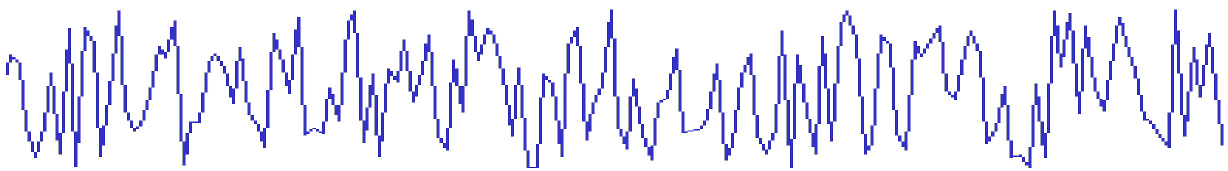
3. Transmission en présence du bruit blanc gaussien additif (AWGN)

Le bruit blanc gaussien

- Le bruit blanc est un processus aléatoire dont la densité spectrale de puissance (dsp) est étalée uniformément sur tout l'axe des fréquences.

- Le mot blanc prend son origine dans l'analogie avec la lumière blanche, dont la puissance est repartie aussi uniformément sur l'axe des fréquences.



- On modélise le bruit blanc gaussien avec un processus aléatoire qui suit une loi normale de moyenne et variance données.

- Dans le cas d'un bruit aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, la densité de probabilité du bruit est donnée par la loi Gaussienne:

$$\boxed{D_p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2\right]}$$

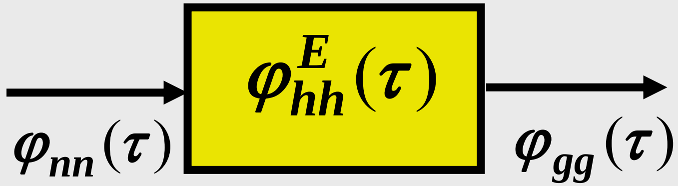
- C'est un signal à énergie infinie. Il nous sera plus facile de raisonner par la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrelation

$$\boxed{\Phi_{nn}(f) = \tfrac{1}{2} N_0 \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \varphi_{nn}(\tau) = \tfrac{1}{2} N_0 \cdot \delta(\tau)} \quad \textbf{8.48}$$

Le bruit coloré

- Selon la relation de Wiener Khinchin:

Fig. 8.10



$$\varphi_{gg}(\tau) = \varphi_{nn}(\tau) * \varphi^E_{hh}(\tau)$$

$$\varphi_{gg}(\tau) = \tfrac{1}{2} N_0 \delta(\tau) * \varphi^E_{hh}(\tau) = \tfrac{1}{2} N_0 \varphi^E_{hh}(\tau)$$

$$\Phi_{gg}(f) \qquad = \qquad \tfrac{1}{2} N_0 \left| H(f) \right|^2$$

$$\boxed{\Phi_{gg}(f) = \tfrac{1}{2} N_0 \left| H(f) \right|^2} \quad \textbf{8.49}$$

- C'est à dire un bruit blanc est devenu, après sa transmission via au SLIT, un bruit coloré

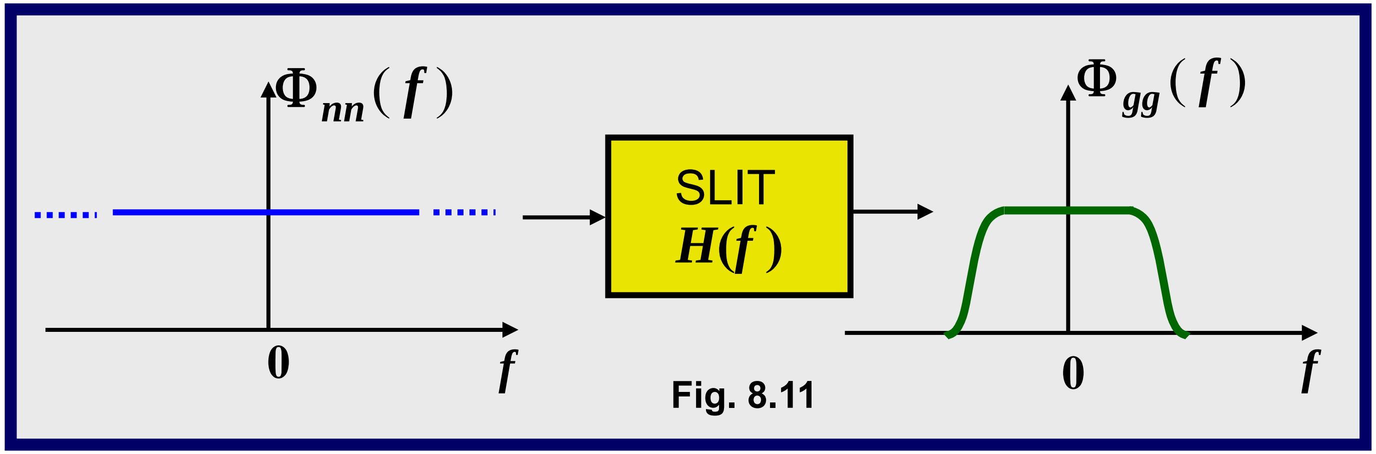


Fig. 8.11

- Sa puissance est donné par

$$P_N = \varphi_{gg}(0) = \tfrac{1}{2} N_0 \varphi_{hh}(0) = \tfrac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H(f) \right|^2 df = \tfrac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt \quad (*)$$

Remarque

$$(*)\varphi_{hh}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{hh}(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad \tau=0 \;\rightarrow\; \varphi_{hh}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{hh}(f)df$$

$\Phi_{hh}(f)=\left|H(f)\right|^2$ et par le théorème de Parseval on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df=\int_{-\infty}^{+\infty}h^2(t)dt$$

$$\boxed{P_N=\tfrac{1}{2}N_0\varphi_{hh}^{E}(0)} \quad \mathbf{8.50}$$

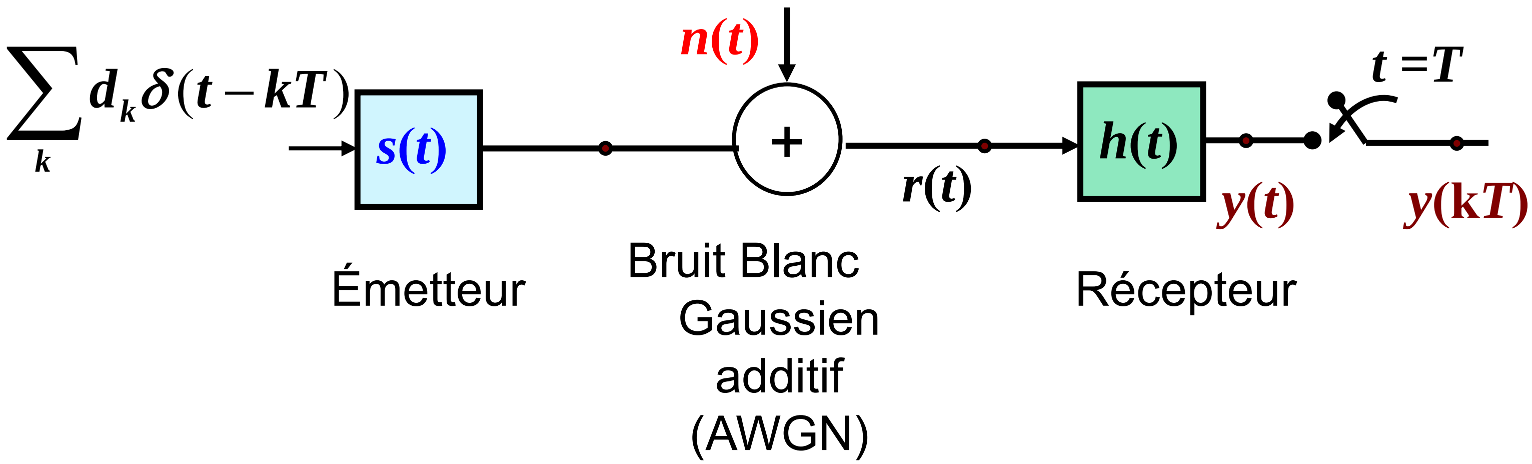
8.8. La réception corrélative des signaux perturbés

8.8.1. Filtre adapté (Matched Filter)

A. Définition

- On appelle filtre adapté (*Matched Filter*), le filtre de reception capable d'assurer le rapport signal sur bruit optimal pour une transmission numérique donnée.

- *La question qui se pose est comment peut on concevoir le filtre de réception h(t) afin d'optimiser le rapport signal sur bruit du signal y(T)*.



- La réception est composée d'un filtre de reception de réponse impulsionnelle $h(t)$ suivi d'un échantillonneur

- On suppose transmettre un seul symbole d'amplitude 1

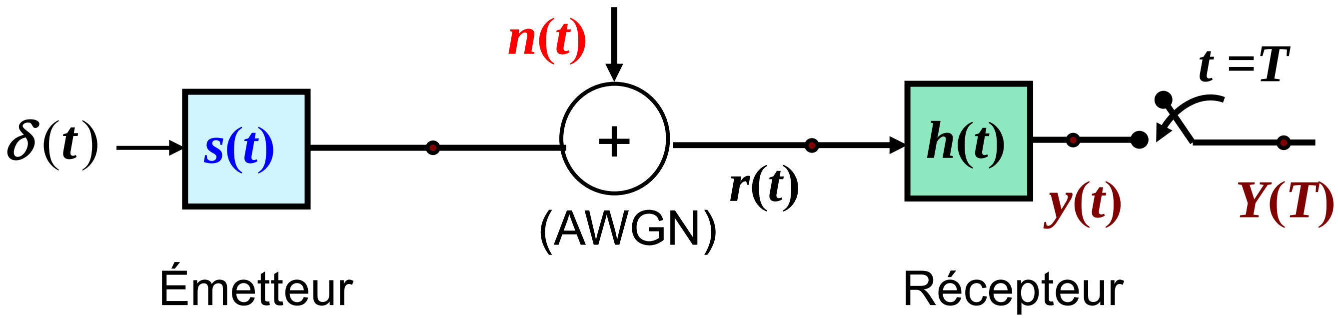


Fig. 8.13

- A l'entrée du récepteur on a le signal $r(t)$ = $s(t)$ + $n(t)$. Le signal reçu est donné par la relation de convolution:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \left[s(t) + n(t)\right] * h(t) \\
&= \underbrace{\left[s(t) * h(t)\right]}_{g(t)} + \underbrace{\left[n(t) * h(t)\right]}_{n_r(t)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{y(t) = g(t) + n_r(t)} \qquad \textbf{8.51}$$

$g(t)$: signal utile reçu

$n_r(t)$: bruit reçu

- On échantillonne y(t) à l'instant d'échantillonnage t=T, on a:

$$y(T) = g(T) + n_r(T)$$

- Le rapport signal-sur-bruit est défini par:

$$\boxed{SNR = \left.\frac{P_s}{P_N}\right|_{t=T}} \qquad \textbf{8.52}$$

où P_s et P_N sont les puissances des échantillons au moment $t = T$:

$$P_s = g^2(T)$$
$$P_N = E\left[n_r^2(T)\right]$$

- Pour une réception optimale, il faut que le rapport signal sur bruit (signal-to-Noise Ratio : SNR) soit maximal

- Or le signal de bruit $n_r(t)$ a pour puissance :

$$P_N = \overline{n_r^2(t)} = \tfrac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt \quad \text{(bruit coloré)}$$

- La puissance du signal utile à la sortie du filtre est:

$$g^2(T) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot s(T-\tau)d\tau\right]^2$$

$$SNR = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)s(T-\tau)d\tau\right]^2}{\frac{1}{2}N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt} \overset{!}{=} \max$$

- On sait bien que le signal énergétique $s(t)$ à une énergie donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T-\tau)d\tau$$

et par suite :

$$SNR = \frac{2E}{N_0} \cdot \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)s(T-\tau)d\tau\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt}$$

- D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ,pour deux signaux à énergie finie on a:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt\right]^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt.\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$$

- L'égalité est atteinte pour f(t) = k. g(t), où k est une constante réelle

- Le rapport (SNR) est maximum quand:

$$\boxed{h(t) = k \cdot s(T-t) \qquad \forall k \in \mathbb{R}} \qquad \mathbf{8.54}$$

$$SNR_{\max} = \frac{2E}{N_0}$$

$$\boxed{h(t) = k \cdot s(T-t) \qquad \forall k \in \mathbb{R}}$$

- h(t) est appelé **corrélateur** ou **filtre adapté**. C'est un filtre de réception qui optimise le rapport (SNR).
- Dans la littérature ce filtre est connu sous le nom de *Matched filter* (application aux techniques de transmission par ex. Radar, GSM, TV numérique ...)

Remarque

$$h(t) = k \cdot s(T-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad k \cdot S^*(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$$

Filtre conjugué

- Le rapport SNR ne dépend que de l'énergie du signal et de la densité de puissance N_0 du bruit $n(t)$ et ne dépend pas donc de la forme du signal .

4. Performances en taux d'erreur sur un canal bruité
(Cas d'une transmission binaire bipolaire)

Soit la chaîne de transmission numérique en bande de base

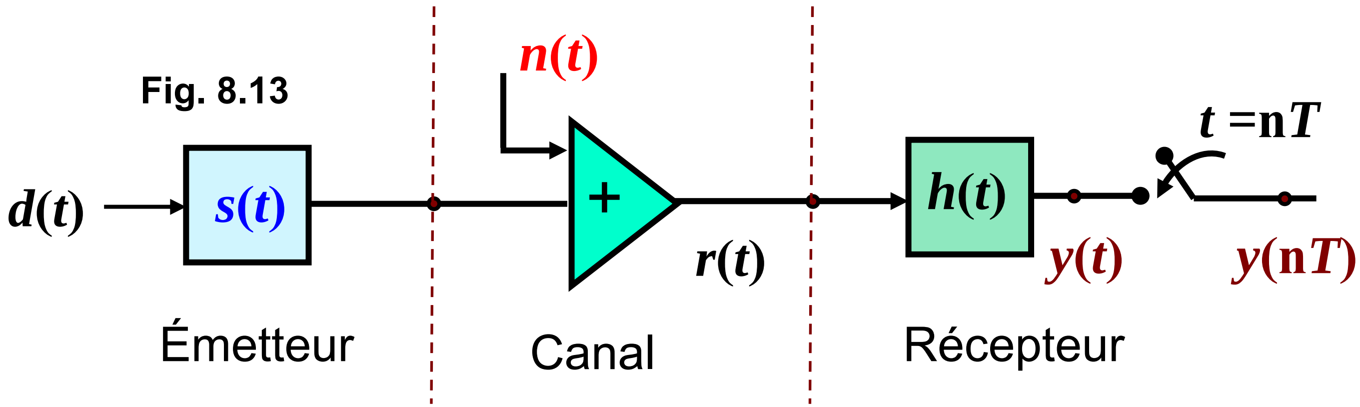


Fig. 8.13

- Nous supposons que le critère de Nyquist est vérifié
- s(t) est réel et h(t) =s(-t).
- Le bruit est blanc et gaussien
- Le signal informatif est: $d(t) = \sum_k d_k \delta(t - kT)$

où d_k est une suite aléatoire de symboles équiprobables: $d_k \in \{-1,\ 1\}$

En l'absence du bruit n(t)=0, on aura:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= d(t) * s(t) * h(t) \\
&= [d(t) * g(t)], \qquad \textit{où} \quad g(t) = s(t) * h(t) \\
&= \sum_k d_k g(t - kT)
\end{aligned}
$$

Le critère de Nyquist étant vérifié, le signal échantillonné à *t=nT* est:

$$
y(nT) = \sum_k d_k g((n-k)T) = d_n g(0)
$$

En présence du bruit n(t)≠0, on a:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\left(d(t) * s(t)\right) + n(t)\right] * h(t) \\ &= \left[d(t) * \underbrace{\left(s(t) * h(t)\right)}_{g(t)}\right] + \underbrace{\left[n(t) * h(t)\right]}_{n_r(t)} \end{aligned}$$

$$y(t) = \sum_k d_k g(t - kT) + n_r(t)$$

Après échantillonnage à l'instant t=nT:

$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_k d_k g\left((n-k)T\right) + n_r(nT) \\ &= d_n g(0) + n_r(nT) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $n_r(nT)$ sont gaussiennes, centrées (moyenne nulle), non corrélées, de variance:

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)\,dt$$

et de densité de probabilité :

$$D_p(n_r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{n_r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}$$

La probabilité que $n_r(nT)$ soit supérieure à n_0 est donnée par :

$$\mathrm{Prob}(n_r \geq n_0) = \int_{n_0}^{+\infty} D_p(n_r)\,dn_r$$

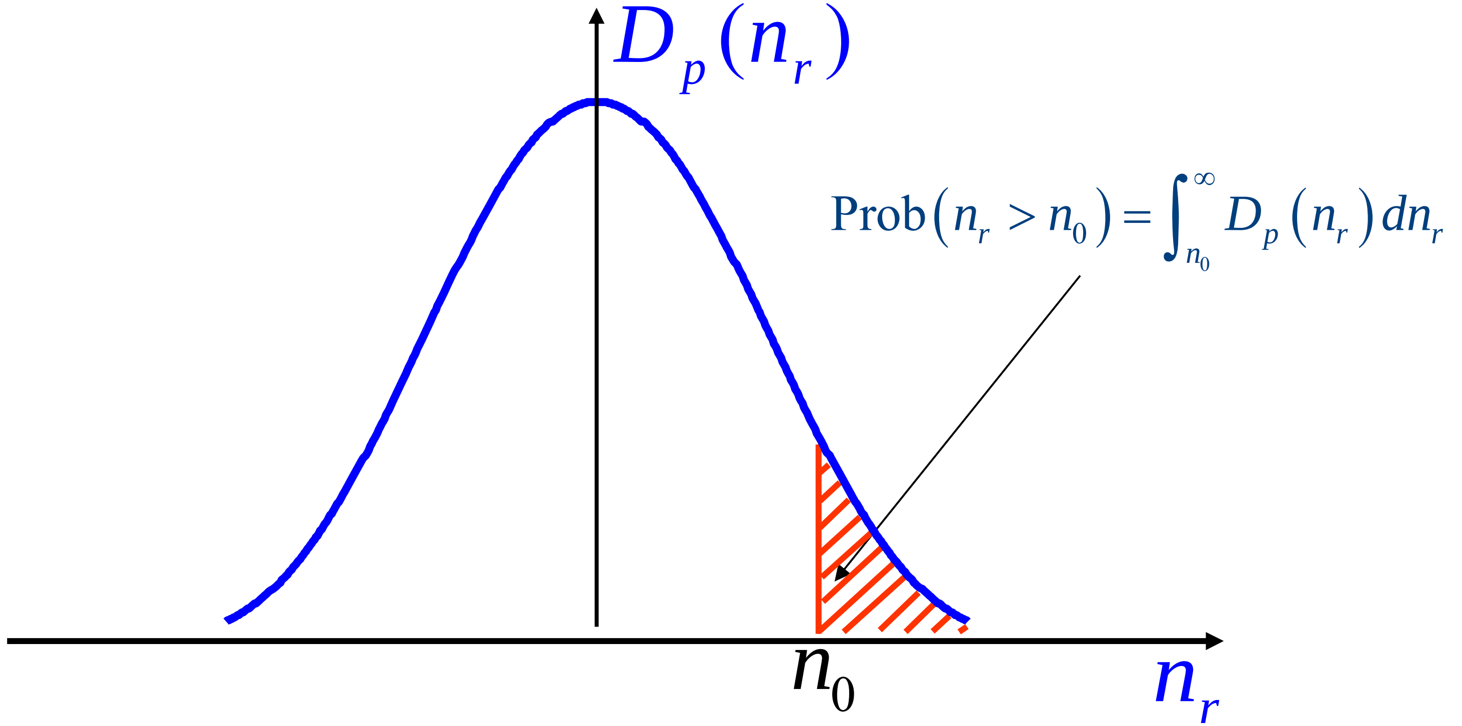


Fig. 4.4

• Probabilité d'erreur en cas de transmission binaire de type bipolaire

L'erreur de décision sur l'échantillon y(nt) aura lieu si l'un des événements suivants se produit:

- E1 : Le symbole décidé est +1 alors que c'est -1 qui est transmis
- E2 : Le symbole décidé est -1 alors que c'est +1 qui est transmis

La probabilité d'erreur est donc :

$$P_e = \mathrm{Prob}(d_n = -1)\mathrm{Prob}(E1) + \mathrm{Prob}(d_n = +1)\mathrm{Prob}(E2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Prob}(E1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Prob}(E2)$$

- La probabilité d'erreur P_e est la moyenne des deux aires hachurées de la figure (Fig.4.7).
- Le minimum est atteint lorsque Prob(*E1*)=Prob(*E2*) c'est-à-dire lorsque le seuil de détection vaut:

$$v_T = 0$$

La probabilité d'erreur devient :

$$\boxed{\begin{aligned} P_e &= \mathrm{Prob}\left(E1\right) \\ &= \mathrm{Prob}\left(y\left(nT\right) \geq 0 \middle| d_n = -1\right) \end{aligned}}$$

Or, pour d_n=-1: $\boldsymbol{y(nT) = -g\left(0\right) + n_r\left(nT\right)}$

D'où: $$\mathrm{Prob}\left(y\left(nT\right) \geq 0 \middle| d_n = -1\right) = \mathrm{Prob}\left(n_r\left(nT\right) - g\left(0\right) \geq 0\right)$$
$$= \mathrm{Prob}\left(n_r\left(nT\right) \geq g\left(0\right)\right)$$

n_r étant gaussien, la probabilité d'erreur devient :

$$P_e = \mathrm{Prob}\left(E1\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{g(0)}^{+\infty} e^{-\left(\frac{n_r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dn_r$$

où $$\sigma^2 = \tfrac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} h^2\left(t\right) dt$$

Moyennant la fonction d'erreur « erfc » : $$\mathrm{erfc}\left(x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-(\lambda)^2} d\lambda$$

on obtient : $$P_e = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{g\left(0\right)}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Puisque h(t)=s(-t), on a :

$$\int h^2(\tau)d\tau = \int s(\tau)h(-\tau)d\tau = g(0)$$

D'où $$\sigma^2 = \tfrac{1}{2} N_0\, g(0)$$

L'énergie moyenne par bit est :

$$E_b = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(\tau)d\tau = g(0)$$

La probabilité d'erreur est finalement donnée par :

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

P_e est une fonction décroissante de Eb/N_0.

- Pour une transmission binaire (m=2) La probabilité d'erreur est exprimée en fonction du rapport signal-sur-bruit comme suit:

Forme bipolaire	*Forme unipolaire*
$\boxed{P_\varepsilon = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$	$\boxed{P_\varepsilon = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)}$

La forme unipolaire perd 3dB par rapport celle bipolaire à cause de l'absence de l'energie lors de la transmission des bits « 0 »

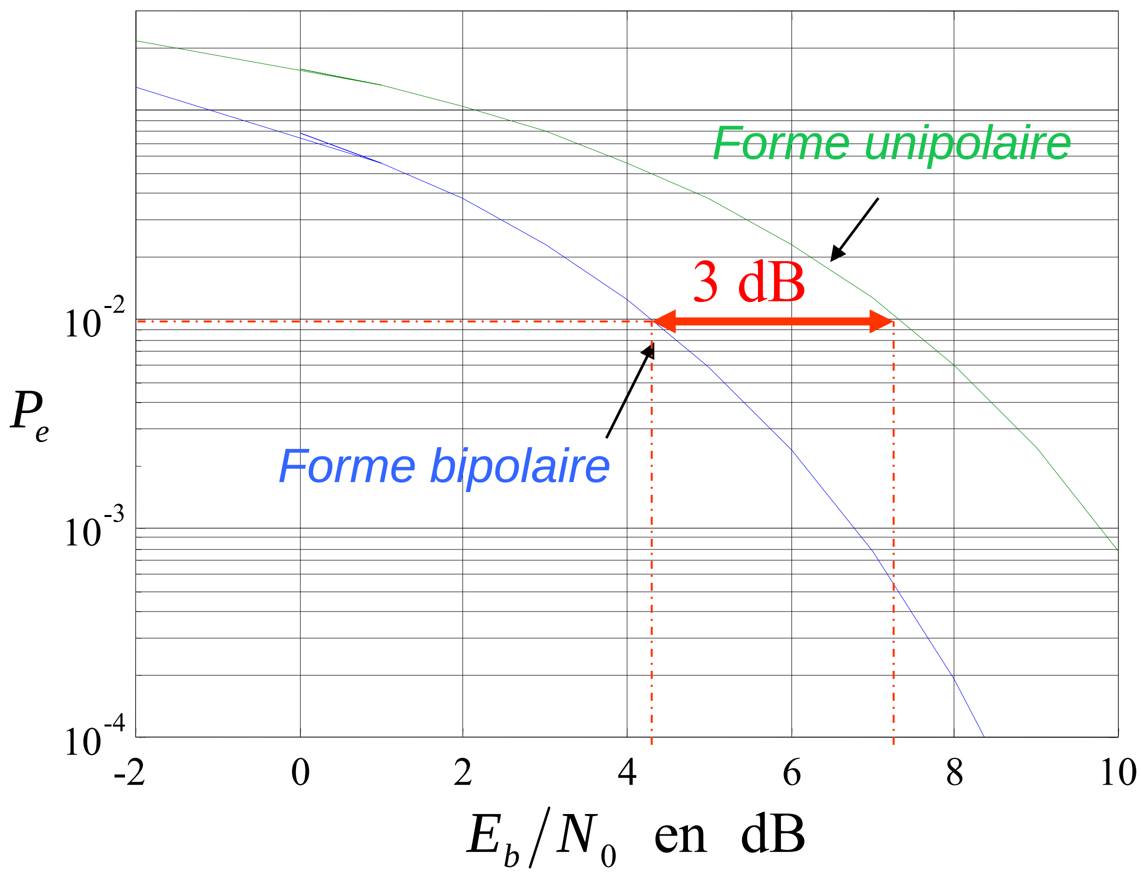

Forme unipolaire
3 dB
Forme bipolaire
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
P_e
-2
0
2
4
6
8
10
E_b/N_0 en dB

Fig.4.14