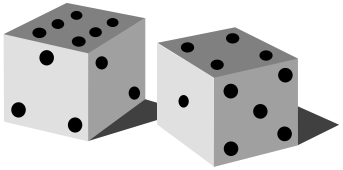
Chapitre 1
Introduction aux probabilités

- Introduction
- Probabilité versus Statistique
- Notions élémentaires
- Définitions des probabilités
- Règles de calcul des probabilités



Introduction : un peu d'histoire

Blaise Pascal

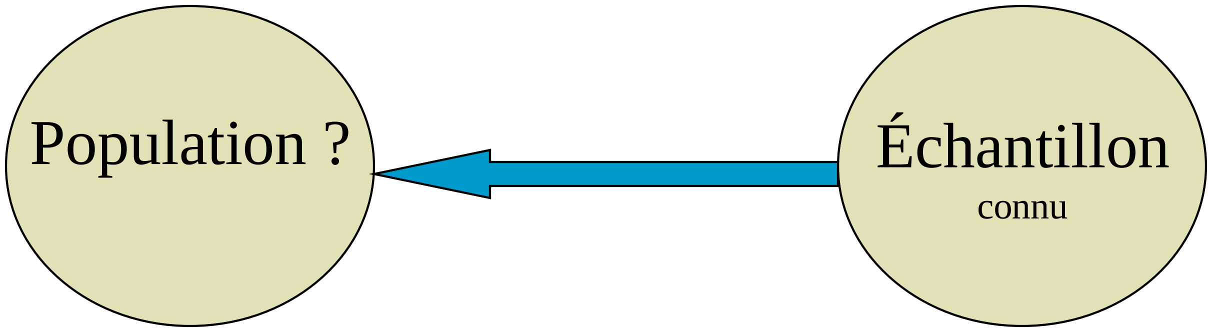
Andrey Nikolaevich Kolmogorov

La théorie des probabilités est née de l'étude par les mathématiciens des jeux de hasard. D'ailleurs, le mot hasard provient du mot arabe « az-zahr » signifiant dé à jouer. On attribue au mathématicien et philosophe français Blaise Pascal (1623 - 1662) les premières pierres de cet édifice théorique. Cette théorie s'est ensuite développée au cours des siècles pour devenir une discipline mathématique à part entière. On doit au mathématicien russe Kolmogorov en 1933, une formalisation de la théorie des probabilités.

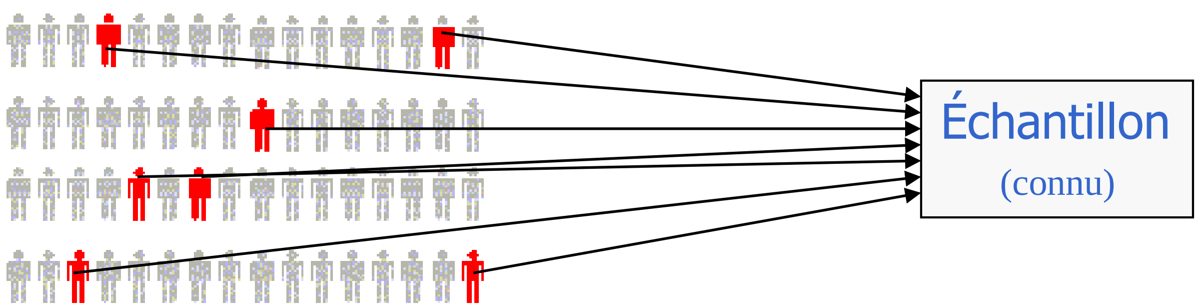
Introduction : Définition de la théorie des probabilités

La théorie des probabilités est une science qui a pour but l’étude des expériences aléatoires ; elle vise à construire des modèles mathématiques pour analyser des situations impliquant l’incertitude, et à définir des mesures exactes de cette incertitude par l’intermédiaire de ces modèles.

Introduction : Probabilité versus statistique



Raisonnement propre à la statistique

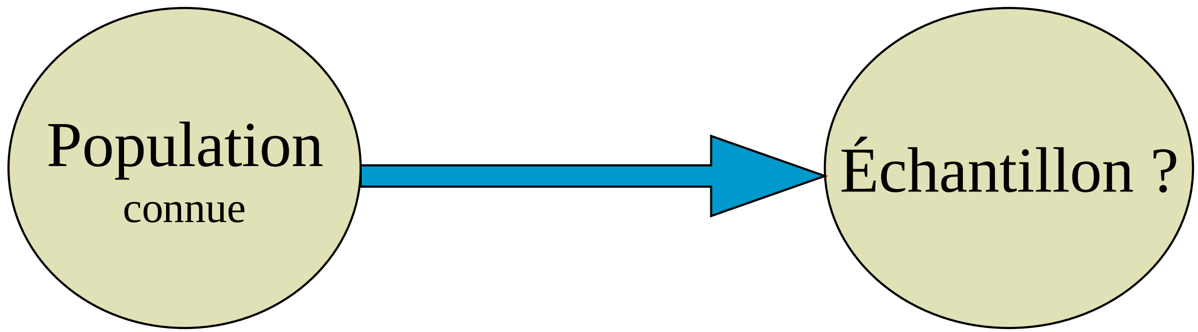


Population
(inconnue)

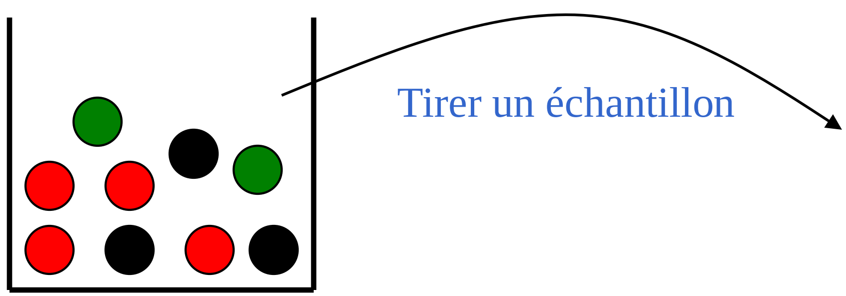
Raisonnement inductif : à partir d'un échantillon connue, on veut tirer des conclusions sur toute la population dans laquelle a été choisi cet échantillon :

c'est l'inférence statistique

Introduction : Probabilité versus statistique



Raisonnement propre à la probabilité



Urne
(population)

Raisonnement déductif : à partir d'une population connue, on veut prévoir les résultats d'un échantillon tiré de cette population

Notions élémentaires : Expérience

Définition : Expérience

Une expérience est tout processus impliquant une certaine intervention humaine.

Exemples

1. Lancer une pièce de monnaie un certains nombre de fois ;
2. Observer le nombre de pièces défectueuses dans un lot de pièces ;
3. Observer le nombre de clients qui entrent dans un supermarché durant une journée ;
4. ...

Notions élémentaires : Résultat

Définition : Résultat

C’est ce qu’on s’observe suite à une expérience.

Exemples

1. Lancer une pièce de monnaie 4 fois ;
   - Un résultat possible : 3 piles et 1 face
2. Observer le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 1000 pièces ;
   - Un résultat possible : 5 pièces
3. Observer le nombre de clients qui entrent dans un Supermarché durant une journée
   - Un résultat possible : 3000 clients.

Notions élémentaires : Expérience aléatoire

Définition : Expérience aléatoire

Toute expérience qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1. **On ne peut pas prévoir avec certitude le résultat de l'expérience ;**

2. **On peut décrire tous les résultats possibles avant l'expérience.**

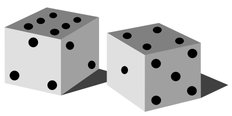
Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Définition : Ensemble fondamental Ω

On appelle ensemble fondamental (ou espace échantillonnal) Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles qui peuvent se produire dans une expérience aléatoire.

Exemple

On lance deux dés et on note la somme des points obtenus sur chacun d'eux.



$$\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Il existe deux façons permettant de décrire l’ensemble fondamental Ω :

1. Description explicite : énumérer tous les éléments de l’ensemble Ω ;

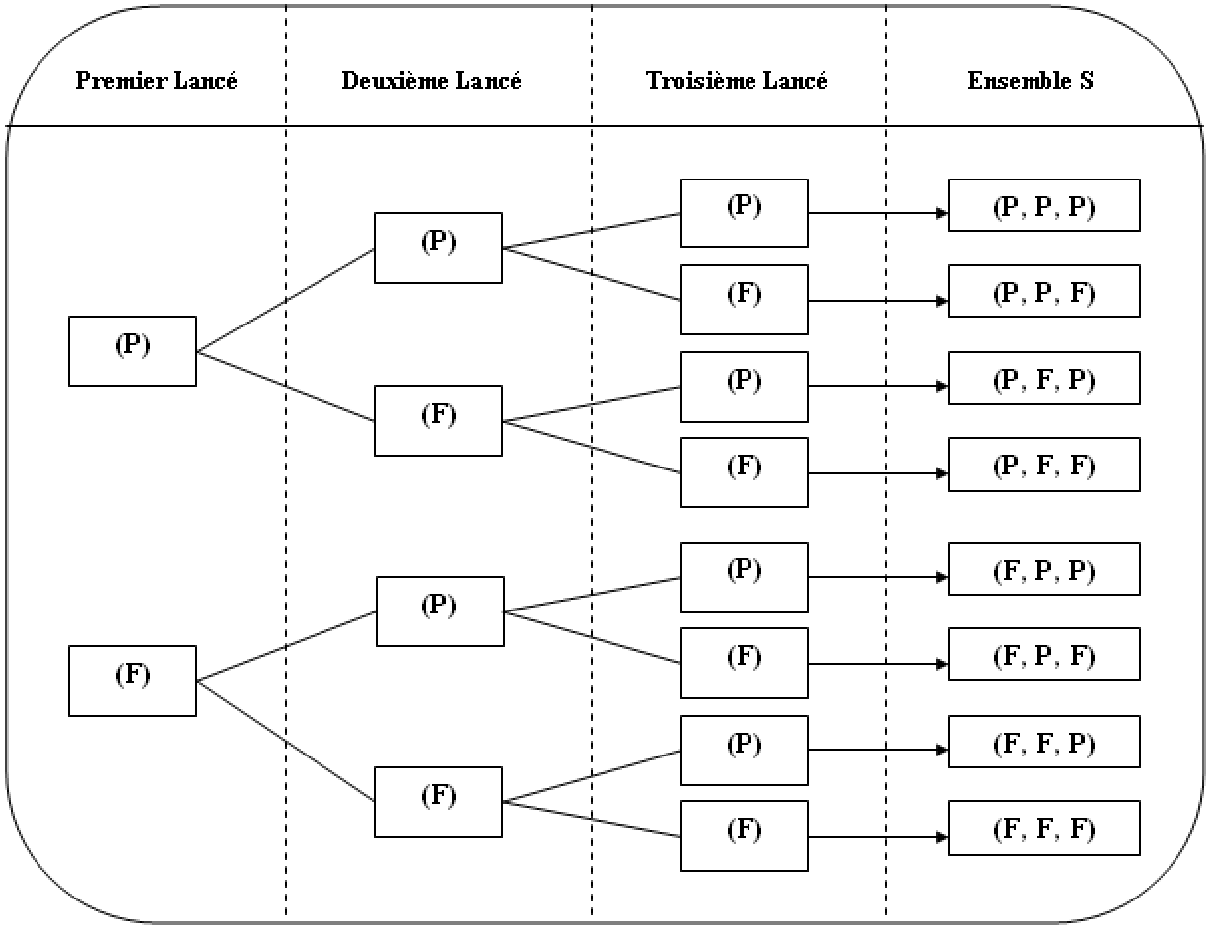
2. Description implicite : utiliser un formalisme mathématique pour décrire l’ensemble Ω.

Exemple

Soit l’expérience aléatoire consistant à lancer une pièce de monnaie trois fois de suite et à observer la suite de piles (P) ou de faces (F) obtenues.

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Description explicite



Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Description implicite

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\ tel\ que\ \omega_i \in \{P, F\}, i = 1, 2, 3 \right\}$$

Résultats de chaque lancé

Chaque résultat peut être soit **Pile ou Face**

Ω est un ensemble de triplets

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Exemples de construction de l'ensemble Ω

Exemple 1

Pour contrôler la qualité d'un lot de pièces produites par une machine, on prélève successivement 3 pièces de ce lot et, pour chacune d'elle, on note si elle est bonne (B) ou défectueuse (D).

Explicite

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B) \\ (B,D,D),(D,B,D),(D,D,B),(D,D,D) \end{matrix} \right\}$$

Implicite

$$\Omega = \left\{ (\omega_1,\omega_2,\omega_3)\ tel\ que\ \omega_i \in \{B,D\}\ ,\ i=1,2,3 \right\}$$

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Exemple 2

Soit l'expérience consistant à lancer une pièce de monnaie et un dé et à observer le côté qu'ils présentent lorsqu'ils tombent.

Explicite

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6) \\ (F,1),(F,2),(F,3),(F,4),(F,5),(F,6) \end{matrix} \right\}$$

Implicite

$$\Omega = \left\{ (\omega_1,\omega_2)\ tel\ que\ \omega_1 \in \{P,F\}\ et\ \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\} \right\}$$

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Il existe trois type d’ensembles fondamentaux :

1. Fini (discret) : s’il contient un nombre fini de résultats ;
2. Infini dénombrable (discret) : s’il contient un nombre infini de résultats qui peuvent être énumérés ;
3. Infini non-dénombrable (continu) : s’il contient un nombre infini de résultats qui ne peuvent être énumérés.

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Exemple1 : Ensemble S fini

Pour contrôler la qualité d'un lot de pièces produites par une machine, on prélève 3 pièces de ce lot et, pour chacune d'elle, on note si elle est bonne (B) ou défectueuse (D).

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B) \\ (B,D,D),(D,B,D),(D,D,B),(D,D,D) \end{Bmatrix}$$

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Exemple 2 : Ensemble S infini dénombrable

Tirer au hasard des pièces dans un lot et observer le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une pièce défectueuse. On suppose que :

1. Le lot contient au moins une pièce défectueuse ;
2. Les tirages s'effectuent avec remise.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\{D, (B, D), (B, B, D), (B, B, B, D), \ldots\}$$

Dès le premier tirage Le deuxième tirage ……. .

Notions élémentaires : Ensemble fondamental

Exemple 3 : Ensemble S infini non-dénombrable

Observer à une date déterminée le temps écoulé depuis l'ouverture du magasin jusqu'au moment où le premier client y entre. On suppose que :

1. Il y ait au moins un client par jour qui entre dans le magasin ;

1. Le magasin est ouvert pendant 8 heures.

$$\Omega = \{\omega \; tel \; que \; \omega \in [0,8]\}$$

L'heure de l'ouverture

L'heure de fermeture

Notions élémentaires : Événement

Définition : Événement

On appelle événement tout sous-ensemble de l'ensemble fondamental (Ω) associé à une expérience aléatoire.

Les événements sont notés par des lettres majuscules (A, B, C,…) et peuvent être décrit d'une manière implicite ou explicite.

On dit qu'un événement A se réalise si et seulement si l'expérience aléatoire donne un des résultats constituant cet événement.

Notions élémentaires : Événement

Exemple

Pour contrôler la qualité d'un lot de pièces produites par une machine, on prélève successivement 3 pièces de ce lot et, pour chacune d'elle, on note si elle est bonne (B) ou défectueuse (D).

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B) \\ (B,D,D),(D,B,D),(D,D,B),(D,D,D) \end{Bmatrix}$$

Soit les deux événements suivants :

- A : obtenir au moins 2 pièces défectueuses.
- B : obtenir une pièce défectueuse au 2$^{\text{ième}}$ tirage et une bonne pièce au 3$^{\text{ième}}$ tirage.

Notions élémentaires : Événement

Exemple ...

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B) \\ (B,D,D),(D,B,D),(D,D,B),(D,D,D) \end{array} \right\}$$

L'événement A : obtenir au moins 2 pièces défectueuses

$$A = \{(B,D,D),(D,B,D),(D,D,B),(D,D,D)\}$$

L'événement B : obtenir une pièce défectueuse au 2ième tirage et une bonne pièce au 3ième tirage.

$$B = \{(B,D,B),(D,D,B)\}$$

Notions élémentaires : Événement

Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements de Ω :

- **Réunion $\cup$ (événement disjonction)**
  A ou B, $A \cup B$: c'est l 'événement qui se réalise ssi A ou B se réalise ou les deux se réalisent.
- **Intersection $\cap$ (événement conjonction)**
  A et B, $A \cap B$: c'est l'événement qui se réalise ssi A et B se réalise en même temps.
- **Négation (événement contraire)**
  A' ou non A : c'est l'événement qui se réalise ssi A ne se réalise pas.

Notions élémentaires : Événement

Les 4 catégories d'événements

❖ Evénement élémentaire (simple) : c'est lorsque l'événement se réduit à un seul résultat ;

❖ Événement composé : tout événement correspondant à plus d'un résultat ;

❖ Événement impossible : que l'on désigne par Ø, c'est l'événement qui ne se réalise jamais ;

❖ Événement certain : que l'on désigne par Ω, c'est l'événement qui se réalise toujours.

Notions élémentaires : Événement

Famille d'événements

- Les événements *A* et *B* sont **mutuellement exclusifs (m.e) ou incompatibles** s'ils ne peuvent se réaliser en même temps. Formellement on écrit $A \cap B =$ Ø.

- L'événement *A* **implique** *B* si la réalisation de A entraîne nécessairement la réalisation de B lors de l'expérience aléatoire, c'est-à-dire que tous les résultats de A font partie de B. Formellement on écrit $A \subseteq B$.

Notions élémentaires : Événement

Exemple

$$S = \begin{Bmatrix} (B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B) \\ (B,D,D),(D,B,D),(D,D,B),(D,D,D) \end{Bmatrix}$$

- Événement A : n'obtenir aucune pièce défectueuse
- Événement B : obtenir exactement une pièce défectueuse
- Événement C : obtenir au plus une pièce défectueuse

$$A = \{(B,B,B)\}$$

$$B = \{(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B)\}$$

$$C = \{(B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B)\}$$

Remarques

A et B sont incompatibles

A implique C

A est un événement simple

B et C sont deux événements composés

Définition des Probabilités : approche classique

Probabilité d'un résultat $w \in \Omega$

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité pour un ensemble fondamental Ω contenant N résultats, on assigne à chaque résultat $w \in \Omega$, une probabilité 1/N.

$$P(w) = 1/N \quad \text{où} \quad N = |\Omega| \qquad \forall w \in \Omega$$

La cardinalité de l'ensemble Ω

Définition des Probabilités : approche classique

Probabilité d'un événement $E \subset \Omega$

La probabilité d'un événement E sera définie comme la somme des probabilités de chacun des événements élémentaires qui le constitue.

Exemple

Soit l'ensemble fondamental associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé une fois est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sous l'hypothèse de l'équiprobabilité, on assigne à chacun des 6 résultats une probabilité 1/6.

Soit l'événement A = obtenir un nombre pair de points sur le dé. Par définition $A = \{2, 4, 6\}$ ou comme la réunion de trois événements élémentaires $A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$. Ainsi, $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3/6 = 0.5$.

Définition des Probabilités : approche classique

Probabilité d'un événement $E \subset \Omega$

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, on appelle probabilité d'un événement *E*, le nombre réel noté *P(E)* et défini par :

$$P(E) = \frac{\textit{nombre de résultats favorables à } E}{\textit{nombre de résultats de } \Omega}$$

Exemple

Soit l'événement B = obtenir un nombre impair de points sur le dé. Le nombre de cas favorables est 3 puisque B = {1, 3, 5}. Or le nombre de résultats possibles de S est 6 puisque S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Donc, P(B) = 3/6 = 0.5

Définition des Probabilités : approche classique

Propriétés

Soient A et B deux événements relatifs à la même expérience aléatoire

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si A et B sont *incompatibles* ou mutuellement exclusifs alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilités classiques

Problèmes avec les probabilités classiques ????

La définition classique de la probabilité présente deux limites majeures :

- L'hypothèse de l'équiprobabilité n'est pas toujours vérifiée ;
- Lorsque l'ensemble fondamental Ω est infini, il est impossible de déterminer la probabilité de chaque résultat.

Probabilités : Définition générale

Définition générale

Soit Ω, l'ensemble fondamental correspondant à une expérience aléatoire, on appelle probabilité d'un événement E toute fonction P à valeurs dans l'ensemble des réels, qui vérifie les 3 axiomes suivants :

1. $P(E) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si E1,…,En sont mutuellement exclusifs alors $P(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + \ldots + P(E_n)$.

L'hypothèse de l'équiprobabilité n'est pas nécessairement vérifiée

Probabilités : Règles de calcul

Règles

Soient E et F deux événements relatifs à la même expérience aléatoire

1. $P(E') = 1 - P(E)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Si $E \subseteq F$ alors $P(E) \leq P(F)$
4. $0 \leq P(E) \leq 1$
5. $P(E \cap F) = P(E) - P(E \cap F') = P(F) - P(F \cap E')$
6. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Définition générale des probabilités : Remarques …

- Bien que cette définition générale est satisfaisante dans l'esprit des mathématiciens, elle n'est pas satisfaisante d'un point de vue pratique
  - Elle donne les règles (ou axiomes) que la fonction probabilité doit vérifier mais elle ne précise pas comment déterminer concrètement cette fonction.
- Pour déterminer concrètement la fonction de probabilité, deux principales approches ont été proposées :
  - L'approche objective (ou fréquentiste)
  - L'approche subjective

Fonction de probabilité : Approche objective ou fréquentiste …

- Dans cette approche, on suppose qu'il est possible de répéter une expérience aléatoire dans les même conditions aussi souvent que l'on veut.

- La probabilité d'un événement E :

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Le nombre de fois que E est réalisé

Le nombre de fois que l'expérience est répétée

- Inconvénients :
  - ✓ On ne peut pas répéter indéfiniment une expérience aléatoire dans les mêmes conditions
  - ✓ Cette approche donne une approximation et non pas une valeur exacte de *P(E)*

Fonction de probabilité : Approche objective ou fréquentiste …

?? Le saviez-vous ??

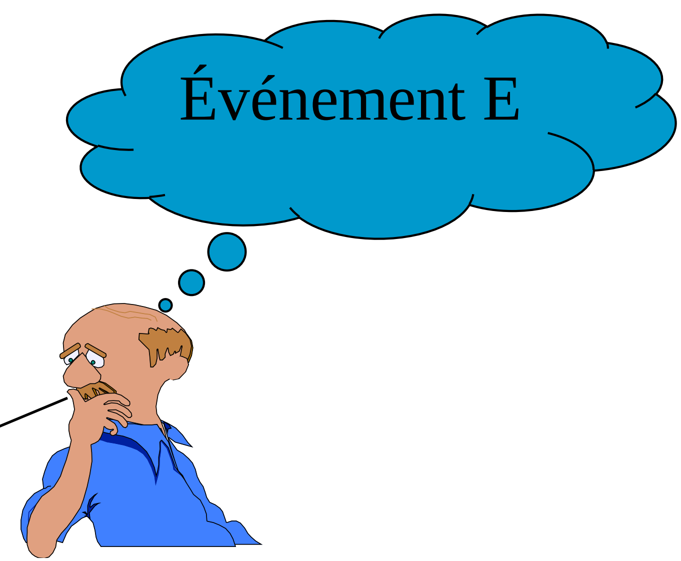
Buffon (~1750) lança 4040 fois une pièce de monnaie et constata que face était apparu dans 50,69 % des lancés.

Pearson (au début du 20ème siècle) fit la même expérience, mais 24'000 fois; il s'aperçut qu'il y avait 50,05 % de faces.

Fonction de probabilité : Approche subjective …

- Dans cette approche, on suppose que la probabilité d’un événement est comme une mesure qui exprime le degré de conviction qu’un individu particulier attribue, en se basant sur ses expériences, son jugement, ses sentiments, …, à la réalisation de cet évènement

N.B. *Cette probabilité est un jugement subjectif et donc il peut différer d’un individu à l’autre*



$$P(E) = 0.3$$