2)$ 的长直圆柱体，两圆柱体轴线距离为 a，其横截面如图所示。设该导体通有均匀分布的电流 I，试求：

(1)圆柱导体轴线上的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 的大小；

(2)圆柱体空心轴线上的磁感应强度 $\boldsymbol{B}'_0$ 的大小。



习题 15-12 图

解 导体中的电流密度为

$$j=\frac{I}{\pi(R^2-r^2)}$$

由叠加原理，空间任一点处的 $\boldsymbol{B}$ 均可看成由半径 R、电流密度为 j 的长直圆柱体产生的 $\boldsymbol{B}_1$，减去半径为 r、电流密度为 j 的长直圆柱体产生的 $\boldsymbol{B}_2$。

(1)在 O 点处，$\boldsymbol{B}_1=0$，故 $\boldsymbol{B}_2$ 的大小为

$$\oint \boldsymbol{B}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B_2\cdot 2\pi a=\mu_0\pi r^2 j,\quad B_2=\frac{\mu_0 j r^2}{2a}$$

因此 $\boldsymbol{B}_O$ 的大小为

$$B_O=B_2=\frac{\mu_0 j r^2}{2a}=\frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a(R^2-r^2)}$$

(2)同理，在 O' 点处，$B_2=0$，B_O' 的大小为

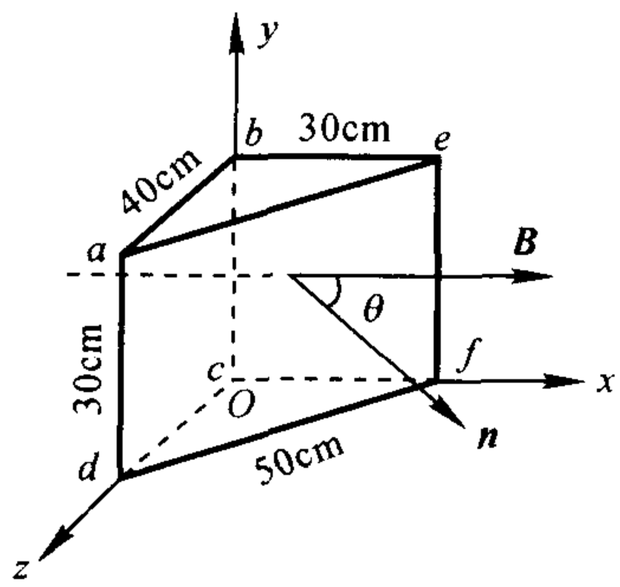
$$B_O'=B_1=\frac{\mu_0\pi a^2 j}{2\pi a}=\frac{\mu_0 j a}{2}=\frac{\mu_0 I a}{2\pi(R^2-r^2)}$$

15-13 已知有一磁感应强度 $B=2.0\mathrm{T}$ 的均匀磁场，方向沿 x 轴正向，如图所示，试求：

(1)通过图中 $abcd$ 面的磁通量；

(2)通过图中 $efcb$，$adfe$，abe，dcf 面的磁通量；

(3)通过整个封闭曲面的磁通量。



习题 15-13 图

解 (1)$\Phi_{B,abcd}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=-BS_{abcd}$

$$=-2\times 0.4\times 0.3=-0.24(\mathrm{Wb})$$

(2) $$\Phi_{B,efcb}=BS_{efcb}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\Phi_{B,adfe}=BS_{adfe}\cos\theta=2\times 0.3\times 0.5\times\frac{4}{5}=$$

$0.24(\mathrm{Wb})$

$$\Phi_{B,abc}=\Phi_{B,dcf}=0$$

(3)由磁场中的高斯定理得知通过整个封闭曲面的磁通量为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\Phi_B = \oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

15-14 一根很长的铜线载有分布均匀的电流 $I=10\mathrm{A}$。在铜线内部作一假设的平面 S，如图所示，试求通过平面 S 单位长度上的磁通量。

习题 15-14 图

解 由安培环路定理

$$B \times 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2, \therefore \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

再在 S 上取平行于轴线的 $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}r$，

$$\mathrm{d}\Phi_B = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = B\mathrm{d}S, \quad \therefore \quad \Phi_B = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} l \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I l}{4\pi}$$

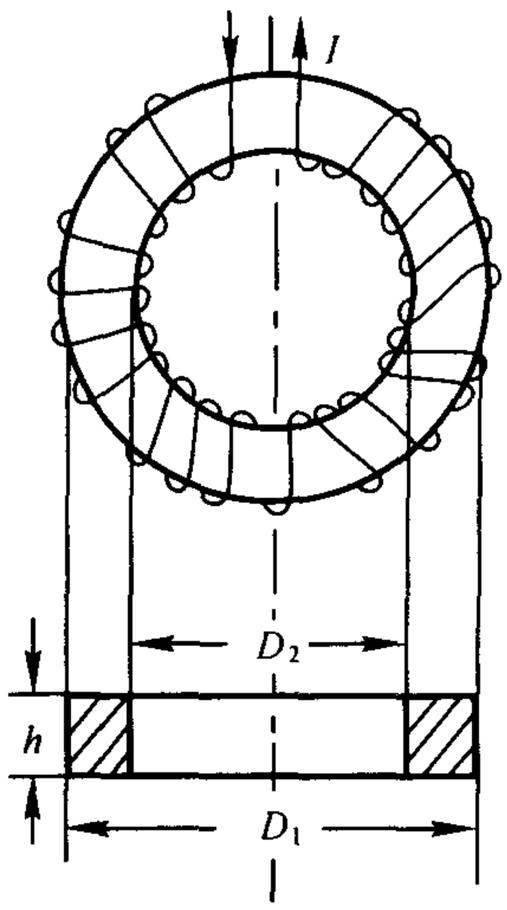
单位长度上的磁通量

$$\Phi_B' = \frac{\Phi_B}{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} = 10^{-6}(\mathrm{Wb \cdot m^{-1}})$$

15-15 横截面为矩形的螺绕环尺寸如图所示，外直径 D_1，内直径 D_2，高 h，绕有 N 匝线圈，并通有电流 I，试求：

(1)环内磁感应强度的分布；

(2)通过螺绕环截面的磁通量。



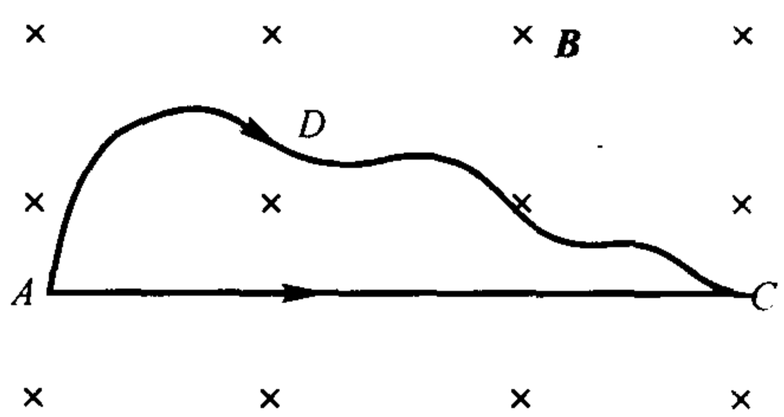
习题 15-15 图

解 (1)由安培环路定理

$$B \times 2\pi r = \mu_0 N I, \quad \therefore \quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$(2)\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot h\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

15-16 如图所示，ADC 为弯成任意形状的导线，导线置于与均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面内。试证明：通过相同恒定电流 I 的直导线 AC 与导线 ADC 所受的磁力相等。



习题 15-16 图

证明 ADC 受力为

$$\boldsymbol{F} = \int_{\overset{\frown}{ADC}} I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{B}$ 为常量，可以从积分号中提出，故

$$\boldsymbol{B}_{ADC} = (\int_{\overset{\frown}{ADC}} I\mathrm{d}\boldsymbol{l}) \times \boldsymbol{B} = I\boldsymbol{l}_{AC} \times \boldsymbol{B}$$

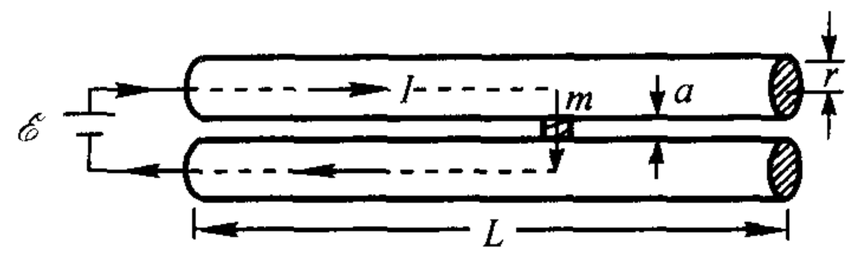
而 AC 受力为

$$\boldsymbol{F}_{AC} = I\boldsymbol{l}_{AC} \times \boldsymbol{B}, \quad \therefore \quad \boldsymbol{F}_{ADC} = \boldsymbol{F}_{AC}$$

15-17 目前正在研究的一种电磁导轨炮(理论上子弹的出口速度可达到 $10\mathrm{km \cdot s^{-1}}$)的原理如图所示。子弹置于两条平行导轨之间，通以电流后子弹会被磁力加速而以高速从出口射出。以 I 表示电流，r 表示导轨(视为圆柱)半径，a 表示两轨面之间的距离。将导轨近似地按无限长处理，证明子弹受的磁力可近似地表示为 $F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{a+r}{r}$。设导轨长度 $L=$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

5.0m，$a=1.2$cm，$r=6.7$cm，子弹质量为 $m=317$g，发射速度为 $4.2\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$。



习题 15-17 图

(1)设子弹从导轨的末端起动，求该子弹在导轨内的平均加速度是重力加速度的几倍？

(2)通过导轨的电流应多大？

(3)若能量的转换效率为 40%，则该子弹发射需要多少千瓦功率的电源？

解 (1)因为 $v^2-v_0^2=2\bar{a}L$，而 $v_0=0$，故平均加速度为

$$\bar{a}=\frac{v^2}{2L}=\frac{(4.2\times10^3)^2}{2\times5}=17.64\times10^5=1.8\times10^5g \qquad (g=9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

$$\frac{\bar{a}}{g}=1.8\times10^5$$

(2)$F=m\bar{a}$，代入 F 后得

$$\frac{\mu_0I^2}{2\pi}\ln\frac{a+r}{r}=m\bar{a}$$

故通过导轨电流为

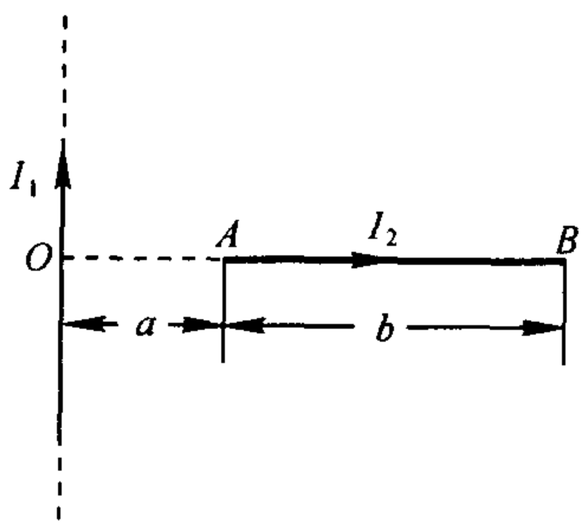
$$I=\sqrt{\frac{2\pi m\bar{a}}{\mu_0\ln\frac{a+r}{r}}}=\sqrt{\frac{2\pi\times317\times10^{-3}\times17.64\times10^5}{4\pi\times10^{-7}\ln\frac{1.2+6.7}{6.7}}}=4.1\times10^6(\text{A})$$

(3)$P=F\bar{v}=m\bar{a}\,\frac{v}{2}=317\times10^{-3}\times17.64\times10^5\times\frac{4.2\times10^3}{2}=1.17\times10^6(\text{kW})$

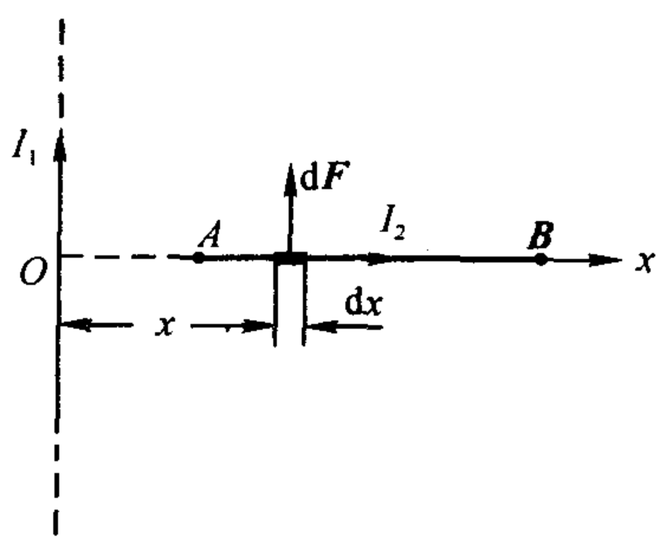
考虑到能量转换效率，电源功率应为

$$P_{电源}=\frac{P}{\eta}=\frac{1.17\times10^6}{0.4}=2.93\times10^6(\text{kW})$$

15-18 如图所示，一长直导线通有电流 I_1，旁边放有一长为 b 的导线 AB 带有电流 I_2，其近端离长直导线距离为 a，求导线 AB 所受的磁力和对 O 点的力矩。



习题 15-18 图



解 15-18 图

解 建立如图所示的坐标系，在 AB 上取一电流元 $I_2\mathrm{d}x$，则

$$\mathrm{d}F=I_2\mathrm{d}xB=\frac{I_2\mathrm{d}x\mu_0I_1}{2\pi x}$$

导线 AB 所受的总作用力为

$$F=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0I_1I_2\mathrm{d}x}{2\pi x}=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

方向竖直向上。电流元 $I_2\mathrm{d}x$ 对 O 点的力矩

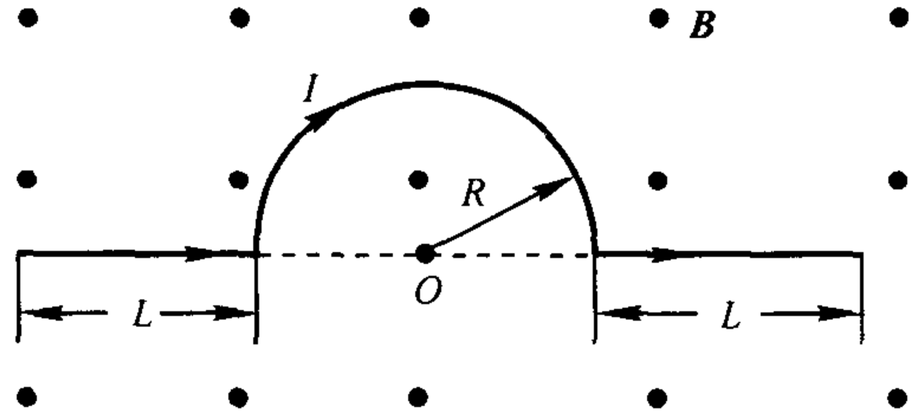
$$\mathrm{d}M = x\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}x}{2\pi}$$

总力矩

$$M = \int \mathrm{d}M = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}$$

方向垂直纸面向外。

15-19 载有电流为 I 的一根直导线中部被弯成半径为 R 的半圆形导线，如图所示。现将其置于垂直平面向外的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，求该导线所受的磁力。



习题 15-19 图

解 因为 $\boldsymbol{B}$ 均匀，两直线段受力为

$$F_1 = BIL + BIL = 2BIL$$

方向竖直向下。半圆弧段等效于直径长的直导线受力(见习题 15-16)

$$F_2 = BI2R \quad (\text{方向也竖直向下})$$

故有

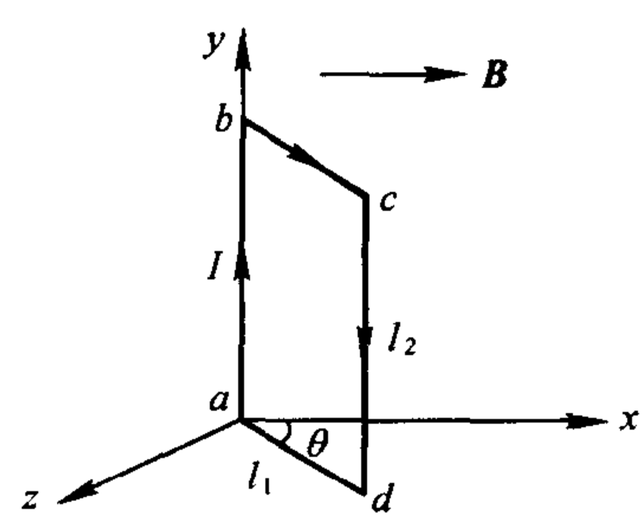
$$F = F_1 + F_2 = BI(2L+2R) = 2BI(L+R) \quad (\text{方向竖直向下})$$

15-20 有科学家在研究用超导材料做成的导线建造巨大的电磁铁以储存用电峰值期间所需要的能量。在一种设计方案中，以半径 100m 的圆形线圈来承载 150 000A 的电流，但这样大的电流在传输过程中会产生平均磁感应强度为 5T 的磁场，从而使线圈受到磁场力的作用，为了克服这种磁场力，常将线圈放在凿进岩层的山洞里以获得对结构的支持。假如磁场方向与圆形线圈的平面垂直，试问线圈承受的张力为多大？(线圈的形变忽略不计。)

解 圆线圈电流中电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 受到的磁力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$，其大小为 $\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}l$，故该线圈承受张力为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = IB = 1.5\times10^5\times5 = 7.5\times10^5(\mathrm{N\cdot m^{-1}})$$

15-21 如图所示，矩形线圈共有 20 匝，其边长分别为 $l_1 = 0.050\mathrm{m}$ 和 $l_2 = 0.100\mathrm{m}$，线圈平面与 xy 平面成 $\theta = 30°$ 的角，整个线圈可绕 y 轴旋转。今将线圈通上 0.1A 的电流，并放在磁感应强度为 0.50T 的均匀磁场中，磁场方向沿 x 轴正方向，试求作用在该线圈上的力矩。



习题 15-21 图

解 由已知 $p_m = NIS = 20\times0.1\times0.05\times0.1 = 0.01(\mathrm{A\cdot m^2})$，所受磁力矩的大小为

$$M = p_m B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = p_m B\cos\theta = 0.01\times0.5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 4.3\times10^{-3}(\mathrm{N\cdot m})$$

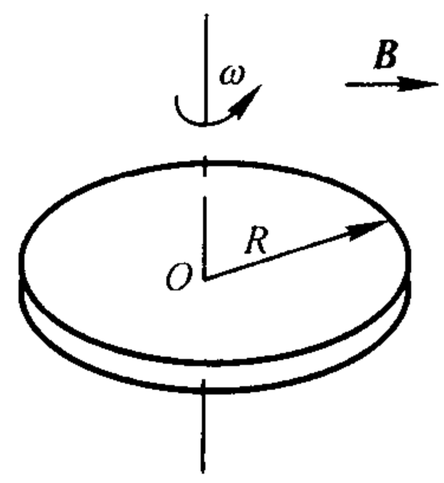
15-22 如图所示，一半径为 R 的塑料圆盘以角速度 ω 绕通过其中心且与盘面垂直的轴转动。求：

(1)当有电量为 $+q$ 的电荷均匀分布于圆盘表面时，圆盘中心点 O 的磁感应强度；

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)此时圆盘的磁矩；

(3)若将上述圆盘置于与圆盘表面平行的均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 内，试证明：磁场 $\boldsymbol{B}$ 作用于圆盘的力矩大小为 $M=\frac{q\omega R^2B}{4}$。



习题 15-22 图

解 (1)将圆盘分成许多半径逐渐变化的同轴圆环来考虑。设在圆盘取一半径为 r、宽为 $\mathrm{d}r$ 的同轴细圆环，其面积为 $2\pi r\mathrm{d}r$，其上电荷作圆周运动形成等效圆电流

$$\mathrm{d}I=\frac{\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r}{2\pi/\omega}=\sigma\omega r\mathrm{d}r,\quad 其中\ \sigma=\frac{q}{\pi R^2}$$

相应在 O 点产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B_O=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega\mathrm{d}r}{2},$$

$$B_O=\int_0^R\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}\quad（方向沿轴向上）$$

(2) 圆电流 $\mathrm{d}I$ 相应的磁矩

$$\mathrm{d}p_\mathrm{m}=S\mathrm{d}I=\pi r^2\cdot\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

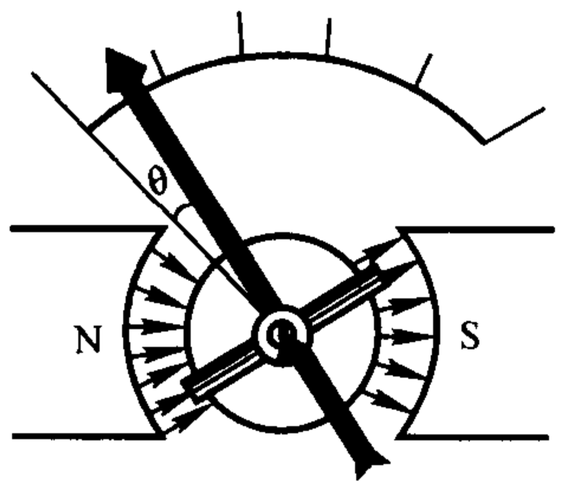
$$p_\mathrm{m}=\int_0^R\pi\sigma\omega r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4=\frac{\omega R^2q}{4}\quad（方向也沿轴向上）$$

(3)$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\times\boldsymbol{B}$，因为外磁场 $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{p}_\mathrm{m}$，故

$$M=p_\mathrm{m}B=\frac{q\omega R^2B}{4}$$

得证

15-23 如图所示，磁表式电流计线圈共有 250 匝，线圈长为 0.02m，宽为 0.01m，线圈所在处 $B=0.2\mathrm{T}$。当线圈偏转 θ 角时，游丝(即弹簧)产生的扭力矩 $M=C\theta$。设扭转系数 $C=3.3\times10^{-8}\mathrm{N\cdot m\cdot deg^{-1}}$，当线圈中通以电流后，线圈偏转 30°。问流过的电流多大？



习题 15-23 图

解 由题图可知，线圈在任一位置受到的磁力矩为 $M=NBIS$。平衡时

$$NBIS=C\theta$$

$$\therefore\quad I=\frac{C\theta}{NBS}=\frac{3.3\times10^{-8}\times30}{250\times0.2\times0.02\times0.01}=9.9\times10^{-5}(\mathrm{A})$$

15-24 在参考系 S 中坐标原点处的电场强度大小为 $3\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，其方向与 x 轴成 30°角，与 y 轴成 60°角，在 xoy 平面内。参考系 S' 中坐标轴与 S 系中的轴平行，S' 系以 $0.6c$ 的速度沿 x 轴正方向相对于 S 系运动，试求在 S' 系中观测者观测到的电场和磁场的大小和方向。

解 已知 $v=0.6c$，$E_x=E\cos30°=2.6\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，$E_y=E\cos60°=1.5\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，$E_z=0$，$B_x=B_y=B_z=0$，由电磁场的相对论性变换为

$$E_x'=E_x=2.6\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}},\quad E_y'=\frac{E_y-vB_z}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=1.88\times10^6\mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$E_z' = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{E}' = (2.6\times10^6\boldsymbol{i} + 1.88\times10^6\boldsymbol{j})\mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

$$B_x' = B_x = 0, \quad B_y' = \frac{B_y + v\dfrac{E_z}{c^2}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = 0, \quad B_z' = \frac{B_z - v\dfrac{E_y}{c^2}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = -3.75\times10^{-3}\mathrm{T}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{B}' = (-3.75\times10^{-3}\boldsymbol{k})\mathrm{T}$$

15-25 一电容器由两平行的长方形板组成，两板之间的距离为 2.0×10^{-2}m；板的东西方向长度为 0.2m，南北方向长度为 0.1m。若电容器接到 300V 的电源上充电后，断开电源，此时极板带有多少电荷？两板间的电场强度多大？在实验室中电容器是静止的，在相对于实验室以速率 $0.6c$ 向东运动的参考系中测量时，极板上带有多少电荷？板间的电场强度多大？若在向上以 $0.6c$ 速率运动的参考系测量，结果如何？

解 在实验室中电容器是静止的，故

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

极板上带的电量为

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 SV}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\times0.2\times0.1\times300}{2\times10^{-2}} = 2.66\times10^{-9}(\mathrm{C})$$

两板间的电场强度大小为

$$E = \frac{V}{d} = \frac{300}{2\times10^{-2}} = 1.5\times10^4(\mathrm{V\cdot m^{-1}}) \quad \text{（方向在竖直方向上）}$$

在相对实验室以 $v=0.6c$ 向东的参考系中，

$$Q' = Q = 2.66\times10^{-8}\mathrm{C}, \quad S' = \sqrt{1-(v^2/c^2)}S, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\therefore \quad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{E}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1.88\times10^4\mathrm{V\cdot m^{-1}} \quad \text{（方向仍竖直向上）}$$

在相对实验室以 $v=0.6c$ 向上的参考系中

$$Q' = Q, \quad \sigma' = \sigma$$

$$\therefore \quad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E = 1.5\times10^4\mathrm{V\cdot m^{-1}} \quad \text{（方向仍竖直方向上）}$$

说明：本题也可用电磁场的相对论性变换式直接代入求解。

15-26 一架喷气式飞机在地球磁场的垂直分量为 6×10^{-5}T（方向指向地面）的地方以 $v_0 = 278\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度朝正北方向飞行。求：

(1)飞行员测到的飞机外的电场为多大？

(2)飞机机翼上是否带电？

解 (1)选飞机为 S 系，地球为 S' 系。因为飞机中 $\boldsymbol{E}_0 = 0$，故

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_0 + (\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}$$

$$\therefore \quad E' = v_0 B = 278\times6\times10^{-5} = 1.67\times10^{-2}(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

(2)西边机翼带正电荷，东边机翼带负电荷。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

15-27 一质量 $m=1.7\times10^{-27}\text{kg}$ 的粒子带有电量 $q=1.6\times10^{-19}\text{C}$，在 $B=1.1\text{T}$ 的均匀磁场中运动；B 的方向沿着 z 轴正方向。当 $t=0$ 时，粒子位于坐标原点，并具有沿 x 轴正方向的初速度 $v_0=6.0\times10^5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。

(1)设计一个计算机程序来画出 $t=0$ 到 $t=6.5\times10^{-8}\text{s}$ 时间内粒子的位置及相应的速度，取时间间隔 $\Delta t=3\times10^{-11}\text{s}$；

(2)在计算精度内，粒子的速度大小是否为常量？若不是，减小时间间隔重新计算；

(3)计算粒子运动的轨道半径并与值 $\frac{mv}{Bq}$ 比较。

解 程序略。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第16章

物质中的磁场

【基本概念和规律】

1. 磁介质的分类

(1)顺磁质：$\boldsymbol{B}'$与$\boldsymbol{B}_0$相比很小，但与$\boldsymbol{B}_0$同向，故$\boldsymbol{B}>\boldsymbol{B}_0$；相对磁导率$\mu>1$，且是常数。

(2)抗磁质：$\boldsymbol{B}'$与$\boldsymbol{B}_0$相比很小，且与$\boldsymbol{B}_0$反向，故$\boldsymbol{B}<\boldsymbol{B}_0$；相对磁导率$\mu<1$，且是常数。

(3)铁磁质：$\boldsymbol{B}'$与$\boldsymbol{B}_0$相比很大，且与$\boldsymbol{B}_0$同向，故$\boldsymbol{B}\gg\boldsymbol{B}_0$；相对磁导率$\mu\gg1$，且是变数。

2. 磁场强度$\boldsymbol{H}$

磁场强度$\boldsymbol{H}$的定义式为$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$，式中$\boldsymbol{M}$为磁化强度。在各向同性的磁介质中同一点的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$的关系为$\boldsymbol{B}=\mu_0\mu\boldsymbol{H}$。

3. 磁介质中的安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{(L内)} I$$

4. 磁畴理论

铁磁性的现代理论。

【解题指导】

求解磁介质中的磁感应强度$\boldsymbol{B}$时，应先由磁介质中的安培环路定理$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{(L内)} I$求得磁场强度$\boldsymbol{H}$，再由$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$的关系$\boldsymbol{B}=\mu_0\mu\boldsymbol{H}$求磁感应强度$\boldsymbol{B}$。该定理在空气的情况下也可以使用，这时$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$的关系应为$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$。当然，该定理的适用条件同样是磁场分布具有对称性，否则数学上计算将十分麻烦。

【习题解答】

16-1 地球的地磁矩为$6.4\times10^{21}\mathrm{A\cdot m^2}$，如果用一绕地球赤道的单匝线圈来产生如此大的磁矩，问：

(1)该线圈中需通多大的电流？

(2)此装置产生的磁场能否正好抵消地面上空各点的地磁场？

(3)能否抵消地球表面处的地磁场？

解 (1)由$p_m=IS$得

$$I=\frac{p_m}{S}=\frac{p_m}{\pi R^2}=\frac{6.4\times10^{21}}{3.14\times(6370\times10^3)^2}=5.0\times10^7(\mathrm{A})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

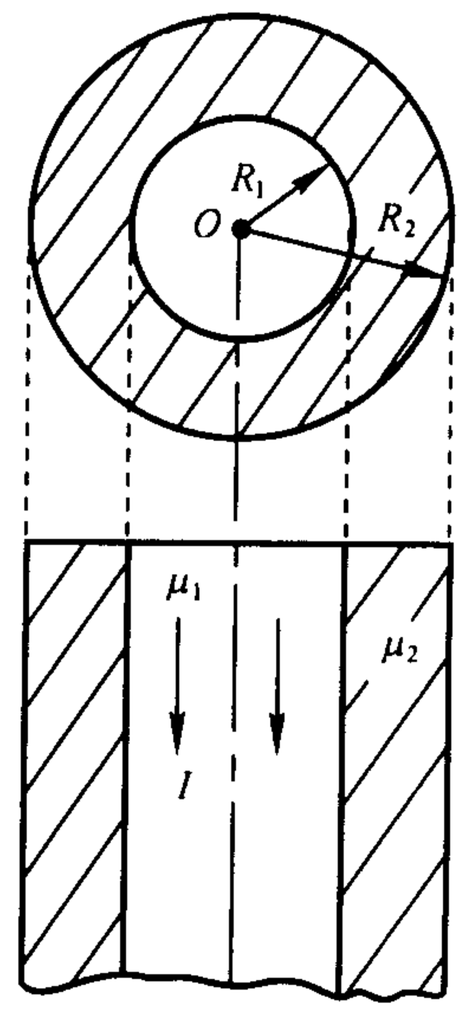
(2)因为该线圈绕地球赤道，故有可能抵消地面上空各点的地磁场。

(3)不能。

16-2 一根相对磁导率为 μ_1 的无限长直圆柱形铜导线的半径为 R_1，其上均匀地通过电流 I。铜导线外包一层相对磁导率为 μ_2 的圆筒形不导电的磁介质，如图所示。试求：

(1)磁介质内、外的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布；

(2)外层磁介质外表面上的面束缚电流密度。



习题 16-2 图

解 (1)由磁介质中的安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H\cdot 2\pi r = \sum I_{内}$$

当 $0<r<R_1$ 时，$\sum I_{内} = \dfrac{I}{\pi R_1^2}\cdot \pi r^2 = \dfrac{Ir^2}{R_1^2}$，

$\because\quad H_1 = \dfrac{Ir}{2\pi R_1^2}$，$\quad \therefore B_1 = \mu_0\mu_1 H_1 = \dfrac{\mu_0\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}$

当 $r>R_1$ 时，$\sum I_{内} = I$，

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

当 $R_1<r<R_2$ 时，

$$B_2 = \mu_0\mu_2 H_2 = \frac{\mu_0\mu_2 I}{2\pi r}$$

当 $r>R_2$ 时，

$$B_3 = \mu_0 H_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

由此可见，$\boldsymbol{H}$ 是连续变化的，$\boldsymbol{B}$ 在磁介质分界面 $r=R_1$ 和 $r=R_2$ 是跃变的，不连续的。

(2) 介质外表面的面束缚电流密度为

$$j_{mR_2} = M_2 = \left(\frac{B_{R_2}}{\mu_0} - H_{R_2}\right) = \frac{I(\mu_2-1)}{2\pi R_2} \quad (方向沿圆柱轴线方向)$$

16-3 有一铁环，平均周长为 0.3m，截面积为 $1.0\times10^{-4}\mathrm{m}^2$，其上均匀绕有 300 匝线圈。当每匝线圈内通过的电流为 0.032A 时，铁环内的磁通量为 2.0×10^{-6}Wb，试求：

(1)铁环内的磁场强度和磁化强度；

(2)面束缚电流密度；

(3)铁环的相对磁导率。

解 (1)由 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum\limits_{(L内)} I$

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{300\times 0.032}{0.3} = 32(\mathrm{A\cdot m^{-1}})$$

$$B = \frac{\Phi_B}{S} = \frac{2\times10^{-6}}{1.0\times10^{-4}} = 2\times10^{-2}(\mathrm{T})$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{2\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}} - 32 = 1.59\times10^{4}(\mathrm{A\cdot m^{-1}})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2) $$j_m = M = 1.59 \times 10^4 \mathrm{A \cdot m^{-1}}$$

(3) $$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{2 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 32} = 498$$

16-4 一个通电的空芯长直螺线管内部的磁感应强度为 6.5×10^{-4}T，当插入铁芯后，其内部的磁感应强度变为 1.4T，试求铁芯内部的磁场强度和相对磁导率。

解 磁场强度 H 仅与螺线管上的传导电流有关

$$H=\frac{B_0}{\mu_0}=\frac{6.5\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-7}}\approx517(\mathrm{A \cdot m^{-1}})$$

这也是铁芯内部的磁场强度，与介质无关，故

$$\mu=\frac{B}{\mu_0 H}=\frac{1.4}{4\pi\times10^{-7}\times517}=2155$$

16-5 一个铁原子的磁矩为 $1.8\times10^{-23}\mathrm{A \cdot m^2}$。设一根铁棒长为 0.05m，截面积为 $1.0\times10^{-4}\mathrm{m^2}$。当其磁化后，铁棒中所有铁原子的磁矩都整齐排列，此时其总磁矩为$7.57\mathrm{A \cdot m^2}$，试求：

(1)铁棒中的磁化强度；

(2)若要这根铁棒在 $B_0=1.5$T 的均匀外磁场中转到与磁场正交的位置，需要多大的转动力矩？

解 (1)由磁化强度的定义

$$M = \frac{|\sum \boldsymbol{p}_m|}{V} = \frac{7.57}{0.05 \times 1.0 \times 10^{-4}} = 1.51 \times 10^6(\mathrm{A \cdot m^{-1}})$$

(2) 所需克服的磁力矩

$$M_B = p_m B\sin90° = 7.57 \times 1.5 = 11.4(\mathrm{N \cdot m})$$

16-6 有一根均匀磁化的铁棒，其矫顽力 $H_c=4.0\times10^3\mathrm{A \cdot m^{-1}}$，现将它放入长为 0.12m、绕有 60 匝线圈的长直螺线管中退磁，问线圈中至少需通以多大的电流？

解 传导电流所产生的磁场强度在数值上必须 $H\geqslant H_c$ 才能退磁

$$H=\frac{NI}{L}=H_c$$

$$I=\frac{H_c L}{N}=\frac{4.0\times10^3\times0.12}{60}=8.0(\mathrm{A})$$

16-7 退火纯铁的起始磁化曲线如图所示。一长直螺线管用这种纯铁做芯，在该长直螺线管上的导线中通入 6.0A 的电流时，管内产生 1.2T 的磁场。如果抽出铁芯，要使管内产生同样的磁场，需要在导线中通入多大的电流？

解 由 B-H 关系曲线知，当 $B=1.2$T 时，$H=220\mathrm{A \cdot m^{-1}}$，螺线管内有铁芯时 $B=\mu_0\mu H$，故

$$\mu=\frac{B}{\mu_0 H}=\frac{1.2}{220\mu_0}$$

由螺线管内磁场公式，在有铁芯时 $B=\mu_0\mu nI_0$，无铁芯时 $B=\mu_0 nI$，因为在两种情况下，磁场相等，故可得

$$I=\mu I_0=\frac{1.2}{220\mu_0}I_0=\frac{1.2}{220\times4\pi\times10^{-7}}\times6=2.6\times10^4(\mathrm{A})$$

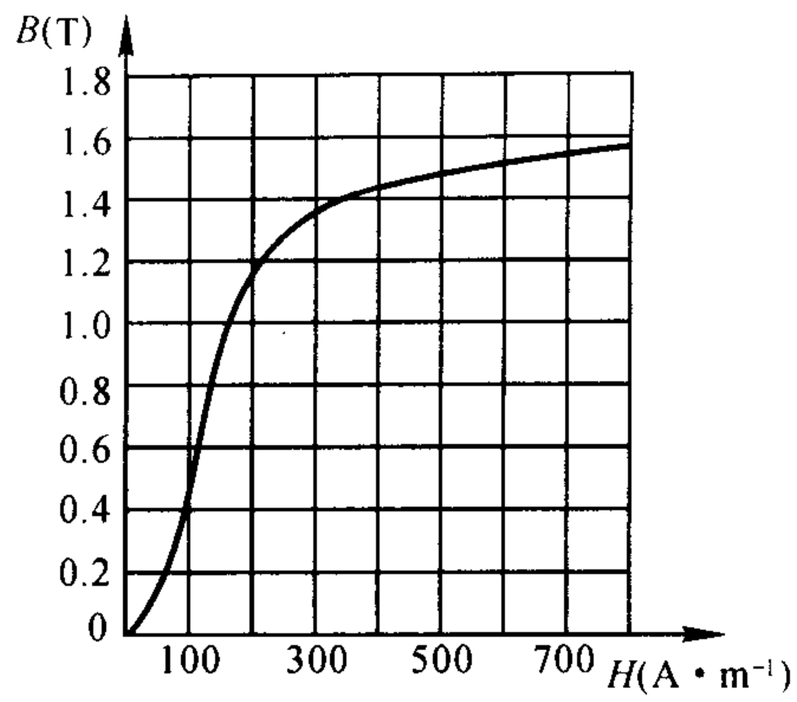
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

16-8 一个闭合的铁环平均周长为 0.45m，其上均匀密绕着 300 匝线圈。如果需要在该铁环内产生 0.9T 的磁感应强度。试求下列两种情况下线圈上需通过的电流：

(1)铁环材料为铸铁；

(2)铁环材料为硅钢片。

(已知铸铁在 $B=0.9\text{T}$ 时，$H_1=0.9\times10^4\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$；硅钢片在 $B=0.9\text{T}$ 时，$H_2=2.6\times10^2\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$)



习题 16-7 图

解 (1)由安培环路定理有

$$H_1=nI_1=\frac{N}{L}I_1,\quad I_1=\frac{LH_1}{N}=\frac{0.45\times9.0\times10^3}{300}=13.5\text{A}$$

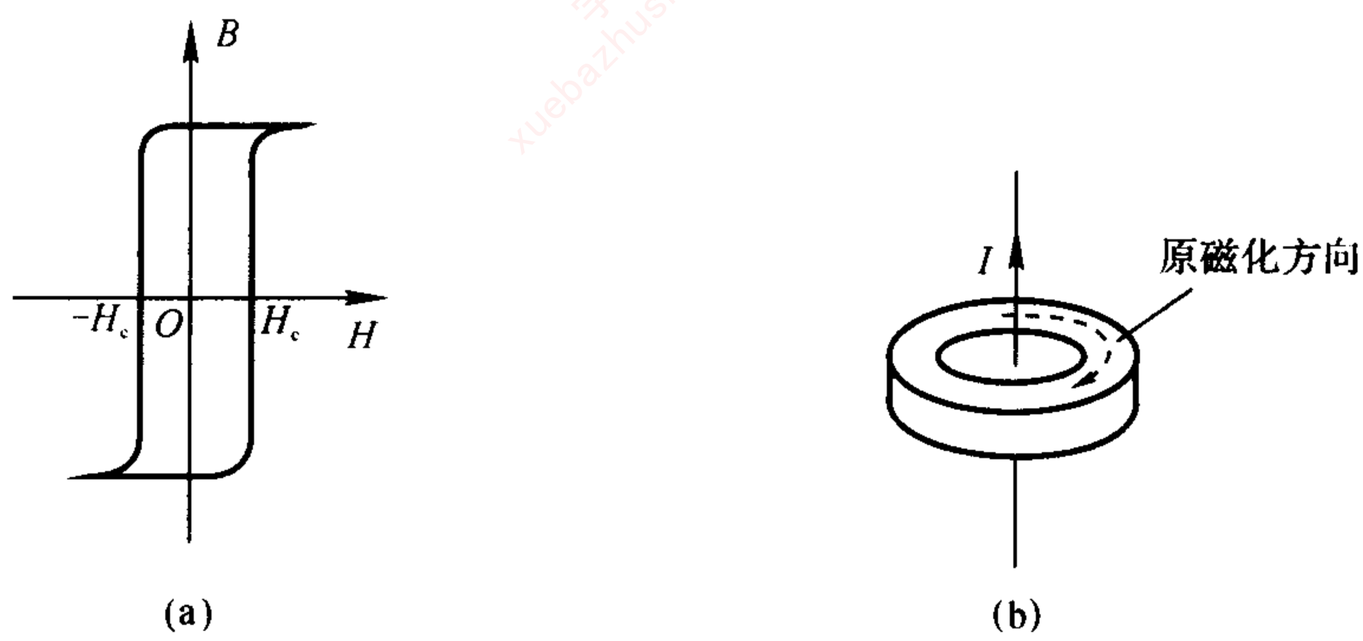
(2)同理

$$I_2=\frac{LH_2}{N}=\frac{0.45\times2.6\times10^2}{300}=0.39(\text{A})$$

16-9 铁氧体的磁滞回线接近矩形，如图(a)所示，铁氧体这种特性常被用来制造电子计算机存储元件的环形磁芯。这种环形磁芯外直径为 $8\times10^{-4}\text{m}$，内直径为 $5\times10^{-4}\text{m}$，高为 $3\times10^{-4}\text{m}$，其矫顽力 $H_c=\frac{500}{\pi}\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$，如图(b)所示。假设磁芯已被磁化，其中心轴处因通过线性电流 I 产生反向磁场，当反向磁场一旦超过矫顽力，其磁化方向就会反转。试求：

(1)当 I 多大时，磁芯中磁化方向开始反转？

(2)要使磁芯中从内到外的磁化方向全部反转，则 I 至少为多大？



习题 16-9 图

解 (1)由安培环路定理可知，线性电流产生的磁场

$$H=\frac{I}{2\pi r}$$

磁芯内直径处最先开始反转

$$H_c=\frac{I}{2\pi R_1},\quad I=2\pi R_1H_c=2\pi\times\frac{5\times10^{-4}}{2}\cdot\frac{500}{\pi}=0.25(\text{A})$$

(2)磁芯外直径处最后反转，此时电流强度为

$$I=2\pi R_2H_c=2\pi\times\frac{8.0\times10^{-4}}{2}\cdot\frac{500}{\pi}$$
$$=0.4(\text{A})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 17 章

电磁感应

【基本概念和规律】

1. 法拉第电磁感应定律和楞次定律

$$\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

2. 动生电动势

动生电动势是指导体在恒定磁场中运动时产生的感应电动势：

$$\mathscr{E}_{ab}=\int_a^b(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad \mathscr{E}_{ab}>0,\text{则 }V_a<V_b;\mathscr{E}_{ab}<0,\text{则 }V_a>V_b$$

3. 涡旋电场和感生电动势

由于磁场变化而产生的电场称为涡旋电场或称为感应电场。由涡旋电场产生的电动势称为感生电动势。

$$\mathscr{E}=\oint_L\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

在半径为 R 的无限长圆柱形内，沿轴线方向的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 随时间均匀变化时，在圆柱形内外产生的涡旋电场分别为

$$E_{旋}=-\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\qquad r\leqslant R;\qquad E_{旋}=-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\qquad r\geqslant R$$

式中 $-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$ 与 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 在方向上满足右手螺旋法则。

4. 自感和互感

这是电磁感应现象的特例，所以法拉第电磁感应定律完全适用。

(1)自感：

①自感系数 L： $L=\frac{\Psi}{I}$。

②自感电动势 $\mathscr{E}_L$： $\mathscr{E}_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$。

(2)互感：

①互感系数 M： $M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}$。

②互感电动势： $\mathscr{E}_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$，$\mathscr{E}_{12}=M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$，式中 Ψ_{21}(或 Ψ_{12})是回路 1(或回路 2)中电流 I_1(或 I_2)穿过回路 2(或回路 1)的磁通量。

5. LR 电路

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

电路接通时的电流： $I=\frac{\mathscr{E}}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$。

电路切断时的电流： $I=\frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$。

6. 磁场的能量

磁场的能量密度： $u_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu}=\frac{1}{2}\mu_0\mu H^2=\frac{1}{2}BH$。

磁场的能量： $U_{\mathrm{m}}=\int_V u_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\int_v \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu}\mathrm{d}V$。

自感为 L、通有电流为 I 的磁场能量： $U_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2$。

【解题指导】

● 用法拉第定律 $\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$ 计算感应电动势必须注意以下几点：

(1)当通过回路的磁通量不变时，整个回路的感应电动势等于零，但这并不一定表示每根导线上没有感应电动势，也可能只是这些感应电动势的代数和为零而已。

(2)应用公式 $\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$ 时，需注意：因为感应电动势等于磁通量对时间的瞬时变化率，一般情况下不能用 $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$ 代替 $\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$。只有在磁通量随时间作线性变化时才可以用 $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$ 代替 $\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$。

● 求动生电动势的普遍公式是 $\mathscr{E}_{ab}=\int_a^b(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，当导线在均匀磁场中运动速度不均匀时，必须先取线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，求出线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 产生的感应电动势 $\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，最后再积分求出整根导线的动生电动势。只有在导线以同一速度在均匀磁场中运动时才可以用中学中讲的 $\mathscr{E}=Blv$ 求解。判别动生电动势的方向是看导线中哪一端电势高，哪一端电势低。若 $\mathscr{E}_{ab}>0$，则 a 点(先到点)电势低，b 点(后到点)电势高；若 $\mathscr{E}_{ab}<0$，则 a 点电势高，b 点电势低。用动生电动势的公式时要熟练掌握矢量代数知识。

● 求动生电动势有时需要作辅助线，使之成为闭合回路，且闭合回路电动势为零，然后通过求辅助线的动生电动势来求出该导线的动生电动势。

● 求感生电动势或涡旋电场的普遍公式为

$$\mathscr{E}=\oint_L \boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=-S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

这里特别要注意的是面积 S 的确定。从数学上讲，S 是回路 L 所包围的面积。从物理上讲，确定 S 要看磁通量。因为 $\Phi_B=BS$，所以 S 应该取回路 L 中有磁场 B 的那部分面积(即有磁通量的部分)，至于回路 L 中不存在磁场 B 的那部分面积(即磁通量为零的部分)不应该计算在面积 S 中。这一点要特别注意。

● 涡旋电场是一个非保守力场。电势这个概念在涡旋电场中是毫无意义的。因此在涡旋电场中计算感生电动势 $\mathscr{E}=\oint\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时，不能问在涡旋电场中哪一点感生电动势电势高，哪一点电势低，因为完全无从谈起。我们只能说，回路中感生电动势的方向是顺时针方向还是逆时针方向。

● 计算有规则典型回路的自感系数 L 的方法：

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(1)用自感系数定义式 $L=\frac{\Psi}{I}$ 计算。

①首先假设回路通有电流 I，并求出电流产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分布；

②算出回路通过的磁通匝链 Ψ；

③最后根据定义式 $L=\frac{\Psi}{I}$，求出自感系数 L。

(2)用自感线圈的磁能公式 $U_m=\frac{1}{2}LI^2$ 计算。这里必须要事先已知磁能或用公式 $U_m=\int_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu}\mathrm{d}V$，求出磁能 U_m 后再计算自感系数 L。

● 计算互感系数 M 的方法：在没有铁磁质的情况下，可用公式 $M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}$（或 $\frac{\Psi_{12}}{I_2}$）求解，步骤如下：

(1)首先假设回路 1（或回路 2）通有电流 I_1（或电流 I_2），再求出电流 I_1（或 I_2）产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$（或 $\boldsymbol{B}_2$）的分布；

(2)再求出电流 I_1（或 I_2）所产生的穿过回路 2（或回路 1）的磁通匝链 Ψ_{21}（或 Ψ_{12}）；

(3)最后根据定义式 $M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}$（或 $\frac{\Psi_{12}}{I_2}$）求出互感系数 M。

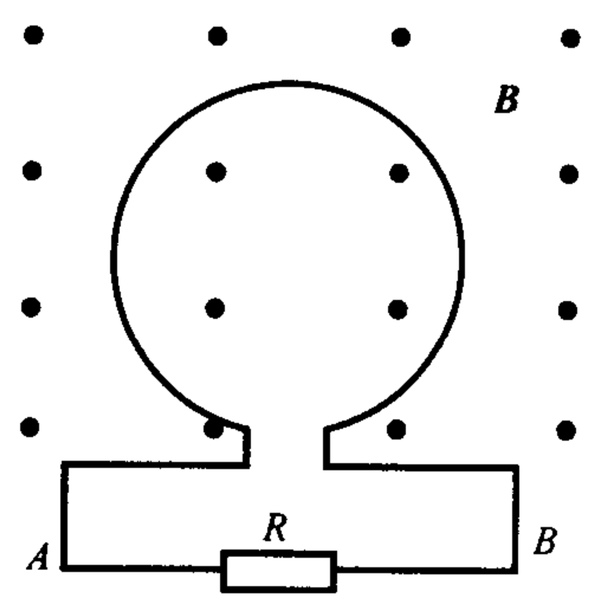
究竟选哪个回路作为产生磁感应强度的源，再算另一个回路的磁通量，要依据题知条件而定。

【习题解答】

17-1 如图所示，圆形回路放在一均匀磁场中，磁场方向垂直于线圈平面向外。设通过该回路的磁通量对时间的函数关系式为 $\Phi_B=6t^2+7t+1$(SI)，则当 $t=2$s 时，求：

(1)回路中感应电动势的大小；

(2)试说明电阻 R 上电流的方向。



习题 17-1 图

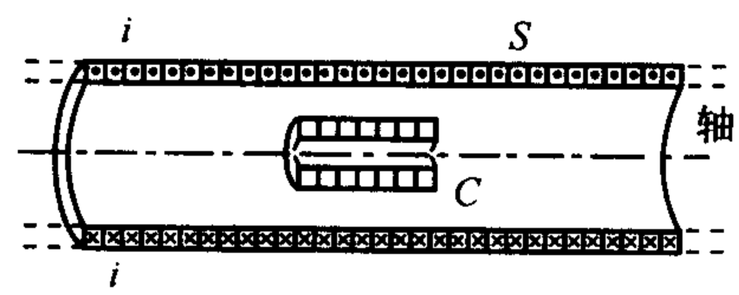
解 (1)回路中感应电动势大小为

$$\mathscr{E}=\left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right|=12t+7$$

当 $t=2$s 时，$\mathscr{E}=31$V

(2)由楞次定律可判断电阻 R 上的感应电流方向 $B\rightarrow A$。

17-2 如图所示，一长直螺线管每米长度上有线圈 2.2×10^5 匝。若每匝线圈上通有电流 $i=1.5$A；螺线管直径 $d=3.2\times10^{-2}$m，其中心处放有一个直径 $d_c=2.1\times10^{-2}$m 的密绕 130 匝的线圈 C。在 0.16s 内，长螺线管中的电流从零均匀地增加到 1.5A，试求长螺线管中的电流变化时，线圈 C 中产生的感应电动势多大？



习题 17-2 图

解 长直螺线管中的磁感应强度为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$B=\mu_0 ni=4\pi\times10^{-7}\times2.2\times10^5\times1.5=0.415(\mathrm{T})$$

通过线圈 C 的总磁通量为

$$\Phi_B=NBS=NB\frac{1}{4}\pi d_c^2=130\times0.145\times\frac{1}{4}\pi\times(2.1\times10^{-2})^2=1.87\times10^{-2}(\mathrm{Wb})$$

故线圈 C 的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}=-\frac{0-\Phi_B}{\Delta t}=\frac{1.87\times10^{-2}}{0.16}=0.117(\mathrm{V})=117(\mathrm{mV})$$

17-3 某型号喷气式飞机两机翼长为 47m。如果此飞机以 $960\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 的速度水平飞行，设飞机所处地磁场的竖直分量为 $6.0\times10^{-5}\mathrm{T}$，试求两翼尖之间的感应电动势多大？

解 飞机速度

$$v=\frac{960\times10^3}{3600}=267(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

两翼尖之间的感应电动势为

$$\mathscr{E}=Blv=6.0\times10^{-5}\times47\times267=0.753(\mathrm{V})$$

17-4 海洋工作者有时依靠地磁场产生的动生电动势，探测海洋中水的流动速率。假设在海洋某处地磁场的竖直分量为 $7.0\times10^{-5}\mathrm{T}$，两个电极垂直插入被测的相距 2.0m 的水流中，则当与两极相连的灵敏电压计指示出电压为 $7.0\times10^{-5}\mathrm{V}$ 时，水流速率为多少？

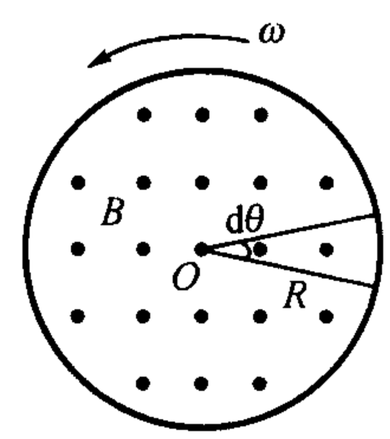
解 由动生电动势表示式

$$\mathscr{E}=Blv$$

则

$$v=\frac{\mathscr{E}}{Bl}=\frac{7.0\times10^{-5}}{7.0\times10^{-5}\times2.0}=0.5(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

17-5 法拉第圆盘发电机是一个磁场中转动的导体圆盘。设圆盘的半径为 R，它的轴线与均匀外磁场 B 平行，圆盘以角速度 ω 绕轴线转动。已知 $R=15\mathrm{cm}$，$B=0.60\mathrm{T}$，转速 $n=30\mathrm{rev\cdot s^{-1}}$，试计算盘边与盘心间的感应电动势。



解 17-5 图

解 如图所示，取面积元 $\mathrm{d}S=\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta$，圆盘旋转时角速度为 $\omega=2\pi n$。由法拉第定律，盘边与盘心 O 间的感应电动势为

$$\mathscr{E}=\left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right|=B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=B\frac{1}{2}R^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}BR^2\omega=\frac{1}{2}BR^2\cdot2\pi n=\pi nBR^2$$

$$=3.14\times30\times0.6\times(0.15)^2=1.3(\mathrm{V})$$

方向为盘心指向盘边。

17-6 如图所示，一边长为 0.05m、由铜线做成的正方形线圈在磁感应强度 $B=0.84\mathrm{T}$ 的均匀磁场中转动。线圈共有 10 匝，线圈绕中心轴的转速 $n=10\mathrm{rev\cdot s^{-1}}$，转轴与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，试求：

(1)从图示位置转过 30°时，线圈内的瞬时感应电动势。

(2)最大感应电动势为多少，这时线圈的位置如何？

(3)由图示位置开始，经过 10s 时线圈内的感应电动势。

解 (1)线圈任一时刻的磁通量为

$$\Phi_B=NBS\cos\theta=NBS\cos\omega t$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

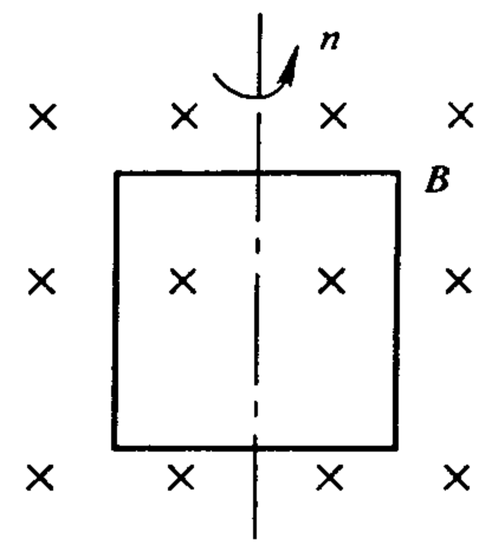
$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=NBS\omega\sin\omega t$$

当 $\theta=\omega t=30°$时，

$$\mathscr{E}=10\times0.84\times(0.05)^2\times2\pi\times10\times\sin30°=0.66(\mathrm{V})$$

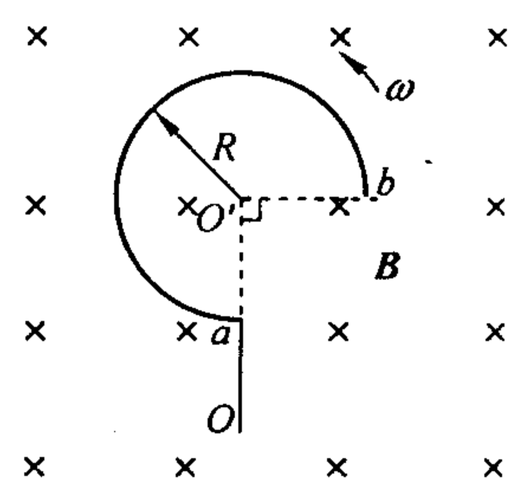
(2)$\mathscr{E}_{\max}=NBS\omega=1.32\mathrm{V}$，$\theta=\omega t=90°$，即线圈平面与 $\boldsymbol{B}$ 平行。

(3)$t=10\mathrm{s}$ 时，　$\theta=\omega t=200\pi$，　$\mathscr{E}=1.32\sin200\pi=0$。



习题 17-6 图

17-7　一导线被弯成如图所示的形状，放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，$\overset{\frown}{ab}$为半径为 R 的 3/4 圆弧，$\overline{Oa}=R$，若此导线以角速度 ω 绕通过 O 点并与磁场平行的轴逆时针匀速转动，求其中的动生电动势，方向如何？



习题 17-7 图

解　作辅助线 Ob，由于闭合回路 $OabO$ 在转动过程中磁通量不变，所以总电动势为零，因此有

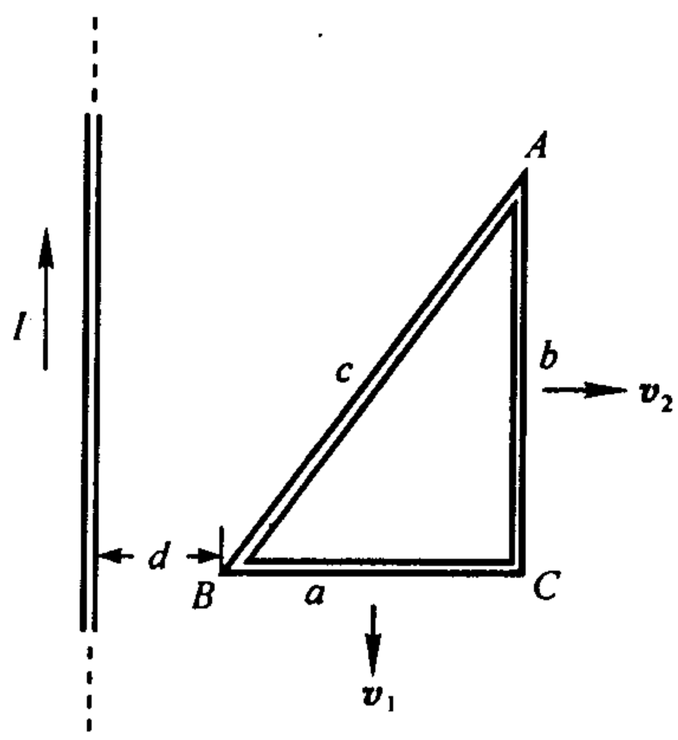
$$\mathscr{E}_{\overset{\frown}{Oab}}=\mathscr{E}_{\overline{Ob}}=-\frac{1}{2}B\omega(\overline{Ob})^2=-\frac{5}{2}B\omega R^2$$

方向从 $b\to a\to O$，即 O 点电势高。

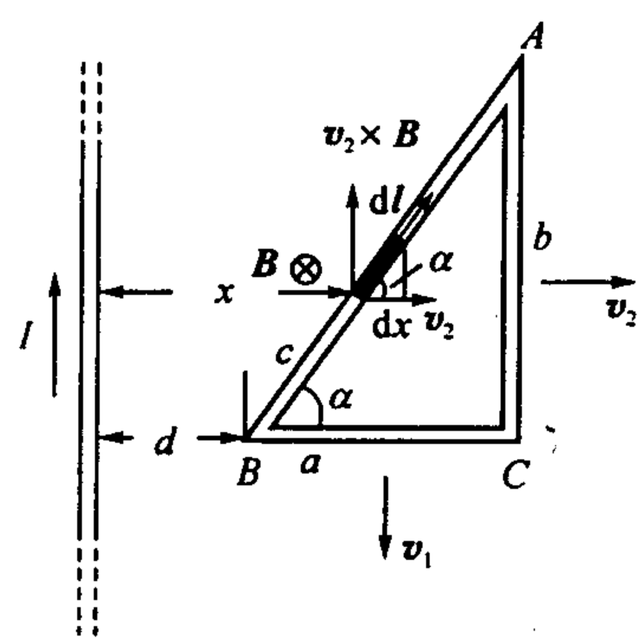
17-8　如图所示，一恒定电流为 I 的长直导线与一直角三角形线圈 ABC 共面，其 AC 边与长直导线平行，其长为 b。初始时，B 点离长直导线的距离为 d，BC 边长为 a。求 t 时刻下列情况中线圈的感应电动势：

(1)线圈以$\boldsymbol{v}_1$平行于导线向下运动；

(2)线圈以$\boldsymbol{v}_2$垂直导线向右运动。



习题 17-8 图



解 17-8 图

解　(1)线圈以 v_1 平行导线向下运动时，磁通量不变，故 $\mathscr{E}_1=0$

(2)当线圈的 v_2 垂直导线向右运动时，线圈电动势等于每条导线电动势的代数和，即

$$\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_{BA}+\mathscr{E}_{AC}+\mathscr{E}_{CB}$$

其中

$$\mathscr{E}_{BA}=\int_B^A(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_B^A v_2B\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\mathrm{d}l$$

$$=\int_{d+v_2t}^{a+d+v_2t}\frac{\mu_0I}{2\pi x}v_2\sin\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}=\frac{\mu_0Iv_2b}{2\pi a}\ln\frac{a+d+v_2t}{d+v_2t}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\mathscr{E}_{AC}=-Bbv_2=-\frac{\mu_0 Ibv_2}{2\pi(a+d+v_2t)}$$

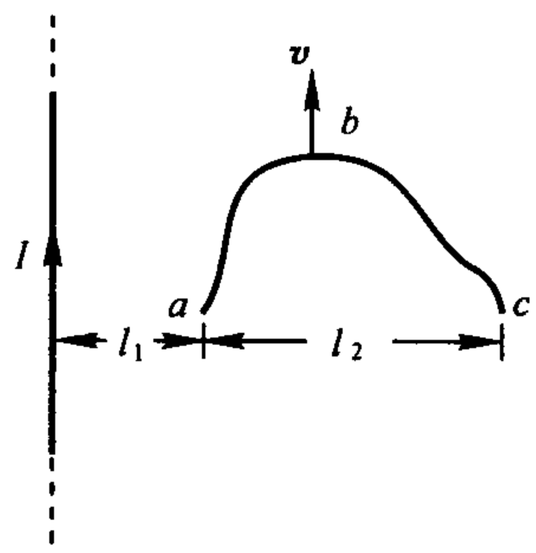
$$\mathscr{E}_{CB}=\int_C^B(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_C^B v_2B\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}l=0$$

线圈的感应电动势

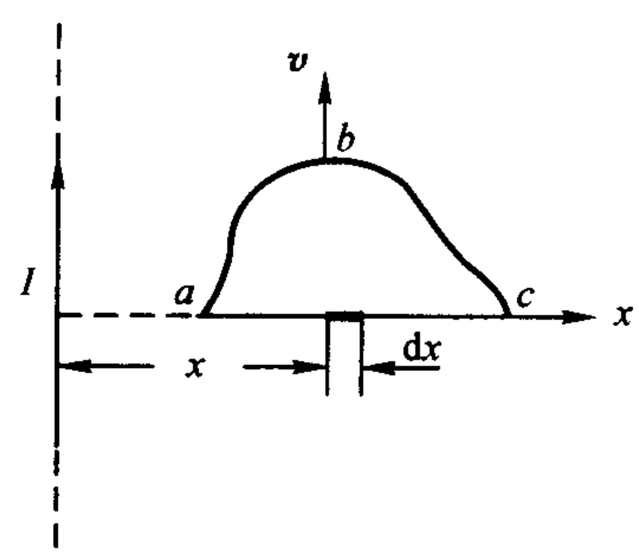
$$\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_{BA}+\mathscr{E}_{AC}+\mathscr{E}_{CB}=\frac{\mu_0 Iv_2b}{2\pi a}\left(\ln\frac{a+d+v_2t}{d+v_2t}-\frac{a}{a+d+v_2t}\right)$$

方向为顺时针方向。

17-9 如图所示，一无限长直导线中通有电流 I。在其右侧，有一根刚性导线 abc 以速度 v 平行于长直导线作匀速运动。若导线 abc 的近端离长直导线的距离为 l_1，求导线 abc 中的动生电动势。



习题 17-9 图



解 17-9 图

解 作连接$\overline{ac}$的辅助线，并以此为 x 轴建立坐标系，闭合回路 $abca$ 在平行于长直导线的运动中，其磁通量不变，故闭合回路总感应电动势为零，也即

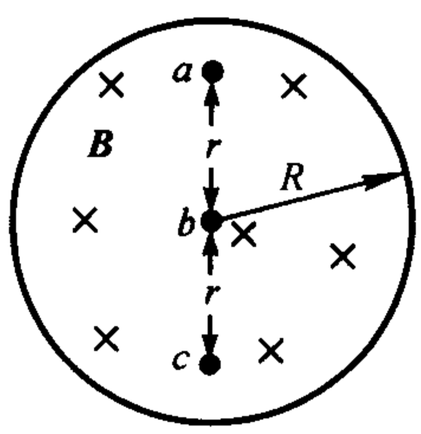
$$\mathscr{E}_{abc}=\mathscr{E}_{\overline{ac}}$$

在$\overline{ac}$上任取一线元 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x$ 处的 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$，由

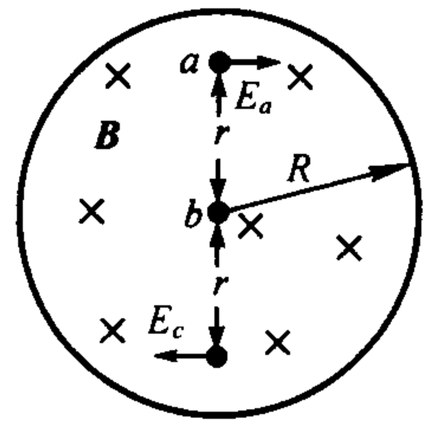
$$\mathrm{d}\mathscr{E}_{\overline{ac}}=-Bv\mathrm{d}x,\quad\therefore\quad\mathscr{E}_{\overline{ac}}=\int_{l_1}^{l_1+l_2}-\frac{v\mu_0 I}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{l_1+l_2}{l_1}$$

这也是导线 abc 中的动生电势。方向为 $c\to a$。

17-10 如图所示，一个限制在半径为 R 的圆柱体内的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，以 $0.01\mathrm{T}\cdot\mathrm{s}^{-1}$的恒定速率减少，试计算在磁场中 a,b,c 各点处的电场。（设 $r=0.05\mathrm{m}$）



习题 17-10 图



解 17-10 图

解 由 $\mathscr{E}=\oint_L\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

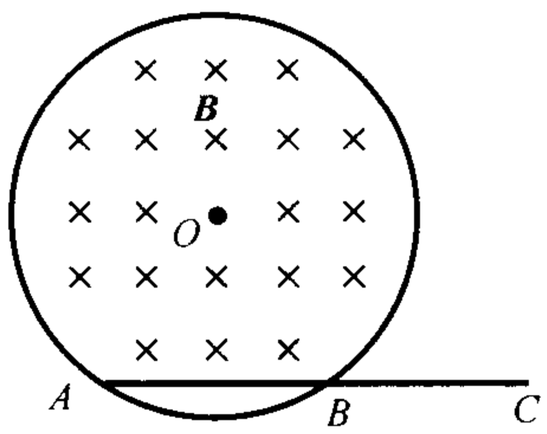
当 $r<R$ 时

$$2\pi r\cdot E_{旋}=-\pi r^2\cdot\frac{dB}{dt},\quad\therefore\quad E_{旋}=-\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}(负号表示方向)$$

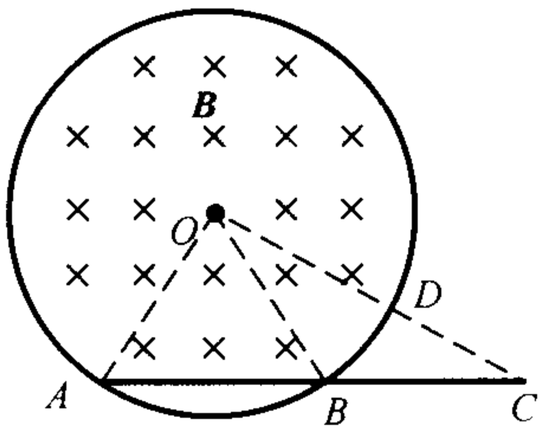
$$\therefore\quad E_{旋b}=0$$

$$E_{旋a}=E_{旋c}=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}=\frac{0.05}{2}\times0.01=2.5\times10^{-4}(V\cdot m^{-1})(方向如图所示)$$

17-11 在上题所述的磁场中放置长为 $2R$ 的金属棒，如图所示。若 $AB=BC=R$，设 $R=0.1m$，求棒中的感生电动势。



习题 17-11 图



解 17-11 图

解 作连接 OA、OB、OC 的辅助线，由于涡旋电场方向始终为圆周切线方向，故在半径 OA 及半径延长线 OC 上不产生感生电动势，因此

$$\mathscr{E}_{CBA}=\mathscr{E}_{\triangle AOC}$$

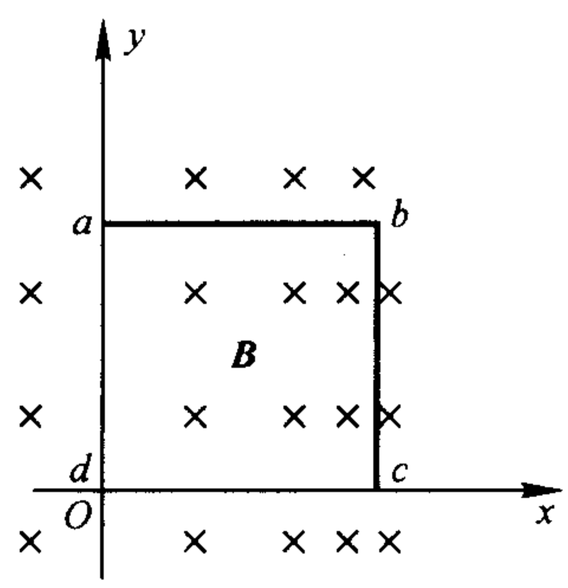
在△AOC 中有磁通量的面积为△AOB 和扇形 BOD，

$$S=\frac{1}{2}R\frac{\sqrt{3}}{2}R+\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}\pi R^2=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\pi R^2}{12}$$

因为 $\Phi_B=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}$

$$\mathscr{E}_{CBA}=\mathscr{E}_{\triangle AOC}=-S\frac{dB}{dt}=-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\pi}{12}R^2\right)\cdot\frac{dB}{dt}=6.95\times10^{-5}(V)(方向由\ C\to B\to A)$$

17-12 一非均匀磁场方向垂直纸面向里。在如图所示的坐标系中，其磁感应强度的变化规律为 $B=4t^2x$(SI)。若在磁场中放置一边长为 $2\times10^{-3}m$ 的正方形线框 $abcd$，d 与原点 O 重合，试求当 $t=0.25s$ 时，线框中感应电动势的大小和方向。



习题 17-12 图

解 先计算正方形线框任一时刻的磁通量，由于 $B=4t^2x$，故在正方形中取平行 y 轴的小长条 $dS=adx$

$$d\Phi_B=BdS=4t^2axdx$$

$$\Phi_{B(t)}=\int_0^a4t^2axdx=2a^3t^2$$

正方形线框中任一时刻的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi_{B(t)}}{dt}=-4a^3t$$

当 $t=0.25s$ 时，$\mathscr{E}=-8\times10^{-9}V$ （负号代表方向与题设方向相反，为逆时针）

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

17-13 在交变磁场中有一半径为 r 的铝环，磁场的方向与环面垂直，磁感应强度 $B=B_m\cos\omega t$。若铝环的电阻为 R，忽略涡流产生的磁场。求铝环中产生的涡流以及时刻 t 涡流的电功率。

解 穿过铝环的磁通量为

$$\Phi_B=\pi r^2B=\pi r^2B_m\cos\omega t$$

相应的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=\pi r^2\omega B_m\sin\omega t$$

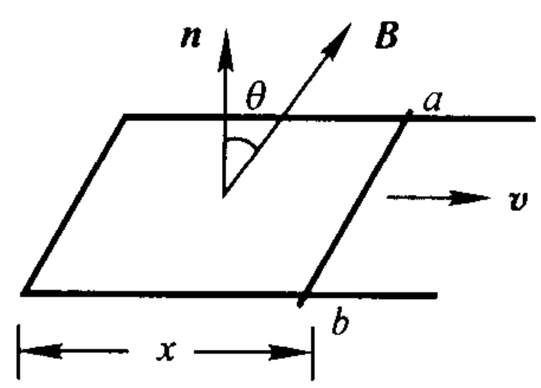
铝环中的涡流为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{\pi r^2\omega B_m}{R}\sin\omega t$$

电功率

$$P=I\mathscr{E}=\frac{\pi^2r^4\omega^2B_m^2}{R}\sin^2\omega t$$

17-14 一均匀磁场的磁感应强度 $B=kt(k>0$，为常量)；一导线回路放置在该磁场中，导线回路的法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成 60°角，如图所示。设金属杆 ab 长为 l，且以速率 v 向右滑动。若 $t=0$ 时，$x=0$，求该导线回路任意时刻感应电动势的大小和方向。



习题 17-14 图

解 任一时刻 $x=vt$，穿过回路所包围曲面的磁通量为

$$\Phi_B=\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=Blx\cos60^\circ=\frac{1}{2}kxlt=\frac{1}{2}lvkt^2$$

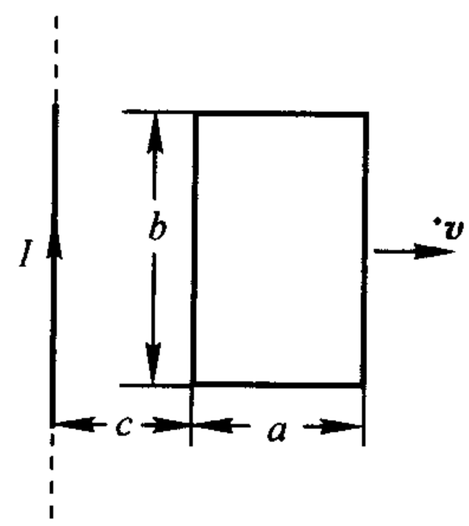
感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-lvkt=-klx\text{（负号表示与设定方向相反，为顺时针）}$$

17-15 如图所示，真空中的长直导线和矩形线圈在同一平面内。

(1)当长直导线中通以电流 I，线圈以速度 $\boldsymbol{v}$ 向右运动时，求图示位置线圈中的感应电动势；

(2)若线圈在图示位置不动，但长直导线中通有电流 $i=I_0e^{-\alpha t}$ (I_0，α 为正常量)时，求线圈中的感应电动势。



习题 17-15 图

解 (1)当线圈运动到图示位置瞬间，线圈中的感应电动势为

$$\mathscr{E}=B_1bv-B_2bv=\frac{\mu_0Ibv}{2\pi c}-\frac{\mu_0Ibv}{2\pi(a+c)}=\frac{\mu_0Iabv}{2\pi(a+c)c}\text{（方向为顺时针）}$$

(2)若线圈不动，则线圈中的磁通量为

$$\Phi_B=\int_c^{a+c}\frac{\mu_0i}{2\pi x}\cdot bdx=\int_c^{a+c}\frac{\mu_0ib}{2\pi}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0ib}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}$$

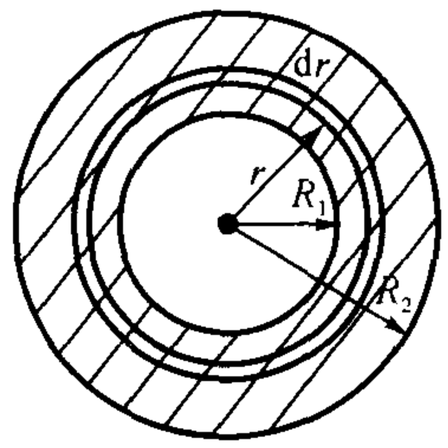
$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{\mu_0b}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}\cdot I_0(-\alpha)e^{-\alpha t}=\frac{\mu_0b\alpha I_0e^{-\alpha t}}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}=\frac{\mu_0b\alpha i}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}\quad\text{（方向为顺时针）}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

17-16 一个同轴电缆长为 l，内、外圆筒半径分别为 R_1 和 R_2，中间充以相对磁导率为 μ 的磁介质，试用磁场能量的方法求其单位长度上的自感系数。

解 其截面如图所示，设在内、外圆筒上分别通上大小相等、方向相反的电流 I，则在距轴线距离为 r 处的磁感应强为

$$B=\frac{\mu_0\mu I}{2\pi r}$$



解 17-16 图

在半径为 r，宽度为 $\mathrm{d}r$，长为 l 的圆筒体积内的磁场能量为

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{m}}=u_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu}\mathrm{d}V=\frac{1}{2\mu_0\mu}\left(\frac{\mu_0\mu I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r l\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\mu I^2}{4\pi r}l\mathrm{d}r$$

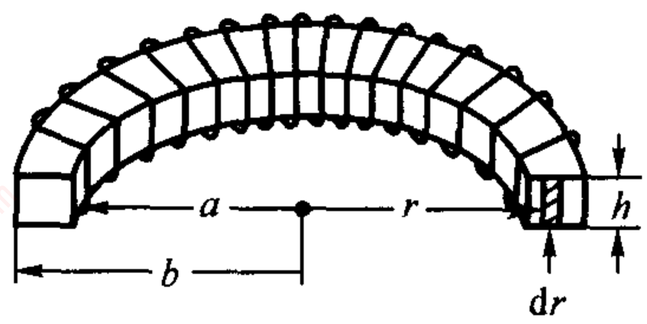
在长为 l 的同轴电缆中的总磁能为

$$U_{\mathrm{m}}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\mu I^2 l}{4\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\because\quad U_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2,\quad L=\frac{\mu_0\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\therefore\quad L'=\frac{L}{l}=\frac{\mu_0\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\text{（单位长度上的自感系数）}$$

17-17 如图所示，横截面为矩形的环形螺线管，共绕有 1000 匝，内半径 $a=0.05\mathrm{m}$，外半径 $b=0.10\mathrm{m}$，厚度 $h=0.01\mathrm{m}$，求其自感系数。



习题 17-17 图

解 环线螺线管内磁场可由安培环路定理求得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0 NI$$

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

如题图所示，取面积元 $\mathrm{d}S=h\mathrm{d}r$，磁通量为

$$\Phi_B=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_a^b\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}h\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

由自感系数定义式得

$$L=\frac{N\Phi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=1.4\times10^{-3}\mathrm{H}$$

17-18 有一半径为 0.02m、长 0.30m 的螺线管，上面均匀密绕有 1200 匝线圈，线圈内为空气。问：

(1)这螺线管的自感多大？

(2)如果在螺线管中的电流以 $3.0\times10^2\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 的速率改变，则在该线圈中产生的自感电动势多大？

解 (1)设螺线管内通有电流 I，则管内磁应强度为 $B=\mu nI=\mu_0\frac{N}{L}I$，通过螺线管的磁通匝链为 $\Psi=N\Phi_B=NBS=\mu_0\frac{N^2}{L}SI$，则自感系数为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

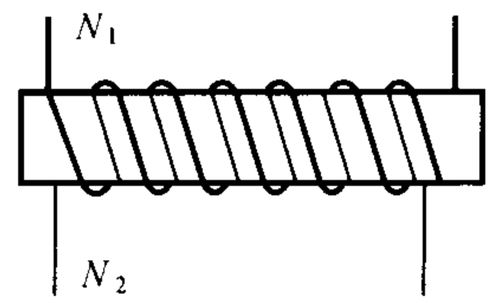
$$L=\frac{\Psi}{I}=\mu_0\frac{N^2}{L}S=\mu_0\frac{N^2}{L}\cdot\pi R^2=4\pi\times10^{-7}\frac{(1200)^2}{0.3}\cdot\pi(0.02)^2=7.6\times10^{-3}(\mathrm{H})$$

(2) $$\mathscr{E}_L=\left|L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|=7.6\times10^{-3}\times3\times10^2=2.3(\mathrm{V})$$

17-19 两个长度均为 l、横截面积均为 S 的同轴长直螺线管，匝数分别为 N_1 和 N_2，如图所示绕制。若管内充满相对磁导率为 μ 的磁介质，求：

(1)两线圈之间的互感系数；

(2)两线圈自感系数与互感系数的关系。



习题 17-19 图

解 (1)设在匝数为 N_1 的线圈中通上电流 I，则

$$B=\frac{\mu_0\mu N_1 I}{l}$$

在匝数为 N_2 的线圈中的磁通量为

$$N_2\Phi_M=N_2BS=\frac{\mu_0\mu N_1N_2SI}{l}$$

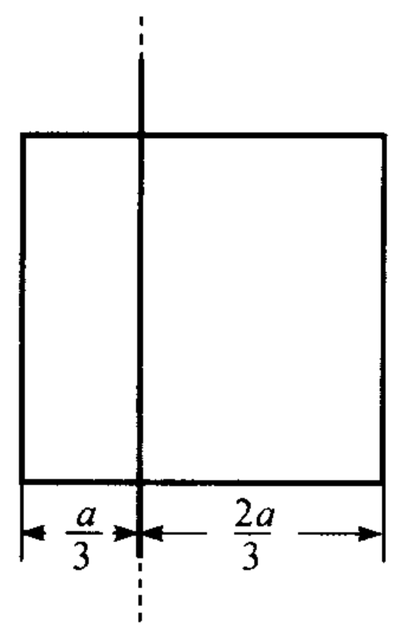
所以互感系数为

$$M=\frac{N_2\Phi_M}{I}=\frac{\mu_0\mu N_1N_2S}{l}$$

(2)已知两线圈的自感系数为 $L_1=\frac{\mu_0\mu N_1^2}{l}S$，$L_2=\frac{\mu_0\mu N_2^2}{l}S$，故有

$$M=\sqrt{L_1L_2}$$

17-20 一无限长的直导线和一正方形线圈按如图所示的位置放置(导线和线圈接触处绝缘)，求线圈和导线间的互感系数。



习题 17-20 图

解 设直导线上通以电流 I，则通过正方形线圈中任一面元 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}x$ 的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_B=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}a\mathrm{d}x$$

由于正方形线圈在导线左右两侧的磁通量部分抵消，故只需计算导线右侧 $\frac{a}{3}$ 到 $\frac{2a}{3}$ 的磁通量，它就是通过整个正方形线圈的净磁通量

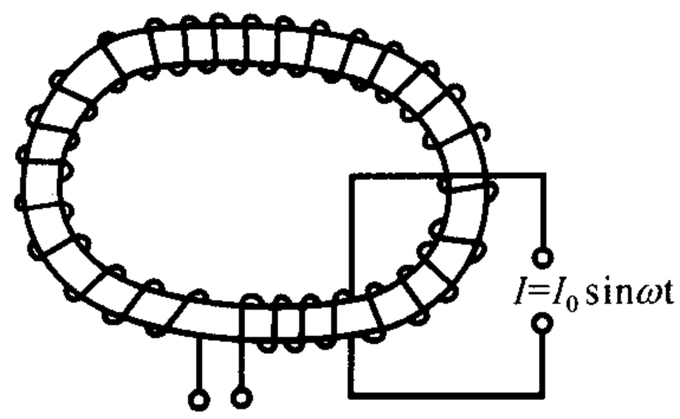
$$\Phi_B=\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mu_0 aI}{2\pi}\ln2$$

所以互感系数为

$$M=\frac{\Phi_B}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln2$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

17-21 截面积为 S、单位长度上匝数为 n 的螺绕环上套有一个边长为 l 的正方形线圈，如图所示。今在正方形线圈中通以交变电流 $I=I_0\sin\omega t$，试求螺绕环中感应电动势的大小。



习题 17-21 图

解 先求互感系数 M。假设在螺绕环的线圈中通以电流 I，则螺绕环中的磁感应强度为 $B=\mu_0 nI$，由此在正方形线圈中产生的磁通量为

$$\Phi_B=BS,\quad \therefore\quad M=\frac{\Phi_B}{I}=\frac{\mu_0 nIS}{I}=\mu_0 nS$$

故在正方形线圈中通上交变电流后，在螺线中产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\mu_0 nSI_0\omega\cos\omega t$$

17-22 把一个自感系数 $L=2\mathrm{H}$、电阻 $R=10\Omega$ 的线圈接到电动势 $\mathscr{E}=100\mathrm{V}$、内阻可忽略的电池上，求：

(1)电流达到最大值时，线圈中所储存的磁场能量 $U_{\mathrm{m,max}}$；

(2)从接通电路作为计时起点，要使所储存的磁场能量达到 $U_{\mathrm{m,max}}$ 的一半，需经过多长时间？

解 (1)线圈上的电流随时间变化的规律为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}})$$

当 $I_{\max}=\frac{\mathscr{E}}{R}$ 时，线圈中储藏的磁场能量为

$$U_{\mathrm{m,max}}=\frac{1}{2}LI_{\max}^2=\frac{1}{2}L\left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)^2=\frac{1}{2}\times2\times\left(\frac{100}{10}\right)^2=100(\mathrm{J})$$

(2)由题意

$$\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{4}LI_{\max}^2,\quad I=\frac{\sqrt{2}}{2}I_{\max}\quad 所以$$

$$(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad t=-\frac{L}{R}\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.246(\mathrm{s})$$

17-23 在一 LR 串联电路中，电流在 5.0s 内达到稳定值的 $\frac{1}{3}$。试求：

(1)此电路的时间常量 τ；

(2)要使该电路中的电流达到与稳定值仅差 0.1%，需经过几个“时间常量”的时间？

解 (1)由 LR 电路电流增长公式得

$$I=I_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)=\frac{1}{3}I_0$$

化简后得

$$\tau=-\frac{t}{\ln(2/3)}=12.3(\mathrm{s})$$

(2)由公式 $I=I_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ 得

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$1-e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{I}{I_0}=1-0.001$$

化简后得所需时间为

$$t=-\tau\ln 0.001=6.9\tau$$

17-24 (1)地磁场的磁感应强度 $B=5.0\times10^{-5}$T,试求它的磁场能量密度为多大?

(2)假设在比地球半径小得多的距离中,磁感应强度较为恒定,并且忽略地磁极附近的磁场变化,试问从地球表面到表面上空 16km 之间的球壳中贮藏了多大的磁场能量?($R_{地}=6\ 370$km)

解 (1) $$u_m=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{(5\times10^{-5})^2}{2\times4\pi\times10^{-7}}=1.0\times10^{-3}(\mathrm{J\cdot m^{-3}})$$

(2)近似认为在此范围 u_m 为恒值,则

$$U_m=4\pi R^2hu_m=4\pi\times(6.37\times10^6)\times16\times10^3\times1\times10^{-3}=8.16\times10^{15}(\mathrm{J})$$

17-25 利用高磁导率的铁氧体材料(相对磁导率 $\mu=400$),可在实验室中产生 $B=0.5$T的强磁场,试求:

(1)该磁场的能量密度 u_m;

(2)若要产生能量密度等于该值的电场,则电场强度 E 应为多大?这在实验上容易做到吗?

解 (1)$$u_m=\frac{B^2}{2\mu_0\mu}=\frac{(0.5)^2}{2\times4\pi\times10^{-7}\times400}=2.5\times10^2(\mathrm{J\cdot m^{-3}})$$

(2)$$u_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=u_m,\quad E=\sqrt{\frac{2u_m}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{2\times2.5\times10^2}{8.85\times10^{-12}}}=7.5\times10^6(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

显然,如此强的电场在实验上是很难实现的。

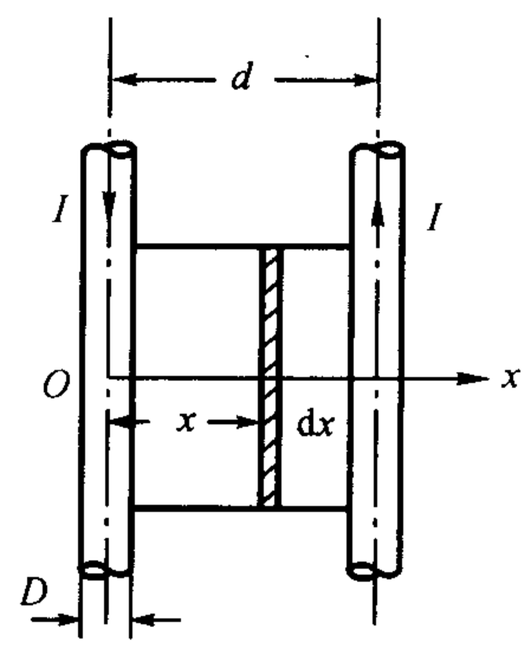
17-26 两根无限长平行直导线构成一电流回路,导线直径 $D=1$mm,两导线中心相距 $d=1.0$m,导线中电流 $I=1.0$A。试求导线单位长度上储存的磁场能量。(忽略导线内部的能量。)

解 建立如图所示的坐标系,在长为 l 的范围取一小面元 $\mathrm{d}S=l\mathrm{d}x$,x 处的磁感应强度为 $B=\frac{\mu_0I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)$,其磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_B=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\therefore\quad \Phi_B=\int_{\frac{D}{2}}^{d-\frac{D}{2}}\frac{\mu_0I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)l\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0Il}{2\pi}\ln\frac{d-D/2}{D/2}\times2=\frac{\mu_0Il}{\pi}\ln\frac{d-D/2}{D/2}$$



解 17-26 图

单位长度的自感系数为

$$L'=\frac{\Phi_B}{Il}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-D/2}{D/2}$$

单位长度的磁场能量为

$$U_m'=\frac{1}{2}L'I^2=\frac{\mu_0I^2}{2\pi}\ln\frac{d-D/2}{D/2}=\frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi}\ln\frac{1-10^{-3}/2}{10^{-3}/2}$$

$$=2\times10^{-7}\ln2000=1.52\times10^{-6}(\mathrm{J\cdot m^{-1}})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 18 章

麦克斯韦方程·电磁波

【基本概念和规律】

1. 位移电流

通过电场中某一截面的位移电流 I_D 等于该截面电位移通量随时间的变化率，即

$$I_D=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

位移电流密度：

$$\boldsymbol{j}_D=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}$$

2. 麦克斯韦方程

(1) $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{(S内)} q_i$　　电场的高斯定理

(2) $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$　　磁场的高斯定理

(3) $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$　　法拉第电磁感应定律

(4) $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{I}+\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$　　普遍的安培环路定理

3. 电磁波

(1)电磁波的产生：LC 电路是电磁振荡的振源。

(2)电磁波的发射条件：频率必须特别高；电路必须开放。

(3)电磁波的传播：一是变化的磁场激发涡旋电场，二是变化的电场激发涡旋磁场。

(4)电磁波的能量：电磁波的能量密度矢量称为玻印廷矢量，数学表达式为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$。

【解题指导】

● 位移电流的定义式 $I_D=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$，凡是有随时间变化的电场的地方，都会有位移电流。因此，不论在真空中、介质中，或是导体中，都可以产生位移电流。通常在导体中位移电流可以忽略不计。当导体中通以高频电流时，位移电流就不能忽略。

● 对于平行板电容器，若极板间有变化的电场，则在极板之间的有限范围内，会产生位移电流，其磁效应和传导电流的磁效应相同，会在位移电流内外空间产生磁场，计算时要注意。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【习题解答】

18-1 在一个 $C=1\mu F$ 的平行板电容器的两极板上，加一频率为 50Hz、峰值为 1.74×10^5V 的交变电压，试计算极板间位移电流的最大值。（忽略边缘效应）

解 设板间电压为 V，两极板间的电通量为

$$\Phi_D=DS=\sigma S=Q=CV$$

$$I_D=\frac{d\Phi_D}{dt}=C\frac{dV}{dt}=-C\omega V_m\sin\omega t$$

这里设交变电压为 $V=V_m\cos\omega t$，

$$\therefore\quad I_{D,max}=C\omega V_m=C2\pi\nu V_m=10^{-6}\times2\pi\times50\times1.74\times10^5=54.7(A)$$

18-2 试证明平行板电容器的位移电流可写为（忽略边缘效应）：

$$I_D=C\frac{dV}{dt}$$

式中 C 是电容器的电容，V 是两极板间的电势差。

证明 根据位移电流的定义有

$$I_D=\frac{d\Phi_D}{dt}=\frac{d(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{S})}{dt}=\frac{d(\sigma S)}{dt}=\frac{dQ}{dt}$$

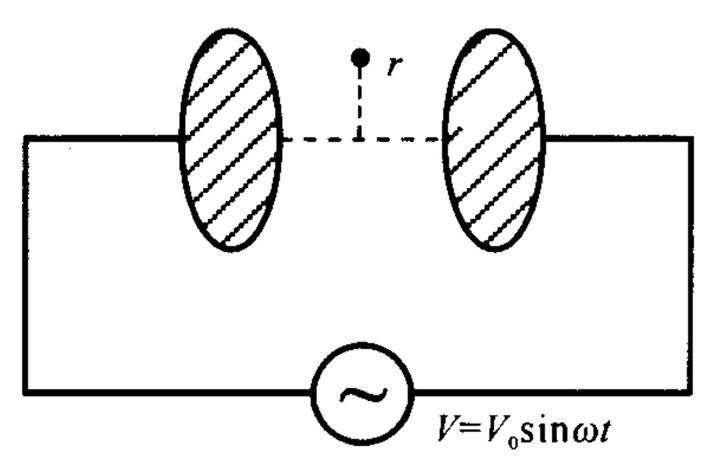
而平行板上 $Q=CV$，所以

$$I_D=\frac{dQ}{dt}=C\frac{dV}{dt}$$

18-3 如图所示，一平板电容器由两圆形极板组成，极板面积为 A，极板间距为 d，极板外部引线与一电压 $V=V_0\sin\omega t$ 的交流电源连接。试求：

(1)穿过电容器的位移电流大小；

(2)在电容器中距轴为 r 处的磁感应强度大小。



习题 18-3 图

解

(1) $$I_D=\frac{d\Phi_D}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0\frac{V_0\sin\omega t}{d}A\right)=\frac{A\varepsilon_0V_0\omega}{d}\cos\omega t$$

(2) $$\because\quad\oint_L\boldsymbol{H}_r\cdot d\boldsymbol{l}=I_D',\quad\therefore\quad H_r\cdot2\pi r=I_D',\quad H_r=\frac{I_D'}{2\pi r}$$

I_D' 为回路 L 包围的位移电流，因

$$j_D=\frac{dD}{dt}=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}=\frac{\varepsilon_0}{d}\frac{dV}{dt}=\frac{\varepsilon_0\omega V_0}{d}\cos\omega t$$

$$I_D'=\pi r^2j_D,\quad H_r=\frac{\varepsilon_0V_0\omega r\cos\omega t}{2d}$$

$$\therefore\quad B_r=\mu_0H_r=\frac{\varepsilon_0\mu_0V_0\omega r}{2d}\cos\omega t$$

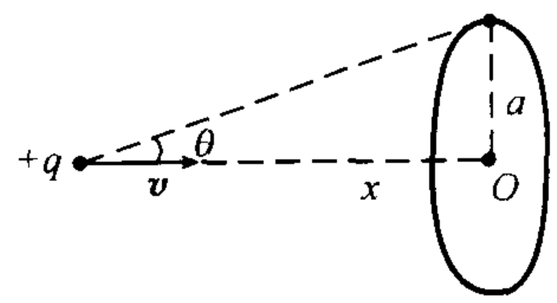
18-4 如图所示，一正点电荷 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 向 O 点运动（电荷到 O 点的距离用 x 表示）。若以 O 点为圆心，作一半径为 a 的圆，圆平面与 $\boldsymbol{v}$ 垂直，试计算通过该圆平面的位移电流。

解 先求出圆平面边缘处点电荷 q 产生的磁场大小为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$B=\frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}\sin\theta=\frac{\mu_0 qva}{4\pi r^3}$$

$$H=\frac{B}{\mu_0}=\frac{qva}{4\pi r^3}=\frac{qva}{4\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\text{（方向沿圆周切线）}$$



习题 18-4 图

由安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I+I_D$，取圆平面的圆周为积分回路，因为 $I=0$，

$$\therefore\quad I_D=\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=H\cdot 2\pi a=\frac{qva^2}{2(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

说明：本题也可先求点电荷在圆平面处 $\boldsymbol{D}$，再求通过圆平面的电通量 Φ_D，$I_D=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$，但数学上显得较为繁琐。

18-5 圆形平行板电容器板间为空气电介质。充电时极板上的电荷面密度随时间不断增加，即 $\sigma=kt$，k 为常量，试求电容器内距轴线距离 r 处的磁感应强度。

解 由高斯定理，两极板间的电位移矢量大小为 $D=\sigma=kt$，则位移电流密度为 $j_D=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=k$。在距轴线 r 处的磁场强度为

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I+I_D\qquad (I=0)$$

$$\because\quad 2\pi rH=\pi r^2 j_D,\quad H=\frac{kr}{2}$$

$$\therefore\quad B=\mu_0 H=\frac{1}{2}\mu_0 kr$$

18-6 收音机内有一自感为 2.6×10^{-4}H 的线圈，如果要使该收音机能接收波长为 200～600m 的无线电广播信号，则振荡电路中的电容器的电容应能在什么范围内变动？

解 $c=\lambda\nu$，$\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{c}{\lambda}$，振荡频率 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，化简后得电容器的电容为

$$C=\frac{1}{L\omega^2}=\frac{1}{L(2\pi c/\lambda)^2}=\frac{\lambda^2}{4\pi^2c^2L}$$

当波长 $\lambda_{\min}=200$m 时

$$C_{\min}=\frac{\lambda_{\min}^2}{4\pi^2c^2L}=\frac{(200)^2}{4\pi^2\times(3\times10^8)^2\times2.6\times10^{-4}}=4.3\times10^{-11}(\mathrm{F})$$

当波长 $\lambda_{\max}=600$m 时

$$C_{\max}=\frac{\lambda_{\max}^2}{4\pi^2c^2L}=\frac{(600)^2}{4\pi^2\times(3\times10^8)^2\times2.6\times10^{-4}}=3.9\times10^{-10}(\mathrm{F})$$

电容器的电容变动范围为

$$C=4.3\times10^{-11}\sim3.9\times10^{-10}\mathrm{F}$$

18-7 一平面电磁波在真空中传播，其电场强度 $\boldsymbol{E}=E_0\cos[\omega(t-\frac{x}{c})]\boldsymbol{j}$，试求：

(1)波的传播方向；

(2)磁场强度的表达式；

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(3)坡印廷矢量的表达式。

解 (1)由波的表达式 $\boldsymbol{E}=E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\boldsymbol{j}$,可知其传播方向为 x 轴正方向。

(2)由于 $\sqrt{\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu_0}H_0$,且 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 垂直,相位相同,故

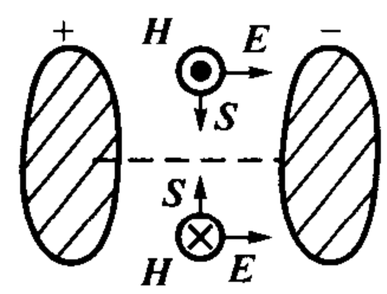
$$\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\boldsymbol{k}$$

(3)坡印延矢量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\boldsymbol{i}$$

18-8 一电容器由两个半径为 R、间距为 d 的圆板构成,边缘效应可忽略不计。当电容器充电时,试证明:单位时间内流进两极板间空间的总能量等于电容器单位时间内静电能的增加量。(由此可见,储存在电容器中的电能并不是通过导线进入电容器的,而是由电磁波从极板周围的空间输入的。)

证明 充电时 $\boldsymbol{E}$ 方向由正极板指向负极板,$\boldsymbol{j}_D$ 与 $\boldsymbol{E}$ 同向,可见 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$的方向始终指向轴线。同时



解 18-8 图

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=H\cdot 2\pi r=\pi r^2 j_D=\pi r^2\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore\quad H=\frac{\varepsilon_0 r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},\quad S=EH=\frac{r}{2}\varepsilon_0 E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

故电磁波从电容器周围空间边缘处单位时间输入的总能量为

$$U=S\cdot 2\pi Rd=\frac{R}{2}\varepsilon_0 E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\cdot 2\pi Rd=\pi R^2 d\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}t}$$

得证,其中 $U_e=Vu_e=\pi R^2 d\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ 为电容器内的总能量。

18-9 某一用于打孔的激光束截面直径为 60μm,功率为 300kW。试求该激光束的坡印廷矢量的大小。该激光束中的电场强度和磁感应强度的振幅各多大?

解 坡印廷矢量 S 表示在单位时间内通过垂直于传播方向上单位面积的辐射能,即表示通过垂直于传播方向上单位面积的辐射功率,故坡印廷矢量的平均值为

$$\bar{S}=\frac{P}{S}=\frac{300\times10^3}{\pi d^2}=\frac{300\times10^3}{3.14\times(30\times10^{-6})^2}=1.1\times10^{14}(\mathrm{W\cdot m^{-2}})$$

由电磁波的性质

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_m=\sqrt{\mu_0}H_m$$

对于激光,可视为简谐波,故平均能流密度 $\bar{S}$ 为

$$\bar{S}=\frac{1}{2}E_m H_m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2$$

$$\therefore\quad E_m=\left(2\bar{S}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2\times1.1\times10^{14}\sqrt{\frac{4\times3.14\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}}\right)^{1/2}=2.88\times10^8(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad B_m = \mu_0 H_m = \mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m = \frac{E_m}{c} = \frac{2.88\times10^8}{3\times10^8} = 0.96(\mathrm{T})$$

18-10 太阳能电池是直接把光能转变为电能的一种装置，它的电流是由太阳光对半导体 p-n 结的电场区内原子的作用产生的。假设有一太阳能电池板的尺寸为 58cm×53cm。当正对太阳光时，此电池板能产生 14V 的电压，并提供 2.7A 的电流。太阳光对垂直于光线的面积的辐射能流密度为 $1.35\mathrm{kW\cdot m^{-2}}$，试计算此电池板利用太阳能的效率。

解 单位时间太阳光的输入功率为

$$P_{太} = 1.35\times10^3\times0.58\times0.53 = 4.15\times10^2(\mathrm{W})$$

产生的电功率为

$$P_{电} = IV = 14\times2.7 = 37.8(\mathrm{W})$$

故此电池板利用太阳能的效率

$$\eta = \frac{P_{电}}{P_{太}} = \frac{37.8}{4.15\times10^2} = 9.1\%$$

18-11 有一平面电磁波在真空中传播。当电磁波通过空间某点时，该点 $E = 50\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，试求该时刻该点处 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的大小，以及电磁能量密度 u 和坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 的大小。

解 真空的电磁波

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E = \sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times50 = 0.133(\mathrm{A\cdot m^{-1}})$$

$$B = \mu_0 H = 4\pi\times10^{-7}\times0.133 = 1.67\times10^{-7}(\mathrm{T})$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2 = 8.85\times10^{-12}\times50^2 = 2.21\times10^{-8}(\mathrm{J\cdot m^{-3}})$$

$$\therefore \quad S = EH = 50\times0.133 = 6.65(\mathrm{J\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}})$$

18-12 一长直螺线管半径为 a、单位长度上有 n 匝线圈，内部为真空。螺线管中载有正在增加的电流 i，试求螺线管内距轴线 r 处坡印廷矢量的大小和方向。

解 由安培环路定理，螺线管内

$$H = ni, \quad B = \mu_0 ni$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \quad \therefore \quad E\cdot2\pi r = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cdot\pi r^2$$

$$E = -\frac{\mu_0 n r}{2}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad S = EH = \frac{\mu_0 n^2 r}{2} i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

因为充电，$\boldsymbol{S}$ 方向指向轴线。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第19章

带电粒子在电场和磁场中的运动

【基本概念和规律】

1. 带电粒子在均匀磁场中的运动

(1)$\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{B}$:带电粒子作匀速直线运动。

(2)$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$:带电粒子作匀速圆周运动。

①圆周半径:$R=\dfrac{mv}{qB}$

②周期:$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$

(3)$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成任意夹角 θ,则带电粒子作等间距螺旋线运动。

①粒子运动的半径:$R=\dfrac{mv_{\perp}}{qB}=\dfrac{mv\sin\theta}{qB}$

②螺距:$h=\dfrac{2\pi mv_{\parallel}}{qB}=\dfrac{2\pi mv\cos\theta}{qB}$

2. 霍尔效应

在磁场中载流导体上出现横向电势差的现象。其霍尔电压为 $V_{\mathrm{H}}=R_{\mathrm{H}}\dfrac{IB}{d}$,$d$ 为导体板的厚度。

霍尔系数 $R_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{nq}$,若测得 R_{H},就可以求出导体中载流子的浓度。

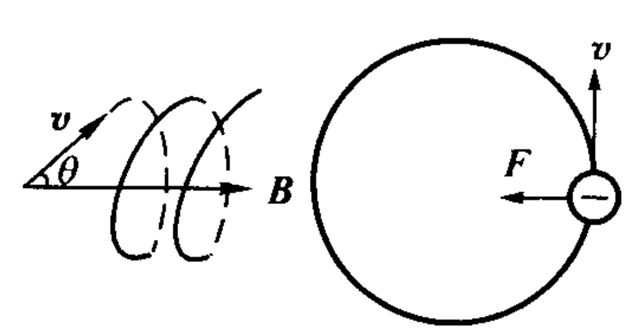
【解题指导】

● 在应用洛伦兹力公式时首先要明确运动电荷是正电荷还是负电荷,然后再判别洛伦兹力的方向。

● 在研究霍尔效应的问题中,一般要区别样品的类型,弄清载流子是什么。判别霍尔效应的关键是确定载流子所受磁场力的方向。

【习题解答】

19-1 有一带电粒子在 $B=1.0\times10^{-3}\mathrm{T}$ 的均匀磁场中运动,该粒子的质量为 $1.0\times10^{-12}\mathrm{kg}$;所带电量为 $1.0\times10^{-4}\mathrm{C}$;运动初速为 $1.0\times10^{4}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,方向与磁场方向成 30° 角。试求该粒子所作的螺旋线运动的周期 T、半径 R 和螺距 h。



解 19-1 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 如图所示，洛伦兹力提供向心力

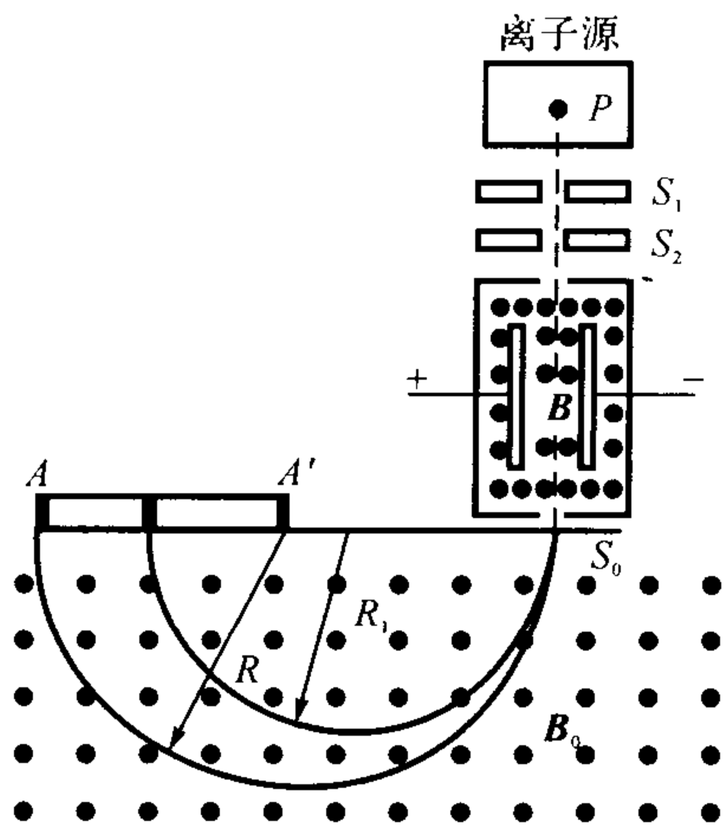
$$qv\sin\theta B=m\frac{(v\sin\theta)^2}{R}$$

$$\therefore\quad R=\frac{mv\sin\theta}{qB}=\frac{1.0\times10^{-12}\times1.0\times10^4\times\sin30^\circ}{1.0\times10^{-4}\times1.0\times10^{-3}}=5.0\times10^{-2}(\mathrm{m})$$

$$T=\frac{2\pi R}{v\sin\theta}=\frac{2\pi m}{Bq}=\frac{2\pi\times1.0\times10^{-12}}{1.0\times10^{-3}\times1.0\times10^{-4}}=6.28\times10^{-5}(\mathrm{s})$$

$$h=T\cdot v\cos\theta=6.28\times10^{-5}\times1.0\times10^4\cos30^\circ=0.54(\mathrm{m})$$

19-2 质谱仪是分析同位素用的重要仪器，其原理如图所示：离子源 P 所产生的离子经过窄缝 S_1 和 S_2 之间的加速电场加速后，进入速度选择器；速度选择器中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 都垂直于离子速度 $\boldsymbol{v}$，且 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$；通过速度选择器的离子接着进入均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，沿半圆周运动并达到记录它们的照相底片上形成谱线。如果测得某一谱线 A 到入口处 S_0 的距离为 x，试证明与此谱线相应的离子的质量为 $m=\frac{qB_0Bx}{2E}$，q 为离子所带的电量。



习题 19-2 图

证明 由 $qE=qvB$ 知，能够通过速度选择器的离子速率为 $v=E/B$。底片上谱线 A 到入口处 S_0 的距离 x，恰好等于离子圆周运动的直径

$$x=2R=\frac{2mv}{qB_0}=\frac{2mE}{qBB_0}$$

$$\therefore\quad m=\frac{qB_0Bx}{2E}$$

得证

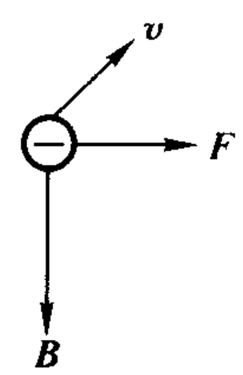
19-3 在一个电视显像管中，电子沿水平方向从南向北运动。已知其动能为 $1.2\times10^4\mathrm{eV}$。假定该处地球磁场在竖直方向上的分量向下，其大小为 $5.5\times10^{-5}\mathrm{T}$。试问：

(1)电子受到地磁场的影响朝哪个方向偏转？

(2)电子的加速度多大？

(3)电子在电视显像管中飞行 20cm 时的偏转有多大？

解 (1)由 $\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 可知，$\boldsymbol{F}$ 指向东，所以电子向东偏转。



解 19-3 图

(2)电子的速度由 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$ 得

$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{\frac{2\times1.2\times10^4\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}}=6.5\times10^7(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

电子的加速度由洛伦兹力提供

$$a=\frac{F}{m}=\frac{eBv}{m}=\frac{1.6\times10^{-19}\times5.5\times10^{-5}\times6.5\times10^7}{9.1\times10^{-31}}=6.29\times10^{14}(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

(3)可将电子的运动看成为抛体运动

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$l=vt,\quad d=\frac{1}{2}at^2$$

$$d=\frac{al^2}{2v^2}=\frac{6.29\times10^{14}\times0.2^2}{2\times(6.5\times10^7)^2}\approx3\times10^{-3}(\mathrm{m})=3(\mathrm{mm})$$

19-4 北京正负电子对撞机中电子在周长为 240m 的储存环中作圆轨道运动。已知其中一电子的动量是 $1.49\times10^{-18}\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$，求偏转磁场的磁感应强度。

解 因为电子轨道半径为 $R=mv/eB$，因周长 $s=2\pi R$，将 $R=\frac{s}{2\pi}$ 代入上式后得

$$B=\frac{2\pi mv}{es}=\frac{2\pi p}{es}=\frac{2\times3.14\times1.49\times10^{-18}}{1.6\times10^{-19}\times240}=0.244(\mathrm{T})$$

19-5 一电子在电子感应加速器中沿半径为 1m 的轨道作圆周运动。如果电子每运动一周其动能增加 700eV，试求轨道内磁通量的变化率。

解 设半径 $R=1\mathrm{m}$ 的轨道内的涡旋电场强度 $E_{旋}$，方向沿轨道切向，电子运动一周作功为

$$W=qE_{旋}\cdot2\pi R=\Delta E_{\mathrm{k}}$$

又因为

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=E_{旋}\cdot2\pi R=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=-\frac{\Delta E_{\mathrm{k}}}{q}=-\frac{700\times1.6\times10^{-19}}{-1.6\times10^{-19}}=700(\mathrm{Wb\cdot s^{-1}})$$

19-6 一回旋加速器的 D 形室的圆周半径 $R=35\mathrm{cm}$，用它来加速质量为 1.67×10^{-27} kg、电量为 $1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$ 的质子。已知加速用的磁场 $B=1.5\mathrm{T}$，试问：

(1)经过多长时间 D 形盒间的电压要反向？

(2)质子能被加速到的最大速度是多少？

(3)质子要通过多大等效加速电压，才能获得这样的最大回转速度？

解 (1)质子绕一圈的周期为 $T=2\pi m/Bq$，根据回旋加速器的原理，电压反向时间间隔为

$$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{\pi m}{Bq}=\frac{3.14\times1.67\times10^{-27}}{1.5\times1.6\times10^{-19}}=2.18\times10^{-8}(\mathrm{s})$$

(2)质子能达到的最大速度，由 $Bvq=m\frac{v^2}{R}$ 决定，故

$$v=\frac{BqR}{m}=\frac{1.5\times1.6\times10^{-19}\times0.35}{1.67\times10^{-27}}=5.03\times10^7(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

(3)忽略相对论效应时有

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=qV$$

$$V=\frac{mv^2}{2q}=\frac{1.67\times10^{-27}\times(5.03\times10^7)^2}{2\times1.6\times10^{-19}}=1.32\times10^7(\mathrm{V})$$

19-7 一汽泡室中的磁场为 20T，一个高能质子垂直于磁场飞过该汽泡室时留下一半径为 3.5m 的圆弧径迹。试求此质子的动量和能量。

解 高能质子走过圆弧径迹的半径为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$R=\frac{mv}{eB}=\frac{p}{eB}$$

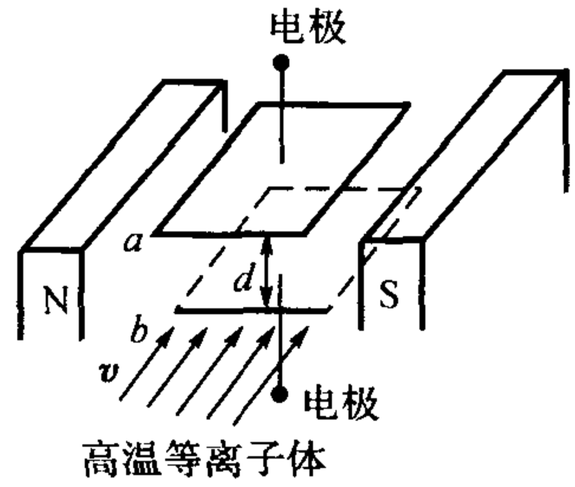
质子的动量为

$$p=mv=eBR=1.6\times10^{-19}\times20\times3.5=1.12\times10^{-17}(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

质子的能量为

$$E=\frac{p^2}{2m_p}=\frac{(1.12\times10^{-17})^2}{2\times1.67\times10^{-27}}=3.75\times10^{-8}(\mathrm{J})=234(\mathrm{GeV})$$

19-8 磁流体发电机是利用导电流体的霍尔效应制成的新型发电装置，主要由磁场、导电管、导电管电极组成。它利用燃烧石油、煤等燃料或核反应堆的余热，将气体加热到很高的温度（约 3 000K）使之电离，形成等离子体，后者以高速（约 1 000m·s^{-1}）通过处在强磁场中耐高温材料制成的导电管发电。如图所示，设导电管中上、下两平板的电极为 a 和 b，板间的距离为 d。若磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$，高温等离子体速度为 $\boldsymbol{v}$，试问气流中正负电荷各向何板积累？哪个极板电势高？两极板的电势差可达多大？



习题 19-8 图

解 由正负电荷所受的洛伦兹力方向判断，正电荷向 b 板积聚，负电荷向 a 极积聚，因此 b 板电势高于 a 板。由平衡条件 $qE=qBv$，两极板电势差可达

$$V_b-V_a=Ed=dvB$$

19-9 硅片掺入砷成为 n 型半导体，假设其电子浓度为 $n=2.0\times10^{21}/\mathrm{m}^{-3}$，电阻率为 $\rho=1.6\times10^{-2}\Omega\cdot\mathrm{m}$。用这种硅片做成霍尔探头可以测量磁场，其尺寸为 0.50cm×0.20cm×0.005 0cm。将此硅片长度方向的两端接入电压为 1.0V 的直流电路中，当探头放在磁场某处并使其最大表面与磁场方向垂直时，测得宽度为 0.2cm 两侧的霍尔电势差为 1.05mV，试求磁场中该处的磁感应强度。

解 由霍耳电势差公式 $V_H=\frac{1}{nq}\frac{IB}{d}$，式中 $d=0.005\mathrm{cm}=5\times10^{-5}\mathrm{m}$。因为长度方向的电阻

$$R=\rho\frac{L}{S}=1.6\times10^{-2}\times\frac{0.50\times10^{-2}}{0.2\times10^{-2}\times0.05\times10^{-2}}=800(\Omega)$$

$$\therefore\quad I=\frac{V}{R}=\frac{1}{800}=1.25\times10^{-3}(\mathrm{A})$$

$$B=\frac{nqdV_H}{I}=\frac{2.0\times10^{21}\times1.6\times10^{-19}\times5\times10^{-5}\times1.05\times10^{-3}}{1.25\times10^{-3}}=1.34\times10^{-2}(\mathrm{T})$$

19-10 如图所示，一块半导体样品平放在 xy 面上，其长、宽和厚度依次沿 x，y 和 z 轴方向。已知沿 x 轴方向有电流通过，在 z 轴方向加有均匀磁场，现测得：$a=1.0\mathrm{cm}$，$b=0.35\mathrm{cm}$，$c=0.10\mathrm{cm}$，$I=1.0\mathrm{mA}$，$B=0.30\mathrm{T}$，在宽度为 0.35cm 两侧的电势差 $V_1-V_2=6.55\mathrm{mV}$。

(1)试问这块半导体是 p 型（空穴导电）还是 n 型（电子导电）半导体？

(2)试求载流子的浓度。

解 (1)由洛伦兹力可判定此半导体样品是 n 型半导体（因为 $V_1>V_2$）。

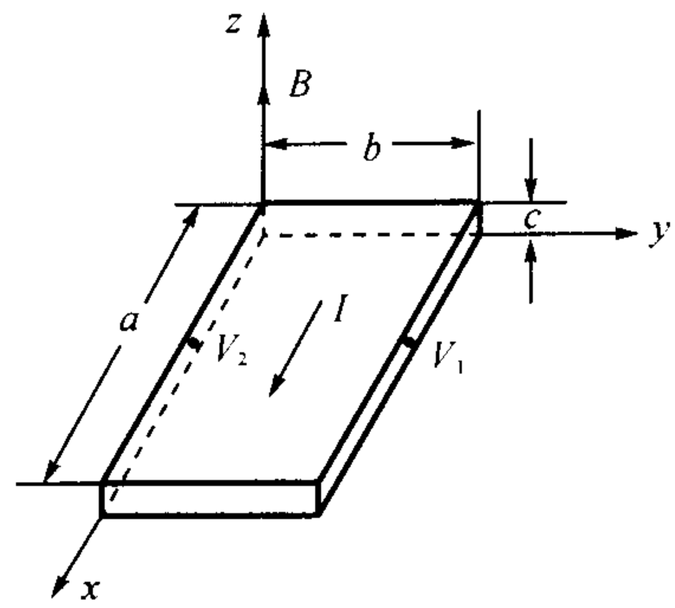
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)因为 $V_H=V_1-V_2=\frac{1}{nq}\frac{IB}{d}$，式中 $d=c$

$=0.1\text{cm}=10^{-3}\text{m}$，

$$\therefore\quad n=\frac{IB}{qV_Hc}=\frac{10^{-3}\times0.3}{1.6\times10^{-19}\times6.55\times10^{-3}\times10^{-3}}$$

$$=2.86\times10^{20}(\text{个}\cdot\text{km}^{-3})$$

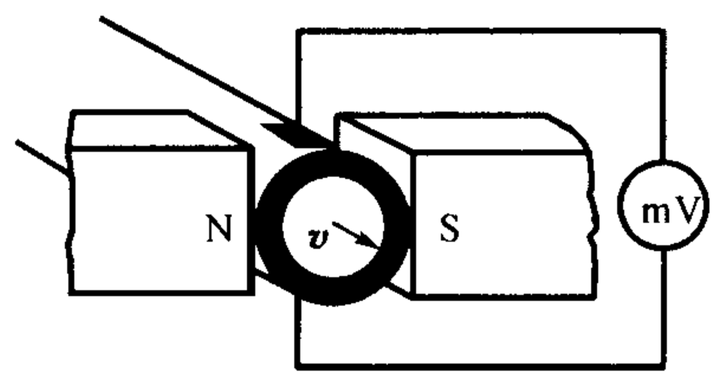


习题 19-10 图

19-11 霍尔效应可用来测量血管中血流的速度，其原理如图所示。在动脉血管两侧分别安装电极并加上磁场（实际应用中的磁场由交流电产生）。设血管直径是 2.0mm，磁场为 0.08T，毫伏表测出的电压为0.1mV，问血流的速度多大？

解 由霍尔效应知，$V_H=vBd$，故血流速度为

$$v=\frac{V_H}{Bd}=\frac{0.1\times10^{-3}}{0.08\times2\times10^{-3}}=0.63(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$



习题 19-11 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第20章

光的干涉

【基本概念和规律】

1. 产生相干光的两种方式

(1)分波阵面法：一点光源发出的光波在其波阵面上分为两部分。著名的实验如杨氏双缝实验、洛埃镜实验等。

(2)分振幅法：将一束光分成两束光，如薄膜干涉。

2. 薄膜干涉的两种情况

(1)等倾干涉：薄膜厚度处处相等，同一干涉条纹是由相同入射角 i 的光形成的，其条纹为明暗相间的同心圆环。

$$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}k\lambda & k=1,2,3,\cdots\text{明条纹}\\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,2,3,\cdots\text{暗条纹}\end{cases}$$

(2)等厚干涉：薄膜厚度处处不相等，同一干涉条纹是由相同的薄膜厚度的地方产生的反射光或透射光形成的。

①劈尖干涉：干涉条纹是明暗相间等间距的直条纹。对空气劈尖，

$$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}k\lambda & k=1,2,3,\cdots\text{明条纹}\\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,2,\cdots\text{暗条纹}\end{cases}$$

②牛顿环：干涉条纹是明暗相间的同心圆环。对空气薄膜，

明环半径：$r_k=\sqrt{(k-\frac{1}{2})R\lambda}$，$k=1,2,3,\cdots$；暗环半径：$r_k=\sqrt{kR\lambda}$，　$k=0,1,2,\cdots$

3. 迈克尔孙干涉仪

利用分振幅法产生双光束实现干涉的仪器。干涉条纹移动一条相当于等效空气薄膜厚度改变 $\lambda/2$。

【解题指导】

● 研究干涉问题首先要抓住光程差这一主线。

● 分析薄膜干涉问题的一般步骤：

(1)确定薄膜，找出哪两条光线干涉，明确是在反射光还是在透射光中观察干涉条纹。

(2)分析干涉条纹的形状，计算光程差(有效光程差和附加光程差)，特别要注意考虑半波损失，最后选择明暗条纹的干涉条件。

● 确定明暗干涉条纹的 k 值是研究干涉问题的一个难点。一般来说，明暗干涉条纹的 k

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

值与明暗条纹的序数是有区别的。k 的数值不是任意规定的，而是由明暗干涉条纹的光程差决定的。k 的最小值可以从零取起，即 $k=0,1,2,3,\cdots$ 的取法，也可从 1 取起，即 $k=1,2,3,\cdots$。而条纹的序数总是从 1 取起，即 $1,2,3,\cdots$。两者一比较，显而易见，k 值和干涉条纹的序数可能相等，也可能不相等，一般我们从光程差最小的第一条纹开始计数，从而判断出某一条纹的 k 值等于多少。反之，若先确定某条纹的 k 值，同样可以判断该条纹的序数。

● 干涉条纹移动与光程差的关系。产生干涉条纹移动（或变化）的原因是由于光程差发生变化。干涉条纹移动一条，光程差改变一个波长。若条纹移动 Δk 条，则光程差的改变量为 $\delta'=\Delta k\lambda$。

● 正确区分薄膜干涉的两种类型：

(1)等倾干涉的概念是同一条干涉条纹上的各点均由同一入射角 i 的光线干涉产生。薄膜的厚度处处相等。

(2)等厚干涉的概念是同一干涉条纹上的各点对应的薄膜厚度相同。薄膜的厚度处处不相等。

【习题解答】

20-1 汞弧灯发出的光通过一绿色滤光片照射相距为 0.60mm 的狭缝，在 2.5m 远处的屏幕上出现干涉条纹。测量相邻两明条纹中心的距离为 2.27mm，试计算入射光的波长。

解 杨氏双缝干涉条纹间距为 $\Delta x=\frac{D}{d}\lambda$，故有

$$\lambda=\frac{\Delta xd}{D}=\frac{2.27\times10^{-3}\times0.6\times10^{-3}}{2.5}=5.45\times10^{-7}(\mathrm{m})=545(\mathrm{nm})$$

20-2 利用洛埃镜观察 X 射线的干涉条纹，测得间距为 0.002 5cm。设波长为 0.833nm，光源到屏的距离为 3m，问 X 射线点光源应放置在镜平面上方多高的地方？

解 因为洛埃镜干涉条纹间距与杨氏双缝干涉相同，由 $\Delta x=\frac{D}{d}\lambda$，则点光源在镜平面上方的距离为

$$h=\frac{d}{2}=\frac{1}{2}\frac{D\lambda}{\Delta x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\times0.833\times10^{-9}}{2.5\times10^{-5}}=5\times10^{-5}(\mathrm{m})=0.05(\mathrm{mm})$$

20-3 用很薄的云母片（$n=1.58$）覆盖在双缝实验中的一条缝上，这时屏幕上的零级明条纹移动到原来的第七级明条纹位置。如果入射光波长为 550.0nm，试问此云母的厚度为多少？

解 厚度为 e、折射率为 n 的云母片覆盖在一条缝上，引起光程差改变为

$$\delta'=(n-1)e=7\lambda$$

$$\therefore\quad e=\frac{7\lambda}{n-1}=\frac{7\times5.5\times10^{-7}}{1.58-1}=6.64\times10^{-6}(\mathrm{m})=6.64\times10^{-3}(\mathrm{mm})$$

20-4 一射电望远镜的天线设在湖岸上，距湖面高度为 h。对岸地平线上方有一恒星正在升起，恒星发出波长为 λ 的电磁波。试求当天线测得第一级干涉极大时，恒星所在的角位置 α。

解 两光线到达天线时的光程差为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

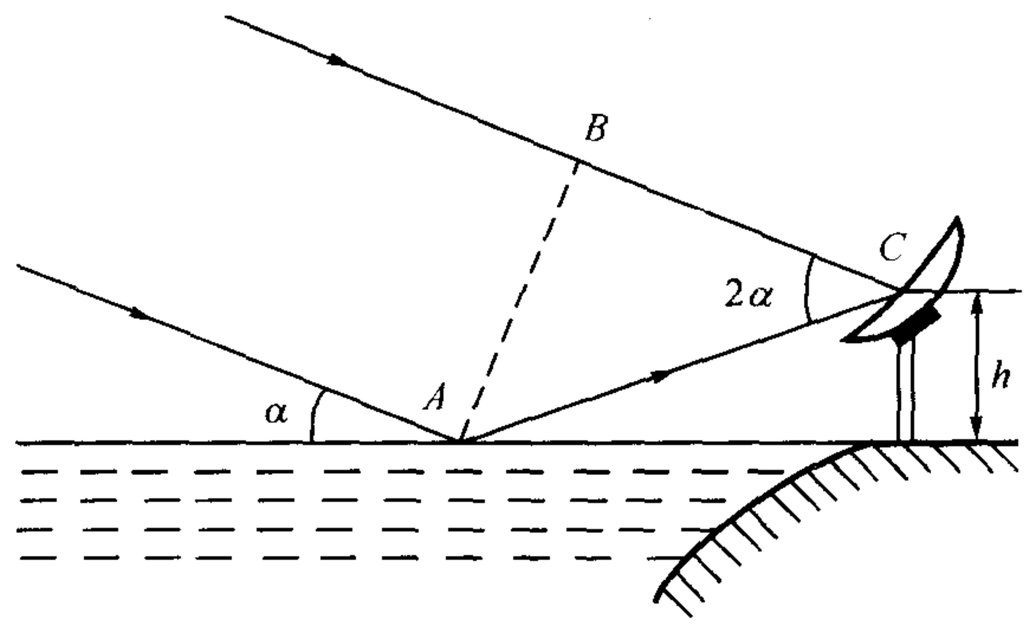
$$\delta=\overline{AC}-\overline{BC}+\frac{\lambda}{2}=\overline{AC}(1-\cos 2\alpha)+\frac{\lambda}{2}$$

同时$\overline{AC}=\frac{h}{\sin\alpha}$，故

$$\delta=2\sin^2\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}+\frac{\lambda}{2}=2\sin\alpha\cdot h+\frac{\lambda}{2}$$

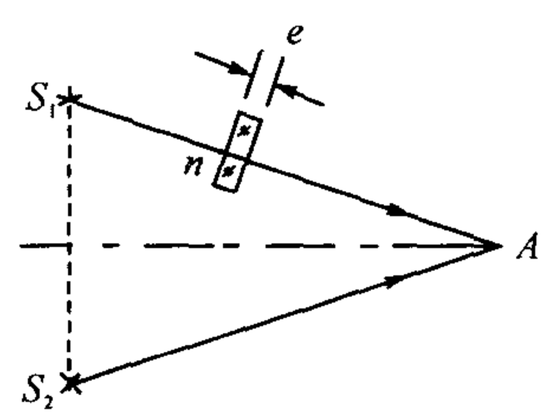
天线测得第一级干涉极大时，$\delta=\lambda$，由

$$2\sin\alpha\cdot h+\frac{\lambda}{2}=\lambda,\quad \therefore\quad \alpha=\arcsin\frac{\lambda}{4h}$$



习题 20-4 图

20-5 有两个同相的点光源 S_1 和 S_2，发出波长为 500nm 的光，A 是它们连线的中垂线上的一点。若在 S_1 与 A 之间插入厚度为 e、折射率为 1.5 的薄玻璃片，A 点恰为第四级明纹中心，求玻璃片的厚度。



习题 20-5 图

解 $\delta=(n-1)e=k\lambda$

$$e=\frac{k\lambda}{n-1}=\frac{4\times500\times10^{-9}}{1.5-1}=4\times10^{-6}\text{m}=4(\mu\text{m})$$

20-6 在双缝干涉实验中，波长为 550nm 的单色平行光垂直入射到间距为 2×10^{-4}m 的双缝上，屏到双缝的距离为 2m，求：

(1)中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距。

(2)用一厚度为 6.6×10^{-6}m、折射率为 1.58 的玻璃片覆盖一缝后，零级明纹将移到原来的第几级明纹处？

解 (1) $\Delta x_{10}=2x_{10}=2\frac{D}{d}k\lambda=2\frac{2}{2\times10^{-4}}\times10\times550\times10^{-9}=0.11(\text{m})$

(2) $\because\quad (n-1)e=k\lambda$

$$\therefore\quad k=\frac{(n-1)e}{\lambda}=\frac{(1.58-1)\times6.6\times10^{-6}}{550\times10^{-9}}=7(\text{级})$$

20-7 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上，油膜覆盖在玻璃板上。若所用光源波长可以连续变化，并观察到 500.0nm 与 700.0nm 这两个波长的光在反射中消失。已知油的折射率为 1.30，玻璃的折射率为 1.50，试求油膜的厚度。

解 油膜上、下表面的两反射光的光程差为 $\delta=2ne$，由题意有

$$\delta=2ne=(2k_1+1)\frac{\lambda_1}{2}=(2k_2+1)\frac{\lambda_2}{2}$$

即$(2k_1+1)\lambda_1=(2k_2+1)\lambda_2$。将 $\lambda_1=500$nm，$\lambda_2=700$nm 代入上式，得 $k_1=3$，$k_2=2$。故有

$$e=\frac{7\times5\times10^{-7}}{4\times1.3}=6.73\times10^{-7}(\text{m})=6.73\times10^{-4}(\text{mm})$$

20-8 空气中有一片厚度均匀的肥皂水膜，折射率 $n=1.33$。发现太阳光下观察其反射光，发现视线与薄膜法线成 45°角的方向上，薄膜是绿色($\lambda=546$nm)的，问薄膜最薄的厚度为多少？若垂直注视，薄膜将呈现什么颜色？

解 油膜上、下表面两反射光线的光程差为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}$$

在 45°角观测时，$i=45°$（入射角等于反射角）

$$2e\sqrt{n^2-\sin^2 45°}+\frac{\lambda}{2}=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots$$

取 $k=1$ 时，薄膜的厚度为

$$e_{\min}=\frac{\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2 45°}}=\frac{5.46\times10^{-7}}{4\sqrt{(1.33)^2-\frac{1}{2}}}=1.21\times10^{-7}(\mathrm{m})=121(\mathrm{nm})$$

垂直观测时 $i=0$，$2ne+\frac{\lambda'}{2}=k\lambda'$，$k=1,2,3,\cdots$

$$\therefore\quad \lambda'=\frac{2ne}{k-(1/2)}$$

$k=1,\lambda'=643.7\mathrm{nm}$；$k=2,\lambda'=1931\mathrm{nm}$，已超出可见光范围

20-9 利用劈尖的等厚干涉条纹可测量很小的角度。今在很薄的劈尖玻璃板上，垂直入射波长为 589.3nm 的钠光。若相邻条纹间的距离为 5mm，玻璃的折射率为 1.52，求此劈尖的夹角。

解 劈尖等厚干涉条纹间距为

$$l\sin\theta=e_{k+1}-e_k=\frac{\lambda}{2n}$$

$$\theta\approx\sin\theta=\frac{\lambda}{2nl}=\frac{589.3\times10^{-9}}{2\times1.52\times5\times10^{-3}}=3.88\times10^{-5}(\mathrm{rad})$$

20-10 观察肥皂膜的等倾干涉。设入射角为 35°，肥皂膜折射率为 1.33，膜厚 670.0nm。试问可见光中哪些波长将不会出现？反射光呈现何种颜色？

解 肥皂膜上、下表面两反射光线的光程差为

$$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}(2k+1)\frac{\lambda}{2} & k=0,1,2,\cdots\text{减弱}\\ k\lambda & k=1,2,3,\cdots\text{加强}\end{cases}$$

因此，当 $i=35°$时，可见光中在反射时消失的波长为

$$\lambda=\frac{2e\sqrt{n^2-\sin^2 35°}}{k}=\frac{1608}{k}\mathrm{nm}$$

因为可见光的波长在 400nm～760nm，只有

$$k=3,\quad \lambda_1=536\mathrm{nm};\qquad k=4,\quad \lambda_2=402\mathrm{nm}$$

这两种波长的光将消失。反射光中加强的光波长为

$$\lambda'=\frac{2e\sqrt{n^2-\sin^2 35°}}{k-(1/2)}=\frac{1608}{k-(1/2)}\mathrm{nm}$$

同理，只有

$$k=3,\quad \lambda_1'=643.2\mathrm{nm};\qquad k=4,\quad \lambda_2'=459.4\mathrm{nm}$$

这两种光加强，故反射光呈黄蓝色。

20-11 有一劈尖折射率 1.4，劈尖的夹角 $\theta=10^{-4}\mathrm{rad}$。当用某一单色光垂直入射时，测

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

得相邻条纹的距离为 0.25cm，试求：

(1) 此单色光在空气中的波长；

(2) 若劈尖长为 3.5cm，则总共可出现多少条明条纹？

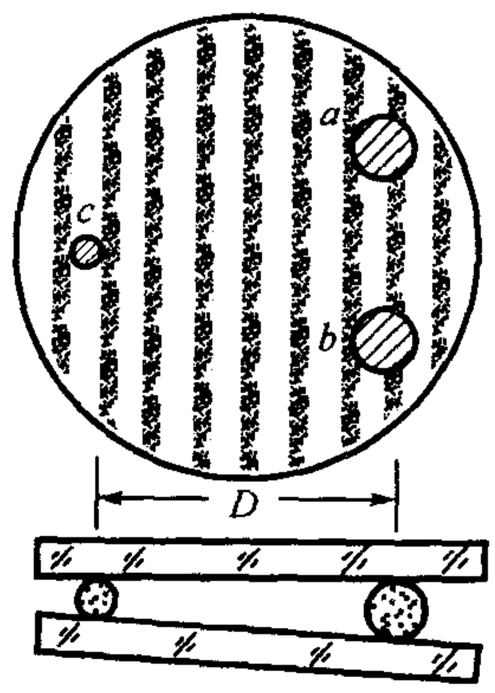
解 劈尖等厚干涉条纹间距为 $l=\lambda/(2n\sin\theta)$

(1) $\lambda=2nl\sin\theta\approx 2nl\theta=7\times10^{-7}\text{m}=700\text{nm}$

(2) 总共出现的明条纹为

$$N=\frac{L}{l}=\frac{3.5}{0.25}=14(\text{条})$$

20-12 如题图所示，将符合标准的轴承钢珠 a，b 和待测钢珠 c 一起放在两块平板玻璃之间。若垂直入射光的波长 $\lambda=0.58\mu\text{m}$，问钢珠 c 的直径比标准小多少？如果距离 D 不同，对检测结果有何影响？



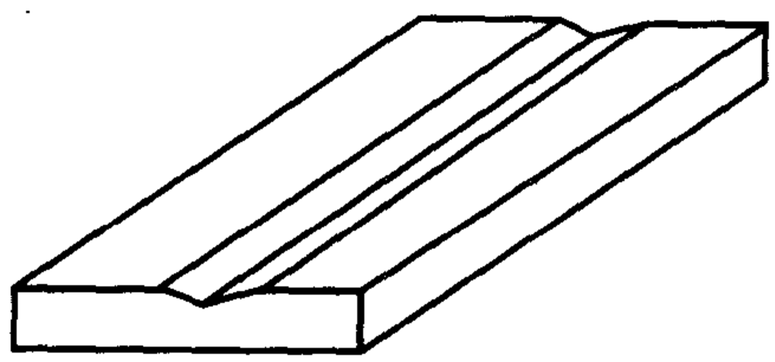
习题 20-12 图

解 空气劈尖等厚干涉中相邻条纹的高度差 $\Delta e=\lambda/2$。由题图可知，两钢珠条纹间距约为 $6\frac{1}{4}$ 条，故有

$$\Delta d=6.25\times\frac{\lambda}{2}=1.81\times10^{-6}(\text{m})$$

如果距离 D 不同，对检测结果无影响。

20-13 如题图所示，平晶玻璃($n_1=1.50$)上刻有一截面为等腰三角形的浅槽，内装肥皂水($n_2=1.33$)。若用波长为 $\lambda=600.0\text{nm}$的黄光垂直照射，从反射光中观察到肥皂水液面上共有 15 条暗条纹。求：


习题 20-13 图

(1)条纹的形状；

(2)液体最深处的厚度。

解 (1)干涉条纹是明暗相间的平行直条纹。

(2)暗条纹的条件为 $\delta=2n_2e=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$，$k=0,1,2,\cdots$

因共有 15 条暗条纹，正中央必为暗纹，且 $k=7$，故

$$e_{\max}=\frac{(2k+1)\lambda}{4n_2}=\frac{15\times6.0\times10^{-7}}{4\times1.33}$$
$$=1.69\times10^{-6}(\text{m})$$

20-14 用复色光垂直照射一玻璃($n=1.5$)劈尖。当观察反射光的干涉条纹时，测得波长为 600nm 的黄光的第 m 级暗纹与波长为 550nm 的绿光的第 $m+1$ 级暗纹重合。求该处玻璃的厚度。

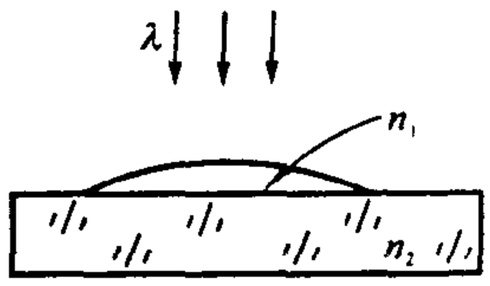
解 $2ne+\frac{\lambda_1}{2}=(2m+1)\frac{\lambda_1}{2}$，　　$2ne+\frac{\lambda_2}{2}=[2(m+1)+1]\frac{\lambda_2}{2}$

联合两式解得该处玻璃厚度为

$$e=2.2\times10^3\text{nm}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

20-15 如题图所示一滴油($n_1=1.20$)放在平玻璃片($n_2=1.52$)上，以波长 $\lambda=600.0\text{nm}$的黄光垂直照射。从反射光看到有多个亮环和暗环。问：



习题 20-15 图

(1)最边缘处是亮环还是暗环？

(2)从边缘向中心数，第 5 个亮环处油的厚度是多少？

(3)若油滴逐渐扩大时，所看到的条纹将如何变化？

解 由题意，油膜上、下表面两反射光线的光程差为 $\delta=2ne$，其明条纹公式为

$$2ne=k\lambda,\quad k=0,1,2,\cdots$$

(1)最外缘处 $e=0$，是亮环；

(2)从边缘向中心数，第 5 个亮环对应的 $k=4$，故

$$e_5=\frac{k\lambda}{2n}=\frac{4\times6.0\times10^{-7}}{2\times1.2}=1.0\times10^{-6}(\text{m})$$

(3)当油滴逐渐扩大时，里面圆条纹逐渐收缩，外面圆条纹逐渐向外扩张，间距扩大。

20-16 (1)若用波长不同的光观察牛顿环，观察到用 $\lambda_1=600.0\text{nm}$ 时的第 k 个暗环与用 $\lambda_2=450.0\text{nm}$ 时的第 $k+1$ 个暗环重合，已知透镜的曲率半径为 190cm，求用 λ_1 时第 k 个暗环的半径。

(2)若牛顿环中由波长为 500.0nm 的第 5 级明环与用 λ_3 时的第 6 级明环重合，则波长 λ_3 为多大？

解 (1)牛顿环的暗环半径为 $r_k=\sqrt{kR\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$ 由题意

$$\sqrt{kR\lambda_1}=\sqrt{(k+1)R\lambda_2},\quad k=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{450}{600-450}=3$$

用 λ_1 时的第 k 个暗环半径

$$r_k=\sqrt{3\times1.9\times6.0\times10^{-7}}=1.85\times10^{-3}(\text{m})=0.185(\text{cm})$$

(2)牛顿环明环半径为 $r_k=\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)R\lambda}$，$k=1,2,3,\cdots$ 由题意

$$\sqrt{\left(k_1-\frac{1}{2}\right)R\lambda_1}=\sqrt{\left(k_2-\frac{1}{2}\right)R\lambda_3},\quad \lambda_3=\frac{k_1-(1/2)}{k_2-(1/2)}\lambda_1=\frac{5-(1/2)}{6-(1/2)}\times500=409.1(\text{nm})$$

20-17 用牛顿环装置可以测透明液体的折射率。设平凸透镜的曲率半径为 1.00m，在空气中测得某级等厚干涉环的直径为 4.73mm；问将此装置放入某液体中测得同级环的直径为 4.10mm 时，液体的折射率为多少？

解 空气中牛顿半径(以明纹为例)为

$$r_k=\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)R\lambda}$$

介质中牛顿环半径变为

$$r_k'=\sqrt{\frac{(k-(1/2))R\lambda}{n}}$$

比较上面两式可得

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$n=\frac{r_k^2}{r'^2_k}=\frac{d_k^2}{d'^2_k}=\frac{(4.73)^2}{(4.10)^2}=1.33$$

20-18 在折射率 $n_1=1.52$ 的镜头表面涂有一层折射率 $n_2=1.38$ 的氟化镁增透膜，如果此膜适用于波长 $\lambda=550.0\text{nm}$ 的光，膜的最小厚度应为多少？

解 膜上、下表面两反射光线的光程差为 $\delta=2n_2e$，因为增透膜要求反射极小，故有

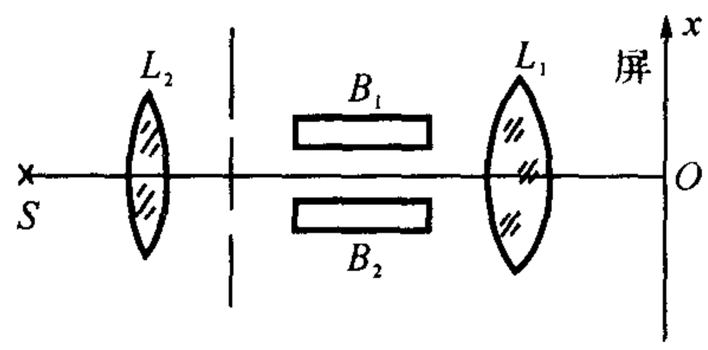
$$2n_2e=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

取 $k=0$ 时有

$$e_{\min}=\frac{\lambda}{4n}=\frac{550\times10^{-9}}{4\times1.38}=9.96\times10^{-8}(\text{m})=99.6(\text{nm})$$

20-19 瑞利干涉仪的光路如图所示。B_1，B_2 两管内物质的折射率分别为 n_1 和 n_2，管长均为 l，屏上条纹间距为 Δx。如果测出这时干涉条纹相对于两管均抽成真空时，移动了 h，试证明两种物质的折射率差值为

$$\Delta n=n_2-n_1=\frac{h\lambda}{l}(\Delta x)^{-1}$$



习题 20-19 图

证明 在两管抽成真空前后光程差的改变量为

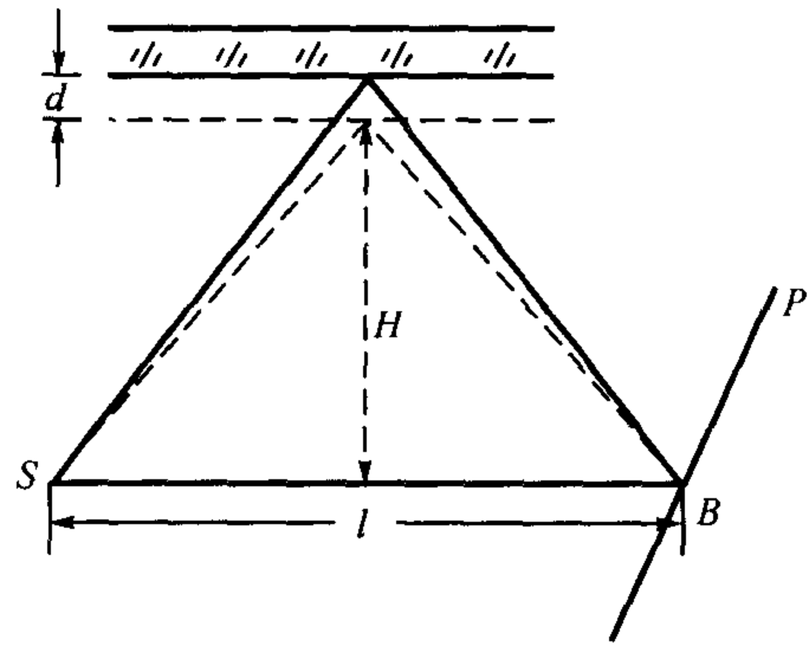
$$\delta'=(n_2-1)l-(n_1-1)l=(n_2-n_1)l$$

由题意，光程差改变一个波长，干涉条纹移动距离为 Δx，故有

$$\frac{(n_2-n_1)l}{\lambda}=\frac{h}{\Delta x}$$

$$\therefore\quad \Delta n=n_2-n_1=\frac{h\lambda}{l}(\Delta x)^{-1}\qquad \text{得证。}$$

20-20 如图所示为一测量玻璃厚度变化的简单装置。S 是单色点光源，P 是接收屏，从 S 直接发出的光与从 S 发出经玻璃反射后的光在 P 上发生干涉。如果在厚度变化前，B 处接收到的是亮条纹，随着玻璃厚度的变化，条纹由亮变暗。求达到最暗时，玻璃厚度变化量 d 的表达式。（假设玻璃的折射率不变）



习题 20-20 图

解 由题意知，玻璃厚度变化引起的光程差改变为 $\delta'=\lambda/2$，而

$$\delta'=\left[2\sqrt{(H+d)^2+\frac{l^2}{4}}-l\right]-\left[2\sqrt{H^2+\frac{l^2}{4}}-l\right]=\frac{\lambda}{2}$$

化简后得

$$d=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\lambda\sqrt{4H^2+l^2}+4H^2}-H$$

20-21 用迈克尔孙干涉仪可测量单色光的波长。若动臂反射镜移动 0.322 0mm，干涉条纹移过 1024 条，求所用光的波长。

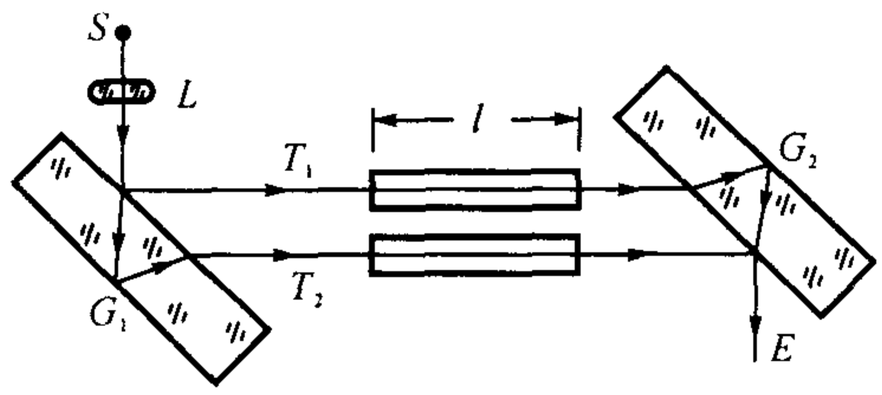
解 反射镜平移距离 Δe 后，由题意知两光路光程差的改变量为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\delta' = 2\Delta e = N\lambda$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{2\Delta e}{N} = \frac{2\times 0.322\times 10^{-3}}{1024} = 6.289\times 10^{-7}(\mathrm{m}) = 628.9(\mathrm{nm})$$

20-22 常用雅敏干涉仪来测定气体在各种温度和压力下的折射率。干涉仪的光路如题图所示：S 为单色光源；L 为会聚透镜；G_1 和 G_2 为两块材料完全相同的等厚而且平行的玻璃板；T_1 和 T_2 为等长的两个玻璃管，长度为 l。进行实验时，先将 T_1 和 T_2 抽成真空，然后将待测气体徐徐注入其中一管。在 E 处观察并测出干涉条纹的变化，就可以求出待测气体的折射率。



习题 20-22 图

例如，某次测量某种气体时，将气体徐徐注入 T_2 管中，自开始进气到标准状态，在 E 处共看到有 98 条干涉条纹移动，所用光源的波长为 589.3nm，$l=20$cm。求该气体在标准状态下的折射率。

解 当某种气体进入 T_2 管前后，条纹移动了 N 条，两光路中光程差改变量必为

$$\delta' = (n-1)l = N\lambda$$

$$\therefore \quad n = 1+\frac{N\lambda}{l} = 1+\frac{98\times 5.893\times 10^{-7}}{0.2} = 1.00029$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第21章

光的衍射

【基本概念和规律】

1. 惠更斯-菲涅尔原理

从同一波阵面上各点发出的无数子波在空间某点相遇时，可相互叠加产生干涉。

2. 单缝夫琅禾费衍射

(1)条纹特点：中央明纹最宽，约为其他各级明纹宽度的两倍；中央明纹也最亮，两侧明纹的强度由内向外逐渐减弱。

(2)单色光垂直入射时，

$$a\sin\theta=\begin{cases}k\lambda & k=\pm1,\pm2,\cdots \quad \text{暗条纹}\\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k=\pm1,\pm2,\cdots \quad \text{明条纹}\end{cases}$$

3. 夫琅禾费圆孔衍射

衍射条纹为一系列明暗交替的圆环，光能主要集中在“爱里斑”区域，其半径为 $R=1.22\lambda f/D$，式中 D 为圆孔直径。

4. 光学仪器的分辨本领

光学仪器的最小分辨角为 $\delta\theta=1.22\dfrac{\lambda}{D}$。

光学仪器的分辨本领为 $R=\dfrac{1}{\delta\theta}=\dfrac{D}{1.22\lambda}$。

5. 光栅衍射

(1)衍射条纹的特点：明纹细而亮，且分得很开。

(2)单色光垂直入射时，主极大的中心位置(光栅方程)为 $d\sin\theta=\pm k\lambda$，　$k=0,1,2,\cdots$。

(3)缺级：光栅主极大强度受单缝衍射的调制，有时会出现缺级现象。主极大的缺级级数为 $k=\dfrac{a+b}{a}k'$，$k'=0,\pm1,\pm2,\cdots$　式中 k' 为单缝衍射暗条纹级数。

(4)光栅分辨本领：$R=\dfrac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=kN$。

6. X 射线衍射

布拉格公式：$2d\sin\theta=k\lambda$，　$k=1,2,\cdots$

【解题指导】

- 研究衍射问题和干涉问题一样，同样要抓住光程差这条主线才能迎刃而解。
- 衍射与干涉是有区别的。衍射条纹是光波经过转弯后无数个子波叠加的结果。干涉

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

条纹是由两个光波或有限个光波(即双光束干涉或多光束干涉)叠加的结果。

● 研究单缝衍射问题严格地讲,应该用积分来处理,数学上较麻烦,在大学物理中,通常采用半波带理论这种定性半定量的方法来加以处理。单缝衍射条纹的明暗条件恰好与干涉条纹的明暗条件相反,两者并不矛盾,这一点要特别注意。另外,单缝衍射的中央明纹中心位置是根据单缝上所有子波因光程差均为 $\delta=0$,因而干涉加强形成的,故单缝衍射明暗条纹公式中,k 不能取零,只能按 $k=1,2,3,\cdots$ 来取,这一点也要特别注意。

● 光栅衍射条纹的特点是细而明亮,所以我们关心和感兴趣的是光栅主极大(明条纹)的公式,若光线是垂直入射,上下明纹是对称分布的;若是斜入射,则上下明条纹分布不对称,要分别计算上下衍射的光程差和最大明条纹级数,否则题目就没有做全,这一点也要注意。

● 在衍射问题的分析中,衍射角 θ 可以从透镜的光心到屏上一点位置的直线与光轴的夹角来表示。另外,无论单缝衍射还是光栅衍射,由于干涉明条纹越往两边,光强减弱越快,所以衍射角 θ 很小,故在计算中往往可以用 $\sin\theta\approx\tan\theta$ 的近似计算。

● 计算光学仪器(或人眼)分辨本领的问题可作如下考虑,即最小分辨角 $\delta\theta$ 乘上像距刚好等于爱里斑的半径。

【习题解答】

21-1 一单色平行光束垂直照射在宽为 1.0mm 的单缝上,在缝后放一焦距为 2.0m 的会聚透镜。已知位于透镜焦面处的屏幕上的中央明条纹宽度为 2.5mm,求入射光的波长。

解 单缝衍射的中央明纹宽度由两个第一级暗条纹中心确定 $\Delta x=2f\tan\theta\approx2f\sin\theta=2f\lambda/a$,故

$$\lambda=\frac{\Delta xa}{2f}=\frac{2.5\times10^{-3}\times1\times10^{-3}}{2\times2}=6.25\times10^{-7}(\mathrm{m})=625(\mathrm{nm})$$

21-2 水银灯发出的波长为 546nm 的绿色平行光垂直入射到一单缝上,缝后透镜的焦距为 40cm。已测得透镜后焦面上中央明条纹宽度为 1.5mm,求单缝的宽度。

解 单缝衍射中央明纹宽度为 $\Delta x=2f\lambda/a$

故

$$a=\frac{2f\lambda}{\Delta x}=\frac{2\times0.4\times5.46\times10^{-7}}{1.5\times10^{-3}}=2.912\times10^{-4}(\mathrm{m})=2.912\times10^{-2}(\mathrm{cm})$$

21-3 波长 $\lambda=632.8\mathrm{nm}$ 的平行光垂直入射宽度 $a=0.2\mathrm{mm}$ 的狭缝,紧靠缝后放置焦距 $f=60\mathrm{cm}$ 的凸透镜。试求在焦平面处的观察屏上,零级明纹中心到第二级暗纹之间的距离。

解 单缝衍射中第二级暗纹离零级条纹中心距离为

$$x_2=\frac{2f\lambda}{a}=\frac{2\times6.328\times10^{-7}\times0.6}{0.2\times10^{-3}}=3.78\times10^{-3}(\mathrm{m})=0.38(\mathrm{cm})$$

21-4 单缝夫琅禾费衍射实验中,已知缝宽 $a=0.5\mathrm{mm}$,缝后透镜的焦距 $f=50\mathrm{cm}$,在观察屏上离中心的距离 $x=1.5\mathrm{mm}$ 处出现明条纹。若用平行白光垂直照射此单缝,试问此明纹由哪几种波长的光构成?明纹呈现什么颜色?

解 单缝衍射明纹公式为 $a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, $k=1,2,3,\cdots$。因为 $\sin\theta\approx\tan\theta=x/f$,

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

故有

$$\lambda=\frac{2ax}{(2k+1)f}$$

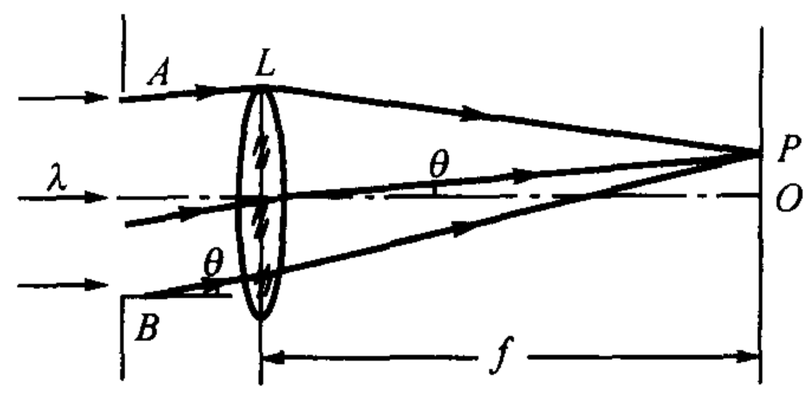
当 $k=1$ 时，　$\lambda=1000\text{nm}$　　红外看不见

当 $k=2$ 时，　$\lambda=600\text{nm}$　　黄色

当 $k=3$ 时，　$\lambda=428.6\text{nm}$　　紫色

当 $k=4$ 时，　$\lambda=333.3\text{nm}$　　紫外看不见

此明纹呈紫黄色。



习题 21-5 图

21-5　波长为 480.0nm 的平行光垂直照射到宽度为 0.4mm 的单缝上，单缝后透镜的焦距为 60cm。当单缝两边缘点 A、B 射向 P 点的两条光线在 P 点的相位差为 π 时，求 P 点离透镜焦点 O 的距离。

解　设 P 点离透镜焦点 O 的距离为 x_P。则 $\tan\theta=x_P/f$。A，B 两点射向 P 点的两条光线的光程差与相位差的关系为 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta$，故光程差为

$$\delta=\frac{\lambda}{2\pi\Delta\varphi}=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\pi=\frac{\lambda}{2}$$

由单缝衍射的明暗条纹条件可知 P 点为明条纹，故有 $a\sin\theta=a\tan\theta=ax_P/f=\lambda/2$

于是 P 点到焦点 O 的距离为

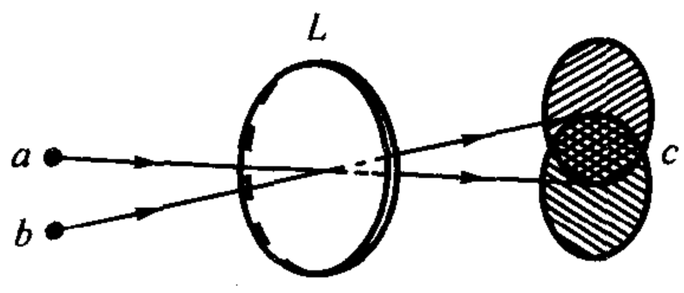
$$x_P=\frac{\lambda f}{2a}=\frac{480\times10^{-9}\times60\times10^{-2}}{2\times0.4\times10^{-3}}=3.6\times10^{-4}(\text{m})=360(\mu\text{m})$$

21-6　人造卫星上装有一架照相机，它在离地面 $h=400\text{km}$ 的高度飞行时拍摄地面上的目标物。若要求它能分辨出地面上相距 $l=1.0\text{m}$ 的两盏车灯，试问照相机的镜头至少要有多大？设感光片接收的波长 $\lambda=400\text{nm}$。

解　因为最小分辨角 $\delta\theta=1.22\lambda/D=l/h$，故

$$D=\frac{1.22\lambda h}{l}=\frac{1.22\times4\times10^{-7}\times4\times10^{5}}{1.0}=0.1952(\text{m})=19.52(\text{cm})$$

21-7　如题图所示，在透镜 l 前 50m 处有两个相距 6.0mm 的发光点 a 和 b，它们在 c 处所成的象正好满足瑞利判据，透镜焦距为 20cm。试求 c 处衍射光斑的直径 D。



习题 21-7 图

解　由题图的几何关系可知 $d/l=r/f$，而 $f=6.0\text{mm}$，

$$\therefore\quad r=\frac{fd}{l}=\frac{0.2\times6\times10^{-3}}{50}=2.4\times10^{-5}(\text{m})$$

$$D=2r=4.8\times10^{-5}\text{m}=0.048\text{mm}$$

21-8　已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 $4.84\times10^{-6}\text{rad}$，由它们发出的光波波长 $\lambda=5.50\times10^{-5}\text{cm}$。问望远镜物镜的口径 D 至少要多大才能分辨出这两颗星？

解　因为最小分辨角 $\delta\theta=1.22\lambda/D$，故

$$D=\frac{1.22\lambda}{\delta\theta}=\frac{1.22\times5.5\times10^{-7}}{4.84\times10^{-6}}=0.139(\text{m})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

21-9 白光垂直入射每毫米有 500 条刻痕的光栅。用置于光栅后的透镜将光谱投射到屏上，透镜与屏间距离为 4m，可见光的上下限为红光 $\lambda=780\text{nm}$，紫光 $\lambda=400\text{nm}$。求屏上一级光谱的长度。

解 光栅常量为

$$d=\frac{1\times10^{-3}}{500}=2\times10^{-6}(\text{m})$$

由光栅方程 $d\sin\theta=k\lambda$，$k=0,1,2,\cdots$ 可知，红光在第一级明纹处的衍射角为

$$\theta_1=\arcsin\frac{\lambda_1}{d}=25.5°$$

紫光在第一级明纹处的衍射角为

$$\theta_2=\arcsin\frac{\lambda_2}{d}=12.8°$$

在屏上相应条纹的间距（即光谱宽度）为

$$\Delta x=x_2-x_1=f\tan\theta_1-f\tan\theta_2=0.878(\text{m})=87.8(\text{cm})$$

21-10 一光栅每毫米有 200 条刻线，总宽度为 5.00cm。求：

(1)在一级光谱中，钠黄光双线（波长为 589.0nm 和 589.6nm）的角宽是多少？每条谱线的半角宽多大？双线能否分辨？

(2)在二级光谱中，在波长为 640nm 附近能够分辨的最小波长差是多少？

解 光栅常量为 $d=\frac{1\times10^{-3}}{200}=5\times10^{-6}(\text{m})$，总条数为 $N=\frac{h}{d}=\frac{5\times10^{-2}}{5\times10^{-6}}=10^4$（条）。

(1)在一级光谱中，钠双线的角宽为

$$\Delta\theta=\frac{\Delta\lambda}{d}=\frac{0.6\times10^{-9}}{5\times10^{-6}}=1.2\times10^{-4}(\text{rad})$$

每条谱线的半角宽为

$$\Delta\theta_1=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

其中 θ 为一级光谱的衍射角

$$\theta=\arcsin\frac{\lambda}{d}=\arcsin\frac{5.89\times10^{-7}}{5\times10^{-6}}=6.77°$$

$$\therefore\quad \Delta\theta_1=\frac{5.89\times10^{-7}}{10^4\times5\times10^{6}\times\cos6.77°}=1.19\times10^{-5}(\text{rad})$$

因为 $\Delta\theta>\Delta\theta_1$，故双线可以分辨。

(2)在二级光谱中，由光栅分辨本领

$$\because\quad R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$$

$$\therefore\quad \Delta\lambda=\frac{\lambda}{kN}=\frac{6.4\times10^{-7}}{2\times10^4}=3.2\times10^{-11}(\text{m})=0.032(\text{nm})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

21-11 一光栅在 2.54cm 中具有 15 000 条窄缝，对某一波长的光，测得第一级衍射角为 13°40′，求此光波的波长。

解 光栅常量为

$$d=\frac{2.54\times10^{-2}}{15000}=1.693\times10^{-6}(\mathrm{m})$$

再由光栅方程可得

$$\lambda=d\sin\theta_1=1.693\times10^{-6}\times\sin13°40'=4.0\times10^{-7}(\mathrm{m})=400(\mathrm{nm})$$

21-12 波长 $\lambda=600.0\mathrm{nm}$ 的单色光垂直入射到一光栅上，测得第二级主级大的衍射角为 30°，且第三级是缺级。求：

(1)光栅常量 d 等于多少？

(2)透光缝可能的最小宽度 a 等于多少？

(3)在选定了上述 d 和 a 之后，求在屏幕上可能出现的主极大的级数。

解 (1)因第二级主极大衍射角 $\theta_2=30°$，故光栅常量为

$$d=\frac{2\lambda}{\sin\theta_2}=\frac{2\times6\times10^{-7}}{\sin30°}=2.4\times10^{-6}(\mathrm{m})$$

(2)因为第三级缺级，缝的最小宽度为

$$a_{\min}=\frac{d}{3}=8.0\times10^{-7}\mathrm{m}$$

(3)由光栅方程可知出现最高级数

$$k_{\max}=\frac{d\sin90°}{\lambda}=\frac{2.4\times10^{-6}\times1}{6\times10^{-7}}=4$$

因为 $k=\pm4$ 时，明条纹的衍射角 $\theta=90°$，到达不了屏上；再考虑到 ±3 缺级，故实际上在屏幕上呈现的全部级数为 $0,\pm1,\pm2$ 共 5 条。

21-13 一衍射光栅，每 1cm 有 100 条透光缝，每条透光缝的宽度为 $2\times10^{-3}\mathrm{cm}$，在光栅后放一焦距为 1m 的凸透镜，现以波长为 600nm 的单色平行光垂直照射光栅，求：

(1)透光缝 a 的单缝衍射中央明纹宽度为多少？

(2)在该宽度内，有几个光栅衍射的主极大？具体写出主极大的级次。

解 (1)由单缝衍射可知中央明纹宽度为

$$\Delta x_0=2\frac{\lambda}{a}f=2\frac{600\times10^{-9}}{2\times10^{-5}}\times1=0.06(\mathrm{m})$$

(2)光栅常量 $(a+b)=\frac{1\times10^{-2}}{100}=10^{-4}(\mathrm{m})$，光栅主极大在单缝衍射第一级暗条纹处的缺级级数为

$$k=\frac{a+b}{a}=\frac{10^{-4}}{2\times10^{-5}}=5$$

得中央明纹宽度内的主极大级数为

$$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4 \qquad (\text{共 9 个})$$

21-14 一束平行光垂直入射到某个光栅上，该光束有两种波长的光：$\lambda_1=440.0\mathrm{nm}$，$\lambda_2=660.0\mathrm{nm}$。实验发现，两种波长的谱线(不含中央明纹)第二次重合于衍射角 $\theta=60°$ 的方向上，求此光栅的光栅常量 d。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 首先对于不同波长的两种光的明纹在屏上重合，说明相应的衍射角 θ 相同。由光栅方程有

$$d\sin\theta=k_1\lambda_1=k_2\lambda_2,\qquad \frac{k_1}{k_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{660}{440}=\frac{3}{2}$$

第二次重合时 $k_1=6,k_2=4$，此时 $\theta=60°$，故

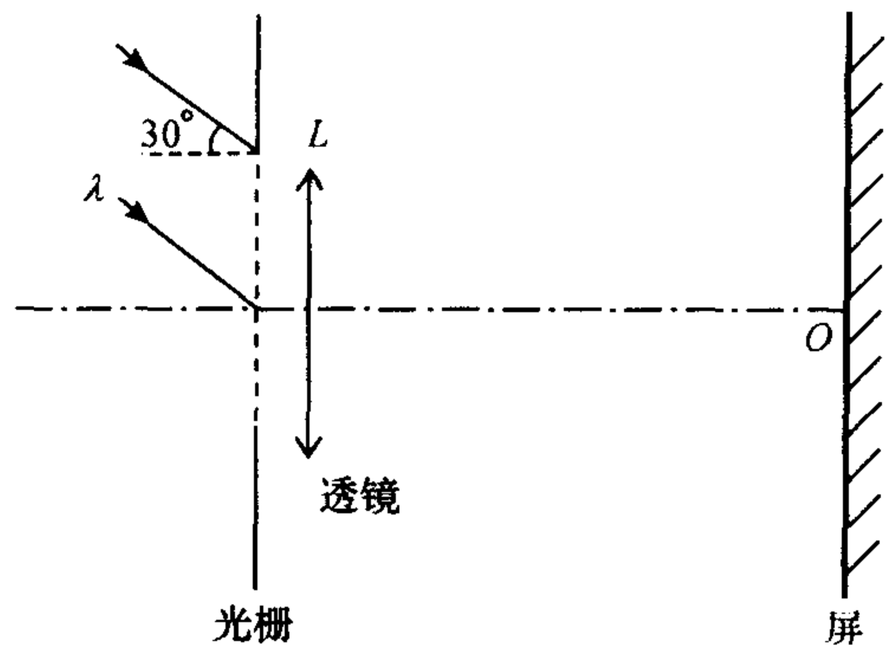
$$d=\frac{k_1\lambda_1}{\sin\theta}=\frac{6\times4.4\times10^{-7}}{\sin60°}=3.05\times10^{-6}(\mathrm{m})$$

21-15 以波长为 500nm 的单色平行光斜向入射在光栅常量为 2.10μm、缝宽为 0.70μm 的光栅上；入射角 $i=30°$，如图所示。求：

(1)斜入射时的光栅方程；

(2)第几级光谱线缺级；

(3)具体写出能看到的光谱线的级次，并说明共有几条。



习题 21-15 图

解 (1)$d(\sin i+\sin\theta)=\pm k\lambda,k=0,1,2,\cdots$

(2)缺级级数为

$$k=\frac{a+b}{a}k'=\frac{2.10}{0.7}k'=3k',\quad k'=1,2,3$$

故缺级的光谱线级数为±3，±6，…

(3) $$\because\quad d(\sin30°+\sin90°)=k_{\max}\lambda$$

$$k_{\max}=\frac{d(\sin30°+\sin90°)}{\lambda}=\frac{2.1\times10^{-6}\times(1/2+1)}{500\times10^{-9}}=6.3,\quad 取\ k_{\max}=6$$

$$d[\sin30°+\sin(-90°)]=k_{\max}'\lambda$$

$$k_{\max}'=\frac{d(\sin30°-\sin90°)}{\lambda}=\frac{2.1\times10^{-6}(1/2-1)}{500\times10^{-6}}=-2.1,\quad 取\ k'_{\max}=2$$

考虑到缺级，屏上可能看到的光谱线级数为−2，−1，0，1，2，4，5，共 7 条谱线。

21-16 一光源含有氢原子和氘原子的混合物，它所发出的光是中心波长为 $\lambda=656.3$nm 的红双线，其波长间隔为 $\Delta\lambda=0.18$nm。若能用一光栅在第一级谱线中将这两条谱线分辨开来，光栅的刻痕数目 N 至少应是多少？

解 由光栅分辨本领 $R=\lambda/\Delta\lambda=kN$，得

$$N=\frac{\lambda}{\Delta\lambda k}=\frac{656.3}{0.18\times1}=3646(条)$$

21-17 以波长为 0.110nm 的 X 射线照射岩盐晶面，实验测得在 X 射线和晶面的夹角为 11°30′时获得第一级极大的反射光，问：

(1)岩盐晶体原子平面间的间距 d 多大？

(2)若以另一束待测的 X 射线照射岩盐晶面，测得 X 射线与晶面的夹角为 17°30′时获得第一级极大的反射光，则待测的 X 射线的波长是多大？

解 (1)由布拉格公式 $2d\sin=k\lambda$，$k=1,2,3,\cdots$ 得

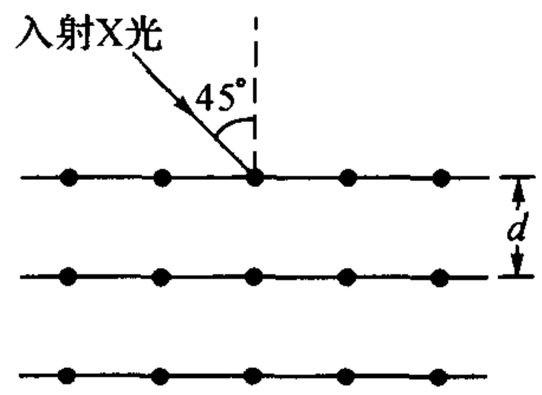
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$d=\frac{k_1\lambda}{2\sin\theta_1}=\frac{0.11\times10^{-9}}{2\times\sin11°30'}=2.76\times10^{-10}(\mathrm{m})=0.276(\mathrm{nm})$$

(2)同理

$$\lambda=\frac{2d\sin\theta}{k}=\frac{2\times2.76\times10^{-10}\times\sin17°30'}{1}=1.66\times10^{-10}(\mathrm{m})=0.166(\mathrm{mm})$$

21-18 如图所示，入射 X 射线束不是单色的，而是含有由 0.095～0.13nm 这一波带中的各种波长，晶体的晶面间距 $d=0.275$nm，问与图中所示平面相联系的衍射的 X 射线是否会产生？



习题 21-18 图

解 由布拉格公式 $2d\sin\theta=k\lambda, k=1,2,3,\cdots$ 得

$$\lambda=\frac{2d\sin\theta}{k}$$

当 $k=1$ 时， $\lambda=2\times0.275\times\sin45°=0.389(\mathrm{nm})$ 在范围外

当 $k=2$ 时， $\lambda=\frac{0.389}{2}=0.194(\mathrm{nm})$ 在范围外

当 $k=3$ 时， $\lambda=\frac{0.389}{3}=0.130(\mathrm{nm})$ 在范围内

当 $k=4$ 时， $\lambda=\frac{0.389}{4}=0.097(\mathrm{nm})$ 在范围内

当 $k=5$ 时， $\lambda=\frac{0.389}{5}=0.078(\mathrm{nm})$ 在范围外

所以只有 $\lambda=0.130$nm 和 $\lambda=0.097$nm 时会产生衍射。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第22章

光的偏振

【基本概念和规律】

1. 光波是横波

光波的五种偏振状态是自然光、线偏振光、部分偏振光、椭圆偏振光、圆偏振光。

2. 产生偏振光的三种方式

产生偏振光的三种方式为偏振片、反射和折射、双折射。

3. 马吕斯定律

强度为 I_0 的线偏振光通过检偏振器后的强度为

$I=I_0\cos^2\alpha$　　α 为线偏振光的振动方向和检偏振器的偏振化方向的夹角

4. 布儒斯特定律

$$\tan i_0=\frac{n_2}{n_1}$$

当入射角为 i_0 时，反射光成为线偏振光。i_0 称为起偏角或布儒斯特角。

5. 双折射现象

光进入晶体后分为 o 光和 e 光；o 光服从折射定律，e 光一般来说不服从折射定律；o 光和 e 光均是线偏振光。

6. 波片

(1)四分之一波片：o 光和 e 光通过波片时的光程差为 $(n_o-n_e)d=\lambda/4$。当 $\theta=\pi/4$ 时，线偏振光通过四分之一波片后变成圆偏振光；当 $\theta\neq\pi/4$ 时，线偏振光通过四分之一波片后变成椭圆偏振光。

(2)二分之一波片：o 光和 e 光通过波片时的光程差为 $(n_o-n_e)d=\lambda/2$。线偏振光通过二分之一波片后仍为线偏振光，但其振动面转过 2θ 角。

7. 偏振光的干涉

利用晶片和偏振片，偏振光可以分成振动方向相同、相位差恒定的相干光而产生干涉。

【解题指导】

● 马吕斯定律中的入射光必须是线偏振光，这一点要注意。自然光经过偏振片后出来的线偏振光的光强是自然光光强的 1/2。

● 寻常光线(o 光)和非常光线(e 光)只有在双折射晶体内才有意义。一旦离开晶体进入空气，就是普通的线偏振光。对某一双折射晶体来说是非常光线的，进入另一双折射晶体后，就不一定。反之亦然。要注意：寻常光线和非常光线一旦在不同双折射晶体内名称改变

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

了，其光学性质（折射率等）也跟着变了。

【习题解答】

22-1 自然光投射到互相重叠的两块偏振片上，若透射光的强度为入射光强度的 1/9，求两块偏振片的偏振化方向的夹角。

解 自然光透过第一块偏振片的光强 $I_1=I_0/2$，由马吕斯定律 $I_2=I_1\cos^2\alpha$ 得

$$\cos^2\alpha=\frac{I_2}{I_1}=\frac{I_0/9}{I_0/2}=\frac{2}{9},\quad \therefore\quad \alpha=61.87^\circ=61^\circ52'$$

22-2 自然光通过两个偏振化方向相交 60°的偏振片时，透射光强为 I_1。今在这两个偏振片之间插入另一偏振片，它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30°角，则透射光强为多少？

解 设自然光光强为 I_0，由题意 $I_1=\frac{I_0}{2}\cos^2 60^\circ=\frac{I_0}{8}$，即 $I_0=8I_1$。再在这两个偏振片之间插入另一偏振片，由马吕斯定律，各偏振片的透射光为

$$I_1'=\frac{I_0}{2},\qquad I_2'=I_1'\cos^2 30^\circ=\frac{3}{8}I_0$$

故

$$I_3'=I_2'\cos^2 30^\circ=\frac{9}{32}I_0=\frac{9}{4}I_1=2.25I_1$$

22-3 用线偏振光和自然光混合的光束垂直照射偏振片，然后转动偏振片，测得透射光光强最大值 I_{max} 和最小值 I_{min} 之比等于 5，求入射光中线偏振光和自然光的光强之比。

解 设自然光光强为 $I_{自}$，偏振光光强为 $I_{线}$，则透射光光强

$$I_{max}=\frac{I_{自}}{2}+I_{线},\qquad I_{min}=\frac{I_{自}}{2}$$

又因为 $I_{max}=5I_{min}$，得

$$I_{线}:I_{自}=2:1$$

22-4 一束自然光通过偏振化方向互成 60°的两个偏振片，若每个偏振片吸收 10%可通过的光线，求出射光强与入射光强之比。

解 设入射的自然光光强为 I_0，通过最后一片偏振片后出来的出射光强为

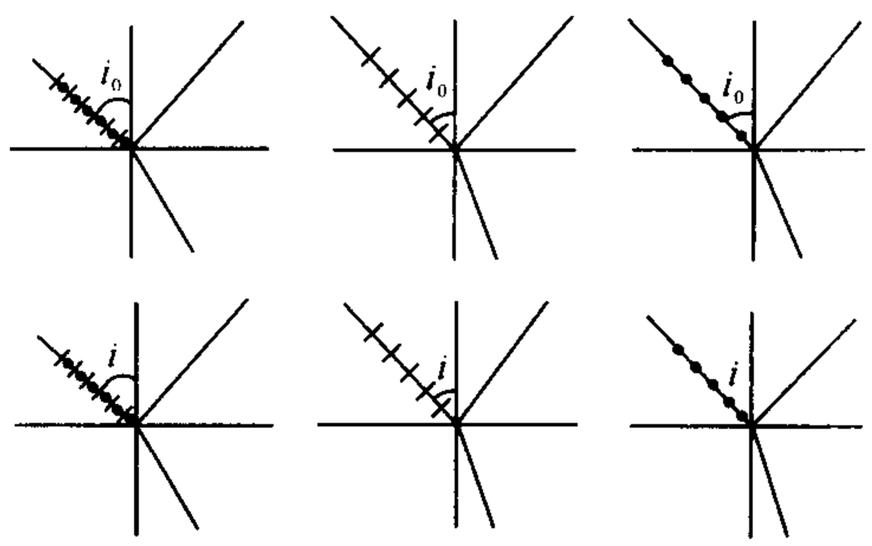
$$I=\frac{I_0}{2}\times 90\%\times\cos^2 60^\circ\times 90\%$$

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}\times(0.90)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{81}{800}=0.101$$

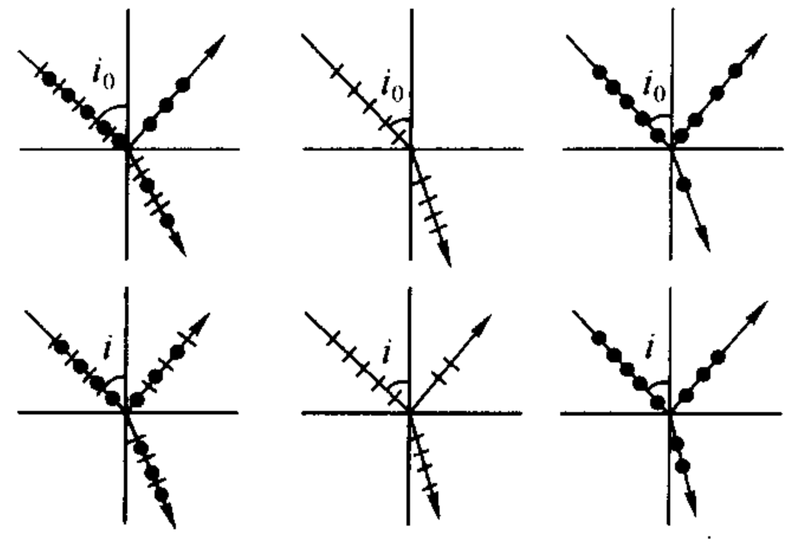
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

22-5 在题图所示的各种情况中，以非偏振光或偏振光入射于两种媒质的分界面，图中 i_0 为起偏振角，$i \neq i_0$，试画出折射光线和反射光线偏振状态。（用点和短线表示）

解 由布儒斯特定律，如图所示。



习题 22-5 图



解 22-5 图

22-6 怎样测定不透明电介质的折射率？今测得釉质的起偏振角 $i_0=58°$，试求它的折射率。

解 可用布儒斯特定律测得折射率 $n=\tan i_0=\tan 58°=1.60$。

22-7 水的折射率为 1.33，玻璃的折射率为 1.50。当光由水中射向玻璃而反射时，起偏角为多少？当光由玻璃射向水中而反射时，起偏角又为多少？

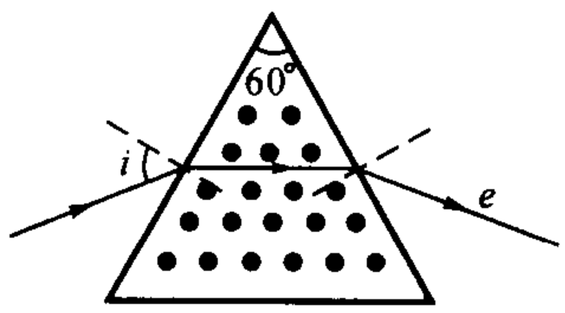
解 由布儒斯特定律，当光由水射向玻璃时有 $\tan i_0=n_2/n_1=1.5/1.33$，得

$$i_0=48°26'$$

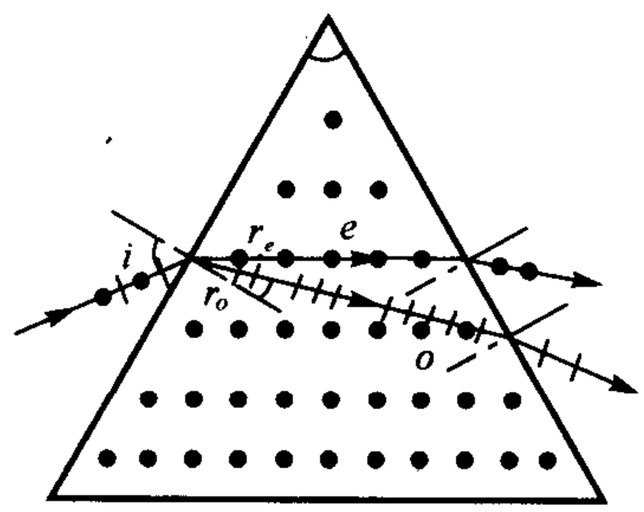
当光由玻璃射向水时，$\tan i_0=n_1/n_2=1.33/1.5$，得

$$i_0=41°34'$$

22-8 用方解石割成一个 60°的正三角形棱镜，光轴垂直于棱镜的正三角形截面。设非偏振光的入射角为 i，e 光在棱镜内的折射线与镜底边平行，如题图所示，求入射角 i，并在图中画出 o 光光路。已知 $n_e=1.49$，$n_o=1.66$。



习题 22-8 图



解 22-8 图

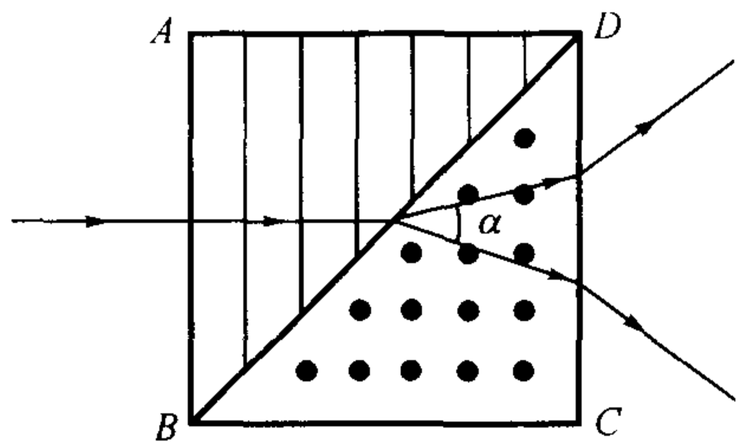
解 设 o 光在方解石晶体内的折射角为 r_o，e 光的折射角为 $r_e=30°$，在此特殊情况下，e 光也遵守折射定律 $\sin i=n_e\sin r_e=1.49\sin 30°=0.745$，则入射角 $i=48°10'$，又 $\sin i=n_o\sin r_o$，

$$\therefore \quad \sin r_o=\frac{\sin i}{n_0}=\frac{0.745}{1.66}=0.449$$

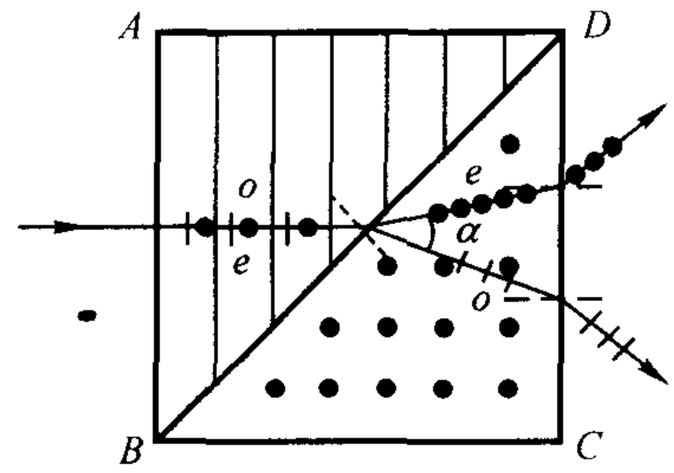
o 光的折射角 $r_o=26°40'$，o 光的光路图如图所示。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

22-9 如题图所示的二维渥拉斯顿(W. H. Wallaston)棱镜的截面是由两个棱角均为45°的直角方解石棱镜粘合其斜面构成的，棱镜 ABD 的光轴平行于 AB，棱镜 BDC 的光轴垂直于图截面。当自然光垂直 AB 入射时，试在图中画出 o 光和 e 光的传播方向及光矢量振动方向。



习题 22-9 图



解 22-9 图

解 当自然光正入射于棱镜 ABD 后，由于光轴平行 AB，振动方向垂直光轴与平行光轴的两种光传播方向相同，并不分开，只是传播速度不同。

穿过分界面进入棱镜 BDC 中，振动方向平行纸面的光从 e 光变为 o 光。因为 $n_e<n_0$，相当于光从光疏介质进入光密介质，折射角小于入射角；而振动方向垂直纸面的光从 o 光变为 e 光，相当于光从光密介质进入光疏介质，折射角大于入射角，故两种光发生分离。如图所示。

22-10 某晶体对波长 632.8nm 的折射率 $n_o=1.66$，$n_e=1.49$。将它制成适用于该波长的四分之一波片，则晶片至少要多厚？

解 设四分之一波片最小厚度为 d，则有 $\delta=(n_o-n_e)d=\frac{1}{4}\lambda$，

$$\therefore\quad d=\frac{\lambda}{4(n_o-n_e)}=\frac{632.8\times10^{-9}}{4\times(1.66-1.49)}=9.306\times10^{-7}(\mathrm{m})=930.6(\mathrm{nm})$$

22-11 两片相互正交的偏振片之间，放置一片四分之一波片。当自然光垂直入射时转动四分之一波片，问什么位置时透射光的光强最大？

解 自然光经过第一偏振片成为线偏振光，设其振幅为 A，四分之一波片的光轴方向与第一偏振片的偏振化方向成 α 角，从第二偏振片出来 o 光和 e 光的振幅分别为

$$A_{e2}=A\sin\alpha\cos\alpha,\qquad A_{o2}=A\sin\alpha\cos\alpha$$

两光线的相位差为 $\Delta\varphi=\pi/2+\pi$，则相干后其合振幅

$$A_{合}=\sqrt{A_{e2}^2+A_{o2}^2+2A_{e2}A_{o2}\cos\Delta\varphi}=\sqrt{2}A\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}A\sin2\alpha$$

由此可见，当 $\sin2\alpha=1$，$\alpha=45°$时，$A_{合}$ 有最大值，透射光强度最大。

22-12 一束波长为 589.3×10^{-9}m 的自然光通过起偏器后垂直地进入石英晶片，该晶片的光轴平行于晶片表面。石英晶体对寻常光线的折射率和对非常光线的主折射率分别为1.5443 和 1.5534。若要使穿过石英晶片后的透射光为圆偏振光，求：

(1)石英晶片的最小厚度；

(2)起偏器的偏振化方向与晶片光轴的夹角。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 (1)光线垂直晶面入射，且光轴与晶面平行的情况是最典型的一种情况，这时晶体中的 o 光和 e 光传播方向相同，两者传播速度和折射率均不同。设晶面的最小厚度为 $d_{\min}$，则 o 光和 e 光的光程差为

$$\delta=(n_e-n_o)d_{\min}=\frac{\lambda}{4}$$

$$d_{\min}=\frac{\lambda}{4(n_e-n_o)}=\frac{589.3\times10^{-9}}{4\times(1.5534-1.5443)}=16.2\times10^{-6}(\mathrm{m})=16.2(\mu\mathrm{m})$$

(2)要成为圆偏振光，偏振化方向和光轴必须成 45°角。

22-13 厚为 0.025mm 的方解石晶片的表面平行于光轴。将其放在两个正交的偏振片之间，光轴与两个偏振片的偏振化方向各成 45°角。如果射入第一个偏振片的光是波长为 400.0～760.0nm 的可见光，问透出第二个偏振片的光中少了哪些波长的光？

解 由题意知，从第二偏振片射出的 o 光和 e 光的 $A_{e2}=A_{o2}$，且两束光的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\pi$$

当 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$ 时，相应的波长就从透射光中消失，故有

$$\lambda=\frac{(n_0-n_e)d}{k}=\frac{(1.658-1.486)\times2.5\times10^{-5}}{k}=\frac{4300}{k}(\mathrm{nm})$$

当 $k\leqslant5$ 时，　　$\lambda\geqslant860\mathrm{nm}$，均在可见光之外

当 $k=6$ 时，　　$\lambda=716.7\mathrm{nm}$

当 $k=7$ 时，　　$\lambda=614.3\mathrm{nm}$

当 $k=8$ 时，　　$\lambda=537.5\mathrm{nm}$

当 $k=9$ 时，　　$\lambda=477.8\mathrm{nm}$

当 $k=10$ 时，　　$\lambda=430\mathrm{nm}$

当 $k\geqslant11$ 时，　　$\lambda\leqslant391.9\mathrm{nm}$

故在透出第二偏振片的光缺少的波长为 $\lambda=430\mathrm{nm}$，477.8nm，537.5nm，614.3nm，716.7nm。

22-14 楔形水晶棱镜顶角 $\alpha=0.5°$，棱边与光轴平行。将其置于两正交的偏振片之间，光轴与两个偏振片的偏振化方向各成 45°角。以水银灯的 404.7nm 紫色光垂直照射，水晶对此光的 $n_o=1.557$，$n_e=1.566$，问：

(1)通过第二个偏振片看到的干涉图样如何？

(2)相邻亮纹的间距 d 是多少？

(3)若第二个偏振片转 90°角，干涉条纹有何变化？

解 (1)垂直通过水晶棱镜的 o 光和 e 光的光程差为 $\delta=(n_e-n_o)x$，x 为光通过处水晶的厚度，因此光程差仅与相应处水晶厚度有关，为等厚干涉，故通过第二个偏振片看到的干涉图样为与棱边平行的明暗相间的直条纹。

(2)相邻条纹的光程差为 $(n_e-n_o)\Delta x=\lambda$，而同时由题意可知，条纹的间距为

$$d=\frac{\Delta x}{\sin\alpha}\approx\frac{\Delta x}{\alpha}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad d=\frac{\lambda}{(n_e-n_0)\alpha}=\frac{4.047\times10^{-7}}{(1.566-1.557)\times\frac{0.5}{180}\times\pi}\approx5.15\times10^{-3}(\mathrm{m})=5.15(\mathrm{mm})$$

(3)若第二个偏振片旋转 90°，两偏振片平行，则从第二个偏振片出射的 o 光和 e 光之间的附加位相差改变 π，故干涉条纹明暗互换，间距不变。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第23章

量子光学基础

【基本概念和规律】

1. 黑体辐射

(1)斯特藩-玻尔兹曼定律：$M_0(T)=\sigma T$

(2)维恩位移定律：$\lambda_m T=b$

(3)普朗克黑体辐射公式：$M_{0,\lambda}(T)=\dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$

2. 光电效应

(1)光电效应方程：$\dfrac{1}{2}mv_m^2=h\nu-W$

(2)红限频率：$\nu_0=\dfrac{W}{h}$

3. 康普顿效应

康普顿效应指X射线通过金属、石墨等物质后，散射光波长改变的现象。

康普顿散射公式：$\Delta\lambda=\dfrac{2h}{m_0c}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$，$\varphi$为散射角。

4. 光的波粒二象性

(1)光子的能量：$E=h\nu$

(2)光子的动量：$p=\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h\nu}{c}$

(3)光子的质量：$m=\dfrac{h\nu}{c^2}$

光的干涉、衍射、偏振现象显示了光的波动性；热辐射、光电效应、康普顿效应显示了光的粒子性。

【解题指导】

● 理解爱因斯坦光子理论的基本概念，即光子的能量 $E=h\nu$，动量 $p=h/\lambda$，静止质量为零。一个光子只要存在，便以光速 c 运动，一旦它不以光速 c 运动，光子就不存在了。

● 光电效应必须正确理解爱因斯坦方程 $h\nu=\dfrac{1}{2}mv_m^2+W$，红限频率 $\nu_0=\dfrac{W}{h}$，以及截止电压 V_0 和初动能的关系为 $\dfrac{1}{2}mv_m^2=eV_0$ 等基本概念及规律。

● 康普顿效应的基本公式为：$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda_0=\dfrac{2h}{m_0c}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$。

必须注意，波长的移动量 $\Delta\lambda$ 仅与散射角 φ 有关，而与入射光子的能量无关。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【习题解答】

23-1 如果将星球看成绝对黑体，则利用维恩位移定律测量 λ_m 便可估计其表面温度。现测得天狼星的 λ_m 为 $0.29\mu m$，试求这颗星球表面的温度。

解 由维恩位移定律，该星球表面的温度

$$T=\frac{b}{\lambda_m}=\frac{2.898\times10^{-3}}{0.29\times10^{-6}}=9.99\times10^{3}(K)$$

23-2 热核爆炸中，火球的瞬时温度达到 10^7K，求：

(1)辐射最强的波长；

(2)这种波长的光子的能量是多少？

解 (1)由维恩位移定律，辐射最强的波长为

$$\lambda_m=\frac{b}{T}=\frac{2.898\times10^{-3}}{10^7}=2.898\times10^{-10}(m)=0.2898(nm)$$

(2)相应光子的能量为

$$E=h\nu=h\frac{c}{\lambda_m}=6.63\times10^{-34}\times\frac{3\times10^8}{2.898\times10^{-10}}=6.86\times10^{-16}(J)$$

23-3 若黑体在加热过程中，其最大单色辐出度的波长由 $0.69\mu m$ 变化到 $0.50\mu m$，求辐射出射度增加了几倍？

解 由维恩位移定律有

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{0.69}{0.50}=1.38$$

再由斯忒藩-玻尔兹曼定律得

$$\frac{M_{B2}}{M_{B1}}=\frac{T_2^4}{T_1^4}=(1.38)^4=3.63$$

故总辐出度增加了 2.63 倍。

23-4 从钠中脱出一个电子至少需要 2.3eV 的能量，今有波长 400.0nm 的光投射到钠表面上，问：

(1)钠的截止波长为多少？

(2)出射光电子的最大动能为多少？

(3)出射光电子的最小动能为多少？

(4)截止电压为多少？

解 由光电效应方程 $h\nu=\frac{1}{2}mv_m^2+W$，得

(1)截止波长为

$$\lambda_0=\frac{hc}{W}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{2.3\times1.6\times10^{-19}}=5.405\times10^{-7}(m)=540.5(nm)$$

(2)光电子的最大动能为

$$E_{k,max}=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{hc}{\lambda}-W=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{4\times10^{-7}}-2.3\times1.6\times10^{-19}=1.29\times10^{-19}(J)$$

(3)光电子的最小动能 $E_{k,min}=0$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(4)由 $eV_a=E_{k,max}$，故截止电压为

$$V_a=\frac{E_{k,max}}{e}=\frac{1.29\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}}=0.81(\mathrm{V})$$

23-5 当钠光灯的黄光($\lambda=589.3\mathrm{nm}$)照射某一光电池时，为了遏止所有电子到达阳极，需要 0.3V 的负电势。如果用波长 $\lambda'=400\mathrm{nm}$ 的光照射这个电池，问要遏止电子需加多大的负电势？

解 由光电效应方程有

$$\frac{1}{2}mv_m^2=h\nu-W,\qquad \frac{1}{2}mv_m^2=eV_a,\qquad \nu=\frac{c}{\lambda}$$

由上面三式可求得逸出功

$$W=\frac{hc}{\lambda}-eV_a$$

当用 $\lambda'=400\mathrm{nm}$ 照射，由以上各式可得

$$V_a'=\frac{1}{e}(h\nu'-W)=\frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda'}-\frac{hc}{\lambda}+eV_a\right)=V_a+\frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$=0.3+\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.6\times10^{-19}}\left(\frac{1}{4.0\times10^{-7}}-\frac{1}{5.893\times10^{-7}}\right)=1.3(\mathrm{V})$$

23-6 在一定条件下，人眼视网膜能够对 5 个蓝绿光的光子($\lambda=500\mathrm{nm}$)产生光的感觉。此时视网膜上接收的光能量为多少？如果每秒钟都能吸收 5 个这样的光子，则到达眼睛的功率为多少？

解 视网膜接收的光能量为

$$E=Nh\nu=Nh\frac{c}{\lambda}=5\times6.63\times10^{-34}\times\frac{3\times10^{8}}{5\times10^{-7}}=1.99\times10^{-18}(\mathrm{J})$$

则到达眼睛的功率为

$$P=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=1.99\times10^{-18}\mathrm{W}$$

23-7 单位时间内太阳辐射到地球上每单位面积的能量为 $0.14\mathrm{J/(cm^2\cdot s)}$。假定太阳辐射的平均波长为 550.0nm，问这相当于每秒钟辐射到地球表面每平方厘米上多少个光子？

解 每个光子的能量为

$$E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{5.5\times10^{-7}}=3.62\times10^{-19}(\mathrm{J})$$

每秒钟辐射到地球表面每平方厘米上的光子数为

$$N=\frac{0.14}{3.62\times10^{-19}}=3.87\times10^{17}(\text{个})$$

23-8 在康普顿散射中，入射光子的波长为 0.003nm，反冲电子的速率为光速的 60%，求散射光子的波长及散射角。

解 反冲电子的动能为

$$E_k=mc^2-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(0.6c/c)^2}}-m_0c^2=0.25m_0c^2$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

电子能量的增加等于光子能量的损失，所以 $0.25m_0c^2=hc/\lambda_0-hc/\lambda$，由此得

$$\lambda=\frac{h\lambda_0}{h-0.25m_0c\lambda_0},=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{-12}}{6.63\times10^{-34}-0.25\times9.1\times10^{-31}\times3\times10^{8}\times3\times10^{-12}}$$
$$=4.3\times10^{-12}(\mathrm{m})=4.3\times10^{-3}(\mathrm{nm})$$

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

而 $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\Delta\lambda m_0c}{2h}=0.2676$，$\therefore\quad \sin\frac{\varphi}{2}=0.5173$

$$\therefore\quad \varphi=62°18'$$

23-9 已知 X 射线光子的能量为 0.6MeV，在康普顿散射之后波长变化了 20%，求反冲电子所获得的能量。

解 由 $E=\frac{hc}{\lambda}$ 先求出散射前 X 射线的波长

$$\lambda_0=\frac{hc}{E}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{0.6\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}=2.07\times10^{-12}(\mathrm{m})$$

则散射后的波长为

$$\lambda=\lambda_0+\Delta\lambda=\lambda_0+0.2\lambda_0=1.2\lambda_0=2.48\times10^{-12}\mathrm{m}$$

由能量守恒定律，反冲电子的能量为

$$E_k=E-E'=\frac{hc}{\lambda_0}-\frac{hc}{\lambda}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{hc}{\lambda}=0.2\times\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{2.48\times10^{-12}}$$
$$=1.60\times10^{-14}(\mathrm{J})=0.1(\mathrm{MeV})$$

23-10 用波长为 0.10nm 的光子做康普顿散射实验。

(1)若某散射线的波长为 0.102 4nm，求对应的散射角的大小；

(2)分配给这个散射电子的动能有多少电子伏特？

解 (1)$\lambda-\lambda_0=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)$，化简后得

$$\cos\varphi=1-\frac{(\lambda-\lambda_0)m_0c}{h}=1-\frac{(0.1024-0.1)\times10^{-9}\times9.1\times10^{-31}\times3\times10^{8}}{6.63\times10^{-34}}$$
$$=1-0.99\approx0$$

$$\therefore\quad \varphi=90°$$

(2)由光子与电子在弹性碰撞中能量守恒得

$$m_0c^2+h\frac{c}{\lambda_0}=mc^2+h\frac{c}{\lambda}$$

故散射电子动能为

$$E_k=mc^2-m_0c^2=hc\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$=6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}\times\left(\frac{1}{0.1\times10^{-9}}-\frac{1}{0.1024\times10^{-9}}\right)$$
$$=4.66\times10^{-17}(\mathrm{J})=291(\mathrm{eV})$$

23-11 若一个光子的能量等于一个电子的静能量，试问该光子的频率、波长和动量分别是多少？在电磁波谱中属于何种射线？

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解 电子静止能量为 $E=m_0c^2$，相应光子的频率

$$\nu=\frac{E}{h}=\frac{m_0c^2}{h}=\frac{9.1\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2}{6.63\times10^{-34}}=1.24\times10^{20}(\mathrm{Hz})$$

光子的波长

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{3\times10^8}{1.24\times10^{20}}=2.43\times10^{-3}(\mathrm{nm})$$

光子的动量

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2.43\times10^{-3}}=2.73\times10^{-22}(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

由于 $\lambda=0.0024\mathrm{nm}$，故该光波在电磁波中属于 X 射线。

23-12 一标准米的长度定义为^{86}Kr 的橙黄色辐射光之波长的 1 650 763.73 倍。试问这种辐射的一个光子所具有的能量是多少？

解 由题意可知^{86}K$_r$ 的橙黄辐射光的波长为

$$\lambda=\frac{1}{1650763.73}=6.058\times10^{-7}(\mathrm{m})=605.8(\mathrm{nm})$$

相应光子的能量为

$$E=h\nu=h\frac{c}{\lambda}=6.63\times10^{-34}\times\frac{3\times10^8}{6.058\times10^{-7}}=3.28\times10^{-19}(\mathrm{J})$$

23-13 设激光束的发散角为 1mrad，问从地球射到月球上时，在月球上形成的光斑直径有多大？（已知地球至月球的距离约为 $4\times10^5\mathrm{km}$）

解 由题意知

$$d=h\theta=4\times10^8\times10^{-3}=4\times10^5(\mathrm{m})=400(\mathrm{km})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第24章

原子的玻尔理论

【基本概念和规律】

1. 原子模型

(1)汤姆孙模型。

(2)卢瑟福核模型。α 粒子散射实验证实了卢瑟福核模型的正确性。

2. 氢原子光谱的规律性

$$\nu=\frac{1}{\lambda}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad m=1,2,3,\cdots;\quad n=m+1,m+2,m+3,\cdots$$

3. 波尔假设与理论

(1)玻尔假设:

①定态假设:$E=E(n)$, $n=1,2,3,\cdots$

②跃迁假设:$h\nu=E_n-E_k$

③量子化条件:$L=n\hbar$, $n=1,2,3,\cdots$

(2)玻尔氢原子理论。

电子轨道半径量子化:$r_n=n^2a_0$, $n=1,2,3,\cdots$,式中 a_0 为电子第一轨道半径,称为玻尔半径。

原子能量的量子化:氢原子能量 $E_n=-\frac{13.6}{n^2}\mathrm{eV}$, $n=1,2,3,\cdots$

4. 玻尔理论的地位和缺陷

玻尔理论是原子结构理论发展中的伟大的一步,具有历史意义。玻尔理论的缺陷是没有形成一个完整的理论体系,是在经典理论的基础上加上量子化条件。

【解题指导】

● 氢是最轻和最简单的原子,因此在所有元素中,氢具有最简单的光谱,氢原子的所有波长都可以用一个实验公式表示出来,即$\frac{1}{\lambda}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$。它称为里德伯公式。

● 会运用玻尔氢原子理论中的能级公式 $E_n=-\frac{13.6}{n^2}\mathrm{eV}$、跃迁条件 $h\nu=E_n-E_k$ 以及电子轨道角动量量子化条件 $L=n\hbar$。

注意:氢原子处在激发态时是不稳定的,电子总要从激发态跃迁到基态。应掌握跃迁图与光谱系、光谱线总数等概念或定义。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【习题解答】

24-1 根据玻尔的氢原子理论，分别计算氢原子处于基态时电子的下列各种物理量：

(1)角动量；

(2)线动量(即 $p=mv$)；

(3)角速度；

(4)绕核转动的频率；

(5)加速度。

解 (1)$L=n\hbar=\hbar$。

(2)由角动量量子化条件 $L=mvr_1=\hbar$ 得线动量为

$$p=mv=\frac{\hbar}{r_1}=\frac{\hbar}{a_0}$$

(3)由上式得 $v=\dfrac{\hbar}{ma_0}=a_0\omega$，即有

$$\omega=\frac{\hbar}{ma_0^2}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\times3.14\times9.1\times10^{-31}\times(0.529\times10^{-10})^2}=4.14\times10^{-16}(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$$

(4)由 $\omega=2\pi\nu$ 得绕核转动频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{4.14\times10^{-16}}{2\times3.14}=6.59\times10^{-15}(\mathrm{Hz})$$

(5)由牛顿定律得 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{a_0^2}=ma$，化简后得加速度为

$$a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{ma_0^2}=9\times10^9\ \frac{(1.6\times10^{-19})^2}{9.1\times10^{-31}\times(0.529\times10^{-10})^2}=9.05\times10^{22}(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

24-2 若已知氢原子中的电子从量子数为 n 的轨道跃迁到量子数为 m 的轨道(即 $n\to m$)，$m=2$ 时发出辐射波长 $\lambda=487\mathrm{nm}$ 的光子，试计算 n 轨道的半径。

解 由里德伯公式

$$\frac{1}{\lambda}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right),\qquad n=3,4,\cdots$$

化简后得

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{R_{\mathrm{H}}\lambda}=\frac{1}{4}-\frac{1}{1.097\times10^7\times487\times10^{-9}}=0.0628\qquad\therefore\quad n=4$$

由玻尔理论

$$r_n=n^2a_0=4^2\times0.53\times10^{-10}=8.48\times10^{-10}(\mathrm{m})$$

24-3 试计算氢原子中巴耳末系的最短波长和最长波长。

解 巴耳末系相应于 $k=2$，于是根据巴耳末公式有

$$\frac{1}{\lambda}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right),\quad n=3,4,5,\cdots$$

当 $n=\infty$ 时，对应的波长最短，由

$$\frac{1}{\lambda_{\min}}=1.097\times10^7\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)\qquad\therefore\quad\lambda_{\min}=364.6\mathrm{nm}$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

当 $n=3$ 时，对应的波长最长

$$\frac{1}{\lambda_{max}}=1.097\times10^{7}\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\qquad\therefore\quad\lambda_{max}=656.3\text{nm}$$

24-4 要使氢原子电离成为氢离子，可用入射电子碰撞氢原子使其电离，也可用光照射使其电离。试计算用上述两种方法使氢原子电离时，

(1)入射电子的动能至少要多大？

(2)入射光波长最长是多少？

解 (1)要使处在基态的氢原子电离，入射电子的动能至少应等于电离能，即

$$E_k\geqslant E_{电离}=E_{\infty}-E_1=13.6\text{eV}$$

若入射电子动能大于 13.6eV，多余的能量变为入射电子碰撞后所具有动能。

(2)由上面分析可知，入射光子的能量至少为

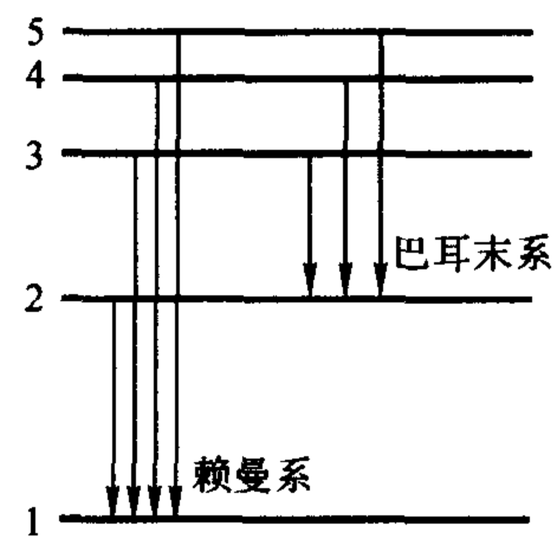
$$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}=13.6\text{eV}$$

于是可得入射光的最长波长为

$$\lambda_{max}=\frac{hc}{E}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{13.6\times1.6\times10^{-19}}=9.14\times10^{-8}(\text{m})=91.4(\text{nm})$$

24-5 处在基态的氢原子被外来单色光激发后发出的巴耳末系中仅观察到三条光谱线，试求这三条谱线的波长以及外来光的频率。

解 氢原子的能级及跃迁如图所示。



解 24-5 图

巴耳末线系是由 $n>2$ 的高能级跃迁到 $n=2$ 的能级时发出的谱线，只有三条谱线说明激发后的最高能态是 $n=5$ 的激发态，发现的巴耳末线系中三条谱线分别对应于 3→2，4→2 和 5→2 的跃迁。

$$\because\quad\frac{1}{\lambda_{32}}=1.097\times10^{7}\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right),\quad\therefore\quad\lambda_{32}=656.3\text{nm}$$

$$\because\quad\frac{1}{\lambda_{42}}=1.097\times10^{7}\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right),\quad\therefore\quad\lambda_{42}=486.2\text{nm}$$

$$\because\quad\frac{1}{\lambda_{52}}=1.097\times10^{7}\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right),\quad\therefore\quad\lambda_{52}=434.1\text{nm}$$

由于氢原子通常在基态，吸收一个光子 $h\nu$ 后被激发到 $n=5$ 的能态，所以外来光的频率为

$$\nu=\frac{E_5-E_1}{h}=\frac{(-13.6/5^2+13.6)\times1.6\times10^{-19}}{6.63\times10^{-34}}=3.15\times10^{15}(\text{Hz})$$

24-6 试确定氢原子位于可见光谱区域(380～770nm)的各谱线的波长。

解 可见光谱区域对应的巴耳末系，由公式

$$\frac{1}{\lambda_{n2}}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)\qquad n=3,4,5,\cdots$$

得

$$\lambda_{n2}=\frac{1}{1.09\times10^{7}}\left(\frac{4n^2}{n^2-4}\right)\qquad n=3,4,5,\cdots$$

由于可见光谱的范围为 380nm～760nm，故只有 $n\leqslant10$ 时，其对应谱线才在上述区域内，相应的波长为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$n=3$ $\lambda_{32}=656.3\text{nm}$

$n=4$ $\lambda_{42}=486.2\text{nm}$

$n=5$ $\lambda_{52}=434.1\text{nm}$

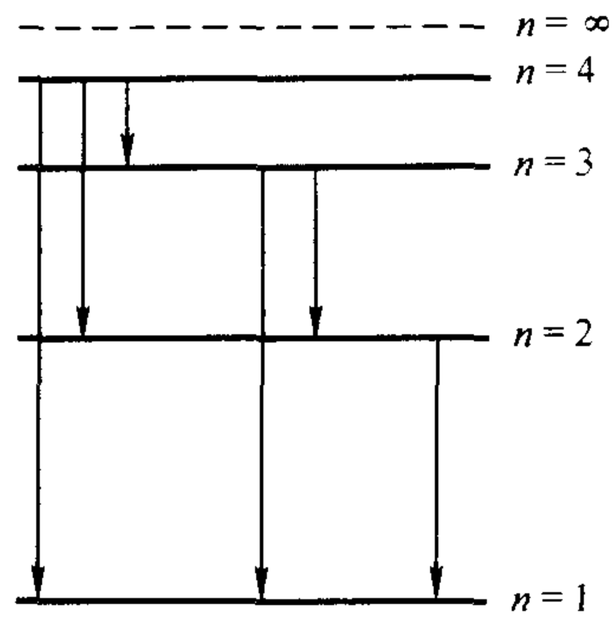
$n=6$ $\lambda_{62}=410.2\text{nm}$

$n=7$ $\lambda_{72}=397.0\text{nm}$

$n=8$ $\lambda_{82}=388.9\text{nm}$

$n=9$ $\lambda_{92}=383.6\text{nm}$

$n=10$ $\lambda_{102}=379.8\text{nm}$



解 24-7 图

24-7 若某氢原子从 $n=1$ 的基态被激发到 $n=4$ 的激发态，试计算：

(1)该氢原子所必须吸收的能量；

(2)这个氢原子回到基态的过程中，可能发出的各种光子的能量。在能级图上把发出这些不同光子的跃迁过程表示出来。

解 (1)根据氢原子的能量公式有

$$E_n=-\frac{13.6}{n^2}\text{eV}$$

氢原子从基态跃迁到激发态所需吸收的能量

$$\Delta E=-13.6\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{1^2}\right)=12.8(\text{eV})$$

(2)跃迁过程中相应发出的各个光子能量为

$$4\to1\quad E=E_4-E_1=12.8\text{eV}$$
$$4\to2\quad E=E_4-E_2=2.55\text{eV}$$
$$4\to3\quad E=E_4-E_3=0.66\text{eV}$$
$$3\to1\quad E=E_3-E_1=12.1\text{eV}$$
$$3\to2\quad E=E_3-E_2=1.89\text{eV}$$
$$2\to1\quad E=E_2-E_1=10.2\text{eV}$$

其跃迁图如图所示。

24-8 用可见光照射能否使处于基态的氢原子受到激发？若改用加热的方法，问至少需加热到多高温度才能使其激发？若要使氢原子电离，则至少要加热到多高的温度？

解 要使处在基态的氢原子受到激发的最小能量为 $\Delta E=E_2-E_1=10.2\text{eV}$，同时可见光中能量最大的为紫光，发出 $\lambda=400\text{nm}$ 的光子，相应的能量为

$$E=h\nu=h\frac{c}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{4\times10^{-7}}=4.97\times10^{-19}(\text{J})=3.1(\text{eV})<\Delta E$$

因此可见光不能激发基态的氢原子。因为氢原子的平均平动动能为 $\frac{3}{2}kT$，要使基态氢原子激发的最低温度为

$$T_1=\frac{2\Delta E}{3k}=\frac{2\times10.2\times1.6\times10^{-19}}{3\times1.38\times10^{-23}}=7.88\times10^{4}(\text{K})$$

使氢原子电离所需最低温度为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$T_2=\frac{2\times13.6\times1.6\times10^{-19}}{3\times1.38\times10^{-23}}=1.05\times10^5(\mathrm{K})$$

24-9 一电子与一质子相距很远，若该电子以 2eV 的动能向着质子运动并被质子所捕获，形成一个基态的氢原子，求此过程中所发出光子的波长。

解 电离了的电子（自由电子）被质子捕获时，应当放出能量为 $E=E_{电离能}+E_k$ 的光子，即

$$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}=13.6\mathrm{eV}+2\mathrm{eV}=15.6\mathrm{eV}$$

放出光子的波长为

$$\lambda=\frac{hc}{15.6}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{15.6\times1.6\times10^{-19}}=7.97\times10^{-8}(\mathrm{m})$$

这种谱线属于连续光谱区域，是因具有动能 E_k 的自由电子被正离子捕获而发出的单色光。

24-10 用波长 $\lambda=102.8\mathrm{nm}$ 的单色光激发氢原子使其发光，求氢原子所发光的波长。

解 波长 $\lambda=102.8\mathrm{nm}$ 单色光的光子能量为

$$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{102.8\times10^{-9}}=19.35\times10^{-19}(\mathrm{J})=12.1(\mathrm{eV})$$

假设氢原子能激发到 n 级的激发态，则 $-13.6\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=12.1$， 得 $n=3$。氢原子再从 $n=3$ 激发态向下跃迁：

$$3\to1\qquad \frac{1}{\lambda_{31}}=1.097\times10^7\times\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{1^2}\right),\quad \lambda=102.6\mathrm{nm}$$

$$3\to2\qquad \frac{1}{\lambda_{32}}=1.097\times10^7\times\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}\right),\quad \lambda_{32}=656.3\mathrm{nm}$$

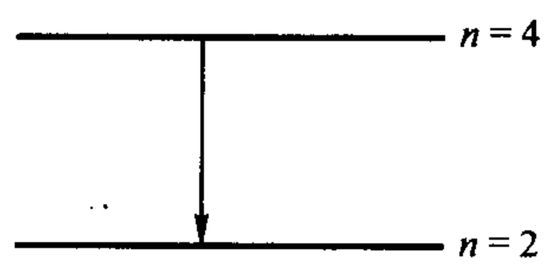
$$2\to1\qquad \frac{1}{\lambda_{21}}=1.097\times10^7\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right),\quad \lambda_{21}=121.5\mathrm{nm}$$

24-11 氢原子处于电离能为 0.85eV 的定态中，它由这一定态向激发能（即该态和基态的能量差）为 10.2eV 的另一定态跃迁时，所产生的谱线波长是多少？属什么线系？在能级图上如何表示相应的跃迁？

解 由氢原子在各能量态的电离能为 $\frac{13.6}{n^2}\mathrm{eV}$，可推知电离能为 0.85eV 定态的 $n=4$，激发能为 10.2eV 的定态的 $n=2$，当 $n=4$ 到 $n=2$ 跃迁发出的波长为

$$\frac{1}{\lambda_{42}}=1.097\times10^7\times\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^2}\right),\quad \lambda_{42}=486.2(\mathrm{nm})$$

它属于巴耳末线系，其跃迁图如图所示。



解 24-11 图

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第25章

量子力学基础

【基本概念和规律】

1. 德布罗意波

戴维孙-革末实验证实了德布罗意波的存在。德布罗意关系式：$\lambda=\frac{h}{mv}$。

2. 不确定性原理

(1)位置和动量的不确定关系：$\Delta x\cdot\Delta p_x\geqslant\frac{\hbar}{2}$

(2)能量和时间的不确定关系：$\Delta E\cdot\Delta t\geqslant\frac{\hbar}{2}$

3. 薛定谔方程

(1)定态薛定谔方程：$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar}(E-U)\psi=0$ 是一个非相对论量子力学的基本方程。

(2)玻恩关于波函数的统计解释。

(3)波函数要满足单值、连续和有限的标准化条件，还要满足归一化条件：$\int_v\Psi^*\Psi\mathrm{d}V=1$。其中概率密度 $\Psi^*\Psi$ 表示粒子 t 时刻在(x,y,z)处单位体积内出现的概率。

4. 一维无限深势阱

一维无限深势阱是应用定态薛定谔方程的最简单的例子，能加深对能量量子化的认识。

5. 势垒和隧道效应

隧道效应是量子力学的特有现象，实际上是微观粒子具有波动性和不确定性原理应用的一个例子。扫描隧道显微镜(STM)是根据隧道效应原理制成的。

6. 四个量子数

四个量子数是描述原子中电子运动状态的四个参数。

(1)主量子数 n：　$n=1,2,3,\cdots$

(2)角量子数 l：　$l=0,1,2,\cdots,(n-1)$

(3)磁量子数 m_l：　$m_l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$

(4)自旋磁量子数 m_s：　$m_s=\pm\frac{1}{2}$

【解题指导】

● 光子和实物粒子的差别

(1)光子静止时质量为零，实物粒子静止时质量不等于零，所以光子不是实物粒子。

(2)光子和实物粒子还有一个重要区别，就是它们的波动性和粒子性相联系的方式不

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

同。对于光子，它属于电磁辐射的波粒二象性，光子能量 $E=h\nu$，光子的动量 $p=h/\lambda$。我们没有必要分别通过能量和动量公式来求出波长 λ 和频率 ν，只需利用这两个公式中的任何一个公式，再由 $c=\lambda\nu$ 的关系式就可以把波长和频率都求出来了。对于实物粒子，它是实物粒子的波粒二象性，两者是有区别的，它有两个独立的关系式 $\lambda=h/p$ 和 $\nu=E/h$，而且实物粒子的运动速度 v 不能通过 $v=\lambda\nu$ 关系式联系起来，即德布罗意波的波长和频率与实物粒子运动速度之间不存在上述关系式。因此，我们必须分别通过实物粒子波长 $\lambda=h/p$ 和频率 $\nu=E/h$ 这样两个独立的关系式来求出德布罗意波的波长和频率，这一点要特别引起注意。

● 对于求波函数中的未知常数的问题，可以通过波函数的归一化条件求解。在已知波函数的情况下，熟练掌握计算概率密度分布和概率的方法。

【习题解答】

25-1 试求下列粒子相应的德布罗意波长：

(1)一质量为 1.0×10^{-15}kg、速度为 $2.0\times10^{-3}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$运动的病毒分子；

(2)动能为 120eV 的电子。

解 (1)根据德布罗意关系式

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{1.0\times10^{-15}\times2.0\times10^{-3}}=3.32\times10^{-16}(\text{m})=3.32\times10^{-7}(\text{nm})$$

(2)忽略相对论效应时，$E_k=\frac{p^2}{2m}$，$p=\sqrt{2mE_k}$，再由德布罗意关系式

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times9.1\times10^{-31}\times120\times1.6\times10^{-19}}}=1.12\times10^{-10}(\text{m})=0.112(\text{nm})$$

25-2 花粉颗粒作布朗运动。已知花粉颗粒的质量为 1.0×10^{-13}kg，速度为 $1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，问：花粉颗粒的德布罗意波长为多少？花粉颗粒的波动性能觉察到吗？

解 $$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{1\times10^{-13}\times1}=6.63\times10^{-21}(\text{m})=6.63\times10^{-12}(\text{nm})$$

故觉察不到花粉颗粒的波动性。

25-3 由于衍射，显微镜可达到的最高分辨率受所用光波的限制。根据瑞利判据，显微镜所能分辨的最小细节大约等于所使用光的波长。假如我们想用电子显微镜分辨 0.01nm 的细节，至少要用多大的加速电压来加速电子？

解 由德布罗意关系式知电子的动量 $p=h/\lambda$。忽略相对论效应时，$E_k=\frac{p^2}{2m}=eV$，故需要的加速电压为

$$V=\frac{p^2}{2me}=\frac{h^2}{2me\lambda^2}=\frac{(6.63\times10^{-34})^2}{2\times9.1\times10^{-31}\times1.6\times10^{-19}\times(10^{-11})^2}=1.5\times10^4(\text{V})$$

25-4 分别计算动能均为 1eV 的电子、中子和质子的德布罗意波长。

解 忽略相对论效应时

$$p=\sqrt{2mE_k}$$

电子的德布罗意波长为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\lambda_{电}=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times9.1\times10^{-31}\times1.6\times10^{-19}}}=1.23\times10^{-9}(\mathrm{m})=1.23(\mathrm{nm})$$

质子和中子的德布罗意波长为

$$\lambda_{质}=\lambda_{中}=\frac{h}{\sqrt{2m'E_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times1.67\times10^{-27}\times1.6\times10^{-19}}}$$
$$=2.87\times10^{-11}(\mathrm{m})=2.87\times10^{-2}(\mathrm{nm})$$

25-5 假设热中子的平均动能为$\frac{3}{2}kT$(玻尔兹曼常量$k=1.38\times10^{-23}\mathrm{J\cdot K^{-1}}$),试计算室温(25℃)下热中子的德布罗意波长。

解 忽略相对论效应时,热中子的动量为

$$p=\sqrt{2mE_k}=\sqrt{2m\cdot\frac{3}{2}kT}=\sqrt{3mkT}$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{3mkT}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{3\times1.67\times10^{-27}\times1.38\times10^{-23}\times(273+25)}}$$
$$=1.46\times10^{-10}(\mathrm{m})=0.146(\mathrm{nm})$$

25-6 电子和光子的波长均为0.2nm,试求它们相应的动量和动能。

解 电子和光子的动量均为

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.2\times10^{-9}}=3.32\times10^{-24}(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

忽略相对论效应时,电子的动能为

$$E_{k电}=\frac{p^2}{2m}=\frac{(3.32\times10^{-24})^2}{2\times9.1\times10^{-31}}=6.06\times10^{-18}(\mathrm{J})=37.9(\mathrm{eV})$$

光子的动能就是其总能量

$$E_{k光}=pc=3.32\times10^{-24}\times3\times10^{8}=9.96\times10^{-16}(\mathrm{J})=6.23(\mathrm{keV})$$

25-7 质量为0.04kg的子弹以1 000m·s^{-1}的速度从枪口射出,试求:

(1)该子弹的德布罗意波长;

(2)若枪口的直径为0.1m,子弹射出枪口时的横向速度。

解 (1)子弹的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.04\times1000}=1.66\times10^{-35}(\mathrm{m})=1.66\times10^{-26}(\mathrm{nm})$$

(2)子弹沿某x方向位置不确定量为Δx,其沿该方向的动量不确定量$\Delta p_x=m\Delta v_x$,则由不确定性关系式$\Delta p_x\Delta x\geqslant\hbar/2$得

$$\Delta v_x=\frac{\hbar}{2m\Delta x}=\frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi\times0.04\times0.1}=1.32\times10^{-32}(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

由此可见,宏观粒子的速度不确定量远在可观察的范围之外,故可以不考虑粒子的波动性,即按经典理论处理也可得准确结果。

25-8 某电子产品制造商声称其电磁波频率计可定时每秒读数一次,精确度为0.01Hz,试判断该制造商的话是否可信?

解 由不确定性关系,有$\Delta E\Delta t\geqslant\hbar/2$。因为频率计每秒测1次,所以$\Delta t=1\mathrm{s}$,故有

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\Delta E=h\cdot\Delta\nu\geqslant\frac{\hbar}{2\Delta t},\quad \Delta\nu\geqslant\frac{\hbar}{2h\Delta t}=\frac{h}{4\pi h\cdot\Delta t}=0.08\text{Hz}>0.01\text{Hz}$$

故达不到准确度 0.01Hz，制造商的话不可信。

25-9 假设电视机显像管中的加速电压为 9kV，电子枪的枪口直径取 0.50mm，枪口离荧光屏的距离为 0.30m。根据不确定性原理，试求荧光屏上一个电子形成的亮斑直径。这样的亮斑直径会影响电视图像的清晰度吗？

解 电子的动能为 $E_k=\frac{p^2}{2m}$，故电子的动量为 $p=\sqrt{2mE_k}$，故电子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times9.1\times10^{-31}\times9\times10^{3}\times1.6\times10^{-19}}}=1.29\times10^{-11}(\text{m})$$

由测不准关系得

$$\Delta x\Delta p_x=\frac{\hbar}{2}=\frac{h}{4\pi},\quad \Delta p_x=\frac{h}{4\pi\Delta x}$$

$$\Delta p_x=p\sin\varphi=\frac{h}{\lambda}\sin\varphi$$

而

$$\therefore\quad \sin\varphi=\frac{\lambda}{4\pi\Delta x}$$

荧光屏上电子亮斑直径为

$$d=2x_1=2L\tan\varphi\approx2L\sin\varphi=2L\frac{\lambda}{4\pi\Delta x}=\frac{L\lambda}{2\pi\Delta x}$$

$$=\frac{0.3\times1.29\times10^{-11}}{2\times3.14\times0.5\times10^{-3}}=1.2\times10^{-9}(\text{m})=1.2(\text{nm})$$

故不会影响图像的清晰度。

25-10 1974 年，法兰克福国立实验室和斯坦福大学的两个研究小组各自独立地同时发现了一个重要的新粒子。该粒子的质量是质子的 3 倍，它的静止能量为 3 097MeV，测量的不准确度仅为 0.063MeV。这样的重粒子会极快地衰变成轻粒子，试计算上述粒子的平均寿命。

解 因 $\Delta E=0.063\text{MeV}$，由不确定性关系有

$$\Delta t\geqslant\frac{\hbar}{2\Delta E}=\frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi\times0.063\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}=5.2\times10^{-21}(\text{s})$$

故上述粒子的平均寿命为

$$\tau=5.2\times10^{-21}\text{s}$$

25-11 玻尔假设氢原子的电子在轨道上运动。已知电子的质量为 9.1×10^{-31}kg，运动速度为$10^6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，位置不确定量 $\Delta x=10^{-10}$m（原子半径），试求电子速度的不确定量。

解 根据不确定性关系得

$$\Delta v_x\geqslant\frac{\hbar}{2m\Delta x}=\frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi\times9.1\times10^{-31}\times10^{-10}}=5.8\times10^{5}(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

由此可见，Δv_x 与 v_x 已达到同一个数量级，故描述微观粒子继续用轨道概念已不正确了。

25-12 一个质量为 m 的粒子被限制在宽度为 l 的一维无限深势阱中，试用不确定关系

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

估算此粒子的最小能量。由此估算在直径 10^{-14}m 的核内质子和中子的最小动能。

解 由题意可知其位置的不确定量为 $\Delta x=l$，再根据不确定性关系有

$$\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta x}=\frac{h}{4\pi l}$$

取 $p_{x,\min}=\Delta p_x$，粒子的能量为

$$E=\frac{p_{x,\min}^2}{2m}=\frac{h^2}{32\pi^2 ml^2}$$

这个结果说明，由于不确定性关系的限制，上述粒子的动能永远不会小于该数值。

相应地，在直径 10^{-14}m 核内质子和中子的最小动能为

$$E_{kp}=E_{kn}=\frac{(6.63\times10^{-34})^2}{32\pi^2\times1.67\times10^{-27}\times(10^{-14})^2}=8.33\times10^{-15}(\mathrm{J})=5.2\times10^4(\mathrm{eV})$$

25-13 试利用不确定关系估算氢原子基态的能量和第一玻尔半径。

解 氢原子中电子的位置不确定量可视为轨道半径 r，动量的不确定量可视为电子动量 p，由不确定性关系的近似表达式 $\Delta x\Delta p_x\sim\hbar$，得 $rp\sim\hbar$，则氢原子的总能量为

$$E=E_k+U=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\hbar}{2mr^2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

稳定时

$$\frac{\partial E}{\partial r}=-\frac{\hbar^2}{mr^3}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=0$$

$$\therefore\quad r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}=\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi me^2}\approx0.529\times10^{-10}\mathrm{m}$$

此即第一玻尔半径，将 r_1 代入能量表达式，得

$$E=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}=-13.6\mathrm{eV}$$

25-14 设一粒子处在宽度为 l 的一维无限深势阱中，当粒子处在第一激发态($n=2$)时，试求：

(1)粒子出现概率密度最大的位置？

(2)$0\sim l/3$ 范围内发现粒子的概率。从经典物理考虑，该概率又应是多少？

解 在一维无限深势阱中，粒子的波函数为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad n=1,2,3,\cdots$$

当粒子处在 $n=2$ 的激发态时

$$\psi_2(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}$$

(1)因为粒子的概率密度为 $|\psi_2(x)|^2=\frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}$，概率密度最大的位置为 $\frac{\partial|\psi_2(x)|^2}{\partial x}=0$，由此得 $x=\frac{l}{4},\frac{3l}{4}$。

(2)因为在 $0\sim\frac{l}{3}$ 范围内发现粒子的概率为 $P=\int_0^{\frac{l}{3}}|\psi_2(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{l}{3}-\frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3}=0.40$。在经典物理中，在$[0,l]$区间内的概率密度处处相同，故有

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$P' = \frac{1}{3}$$

25-15 已知某粒子的波函数 $\psi(x)=\begin{cases}0 & (x<0,x>L)\\ Ax(L-x) & (0\leqslant x\leqslant L)\end{cases}$，试求：

(1)归一化常量 A；

(2)粒子出现在 $0\sim0.1L$ 区间的概率。

解 (1)由波函数归一化条件得

$$\int_V \psi^*\psi \mathrm{d}V = \int_0^L A^2x^2(L-x)^2\mathrm{d}x = 1,\quad A=\sqrt{\frac{30}{L^5}}$$

(2) 粒子在 $0\sim0.1L$ 区间出现的概率为

$$P=\int_0^{0.1L}\psi^*\psi\mathrm{d}x=\int_0^{0.1L}A^2x^2(L-x)^2\mathrm{d}x=8.6\times10^{-3}$$

25-16 设某一个作一维运动的粒子处在以下状态：$\psi(x)=\begin{cases}Ax\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x\geqslant0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$，在上式中 $\lambda>0$，试求：

(1)归一化常量 A。

(2)粒子分布的概率密度函数。

(3)何处最容易发现此粒子？

解 (1)由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}A^2x^2\mathrm{e}^{-2\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{A^2}{8\lambda^3}\int_0^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{A}{4\lambda^3}=1$$

$$\therefore\quad A=2\lambda^{\frac{3}{2}}$$

(2) 粒子分布的概率密度函数为

$$|\psi(x)|^2=\begin{cases}4\lambda^3x^2\mathrm{e}^{-2\lambda x} & (x\geqslant0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

(3) 概率密度最大处最容易找到粒子，由 $\frac{\partial|\psi(x)|^2}{\partial x}=0$，可得

$$x=0,\frac{1}{\lambda},\infty$$

当 $x=0$ 或 ∞ 时，$|\psi(x)|^2=0$，故只有 $x=\frac{1}{\lambda}$ 有极大值，即在 $x=\frac{1}{\lambda}$ 处最容易找到粒子。

25-17 有一粒子沿 x 方向运动，其波函数为 $\psi(x)=\frac{A}{1+\mathrm{i}x}$，试求：

(1)波函数的归一化形式；

(2)粒子按坐标分布的概率密度函数；

(3)何处找到粒子的概率最大？求其最大概率密度。

解 (1)由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\psi^*(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=A^2\cdot\pi=1$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$\therefore \quad A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

相应的归一化波函数为

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+\mathrm{i}x}$$

(2)粒子在空间的概率密度函数为

$$|\psi(x)|^2=\psi(x)\psi^*(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

(3)粒子出现概率最大的地方

$$\frac{\partial|\psi(x)|^2}{\partial x}=0, \qquad x=0$$

相应的最大概率密度为

$$|\psi|^2_{\max}=\frac{1}{\pi}$$

25-18 一个原子中能够具有下列相同量子数的最多电子数是多少?

(1)n,l,m_l;

(2)n,l,m_s;

(3)n,l;

(4)n。

解 (1)根据泡利不相容原理,当(n,l,m_l)给定后,$m_s=\pm\frac{1}{2}$,有两个可能值,而一个量子态(n,l,m_l,m_s)只能被一个电子占有,故最多电子数是 2 个。

(2)当(n,l,m_s)给定时,$m_l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$,共有 $2l+1$ 个可能值,故最多电子数是 $2l+1$ 个;

(3)当(n,l)给定时,m_l 有 $2l+1$ 个可能值,m_s 有 2 个可能值,故最多电子数是 $2(2l+1)$ 个;

(4)当 n 给定时,$l=0,1,2,\cdots,(n-1)$共有 n 个可能值,m_l 有 $2l+1$ 可能值,m_s 有 2 个可能值,故最多电子数为

$$\sum_{l=0}^{n-1}2(2l+1)=2n^2 \text{ 个}$$

25-19 氢原子处于基态,其径向波函数为 $\psi=A\mathrm{e}^{-r/a_0}$,其中 a_0 为玻尔半径,$A=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$为常量,试求电子在径向 r 方向上出现概率密度最大的位置。(提示:径向概率密度 $P(r)=r^2|\psi(r)|^2$)

解 $|\psi(r)|^2=\psi^*\psi=A^2\mathrm{e}^{-2r}/a_0$,电子在核外 r 处的径向概率密度为

$$P(r)=|\psi(r)|^2r^2=A^2r^2\mathrm{e}^{-2r/a_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}=A^2\left(2r\mathrm{e}^{-2r/a_0}-\frac{2}{a_0}r^2\mathrm{e}^{-2r/a_0}\right)=0, \qquad 2r-\frac{2}{a_0}r^2=0, \quad 2r\left(1-\frac{r}{a_0}\right)=0$$

由此解得 $r=0$(不合题意)或 $r=a_0$,故电子在 $r=a_0$ 处出现的径向概率密度最大。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 26 章

凝聚态物理

【基本概念和规律】

1. 凝聚态物质

凝聚态物质是液态和固态物质的统称。

2. 固体的能带理论

晶体中的价电子共有化，使原子中的电子能级分裂形成一系列和原来能级很接近的新能级，从而连成一片——能带。

能带理论能成功地解释为什么有的固体是导体，有的是绝缘体，而有的是半导体。

3. 半导体的导电机理

半导体可分为两类：

(1)本征半导体：载流子是电子和空穴。

(2)杂质半导体，它又可分为两类。n 型半导体：载流子以电子为主；p 型半导体：载流子以空穴为主。

4. 超导电性

一些金属和合金在温度低于某一临界值时电阻突然趋于零的现象。

(1)超导体的基本特征：①零电阻；②迈斯纳效应——超导体是完全的抗磁体；③临界磁场和临界电流。

(2)超导电性的 BCS 理论：电子和声子的相互作用理论。载流子是库珀对。

5. 超流性——He Ⅱ 的神奇特性

(1)导热性：热导率极大，内部没有温度梯度，能沿杯壁向上爬。

(2)超流性：能流过管径为 0.1μm 的极细毛细管，没有任何黏滞性。

(3)不能施力于任何物体。

【解题指导】

● 用固体能带理论解释固体、导体和半导体的机理要抓住两点。

(1)满带的电子不参与导电。

(2)未填满的能带上的电子在电场作用下参与导电。

● 在杂质半导体中，若杂质原子的价数比晶体原子的价数大 1，则载流子为电子，相应的半导体称为 n 型半导体；若杂质原子的价数比晶体原子的价数小 1，则载流子为空穴，相应的半导体为 p 型半导体。

● 吸收光子的条件是光子能量等于或大于禁带宽度。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

【习题解答】

26-1 试确定下列掺杂半导体是 p 型还是 n 型：

(1)硅中掺入锑(五价)；

(2)锗中掺入铟(三价)；

(3)锗中掺入铝(三价)；

(4)硅中掺入砷(五价)。

解 纯净半导体中掺入高一价元素的杂质，即得 n 型半导体，若掺入低一价元素的杂质，即得 p 型半导体。根据这一结论得

(1)四价硅中掺入五价锑——n 型；

(2)四价锗中掺入三价铟——p 型；

(3)四价锗中掺入三价铝——p 型；

(4)四价硅中掺入五价砷——n 型。

26-2 硅和金刚石的能带结构很相似，只是禁带宽度不同。已知金刚石的禁带宽度为 5.33eV，硅的禁带宽度为 1.14eV，试分别计算它们能吸收辐射的最大波长。

解 根据跃迁理论有

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

金刚石能吸收的最长波长

$$\lambda_1 = \frac{hc}{\Delta E_1} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{5.33\times1.6\times10^{-19}} = 2.33\times10^{-7}(\mathrm{m}) = 233(\mathrm{nm})$$

硅吸收的最长波长

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\Delta E_2} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.14\times1.6\times10^{-19}} = 1.09\times10^{-6}(\mathrm{m}) = 1090(\mathrm{nm})$$

26-3 已知金刚石的禁带宽度为 $\Delta E_g = 5.33\mathrm{eV}$，其中电子运动的平均自由程按 $0.2\mu\mathrm{m}$。试估算：

(1)使金刚石变成导体需要加热到多高温度？(设电子热运动能量以 kT 计)

(2)金刚石的电击穿强度多大？

解 (1)$\Delta E_g = kT$

$$T = \frac{\Delta E_g}{k} = \frac{5.33\times1.6\times10^{-19}}{1.38\times10^{-23}} = 6.2\times10^{4}(\mathrm{K})$$

(2)电子热运动的平均自由程 $\bar{\lambda} = 0.2\mu\mathrm{m}$，电压为 $V = \frac{\Delta E_g}{e} = \frac{5.33\mathrm{eV}}{e} = 5.33\mathrm{V}$，故金刚石的电击穿强度为

$$E = \frac{V}{\bar{\lambda}} = \frac{5.33}{0.2\times10^{-6}} = 2.67\times10^{7}(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$$

26-4 一个用某种半导体材料(禁带宽度为 1.9eV)的 p-n 结制成的发光二极管(LED)，试求：

(1)发射光的波长；

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)要使其发光，必须施加的最低电势差；

(3)p-n 结的哪一侧(p 型侧还是 n 型侧)必须与电源正极相连？

解 由跃迁理论

$$\Delta E_g = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

所发射光的波长

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E_g} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.9\times1.6\times10^{-19}} = 6.54\times10^{-7}(\mathrm{m}) = 654(\mathrm{nm})$$

(2)要使二极管发光，所加最低电势差为

$$V = \frac{\Delta E_g}{e} = 1.9\mathrm{V}$$

(3)p 型一侧与电源正极相连。

26-5 硅太阳能电池是用硅(禁带宽度为 1.1eV)的 p-n 结制成，试求能使其工作的最大波长。

解 由跃迁理论知太阳能电池工作的最大波长为

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{\Delta E_g} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.1\times1.6\times10^{-19}} = 1.13\times10^{-6}(\mathrm{m}) = 1130(\mathrm{nm})$$

26-6 KCl 晶体在已填满的价带上方有一个 7.6eV 的禁带。对波长为 140nm 的光来说，此晶体透明还是不透明？(提示：光不被晶体吸收即透明，光能被晶体吸收即不透明。)

解 $\Delta E_g = 7.6\mathrm{eV}$，光子能量为

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6.63\times10^{-34}\frac{3\times10^{8}}{140\times10^{-9}} = 1.42\times10^{-18}(\mathrm{J}) = 8.9(\mathrm{eV}) > \Delta E_g,$$

光子能量大于禁带宽度，故能被电子吸收越过禁带进入导带，故晶体不透明。

26-7 光敏元件 CdS 和 PbS 的禁带宽度分别是 2.43eV 和 0.3eV，试分别计算它们光致导电的波长极限，并由此说明为什么 CdS 可用在可见光到 X 射线的短波方面，而 PbS 却可有效地用在红外方面？

解 只有当照射到半导体上光子的能量 $h\nu$ 大于或等于禁带宽度 ΔE_g 时，才可能发生本征吸收，相对应的光波波长则必须满足 $h\nu \geqslant \Delta E_g$，即 $\lambda \leqslant \frac{hc}{\Delta E_g}$ 对 CdS 有

$$\lambda \leqslant \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{2.43\times1.6\times10^{-19}} = 511.6(\mathrm{nm})$$

所以可见光中波长小于 511.6nm 的光直至 X 射线均能对 CdS 产生本征光电导吸收。

而对 PbS 则有

$$\lambda \leqslant \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{0.3\times1.6\times10^{-19}} = 4144(\mathrm{nm})$$

由此可见，对 PbS 来说红外线已满足 $\lambda \leqslant \frac{hc}{\Delta E_g}$ 的条件。

26-8 某硅晶体的禁带宽度为 1.2eV，适量掺入磷后，施主能级和硅的导带底的能级差为 $\Delta E_d = 0.045\mathrm{eV}$，试计算此掺杂半导体能吸收光子的最大波长。

解 已知杂质电离能(即施主能级和导带底部能级之间的能量差值)$\Delta E_d = 0.045\mathrm{eV}$。由

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

于光子能量是整个被吸收的，故

$$\Delta E_d = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E_d} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{0.045\times1.6\times10^{-19}} = 2.76\times10^{-5}(\mathrm{m}) = 27.6(\mu\mathrm{m})$$

26-9 纯硅晶体中硅的密度为 $2.33\times10^{3}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$，自由电子数密度约为 10^{16}个·m^{-3}，如果用掺磷的方法使其自由电子数密度增大 10^{6} 倍，试求：

(1)多大比例的硅原子应被磷原子取代？

(2)1.0g 硅按上述比例掺磷需要多少磷？

解 (1)纯硅晶体中，$1\mathrm{m}^3$ 中，硅的原子数为

$$N = \frac{N_A n}{\mu} = \frac{6.02\times10^{23}\times2.33\times10^{3}}{28\times10^{-3}} = 5\times10^{28}(\text{个}/\mathrm{m}^3)$$

因为一个磷原子替代一个硅原子后多出一个自由电子，故被替代的硅原子数为 $\Delta N = 10^{6}\times10^{16} = 10^{22}(\text{个}/\mathrm{m}^3)$，其比例为

$$P = \frac{\Delta N}{N} = \frac{10^{22}}{5\times10^{28}} = \frac{1}{5\times10^{6}}$$

(2)$m_p = m_{si}P = 1\times\frac{1}{5\times10^{6}} = 0.2\times10^{-6}(\mathrm{g}) = 0.2(\mu\mathrm{g})$。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第27章

核物理和粒子物理简介

【基本概念和规律】

1. 原子核

原子核由质子和中子组成。质子和中子统称为核子。

(1)原子核的大小近于球形，其体积约为：$V=\frac{4}{3}\pi r_0^3 A$。

(2)原子核的质量亏损：$\Delta m=Zm_p+(A-Z)m_n-m_A$。

(3)原子核的结合能：$\Delta E=[Zm_p+(A-Z)m_n-m_A]c^2$。

2. 原子核的模型

原子核的模型有两种，即液滴模型、壳层模型。

3. 核力

核力为核子间的强相互作用力。

4. 放射性衰变规律

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

式中 N 为未衰变核的数目。放射性衰变类型有三种：α 衰变、β 衰变、γ 辐射。

5. 核裂变

核裂变指铀核捕获中子后分裂成两个大致相等的裂变碎片的过程。

6. 核聚变

核聚变指轻核聚变成重核，并释放大量的能量。

7. 粒子和粒子物理学

目前粒子物理学中主要是按照粒子的相互作用性质来分类粒子：规范粒子、轻子、强子。

【解题指导】

● 一个原子核 ${}^A_Z X$ 的结合能为 $\Delta E=[Zm_p+(A-Z)m_n-m_A]c^2$，而原子核的平均结合能为 $\Delta E/A$。计算时质量用原子质量单位，用符号 u 表示，($1u=1.6605655\times10^{-27}kg$)。由质能关系，1 原子质量单位可换算成 $931.5MeV/c^2$，故计算结合能常用下式表示

$$\Delta E=[Zm_p+(A-Z)m_n-m_A]\times931.5MeV$$

● 利用放射性核的半衰期 T 进行测量时，应注意运用下列公式：

(1)放射性核衰变规律：$N=N_0e^{-\lambda t}$。

(2)半衰期公式：$T=\frac{\ln 2}{\lambda}$。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(3)衰变时间：$t=\frac{T}{0.693}\ln\frac{N_0}{N}$。

【习题解答】

27-1 用质子轰击锂核的核反应式为：${}^{1}_{1}H+{}^{7}_{3}Li\rightarrow{}^{4}_{2}He+{}^{4}_{2}He$，试计算该反应的反应能。(已知有关同位素的质量：${}^{1}_{1}H$：1.007 825u，${}^{7}_{3}Li$：7.015 999u，${}^{4}_{2}He$：4.002 603u，1u：931.5MeV/$c^2$)

解 该反应的反应能为

$$\Delta E=(m_{Li}+m_H-2m_{He})uc^2=(7.015999+1.007825-2\times4.002603)uc^2$$
$$=0.018618\times931.5(MeV)=17.34(MeV)$$

27-2 若一中等质量的核${}^{120}_{50}Sn$全部裂变成质子和中子，求：

(1)该反应所需的总能量；

(2)每个核子的结合能。

(已知质量${}^{120}_{50}Sn$：119.902 199u，${}^{1}_{1}p$：1.007 825u，${}^{1}_{0}n$：1.008 665u)

解(1)一个${}^{120}_{50}Sn$核有50个质子和70个中子，这些自由粒子的总质量为

$$M=Zm_p+(A-Z)m_n=50\times1.007825u+70\times1.008665u=120.997800u$$

反应中增加的质量为

$$\Delta m=120.99780u-119.902199u=1.0956u$$

故反应所需的能量为

$$\Delta E=\Delta mc^2=1.0956\times931.5MeV=1020.6MeV$$

(2)每个核子的结合能为

$$E=\frac{\Delta E}{A}=\frac{1020.6}{120}=8.50(MeV/个)$$

27-3 试计算下述一个α粒子衰变过程中释放的能量：${}^{238}_{92}U\rightarrow{}^{234}_{90}Th+{}^{4}_{2}He$。(已知质量${}^{238}_{92}U$：238.050 785u，${}^{234}_{90}Th$：234.043 593u，${}^{4}_{2}He$：4.002 603u)

解 这个α衰变过程中释放的能量为

$$\Delta E=\Delta mc^2=(234.043593u+4.002603u-238.050785u)c^2$$
$$=0.004589\times931.5MeV=4.27MeV$$

27-4 有一利用铀裂变发电的原子能发电站，发电功率为5 000kW，效率为16.7%。试求该核电站中${}^{235}_{92}U$核一昼夜的消耗量。(设每个铀核在裂变时平均释放200MeV的能量)

解 一昼夜反应堆中${}^{235}_{92}U$裂变放出的总能量为

$$E=\frac{P\Delta t}{\eta}=\frac{5000\times10^3\times24\times60\times60}{16.7\%}=2.587\times10^{12}(J)=1.617\times10^{25}(MeV)$$

这需要${}^{235}_{92}U$核的数目

$$\Delta N=\frac{E}{200}=\frac{1.617\times10^{25}}{200}=8.085\times10^{22}(个)$$

所需消耗的铀核质量为

$$\Delta m=\frac{\Delta N}{N_A}\mu=\frac{8.085\times10^{22}}{6.022\times10^{23}}\times235\times10^{-3}=3.16\times10^{-2}(kg)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

27-5 用计数器测某一放射性元素的放射性时，测得某一时刻每分钟计数 4 750 次，5 分钟后测得每分钟计数 2 700 次，试求：

(1)衰变常量；

(2)半衰期。

解 (1)根据放射性衰变规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$，每分钟的放射次数

$$\Delta N=N_0e^{-\lambda t}-N_0e^{-\lambda(t-\Delta t)}=N_0e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda\Delta t})$$

而 $\Delta t=60\text{s}$，由题意有

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{e^{-\lambda t_1}}{e^{-\lambda t_2}}=e^{\lambda(t_2-t_1)}$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{1}{t_2-t_1}\ln\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{1}{5\times60}\ln\frac{4750}{2700}=1.88\times10^{-3}(\text{s}^{-1})$$

(2)半衰期为

$$T=\frac{\ln2}{\lambda}=369\text{s}$$

27-6 某一放射性同位素的半衰期为 6.5h，如果样品中开始含有此同位素的原子数为 48×10^{19}个。试问 26h 后还有多少个该同位素原子？

解 因为半衰期 $T=6.5\text{h}$，衰变常量 $\lambda=\frac{\ln2}{T}$，由衰变规律，26h 后该同位素的原子数为

$$N=N_0e^{-\lambda t}=N_0e^{-\frac{\ln2}{T}t}=48\times10^{19}\times e^{\frac{-\ln2}{6.5}\times26}=3\times10^{19}(\text{个})$$

27-7 用放射性碳测定植物、人类和动物残骸的年龄是一种较可靠的方法。今有从地下发掘出的古树片 50g，测出其$^{14}_{6}C$ 每分钟衰变次数为 320 次。若生长的树木中$^{14}_{6}C$ 的放射性强度为每克每分钟衰变 12 次，$^{14}_{6}C$的半衰期为 5730 年，试估计该树片埋藏的时间。

解 古树每克每分钟衰变次数为$\frac{320}{50}=6.4$ 次，故该树片埋藏的时间为

$$t=\frac{T}{\ln2}\ln\frac{N_0}{N}=\frac{5730}{0.693}\ln\frac{12}{6.4}=5198(\text{y})\approx5200(\text{y})$$

27-8 一瓶陈酒中$^{3}_{1}H$ 的放射性强度为新鲜酒的 1%。已知$^{3}_{1}H$ 的半衰期为 12.33 年，则该酒已存放了多少年？

解 陈酒存放年数为

$$t=\frac{T}{\ln2}\ln\frac{N_0}{N}=\frac{12.33}{0.693}\ln100=82(\text{y})$$

27-9 在某一岩石样品中，发现^{206}Pb 相对于^{238}U 的比率为 0.65，已知^{238}U 的半衰期为 4.5×10^9 年，并设岩石中的^{206}Pb 均为由^{238}U 衰变而来，试计算该岩石的年龄。

解 ^{238}U 的半衰期 $T=4.5\times10^9$ 年，衰变常量 $\lambda=\ln2/T$，由题意知经过一个半衰期后，对^{238}U 有

$$\frac{N_0}{N}=\frac{1+0.65}{1}$$

则该岩石年龄为

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N_0}{N}=\frac{T}{\ln2}\cdot\ln1.65=\frac{4.5\times10^9}{\ln2}\cdot\ln1.65=3.3\times10^9(\text{y})$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

27-10 利用放射性同位素可以测量人体血液的总量。将含有$^{24}_{11}Na$放射性的生理盐水注射进人体，注入$1cm^3$盐水时其放射性强度为2000Bq(注：1贝克勒(Bq)=1核衰变/s)；过了5h后，取出$1cm^3$血液，测得放射性强度为0.27Bq，$^{24}_{11}Na$的半衰期为15h，求人体的血液总量。

解 经过5h后人体内的放射性强度为

$$I=I_0e^{-\lambda t}=I_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}=2000e^{-\frac{0.693}{15}\times 5}=1587.5(s^{-1})$$

故人体的血液总量为

$$V=\frac{I}{0.27}=\frac{1587.5}{0.27}=5880(cm^3)$$

27-11 原子弹的一种裂变反应为：$^{235}_{92}U+^{1}_{0}n\rightarrow^{141}_{55}Cs+^{92}_{31}Rb+3^{1}_{0}n$，试求该反应中释放的能量。(已知质量：$^{235}_{92}U$：235.043 924u，$^{92}_{37}Rb$：91.919 661u，$^{141}_{55}Cs$：140.920 006u，$^{1}_{0}n$：1.008 665u)

解 该原子核爆炸中释放的能量为

$$\begin{aligned}\Delta E&=\Delta mc^2\\&=(235.043924u-140.920006u-91.919661u-2\times 1.008665u)c^2\\&=0.186927\times 931.5MeV=174.1MeV\end{aligned}$$

27-12 氘核进行如下的聚变反应：$^{2}_{1}H+^{2}_{1}H\rightarrow^{4}_{2}He$已知氘核和氦核的平均结合能分别为1.11MeV和7.06MeV，试求此聚变反应发生时释放的能量。

解 氘核聚变反应释放的能量为

$$\Delta E=4E_{He}-4E_{H}=4(E_{He}-E_{H})=4\times(7.06-1.11)=23.8(MeV)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第28章

天体和宇宙

【基本概念和规律】

1. 恒星

恒星的原始物质是氢气。恒星的能源是氢气的热核反应。当温度达到 10^7K 以上，恒星的引力压力和热压力抵消时，恒星的坍缩将被抑制。当恒星的热核燃料耗尽时，将产生进一步压缩，恒星的引力压缩将进一步继续下去，直至演化成白矮星、中子星或黑洞。

2. 白矮星、中子星

白矮星表面温度高，发白光。它随着热能耗尽，温度下降，发光变红变暗，直至最后看不见。

中子星密度比白矮星大，半径约为 10km，它是快速旋转的脉冲星。中子星主要由中子组成。

3. 新星、超新星

有时看起来很暗的恒星，可能会变得非常亮，其亮度比以前大几千倍。这类恒星叫新星。

超新星比新星更罕见，能量更大，其亮度会突然比原来增加几百万倍，形成大爆发。

4. 现代宇宙论

目前最有希望的是宇宙大爆炸理论。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲