

## 2019-2020 学年第二学期期中考试试卷

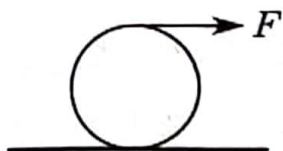
## 一、填空题(10题,共40分)

- 1、(本题4分)最早的黑洞设想为在质量为 $M$ ,半径为 $R$ 的星球表面发出的光传不到无穷远处,如果把光设想为一个非相对论的粒子(光子),黑洞质量和半径的关系为\_\_\_\_\_.
- 2、(本题4分)一艘飞船以速度 $v$ 飞过地面的两个观察站,宇航员发现两观测站的距离为 $L$ ,地面的观测站测量的距离间隔是\_\_\_\_\_.
- 3、(本题4分)一颗子弹质量为 $m$ ,以速度 $v$ 垂直打入长为 $L$ ,质量为 $M$ ,一端固定的均匀木棒的另一端,打入后瞬间木棒质心的运动速度为\_\_\_\_\_.
- 4、(本题4分)两个同方向的简谐振动 $x_1 = A_1 \cos \omega t$ ,  $x_2 = -A_2 \sin \omega t$ ,合振动的振幅是\_\_\_\_\_.
- 5、(本题4分)一个沿 $x$ 轴作简谐振动的弹簧振子,振幅为 $A$ ,周期为 $T$ ,其振动方程用余弦函数表示.如果 $t=0$ 时质点的状态分别是:过 $x = -\frac{A}{2}$ 处向正向运动.初位相是\_\_\_\_\_.
- 6、(本题4分)一人坐在一辆长20米的火车车厢一端,车厢与铁轨无摩擦.车厢装有50吨煤.开始时人和煤置于车厢一端,如果人把煤一块块扔向车厢的另一端,车厢最多能移动(人和车厢的质量很小)\_\_\_\_\_.
- 7、(本题4分)一个半径为 $R$ 的薄圆盘,其质量面密度为 $\sigma = ar^2$ ( $a$ 为常数)其绕通过圆心的垂直轴的转动惯量是\_\_\_\_\_.
- 8、(本题4分)在半径为 $R$ 的圆周上运动的质点,其速率与时间的关系为 $v = ct^3$ (式中 $c$ 为常数),则 $t$ 时刻该质点的切向加速度大小为 $a_t =$ \_\_\_\_\_;法向加速度大小为 $a_n =$ \_\_\_\_\_.
- 9、(本题4分)根据相对论力学,动能为0.5 MeV的电子,其运动速度约等于\_\_\_\_\_.已知 $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$ ,电子质量为 $0.91 \times 10^{-30} \text{kg}$ (大约相当于0.5 MeV的能量).
- 10、(本题4分)一个质量为 $m$ 的质点,受到一个外力 $F(t) = t^2$ 的作用,在 $t=0$ 从静止开始运动,问在时间为 $t_0$ 时,外力做功\_\_\_\_\_.

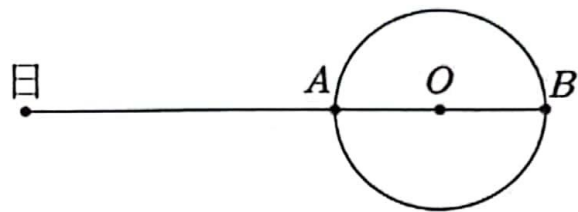
二、计算题(6题, 共60分)

1、(本题 10 分) 一个质点的轨迹方程为  $y = x^2$ , 在时间  $t = 0$  时, 位于坐标原点, 速率为  $v_0$ . 如果  $a_x = 0$ , 求质点的运动方程, 质点的法向加速度和切向加速度的大小.

2、(本题 10 分) 如图所示, 轮子质量为  $m$ 、半径为  $R$ , 其受到如图所示的力  $F$  向右边滚动, 轮子与地面没有滑动, 问轮子质心的平动加速度是多少?

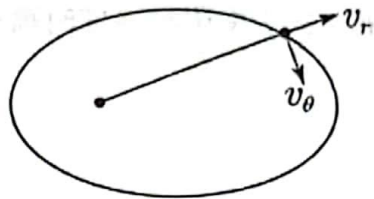


3、(本题 10 分) 地球绕太阳转动(假定轨道是圆的), 受到太阳的潮汐力影响. 潮汐力是由于引力的不均匀性导致的撕扯力, 引起了地球海洋的潮汐现象. 如图, 试分析地面  $A$ ,  $B$  两点某质量为  $m$  的质点受到的太阳引力与处在地心受到的太阳引力差距, 其就是潮汐力, 确定其方向和大小(看效果, 可以选择地心静止的参考系. 地球半径  $R \ll$  日地距离  $L$ ), 试说明月球对地球的潮汐力可以(事实就是) 大于太阳对地球的潮汐力虽然月亮对地球的引力小于太阳.

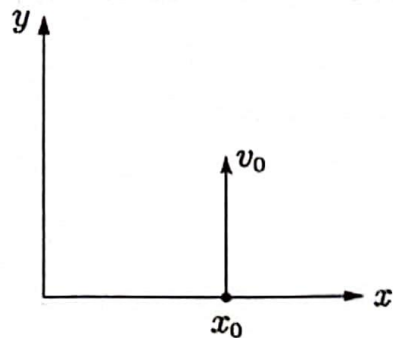


4、(本题 10 分) 一个静止于地面的火箭总质量为  $M$ . 一个在地面的观测者发现, 火箭发射时相对地面以速度  $v$  (和光速接近) 喷射了质量为  $m$  的物质, 问火箭获得了多大的相对地面的速度? 火箭上的观测者认为发射后火箭的质量是多少?

5、(本题 10 分) 地球绕太阳 (质量为  $M$ ) 转动, 其质量为  $m$  (看作质点), 轨道角动量为  $L$ , 日地距离为  $r$ , 地球的总机械能可以表示成  $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V(r)$ , 求  $V(r)$  的表达式. 求日地距离的稳定平衡点 (椭圆运动可以看作在稳定平衡点附近的摆动).



6、(本题 10 分) 一个质点质量为  $m$ , 处在势能  $V(x,y) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2$  ( $k > 0$ ) 的势场中做平面运动, 求质点所受到的力. 如果在  $t=0$  时, 质点处在如图所示状态, 求质点的运动方程和轨迹方程.





## 2019-2020 学年第二学期期中考试试卷参考答案

## 一、填空题(10题,共40分)

1、【正解】  $R \leq \frac{2GM}{c^2}$

【解析】  $\frac{1}{2}mc^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) \leq 0 \Rightarrow R \leq \frac{2GM}{c^2}$ .

【考点延伸】《考试宝典》知识点三 3.1 功与动能定理

2、【正解】  $\frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

【解析】  $L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ .

【考点延伸】《考试宝典》知识点六 6.3 狭义相对论的时空观

3、【正解】  $\frac{3mv}{2M+6m}$

【解析】由角动量守恒,  $mvL = \left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega \Rightarrow \omega = \frac{3mv}{(M+3m)L}$ ,  $v_c = \omega \frac{L}{2} = \frac{3mv}{2M+6m}$ .

【考点延伸】《考试宝典》知识点四 4.2 角动量

4、【正解】  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

【解析】  $x_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\therefore A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ .

【考点延伸】《考试宝典》知识点十二 12.2 振动的合成

5、【正解】  $-\frac{2\pi}{3}$  (或  $\frac{4\pi}{3}$ )

【解析】  $t=0$ 时,  $x = A \cos \varphi = -\frac{A}{2}$  且  $v = -A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin \varphi > 0$ ,  $\therefore \varphi = -\frac{2\pi}{3}$  (或  $\frac{4\pi}{3}$ ).

【考点延伸】《考试宝典》知识点十二 12.1 简谐振动

6、【正解】 20 米

【解析】由人、车厢、煤组成的系统水平方向所受外力为零,故该系统的质心作匀速直线运动或保持静止,而初始时质心静止,故该系统质心保持静止.由于人和车厢的质量很小,当煤被扔向车厢另一端时,即质心变为车厢的另一端,要使质心相对地面静止,则车厢向相反方向移动 20 米.

【考点延伸】《考试宝典》知识点三 3.3 质心

7、【正解】  $\frac{\pi}{3}aR^6$

【解析】  $J = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma \cdot 2\pi r dr = \int_0^R 2\pi a r^5 dr = \frac{\pi}{3} a R^6.$

【考点延伸】《考试宝典》知识点四 4.2 转动惯量

8、【正解】  $3ct^2; \frac{c^2 t^6}{R}$

【解析】  $a_t = \frac{dv}{dt} = 3ct^2, a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2 t^6}{R}.$

【考点延伸】《考试宝典》知识点一 1.1 加速度

9、【正解】  $\frac{\sqrt{3}}{2}c$

【解析】  $mc^2 = m_0 c^2 + E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 0.5 + 0.5 = \frac{0.5}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \therefore v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$

【考点延伸】《考试宝典》知识点六 6.4 狭义相对论动力学基础

10、【正解】  $\frac{t_0^6}{18m}$

【解析】  $mv - 0 = \int_0^{t_0} F dt = \int_0^{t_0} t^2 dt = \frac{t_0^3}{3} \Rightarrow v = \frac{t_0^3}{3m}, W = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{t_0^6}{18m}.$

【考点延伸】《考试宝典》知识点三 3.1 功与动能定理

## 二、计算题(6题,共60分)

## 1、【解析】

$$t=0 \text{ 时, } x_0 = y_0 = 0, v_{x0} = v_0, v_{y0} = 2xv_{x0} = 0 \text{ (2分)},$$

$$a_x = 0 \rightarrow x = v_0 t, y = v_0^2 t^2 \text{ (3分)}$$

$$\text{速率 } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}$$

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{4v_0^3 t}{\sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}} \text{ (2分)}$$

$$a_y = 2v_0^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2v_0^2, a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2} = \frac{2v_0^2}{\sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}} \text{ (3分)}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点一 1.1 描述质点运动的物理量

2、【解析】 $F + f = ma$

(2分)

$$(F - f)R = \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

(2分)

$$a = \alpha R$$

(2分)

$$\therefore a = \frac{4F}{3m}$$

(4分)

【考点延伸】《考试宝典》知识点二 2.1 牛顿第二定律

3、【解析】选地心静止的参考系，有惯性力（以径向向外为正方向） $F = \frac{GMm}{L^2}$

(2分)

式中， $M$ 为太阳的质量

$$A \text{ 点受力为 } F_A = -\frac{GMm}{(L-R)^2} + \frac{GMm}{L^2} \approx -\frac{2GMm}{L^3}R$$

(3分)

$$B \text{ 点受力为 } F_B = -\frac{GMm}{(L+R)^2} + \frac{GMm}{L^2} \approx \frac{2GMm}{L^3}R$$

(3分)

$$\text{虽然 } \frac{GM_{\text{日}}m}{L_{\text{日}}^2} > \frac{GM_{\text{月}}m}{L_{\text{月}}^2} \text{ 或 } \frac{M_{\text{日}}}{L_{\text{日}}^2} > \frac{M_{\text{月}}}{L_{\text{月}}^2}$$

由于  $L_{\text{日}} \gg L_{\text{月}}$

(2分)

$$\frac{M_{\text{日}}}{L_{\text{日}}^3} < \frac{M_{\text{月}}}{L_{\text{月}}^3} \text{ 或 } \frac{2GM_{\text{日}}m}{L_{\text{日}}^3}R < \frac{2GM_{\text{月}}m}{L_{\text{月}}^3}R$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点二 2.3 惯性力

4、【解析】 $m_0 = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$\text{以地面为参考系，运用动量守恒，} mv + \frac{(M - m_0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}v' = 0$$

(3分)

$$\text{得火箭相对地面的速度：} v' = -\frac{mvc}{\sqrt{\left(M - m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 c^2 + m^2 v^2}}$$

(3分)

$$M_0 = (M - m_0) = M - m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4 \text{ 分})$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点六 6.4 狭义相对论动力学基础

$$5、【解析】 E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 - \frac{GMm}{r} \quad (2 \text{ 分})$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (1 \text{ 分})$$

$$L = mv_\theta r \Rightarrow v_\theta = \frac{L}{mr} \quad (2 \text{ 分})$$

$$V(r) = \frac{1}{2}mv_\theta^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

$$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2} \quad (1 \text{ 分})$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点三 3.2 机械能守恒定律

$$6、【解析】 \vec{F} = -\nabla V = -kx\vec{i} - ky\vec{j} \quad (2 \text{ 分})$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \quad (2 \text{ 分})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{运动方程: } x = x_0 \cos \omega t = x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad (2 \text{ 分})$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{v_0}{\omega} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{轨迹方程: } \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{v_0^2/\omega^2} = 1 \quad (1 \text{ 分})$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点十二 12.1 简谐振动