

浙江大学 2021-2022 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

一、（本题 15 分）设有下列 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

(1) 计算 D_1, D_2 ;

(2) 假设当 $n \leq k$ 时有 $D_n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$, 证明: $D_{k+1} = \frac{6^{k+2} - 1}{5}$.

二、（本题 10 分）设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 A 满足方程 $BA = B^T B$, 求 $|A^* - 2E|$.

三、（本题 10 分）设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(A - E) = n$.

四、（本题 20 分）设有四元线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
.

(1) 写出该方程组的系数矩阵 A ;

(2) 利用初等行变换将矩阵 A 化为阶梯形矩阵 U ;

(3) 求 $r(A)$;

(4) 写出该方程组的通解.

五、（本题 10 分）设实方阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $|A| > 0$, 已知矩阵 B 满足 $AB = E + 3A$, 求矩阵 B .

六、（本题 25 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

求(1) A^2 ;

(2) A^3 ;

(3) A^{100} ;

(4) A^{-1} .

(5) 一个三次实系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 使得 $f(A)$ 为三阶零方阵.

七、（本题 10 分）设有 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 满足当 $i = j$ 时, $a_{ij} = 2021$, 当 $i < j$ 时 $a_{ij} = i^j$, 当 $i > j$ 时, $a_{ij} = (i + j)!$, 证明: $|A| \neq 0$.

八、（本题 10 分）设 A 为 n 阶方阵且 $r(A) = r > 0$. 证明存在秩为 r 的实方阵 B 和 C 使得 $AB = CA$.