

# **Entwicklung von Prozessen und Optimierungsstrategien zur multidisziplinären Auslegung von Hochdruckturbinschaufeln**

Der Fakultät für Maschinenbau, Elektrotechnik und  
Wirtschaftsingenieurwesen der Brandenburgischen Technischen  
Universität Cottbus vorgelegte Dissertation zur Erlangung des  
akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von

**M. Sc. Frank Freidank (geboren Wagner)**

geboren am 13. August 1984 in Berlin



Ich möchte Prof. Arnold Kühhorn für die umfassende Unterstützung danken. Er hatte jederzeit ein offenes Ohr für die Herausforderungen, die sich im Rahmen einer Dissertation jedem Promovenden stellen. Ebenfalls danke ich Prof. Marius Swoboda für das Entwickeln und Fortführen des Doktoranden-Programmes VIT und natürlich, dass er sich bereit erklärte diese Arbeit zu bewerten. Prof. Christoph Egbers sei an dieser Stelle für die Übernahme des Kommissionsvorsitzes gedankt.

Den Kollegen vom Industriepartner Rolls-Royce danke ich für die starke Unterstützung durch zahlreiche Personen in unterschiedlichsten Fachgebieten. Hervorzuheben sind sicherlich Dr. Roland Parchem, welcher mit Rat und Tat das Arbeitspaket im Rahmen des VITIV-Projektes vorantrieb, Bernd Meissner, welcher in unzähligen Unterhaltungen das umfassende Fachwissen am Lagerfeuer weitergab, und Dr. Timm Janetzke, welcher durch die fachliche Kompetenz in Sachen Turbinenkühlung ständiger Ansprechpartner war.

Allen Mitarbeitern am Lehrstuhl Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen (SMF) danke ich für die freundliche Aufnahme und die sachlichen Anregungen in mehr als vier Jahren, die ich am Lehrstuhl verbringen durfte. Allein aus diesem Grund, werde ich Cottbus immer in guter Erinnerung behalten.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Familie danken. Meiner Frau Anne, für die Liebe und Unterstützung in allen Lebenssituationen und dass Sie bei den sprachlichen Korrekturen nie aufgegeben hat, meinem Sohn Robin, dessen Lachen mich immer wieder aufbaut und meinen Eltern, die mich über den gesamten Werdegang unterstützt und ermutigt haben.

## Kurzfassung:

Bei der Rotorschaufel der Hochdruckturbine handelt es sich um das erste rotierende Bauteil nach der Brennkammer. Dementsprechend sind sowohl die thermischen als auch strukturellen Lasten durch die vorherrschende Temperatur beziehungsweise Rotation enorm. Die beteiligten Disziplinen zur Auslegung einer solchen Komponente sind die Struktur- und Lebensdauerberechnung, die Aerodynamik und die Kühlung der Turbinenschaufel, wobei die letzteren beiden Disziplinen auch oft unter dem Begriff *aerothema* zusammengefasst werden.

Innerhalb dieser Arbeit werden unterschiedliche Teilgebiete der Rotorschaufel ebenso wie methodische Aspekte bearbeitet. Dies umfasst Untersuchungen zur Verbindung zwischen der Rotschaufel und der dazugehörigen Turbinenscheibe, welche als Tannenbaumfuß bezeichnet wird. Dabei steht der Einfluss der verwendeten Parametrisierung auf den gesamten Auslegungsprozess im Vordergrund. Darunter fallen alle notwendigen Arbeitsschritte von der theoretischen Überlegung, wie die Parametrisierung gestaltet werden kann, die entsprechende Integration in die CAD-Software bis zu den Eigenschaften des besten Entwurfes des Tannenbaumfußes. Ziel ist es, durch Variation der vereinfachten zweidimensionalen Geometrie, die Spannung in kritischen Regionen zu reduzieren.

Ein wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit befasst sich mit der Verbesserung eines Arbeitsprozesses für die Turbinenkühlung und der Durchführung von Optimierungen mit den verwendeten Parametrisierungen für die interne Schaufelgeometrie. Ziel ist ebenfalls die Entwicklung von Optimierungsstrategien für den betrachteten Fall. Im Detail handelt es sich um Variationen der Filmkühlbohrungen und Turbulatoren (in diesem Fall interne Rippen), wobei der Massenstrom für die Filmkühlung und die Oberflächentemperatur der externen Schaufelflächen minimiert werden sollen. Es handelt sich um eine Optimierung mit mehreren Zielen und ein sogenanntes *Mixed-Integer-Problem*, bei dem Eingaben sowohl diskret, als auch kontinuierlich vorliegen.

Als letzter Schwerpunkt wird untersucht, wie stark die Rechenzeit durch Verwendung von Antwortflächen reduziert werden kann, um vor allem Aspekte von Robustheit mit in die Optimierung zu integrieren. Insbesondere die Vertrauenswürdigkeit der dazu benötigten Methoden ist von herausragender Bedeutung. Dies umfasst nicht nur die Methoden zur Erstellung von Antwortflächen, sondern auch die Methoden zur Qualitätsbewertung von Antwortflächen und zur Erstellung der verwendeten Stützstellen. Als Untersuchungsobjekt dient ein Arbeitsablauf für die Spannungs- und Lebensdauerberechnung der Hochdruckturbinenschaufel. Hierbei werden Geometrieparameter ebenso wie Materialparameter und Parameter für die Randbedingungen verändert. Zielgröße ist primär die Lebensdauer auf der Schaufeloberfläche. Es werden aber auch andere Größen, wie Masse und aerodynamischer Wirkungsgrad, einbezogen.

**Abstract:**

The rotor blade of a high pressure turbine in an aero engine is the first rotating component behind the combustor. For this reason the thermal as well as the structural load are tremendous due to the existing temperature and rotation. The involved disciplines in the design process of such a component are stress and lifting prediction, aerodynamics and cooling of a turbine blade. The last two disciplines are often summarized as *aerothermal*.

In the current work different aspects of the rotor blade design as well as methodical aspects will be processed. This includes investigations into the connection between the rotor blade and the corresponding turbine disc, which is called firtree. Focus lies on the influence of the used parametrisation on the overall design process. Therefore all necessary steps in the design process will be considered. This starts with theoretical thoughts what the parametrisation could look like and how it can be integrated into a CAD system and ends with the attributes of the best firtree design. The overall aim is a stress reduction in critical regions of the two dimensional geometry.

An essential part of the current work is about the improvement of an existing workflow for turbine cooling and the execution of optimisations with available parametrisations for internal geometry features. The aim is to develop optimisation strategies for the present example. This means in detail a variation of film cooling holes and turbulators (in the current case ribs), whereby the coolant mass flow and the temperature of the external surface of the rotor blade should be minimised. A two objective optimisation with a so called *mixed-integer-problem* will be addressed, where the input parameters are discrete as well as continuous numbers.

The main objective of the last part is the influence of the reduction of the computational effort by using response surface methods, especially considering robust design in the optimisation process. Key point is the reliability of the corresponding methods. Here not only the creation but also the quality evaluation of the response surface as well as the creation of the sample points are highlighted. As an example the workflow for a stress and lifting analysis of a high pressure turbine blade is used. Thereby geometry parameter as well as parameter for the boundary conditions and material were varied. Primary objective is the external life of the rotor blade but other values like the mass and aerodynamic efficiency are included as well.

## Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>VIII</b>
Lateinische Symbole . . . . .	VIII
Griechische Symbole . . . . .	IX
Indizes . . . . .	IX
Abkürzungsverzeichnis . . . . .	X
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Hochdruckturbinschaufel . . . . .	3
1.2. Gegenwärtige Auslegungsstrategien . . . . .	6
1.3. Motivation dieser Arbeit . . . . .	7
<b>2. Theorie</b>	<b>11</b>
2.1. Mathematische Grundlagen . . . . .	11
2.1.1. Geometrie und Parametrisierung . . . . .	11
2.1.2. Optimierung . . . . .	13
2.1.3. Robustheit . . . . .	17
2.1.4. Stützstellengenerierung . . . . .	18
2.1.5. Antwortflächen . . . . .	19
2.2. Physikalische Grundlagen . . . . .	22
2.2.1. Wärmeübertragung . . . . .	22
2.2.2. Vorauslegung Kühlung . . . . .	25
2.2.3. Aerodynamik . . . . .	28
2.2.4. Spannung- und Lebensdauerberechnung . . . . .	29
2.3. Numerische Grundlagen . . . . .	32
2.3.1. FEM . . . . .	32
2.3.2. CFD . . . . .	32
2.3.3. Kopplungsstrategien . . . . .	33
<b>3. Ein-Ziel-Optimierung einer Schaufel-Scheibe-Verbindung</b>	<b>35</b>
3.1. Einleitung und Stand der Technik . . . . .	35
3.2. Parametrisierung . . . . .	36
3.2.1. Globaler Parametersatz . . . . .	36
3.2.2. Parametrisierung mit einem Kreisbogen . . . . .	38
3.2.3. Parametrisierung mit zwei Kreisbögen . . . . .	38
3.2.4. Parametrisierung mit Splines . . . . .	39
3.3. Arbeitsablauf und Durchführung . . . . .	41
3.3.1. Beschreibung des Firtree-Modells . . . . .	41
3.3.2. Arbeitsablauf und Implementierung . . . . .	43
3.3.3. Optimierungsformulierung . . . . .	44
3.4. Ergebnisse und Diskussion . . . . .	45
3.4.1. Optimierung . . . . .	45
3.4.2. Vergleich der besten Ergebnisse . . . . .	48
3.4.3. Vergleichsmatrix . . . . .	50
3.5. Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	52

<b>4. Mehr-Ziel-Optimierung für die Turbinenkühlung</b>	<b>55</b>
4.1. Einleitung und Stand der Technik . . . . .	55
4.2. Parametrisierung . . . . .	57
4.3. Arbeitsablauf . . . . .	59
4.4. Parameterreduzierung . . . . .	60
4.5. Optimierungsformulierung . . . . .	62
4.6. Ergebnisse und Diskussion . . . . .	63
4.6.1. Optimierung mit dem AMGA-Algorithmus . . . . .	64
4.6.2. Optimierung mit dem NSGA-II- und Vergleich mit dem AMGA-Algorithmus	66
4.6.3. Optimierung mit der alternativen Formulierung und AMGA-Algorithmus .	67
4.7. Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	70
<b>5. Multidisziplinäre Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung</b>	<b>73</b>
5.1. Einleitung und Stand der Technik . . . . .	73
5.2. Validierung der Methoden . . . . .	75
5.2.1. Matlab-Toolbox für Validierung und Optimierung . . . . .	75
5.2.2. Vergleich der Methoden zur Stützstellengenerierung . . . . .	77
5.2.3. Vergleich der Methoden zur Antwortflächengenerierung . . . . .	79
5.3. Parametrisierung und Optimierung . . . . .	80
5.3.1. Parametrisierung . . . . .	80
5.3.2. Optimierungsformulierung . . . . .	82
5.4. Arbeitsablauf und Durchführung . . . . .	83
5.4.1. Arbeitsablauf . . . . .	84
5.4.2. Voruntersuchungen . . . . .	84
5.4.3. Durchführung . . . . .	86
5.5. Ergebnisse und Diskussion . . . . .	86
5.5.1. Bewertung der generierten Antwortflächen . . . . .	86
5.5.2. Ein-Ziel-Optimierung der Lebensdauer . . . . .	89
5.5.3. Robustheitsoptimierung der Lebensdauer . . . . .	89
5.5.4. Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung . . . . .	91
5.6. Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	93
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>97</b>
6.1. Zusammenfassung . . . . .	97
6.2. Ausblick . . . . .	99
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>102</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>103</b>
<b>Literatur</b>	<b>104</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>109</b>
A.1. Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	109
A.2. Software . . . . .	109
A.3. MOViT . . . . .	111
A.4. Strategisches Vorgehen zur Vorbereitung von Optimierungen . . . . .	114
A.5. Parameterübersicht für den Firtree . . . . .	117
A.6. Clustering in der Kühlungsoptimierung . . . . .	117
A.7. Branin-Testfunktion . . . . .	120

**Lateinische Symbole**

$A$	Matrix
$A$	Fläche
$A_{s,g}$	umströmte Schaufeloberfläche
$a, a_i$	Koeffizienten der linearen Regression
$C$	Dämpfungsmaatrix
$C$	Kurve
$c_p$	spezifische Wärmekapazität
$D_{LCF}, D_{Kr}$	Lebensdauerkonto bzgl. LCF / Kriechen
$d_n$	<i>crowding distance</i>
$f, r$	Lastvektor
$f(x)$	Funktionsverlauf
$\tilde{f}(x)$	Approximation des Funktionsverlaufes
$f_k$	$k$ -ter Funktionswert
$\mathbf{h}(\mathbf{p})$	Ungleichheitsnebenbedingungen
$h, h_{tc}$	Wärmeübergangskoeffizient
$I_{n,i}$	Index des Pareto-Front designs
$i, j, k$	Laufindizes
$K$	Steifigkeitsmatrix
$k$	Wärmeleitfähigkeit
$L$	Lebensdauer
$M$	Massenmatrix
$\dot{m}$	Massenstrom
$\tilde{m}$	dimensionsloser Massenstrom
$N$	Anzahl erträglicher Lastspiele
$N_{i,k}$	$i$ -te Ansatzfunktion vom Grad $k$
$n$	Anzahl aktueller Lastspiele
$\mathbf{P}$	Parameterraum
$\mathbf{p}$	aktueller Parametersatz
$\mathbf{p}^u, \mathbf{p}^o$	untere/obere Schranken für Parameter
$P_i$	$i$ -ter Kontrollpunkt
$p$	Polynome für lineare Regression
$\dot{Q}$	Wärmestrom
$Q_j$	Interpolationspunkte
$\dot{q}_i$	Wärmestromdichte in $i$ -Richtung
$\dot{q}_V$	volumenbezogene Wärmequelle
$\dot{q}_W$	Wärmestromdichte über Wand
$R_k$	Korrelationsansatz für Kriging-Methode
$r$	Radius/Abstand
$T$	Temperatur
$t$	Zeit
$t$	aktuelle Standzeit
$t_m$	erträgliche Standzeit

$u, \dot{u}, \ddot{u}$	Verschiebung/Geschwindigkeit/Beschleunigung der Knotenpunkte
$u$	Knotenvektor
$\bar{U}_g$	gemittelter effektiver Wärmeübergangskoeffizient
$U_i$	$i$ -tes Element aus dem Knotenvektor
$u, v$	Variable
$v$	Eigenvektor
$w$	spezifische Arbeit
$x, x_i$	Ortsvektor
$x, y, z$	Koordinaten

## Griechische Symbole

$\nabla$	Nabla-Operator (1.Ordnung)
$\Delta$	Laplace-Operator (2.Ordnung) $\Delta = \nabla \cdot \nabla$
$\epsilon(x)$	Fehler bei der Approximation
$\varepsilon$	Dehnung
$\dot{\varepsilon}$	Dehnrate
$\varepsilon$	dimensionsloser Emissionsgrad
$\varepsilon_c$	<i>cooling effectiveness</i>
$\varepsilon_f$	<i>film cooling effectiveness</i>
$\eta$	Wirkungsgrad
$\eta_c$	<i>cooling efficiency</i>
$\lambda, \lambda_i$	Koeffizienten der radialen Basisfunktionen
$\lambda$	Eigenwert
$\mu$	Mittelwert
$\varphi$	Radiale Basisfunktion
$\Pi$	Druckverhältnis
$\varrho$	Dichte
$\varrho_{ij}$	Korrelationskoeffizient
$\sigma$	Standardabweichung
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante
$\theta_k$	Koeffizienten der Kriging-Methode

## Indizes

$(\overline{\quad})$	Mittelwert
$(\quad)^*$	Anwesenheit von Filmkühlung
$(\quad)_b$	<i>blade</i> (Turbinenschaufel)
$(\quad)_c$	<i>coolant</i> (kühlendes Fluid)
$(\quad)_{\text{Ext}}$	Extern
$(\quad)_e$	<i>exit</i> (Auslass)
$(\quad)_F$	Fluid
$(\quad)_f$	<i>film</i> (Film)

( ) <sub>g</sub>	Heißgas
( ) <sub>Int</sub>	Intern
( ) <sub>i</sub>	<i>inlet</i> (Einlass)
( ) <sub>T</sub>	Turbine
( ) <sub>W</sub>	Wand

**Abkürzungsverzeichnis**

AMGA	Archive-based Micro Genetic Algorithm
B-Spline	<b>Basis-Spline</b>
CAD	Computer Aided Design
CCF	Combined Cycle Fatigue
CFD	Computational Fluid Dynamics
CHT	Conjugate Heat Transfer
CMA-ES	Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy
DNS	Direkte Numerische Simulation
DoE	Design of Experiments
FE/FEM	Finite Elemente / Finite Elemente Methode
HCF	High Cycle Fatigue
iLHS	improved Latin Hypercube Sampling
KRIG	Kriging
LCF	Low Cycle Fatigue
LES	Large Eddy Simulation
LHS	Latin Hypercube Sampling
LOOCV	Leave-One-Out-Crossvalidation
LR	Lineare Regression
MCS	Monte Carlo Simulation
NSGA-II	Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II
NURBS	Non-uniform rational B-Splines
OGV	Outlet Guide Vane
oLHS	optimal Latin Hypercube Sampling
RANS	Reynold's Averaged Navier-Stokes
RBF	radiale Basisfunktionen
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations
TBC	Thermal Barrier Coating





## 1. Einleitung

Die steigende Anzahl an Flügen auf globaler Ebene macht es notwendig, dass sowohl der Schadstoffausstoß als auch der Verbrauch von Treibstoff reduziert wird. Aus dem letzten Punkt ergibt sich direkt die Anforderung der Erhöhung des Gesamtwirkungsgrades eines Flugzeugtriebwerkes und damit eine Verbesserung der Wirkungsgrade aller Komponenten. Zusätzlich sind verkürzte Produktzyklen für die Auslegung eines Triebwerkes eine Herausforderung für die Triebwerkshersteller. In diesem Rahmen ist es unumgänglich durch Automatisierung und Optimierung das Komponentendesign zu beschleunigen und gleichzeitig qualitativ hochwertigere Ergebnisse zu erzeugen.

Der typische Aufbau moderner Triebwerke im Marktsegment für kleine und mittlere zivile Flugzeuge ist ein ByPass-Turbofan. In diesem Triebwerkstyp wird die Luft über einen Fan eingesaugt und direkt danach in einen Nebenstrom und Hauptstrom aufgeteilt. Die Beschleunigung des Nebenstromes über den Fan sorgt für den größten Teil des Gesamtschubs. Die Hauptaufgabe der Komponenten im Hauptstrom ist den dauerhaften Betrieb und damit auch die Rotation des Fan zu gewährleisten. Das Triebwerk ist meist aus zwei Wellen aufgebaut, welche als Nieder- und Hochdruckwelle bezeichnet werden. In größeren Triebwerken kommen jedoch auch drei Wellen zum Einsatz. Die drei wichtigsten Komponenten im Hauptstrom des Triebwerks sind der Kompressor/Verdichter, die Brennkammer und die Turbine, wobei der Kompressor und die Turbine jeweils einen Nieder- und Hochdruckteil auf der entsprechenden Welle besitzen. Die Kernaufgaben dieser drei Komponenten lassen sich zusammenfassen als: Kompressor → Komprimierung der Luft für hohe Verdichterdruckverhältnisse; Brennkammer → Einbringen von Energie in Form von Wärme in den Kreisprozess; Turbine → Umwandlung der thermischen Energie in Rotation zur Gewährleistung des dauerhaften Betriebs.

In der Abbildung 1.1 ist das Triebwerk BR715 von Rolls-Royce als typischer Vertreter der Zwei-Wellen-Triebwerke abgebildet. Das abgebildete Schnittmodell der BR715 zeigt die zuvor beschriebene Triebwerkskonfiguration aus Einlass, Niederdruckverdichter mit Fan, Hochdruckverdichter, Brennkammer, Hochdruckturbine, Niederdruckturbine und Auslass. Zusätzlich sind noch diverse Anbauteile zu erkennen, welche unterschiedlichste Aufgaben, wie die Entnahme der Zapfluft oder die Einspritzung von Brennstoff haben.

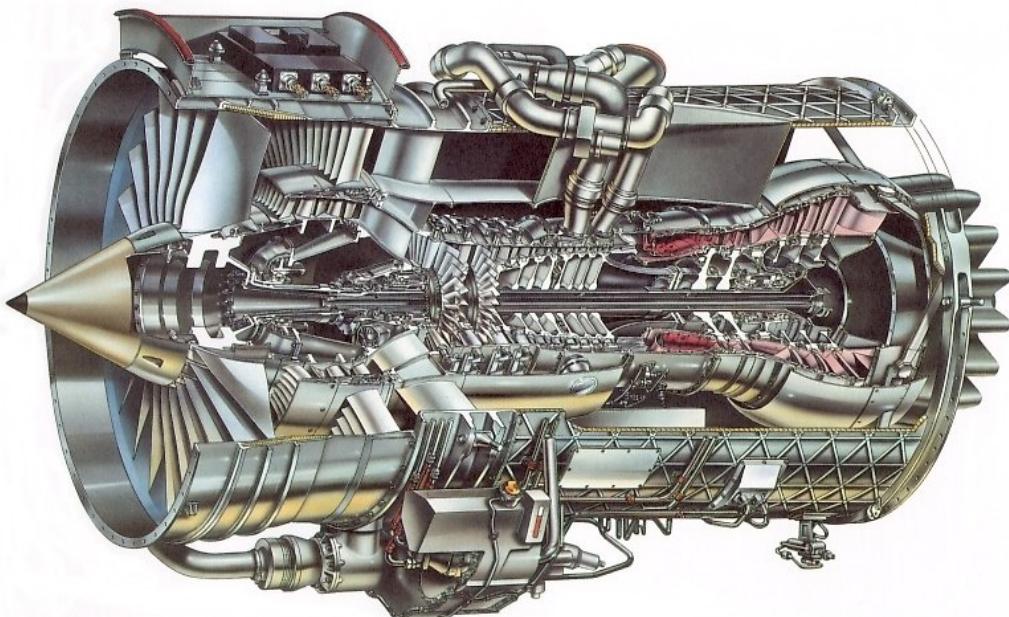


Abbildung 1.1: Schnittmodell eines Rolls-Royce BR715 Triebwerk

In der Abbildung 1.2 ist der idealisierte thermodynamische Kreisprozess für ein Triebwerk im  $p$ - $v$ - und  $h$ - $s$ -Diagramm dargestellt. Dabei handelt es sich um einen offenen, rechts-drehenden Kreisprozess<sup>1</sup>. Dieser Prozess besteht aus den Schritten isentroper Kompression ( $1 \rightarrow 2$ ) im Fan und Verdichter, isobare Verbrennung ( $2 \rightarrow 3$ ) in der Brennkammer, isentroper Expansion ( $3 \rightarrow 4$ ) in Turbine und Auslass von  $4 \rightarrow 1$  ist die Umgebung (isobar).

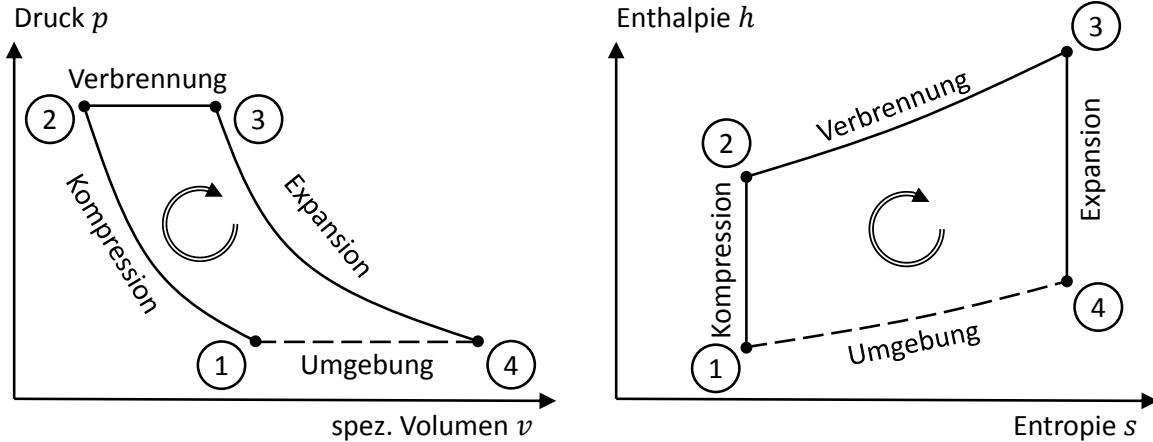


Abbildung 1.2: Idealisierter Kreisprozess eines Flugzeugtriebwerkes im  $p$ - $v$ -Diagramm (links) und  $h$ - $s$ -Diagramm (rechts)

Eine Erhöhung des Wirkungsgrades aus der Betrachtung des Kreisprozesses ist durch die Erhöhung des Druckverhältnisses vom Verdichter und der Eintrittstemperatur von der Turbine zu erreichen (Bräunling [10]). Besonders der deutliche Trend zu immer höheren Temperaturen am Turbineneinlass bzw. Brennkammeraustritt führt dazu, dass die Bauteile in der Hochdruckturbine einer erhöhten thermalen Belastung standhalten müssen. Dies ist insbesondere für die Turbinenkühlung eine Herausforderung. Dazu ist vor allem die erste Stufe der Hochdruckturbine (Stator und Rotor) stark mit Filmkühlung versehen. Typischerweise sind Vorder- als auch Hinterkanten der Schaufeln der höchsten thermalen Belastung ausgesetzt.

Beispielhaft ist in der Abbildung 1.3 die erste Stufe einer Hochdruckturbine dargestellt. Die Versorgung mit Kühlung erfolgt über das Sekundärluftsystem, welches Zapfluft aus dem Kompressor entnimmt und zu den entsprechenden Turbinenstufen führt. Hierbei wird die Kühlung der Hochdruckturbine meist aus der letzten Stufe des Hochdruckverdichters entnommen. Die Schaufeloberfläche, welche sich direkt in der Heißgasströmung befindet, wird bei dem Stator mit mehreren Hundert Filmkühlbohrungen gekühlt und bei dem Rotor werden rund ein Hundert Bohrungen benötigt, um die Komponente zu kühlen. Heutzutage werden die Endwände von Stator und Rotor ebenfalls mit Filmkühlung versehen, was der erhöhten Turbineneintrittstemperatur geschuldet ist.

Über den gesamten Flugzyklus<sup>2</sup> (Start, Steigflug, Reiseflug, Landung, ...) ist zu gewährleisten, dass niemals heiße Luft in die Turbinenkomponenten eingesaugt wird. Somit muss jederzeit ein Überdruck im Inneren der jeweiligen gekühlten Komponente, gegenüber der Hauptströmung, sicherstellt werden. Demzufolge sollte das Gesamtsystem so ausgelegt werden, dass der Druckabbau über die Brennkammer immer größer ist, als der Druckabbau über das Sekundärluftsystem.

<sup>1</sup>Diese Art von Kreisprozess wird Joule- oder Brayton-Kreisprozess genannt

<sup>2</sup>Flugzyklus: Generischer Ablauf *eines* standardisierten Fluges zur Auslegung/Zertifizierung des Triebwerks

Der Auslegungsprozess für ein Gesamttriebwerk gliedert sich in unterschiedliche Phasen, wobei meist ein Basiskonzept aus einem vorhergehenden Triebwerksprojekt aufgegriffen wird. Die erste Auslegungsphase wird als "PrelimDesign"<sup>3</sup> bezeichnet und adressiert die globalen Eigenschaften des Triebwerks, wie Schubklasse, Wirkungsgrad, Lebensdauer oder Kraftstoffverbrauch. Das Genauigkeitslevel ist entsprechend gering, liefert jedoch erste Ergebnisse in einem relativ kurzen Zeitraum und eignet sich gut, um neue Konzepte zu untersuchen.

Das höchste Level an Genauigkeit wird beim "Detailed Design" erreicht, welches in den jeweiligen Disziplinen am Ende des Auslegungsprozesses steht und entsprechend die meiste Zeit beansprucht, da häufig aufwendige 3D-Rechnungen in Form von Studien oder Optimierungen durchgeführt werden. Je nach Komponente oder System existieren mehrere Zwischenstufen, in denen sowohl der Detailgrad, als auch der Aufwand steigen.

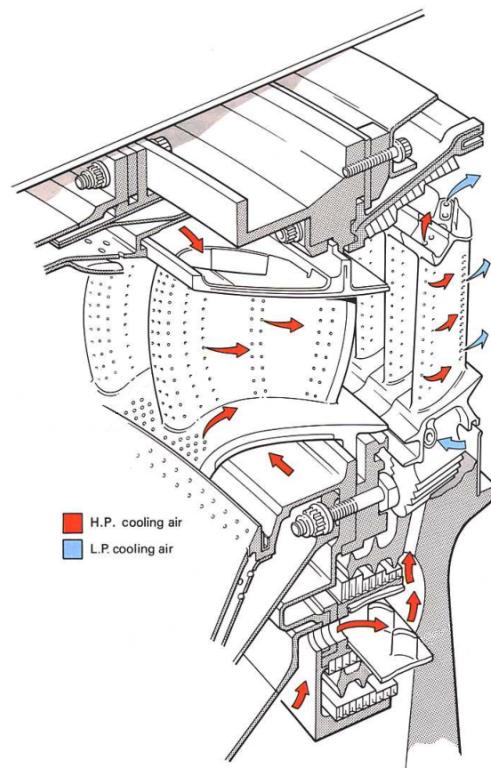


Abbildung 1.3: Kühlung der ersten Stufe einer Hochdrukturbine nach [58]

## 1.1. Hochdruckturbinschaufel

Für das vorliegende Beispiel einer Rotorschaufel der ersten Stufe einer Hochdrukturbine spielen drei Disziplinen eine übergeordnete Rolle. Die Erste ist die Aerodynamik, welche die externe Form der Schaufel auf den besten Wert des aerodynamischen Wirkungsgrades im Reiseflug optimiert. Die zweite Disziplin ist die Turbinenkühlung, welche sich mit der Vorhersage eines zulässigen Temperaturprofiles unter Variation von interner Geometrie beschäftigt. In der dritten Disziplin werden die dazugehörigen Spannungen berechnet und daraus die entsprechende Lebensdauer bestimmt. Alle drei Disziplinen benötigen Randbedingungen, welche iterativ ausgetauscht werden müssen, sodass meist eine Änderung der Geometrie oder übergeordneter Randbedingungen eine erneute Auswertung aller Disziplinen zur Folge hat.

Jede einzelne Disziplin hat ihre eigene Abstufung des Genauigkeitslevels im Auslegungsprozess. So existieren in der Aerodynamik eindimensionale Verfahren für einen Mittelschnitt (*Meanline*), zweidimensionale Ansätze auf Sektionen (*Throughflow*) und dreidimensionale Methodiken (3D-CFD) zur Erfassung aller signifikanten Strömungsphänomene. In der Kühlungsauslegung geht man den Weg über analytische Gleichungen (z.B. Bilanzgleichungen für die Energie), gekoppelte Verfahren für Struktur- und Strömungsmechanik aufgebaut aus numerischen und korrelationsbasierten Modellen bis hin zu CHT<sup>4</sup>-Rechnungen inklusive Fluid und Solid als höchstes Genauigkeitslevel. Für die Bestimmung der Spannungen und Lebensdauer finden aufgrund moderater Rechenzeiten und unterschiedlicher Schädigungsmechanismen hochwertige Modelle Anwendung. Nichtsdestotrotz existieren für einige Mechanismen, wie z.B. die niederzyklische Belastung, vereinfachte Modelle, welche auch in der Vorauslegungs- bzw. "Prelim"-Phase herangezogen werden.

<sup>3</sup>"PrelimDesign": Preliminary Design → Vorauslegungsphase

<sup>4</sup>CHT: Conjugate Heat Transfer

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass diverse Schnittstellen zu benachbarten Systemen existieren. So wird mit dem Sekundärluftsystem Druck und Massenstrom an allen Schnittstellen ausgetauscht, wie z.B. an den Einlässen zur Turbinenkühlung oder Kavitäten zwischen Hauptgaspfad und Sekundärluftsystem. Aus der Leistungsrechnung für den thermodynamischen Kreisprozess werden übergeordnete Randbedingungen, so z.B. Drehzahl der Wellen, Drücke und Temperaturen entnommen. Es besteht eine geometrische Verbindung von der Rotorschaufel und der dazugehörigen rotierenden Scheibe, welche als Firtree<sup>5</sup> bezeichnet wird. Zwischen Rotorschaufel und dem äußeren Gehäuse findet eine Interaktion bei Inbetriebnahme und über den Flugzyklus statt, sodass am Gehäuse Material abgetragen wird und sich die Spaltströmung an der Schaufelspitze entsprechend einstellt.

Um ein besseres Verständnis für die hochkomplexe Geometrie zu vermitteln, ist in der Abbildung 1.4 die Rotorschaufel der ersten Stufe der Hochdruckturbine des Triebwerkes vom Typ BR725 dargestellt. Dabei ist auf der linken Seite die externe Geometrie und der rechten Seite die negative interne Geometrie abgebildet. Extern und intern sind einige der wichtigsten Elemente der Geometrie benannt.

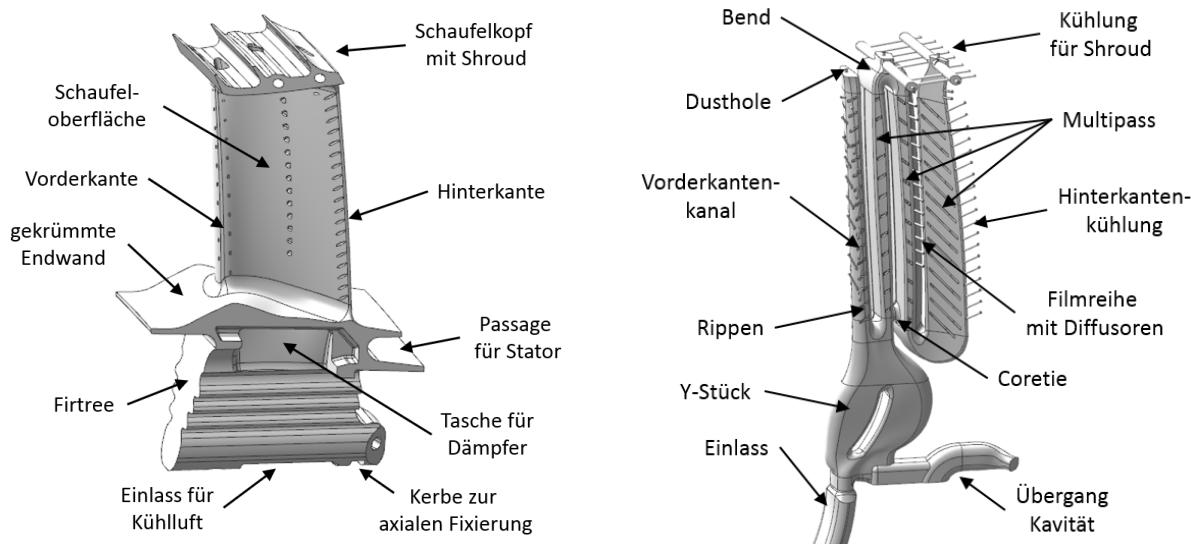


Abbildung 1.4: Außen- und Innenansicht der Rotorschaufel der 1. Stufe der Hochdruckturbine des BR725-Triebwerkes

Der Ablauf des Auslegungsprozesses kann beispielhaft angegeben werden mit: Die Aerodynamik legt die externe Schaufeloberfläche im Hauptkanal und den Schaufelkopf fest, sodass der größtmögliche aerodynamische Wirkungsgrad im Reiseflug erreicht wird. Das interne Design der Schaufelgeometrie wird von der Kühlung bestimmt, wobei gewisse Fertigungsanforderungen (wie z.B. minimale Wandstärken) erfüllt werden müssen. Diese Anforderungen resultieren zum einen aus den Berechnungen von Spannung/Lebensdauer und zum anderen aus den Limitierungen des Herstellungsprozesses. Die verbliebenen Geometrieelemente unter der Plattform werden fast ausschließlich durch die dazugehörige Spannung-/Lebensdaueraussagen getrieben.

Die Bestandteile der Rotorschaufel erfüllen dabei jeweils unterschiedliche Aufgaben. So ist die Oberfläche der Schaufel im Heißgaskanal maßgeblich für die Überführung der Energie aus der Hauptströmung in Rotation zuständig. Durch Verdrehen der gesamten Schaufel oder einzelner Ebenen können Energieentnahme und Sekundäreffekte gesteuert werden. Der Schaufelkopf hat die Aufgabe die Sekundärströmung von der Druck- auf die Saugseite der Schaufel zu minimieren. Die Endwände sollen die Sekundärstrukturen aus den Kavitäten durch ihre Konturierung so beeinflussen, dass der Wirkungsgrad verbessert wird.

<sup>5</sup>Firtree: Wird als Tannenbaumfuß bezeichnet und in der Hochdruckturbine bei Rotorschaufeln verwendet.

Die Gestaltung der Schaufel unter der Plattform adressiert vor allem Verbindungen zu anderen Bauteilen. Der Firtree stellt die Verbindung zur Turbinenscheibe dar und wird als kritisches Element angesehen, da besonders auf Seite der Scheibe Risse entstehen können. Zur Dämpfung der Schaufelschwingungen werden in den Dämpfertaschen spezielle Körper untergebracht. Gegen axiale Verschiebung wird über eine Kerbe an der Unterseite der Schaufel eine Platte angeschlossen. Des Weiteren befinden sich vor und hinter der Plattform Ein- und Ausbuchtungen, welche in die benachbarten Statoren so übergehen, dass die Strömung aus dem Sekundärluftsystem möglichst gut kontrolliert und dem Hauptstrom verlustarm zugeführt werden kann.

Bei der inneren Geometrie steht hauptsächlich die Kühlung in ihren unterschiedlichen Wirkmechanismen im Vordergrund. Des Weiteren sollte die Masse der Schaufel so stark wie möglich reduziert werden, da die Zentrifugalkraft als größte Triebfeder für die auftretenden Spannungen mit dem Radius ansteigt, sodass Materialeinsparungen auf größeren Radien das gesamte System aus Schaufel und Scheibe entlasten. Aus diesem Grund werden die Kühlkanäle so ausgeführt, dass sie einen großen Bauraum einnehmen beziehungsweise wird versucht die Wandstärke zu reduzieren. Außerdem soll die Kühlluft verteilt und durch die Schaufel geführt werden, während Wärmeübertragung per Konvektion stattfindet.

Durch das Aufbringen von Turbulatoren wird die Wärmeübertragung innerhalb der Schaufel erhöht. Dies erfolgt über zwei Mechanismen: Einerseits wird die Oberfläche für die Wärmeübertragung vergrößert und andererseits wird Turbulenz erzeugt, welche die Wärmeübertragung zwischen Strömung und Festkörper erhöht. Nachteilhaft wirkt sich der Druckverlust durch das Vorhandensein von Turbulatoren aus. Als guter Kompromiss werden Rippen als Turbulatoren verwendet, die ein gutes Verhältnis von Turbulenzgenerierung gegenüber Druckverlust aufweisen. Die Filmkühlung hat die primäre Aufgabe die äußere Oberfläche der Schaufel mit einer "kalten" Schutzschicht vor dem Heißgas zu schützen, da die Heißgastemperatur über dem Schmelzpunkt des Schaufelmaterials liegt. Aus diesem Grund werden an charakteristischen Punkten Filmkühlreihen angebracht. Hier sind vor allem die Vorder- und Hinterkante der Schaufel zu nennen. Des Weiteren werden bestimmte Filmreihen mit Diffusoren versehen um eine bessere Abdeckung mit Filmkühlung auf der Oberfläche zu erreichen. Eine weitere Aufgabe der Filmkühlung ist die konvektive Kühlung innerhalb der Filmkühlbohrungen der Schaufel selbst. Durch die relativ große Oberfläche (aufsummiert über alle Bohrungen) erfolgt je nach Komponente und Triebwerkstyp bis zu 50% der konvektiven Kühlung innerhalb der Filmbohrungen.

Um die Limitierungen der einzelnen Elemente, wie Kühlkanäle, Rippen und Filme zu verstehen, ist es hilfreich den Herstellungsprozess der Komponente zu betrachten. Dazu wird ein repräsentativer Prozess am Beispiel eines Mittelschnittes vorgestellt. Zur Unterstützung sind ausgewählte Schritte in der Abbildung 1.5 gezeigt. Dreidimensionale Arbeitsschritte, wie z.B. das Entfernen von Material unter der Plattform, werden einfachheitshalber vernachlässigt.

Am Anfang des Herstellungsprozesses stehen Bauteile, die die äußere Form von externer Schaufeloberfläche und Schaufelkern definieren. Diese Teile können als einzige Elemente mehrfach verwendet werden. Die innere Geometrie wird hierbei durch einen Keramikkern abgebildet, welcher diverse Bestandteile wie z.B. Rippen enthält. Dabei müssen die formgebenden Elemente zerstörungsfrei entfernt werden können, um eine Mehrfachverwendung zu gewährleisten. Dieser Status ist auf der linken Seite der Abbildung 1.5 dargestellt. Der nächste Schritt ist das Entfernen des *wax pattern*, woraufhin eine Keramikummantelung zur Erhaltung der äußeren Form in den späteren Arbeitsschritten aufgebracht wird. Nach dem Schmelzen des Wachskehrs wird das Metall beziehungsweise der Einkristall gezogen, wobei außen die Keramikummantelung und innen der Keramikkern die Form vorgeben. Nach Erstarren des Metalls und Zerstörung der Keramikelemente werden Schaufelkopf und Schaufelfuß bearbeitet. Daraufhin werden zunächst innere und dann äußere Beschichtungen gegen unterschiedliche Schadensmechanismen aufgebracht (Sulfidation, Oxidation, thermale Belastung). Anschließend werden die Filmkühlreihen gebohrt.

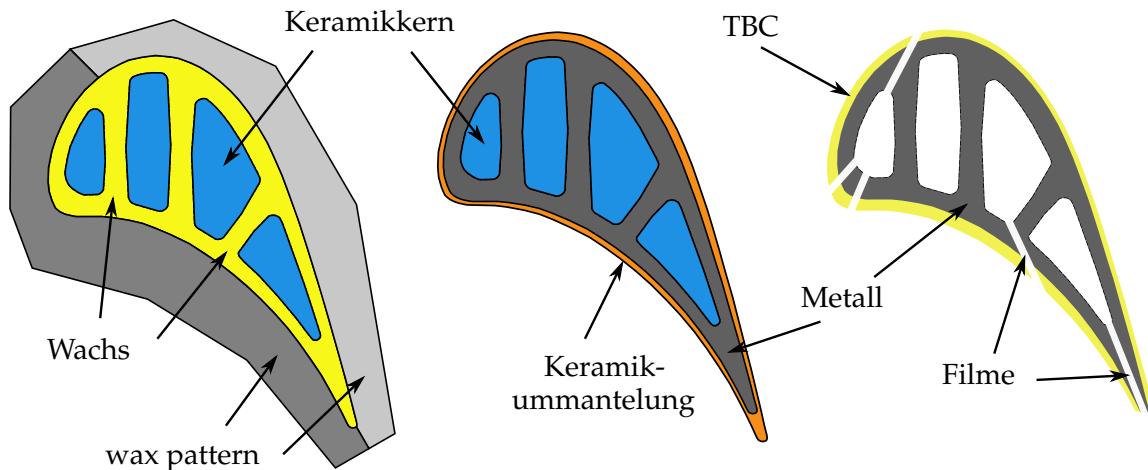


Abbildung 1.5: Auszüge aus dem Herstellungsprozess einer Hochdruckturbinschaufel am Beispiel des Mittelschnittes. Links: Erstellung des Wachskerns. Mitte: Ziehen des Metalls (Einkristall). Rechts: Fertige Schaufel nach Filmkühlbohrungen und Wärmeschutzschicht.

Aus diesem beispielhaften Herstellungsprozess kann man für die mögliche Parametrisierung von Kühlkanälen, Filmen, Rippen und anderen Geometrieelementen Minimal-/Maximalwerte, Zwangsbedingungen und Zusammenhänge ableiten. Dies ermöglicht schon in der Auslegungsphase eine Gesamtgeometrie zu erzeugen, die der Herstellung gerecht wird.

## 1.2. Gegenwärtige Auslegungsstrategien

Voraussetzung umfassender Untersuchungen wie Optimierungen, aufwendiger Parameterstudien oder Robustheitsuntersuchungen ist ein gewisses Maß an Automatisierung. Im Kern ist damit die Automatisierung der vier grundlegenden Schritte der Analysekette gemeint. Der erste Schritt adressiert die Geometrierzeugung, diese kann durch das Aktualisieren von Template-Dateien erfolgen oder durch das wiederholte Erstellen der gesamten Geometrie von Beginn an. Das sogenannte Pre-Processing ist der nächste Schritt und umfasst neben der Erzeugung des eigentlichen Rechengitters auch das Aufbringen von Randbedingungen und die Definition der verwendeten Materialien. Daraufhin folgt die eigentliche Analyse oder Simulation, welche je nach Modell wenige Sekunden oder mehrere Tage dauern kann. Als letzter Schritt werden im sogenannten Post-Processing die relevanten Ergebnisse extrahiert.

Als längerfristiges Ziel ist die automatische Interaktion über alle beteiligten Disziplinen und aller Detailierungsgrade bezüglich einer oder mehrerer Komponenten zu sehen. Damit sind sowohl die Standardisierung von Schnittstellen zwischen den einzelnen Disziplinen, als auch die Robustheit der Arbeitsabläufe an sich von Bedeutung. Im Alltag gestalten sich vor allem die Automatisierung selbst, die Schnittstellenstandards und Robustheit der Arbeitsabläufe problematisch. Meist sind nur die relevanten Abläufe automatisiert, die Schnittstellen variieren mehr oder weniger stark und die Arbeitsabläufe sind nur für das aktuellste Design stabil.

Unter diesen gegebenen Rahmenbedingungen ist es das Ziel von Parameterstudien und Optimierungen ein Verständnis des eigenen Modells bzw. der zugrundeliegenden Parametrisierung zu entwickeln. Dabei steht unter anderem die Bestimmung sensitiver Parameter bezüglich verschiedener Zielgrößen im Vordergrund, um durch einfache Änderungen Verbesserungen des Designs zu erreichen. Oftmals steht nur eine existierende Parametrisierung zur Verfügung, sodass ein Einfluss auf das bestmögliche Design oder den Gesamtprozess verborgen bleibt. Erst wenn die Zielgrößen selbst nach einer Optimierung nicht erreicht werden, ist man bemüht alternative Parametrisierungen in Betracht zu ziehen.

Die betrachteten Zielgrößen verhalten sich oftmals gegenläufig, sodass eine Verbesserung einer Größe, eine Verschlechterung einer anderen Größe zur Folge hat. Typischerweise werden Optimierungen meist so formuliert, dass eine Größe optimiert wird und andere relevante Größen über Nebenbedingungen auf einem akzeptablen Niveau gehalten werden. Diese Art der Optimierung wird als Ein-Ziel-Optimierung bezeichnet und besitzt mehrere Nachteile. Zum einen muss bei der Änderung einer Nebenbedingung die komplette Optimierung wiederholt werden und zum anderen ist das gegenläufige Verhalten relevanter Zielgrößen nicht erfassbar. Somit können Kompromisslösungen (*trade offs*) nur unzureichend untersucht werden.

Lösungsansätze sind Mehr-Ziel-Optimierungen, wo zwei oder mehr Zielgrößen gleichzeitig optimiert werden. Daraus resultieren Pareto-optimale Entwürfe, wobei nicht mehr eindeutig bestimmt werden kann, ob ein Entwurf besser ist als ein anderer Entwurf. Somit entsteht auf natürliche Art und Weise ein *trade off*. Nachteilhaft an Mehr-Ziel-Optimierungen sind neben der Notwendigkeit effizienter Optimierungsalgorithmen, vor allem der Anspruch an die benötigten Rechenressourcen. Aus diesem Grunde findet in der industriahen Entwicklung eher die Optimierung auf ein Ziel stand, während in der Forschung alle Arten von Optimierungen Anwendung finden.

Ein Aspekt, der bei der Auslegung immer mehr an Bedeutung gewinnt, ist die Beachtung des Herstellungsprozesses beziehungsweise der auftretenden Fertigungsabweichungen, welche die Bauteileigenschaften negativ beeinflussen oder gar zum Versagen führen können. Dies wird unter dem Begriff Robustheit (*robust design*) zusammengefasst. Dort müssen fertigungsbedingte Streuungen erfasst werden und in den Auslegungsprozess mit einfließen. Als Ergebnis ist nun keine deterministische Antwort zu erwarten, sondern eine Verteilungsfunktion und eventuell eine Ausfallwahrscheinlichkeit. Die Überführung in den ingenieurtechnischen Alltag stellt sich als äußerst komplex heraus. Hauptgründe dafür sind, dass auf der einen Seite die Hersteller methodisch auf Toleranzbänder eingestellt sind und auf der anderen Seite Bereiche der Bauteile nicht mit einfachen Messmethoden erfassbar sind (z.B. Innengeometrie).

Eine Kopplung mehrerer Disziplinen ist momentan nicht Stand der Technik auf industrialem Level, während in der Forschung diverse Disziplinen schon miteinander gekoppelt wurden. Grund dafür ist vor allem die Tiefe der einzelnen Disziplinen, welche in der Industrie zu einem realen Bauteil führen muss und in der Forschung meist nur neue Methoden oder Strategien getestet werden. Der Austausch entsprechender Randbedingungen findet unter den Disziplinen oft im größeren Zeitrahmen und "per Hand" statt. Innerhalb eines disziplinübergreifenden Arbeitsablaufes muss dieser Datenaustausch automatisiert von statthaften gehen und standardisiert sein. Der Standard muss dabei von den beteiligten Disziplinen definiert werden und sollte möglichst dem bisherigen Prozess entsprechen um akzeptiert und entsprechend angewendet zu werden.

### 1.3. Motivation dieser Arbeit

Aus dem Stand der gegenwärtigen Auslegungsstrategien ist erkennbar, dass eine verstärkte Transition von Methoden und Vorgehensweisen vom wissenschaftlichen zum industriellen Technikumfeld notwendig ist. Dies ist sogleich der Kerngedanke, als auch die Motivation dieser Arbeit.

Der erste Ansatzpunkt ist die Parametrisierung selbst. So soll im Kapitel 3 der Einfluss der Parametrisierung auf den gesamten Auslegungsprozess untersucht werden. Ziel ist die Gewinnung von verallgemeinerten Aussagen zur Erstellung besserer Parametrisierungen. Dies soll insbesondere Problemstellungen auf dem Themengebiet des Triebwerkdesigns adressieren. Die Parametrisierungen haben Eigenschaften wie Flexibilität, Stabilität und Verständlichkeit, welche sich meistens gegenläufig verhalten, sodass oft ein Kompromiss notwendig ist.

Um die Vorteile einer Mehr-Ziel-Optimierung aufzuzeigen wird im Kapitel 4 die Kühlungskonfiguration einer Hochdruckturbinenschaufel optimiert. Ziel ist es einen geeigneten Kompromiss zwischen der Oberflächentemperatur und dem benötigten Massenstrom der Kühlluft zu finden.

In diesem Rahmen sollen die verwendete Parametrisierung, Methoden und Strategien näher beleuchtet werden. Innerhalb dieser Untersuchung wird die Geometrie bis auf die internen Elemente der Filmkühlbohrungen und Turbulatoren (in diesem Fall Rippen) festgehalten.

Die Betrachtung der Robustheit im Auslegungsprozess findet im industriellen Alltag nur unzureichend statt. Oft wird am Ende der Auslegung das annähernd fixe Design auf Robustheit überprüft. So soll in dieser Arbeit gezeigt werden, mit welchen Methoden die Robustheit in der Optimierungsphase beachtet werden kann. Gleichzeitig soll eine Optimierung über mehrere Disziplinen und über mehrere Zielgrößen durchgeführt werden. Als Beispiel dient wiederum die Hochdruckturbinschaufel und die drei beteiligten Disziplinen der aerodynamischen Auslegung, der Turbinenkühlung und Spannungs-/Lebensdauerberechnung in Kapitel 5. Dabei spielt die Verwendung von Antwortflächen eine zentrale Rolle.





## 2. Theorie

Das Theorie-Kapitel ist in drei verschiedene Teile unterteilt. Dabei wird zwischen den mathematischen, physikalischen und numerischen Grundlagen unterschieden.

### 2.1. Mathematische Grundlagen

Innerhalb der mathematischen Grundlagen wird zunächst auf die Generierung der Geometrie, die Notwendigkeit von Parametrisierungen und die Umsetzung in der CAD<sup>6</sup>-Software eingegangen. Nachfolgend werden Ansätze und Algorithmen zur Optimierung dargelegt. Dabei spielen insbesondere die angewendeten Optimierungsalgorithmen eine zentrale Rolle. Anschließend werden Methoden zur Stützstellengenerierung und Erstellung von Antwortflächen näher erläutert.

#### 2.1.1. Geometrie und Parametrisierung

Bei der Rotorschaufel der Hochdruckturbine handelt es sich um eine hochkomplexe Geometrie. Da ein Aufbau dieser Geometrie von Hand zu zeitaufwendig wäre, ist es notwendig diese Geometrie automatisiert zu erstellen. Dabei werden unterschiedliche Parametrisierungen für unterschiedliche Teile der Turbinenschaufel verwendet. Einige Beispiele sind die externe Oberfläche der Schaufel mit Hilfe von Parablasting<sup>7</sup>, die Abzugskörper für Teile unterhalb der Plattform, der Schaufelfuß als Verbindungsstück zwischen Schaufel und Scheibe, die Kühlkanäle im Inneren der Rotorschaufel und die dazugehörigen internen Bestandteile der Schaufel (z.B. Turbulatoren/Rippen und Filmkühlbohrungen). Die Anforderungen an eine Parametrisierung sind vielfältig und meist gegenläufig. In Tabelle 2.1 sind die wichtigsten Anforderungen einer Parametrisierung aufgelistet.

Tabelle 2.1: Eigenschaften einer guten Parametrisierung

#	Eigenschaft	Zweck
1	Flexibilität	Alle vorstellbaren geometrischen Formen sollten sich mit der Parametrisierung erzeugen lassen
2	Stabilität	Innerhalb der Parametergrenzen ist immer eine Geometrie erstellbar
3	Verständlichkeit	Die Parametrisierung sollte selbst erklärend sein
4	Parameteranzahl	Geometrie sollte mit möglichst wenig Parametern erstellt werden
5	Eindeutigkeit	Dieselbe Geometrie sollte sich nicht mit zwei unterschiedlichen Parametersätzen erzeugen lassen
6	Erweiterbarkeit	Bei zusätzlichen Elementen in der Geometrie, sollte sich die Parametrisierung einfach erweitern lassen
7	Übertragbarkeit	Artverwandte Probleme sollten für die Parametrisierung ebenfalls leicht zugänglich sein
8	Anwendbarkeit	Die Umsetzung in der verwendeten CAD-Software muss möglich sein

Die Geometrie der Rotorschaufel ist einerseits aus elementaren Bestandteilen wie einfachen Linien, Kreisbögen, usw. aufgebaut und andererseits kommen an unterschiedlichsten Stellen der Geometrie Splines zum Einsatz. Es existieren unterschiedliche Versionen von Splines, wovon

<sup>6</sup>CAD: Computer Aided Design

<sup>7</sup>Rolls-Royce interne Software, welches speziell für die Erstellung von Schaufelprofilen entwickelt wurde

NURBS<sup>8</sup> zwar die hochwertigste Formulierung ist, aber andere Formen sich durch Vereinfachungen aus den NURBS ableiten lassen. Vor allem die Untersuchung in Kapitel 3 baut auf Splines auf, weshalb dieses Geometrieelement genauer betrachtet werden soll.

Die Definition der Kurve  $C$  mit ihrer Laufvariablen  $u$  ist über Gleichung 2.1 gegeben:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) P_i . \quad (2.1)$$

Hierbei sind die Kontrollpunkte  $P_i$  Freiheitsgrade und die Ansatzfunktion  $N_{i,k}$  ist rekursiv definiert mit:

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - U_i}{U_{i+k} - U_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{U_{i+k+1} - u}{U_{i+k+1} - U_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) . \quad (2.2)$$

Die elementare Ansatzfunktion  $N_{i,0}$  nimmt den Wert null oder eins an und ist mit folgender Gleichung gegeben:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [U_i, U_{i+1}] \\ 0, & \text{andersfalls} \end{cases} . \quad (2.3)$$

Weitere Freiheitsgrade befinden sich im Knotenvektor  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \left[ \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, U_{k+1}, \dots, U_{m-k-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1} \right] . \quad (2.4)$$

Bei den Variablen  $k$  und  $i$  handelt es sich um den Polynomgrad des Splines beziehungsweise die Anzahl der Kontrollpunkte.

Bei dieser geschlossenen Definition der NURBS handelt es sich um die klassische Formulierung, wobei die Kontrollpunkte des Splines meist nicht auf dem Kurvenzug selbst liegen. Oftmals ist es gewünscht, dass die Punkte direkt auf dem Kurvenzug des Splines liegen, sodass eine direkte Beziehung für den Anwender sichtbar ist. Aus diesem Grund soll an dieser Stelle eine alternative Formulierung angegeben werden, wobei beide Formulierung ineinander überführbar sind (Piegl [53]).

Diese sogenannte Interpolationsmethode arbeitet mit den Interpolationspunkten  $Q_j$ , welche direkt auf dem Kurvenzug  $C(v_j)$  liegen:

$$Q_j = C(v_j) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(v_j) P_i . \quad (2.5)$$

Anwendung finden diese beiden Definitionen in Kapitel 3, wobei die verwendete CAD-Software *Siemens NX 9.0* diese beiden Methoden "ByPoles" und "ThroughPoints" nennt. Dabei muss jedoch noch erwähnt werden, dass innerhalb von *Siemens NX* eine Vereinfachung vorgenommen wird. Der Knotenvektor ist fix mit Nullen und Einsen gefüllt, sodass hier Freiheitsgrade aus Gleichung 2.4 verschwinden und man nur noch von einem B-Spline<sup>9</sup> spricht, welcher nicht dieselben geometrischen Möglichkeiten wie klassische NURBS aufweist.

Anzumerken ist außerdem, dass es gleichwertige zwei- und dreidimensionale Formen existieren, welche auch bei der Rotorschaufel angewendet werden. Dabei sind z.B. die externe Oberfläche der Schaufel oder die internen Kühlkanäle zu nennen. Diese höherwertigen Formulierungen sollen hier nicht wiedergegeben werden, sondern es wird auf Piegl [53] verwiesen.

---

<sup>8</sup>NURBS: Non-uniform rational B-Splines

<sup>9</sup>B-Spline: Basis-Spline

### 2.1.2. Optimierung

Unter Optimierung soll in dieser Arbeit das Verändern von Eingabeparametern zur Verbesserung/Optimierung von einer oder mehreren Zielgrößen verstanden werden. Die Parameter adressieren überwiegend die Erstellung oder Veränderung der Geometrie eines Bauteils, können aber auch das Material oder die Randbedingungen ansprechen.

In diesem Zusammenhang sollten einige grundlegende Begriffe der Optimierung noch einmal genauer beleuchtet werden. Ein Aspekt ist der Unterschied zwischen einer Ein-Ziel- und Mehr-Ziel-Optimierung. Während man im Laufe einer Ein-Ziel-Optimierung eindeutig sagen kann, dass ein Design besser ist als ein anderes Design, ist dies bei der Mehr-Ziel-Optimierung nicht mehr möglich. Dort ist eine Verbesserung nur gegeben, falls ein Design in allen Zielgrößen besser ist als ein anderes Design. In diesem Falle spricht man davon, dass ein Design ein anderes dominiert. In allen anderen Fällen ist keine Dominanz gegeben und dies führt letztendlich dazu, dass sich eine Pareto-Front<sup>10</sup> ausbildet.

Des Weiteren soll an dieser Stelle noch einmal auf den Unterschied zwischen einer deterministischen Optimierung und einer Robustheitsoptimierung eingegangen werden. Im ersten Fall werden die Eingabeparameter als einfache Werte behandelt, welche sich während der Optimierung ändern. Im zweiten Fall wird der Herstellungsprozess des zu untersuchenden Bauteil mit betrachtet. Das heißt, dass nun kein diskreter Wert mehr für einen Eingabeparameter vorliegt, sondern eine Verteilungsfunktion mit Mittelwert und Schwankungsgröße (wie z.B. die Standardabweichung). Entsprechend muss für eine Robustheitsbewertung eines aktuellen Parametersatzes eine Population ausgewertet werden, welche den vorhandenen Verteilungen der Eingaben genügt. Dies beeinflusst auch den Parameterbereich (meistens als "design space" bezeichnet), welcher entsprechend angepasst werden sollte. Andere Grundbegriffe für die Optimierungen (wie z.B. globale und lokale Optima, Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen, Formulierung von Optimierungsproblemen, usw.) sind in Bestle [9] oder Wagner [72] zu finden.

Historisch gesehen haben sich über die letzten Dekaden eine Vielzahl von Typen für Optimierungsalgorithmen entwickelt. Durch Spezialisierung auf einzelne Wissens- (Physik, Chemie, Mathematik, Biologie, Informatik, usw.) oder Spezialgebiete hat jeder Optimierungsalgorithmus seine Existenzberechtigung und eine allgemeine/r Bewertung/Vergleich ist nicht möglich, sondern bezieht sich meist auf ein konkretes Anwendungsbeispiel. Einen Überblick verschafft die Abbildung 2.1, wobei hier zwischen deterministischen und stochastischen Verfahren unterschieden wird. Damit sind interne Mechanismen gemeint, welche entweder einer exakten Rechenvorschrift folgen oder mit Hilfe von Zufall die nächsten Auswertepositionen/Individuen festlegen. Als ein wichtiger Zweig sind die Evolutions-Algorithmen zu nennen, welche die Prinzipien (Mutation, Rekombination und Selektion) der Evolution nachahmen.

Im Bereich Triebwerks-technischer Anwendungen haben sich überwiegend diese evolutionsbasierten Algorithmen durchgesetzt, da diese Algorithmen die Fähigkeit besitzen lokale Extrema wieder zu verlassen und so eine bessere Chance aufweisen globale Extrema zu finden. Dementsprechend wurden in der Arbeit hauptsächlich drei Evolutions-Algorithmen angewendet, welche im Folgenden näher beschrieben werden. Dazu zählt als Vertreter der Evolutionsstrategien der CMA-ES-Algorithmus und bei den genetischen Algorithmen sind der NSGA-II- und AMGA-Algorithmus zu nennen.

Nichtsdestotrotz finden auch andere Optimierungsalgorithmen an nicht offensichtlichen Stellen Anwendung. Als Beispiel sind höherwertige Methoden zur Erstellung von Stützstellen oder Antwortflächen zu nennen, wobei die internen Mechanismen freie Parameter optimieren, sodass die Qualität/Funktionalität maximiert wird.

---

<sup>10</sup>Pareto-Front: Anzahl an Designs oder Individuen, welche von keinem anderen ermittelten Design dominiert werden.

Im Zweidimensionalen ist dies gut darstellbar, während es bei mehr als zwei Zielgrößen an guten Wiedergabemöglichkeiten der Informationen mangelt. Dies war auch der Grund für die Erstellung von MOViT (siehe Kapitel A.3)

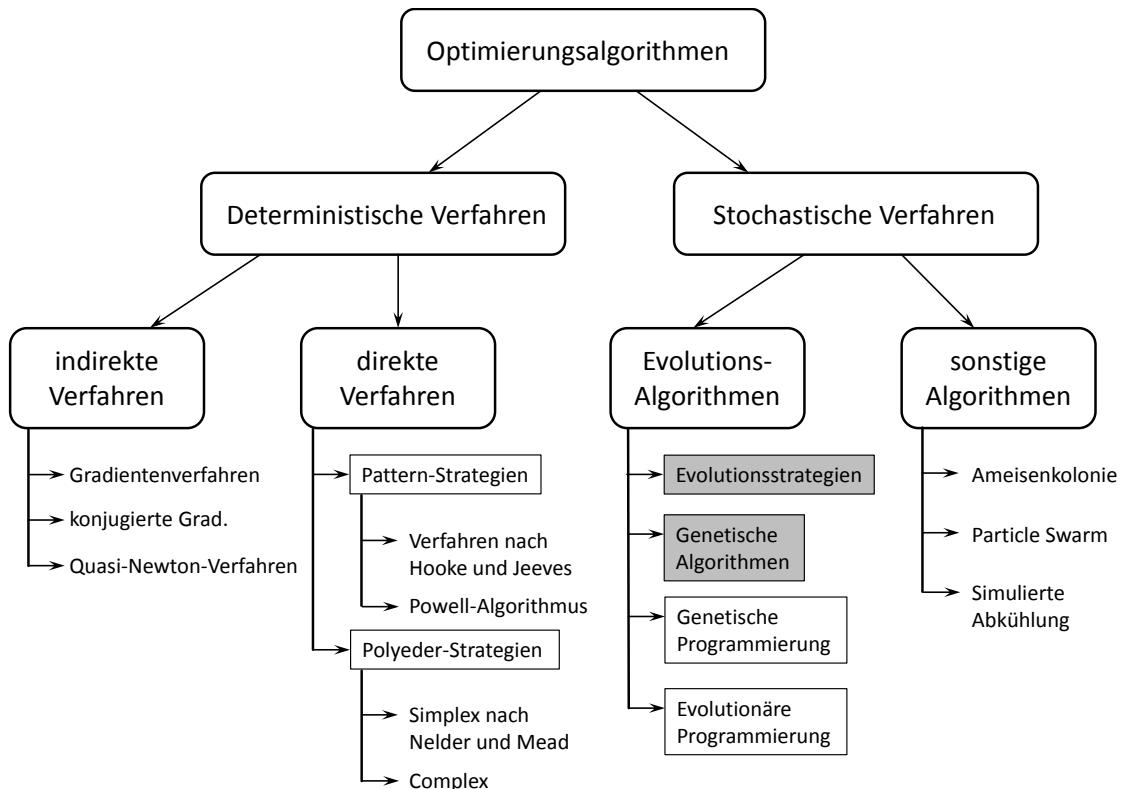


Abbildung 2.1: Überblick der Optimierungsalgorithmen nach Wagner [72] mit Markierungen für Typen von Algorithmen die in späteren Optimierungen verwendet werden

### CMA-ES:

Der CMA-ES<sup>11</sup> Algorithmus gehört zwar zur Gruppe Evolutionsalgorithmen, versucht aber über die Verwendung einer Kovarianzmatrix beim Würfeln der nächsten Generation Vorteile wie in Gradienten-basierten Algorithmen zu imitieren. Basis des CMA-ES ist, neben der erwähnten Kovarianzmatrix, der Mittelwert, womit sich die mehrdimensionale Normalverteilung der Eingabeparameter zusammensetzt. Dabei verfeinern sich sowohl der Mittelwert, als auch die Kovarianzmatrix über die Anzahl der Generationen, sodass die Optimierung mit dem CMA-ES gegen das vermutete Optimum strebt.

Hintergrund ist die Verwendung der sogenannten *maximum-likelihood* Funktion, welche die Aktualisierung des Mittelwertes und der Kovarianzmatrix steuert. Der Mittelwert bewegt sich dabei in Richtung der besten Individuen aus der Elterngeneration und die Kovarianzmatrix imitiert die erfolgreichsten Suchrichtungen inklusive der Schrittweiten. Durch das sukzessive Verfeinern werden auch Informationen aus den Vorgängergenerationen mit übernommen. Im Prinzip steckt in der Kovarianzmatrix eine Hauptkomponentenanalyse der besten Suchrichtungen.

An dieser Stelle sind einige Nachteile des CMA-ES zu nennen. Zum einen handelt es sich um einen Algorithmus der limitiert ist auf eine Ein-Ziel-Optimierung und zum anderen neigt der Algorithmus, beim Ausfallen mehrerer Generationen in der Optimierung (z.B. durch Ausfall der Rechnungen wegen Lizenzproblemen) zum Informationsverlust. Das heißt der Mittelwert und die Kovarianzmatrix stellen sich wieder auf die Anfangswerte ein, was inhaltlich einem Neustart der Optimierung entspricht. Vorteilhaft wirkt dagegen die Restart-Fähigkeit des Algorithmus.

Nichtsdestotrotz zeigt der CMA-ES in Vergleichen (siehe Hansen [22]) zwischen unterschiedlichsten Optimierungsalgorithmen die beste Leistung, sodass er auch im Bereich der Luftfahrt breite Anwendung für Ein-Ziel-Optimierungen findet. Für einen tieferen Einblick sind die Referenzen Hansen [23–26] empfehlenswert.

<sup>11</sup>CMA-ES: Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy

**NSGA-II:**

Bei dem NSGA-II<sup>12</sup> handelt es sich um einen Algorithmus für die Mehr-Ziel-Optimierung. Dabei unterscheidet sich der NSGA-II von anderen Mehr-Ziel-Optimierungsalgorithmen maßgeblich durch zwei Eigenschaften. Die erste Eigenschaft ist die Art und Weise wie der Pareto-Rang bestimmt wird. Dabei wird nun in einer Schleife gezählt, wie viele Individuen dominieren das aktuelle Individuum und der Rang auf diesen Wert plus eins gesetzt. Somit bekommen Pareto-optimale Entwürfe immer den Wert eins.

Die zweite Eigenschaft ist die Einführung einer sogenannten *crowding distance*, bei der dem aktuellen Individuum der Abstand ihrer beiden Nachbarn mit demselben Pareto-Rang zugeordnet wird. Dadurch werden die Individuen mit dem jeweils besten Wert (Zielgröße), da ihnen der Abstand unendlich zugeordnet wird, immer in die nächste Generation übernommen. Die dazugehörige Gleichung lautet:

$$d_n(I_{n,i}) = \sum_{k=1}^m \frac{f_k(I_{n,i+1}) - f_k(I_{n,i-1})}{\max(f_k) - \min(f_k)}. \quad (2.6)$$

Zur visuellen Verdeutlichung wurde in Abbildung 2.2 auf der linken Seite die Logik der Pareto-Rangbestimmung an einem Beispiel aufgezeigt. Die Auswahl der Individuen für die Folgegeneration ist auf der rechten Seite der Abbildung 2.2 dargestellt. Dabei wird zunächst innerhalb der aktuellen Elterngeneration  $P_t$  und Kindergeneration  $Q_t$  nach dem Pareto-Rang (hier mit  $F_1, F_2, \dots$  angedeutet) geschaut und danach nach der *crowding distance* um die folgende Elterngeneration  $P_{t+1}$  zu ermitteln. An dieser Stelle sei auf die entsprechende tiefer gehende Literatur von Srinivas [67] und Deb [11] verwiesen.

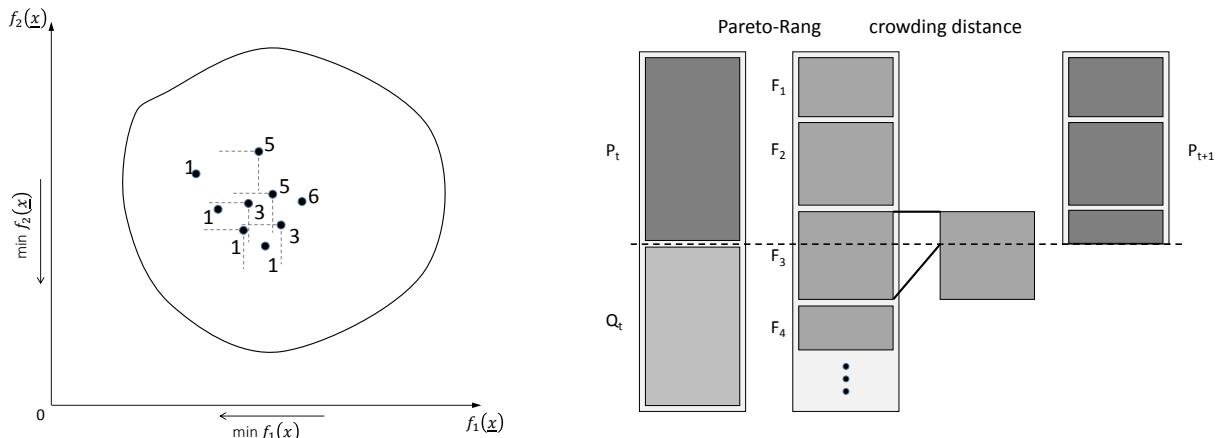


Abbildung 2.2: Vereinfachte Darstellung der Pareto-Rangbestimmung nach Wagner [72] (links) und Strategie zur Auswahl der Folgegeneration nach Deb [11] (rechts) für den NSGA-II Algorithmus

Wie bei allen Mehr-Ziel-Algorithmen kann der NSGA-II auch für Ein-Ziel-Optimierungen genutzt werden. Dazu wird eine Zwei-Ziel-Optimierung mit zwei identischen Zielen aufgestellt.

<sup>12</sup>NSGA-II: Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II

**AMGA:**

Bei dem AMGA<sup>13</sup> Algorithmus handelt es sich um eine Weiterentwicklung des NSGA-II. Als wesentliche Erweiterungen ist die Verwendung einer initialen DoE<sup>14</sup> und einer Datenbank zu nennen. Beim Ersteren wird ein Latin-Hypercube-Sampling verwendet um den Eingabeparameterraum gleichmäßig abzutasten. Mehr dazu im folgenden Kapitel 2.1.4. Mit der Datenbank kommen nun auch weitere Einstellungen zum Optimierungsalgorithmus hinzu, wobei die Größe der Datenbank von übergeordneter Bedeutung ist. Auch die Auswahl der nächsten Generation wurde angepasst. Hierzu wird nun die Datenbank genutzt und nicht mehr die aktuelle Eltern- und Kindergeneration. Eine Aktualisierung der Datenbank erfolgt nach der Auswertung der aktuellen Generation, wobei wiederum der Pareto-Rang und die *crowding distance* Anwendung finden.

An dieser Stelle muss noch einmal auf die initiale DoE eingegangen werden. Meist ist es so, dass für die Optimierung eine feste Anzahl an Funktionsauswertungen zur Verfügung steht. Für den AMGA Algorithmus muss nun eingestellt werden wie viel Prozent der Funktionsauswertungen für die initiale DoE verbraucht werden sollen. Dabei hat sich ein Wert von 20% für die meisten Probleme als akzeptabel herausgestellt. Nichtsdestotrotz wird die eigentliche Optimierungsphase um diesen prozentualen Wert reduziert. Vorteilhaft ist sicher die Fähigkeit des AMGA gegen Ausfall ganzer Generationen (z.B. durch Lizenzprobleme beim Netzwerkausfall), während NSGA-II bei diesem Problem versagen würde. Weitere Information über den AMGA sind der Publikation von Tiwari [70] zu entnehmen.

---

<sup>13</sup>AMGA: Archive-based Micro Genetic Algorithm

<sup>14</sup>DoE: Design of Experiments → statische Versuchsplanung

### 2.1.3. Robustheit

Innerhalb dieser Arbeit soll unter Robustheit der Einbezug jedweder Streuungen in das parametrisierte Modell verstanden werden, wobei damit in erster Linie geometrie-bedingte Fertigungsabweichungen gemeint sind. Jedoch kann dies auch Unsicherheiten in den Materialparametern und/oder Randbedingungen mit einbeziehen. Wie schon erwähnt, ist die wichtigste Änderung der Übergang von einer deterministischen Betrachtung hin zu einer probabilistischen Betrachtung zu nennen. Dabei existiert nun kein diskreter Zahlwert mehr, für z.B. die Lebensdauer oder Masse eines Bauteils, sondern vielmehr eine Verteilung für die betrachtete Zielgröße und eventuell eine Ausfallwahrscheinlichkeit (oder Vergleichbares).

Elementarer Bestandteil sind die Verteilungen der Eingabeparameter (Geometrie, Material, Randbedingungen, ...), welche durch Messungen oder realistische Annahmen zu ermitteln sind. Bei den Zielgrößen beziehungsweise Ausgabeparametern werden nun meist der Mittelwert, eine Schwankungsgröße (abhängig von der Art der Verteilung der Zielgröße) und manchmal auch eine Ausfallwahrscheinlichkeit verwendet. Folge ist, dass meist eine Mehr-Ziel-Optimierung entsteht oder das Problem mit Hilfe einer Gewichtung wieder auf eine Ein-Ziel-Optimierung zurückgeführt wird. Alternativ können neu auftretende Größen auch als Nebenbedingungen aufgenommen werden. Dessen ungeachtet findest ein Paradigmenwechsel stand, welcher Abbildung 2.3 verdeutlichen soll.

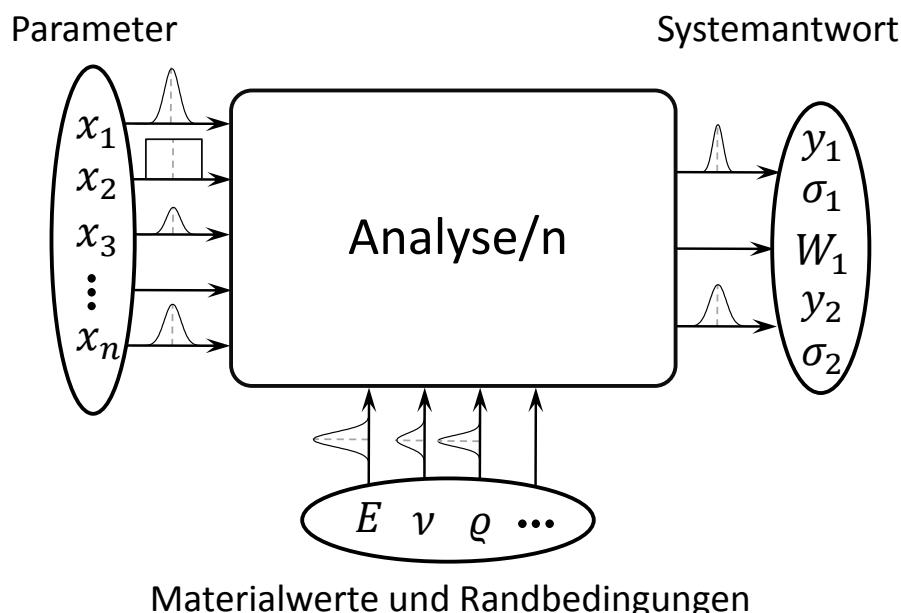


Abbildung 2.3: Überführung von der deterministischen zur probabilistischen Analyse beziehungsweise Beachtung der Robustheit für unterschiedliche Eingabeparameter und Ausgabegrößen wie Mittelwert, Schwankungsgröße und Ausfallwahrscheinlichkeit

Dieser Sachverhalt hat auch Einfluss auf den gültigen Parameterbereich. Der Bereich wird z.B. bei einem normal-verteilten Parametern um die dreifache Standardabweichung reduziert. Entsprechend muss man mit einer Verkleinerung des validen Parameterbereiches leben oder diese Robustheitsüberlegungen schon in die Wahl des Parameterbereiches mit einfließen lassen und eine Vergrößerung vornehmen.

### 2.1.4. Stütstellengenerierung

Unter der Generierung von Stützstellen ist in dieser Arbeit für allem die Vorbereitung auf die Verwendung von Antwortflächen zu verstehen. Nichtsdestotrotz werden dieselben Methoden zum Beispiel für Parameterstudien verwendet, wobei mehrere Parameter variieren. Die Dimension beziehungsweise Anzahl der Eingabeparameter ist dabei zunächst unbeschränkt, jedoch ist meistens eine Limitierung der Auswertungen vorhanden, sodass eine möglichst gleichmäßige Abtastung des Parameterraumes erwünscht ist.

Als trivialste Methode ist der vollfaktorielle Versuchsplan (siehe Siebertz [63]) zu nennen. Dort wird eine äquidistante Schrittweite innerhalb der Parametergrenzen für jeden einzelnen Parameter festgelegt und alle Kombinationen untersucht. Eindeutiger Nachteil ist eine extrem hohe Anzahl an zu untersuchenden Punkten, die meist nicht zweckmäßig ist. Als Stellvertreter der zufallsbasierten Methoden ist die Monte-Carlo-Simulation (MCS) zu nennen. Dort wird entsprechend einer Verteilungsfunktion (häufig gleich-verteilt in den Parametergrenzen)  $n$ -mal eine Stützstelle gewürfelt, womit die Anzahl der Stützstellen direkt vorgegeben ist und leicht erweitert werden kann.

Als praktikabelste Gruppe an Methoden hat sich das sogenannte Hypcube-Sampling herausgestellt. In der einfachsten Variante, meist als *Latin Hypercube Sampling* (LHS) bezeichnet, wird der Designraum mit einem äquidistanten Gitter überzogen und auf jeder Gitterlinie wird zufallsbasiert genau eine Stützstelle gesetzt, sodass die Anzahl der Stützstellen über das Gitter definiert wird. Aufbauend setzen fortgeschrittenere Methoden über Optimierung von Abstandskriterien an, um eine Gleichverteilung zu erreichen. Als erfolgreichste Vertreter sind sowohl *improved Latin Hypercube Sampling* (iLHS) (siehe Beachkofski [7]), als auch *optimal Latin Hypercube Sampling* (oLHS) (siehe Johnson [34], Morris [49] und Jin [32]) zu nennen.

Um einen visuellen Eindruck von den Methoden der Stütstellengenerierung zu erhalten sind in Abbildung 2.4 ausgewählte Algorithmen darstellt. Auf der linken Seite handelt es sich um die MCS-Methode, während in der Mitte die elementare LHS-Methode und auf der rechten Seite die oLHS-Methode darstellt sind. Es wurde nur der zweidimensionale Fall dargestellt, jedoch setzt sich das erkennbare Verhalten bei höheren Dimensionen fort.

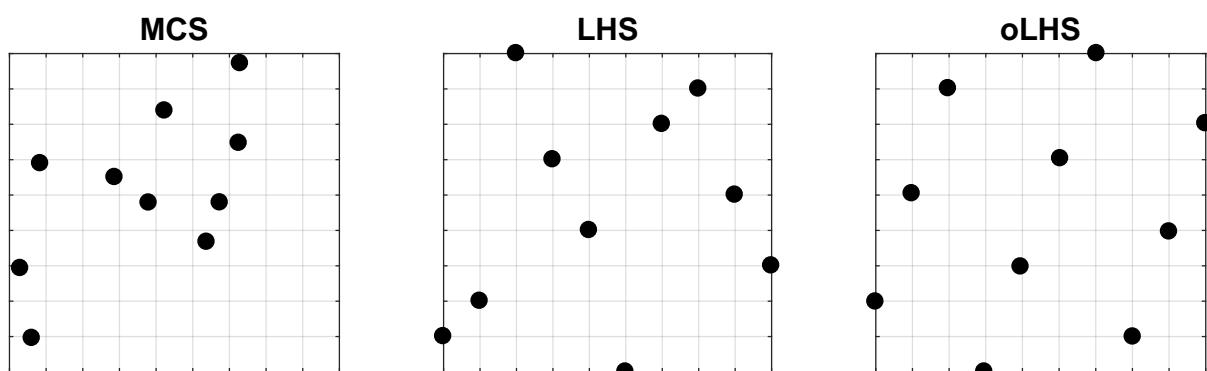


Abbildung 2.4: Überblick unterschiedlicher Methoden zur Erstellung von Stützstellen anhand eines zweidimensionalen Beispiels mit jeweils 10 Stützstellen

Zum Vergleich der Methoden kann einerseits der Korrelationskoeffizient nach Pearson verwendet werden, wobei dieser möglich unkorreliert sein sollte ( $= 0$ ). Andererseits kann man Kriterien verwenden, welche eine Mittelung der Abstandsmatrix der Stützstellen zu Rate zieht. Damit sind zwei skalare Vergleichswerte gegeben, welche auch bei mehrdimensionalen Räumen valide Aussagen liefern.

### 2.1.5. Antwortflächen

Unter dem Begriff Antwortflächen sind alle Methoden zu verstehen, welche mit Hilfe von Stützstellen und dem dazugehörigen Ergebnis aus Experiment und/oder Numerik, ein mathematisches Modell aufbauen, welches ein Systemverhalten abbildet<sup>15</sup>.

Dabei ist der Funktionsverlauf  $f(x)$  in Gleichung 2.7 meist unbekannt, sodass die Antwortfläche nur eine Approximation  $\tilde{f}(x)$  liefern kann. Der Fehler  $\epsilon(x)$  kann mit Hilfe von bekannten Testfunktionen bestimmt werden, muss aber mit geeigneten Methoden abgeschätzt werden.

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \epsilon(x) \quad (2.7)$$

Innerhalb dieser Arbeit finden drei unterschiedliche Methoden zur Erstellung einer Antwortfläche Anwendung. Diese lauten *Lineare Regression* (LR), *Radiale Basisfunktionen* (RBF) und *Kriging* (KRIG) und werden im Folgenden kurz beschrieben. Eine ausführliche Beschreibung ist entsprechend referenziert.

#### **Lineare Regression:**

Die am Weitesten verbreitete Methode heißt Lineare Regression. Dabei werden Ansatzfunktionen mit einem freien Koeffizienten multipliziert und superpositioniert. Der lineare Zusammenhang zwischen Koeffizient und Ansatzfunktion ist dabei namensgebend. Meist werden Polynome als Ansatzfunktionen verwendet. Dies ist jedoch nicht zwangsläufig, so können etwa problem-abhängig trigonometrische Funktionen, Besselfunktionen oder anderweitig geartete Funktionen zum Einsatz kommen. Als häufig angewendetes Beispiel ist in Gleichung 2.8 die Lineare Regression mit Polynomen bis zur zweiten Ordnung ohne Mischterme angegeben.

$$\tilde{f}_{LR}(x, a) = a_0 + \sum_{j=1}^N a_j x_j + \sum_{j=1}^N a_{(n+j)} x_j^2 \quad (2.8)$$

Dabei gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen der Anzahl der freien Koeffizienten  $a$  und der Anzahl der benötigten Stützstellen. Bei gleicher Anzahl Stützstellen wie Koeffizienten geht die Approximation der Funktion perfekt durch alle Werte an den Stützstellen. Bei mehr Stützstellen als Koeffizienten findet die Bestimmung über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate statt und die Approximation minimiert den Fehler an den Stützstellen, auf denen er nicht mehr exakt ist. Bei weniger Stützstellen als Koeffizienten nicht eine Erstellung einer Antwortfläche nicht mehr möglich. Somit existiert das Problem bei höherdimensionalen Räumen und einem moderaten Polynomgrad, dass die Anzahl der Rechnungen (Stützstellen) unpraktikabel wird (siehe Wagner [72]).

Nichtsdestotrotz liefert die Lineare Regression bei gutartigen Problemen meist zufriedenstellende Ergebnisse. Insbesondere bei Problemen, die dem angesetzten Polynomcharakter entsprechen und/oder ein nicht zu vernachlässigtes Rauschen beinhalten, sind die Ergebnisse oft besser als bei alternativen Methoden. Ein großer Vorteil stellt der Fakt dar, dass bei besserem Verständnis vom Systemverhalten die Ansatzfunktion intelligenter gewählt werden kann und somit die Güte stark verbessert wird. Eine ausgezeichnete Quelle zur Vertiefung der Linearen Regression ist Hedderich [28].

---

<sup>15</sup>Anschauliches Beispiel: Wenn man ein Tuch über die Alpen wirft, wobei nur eine gewisse Anzahl an x-y-Koordinaten und deren Höhenwert bekannt ist, wird der Gebirgszug durch das Tuch abgebildet. Dieses Tuch kann als mathematische Beschreibung der Alpen aufgefasst werden und bei größerer Anzahl an Stützstellen das System *Gebirge* umso besser abbilden.

### **Radiale Basisfunktionen:**

Die Idee hinter der Approximation mit radialen Basisfunktionen ist, dass die verwendete Basisfunktion, wie der Name schon sagt, ausschließlich vom Radius abhängt und somit bei höher-dimensionalen Problemen unbeschränkt einsetzbar ist. Dabei liefert die Superposition aller Basisfunktionen an den Stützstellen die mathematische Beschreibung des Problems. In der allgemeinen Gleichung 2.9 sind die Freiheitsgrade mit Koeffizienten  $\lambda_i$  geben und die Basisfunktion  $\varphi(r_{ij})$  ist noch allgemein gehalten.

$$\tilde{f}_{\text{RBF}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi(r_{ij}) \quad \text{mit } r_{ij} = \|x_i - x_j\| \quad (2.9)$$

Als häufigste Basisfunktion kommt die Gaußsche RBF  $\varphi(r) = e^{-(cr)^2}$  zum Einsatz, wobei in Larsson [40] eine Übersicht typischer Basisfunktionen und deren Anwendungsgebiete gegeben wird. Üblicherweise besitzt jede Basisfunktion einen Freiheitsgrad der kalibriert werden muss. Im Fall der Gaußschen RBF entspricht die einer Stauchung oder Streckung der Basisfunktion. Wegen dieser internen Optimierung des freien Parameters dauert das Erzeugen der Antwortfläche vergleichsweise länger als für die Lineare Regression.

Es muss hervorgehoben werden, dass es sich bei der Approximation mit RBF um ein exaktes Verfahren handelt. Das heißt, die Werte an den Stützstellen werden exakt abgebildet. Bei der Linearen Regression ist dies im Allgemeinen nicht der Fall, da dort über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate versucht wird, den Fehler an den Stützstellen zu minimieren. Ein Nachteil der RBF-Methode ist eine geringe Qualität an den Grenzen des Parameterraumes, der schwach aufgelöst ist. Dort herrscht ein Charakter wie bei einer Extrapolation.

Für den Vergleich der Qualität der Approximationen mit Linearer Regression und radialer Basisfunktion hat dies Folgen. So wird zur Qualitätsbewertung ein neutraler Wert, welcher als LOOCV<sup>16</sup> bezeichnet wird, verwendet. Hierbei wird ein Datenpunkt aus dem Datensatz entfernt, die Antwortfläche erzeugt und an der Entnahmestelle ausgewertet. Dies wird für alle Datenpunkte wiederholt und mit diesen Informationen eine Korrelation aufgestellt. Ein entsprechend hoher Korrelationskoeffizient ( $\rho > 0.9$ ) weist auf eine gute Qualität der Antwortfläche hin.

### **Kombination von linearer Regression und radialen Basisfunktionen:**

Es besteht die Möglichkeit die lineare Regression und die radialen Basisfunktionen zu kombinieren. In Gleichung 2.10 ist die mathematische Kombination von RBF und LR mit linearen Polynomen angegeben. Dies soll den Nachteil der Extrapolation am Rand des Parameterraumes von RBF aufheben.

$$\tilde{f}_{\text{Komb}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi(r_{ij}) + p(x_j, a_k) \quad \text{mit } p(x_j, a_k) = a_0 + \sum_{j=1}^N a_j x_j \quad (2.10)$$

Anzumerken ist an dieser Stelle, dass die erste Summe  $\sum_{i=1}^M$  über die Anzahl der Stützstellen läuft und die zweite Summe  $\sum_{j=1}^N$  über die Anzahl der Eingabeparameter beziehungsweise die Dimension des Problems. Wie sich daraus die zu lösenden Gleichungssysteme bilden lassen ist in Wagner [72] ausführlich im Anhang beschrieben und Teil der erstellten Matlab-Toolbox, welche im Unterkapitel 5.2.1 erläutert wird.

<sup>16</sup>LOOCV: Leave One Out Cross Validation

**Kriging:**

Für die Erstellung einer Antwortfläche mit Kriging muss zunächst die Ausgangsgleichung 2.7 betrachtet und angepasst werden. Der Ansatz hinter Kriging versucht den auftretenden Fehler zu modellieren und damit die Gesamtqualität der Approximation zu verbessern. So kann die Gleichung umgeschrieben werden zu:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{wahrer Wert}} = \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{angenommener Wert}} + \underbrace{\epsilon_m(x)}_{\text{modellierter Fehler}} + \underbrace{\epsilon_r(x)}_{\text{wahrer Fehler}} \quad (2.11)$$

Während man für den angenommenen Funktionswert  $\tilde{f}(x)$  einen konstanten Mittelwert oder ein lineares Polynom (Ordinary Kriging beziehungsweise Universal Kriging) angesetzt, wird bei dem modellierten Fehler  $\epsilon_m(x)$  eine Korrelation zwischen den Stützstellen angenommen. Dabei sind nahe Punkte stärker und entfernte Punkte schwächer miteinander korreliert. Der Korrelationsansatz ist in Gleichung 2.12 angegeben, wobei als Ansatzfunktion meist eine Gauss-Funktion verwendet wird und dementsprechend vom Gaussian-Process gesprochen wird.

$$\rho_{ij} = \prod_{k=1}^K R_k(\theta_k, r_{ij}) \quad \text{oft mit } R_k = \exp \left\{ -\theta_k r_{ij}^2 \right\} \quad (2.12)$$

Gebräuchliche Ansatzfunktionen sind aus Lophaven [45] zu entnehmen. Des Weiteren ist eine gute Einführung in das Themengebiet mit Fassig [15] gegeben.

## 2.2. Physikalische Grundlagen

Innerhalb der physikalischen Grundlagen wird auf die zugehörigen theoretischen Elemente zu den drei Disziplinen, welche an der Auslegung der Hochdruckturbinenschaufel beteiligt sind, eingegangen. Dabei wird zunächst noch einmal der Zusammenhang in der Abbildung 2.5 aufgegriffen, um zu verdeutlichen welche Verbindung zwischen den Disziplinen und der Theorie besteht.

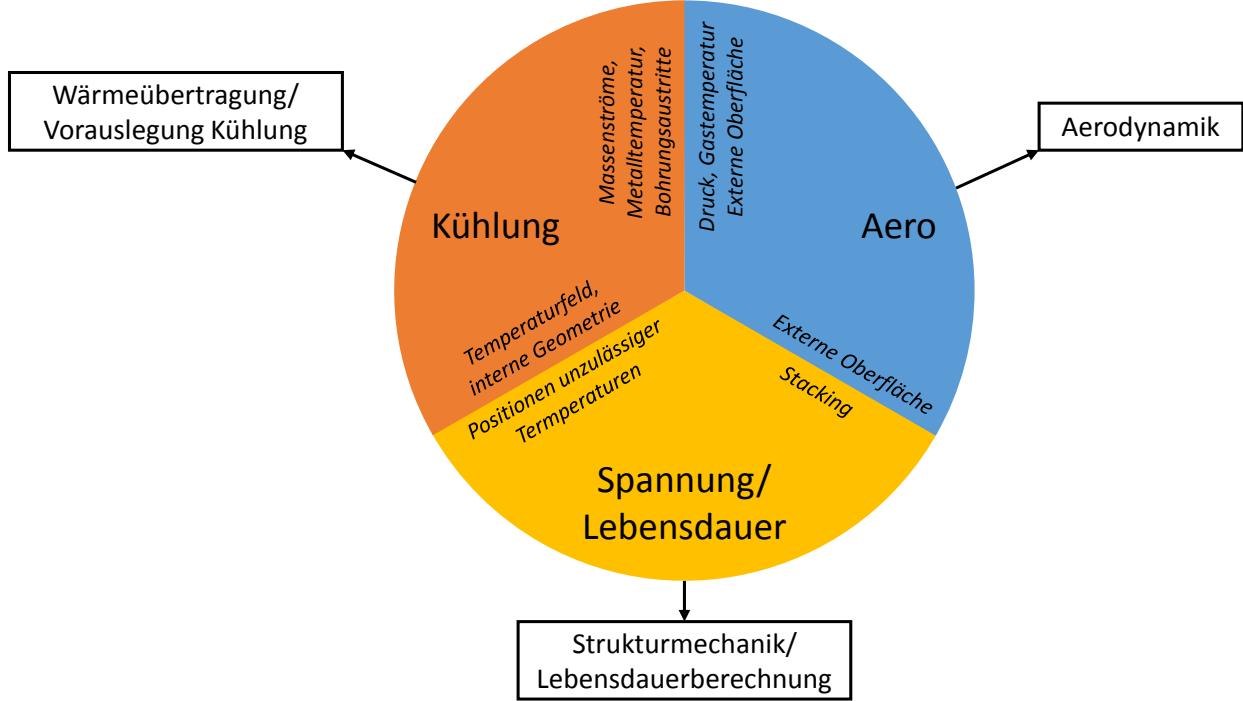


Abbildung 2.5: Verbindung der theoretischen Elemente und der beteiligten Disziplinen zur Auslegung der Rotorschaufel, wobei zusätzlich der Informationsaustausch zwischen den Disziplinen angedeutet ist.

### 2.2.1. Wärmeübertragung

Da die Betrachtung der Turbinenkühlung als zentraler Teil dieser Arbeit angesehen werden kann, spielt die Wärmeübertragung ebenfalls eine zentrale Rolle. Hierbei unterscheidet man grundlegend drei verschiedene Arten von Wärmeübertragung, welche im Folgenden näher erläutert werden.

#### Wärmeleitung:

Die Wärmeleitung beschreibt die Temperaturverteilung innerhalb eines Festkörpers. Dabei ist grundlegend zwischen dem stationären und instationären Fall zu unterscheiden. Die mathematische Beschreibung der Wärmeleitung gibt die Wärmeleitungsgleichung an. Ihre allgemeinste Form ist in Gleichung 2.13 gegeben, wobei üblicherweise drei Terme unterschieden werden: *instationärer Term*, *diffusiver Term* und *Quellterm*.

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{instationär}} - \underbrace{\nabla [k \nabla T]}_{\text{diffusiv}} = \underbrace{\dot{q}_V}_{\text{Quelle}} \quad (2.13)$$

Der instationäre Term beinhaltet sowohl die Zeitableitung von der primären Größe Temperatur  $T$ , als auch die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  bezüglich der Masse (da es sich hier

um einen Festkörper handelt). Der diffusive Term besteht aus zwei Ableitungen symbolisiert über den Ableitungsoperator  $\nabla$  (Nabla), einer Konvektionskonstante, welche die Wärmeleitfähigkeit  $k$  darstellt und wiederum der Temperatur als primärer Größe der Gleichung. Als Quellterm ist die volumenbezogene Wärmequelle beziehungsweise -senke  $\dot{q}_V$  angegeben. Bei den Stoffwerten spezifische Wärmekapazität  $c_p$  und Wärmeleitfähigkeit  $k$  handelt es sich um temperaturabhängige Größen, während die volumenbezogene Wärmequelle  $\dot{q}_V$  von Temperatur, Ort und Zeit abhängen kann.

Je nach Problemstellung können diverse Vereinfachungen vorgenommen werden. Bei zeitlich unabhängigen Problemen entfällt der instationäre Term und Problemen ohne Quelle oder Senke entfällt der Quellterm. In homogenen Materialien vereinfacht sich die  $3 \times 3$ -Matrix der Wärmeleitfähigkeit zu einem skalaren Wert, sodass im einfachsten Fall eine *Laplace*-Gleichung entsteht:

$$\Delta T = 0. \quad (2.14)$$

Bei den Randbedingungen muss man zunächst unterscheiden, ob eine zeitliche Veränderung vorliegt. Ist dies der Fall müssen sowohl Anfangswerte, als auch Randwerte gegeben werden. Bei den Randwerten, welche meistens vereinfacht als Randbedingungen bezeichnet werden, kann man wiederum mehrere Arten unterscheiden. Die direkte Vorgabe der primären Größe wird als *Direichlet*-Randbedingung bezeichnet, während man bei einem gegebenen Gradienten von der *Neumann*-Randbedingung spricht. Liegen beide Informationen vor handelt es sich um eine *Robin*-Randbedingung. Im Falle der Wärmeleitungsgleichung ist die primäre Größe die Temperatur  $T$  und als Gradient kann sowohl der Temperaturgradient direkt vorgegeben werden oder aus der Wärmestromdichte  $\dot{q}_i$  berechnet werden.

Dieser Zusammenhang wird oftmals als **Fourier'sches Gesetz der Wärmeleitung** bezeichnet, da es während der Herleitung der Wärmeleitungsgleichung den Wärmefluss in Richtung des größten Temperaturgradienten beschreibt.

$$\dot{q}_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.15)$$

### Konvektion:

Unter Konvektion versteht man die Wärmeübertragung zwischen einem Feststoff und Fluid, welche sich meist in relativer Bewegung zueinander befinden. Man unterscheidet zwischen freier und erzwungener Konvektion. Im ersten Fall kommt die Bewegung durch einen Dichteunterschied (kann auch durch einen Temperaturunterschied induziert werden) im Fluid oder durch Schwerkraft zustande, während im zweiten Fall eine Bewegung des Festkörpers oder Fluids dominiert und die Wärmeübertragung daraus folgt. Da der Fall der freien Konvektion in der vorliegenden Arbeit von untergeordneter Bedeutung ist, wird an dieser Stelle auf eine genauere Beschreibung verzichtet und an entsprechende Literatur verwiesen: Bähr [4].

Bei der nun betrachteten erzwungenen Konvektion soll die Bewegung des Fluids maßgeblich für die Wärmeübertragung verantwortlich sein. Diese Fälle haben wir sowohl bei der Umströmung, als auch bei der Durchströmung der Turbinenschaufel. Es lässt sich vereinfacht folgender Fall betrachten: Eine beschichtete Wand, die in diesem vereinfachten Fall die Rotorschaufel darstellen soll, wird auf der einen Seite von heißem Gas und von der anderen Seite von kaltem Gas überströmt. Zur besseren Vorstellung ist der angegebene Fall in der Abbildung 2.6 aufgezeigt. Dabei werden eventuell auftretende Filmkühlbohrungen vernachlässigt.

Entscheidend sind für sowohl Innen-, als auch Außenströmung die sich einstellenden Strömungsfelder oder genauer gesagt die Strömungsgrenzschichten, da diese wiederum die Temperaturgrenzschichten bestimmen. Hierbei besteht ein Zusammenhang der Grenzschichtdicken, welcher durch die Prandtl-Zahl beschrieben wird, da diese das Verhältnis von Strömungsgrenzschicht

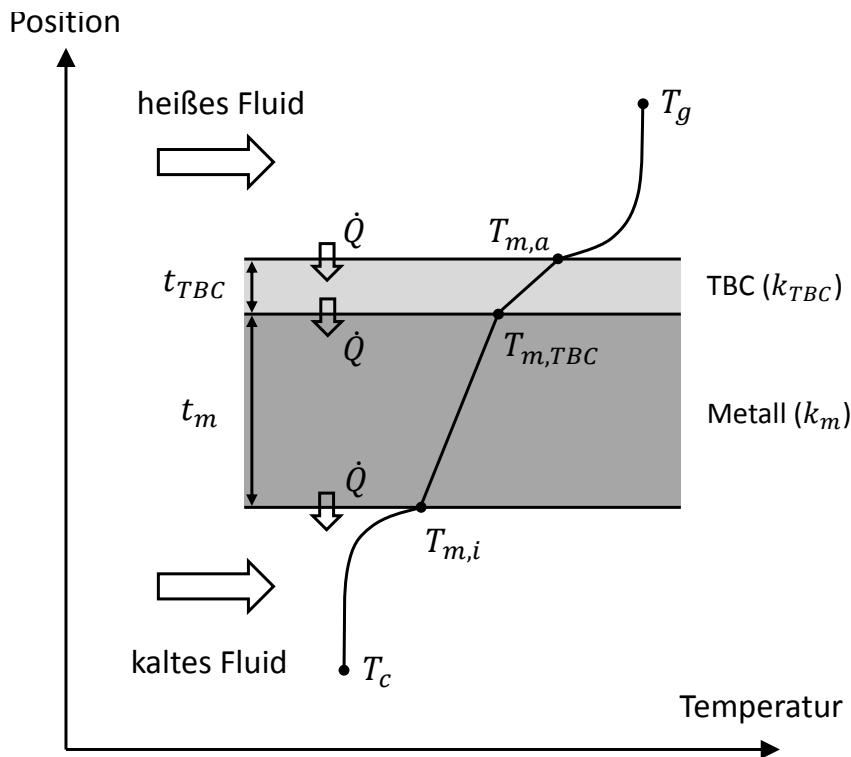


Abbildung 2.6: Schematisches Profil der auftretenden Temperaturen in der Innen- und Außenströmung und der beschichteten Wand der Rotorschaufel ohne das Vorhandensein von Filmkühlbohrungen.

zu Temperaturgrenzschicht angibt. Im Metall lässt sich der Wärmestrom  $\dot{q}_W$  über das zuvor beschriebene **Fourier'sche Gesetz der Wärmeleitung** beschreiben. Für die Strömung hingegen existiert keine solche physikalisch herleitbare Beziehung. Zwar findet auch im Fluid Wärmeleitung statt, diese wird aber durch die Fluidbewegung an sich überlagert. Jedoch ist es möglich, aus einem Analogieschluss eine vergleichbare Beziehung herzuleiten. Diese wird als **Newton's Gesetz der Kühlung** bezeichnet und lautet:

$$\dot{q}_W = h (T_W - T_F) . \quad (2.16)$$

Dabei lässt sich der Wärmestrom  $\dot{q}_W$  aus dem Produkt der Temperaturdifferenz zwischen dem Fluid  $T_F$  (dies kann das kalte oder heiße Gas sein) und der Wandtemperatur  $T_W$  und dem Wärmeübergangskoeffizienten<sup>17</sup>  $h$  ermitteln. Es muss erwähnt werden, dass der Wärmeübergangskoeffizient  $h$  keine Stoffkonstante wie der Wärmeleitungs koeffizient  $k$  ist, sondern von der Dicke der Temperaturgrenzschicht an der Wand beziehungsweise dem dortigen Temperaturgradienten abhängt. Die Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizient  $h$  ist von zentraler Bedeutung im Auslegungsprozess, da dieser als Randbedingung in unterschiedlichen Teilgebieten Informationen zwischen diesen Teilgebieten austauscht.

In der Praxis hat diese Gleichung und die damit verbundene Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  jedoch einige Nachteile. Oftmals weiß man die Wandtemperatur nicht und muss diese über mehrere Iterationen bestimmen. Des Weiteren hängt bei komplexeren Geometrien die Fluidtemperatur  $T_F$  von der Art und Weise der Mittelung ab, beziehungsweise von der Wahl, ob eine globale (wie z.B. die Einströmtemperatur oder mittlere Temperatur in der Fluiddomäne) oder lokale Referenz genutzt wird.

Aus diesem Grund ist es auch möglich den Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  aus zwei Strömungsberechnungen mit unterschiedlichen Randbedingungen zu gewinnen. Dabei lässt sich aus

<sup>17</sup>Der Wärmeübergangskoeffizient wird im Englischen als *heat transfer coefficient (htc)* bezeichnet

Gleichung 2.16 unter der Annahme ähnlicher Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  die folgende Form herleiten:

$$h = \frac{\dot{q}_{W,1} - \dot{q}_{W,2}}{T_{W,1} - T_{W,2}}. \quad (2.17)$$

Nun ist es möglich aus z.B. zwei isothermen Strömungsberechnungen den Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  zu bestimmen. Auch die Kombination einer isothermen und einer adiabaten Rechnung ist möglich, muss aber mit Vorsicht betrachtet werden, da dort numerische Fehler auftreten können, welche aus gleicher Wandtemperatur in beiden Rechnungen resultiert (siehe Nenner auf der rechten Seite der Gleichung 2.17).

Für den Anwendungsfall der Hochdruckturbinschaufel werden sowohl der Ansatz mehrerer Rechnungen gemäß Gleichung 2.17, als auch das Modell aus Gleichung 2.16 gewählt. Im ersten Fall wird aus der externen Strömung der Wärmeübergangskoeffizient bestimmt, wobei auch höherwertige Methoden (siehe z.B. Maffulli [46] und Lavagnoli [41]) zum Einsatz kommen, die die Abhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten von der Wandtemperatur mit abbilden. Im letzteren Fall werden für die interne Strömung mehrere Referenz-Fluid-Temperaturen ermittelt und mit dessen Hilfe der Wärmeübergangskoeffizient errechnet.

### **Wärmestrahlung:**

Der Vollständigkeit halber soll die dritte Art der Wärmeübertragung vorgestellt werden. An dieser Stelle ist jedoch anzumerken, dass die Wärmestrahlung im Fall der Hochdruckturbinschaufel nur eine untergeordnete Rolle spielt, da die zugehörigen Wärmeströme verschwindet gering sind und die Wärmestrahlung meist komplett vernachlässigt wird.

Jeder Festkörper emittiert bei einer Temperatur über von 0K Wärme in Form noch elektromagnetischer Strahlung, dabei ist die Energiemenge nur bei hohen Temperaturen von Bedeutung. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz in Gleichung 2.18 beschreibt den Zusammenhang zwischen Wärmestrom und Oberflächentemperatur eines Festkörpers.

$$\dot{Q} = \varepsilon \sigma A T^4 \quad \text{mit } 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2.18)$$

Dabei tritt die Temperatur mit dem Exponenten 4 auf, was zur Folge hat, dass diese Art der Wärmeübertragung bei Prozessen mit sehr hohen Temperaturen stark an Bedeutung gewinnt. Des Weiteren handelt es sich bei  $\varepsilon$  um den dimensionslosen Emissionsgrad, welcher Werte zwischen 0 (Spiegel → komplette Reflexion) und 1 (idealer schwarzer Körper → komplette Absorption) annehmen kann. Mit  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$  ist die Stefan-Boltzmann-Konstante gemeint.

### **2.2.2. Vorauslegung Kühlung**

Innerhalb dieses Unterkapitels werden die dimensionslosen Kenngrößen, welche in der Vorauslegung der Turbinenkühlung eine wichtige Rolle spielen diskutiert. Dabei sind nicht die allgemeinen dimensionslosen Kennzahlen gemeint, welche im Anhang A.1 angegeben sind. Ziel ist es, die verschiedenen Konzepte und/oder Designs (auch aus unterschiedlich großen Triebwerken) vergleichen zu können.

Ausgangspunkt soll das Modell von Halls [20] sein, welches für rein konvektive Kühlung entwickelt wurde<sup>18</sup>, sodass die Kühlung nur mit den Kühlkanälen selbst bewerkstelligt wird. Filmkühlung und Rotationseffekte können mit diesem Modell noch nicht abgebildet werden.

<sup>18</sup>Hierbei wird das Fluid zur Kühlung durch mehrere meist gerade Kanäle vom Schaufelfuß zur Schaufelspitze geführt und dort wieder der Hauptströmung zurückgeführt. Durch Variation von Position und Größe der Kanäle kann eine entsprechende Kühlung erreicht werden.

Die sogenannte "cooling effectiveness"  $\varepsilon_c$  ist eine dimensionslose Kenngröße, welche die Fähigkeit einer Kühlungskonfiguration beschreibt, die Oberflächentemperatur der Schaufel  $\bar{T}_b$  bei gegebener Einflusstemperatur der Kühlungsluft  $T_{c,i}$  zu reduzieren.

$$\varepsilon_c = \frac{\bar{T}_g - \bar{T}_b}{\bar{T}_g - T_{c,i}} \quad (2.19)$$

Im Idealfall ist dieser Wert 1 und die Oberflächentemperatur der Schaufel entspricht der Temperatur der Kühlluft. Im schlechtesten Fall ist der Wert 0 und die Oberflächentemperatur stimmt mit der Gastemperatur  $\bar{T}_g$  aus der Anströmung überein.

Hingegen spielt bei der sogenannten "cooling efficiency"  $\eta_c$  die Aufnahme thermischer Energie eine übergeordnete Rolle. Anzumerken ist, dass bei Halls mit der Austrittstemperatur  $T_{c,e}$ , die Temperatur des Fluides an der Schaufelspitze (aus den Kühlkanälen) gemeint ist.

$$\eta_c = \frac{T_{c,e} - T_{c,i}}{\bar{T}_b - T_{c,i}} \quad (2.20)$$

Bei dem Extremfall für  $\eta_c = 0$  nimmt das Fluid im Inneren der Schaufel keine thermische Energie auf, da die Temperatur mit der Einlasstemperatur identisch ist  $T_{c,e} = T_{c,i}$ . Das andere Extrem ist, dass sich die Kühlluft auf Schaufeltemperatur erwärmt hat ( $T_{c,e} = \bar{T}_b$ ) und die "cooling efficiency"  $\eta_c = 1$  ist.

Der dimensionslose Massenstrom  $\tilde{m}$  kann aus einer Enthalpie-Bilanz gewonnen werden (siehe Halls [20]) und lässt Rückschlüsse auf den realen Massenstrom  $\dot{m}_c$  zu. Typische Werte sind nicht einfach anzugeben, da die Systemgrenze zur Bilanzierung eine entscheidende Rolle spielt. Dabei können sowohl, die Mittelebene, mehrere radiale Ebenen oder eine dreidimensionale Domain zum Einsatz kommen.

$$\tilde{m} = \frac{\dot{m}_c c_{p,c}}{\bar{h}_g A_{s,g}} = \frac{\bar{T}_g - \bar{T}_b}{T_{c,e} - T_{c,i}} \quad (2.21)$$

Mit  $A_{s,g}$  ist die Fläche der umströmten Schaufelaußenseite gemeint und die Größe  $\bar{h}_g$  ist der mittlere Wärmeübergangskoeffizient der Flächen, welche vom Heißgas "berührt" werden.

Es existiert ein funktionaler Zusammenhang zwischen diesen drei dimensionslosen Kenngrößen. Dieser kann benutzt werden auf eine der anderen Größen zu schlussfolgern oder auf Konsistenz zu überprüfen. Eine Herleitung dieses Zusammenhangs ist in Kingston [35] gegeben.

$$\tilde{m} = \frac{\varepsilon_c}{\eta_c (1 - \varepsilon_c)} \quad (2.22)$$

Holland [31] führte 1980 ein verbessertes Modell zur Vorauslegung ein. Dies beinhaltet unter anderem Filmkühlung und Rotation und führt dazu, dass sich die angegebenen Gleichungen im Detail ändern. So müssen nun bei dem dimensionslosen Massenstrom  $\tilde{m}^*$  in Gleichung 2.23 die Ein- und Auslasstemperaturen genauer betrachtet werden. Dies betrifft vor allem die Auslastemperaturen  $\bar{T}_{c,e}^*$  an den Filmkühlbohrungen, welche nun mit dem entsprechenden Massenstrom gewichtet werden müssen (siehe Gleichung 2.24).

$$\tilde{m}^* = \frac{\dot{m}_c c_{p,c}}{\bar{U}_g A_{s,g}} = \frac{\bar{T}_g - \bar{T}_b}{\bar{T}_{c,e}^* - \bar{T}_{c,i}^*} \quad (2.23)$$

Ebenfalls hat sich die Größe  $\bar{U}_g$  geändert (bei Halls Modell war dies der Wärmeübergangskoeffizient  $\bar{h}_g$ ), welche als gemittelter effektiver Wärmeübergangskoeffizient aufgefasst werden kann, der die Wärmeleitung durch das Metall und das TBC<sup>19</sup> abbildet.

<sup>19</sup>TBC: Thermal Barrier Coating → thermische Schutzschicht

$$\bar{T}_{c,e}^* = \sum_{k=1}^{\text{Filme}} \dot{m}_k T_{c,e,k} / \sum_{k=1}^{\text{Filme}} \dot{m}_k \quad (2.24)$$

Bei der "cooling effectiveness"  $\varepsilon_c^*$  (Gleichung 2.25) und "cooling efficiency"  $\eta_c^*$  (Gleichung 2.26) ändern sich hingegen nur die gemittelten Ein- und Auslasstemperaturen.

$$\varepsilon_c^* = \frac{\bar{T}_g - \bar{T}_b}{\bar{T}_g - \bar{T}_{c,i}^*} \quad (2.25)$$

$$\eta_c^* = \frac{\bar{T}_{c,e}^* - \bar{T}_{c,i}^*}{\bar{T}_b - \bar{T}_{c,i}^*} \quad (2.26)$$

Neu ist die Definition der "film cooling effectiveness"  $\varepsilon_f^*$  in Gleichung 2.27. Durch die Einführung der Filmkühlung ist die treibende Größe für den externen Wärmeübergangskoeffizienten nun nicht mehr die Gasttemperatur  $\bar{T}_g$ , sondern (je nach Position auf der Schaufel) die Filmtemperatur  $\bar{T}_f$ , welche einen *kälteren* Film über die Oberfläche der Schaufel *legt*.

$$\varepsilon_f^* = \frac{\bar{T}_g - \bar{T}_f}{\bar{T}_g - \bar{T}_{c,e}^*} \quad (2.27)$$

Als funktionaler Zusammenhang zwischen diesen Größen kann die Gleichung 2.28 hergeleitet werden.

$$\varepsilon_c^* = \frac{\varepsilon_f^* - \varepsilon_f^* \eta_c^* + \eta_c^* \tilde{m}^*}{1 - \varepsilon_f^* \eta_c^* + \eta_c^* \tilde{m}^*} \quad (2.28)$$

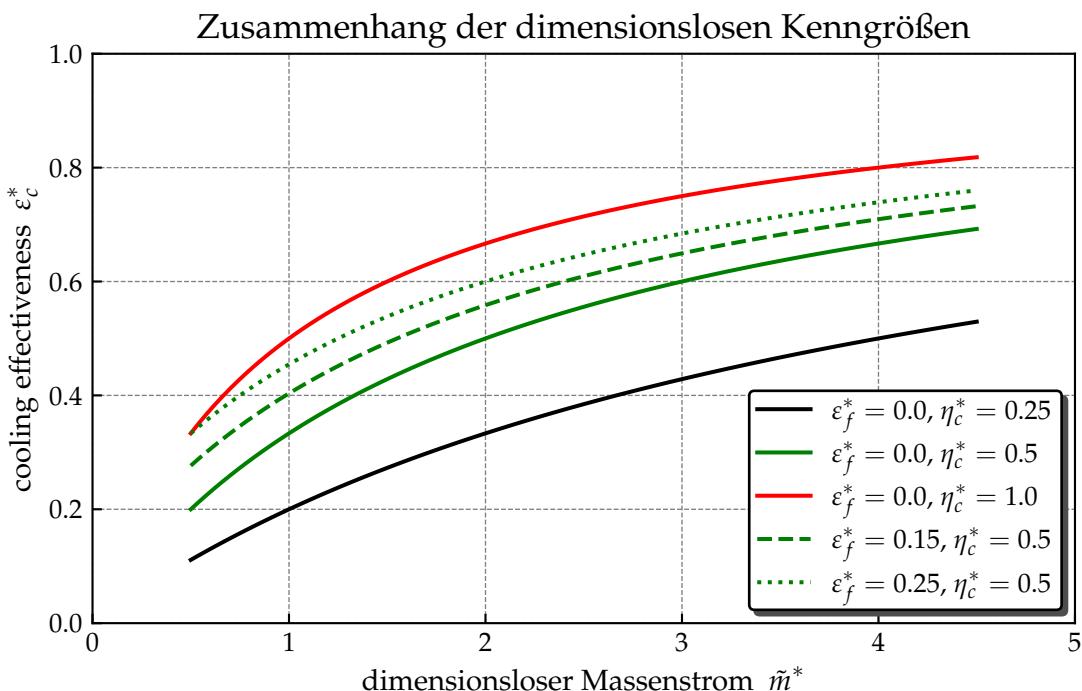


Abbildung 2.7: Zusammenhang der dimensionslosen Kenngrößen bei Anwesenheit von Filmkühlung gemäß Gleichung 2.28

Zur Veranschaulichung wird in Abbildung 2.7 der funktionale Zusammenhang für unterschiedliche Werte von "film cooling effectiveness"  $\varepsilon_f^*$  und "cooling efficiency"  $\eta_c^*$  über "cooling effectiveness"  $\varepsilon_c^*$  und dimensionslosem Massenstrom  $\tilde{m}^*$  aufgetragen. Zu erkennen ist eine Limitierung der "cooling effectiveness", selbst wenn man den dimensionslosen Massenstrom stark erhöht.

### 2.2.3. Aerodynamik

Die Berechnung der Aerodynamik erfolgt mit zu Hilfenahme von Randbedingungen aus mehreren Disziplinen, wie z.B. Leistungsrechnung, Sekundärluftsystem, Spannung/Lebensdauer und Kühlung. Hauptziel ist es, den aerodynamischen Wirkungsgrad zu optimieren um Treibstoff einzusparen, wobei bestimmte Nebenbedingungen erfüllt werden müssen. Dabei handelt es sich unter anderem um die Wellenleistung, den Gesamtmassenstrom durch das Kerntriebwerk und axiale Kräfte. Limitierende Komponente für den Gesamtmassenstrom des Triebwerkes ist die erste Statorreihe nach der Brennkammer, da dort der engste Querschnitt im Triebwerk vorliegt.

Als Grundlage für die numerische Auslegung dient meist ein Mehr-Reihen-Modell der Hochdruckturbine<sup>20</sup>, dessen Ziel die Fixierung der äußeren Oberfläche für die beteiligten Komponenten ist. Hierbei wird die sogenannte *crusie condition*<sup>21</sup> aus dem Flugzyklus für die Optimierung verwendet, da sich das Flugzeug den größten Teil der Flugzeit in diesem Zustand befindet.

Formal kann der isentrope Turbinenwirkungsgrad geschrieben werden als:

$$\eta_{T_s} \hat{=} \frac{\text{spez. Arbeit (polytrop) bei gegebenem Druckverhältnis } \pi_T}{\text{spez. Arbeit (isentrop) bei gegebenem Druckverhältnis } \pi_T}. \quad (2.29)$$

$$\eta_{T_s} = \frac{w_T}{w_{T_s}} = \frac{c_p \cdot (T_{t5} - T_{t4})}{c_p \cdot (T_{t5s} - T_{t4})} = \frac{\frac{T_{t5}}{T_{t4}} - 1}{\frac{T_{t5s}}{T_{t4}} - 1} \quad (2.30)$$

Zwar existiert eine anschauliche Darstellung des isentropen Wirkungsgrades wie in Abbildung 2.8, jedoch ist die Tatsache eines isentropen Vorgangs in der Realität kaum haltbar, sodass auf den polytropen Wirkungsgrad (siehe Ansatz in Gleichung 2.31) übergegangen werden muss. An dieser Stelle sei auf Bräunling [10] für das detaillierte Formelwerk verwiesen.

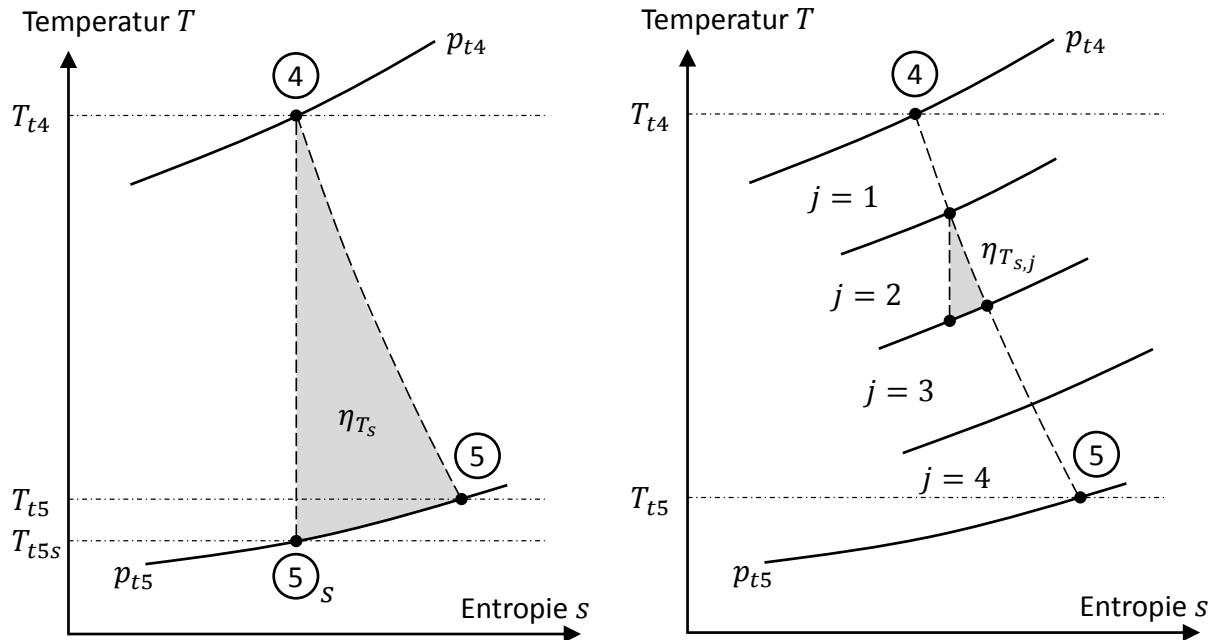


Abbildung 2.8: Isentroper Wirkungsgrad der Turbine im T-s-Diagramm für mehrere Stufen von Hoch- und Niederdruckturbine nach Bräunling [10]

$$\eta_T = \frac{\text{spez. Arbeit (polytrop) bei infinitesimaler Druckabnahme } d\pi_T}{\text{spez. Arbeit (isentrop) bei infinitesimaler Druckabnahme } d\pi_T} \quad (2.31)$$

<sup>20</sup>Dies ist im vorliegenden Fall eine zweistufige Hochdruckturbine mit OGV (statisches Bauteil zur strukturellen Verstärkung), d.h. fünf Komponenten.

<sup>21</sup>crusie condition: Reiseflug innerhalb des Flugzyklus (z.B. taxi → max-take-off → climb → crusie → landing → taxi)

Wichtig ist, nicht die physikalische Bedeutung zu vergessen. Im Prinzip geht es darum die auftretenden Verluste zu reduzieren. Es sind unter anderem Sekundärströmungen durch Kavitäten, Kanalwirbel, Tip-Vortex und diverse Interaktionen (Stator-Rotor, Wake-Endwall, usw.) zu nennen. Diese Strömungsphänomene treten zwar immer auf, können aber durch Geometrieveränderungen beeinflusst/minimiert werden. Eine Übersicht ist in der Abbildung 2.9 aus Taylor [69] gegeben.

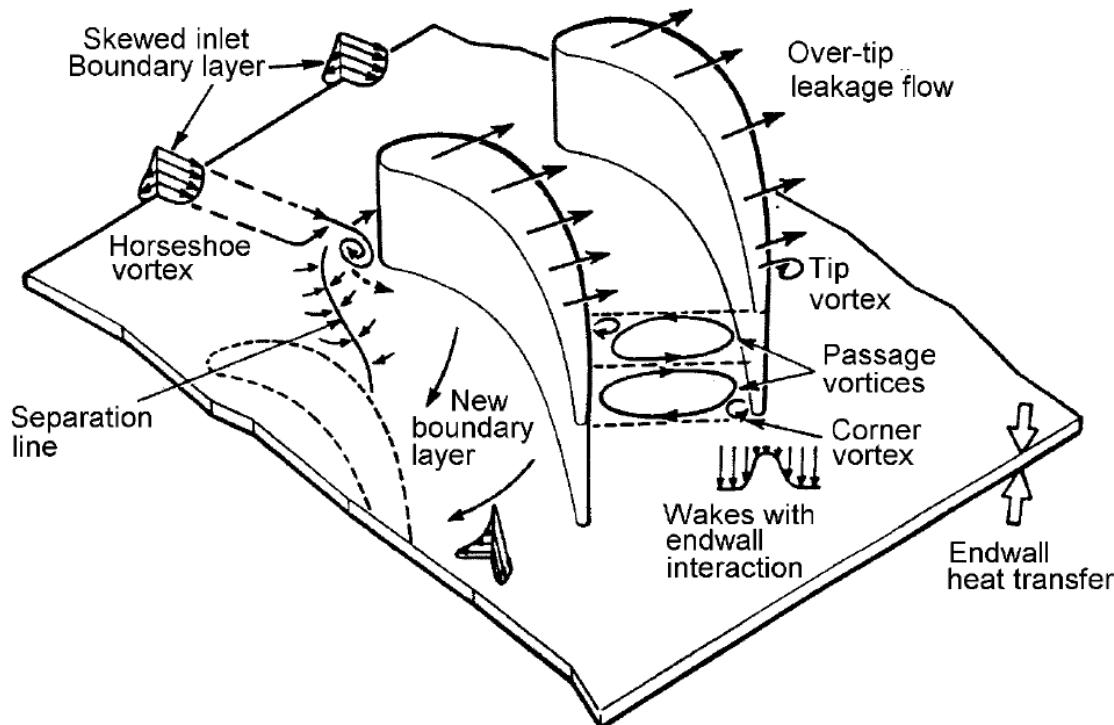


Abbildung 2.9: Strömungsphänomene bei einer Rotorschaufel (gemäß Taylor [69]), welche in der Optimierung für den Wirkungsgrad reduziert werden sollten

#### 2.2.4. Spannung- und Lebensdauerberechnung

Die Versagensmechanismen an der Hochdruckturbinschaufel sind vielfältig, vor allem wegen der Kombination von hohen Temperaturen und Zuglasten. Neben dem üblichen Gewaltbruch oder Versagen durch zyklische Belastung (LCF<sup>22</sup>, HCF<sup>22</sup> oder Kombination aus beiden → CCF<sup>22</sup>) können auch Versagen aufgrund von Kriechen, Sulfidation oder Oxidation auftreten. An dieser Stelle soll vor allem für Kapitel 5 eine Beschränkung auf die kombinierte Lebensdauer aus LCF und Kriechen stattfinden. Dazu wird nachfolgend eine prinzipielle Vorgehensweise zur Bestimmung einer kombinierten Lebensdauer aufgezeigt, was jedoch nicht vollständig mit dem internen Prozess vom Industriepartner übereinstimmt.

##### LCF:

Die niederzyklische Belastung (LCF) wird mit Hilfe von Belastungs-Zeit-Funktionen und der Wöhlerlinie konservativ abgeschätzt. Dazu soll in Abbildung 2.10 sowohl der Zusammenhang zwischen dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm und den Belastungs-Zeit-Funktionen auf der linken Seite der Grafik, als auch der Zusammenhang zwischen der Wöhlerkurve (englisch: S-N curve) als konservative Abschätzung der realen, aber unbekannten Lebensdauerlinie auf der rechten

<sup>22</sup>LCF, HCF, CCF: Low, High oder Combined Cycle Fatigue → niedrige, hohe oder kombinierte zyklische Belastung

Seite aufgezeigt werden. Zusätzlich sind unterschiedliche Festigkeitsbegriffe dargestellt. Dabei stellt  $a$  den Gewaltbruch dar,  $b$  die Belastung für die das Bauteil unendlich lange hält (hier gibt es auch andere Modelle die dem widersprechen),  $d$  die reale Belastung mit dazugehöriger Lebensdauerlinie und  $c$  die Abschätzung durch die Wöhlerkurve, wobei die Belastungs-Zeit-Funktion konservativ bewertet wurde.

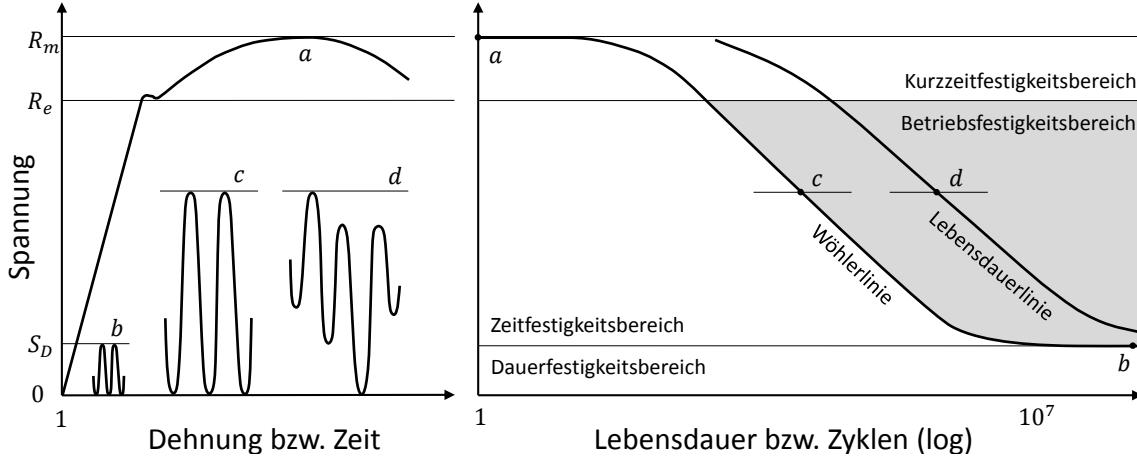


Abbildung 2.10: Zusammenhang von Spannungs-Dehnungs-Kurve und Wöhlerkurve bzw. Lebensdauerlinie mit zusätzlicher Betrachtung ausgewählter Last-Zeit-Funktionen und ihrer Zuordnung gemäß Haibach [19]

Grundlage für die Bestimmung der LCF-Lebensdauer ist eine linear elastische FEM<sup>23</sup>-Rechnung, welche meist als Sektor-Modell durchgeführt wird. D.h. die Domain beinhaltet eine Schaufel und das entsprechende Scheibensegment mit zyklischen Randbedingungen. Ziel der Rechnung ist die Ermittlung der Spannung, um damit über die Wöhlerkurve die Anzahl der Lastspiele abzuschätzen. Mit dieser Information kann die Palmgren-Miner-Regel (siehe Gleichung 2.32) benutzt werden, um eine Lebensdaueraussage bezüglich der niederzyklischen Belastung zu treffen. Die Größe  $D_{LCF}$  kann dabei als Lebensdauerkonto angesehen werden, welches oftmals bei einem Wert  $> 1$  als verbraucht angenommen wird.

$$D_{LCF} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{LCF_i}} \quad \text{Palmgren-Miner-Regel} \quad (2.32)$$

$$D_{Kr} = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{t_{m_i}} \quad \text{Robsion-Regel} \quad (2.33)$$

$$D_{Komb} = D_{LCF} + D_{Kr} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{LCF_i}} + \sum_{i=1}^l \frac{t_i}{t_{m_i}} \quad \text{Kombination} \quad (2.34)$$

### Kriechen:

Kriechen ist ein Phänomen, welches erst ab gewissen Temperaturen auftritt (rund 50% der Schmelztemperatur) und unter konstanter Last eine plastische Verformung zur Folge hat. Hierbei treten drei Phasen während des Kriechens auf. In der initialen Phase tritt erstmals die plastische Verformung auf und die Dehnrate  $\dot{\epsilon}$  fällt von einem anfänglichen Wert auf ein konstantes Niveau. Dies ist der Beginn der zweiten und zeitlich längsten Phase, während in der dritten und finalen Phase, nach einem starken Anstieg der Dehnrate, der Bruch des Bauteils folgt.

Abbildung 2.11 zeigt schematisch diese drei Phasen für die Dehnung  $\epsilon$  und Dehnrate  $\dot{\epsilon}$  über der Zeit und den Zusammenhang zwischen Dehnung und Dehnrate. Wichtig ist der Einfluss der

<sup>23</sup>FEM: Finite Elemente Methode

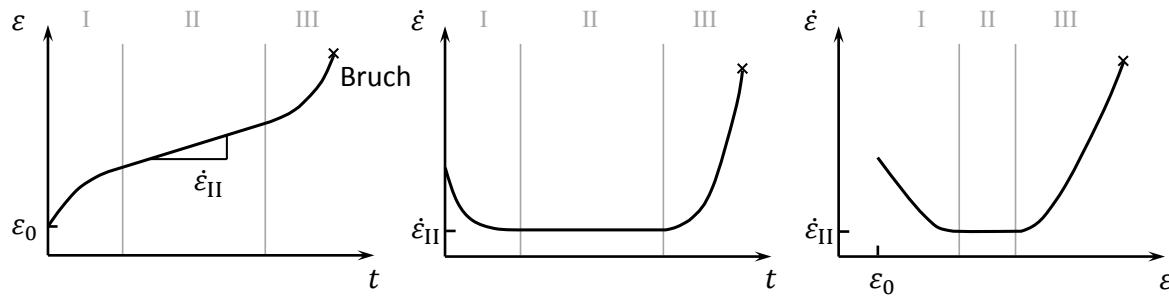


Abbildung 2.11: Darstellung der Kriech-Phasen mit Hilfe von Dehnung  $\varepsilon$ , Dehnrate  $\dot{\varepsilon}$  und Zeit  $t$  nach Rösler [60]

Temperatur. Bei höheren Temperaturen verkürzt sich die Zeit bis zum Bruch. Oftmals wird das Bauteilversagen mit dem Beginn der dritten Phase gleichgesetzt, sodass die Modellierung ebenfalls nur die erste und zweite Phase erfasst.

Auch an dieser Stelle lässt sich ein Lebensdauerkonto für Kriechen angeben. Dies erfolgt zum Beispiel nach der Robinson-Regel (siehe Gleichung 2.33 und Rösler [60]), wobei sich die Standzeit  $t_i$  aus einer Temperatur und einem Spannungsfeld zusammensetzt und die ertragbare Standzeit  $t_{m_i}$  aus aufwendigen Materialtests an vereinfachten Proben ermittelt werden muss.

Abschließend soll noch auf die zugrundeliegende FEM-Rechnung eingegangen werden. Diese Rechnung kann ein schwächer aufgelöstes Gitter, als bei linear-elastischen FEM-Rechnung für LCF verwenden, da beim Kriechen die Dehnrate entscheidend ist und nicht wie für LCF die Spannung selbst. Trotzdem ist die Laufzeit der Kriech-Rechnung weitaus höher (Faktor 3-5). Hintergrund ist die Tatsache, dass aufgrund des nicht linearen Materialverhaltens eine zeitaufgelöste Rechnung notwendig ist.

#### Kombination von LCF und Kriechen:

Bei der Kombination der beiden Schädigungsmechanismen kann simple die Superposition von LCF und Kriechen genutzt werden (siehe Gleichung 2.34). In der Realität kann der Wert  $D_{Komb}$  für die kombinierte Lebensdauer jedoch stärker von 1 abweichen, da beide Aussagen konservativ getroffen wurden. Dies ist bei LCF durch den Übergang von der realen Lebensdauerlinie zur Wöhlerkurve erkennbar (siehe Abbildung 2.10) und beim Kriechen durch die Tatsache, dass das Bauteilversagen schon nach der zweiten Kriechphase stattfindet.

### 2.3. Numerische Grundlagen

Innerhalb der numerischen Grundlagen wird auf die beteiligten numerischen Verfahren eingegangen. Da jedoch in dieser Arbeit keine Entwicklung von Numerik im Detail stattfindet, wird hauptsächlich auf empfehlenswerte Standard- und Fachliteratur verwiesen.

#### 2.3.1. FEM

Die Methode der Finiten Elemente findet bei einer Großzahl von Problemen in der Strukturmechanik Anwendung und ist historisch aus diesem Wissenszweig entstanden. Jedoch besitzt die FEM eine enorme Bandbreite und findet Anwendung bei angepassten Problemen der Strukturmechanik (Balkenbiegung, Platten, Tragwerke, ...), Wärmeleitungproblemen, Navier-Stokes-Gleichungen, Maxwell-Gleichungen bis hin zu jeder Art von Differentialgleichungen. Für die Strukturmechanik spielen jedoch die Gleichungen für Statik, Dynamik und Eigenwertprobleme eine herausragende Rolle und sind in ihrer einfachsten Form in den folgenden Gleichungen angegeben.

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \quad \text{Statik} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{r} \quad \text{Dynamik} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \quad \text{Eigenwertproblem} \quad (2.37)$$

Die Thematik der FEM wurde in diversen Büchern tiefgreifend behandelt und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Als Literaturempfehlungen sind vor allem Bathe [6] und Knothe [38] zu nennen. Zur Vertiefung der Ansatzfunktionen bietet sich Schwarz [62] an. Englische Klassiker wurden von Zienkiewicz [79, 80] verfasst. Ergänzend kann auch Steinke [68] und Klein [37] gelesen werden.

Innerhalb dieser Art wurde die Methode der Finiten Elemente an mehreren Stellen angewendet. Bei der Firree-Optimierung in Kapitel 3 wird Lösung des Kontaktproblems mit der Software *Abaqus* realisiert. In der Mehr-Ziel-Optimierung für die Turbinenkühlung in Kapitel 4 wird die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für das Metall mit FEM durchgeführt (mit der hausinternen Software *SC03*). Abschließend wird bei der Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung in Kapitel 5 eine lineare Lösung für das linear-elastische Problem (LCF) und eine nicht-lineare Lösung für das Kriech-Problem mit Hilfe von FEM bewältigt.

#### 2.3.2. CFD

Mit der CFD<sup>24</sup> ist die numerische Behandlung der strömungsmechanischen Gleichungen gemeint. Dazu zählen neben den Navier-Stokes-Gleichungen, welche sich aus Massen-, Impuls- und Energiebilanz zusammensetzen, auch zusätzliche Gleichungen für Turbulenzgrößen, Spezies und sonstige modellierte Größen. Der Beschreibung der Turbulenz kommt dabei eine besondere Rolle zu, da dadurch das strömungsmechanische Gleichungssystem eines der momentan komplexesten Systeme ist. Ursache dafür ist die Tatsache, dass eine vollauflösende Rechnung (DNS<sup>25</sup>) zu rechenaufwendig wäre und durch Mittelung (RANS<sup>26</sup>) neue Mischterme entstehen, welche zur aufwendigen Modellierung der Turbulenz führen.

Eine weitere Herausforderung ist der Umstand, dass man eigentlich an den primären Größen Druck  $p$ , Geschwindigkeit  $u_i$  und Temperatur  $T$  interessiert ist, aber die Navier-Stokes-Gleichungen keine direkte Gleichung für den Druck enthält, sondern die Massenbilanz mit Hilfe von sogenannten Druck-Korrektur-Verfahren abgewandelt wird. Das bekannteste und erfolgreichste Verfahren

<sup>24</sup>CFD: Computational Fluid Dynamics

<sup>25</sup>DNS: Direkte Numerische Simulation

<sup>26</sup>RANS: Reynolds Averaged Navier-Stokes

dieser Art heißt SIMPLE<sup>27</sup> (siehe Patankar [52]) und wird unter anderem in der Kühlungssoftware JB56 für die Mehr-Ziel-Optimierung der Kühlungskonfiguration (siehe Kapitel 4) verwendet.

Als Literaturempfehlung können mehrere bekannte Autoren angeben werden: Für das allgemeine Verständnis sind Anderson [1], Pope [54] und Hirsch [30] zu empfehlen. Wer selbst anfangen will einen CFD-Löser zu schreiben sollte Ferziger [13,14] zu Rate ziehen. Grundlegende Ideen zur Turbulenzmodellierung und eines der bekanntesten Turbulenzmodelle sind in Wilcox [77] zu finden. LES<sup>28</sup> wird in Fröhlich [17] ausführlich beschrieben. Zuletzt soll noch Schlichting [61] erwähnt werden, welcher zwar nicht direkt Numerik behandelt, jedoch zur dazu relevanten Grenzschichttheorie entscheidende Beiträge leistete.

### 2.3.3. Kopplungsstrategien

Mit der Kopplung ist üblicherweise die Interaktion mehrerer Disziplinen basierend auf einer Problemstellung gemeint. Als typischer Vertreter dient eine sich verformende Geometrie aufgrund der Lasten durch die Strömung, wodurch sich natürlich die internen Spannungen/Verformungen ändern und ein Update der Strömung nötig ist. Dieses iterative Vorgehen über mehrere Disziplinen/Löser (gewöhnlich Struktur/FEM und Strömung/CFD) resultiert in unterschiedlichen Strategien, welche kurz aufgelistet werden sollen:

1. Schwache Kopplung: Austausch der Randbedingungen nach jedem Zeitschritt bis eine gesamtheitliche Konvergenz erreicht wurde
2. Starke Kopplung: Austausch der Randbedingungen innerhalb eines Zeitschrittes (meist durch die inneren Iterationen des CFD-Lösers gesteuert) bis zur Konvergenz
3. CHT: Lösung eines gemeinsamen Gleichungssystems (gemeinsame Variable ist die Temperatur  $T$ )

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass alle aufgelisteten Strategien ihre Vor- und Nachteile besitzen. Die schwache Kopplung ist zwar meist die langsamste Umsetzung, jedoch kann hier jede Kombination von Software/Löser gekoppelt werden, solange die notwendigen Schnittstellen existieren. Dies ist bei der starken Kopplung nicht mehr der Fall, dort müssen die Löser sehr stark aufeinander abgestimmt werden und teilen sich meist den Arbeitsspeicher oder sind in eine Software integriert. Vorteil ist hier ein besseres Konvergenzverhalten.

Dahingegen ist die CHT limitiert auf eine Problemstellung von Strömungsmechanik und Wärmeleitung, da ein Zusammenführen der Gleichungssysteme über die Temperatur  $T$  stattfindet. Vorteil ist, dass man das Hilfskonstrukt des Wärmeübergangskoeffizienten (htc) vermeiden kann, jedoch andere Probleme auftauchen. Klassischerweise wird meist der gemeinsame Zeitschritt  $\Delta t$  genannt, da Strömungs- und Strukturmechanik unterschiedlich "schnell" einschwingen/reagieren. Eine Entkopplung des Zeitschritts bei Fluid und Solid ist wegen der reduzierten Rechenzeit empfehlenswert.

Die Möglichkeit hochkomplexe Geometrien mit CHT zu berechnen ist aufgrund der gestiegenen Rechenleistung Gegenstand der industriellen Forschung, sodass nicht nur einzelne Komponenten (siehe Rodriguez [57]), sondern auch Stufen von Hochdruckturbinen realisierbar sind (siehe Liu [44]).

---

<sup>27</sup>SIMPLE: Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations → Verfahren zur Kopplung der Gleichungen

<sup>28</sup>LES: Large Eddy Simulation



### 3. Ein-Ziel-Optimierung einer Schaufel-Scheibe-Verbindung

In diesem Kapitel soll der Einfluss der Parametrisierung auf den gesamten Auslegungsprozess untersucht werden. Dies schließt alle Schritte von der anfänglichen Idee der Parametrisierung bis hin zur Form des besten Designs und dessen Ergebnissen ein. Als Anwendungsbeispiel dient die Firtree<sup>29</sup>-Verbindung zwischen der Hochdruckturbinenschaufel und dem entsprechenden Gegenstück auf der Scheibe. Die Spannungsberechnung stellt die Zielgröße dieser Untersuchung dar und wird mit Hilfe eines zweidimensionalen Modells ermittelt.

An dieser Stelle sollen noch zwei Sachverhalte angemerkt werden. Zum einen handelt es sich bei der Geometrie um eine Abwandlung einer Realgeometrie aus einer aktuellen Entwicklung eines Triebwerkes, sodass keinerlei nicht normierte Größen/Grafiken in diesem Kapitel angegeben werden. Zum anderen wurden ein Großteil der hier aufgeführten Inhalte/Ergebnisse bereits von dem Autor in Wagner [75] publiziert, sodass auf wiederholten Quellenverweis verzichtet wird.

#### 3.1. Einleitung und Stand der Technik

Die Firtree- oder Tannenbaumfußverbindung zwischen Turbinenschaufel und Turbinenscheibe ist eine hoch belastete Bauteilverbindung, welche als kritisch eingestuft wird. Ein Versagen des Schaufelfußes würde zum Abreißen der Schaufel und damit zu einem Ausfall des Triebwerkes führen, während ein Anriß des Fußes in der Scheibe beziehungsweise die damit verbundene Rissausbreitung zu einem Versagen der Scheibe führen könnte. Aus diesen Gründen ist die Verbindung des Schaufelfußes Gegenstand diverser Untersuchungen.

Als Beispiel zur Validierung zwischen Numerik und Experiment ist Meguid [47] zu nennen. Hier wurde ein Vergleich zwischen photo-elastischen Experimenten und FE-Analysen durchgeführt. Die Fillet<sup>30</sup>-Region zwischen Kontakt- und Nicht-Kontakt-Flächen (im Englischen *lobe* genannt) wurde nur mit einem einfachen Radius parametrisiert. Dies ist insofern nachteilig, da hier die größten Spannungsspitzen zu erwarten sind und üblicherweise eine höherwertige Behandlung der Geometrie erfolgt. Nichtsdestotrotz dies oft als einfachste Parametrisierung verwendet, um eine konservative Abschätzung zu haben oder schnelle Ergebnisse in der Vorauslegung zu erzeugen. In der Arbeit von Meguid [47] wurden außerdem dreidimensionale Studien durchgeführt, um zu zeigen, dass zweidimensionale Modelle ausreichend sind, um mit Hilfe von Korrekturfaktoren auf dreidimensionale Ergebnisse zu schließen.

Als typische Region für Versagen ist meist der unterste Fillet zu nennen. Witek [78] beschäftigte sich mit der Versagensanalyse durch Risse in dieser Region bei einem 3-Lobe-Firtree. Insbesondere das Verständnis des Materialverhaltens ist von enormer Bedeutung. Aus diesem Grund hatte sich Rosenbaum [59] mit der Analyse der Mirko-Struktur befasst. Hierbei wurde der Firtree nach unterschiedlichen axialen Längen aufgeschnitten und untersucht.

Die Verwendung von Splines in den Fillet-Regionen wurde von Song [64–66] in verschiedenen Veröffentlichungen untersucht. Dort wurden für die Parametrisierung zunächst zwei Kreisbögen genutzt, welche daraufhin von einer Doppel-Spline-Konstruktion ersetzt wurde. In Song [65] wurden die globalen und lokalen Parameter beschrieben und eine Optimierung mit Hilfe von genetischen Algorithmen durchgeführt. Das Hauptaugenmerk von Song [66] lag auf den genetischen Algorithmen und der Firtree fungierte als reines Anwendungsbeispiel. Darauf aufbauend wurde in Song [64] ein generelles Gerüst für Optimierungen und die Verwendung von Antwortflächen erstellt.

Neben der Geometrie des Firtree gibt es das Äquivalent innerhalb des Kompressors. Diese als Schwalbenschwanz (*dovetail*) bezeichnete Geometrie ist das Verbindungsstück zwischen Kom-

<sup>29</sup>Firtree (dt. Tannenbaumfußverbindung): Bezeichnet die Verbindung der rotierenden Schaufel mit der darunterliegenden Scheibe, wobei diese Art der Verbindung primär in der Hochdruckturbine verwendet wird.

<sup>30</sup>Fillet (dt. Kehle oder Kurvenzug): Bezeichnet den Kurvenverlauf zwischen zwei Geometrieelementen mit übergeordneter Funktion.

pressorschaufel und Kompressorschabe<sup>31</sup> und wurde ebenfalls ausführlich in der Literatur untersucht. An dieser Stelle sollen zwei Arbeiten hervorgehoben werden. Papanikos [51] führte photoelastische Untersuchungen und FE-Analysen durch, um die Numerik zu validieren. Und Henson [29] verwendete eine B-Spline Parametrisierung für einen *T-root* Schaufelfuß in einer Dampfturbine.

### 3.2. Parametrisierung

Die Parametrisierungen stellen das Herzstück dieser Untersuchung dar und werden entsprechend genauer beschrieben. Zunächst einmal werden globale und lokale Parameter unterschieden, wobei die globalen Parameter bei allen drei vorgestellten Parametrisierungen vorhanden sind, um eine Vergleichbarkeit zu ermöglichen. Im Wesentlichen werden die drei Parametrisierungen in der Art und Weise wie der Fillet aufgebaut wird unterschieden. Es werden in Parametrisierung A (*ParamA*) ein Kreisbogen, in Parametrisierung B (*ParamB*) zwei Kreisbögen und in Parametrisierung C (*ParamC*) ein Spline verwendet. Eine genauere Beschreibung ist in den folgenden Unterkapiteln gegeben.

#### 3.2.1. Globaler Parametersatz

Neben der Vergleichbarkeit der Parametrisierungen untereinander erfüllt der globale Parametersatz auch noch andere Anforderungen. Zunächst sind die Limitierungen des Bauraumes zu nennen. Ein Überblick der wichtigsten Parameter aus dem globalen Satz ist in der Tabelle 3.1 gegeben. Dort ist neben dem Name auch die Funktion des Parameters aufgelistet. Anzumerken ist, dass die ersten fünf Parameter innerhalb der Optimierungen variiert werden und Parameter sechs bis 15 fixiert bleiben. Diese festen Parameter wurden angegeben, um das Verständnis des gesamtheitlichen Aufbaus der Firtree-Geometrie zu schaffen.

Tabelle 3.1: Überblick der wichtigen globalen Parameter und deren Funktion mit Unterteilung in variable (#1-5) und fixe (#6-15) Parameter für die spätere Optimierung

#	Parametername	Funktion des Parameters
1	Bedding_Width_A	Länge der Kontaktlinie an Position A (zw. Fillet 1 & 2)
2	Bedding_Width_B	Länge der Kontaktlinie an Position B (zw. Fillet 3 & 4)
3	Firtree_Neck_Width	Breite des Schaufel-Firtree
4	Flank_Angle	Winkel der Kontaktlinie
5	NC_Flank_Angle	Winkel der Nicht-Kontakt-Linie
6	Barrel_Height	Verschiebung zwischen Kontakt-Kreisbogen und -Linie
7	Clearance	Abstand der Nicht-Kontakt-Flächen zw. Schaufel & Scheibe
8	Disc_Bore_Rad	Innerer Radius der Scheibe
9	Disc_Rim_Rad	Äußerer Radius der Scheibe
10	Firtree_Height	Höhe des Firtree (Scheibe)
11	Overlap	Versatz zwischen Kontakt-Kreisbogen und -Linie
12	Shank_Neck_Rad	Äußerer Radius der Schaufel ( <i>shank</i> )
13	Shank_Neck_Width	Breite des <i>shank</i> am äußeren Radius
14	Firtree_Length	Gesamtlänge des Firtree (in 3D)
15	Skew	Schrägungswinkel des Firtree (in 3D)

<sup>31</sup>Dies tritt bei *bladed disc* Modellen nicht auf

Da es sich um ein zweidimensionales Modell handelt wird der Kontakt als Linien-Punkt-Kontakt modelliert. Um diese Konstruktion des Kontaktes zu variieren wird die Länge der Linie auf der Seite der Scheibe parametrisiert (*Bedding\_Width\_A/\_B* → #1/#2). Der Kreisbogen auf der Seite der Schaufel wird mit Hilfe von zwei Punkten und einer Berührungsbedingung aufgebaut. Bezogen auf die Linie der Scheibe wird ein Versatz entlang dieser Linie (*Overlap* → #11) definiert und eine Verschiebung senkrecht zu dieser Linie (*Barrel\_Height* → #6) eingeführt. Der Übergang zum Fillet unterscheidet sich von Parametrisierung zu Parametrisierung und wird in den nächsten Unterkapiteln detailliert beschrieben.

Sowohl die Linie auf der Scheibe, die den Kontakt definiert, als auch die Linie der Nicht-Kontakt-Flächen sind jeweils über einen Winkel (*Flank\_Angle* → #4 bzw. *NC\_Flank\_Angle* → #5) gegen das globale Koordinatensystem parametrisiert. Des Weiteren ist der Abstand der Nicht-Kontakt-Flächen (*Clearance* → #7) zwischen Schaufel und Scheibe gegeben. Hierbei werden Minimalabstände für die Montage adressiert. Die minimale Dicke des Firtee (*Firtree\_Neck\_Width* → #3) beachtet die Tatsache, dass ein Kühlkanal durch das innere der Geometrie geführt werden muss, um die Turbinenschaufel mit Kühlluft zu versorgen.

An dieser Stelle muss eine Entscheidung getroffen werden, für welche Parameter Änderungen zulässig sind oder nicht. Zwar könnte man über das parametrische Geometrie-Modell alle angesprochenen Parameter ändern, jedoch wären dann Absprachen mit anderen beteiligten Disziplinen oder Durchführen vorheriger Rechnungen erforderlich. Als gutes Beispiel sind die inneren und äußeren Radien auf der Turbinenscheibe zu nennen, welche durch vorgelegerte Analysen fixiert wurden. Als Folge fand eine Einteilung der Parameter statt, sodass nur fünf Parameter in den folgenden Optimierungen variiert (#1-#5) und die restlichen Parameter konstant gehalten werden. Neben den dargestellten Informationen in Tabelle 3.1 sei auf die ausführlichere Tabelle A.1 im Anhang A.5 erweisen, welche ebenfalls die normierten Basis-, Minimal- und Maximalwerte beinhaltet.

In der Abbildung 3.1 ist der grundlegende Aufbau der Firtree-Geometrie dargestellt. Daneben wurden die Parameter für *ParamA* und Positionen von Kontakten und Fillets in der Tabelle 3.2 benannt, auf die noch in den folgenden Unterkapiteln eingegangen wird.

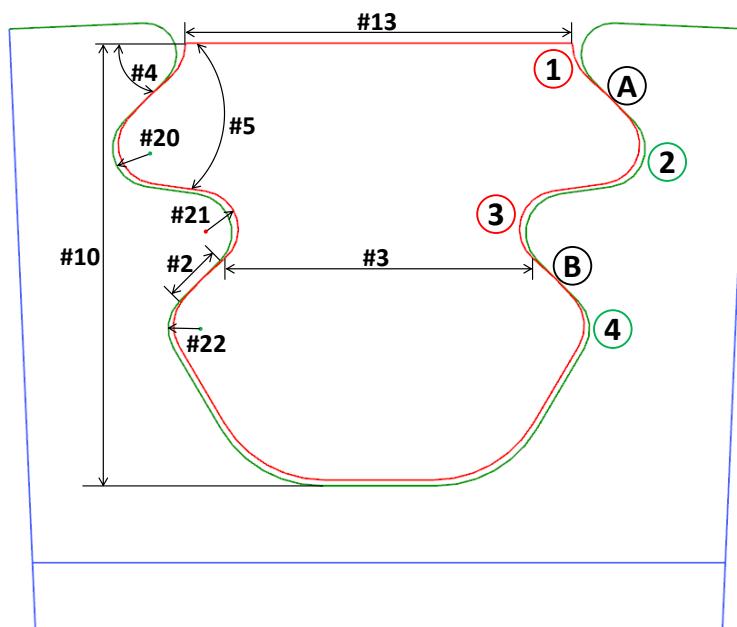


Tabelle 3.2: Benennungen zu Abb. 3.1

#	Parameter
20	Ang2Disc
21	Ang3Blade
22	Ang4Disc
(A)	Kontakt A
(B)	Kontakt B
(1)	Fillet 1
(2)	Fillet 2
(3)	Fillet 3
(4)	Fillet 4

Abbildung 3.1: Firtree für *ParamA* mit ausgewählten globalen und lokalen Parametern (links) und den Auswertepositionen in den Fillets und Kontakten (rechts)

### 3.2.2. Parametrisierung mit einem Kreisbogen - *ParamA*

Die einfachste Parametrisierung ist mit einem Kreisbogen für einen Fillet möglich. Der Radius dieses Kreisbogens wird als Parameter auf den jeweiligen Fillet aufgebracht. Hier wurde entweder der schaufelseitige oder scheibenseitige Fillet gewählt, je nachdem wo der kritische Spannungsverlauf erwartet wird. Der Fillet-Radius auf der Gegenseite wird als Freiheitsgrad gelassen, sodass sich dieser Radius frei einstellen kann. Dies ist notwendig, damit die zugrunde liegende Skizze nicht überbestimmt ist und die Parameter direkt die kritischen Regionen adressieren.

Die Parametergrenzen sind für alle Fillets gleich, wobei die untere Grenze aus dem Herstellungsprozess abgeleitet wurde und die obere Grenze aus Voruntersuchungen übernommen wurde. Somit sollen Geometrien im Vorhinein verhindert werden, welche mit dem bestehenden Herstellungsprozess nicht gefertigt werden können. Des Weiteren existiert die Restriktion, dass der Kreisbogen tangential in die benachbarten Geometrieelemente übergeht. Dies sind auf der Scheibe die Linie für die Kontakt- und die Nicht-Kontakt-Flächen und auf der Schaufel der Kreisbogen für den Kontakt und die Linie für die Nicht-Kontakt-Fläche.

An dieser Stelle ist eine volle Parametrisierung durch die Kombination der globalen Parameter und lokalen Parameter aus *ParamA* gegeben. Eine grafische Übersicht ist in der Abbildung 3.1 dargestellt, wobei aus Platzgründen eine Auswahl globaler Parameter neben den Parameter von *ParamA* (#20-#22) mit ihren Nummern auf der linken Seite der Grafik angegeben sind. Die rechte Seite der Grafik bezeichnet mit den Positionen 1 bis 4 die Kerbspannung in den Fillets und den Buchstaben A und B die Kontaktspannung zwischen Schaufel und Scheibe. Diese Auswertepositionen sind ebenfalls zutreffend für Parametrisierung B und C. Zur besseren Visualisierung ist der Tannenbaumfuß der Schaufel mit dem roten Kurvenverlauf und der Tannenbaumfuß der Scheibe mit dem grünen Kurvenverlauf dargestellt, wobei auch die Auswertepositionen der Kerbspannungen entsprechend farblich hervorgehoben sind.

### 3.2.3. Parametrisierung mit zwei Kreisbögen - *ParamB*

Bei der Parametrisierung B, kurz *ParamB* genannt, werden für einen Fillet zwei Kreisbögen verwendet. Auch hier ist es wichtig einen C1-stetigen Übergang zwischen den benachbarten Kurvenelementen zu gewährleisten. Die tangentiale Nebenbedingung zwischen den beiden Kreisbögen zeigte ein instabiles Verhalten in den Voruntersuchungen, sodass ein komplexes System mit Hilfslinien aufgebaut werden musste. Dieses Hilfskonstrukt basiert auf verschiedenen Zwangsbedingungen. Die wichtigsten Bedingungen sind zum einen die senkrechte Beziehung zwischen Hilfslinie und eigentlichem Firtree und zum anderen der Punkt-auf-Linie Bedingung an den Übergängen zwischen dem Kurvenzug, der den Firtree aufspannt. Während der Erstellung der Skizzen für *ParamB* stellte sich heraus, dass die Reihenfolge des Aufbringens der Zwangsbedingungen relevant ist und eine unterschiedliche Reihenfolge ein unterschiedliches Verhalten zur Folge hatte.

Um ein Überblick zu bekommen ist in Abbildung 3.2 das Hilfskonstrukt dargestellt, wobei die Hilfslinien als Strich-Punkt-Linien, der Firtree der Schaufel als rote Linie und der Firtree der Scheibe als grüne Linie aufgezeigt sind. Dementsprechend handelt es sich um einen Auszug am zweiten Fillet. Zusätzlich sind die verwendeten Parameter in Tabelle 3.3 benannt, während jeder Fillet einige voneinander unabhängige Parameter besitzt.

Aus den durchgeführten Voruntersuchungen ist bekannt, dass das Optimum zu einer Aufteilung in einen Kreisbogen mit jeweils kleinem und großem Radius führt. Dabei liegt der Kreisbogen mit geringerem Radius auf geringerer radialer Höhe. Entsprechend dieser Kenntnis wurden die Parameterräume gewählt, und zwar in der Art und Weise, dass die obere Parametergrenze des kleineren Radius der unteren Grenze des größeren Radius entspricht. Demzufolge wäre als Extremfall der gleiche Radius für beide Kreisbögen möglich und die Parametrisierung A könnte mit abgebildet werden.

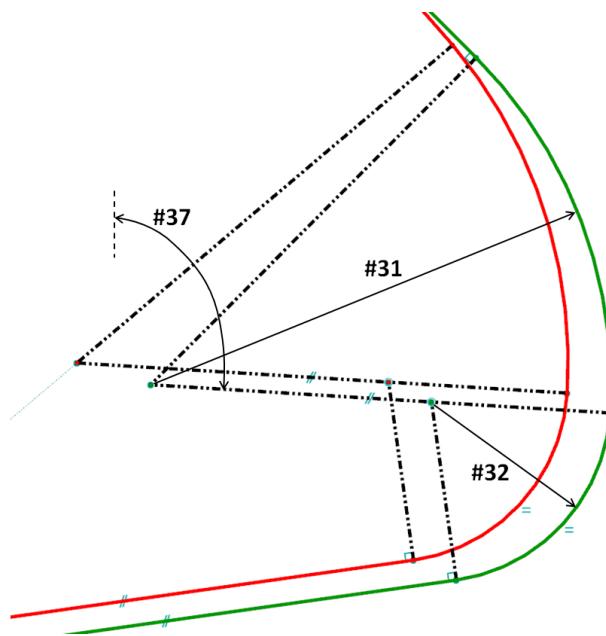


Tabelle 3.3: Benennung für  
ParamB

#	Parameter
31	Fillet2_Large
32	Fillet2_Small
37	TangAngle2

Abbildung 3.2: Hilfs-Konstrukt für die Parametrisierung B mit zwei Kreisbögen mit hervorgehobenen Parametern an bestimmten Hilfslinien

### 3.2.4. Parametrisierung mit unterschiedlichen Splines - ParamC

In der Parametrisierung C, oder kurz als *ParamC* bezeichnet, wird für jeden Fillet ein Spline<sup>32</sup> verwendet. Hierbei kann die Anzahl der Stützstellen, der Grad des Splines und die Methodik des Splines verändert werden. Die eingesetzte CAD-Software *Siemens NX 9.0* stellt zwei Methoden zur Verfügung. Zum einen ist dies die klassische Definition eines Splines über die Kontrollpunkte (siehe Gleichung (2.1)), wobei die Methode in NX als *ByPoles* bezeichnet wird. Zum anderen ist es möglich, den Spline so aufzubauen, dass die Punkte mit denen der Spline aufgebaut wird, direkt auf dem Spline liegen (siehe Gleichung (2.5)). Diese zweite Art und Weise den Spline zu generieren wird in NX als *ThroughPoints* bezeichnet. Diese beiden Methoden sind ineinander überführbar und können entsprechend die gleiche Geometrie abbilden. Eine empfehlenswerte Referenz ist mit Piegl [53] gegeben.

Beide Methoden können mit Hilfe eines hoch flexiblen Hilfskonstruktes realisiert werden. Dabei ersetzt dieses Konstrukt die Kreisbögen und ist direkt mit den Kontakt- und Nicht-Kontakt-Flächen über entsprechende Zwangsbedingungen verbunden. Um einen Eindruck zu vermitteln ist in Abbildung 3.3 ein Spline mit sieben Kontrollpunkten, dem Grad drei und der *ByPoles*-Methode dargestellt. Der jeweils erste und letzte Punkt des Splines über einen Punkt-zu-Punkt Zwang mit den Nachbarelementen verknüpft. Des Weiteren ist der zweite und vorletzte Punkt auf einer tangentialen Verlängerung des Nachbarelementes mit einem Punkt-auf-Linie Zwang versehen, um eine C1-Stetigkeit zu gewährleisten. Dies ist bei der *ByPoles*-Methode notwendig, bei der *ThroughPoints*-Methode jedoch nicht. Dort kann der Anstieg am ersten und letzten Punkt auf C1-Stetigkeit gesetzt werden. Damit haben der zweite und vorletzte Punkt bei der *ByPoles*-Methode jeweils nur einen Freiheitsgrad entlang der tangentialen Verlängerung des Nachbarelementes. Die restlichen drei Kontrollpunkte besitzen je zwei Freiheitsgrade, womit sich die Gesamtzahl der Freiheitsgrade auf acht summiert. Diese sind in der Abbildung 3.3 als zwei schwarze Pfeile pro Freiheitsgrad hervorgehoben, um die Bewegungsmöglichkeit anzudeuten.

<sup>32</sup>Mit Splines wird immer die Hauptgruppe der geometrischen Elemente bezeichnet. An dieser Stelle ist damit die B-Spline-Formulierung gemeint.

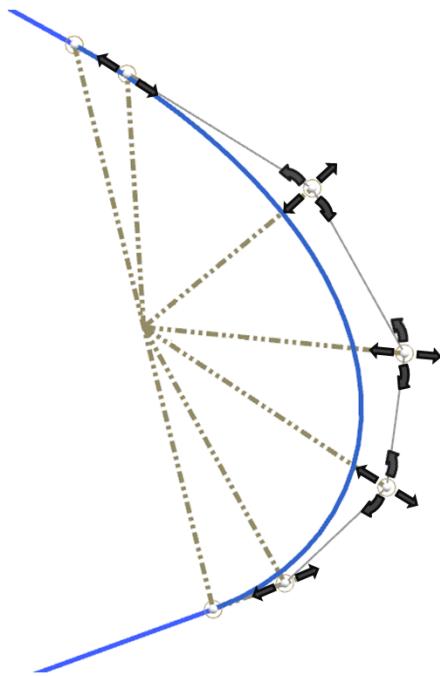


Abbildung 3.3: Grundidee der Spline-Parametrisierung des Fillet am Beispiel der *ByPoles*-Methode mit sieben Kontrollpunkten, einem Polynomgrad von drei und acht Freiheitsgraden

Kern der Parametrisierung C ist das flexible Hilfskonstrukt. Dieses besteht aus einer Haupt-Hilfselinie deren Länge (z.B.  $S2D\_L0\_Len \rightarrow \#41$ ) und Winkel (z.B.  $S2D\_L0\_Ang \rightarrow \#40$ ) als Parameter zur Verfügung stehen und deren Endpunkte über einen Punkt-zu-Punkt Zwang mit den Endpunkten der Nachbarelemente verbunden ist. Somit ist nicht der Spline selber gegen die restliche Geometrie gebunden, sondern nur die Haupt-Hilfselinie. Ausgangspunkt für die restlichen Neben-Hilfselinien ist der Mittelpunkt dieser Haupt-Hilfselinie, wobei die Endpunkte dieser Neben-Hilfselinien als Stützstellen für die jeweilige Spline-Methode dienen.

Eine der Herausforderungen ist es, eine stabile Parametrisierung zu finden, welche auch gleichzeitig eine möglichst variable Geometrie zulässt. Aus diesem Grund wurde eine Vorgehensweise gewählt, die die Parameter relativ definiert. Diese baut sich wie folgt, teilweise sogar rekursiv, auf: Es werden sowohl Länge und Winkel der aktuellen Neben-Hilfselinie gesetzt. Wobei die Länge relativ zur Haupt-Hilfselinie über einen Skalierungsfaktor (z.B.  $S2D\_L1\_Scal \rightarrow \#44$ ) definiert ist und der Winkel (z.B.  $S2D\_L1\_Rand \rightarrow \#45$ ) sich prozentual auf den restlich verbliebenen Winkel bezieht. Das heißt, dass am Anfang  $180^\circ$  zur Verfügung stehen und bei einem Wert von z.B. 0.25 der Winkel für die Neben-Hilfselinie auf  $45^\circ$  gesetzt wird. Der verbleibende Winkel wird bei der zweiten Neben-Hilfselinie wieder prozentual als Parameter angegeben und somit setzt hier die Rekursion ein. Durch entsprechende Parametergrenzen (vor allem für den Winkel von 0.1 bis 0.9) kann ein Überschwingen des Splines durch zu nah aneinander liegende Punkte verhindert werden. Zusätzliche Stabilität wird durch das Verbinden der Endpunkte der Neben-Hilfselinien gewonnen, sodass die Robustheit der Parametrisierung mit Splines nahezu 100% ist. Anzumerken ist weiterhin, dass sich durch Ändern eines der ersten Winkel auch die Werte der restlichen Winkel ändern, da diese rekursiv definiert sind.

Zum besseren Verständnis ist in der Abbildung 3.4 das Hilfs-Konstrukt anhand des ersten Fillet auf der Scheibenseite aufgezeigt. Hierbei sind die Nachbarelemente jeweils die Linien von der Kontakt- und Nicht-Kontakt-Fläche als durchgezogene grüne Linien dargestellt und die Hilfslinien als Strich-Punkt-Linien. Die Haupt-Hilfselinie ist mit den Parametern für die Länge ( $S2D\_L0\_Len \rightarrow \#41$ ) und den Winkel ( $S2D\_L0\_Ang \rightarrow \#40$ ) versehen. Die tangentialen Verlängerungen für die

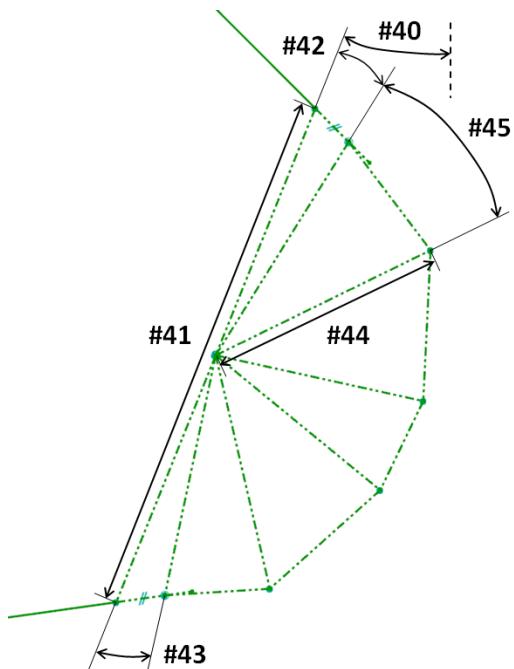


Tabelle 3.4: Benennung für  
ParamC

#	Parameter
40	S2D_L0_Ang
41	S2D_L0_Len
42	S2D_H1_Ang
43	S2D_H2_Ang
44	S2D_L1_Scal
45	S2D_L1_Rand

Abbildung 3.4: Beschreibung des Hilfs-Konstruktes zum Aufbauen der verschiedenen Splines mit Fokussierung auf ausgewählte Parameter bzw. Linien

*ByPoles*-Methode sind für den zweiten und vorletzten Punkt mit je einem Winkel ( $S2D\_H1\_Ang \rightarrow \#42$  und  $S2D\_H2\_Ang \rightarrow \#43$ ) bemäßt. Diese Punkte werden bei der *ThroughPoints*-Methode nicht benutzt und die entsprechenden Winkel werden zu null gesetzt. Die erste Neben-Hilfslinie mit zwei Freiheitsgraden ist in der Abbildung 3.4 mit der Skalierung für die Länge ( $S2D\_L1\_Scal \rightarrow \#44$ ) und dem Winkel ( $S2D\_L1\_Rand \rightarrow \#45$ ), welcher im Hintergrund über die prozentuale Angabe des restlichen Winkelraumes berechnet wird, bezeichnet. Zur Übersichtlichkeit wurde nur die erste Neben-Hilfslinie bemäßt und in Tabelle 3.4 benannt.

### 3.3. Arbeitsablauf und Durchführung

In diesem Unterkapitel wird zunächst das typische Design für einen Firtree beispielhaft vorgestellt. Daraufhin wird auf den verwendeten Arbeitsablauf und die durchgeführten Implementierungen eingegangen. Abschließend wird argumentativ die Formulierung des Optimierungsproblems dargestellt. Der verwendete Optimierungsalgorithmus CMA-ES wurde in dem entsprechendem Theorie-Kapitel 2.1.2 erläutert.

#### 3.3.1. Beschreibung des Firtree-Modells

Der Ausgangspunkt des Firtree mit der Parametrisierung A ist in der Abbildung 3.5 mit konturiertem *worst principal stress*<sup>33</sup> dargestellt. Da die Problemstellung es ermöglicht, wurde die Symmetrie ausgenutzt, um ein Ein-Sektor-Modell zu erstellen. Entsprechende Symmetrie-Randbedingungen wurden an den dazugehörigen Linien der Scheibengeometrie angebracht. Zur weiteren Vereinfachung wurde nur der untere Teil der Turbinenschaufel mit in die Geometrie/Simulation aufgenommen. Die restliche Schaufel, bzw. deren Masse, wurde über eine äquivalente Last auf der oberen Linie des Schaufel-Firtree simuliert.

<sup>33</sup>worst principal stress: Betragmäßig größte Hauptspannung

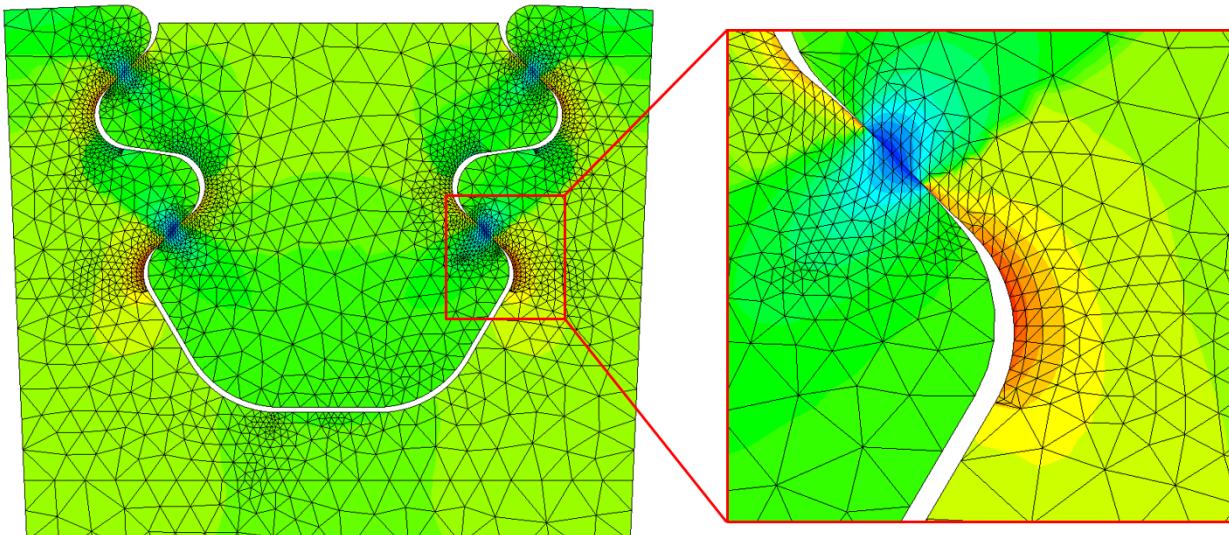


Abbildung 3.5: Beispielhafte Ergebnisse des *worst principal stress* der Anfangsgeometrie für Parametrisierung A mit Fokus auf die kritische Region des unteren Fillet auf der Scheibenseite.

Als weitere Randbedingungen wurde ein radiales Temperaturprofil angesetzt, welches unter anderem die Einflüsse von dreidimensionalen Bestandteilen wie z.B. die des Sekundärluftsystems adressiert. Das heißt der Einfluss von z.B. *seal arm* und *drive arm* ist direkt im Profil sichtbar (siehe Abbildung 3.1). Im Allgemeinen wurde der Flugzustand des Starts (*max take off* → MTO) untersucht, da dieser Zustand maßgeblich die Lebensdauer des Firtree bestimmt. Die dazugehörigen Randbedingungen wurden aus der entsprechenden Leistungsrechnung entnommen.

Der Kontakt zwischen Schaufel und Scheibe wurde als Master-Salve-Kontakt innerhalb der kommerziellen Software *Abaqus 6.11-3* modelliert. Dabei basiert die Zuweisung der beteiligten Kontaktflächen ausschließlich auf den vollständig getaggten<sup>34</sup> Kurvenzügen der Schaufel- bzw. Scheibengeometrie. Bei dem Material wurden Standardwerte für die üblichen Schaufel- und Scheibenmaterialien gewählt. Konkret handelt es sich dabei um *CMSX-4* für die Turbinenschaufel und *Inconel718* für die Turbinenscheibe.

Die in der Abbildung 3.5 dargestellte Spannungsverteilung ist charakteristisch für den Firtree. Hierbei sei nochmals an die Nummerierung auf der rechten Seite der Abbildung 3.1 verwiesen. Die beiden Kontaktspannungen bei A und B werden in der Auswertung in einen Sicherheitsfaktor mit Hilfe von Korrelationen überführt. Die kritischen Regionen auf der Schaufel liegen an Position 1 und 3 und auf der Scheibe bei 2 und 4.

Es wurden Gitterstudien durchgeführt, um sicher zu stellen, dass das Ergebnis unabhängig vom verwendeten Rechennetz ist. Da sich das Gitter sowohl aus globalen, als auch aus lokalen Einstellungen aufbaut, wurden zunächst die einflussreichsten Gitterparameter ermittelt. Dabei stellte sich heraus, dass die lokale Verfeinerung der Kantenlänge einen maßgeblichen Einfluss auf das Konvergenzverhalten der Spannung besitzt. Die entsprechende Netzstudie ist in der Abbildung 3.6 mit dem normierten Maximum für die Kerbspannung im vierten Fillet auf der Scheibe über der lokalen Kantenlänge dargestellt. Es ist erkennbar, dass bei kleinen lokalen Kantenlängen der Wert um weniger als 1% gegenüber der feinsten Gitterauflösung abweicht. Für die folgenden Untersuchungen wurde ein Wert von 0.05 gewählt, während zur übersichtlicheren Darstellung in der Abbildung 3.5 der Wert 0.2 gewählt wurde.

<sup>34</sup>Tag: Benennung von Punkten, Linien, Flächen und /oder Körper

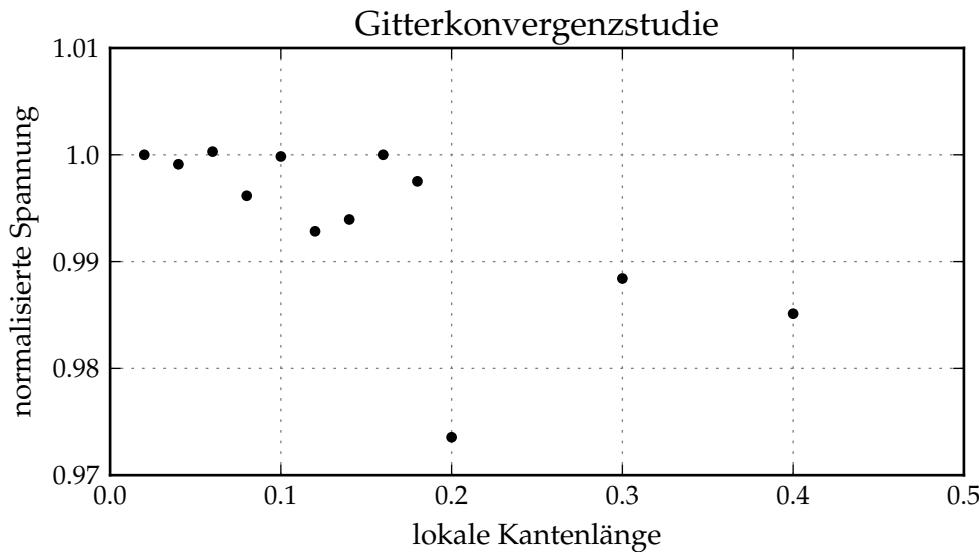


Abbildung 3.6: Gitterkonvergenzstudie für die normalisierte Spannung auf der Scheibe an der Position des vierten Fillet gegenüber der lokalen Kantenlänge als Gittereinstellung

### 3.3.2. Arbeitsablauf und Implementierung

Ein bereits existierender Arbeitsablauf vom Industriepartner wurde aufgegriffen und für diese Untersuchung aufbereitet. Der grundlegende Aufbau ist in der Abbildung 3.7 als Strukturgramm zu erkennen. Zur Automatisierung/Steuerung aller verwendeten Elemente wurde die Software *Isight* verwendet.

Die Geometrie wurde mit der CAD-Software *Siemens NX 9.0* für jede Parametrisierung neu erstellt und wird über *expressions*<sup>35</sup> für das jeweilige Parametersatz aktualisiert. Für jede durchgeführte Optimierung (ein Überblick wird im folgenden Kapitel 3.4.1 bzw. der Tabelle 3.6 gegeben) musste beim erstellten Arbeitslauf die entsprechende Template-Datei angepasst werden.

Ein Großteil der restlichen Schritte wird von *SC03* übernommen. Dabei handelt es sich um den hausinternen Strukturlöser vom Industriepartner. Zunächst werden die im vorherigen Unterkapitel beschriebenen Randbedingungen appliziert und das Gitter aufgrund der globalen und lokalen Netzrandbedingungen erstellt. Daraufhin wird ein *Abaqus*-input-deck erstellt und ein *SC03*-Plugin<sup>36</sup> steuert die Rechnung mit *Abaqus*.

Mit der Software *Abaqus* 6.11-3 wird die eigentliche Simulation durchgeführt, da *Abaqus* die qualitativ höchste Kontaktmodellierung, im Vergleich zu anderen kommerziellen Softwarepaketen, besitzt. Als Kontakttyp wurde der Master-Slave-Kontakt verwendet. Es gibt insgesamt vier Kontaktpaare, die sich an den Auswertepositionen A und B in Abbildung 3.1 befinden und durch Symmetrie bezüglich der Mittelachse jeweils zwei Mal im Modell vorkommen. Die Ergebnisse an den gegenüberliegenden Kontakten ist annähernd gleich, wobei die Unterschiede auf die Vernetzung zurückzuführen sind. Gesteuert wird die Modellierung über die verwendeten Liniennamen (tags) direkt an den Kontakten und benachbarten Linienelementen.

Eine elementare Auswertung wird wiederum von *SC03* durchgeführt, nachdem die Ergebnisse der Simulation von *Abaqus* zurückgeliefert wurden. Die Ausgabegrößen werden von *Isight* aufgegriffen und je nach Aufgabenstellung (z.B. DoE, MCS oder Optimierung) angemessen weiter-

<sup>35</sup>*expressions*: Es handelt sich um die Siemens NX interne Bezeichnung für Parameter, die zum Aufbau von Geometrien verwendet werden. Durch das Einladen eines neuen Parametersatzes kann die gesamte Geometrie variiert werden.

<sup>36</sup>*SC03*-Plugin: *SC03* bietet die Möglichkeit einige Programme zu schreiben, welche näher an der *SC03*-internen Datenstruktur arbeiten können. Diese Plugins sind beim Industriepartner weit verbreitet und finden auch in dieser Arbeit mehrfach Anwendung.

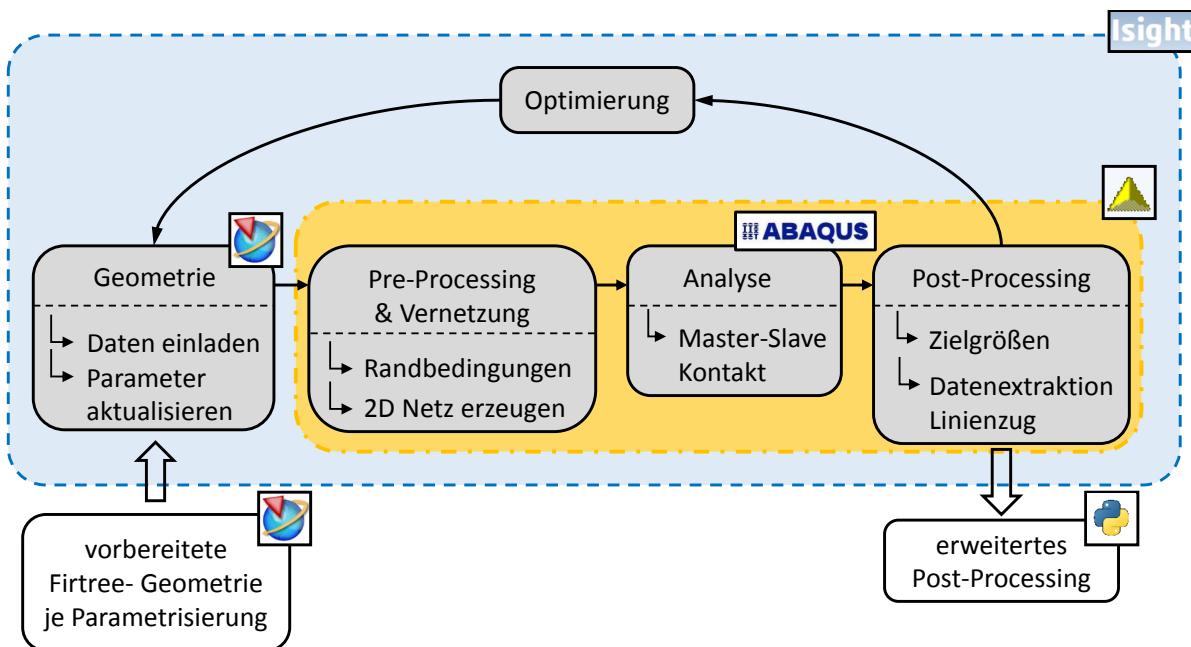


Abbildung 3.7: Strukturgramm für den verwendeten Arbeitsablauf der Firtree-Optimierung mit Markierungen für die genutzten Programme

verarbeitet. Für eine detailliertere Auswertung (*post-processing*) wurden *Matlab*/*python*-Skripte erstellt und verwendet. Dies ermöglichte eine einheitliche Auswertung, da mehrere Optimierungen verglichen werden.

### 3.3.3. Optimierungsformulierung

Die Firtree-Geometrie bietet viele Größen als mögliche Optimierungsziele, wie unter anderem in der Abbildung 3.1 zu erkennen ist. Aus eigenen Voruntersuchungen ist bekannt, dass die kritische Spannung, welche die Lebensdauer maßgeblich beeinflusst, am vierten Fillet auf der Scheibe liegt. Nichtsdestotrotz müssen die anderen Regionen ebenfalls beobachtet werden. Aus diesem Grund ist in Tabelle 3.5 eine Übersicht relevanter Ausgabegrößen geben.

Zur Verdeutlichung muss noch einmal betont werden, dass der jeweils zweite, dritte und vierte Fillet auf Schaufel und Scheibe mit unterschiedlichen Linienelementen (ein Kreisbogen, zwei Kreisbögen, Splines) parametrisiert wurde. Dabei liegen die Parameter direkt auf der Scheibengeometrie für den zweiten und vierten Fillet. Bei Fillet drei liegen die Parameter auf der Turbinenschaufel. Das jeweilige Gegenstück wird bei den Parametrisierungen mit einem oder zwei Kreisbögen über die Zwangsbedingungen nachgezogen oder ist, wie im Fall der Spline-Parametrisierungen, konservativ definiert. Somit können sich die Fillets auf Schaufel- und Scheibenseite nicht berühren oder überschneiden.

Als Zielgröße für die Ein-Ziel-Optimierung wurde die Kerbspannung im vierten Fillet auf der Scheibe gewählt. Alle anderen aufgelisteten Größen werden über Nebenbedingungen auf einem akzeptablen Niveau gehalten, welches aus Voruntersuchungen beziehungsweise aus vorherigen Designs bekannt ist. Die Sicherheitsfaktoren (Ausgabegrößen #5 bis #8) induzieren ein Versagen bei dem Wert 1.0, sodass hier die Nebenbedingung auf 1.1 gesetzt wurde. Bei den Größen #9 bis #11 handelt es sich um Längen. Diese wurden mit ausgewählt, da die Spannung nicht im Punkt des geringsten Querschnitts abgegriffen wird, sodass eine zusätzliche Sicherung gegen Zugbelastung mit aufgenommen wurde.

Somit kann die Formulierung der Ein-Ziel-Optimierung mit Nebenbedingungen wie folgt an-

Tabelle 3.5: Liste von möglichen Zielgrößen und Nebenbedingungen für die Firtree-Optimierung

#	Name der Ausgabegröße	Position	Typ
1	NotchStressBlade0	Schaufel - Fillet 1	Kerbspannung
2	NotchStressBlade1	Schaufel - Fillet 3	Kerbspannung
3	NotchStressDisc0	Scheibe - Fillet 2	Kerbspannung
4	NotchStressDisc1	Scheibe - Fillet 4	Kerbspannung
5	ReserveFactorBlade0	Schaufel - Kontakt A	basiert auf Korrelationen
6	ReserveFactorBlade1	Schaufel - Kontakt B	basiert auf Korrelationen
7	ReserveFactorDisc0	Scheibe - Kontakt A	basiert auf Korrelationen
8	ReserveFactorDisc1	Scheibe - Kontakt B	basiert auf Korrelationen
9	MinimalDiscWidth1	Scheibe - Fillet 2	basiert auf Zugspannung
10	MinimalDiscWidth2	Scheibe - Fillet 4	basiert auf Zugspannung
11	MinimalFirtreeWidth	Schaufel - Fillet 3	basiert auf Zugspannung

gegeben werden:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} [O_4] \text{ mit } \mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{h}(\mathbf{p}) \leq 0, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o\}, \quad (3.1)$$

mit

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}) = [C_i - O_i] \leq [0] \quad \forall i = \{1, 2, 3, 5..11\}, \quad (3.2)$$

wobei  $C$  für *constraint* (Nebenbedingung) und  $O$  für *output parameter* (Ausgabeparameter) steht. Der Entwurfsparametersatz  $\mathbf{p}$  liegt im  $m$ -dimensionalen Parameterraum  $\mathbf{P}$  und wird durch die obere  $\mathbf{p}^o$  beziehungsweise untere  $\mathbf{p}^u$  Grenze eingeschlossen. Bei allen Eingabeparametern handelt es sich um reale Zahlen.

Abschließend muss noch angemerkt werden, dass nicht die Lebensdauer untersucht wurde, welche als Zielgröße erstrebenswert gewesen wäre. Dazu würde eine zusätzlich Analyse für die niederzyklische Belastung und die thermo-mechanische Ermüdung benötigt, um eine repräsentative Aussage über die Lebensdauer zu treffen. Dies übersteigt den Umfang dieser Untersuchung jedoch erheblich und ist nicht zielführend, da der Einfluss der Parametrisierung auf den Gesamtprozess im Vordergrund steht.

## 3.4. Ergebnisse und Diskussion

Dieses Unterkapitel betrachtet die Auswertung der Firtree-Optimierung in drei Schritten. Zunächst werden die durchgeföhrten Optimierungen aufgelistet und erläutert, wobei beispielhaft an der Optimierung für Parametrisierung A das Konvergenzverhalten einer Optimierung erläutert wird. Danach werden die besten Ergebnisse aus den unterschiedlichen Optimierungen miteinander verglichen und überprüft. Zuletzt wird eine Vergleichsmatrix aufgestellt, um den Einfluss der Parametrisierung auf den gesamten Auslegungsprozess zu bewerten.

### 3.4.1. Optimierung

Die unterschiedlichen Parametrisierungen, die im Kapitel 3.2 vorgestellt wurden, sind in der Tabelle 3.6 aufgelistet. Dabei muss zunächst die Nomenklatur der Optimierungen #3 – #8 erläutert

werden. Hier steht "PC0\_" bzw. "PC1\_" für Parametrisierung C mit der *ThroughPoints*-Methode (0) bzw. *ByPoles*-Methode (1), die Zahl nach dem F steht für die Anzahl der Freiheitsgrade und die Zahl nach dem D für den *degree* (Grad) des Splines. Entsprechend kann man mit der Optimierung #3 und #4 die beiden unterschiedlichen Spline-Methoden vergleichen. Mit #4 bis #6 den Einfluss der Anzahl der Freiheitsgrade abschätzen. Und mit #5, #7 und #8 analog den Einfluss des Spline-Grades untersuchen.

Tabelle 3.6: Überblick der durchgeführten Optimierungen des Firtree mit unterschiedlichen Parametrisierungen

#	Parametrisierung	Methode	# Eingaben	Zielgröße	# Durchläufe
1	ParamA	1 Kreisbogen	5+1*n	1.201	900
2	ParamB	2 Kreisbögen	5+3*n	1.013	1650
3	PC0_F6_D3	ThroughPts	5+6*n	0.999	1900
4	PC1_F6_D3	ByPoles	5+6*n	0.923	1800
5	PC1_F8_D3	ByPoles	5+8*n	1.005	2250
6	PC1_F10_D3	ByPoles	5+10*n	0.828	3750
7	PC1_F8_D4	ByPoles	5+8*n	0.903	2100
8	PC1_F8_D5	ByPoles	5+8*n	0.874	2400

Zusätzlich sind in der Tabelle 3.6 Daten für die Anzahl der Eingabegrößen, den Wert der Zielgröße und die Anzahl benötigten der Durchläufe jeder Optimierung angegeben. Hierbei setzt sich die Anzahl der Eingabegrößen aus den fünf globalen Parametern und den speziellen Parametern der jeweiligen Parametrisierung zusammen. Dabei ist  $n$  durch die Anzahl der Fillets zu ersetzen, was im vorliegenden Fall  $n = 3$  und bei einem Firtree mit einer höheren Anzahl von Fillets entsprechend zu beachten ist. Somit erstreckt sich die Anzahl der Eingabegrößen von 8 in #1 bis 35 in #6. Als Ergebnisse sind sowohl der Wert der Zielgröße als auch die Anzahl der benötigten Durchläufe aufgelistet. Bei der Zielgröße handelt es sich um die normierte Kerbspannung im vierten Fillet wie in Kapitel 3.3.3 angegeben.

Beispielhaft soll im Folgenden für Parametrisierung A diskutiert werden, wie die einzelnen Optimierungen systematisch ausgewertet wurden. Dazu wurden die Abbildungen 3.8, 3.9 und 3.10 erstellt. Anzumerken ist, dass die Daten im erweiterten *post-processing* mit einer Intervall-Länge von 10 Werten gemittelt wurden, um eine übersichtlichere Darstellung zu ermöglichen.

In der Abbildung 3.8 ist der Verlauf der globalen Eingabeparameter über die Laufnummer, sprich die Anzahl der Durchläufe, abgebildet. Der normierte Raum der Eingabeparameter läuft von 0 bis 1 und vier von fünf Parameter erreichen innerhalb der Optimierung die obere oder untere Grenze. Hierbei war zu erwarten, dass die Länge der Kontakt-Linien (*Bedding\_Width\_1* und *Bedding\_Width\_2*) und der dazugehörige Winkel (*Flank\_Angle*) an das obere Limit stoßen, um die Spannungen innerhalb der kritischen Regionen zu reduzieren. Um den Bauraum bestmöglich auszunutzen, verringert sich die Breite des Firtree (*Firtree\_Neck\_Width*) auf den zulässigen Minimalwert. Einzig der Winkel der Nicht-Kontakt-Fläche (*NC\_Flank\_Angle*) stagniert um einen normierten Wert von rund 0.67, um die vorgegebene Höhe des Firtree beizubehalten.

Die drei spezifischen Winkel der Parametrisierung A sind in der Abbildung 3.9 aufgezeigt. Hierbei strebt der Wert für den Winkel am zweiten Fillet (*Ang2Disc*) relativ schnell gegen den zulässigen Maximalwert, um die Nebenbedingung der dortigen Spannung zu erfüllen. Dementsprechend wurde vergleichsweise viel Bauraum für den ersten Fillet aufgebraucht. Dies stellte innerhalb dieser Optimierung eine Herausforderung dar und sorgte, wie im Folgenden noch gezeigt wird, dafür, dass die Gesamtergebnisse von Parametrisierung A ungenügend sind.

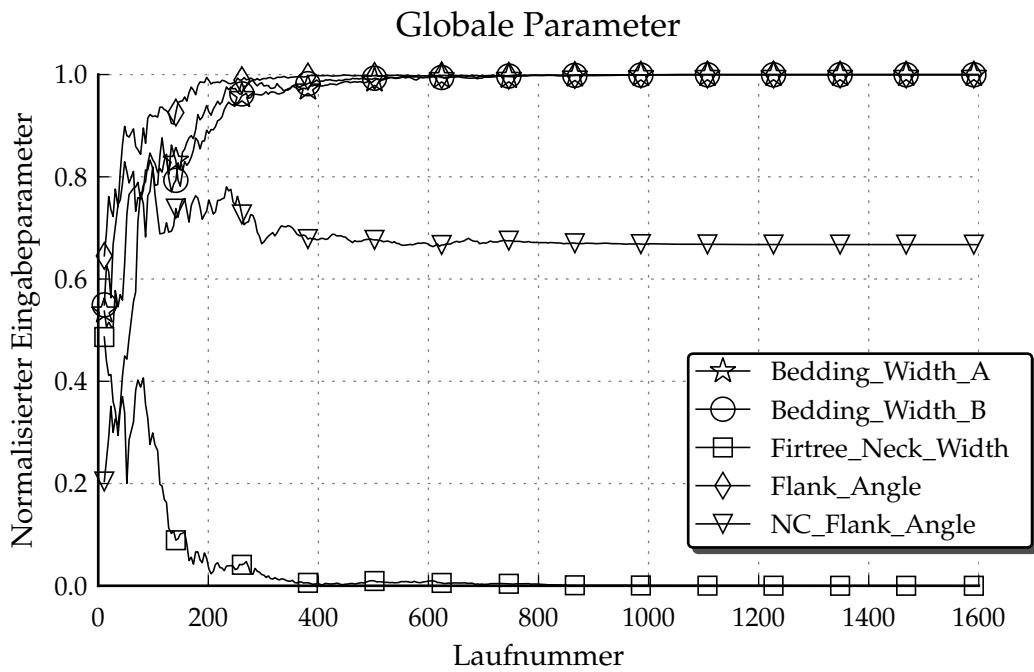


Abbildung 3.8: Verhalten der spezifischen Eingabeparameter für Parametrisierung A während der Optimierung #1 gemäß Tabelle 3.6

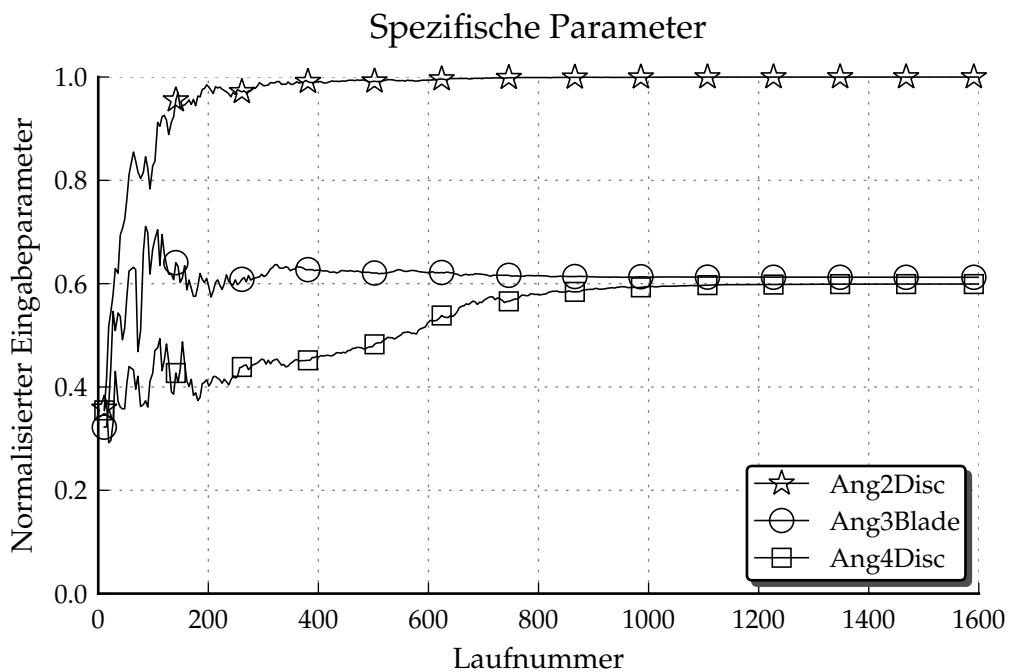


Abbildung 3.9: Verhalten der globalen Eingabeparameter für Parametrisierung A während der Optimierung #1 gemäß Tabelle 3.6

Bei dem zweiten Winkel (*Ang3Blade*), welcher die Spannung innerhalb des dritten Fillet auf der Schaufel adressiert, wird ein normierter Wert von rund 0.61 erreicht. Die dazugehörige Spannung gelangt nicht an die Grenzen der Nebenbedingung, sodass Parametrisierung A hier Bauraum ungenutzt lässt. Der dritte Winkel (*Ang4Disc*), welcher direkt am vierten Fillet auf der Scheibe angebracht ist, nimmt hier einen Wert von rund 0.6 ein und führt den restlichen, zur Verfügung stehenden Bauraum aus.

Die Ausgabegrößen der Optimierung für Parametrisierung A sind in der Abbildung 3.10 dargestellt. Es wurde aus Übersichtsgründen nur der anspruchsvollste Sicherheitsfaktor für den Kontakt A aufgezeigt (*ReserveFactorBlade0*). Die drei Spannungen an den Auswertepositionen 1 bis 3 (siehe Abbildung 3.1) erfüllen die Nebenbedingungen. Die Zielgröße beziehungsweise Spannung an der Position 4 ergibt sich zu einem Wert von rund 1.2. Dabei wurde eine Konvergenz nach rund 900 Durchläufen erreicht.

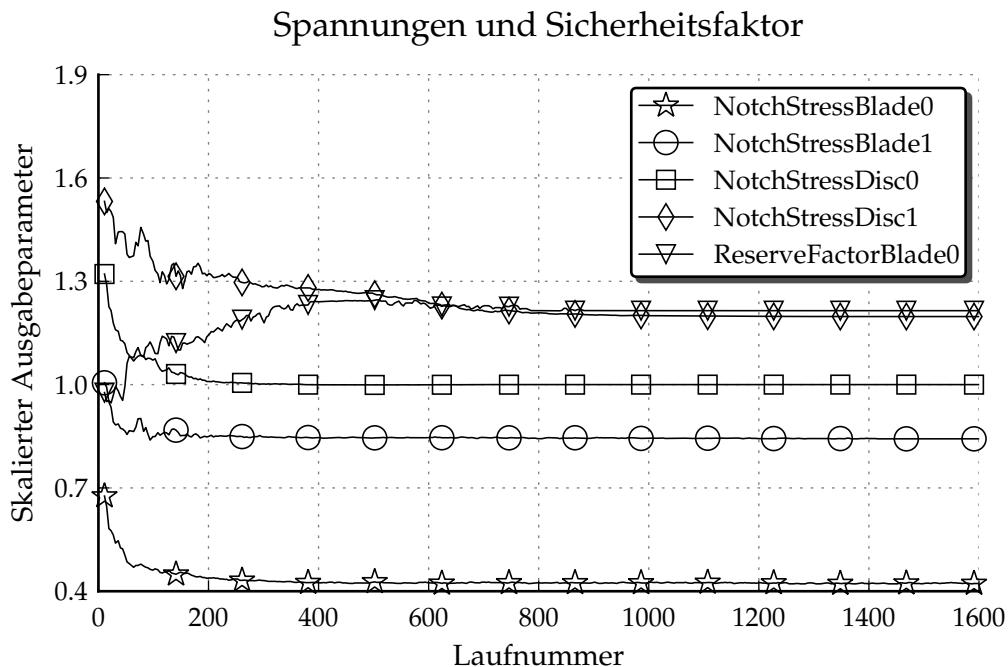


Abbildung 3.10: Verhalten der Zielgröße und ausgewählter Nebenbedingungen für Parametrisierung A während der Optimierung #1 gemäß Tabelle 3.6

Um die Daten der auskonvergierten Lösung zu erhalten, wurden entsprechende Skripte geschrieben, die sowohl eine Meldung durchführen, als auch überprüfen ob eine vorgegebene prozentuale Änderung nicht mehr überschritten wird. Dieses Vorgehen wurde einheitlich auf alle Optimierungen angewendet und die daraus resultierenden Daten sind in der Tabelle 3.6 aufgelistet. Zusätzlich muss angemerkt werden, dass zur besseren statistischen Auswertung mehrere Optimierungsdurchläufe wünschenswert gewesen wären. Jedoch war dies im Zeitrahmen nicht umsetzbar.

### 3.4.2. Vergleich der besten Ergebnisse

Um die besten Ergebnisse aus den unterschiedlichen Optimierungen miteinander vergleichen zu können, ist in der Abbildung 3.11a der normierte Spannungsverlauf über der normierten Kantenlänge des vierten Fillets aufgetragen. Dabei wurde die Normierung der Kantenlänge anhand der Ergebnisse aus Parametrisierung A durchgeführt. Der Maximalwert der jeweiligen Spannungsverläufe entspricht den angegebenen Werten aus Tabelle 3.6.

Anzumerken ist, dass der zur Verfügung stehende Bauraum des vierten Fillets stark variiert. Dies hat damit zu tun, dass die Nebenbedingungen durch die Parametrisierungen unterschiedlich gut erfüllt wurden. Indirekt kann man dies an der vertikalen Ausdehnung der Kurvenverläufe der Abbildung 3.11b erkennen. Hier hat die Parametrisierung A, wie zuvor besprochen, relativ viel Bauraum zur Erfüllung der Nebenbedingungen verbraucht, sodass die eigentliche Zielgröße schlechtere Ergebnisse liefert.

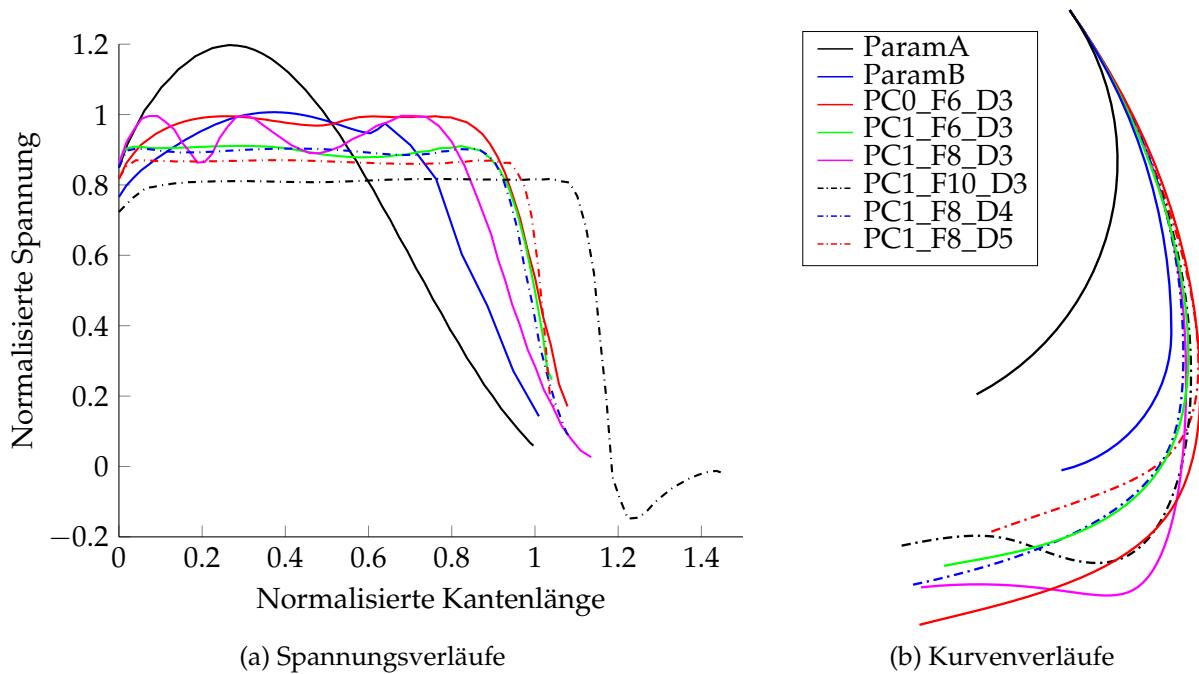


Abbildung 3.11: Ergebnisse der unterschiedlichen Optimierungen (siehe Tabelle 3.6) für den vierten Fillet

Bei genauerer Betrachtung der Ergebnisse von Parametrisierung A und B sind charakteristische Spannungsverläufe erkennbar. Dabei gibt es einen einfachen Maximalwert bei Parametrisierung A und der Verlauf ähnelt einer Sinusschwingung. Dahingegen gibt es bei der Parametrisierung B ein Höchstwert, der an zwei Stellen im Verlauf auftritt. Dies ist bei der Optimierung für Parametrisierung B eine logische Folge für die Verwendung von zwei Kreisbögen.

Dahingegen ist das Verhalten der Parametrisierung mit den Splines im Spannungsverlauf sehr unterschiedlich. Dies ist darauf zurückzuführen, dass teilweise Optimierungen in lokalen Minima gelaufen sind, wie in den Fällen für *PC0\_F6\_D3* und *PC1\_F8\_D3* erkennbar. Dort werden keine gleichmäßigen Plateaus erreicht, wie es für die restlichen Optimierungen mit der Spline-Parametrisierung qualitativ gegeben ist. Des Weiteren ist bei der Optimierung *PC1\_F10\_D3* ein Überschwingen des Spannungsverlaufs zu erkennen, was auf ein Hinterschneiden der Geometrie zurückzuführen ist. Als bestes Ergebnis ist die Optimierung *PC1\_F8\_D5* mit einem flachen, gleichmäßigen Spannungsverlauf zu nennen.

Die Hinterschneidungen von *PC1\_F8\_D3* und *PC1\_F10\_D3* sind in Abbildung 3.11b gut sichtbar. Auffällig ist weiterhin, dass die Ergebnisse der Parametrisierung *PC0\_F6\_D3* zwar den größten Bauraum zur Verfügung hat, jedoch keinen vergleichbar guten Spannungsverlauf besitzt. Die Ergebnisse von *PC1\_F6\_D3* und *PC1\_F8\_D4* sehen sich sowohl im Spannungsverlauf, als auch in der Geometrie relativ ähnlich. Das beste Ergebnis liefert die Parametrisierung *PC1\_F8\_D5*. Hier liegt der niedrigste Spannungsverlauf vor (ohne unphysikalische Ergebnisse) und der Verbrauch des Bauraumes ist im Vergleich zu den anderen Spline-Parametrisierungen gering.

Die normalisierten Werte für die Maximalspannung aus Tabelle 3.6 (Seite 46) sind in der Abbildung 3.11a erkennbar. Es muss betont werden, dass Parametrisierung A um 20% schlechtere

Ergebnisse liefert als Parametrisierung B. Verglichen mit den Spline-Parametrisierungen sind diese um rund 10% besser als Parametrisierung B.

In der Abbildung 3.11b ist die Geometrie der Linie des vierten Fillet so dargestellt, dass die Anfangspunkte zusammen fallen. Dies stimmt erwartungsgemäß nicht mit den zweidimensionalen  $x$ - $y$ -Werten überein, sondern dient nur zur Vergleichbarkeit der unterschiedlichen Geometrien. An dieser Stelle ist wiederum zu erkennen, dass für den vierten Fillet bei der Parametrisierung A der vergleichsweise geringste Bauraum zur Verfügung steht. Der Bauraum für Parametrisierung B ist zwar größer als bei A, jedoch deutlich geringer als für alle vorliegenden Ergebnisse der Spline-Parametrisierungen.

### 3.4.3. Vergleichsmatrix

Die Vergleichsmatrix ist in Tabelle 3.7 zusammengefasst und wird ausführlicher in den folgenden Punkten diskutiert:

1. **Aufwand der Erstellung der Parametrisierung in der Theorie:** Da sich alle Parametrisierungen das gleiche Grundgerüst teilen, wird dieser Aufwand zur Erstellung im Vergleich ausgeschlossen. Die einfachste Parametrisierung ist mit einem Kreisbogen an den Fillets parametrisiert und über tangentiale Zwangsbedingungen an die benachbarten Elemente gebunden. Für die Parametrisierung B wurde in der Theorie der gleiche Ansatz gewählt, jedoch stellten sich in der Implementierung und den darauffolgenden Tests Stabilitätsprobleme ein, welche über das aufwendige Hilfskonstrukt gelöst wurden. Bei der Parametrisierung C musste ebenfalls ein Hilfskonstrukt erdacht werden. Dabei wurden verschiedene Ideen entwickelt und die Umsetzung der aussichtsreichsten Idee implementiert und vorgestellt. Problematisch war ein Aufbau, der nicht zu Überschwingern der Spline-Geometrie führt. Dies wurde letztendlich durch eine rekursive Definition der Parametrisierung und die Wahl der Parametergrenzen gelöst. Als Nachteilhaft ist das nicht intuitive Verhalten der Parametrisierung durch den rekursiven Aufbau zu nennen.
2. **Komplexität der Implementierung in die CAD-Software:** Die Implementierung in die CAD-Software war vergleichsweise einfach für die Parametrisierung A, während für die Parametrisierung B das Hilfskonstrukt aufwendig war. Es musste stark auf die Reihenfolge, in der die Zwangsbedingungen aufgebracht wurden, geachtet werden. Diese Komplexität führte dazu, dass mehrere Versuche zur Parametrisierung eines Fillets nötig waren. Die Umsetzung der Parametrisierung C war weniger komplex, jedoch aufwendig, da eine große Anzahl an Operationen durchgeführt werden musste. Auch die Realisierung der Parameter war teilweise durch die rekursive Formulierung schwer zu handhaben.
3. **Fehleranfälligkeit und Robustheit der Parametrisierung:** Die Stabilität aller erstellten Parametrisierungen war zufriedenstellend. Die Erfolgsraten innerhalb der Parametergrenzen lag beständig über 95%. Als eine der problematischen Regionen erwies sich die *bucket groove*, welche am unteren Teil der Firtree-Geometrie liegt. Dort sprang der ein Kreisbogen (unterhalb des vierten Fillets) des Öfteren auf unrealistische Werte. Der langwierigste Teil war die Bestimmung der Parametergrenzen. Es musste ein Kompromiss zwischen Stabilität und Flexibilität gefunden werden, wobei eine "gute" Parametrisierung beides gleichzeitig ermöglichen sollte. Des Weiteren trat bei Parametrisierung B während der Optimierung das Problem auf, dass die Radien von beiden Kreisbögen den gleichen Wert annahmen und somit B in A überging. Bei der Parametrisierung C war es schwer dem Verhalten der Parameter während der Optimierung zu folgen, was mit dem rekursiven Aufbau zusammenhängt. Als Letztes muss noch auf Lizenz- und Netzwerkprobleme eingegangen werden. Diese haben zwar nicht direkt mit den Parametrisierungen zu tun, tragen jedoch zu einem erheblichen Teil der Gesamtfehlerquote bei.

4. **Genaugkeit der Ergebnisse:** Die Genaugkeit für alle erstellten Parametrisierungen war zufriedenstellend. Jedoch muss eine Anmerkung zu Parametrisierung C gemacht werden. Dort kam es immer wieder zu "unphysikalischen" Ergebnissen durch das Einschneiden an den Fillets. Dies reduzierte zwar die anliegenden Spannungen, führte aber zu Geometrien die nicht herstellbar sind. Als Lösung könnte eine weitere Nebenbedingung für nicht negative Spannungswerte auf den entsprechenden Oberflächen gestellt werden. Eine elegantere Lösung wäre das Überprüfen der Stetigkeit der Fillets: Hier musste man auf Wendepunkte prüfen und das aktuelle Design eventuell verwerfen.
5. **Flexibilität der möglichen Geometrien:** Bei Parametrisierung A sollten die Limitierungen offensichtlich sein, da hier nur ein Kreisbogen zur Verfügung steht. Die Flexibilität der Parametrisierung B hängt stark mit dem darunterliegenden Hilfskonstrukt zusammen und liefert immer valide Ergebnisse in den gesetzten Parametergrenzen. Parametrisierung C besitzt die größte Flexibilität, liefert aber teilweise Geometrien, welche nicht herstellbar sind. In den Optimierungen stellte sich jedoch meist eine günstige Richtung (im Sinne der Herstellbarkeit) ein, sodass sinnvolle Ergebnisse erzielt wurden. Nichtsdestotrotz kann die Flexibilität von Parametrisierung C als am Größten angesehen werden.
6. **Einfluss auf die Anzahl der Durchläufe in der Optimierung:** Die Anzahl der Durchläufe richtet sich maßgeblich nach der Anzahl der verwendeten Eingabeparameter. Daher ist die Reihenfolge verhältnismäßig einfach zu bestimmen. Parametrisierung A besitzt acht Eingabeparameter (siehe Tabelle 3.6) und konvergiert am Schnellsten gegen das jeweilige Optimum. Parametrisierung B besitzt 14 Parameter und konvergiert am zweit-schnellsten. Bei der Parametrisierung C hängt es von der Anzahl der gewählten Freiheitsgrade beziehungsweise der Anzahl der Eingabeparameter ab. Im geringsten Fall gibt es 23 Eingabeparameter und im höchsten Fall 35. Daraus lässt sich auch auf die Anzahl der Durchläufe schlussfolgern.
7. **Vergleich der besten Ergebnissen aus den Optimierungen:** Parametrisierung A liefert die schlechtesten Ergebnisse im Vergleich zu den anderen Parametrisierungen. Je nachdem, wo die Grenze des akzeptablen Wertes für die Spannung liegt, kann gesagt werden, dass eine Parametrisierung unakzeptable Ergebnisse liefert. In diesem Fall wird das Optimum von Parametrisierung A als unzureichend angesehen. Im direkten Vergleich zu Parametrisierung B ist A um rund 20% schlechter. Die besten Ergebnisse liefert Parametrisierung C. Dort sind bis zu 10% bessere Ergebnisse als in Parametrisierung B möglich. Es muss erneut darauf hingewiesen werden, dass durch Hinterschneidungen nicht herstellbare Geometrien durch die Optimierung erzeugt werden können.

Tabelle 3.7: Vergleichsmatrix für die unterschiedlichen Parametrisierungen

#	Vergleichsmerkmal	ParamA	ParamB	ParamC
1	Erstellung in Theorie	+++	-	-
2	Implementierung	+	-	--
3	Fehleranfälligkeit	++	+	-
4	Genaugigkeit	+	+	+
5	Flexibilität	--	+	++
6	# Durchläufe	++	+	--
7	Beste Ergebnisse	---	+	+++

### 3.5. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wurde der Einfluss von unterschiedlichen Parametrisierungen auf den gesamten Auslegungsprozess aufgezeigt. Dies beginnt mit der Überlegung, wie die Parametrisierung aufgebaut werden soll und geht bis zu den Ergebnissen der besten Geometrie aus der jeweiligen Optimierung. Grundlage dieser Untersuchungen sind drei verschiedene Parametrisierungen, welche sich ein gemeinsames Grundgerüst teilen und sich in den kritischen Regionen der Geometrie unterscheiden. Hierbei wird im einfachsten Fall ein einfacher Kreisbogen für einen Fillet verwendet, dessen Kerbspannung als Zielgröße oder Nebenbedingung in die Optimierungsformulierung mit eingeht. Bei der zweiten Parametrisierung werden zwei Kreisbögen verwendet, welche über ein Hilfskonstrukt die C1-Stetigkeit der Geometrie gewährleisten. Die letzte Parametrisierung behandelt Splines als Kurvenelemente für die Fillets. Dabei wird ebenfalls ein generisches Hilfskonstrukt verwendet, welches rekursiv aufbaut ist und eine unterschiedliche Anzahl an Stützstellen ermöglicht. Des Weiteren stehen zwei verschiedene Spline-Methoden zur Verfügung und der Grad des Splines kann variiert werden.

Der aufwendigste Teil dieser Studie war die Erstellung der unterschiedlichen Parametrisierungen in der Theorie, sowie dessen Implementierung in die CAD-Software, gefolgt von den Durchläufen der jeweiligen Optimierungen. Zur Durchführung wurde ein *Isight*-Arbeitsablauf benutzt, welcher die parametrischen CAD-Modelle innerhalb der Software *Siemens NX* aktualisiert, das Pre-Processing in *SC03* abhandelt, die eigentliche Analyse in *Abaqus* durchführt und als Letztes das Post-Processing wiederum in *SC03* realisiert. Der Vergleich der Ergebnisse untereinander wurde mit Hilfe von *Matlab*/*python* verwirklicht.

Bei der Optimierungsformulierung handelt es sich um eine Ein-Ziel-Optimierung, in der die Kerbspannung des vierten Fillet auf der Turbinenscheibe die Zielgröße ist. Die Spannungen an den anderen kritischen Fillets werden über Nebenbedingungen abgedeckt, wobei eben diese Nebenbedingungen auch Sicherheitsfaktoren für die Kontaktspannungen und geometrische Minimalgrößen enthalten. Die Parametergrenzen wurden durch Voruntersuchungen so festgelegt, dass ein guter Kompromiss zwischen Stabilität und Flexibilität der Geometrie getroffen wurde.

Als Zusammenfassung des gesamtheitlichen Einflusses der Parametrisierung auf den Auslegungsprozess ist die Tabelle 3.7 zu sehen. Dort ist erkennlich, dass alle Parametrisierungen ihre Vor- und Nachteile besitzen. Bei der Parametrisierung A ist sowohl die Erstellung, als auch die Implementierung neben der geringen Anzahl an Durchläufen in der Optimierung als Hauptvorteil zu sehen. Dahingegen ist der bestmögliche Entwurf bezüglich der Spannungswerte vergleichsweise am schlechtesten. Die Parametrisierung C liefert die günstigen Ergebnisse, wobei hier auch nicht herstellbare Ergebnisse entstehen können oder die Optimierung in ein lokales Minimum laufen kann. Ein weiterer Nachteil von Parametrisierung C ist der aufwendige Aufbau und die Deutung der Parameter wegen des rekursiven Aufbaus. Als möglicher Kompromiss kann Parametrisierung B angesehen werden, da akzeptable Zielgrößen bei mittlerem Aufwand erreichbar sind. Dementsprechend ist die Entscheidung dem Anwender überlassen, welche Genauigkeitsstufe zu welcher Art von Untersuchung oder zu welchem Zeitpunkt im Auslegungsprozess zu bevorzugen ist.

Als Ausblick sind vor allem zwei Verbesserungen naheliegend. Der automatische Arbeitsablauf sollte um die Lebensdauerberechnung erweitert werden, sodass die Zielgröße ein möglichst homogener Lebensdauerverlauf entlang des vierten Fillets ist. Für die Parametrisierung C sollten zusätzliche Kriterien zu Rate gezogen werden, um ein Einschneiden der Geometrie zu verhindern. Dies könnte über eine Analyse des Kurvenverlaufes bewerkstelligt werden.





## 4. Mehr-Ziel-Optimierung für die Turbinenkühlung

Innerhalb dieses Kapitels wird die Mehr-Ziel-Optimierung für Kühlungskonfiguration einer Laufschaufel der ersten Stufe einer Hochdruckturbine vorgestellt. Es werden sowohl unterschiedliche Optimierungsalgorithmen als auch Optimierungsformulierungen untersucht. Bei den Algorithmen handelt es sich konkret um den AMGA- und den NSGA-II-Algorithmus, welche in Unterkapitel 2.1.2 vorgestellt wurden. Die Ergebnisse dieser Algorithmen werden miteinander verglichen, wobei Vor- und Nachteile gegenübergestellt werden. Dabei handelt es sich zum einen um eine dimensionslose Formulierung der Zielgrößen, um eine Vergleichbarkeit mit anderen Rotorschaufern zu ermöglichen. Zum anderen um eine dimensionsbehaftete Formulierung, um die gesetzten Projektvorgaben zu erreichen.

Dieses Kapitel kann als der zentrale Teil der vorliegenden Arbeit angesehen werden, da sowohl an der Methodenentwicklung als auch an der Entwicklung der automatisierten Arbeitsprozesse mitgewirkt wurde. Kern stellt dabei das haus-interne Programm *JB56* dar, welches standardmäßig zur Auslegung von Kühlungskonfigurationen verwendet wird. Die einzelnen Bestandteile dieser Auslegungssoftware werden im Kapitel 4.3 beschrieben. Ein Großteil der hier aufgeführten Inhalte/Ergebnisse wurden bereits von dem Autor in Wagner [73] publiziert, sodass auf wiederholten Quellenverweis verzichtet wird.

### 4.1. Einleitung und Stand der Technik

Wenn man den Auslegungsprozess für die Turbinenkomponenten betrachtet, erkennt man drei Hauptbestandteile. Als Erstes werden verschiedene Kühlungskonzepte evaluiert, wobei die Anordnung der Kühlkanäle im Vordergrund steht. An dieser Stelle kommen elementare Bilanzgleichungen und analytische Beziehungen zum Einsatz. Dementsprechend werden zur Auslegung einfache Skripte oder Excel verwendet. Dieses Level der Auslegung wird als *PreLim* (preliminary design → Vorauslegung) oder *Low-Fidelity* (→ niedrige Genauigkeit) bezeichnet.

Die zweite Stufe des Auslegungsprozesses adressiert die einzelnen Bestandteile der Kühlung. Das heißt, man ist sowohl an der Anzahl als auch der Lage von Rippen, Filmen und anderen Kühlungselementen interessiert. An dieser Stelle kommt eine Kombination von experimentell ermittelten Korrelationen der einzelnen Kühlungselemente und vereinfachten numerischen Modellen zum Einsatz. Somit wird dieses Level als *Mid-Fidelity* bezeichnet. Bei den verwendeten Auslegungsprogrammen besitzt jeder Triebwerkshersteller hausinterne Eigenentwicklungen, da es kaum kommerzielle Angebote für dieses spezielle Segment gibt und historisch die Eigenentwicklungen über die Jahrzehnte auf die Bedürfnisse angepasst wurden.

Die dritte und letzte Auslegungsstufe wird als *High-Fidelity* bezeichnet und beinhaltet genaue Aussagen über das nahezu finale Design. Dort spielen sowohl die auftretenden Strömungsphänomene als auch die Interaktion der einzelnen Kühlungselemente eine wichtige Rolle. Entsprechend dieser Anforderungen kommen hochwertige numerische Verfahren zum Einsatz. Hierbei kann es sich um eine Kopplung von interner und externer Strömung mit der Wärmeleitung im Material (d.h. 3D CFD gekoppelt mit 3D FEM) handeln oder auch das Lösen als gesamtheitliches Problem in Form einer CHT-Rechnung. Die verwendeten Auslegungsprogramme sind an dieser Stelle meist kommerzielle Softwarepakete, die aufgrund der Komplexität der Modelle entsprechende Rechenzeiten benötigen.

Die in diesem Kapitel durchgeföhrten Untersuchungen wurden auf der mittleren Auslegungsstufe (*Mid-Fidelity*) realisiert. Grund dafür ist vor allem die benötigte Rechenzeit. Bei Variationen von einer großen Anzahl von Parametern für die Rippen und Filme ist eine entsprechend große Anzahl an Durchläufen notwendig. Zusätzlich konnten Arbeitsprozesse vom Industriepartner aufgegriffen und auf die vorliegende Problemstellung angepasst werden. Dies ermöglicht auch eine schnelle Rückführung in die Entwicklungsumgebung des Industriepartners.

An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass ein deutlicher Trend innerhalb des Auslegungsprozesses zu erkennen ist. Aufgrund der Entwicklung zu erhöhter und billiger Rechenleistung und der Verbesserung kommerzieller Software auf diesem Gebiet, werden die Prozessschritte der Auslegung zu einem früheren Zeitpunkt in der Entwicklung eingesetzt. Dies kann dazu führen, dass das *Mid-Fidelity*-Level auf längere Sicht ersetzt wird. Nichtsdestotrotz ist der Rechenzeitvorteil von *Mid-Fidelity* gegenüber *High-Fidelity* enorm, sodass sich immer Anwendungsgebiete finden werden. Als Beispiel sei das nachfolgende Kapitel dieser Arbeit genannt, worin in einem eingekoppelten Prozess über mehrere Disziplinen eine Mehr-Ziel- und Robustheitsoptimierung vorgestellt wird.

Das angesprochene *Mid-Fidelity*-Level adressiert neben Verteilungen und Mittelwerten von wichtigen Größen, wie zum Beispiel der Oberflächentemperatur, auch dimensionslose Kennzahlen, die eine Vergleichbarkeit von unterschiedlichsten Kühlungskonfigurationen ermöglichen. Es haben über die letzten Jahrzehnte kontinuierliche Entwicklungen sowohl in der Theorie als auch in der Kühlungstechnologie stattgefunden. So hat Halls [20] im Jahre 1967 vereinfachte Modelle vorgestellt, welche rein durch konvektive Kühlung (interne Geometrie besteht hauptsächlich aus Kühlkanälen) betriebene Turbinenkomponenten beschreibt und entsprechende dimensionslose Kenngrößen bereitstellt.

Durch die Einführung von Filmkühlung war eine deutliche Erhöhung der Turbineneintrittstemperatur möglich, wodurch gleichzeitig die Effizienz des gesamten Triebwerks verbessert werden konnte. Eine theoretische Aufarbeitung für Filmkühlung und gleichzeitige Erweiterung von Halls Modell und der dimensionslosen Kenngrößen wurde von Holland [31] im Jahre 1980 veröffentlicht. Zusätzlich hat Holland mit Hilfe der dimensionslosen Kenngrößen unterschiedliche Triebwerke miteinander verglichen. Die angesprochenen Kenngrößen wurden im Theoriekapitel 2.2.2 vorgestellt.

Die Entwicklung solcher Modelle für dimensionslose Kenngrößen ist immer noch Bestandteil heutiger Forschung. So veröffentlichte Torbidoni [71] 2004 eine Erweiterung, welche sich detailliert mit der Wärmeleitfähigkeit bei komplexen Geometrien und dem Vorhandensein von einer oder mehreren thermalen Schutzbeschichtungen (TBC) befasst.

Die Theorie hinter der Software im benutzten Arbeitsprozess wurde von Kingston [36] beschrieben und auf eine ähnliche Art und Weise von Moeckel [48] umgesetzt. Die verwendeten Kühlungselemente wie Rippen und Filme sind ebenfalls Gegenstand aktueller Forschung, sodass an dieser Stelle zunächst auf die Bücher von Han [21] und Dennis [12] verwiesen wird. Oftmals wurden die vorliegenden Untersuchungen jedoch bei simplen Geometrien und/oder vereinfachten Betriebsbedingungen durchgeführt, sodass die daraus abgeleiteten Korrelationen mit Vorsicht anzuwenden sind.

Gesamtheitliche Optimierungen von Kühlungskonfigurationen, wie sie in diesem Kapitel vorgestellt werden, sind in der Literatur kaum zu finden. Dies wird hauptsächlich auf zwei Gründe zurückgeführt. Zum einen sind die Triebwerkshersteller relativ restriktiv bezüglich solcher Veröffentlichungen, wenn es um Turbinenkomponenten geht und zum anderen ist sowohl die zugrunde liegende Automatisierung als auch der Aufbau von Arbeitsabläufen besonders bei Eigenentwicklungen aufwendig. Nichtsdestotrotz sollen an dieser Stelle zwei Arbeiten genannt werden, welche ähnliche Ansätze verfolgen. So optimierte Johnson [33] alle Filmkühlungsreihen auf der ersten Leitschaufel einer Hochdruckturbine. Dort wurden die Filmkühlbohrungen jedoch nur in der externen 3D CFD über Quellterme in den entsprechenden Gleichungen modelliert. Empfehlenswert ist die Arbeit von Lee [43], welche ebenfalls am Beispiel einer Leitschaufel parametrisiert die Filmkühlungsreihen variiert. Es kam ein CHT-Modell zum Einsatz und eine Zwei-Ziel-Optimierung mit den Zielgrößen des Mittelwertes und der Standardabweichung der Oberflächentemperatur wurde mit Hilfe von adaptiven Antwortflächen (generiert mit der Kriging-Methode) durchgeführt. Aus der resultierenden Pareto-Front wurden repräsentative Kandidaten gefertigt und experimentell gemessen (Rhee [56]).

## 4.2. Parametrisierung

Bevor auf die Parametrisierung eingegangen wird, soll die zu optimierende Kühlungskonfiguration genauer beschrieben werden. Dazu ist in der Abbildung 4.1 der schematische Mittelschnitt (50% span<sup>37</sup>) der Rotorschaufel dargestellt. Diese Geometrie wurde aus einem Triebwerkstyp für das kleine zivile Marktsegment (*small civil aero engine*) entnommen.

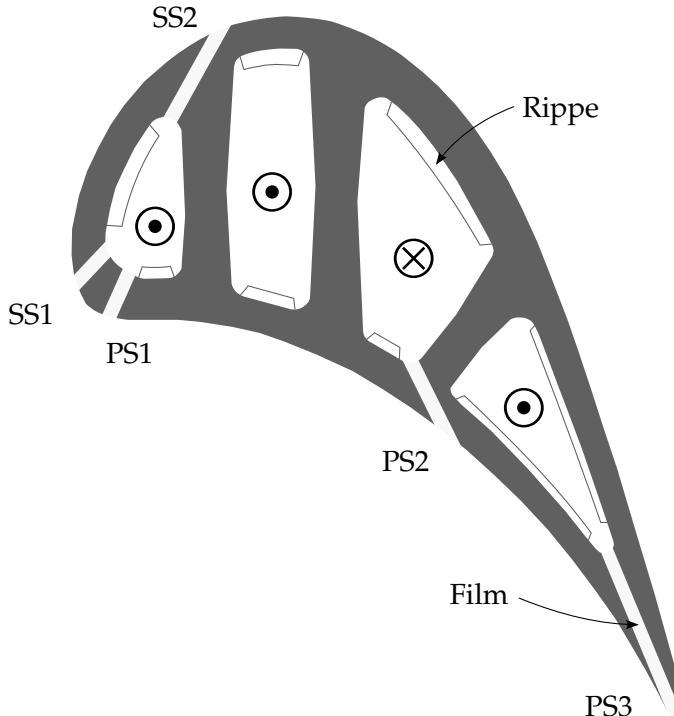


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Mittelschnittes der Turbinenschaufel samt Kühlkanälen, Filmen und Rippen

Die Kühlkanäle werden über den Schaufelfuß mit *Kühlluft*<sup>38</sup> aus dem Sekundärluftsystem gespeist und versorgen über ein Y-Stück sowohl den Vorderkantenkanal als auch den Multipass-Kanal. Die eingezeichnete Strömungsrichtung der Kühlluft innerhalb der Kanäle in Abbildung 4.1 lässt die Orientierung der Kanäle erkennen.

Typischerweise sind alle Kanäle mit Rippen versehen, wobei deren Ausrichtung durch den nächstgelegenen Hot-Spot bestimmt wird. Charakteristisch sind diese heißen Stellen an der Vorderkante und Hinterkante zu finden. So sind zum Beispiel die Rippen im Vorderkantenkanal als Standard 45°-Rippen (Han [21]) ausgelegt, wobei die Rippen so ausgerichtet sind, dass die Seite mit geringerem Radius Richtung Vorderkante zeigt, um dort den Wärmeübergang zu verbessern.

Die Vorderkante wird in dieser Konfiguration mit zwei Filmkühlungsreihen gekühlt. Dort befindet sich jeweils eine Reihe stromabwärts vom Stagnationspunkt (in 3D spricht man von der Stagnationslinie) auf der Druck- (PS1) beziehungsweise auf der Saugseite (SS1) der Schaufel. Bei größeren Triebwerken sind dies meist jeweils zwei Reihen, die versetzt zueinander angeordnet sind und als *showerhead*-Kühlung bezeichnet werden. Die Hinterkante wird mit einer Filmkühlungsreihe (PS3) gekühlt. Des Weiteren befinden sich jeweils auf der Druck- und Saugseite noch eine Filmkühlungsreihe. Die Reihe auf der Saugseite (SS2) entnimmt die Kühlluft aus dem Vorderkantenkanal, während die Reihe auf der Druckseite (PS2) die Luft aus der mittleren Passage des Multipass-Kanals entnimmt.

<sup>37</sup>span: Angabe der Schaufelhöhe in radialer Richtung

<sup>38</sup>Diese Luft ist zwar mehrere hundert Grad heiß, jedoch weitauß kälter als die erhitzte Luft aus der Brennkammer

Um die Parametrisierung der Filmkühlbohrungen/-reihen zu verstehen muss man sich den Fertigungsprozess vor Augen führen. Dort wird entweder mit einem Laser oder EDM-Tool (Electrical Discharge Machining → Funkenerosion) ein oder mehrere Bohrungen erstellt. Dazu wird einerseits der Winkel zur Schaufeloberfläche und andererseits die Koordinaten des Eintrittspunktes benötigt. Diese Koordinaten werden meist als lokale  $x, y, z$ -Koordinaten relativ zur Einspannung des Bauteils angegeben und können aus den Oberflächen-Koordinaten (oft als  $u$  und  $v$  bezeichnet) der dazugehörigen Fläche gewonnen werden.

Mit diesem Hintergrundwissen ist die in Abbildung 4.2 dargestellte Parametrisierung einer Filmreihe leichter nachzuvollziehen. Ausgangspunkt ist die bekannte Oberfläche der Rotorschaukel. Auf dieser Fläche werden mehrere parametrisierte Kontrollpunkte für einen Spline generiert, wobei die dimensionslosen  $u$  und  $v$  Koordinaten der Fläche genutzt werden. Typischerweise werden drei Kontrollpunkte verwendet. Mehr Kontrollpunkte sind zwar möglich, aber dies führt zu einer erhöhten Anzahl an Parametern. Nichtsdestotrotz ist dies an der Hinterkante auf Grund der komplexen, stark gekrümmten Oberfläche notwendig.

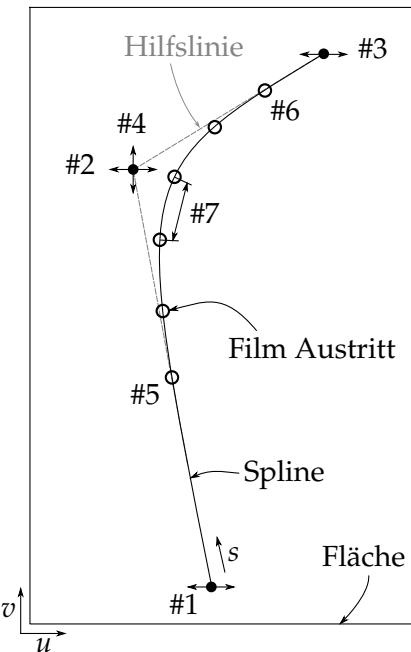


Tabelle 4.1: Benennung der Filmparameter

Benennung der Filmparameter

#	Parameter
1	Kontrollpunkt 1 $u$
2	Kontrollpunkt 2 $u$
3	Kontrollpunkt 3 $u$
4	Kontrollpunkt 2 $v$
5	Startwert $s$
6	Endwert $s$
7	Anzahl Löcher

Abbildung 4.2: Visualisierung der Film-Parametrisierung

Der erstellte Spline wird genutzt, um die Austrittspositionen der Kühlbohrungen (beziehungsweise die Eintrittspositionen des Herstellungswerkzeuges) zu definieren. Mit Hilfe der lokalen Laufvariable  $s$  auf dem Spline wird ein Anfangs- und Endpunkt als Parameter festgelegt. Um eine gleichmäßige Verteilung von der Filmkühlbohrungen zu erreichen, wird entsprechend der Anzahl an Bohrungen auf dem Spline eine Schrittweite in  $s$  ermittelt. Eine Namensauflistung der genutzten Parameter ist in Tabelle 4.1 bezüglich der Abbildung 4.2 gegeben.

An dieser Stelle müssen zwei Dinge angemerkt werden. Erstens ist dies zwar nicht die standardmäßige Vorgehensweise für eine Spline-Parametrisierung, jedoch hat sich dies als stabile Variante zur Erzeugung der Geometrie herausgestellt. Zweitens ist dieses dimensionslose Vorgehen äußerst hilfreich zum Übertragen von Informationen einer Komponente auf eine andere, beziehungsweise von einem Triebwerkstyp auf den anderen.

Der Winkel zur Oberfläche ist das letzte fehlende Element zur vollständigen Definition der Filmkühlung. Dabei sind zwei verschiedene Verfahrensweisen möglich. Einerseits können die Oberflächenwinkel direkt angegeben werden. Dies hat den Vorteil, dass die Strömung aus den Filmen immer auf der Schaufeloberfläche anliegt. Nachteilig ist hingegen, dass der gewünschte Kühlkanal eventuell nicht getroffen wird. Andererseits können auf den Flächen der Kühlkanäle

ebenfalls Splines zur Erzeugung von Punkten genutzt werden, wobei die Verbindung der inneren und äußeren Punkte den Winkel zur Oberfläche definiert. Hierbei drehen sich die Vor- und Nachteile zur ersten Vorgehensweise um.

Bei der Parametrisierung der Rippen wird ebenfalls eine Referenzfläche verwendet. Dort handelt es sich um die Druck- oder respektive Saugseite eines Kühlungskanals. Basierend auf dieser Fläche wird zunächst der Startpunkt der ersten Rippe festgelegt. Dies kann über die dimensionslose  $u$ -Koordinate der Fläche oder über die globale  $z$ -Koordinate erfolgen. Zusammen mit dem Abstand zwischen den einzelnen Rippen, der Anzahl der Rippen und dem Winkel der Rippen zur Strömungsrichtung wird die Verteilung auf der Fläche festgelegt.

Die Breite und Höhe der Rippen schließen die notwendige Definition einer Rippenreihe ab. Wobei es an dieser Stelle wiederum hilfreich sein kann den Fertigungsprozess zu beachten. Die Rippen werden als Abzugskörper mit Hilfe eines EDM-Tools aus dem Keramikkern der Filmkanäle entfernt.

In der Abbildung 4.3 ist die beschriebene Parametrisierung abgebildet und in der Tabelle 4.2 benannt. Die dreidimensionale Ausdehnung der Rippen ist nur an der obersten Rippe angedeutet. Zusätzliche Parameter, wie etwa der Abstand zu den Seitenkanten der zugrundeliegenden Fläche, wurden vernachlässigt.

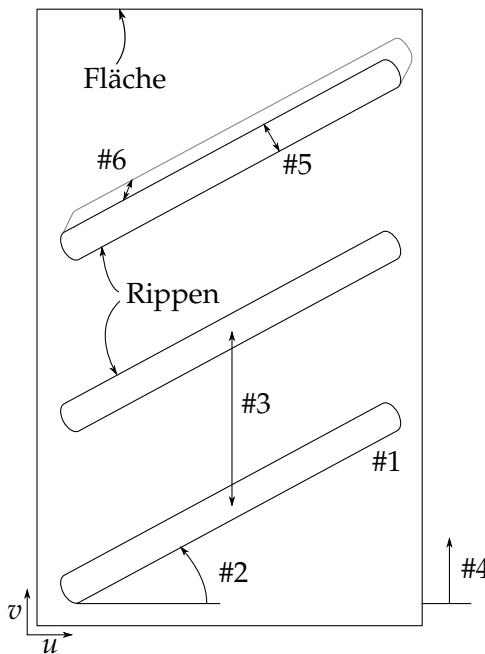


Tabelle 4.2: Benennung der Rippenparameter

#	Parameter
1	Anzahl Rippen
2	Winkel
3	Abstand
4	Startwert $z$
5	Breite
6	Höhe

Abbildung 4.3: Visualisierung der Rippen-Parametrisierung

### 4.3. Arbeitsablauf

Um automatisierte Ergebnisse aus den parametrisch aufgebauten Modellen zu gewinnen, wurde ein Arbeitsablauf vom Industriepartner aufgegriffen und für die Zwecke der Mehr-Ziel-Optimierung angepasst. Dieser Arbeitsablauf ist in der Abbildung 4.4 vereinfacht dargestellt. Dabei wurde die Software *Isight* verwendet, welche vom Industriepartner als Prozessintegrationssoftware genutzt wird. Eine ausführlichere Beschreibung zu *Isight* ist im Anhang A.2 zu finden.

In einem vorgesetzten Arbeitsablauf wurde die Außengeometrie der Rotorschaufel erstellt, welcher keine internen Geometriebestandteile wie Rippen oder Filme enthält. Für die Optimierung der Kühlungskonfiguration wurde diese äußere Form fixiert, da aerodynamische Eigenschaften in Bezug auf die Hauptströmung (z.B. Wirkungsgrad) nicht verändert werden sollten.

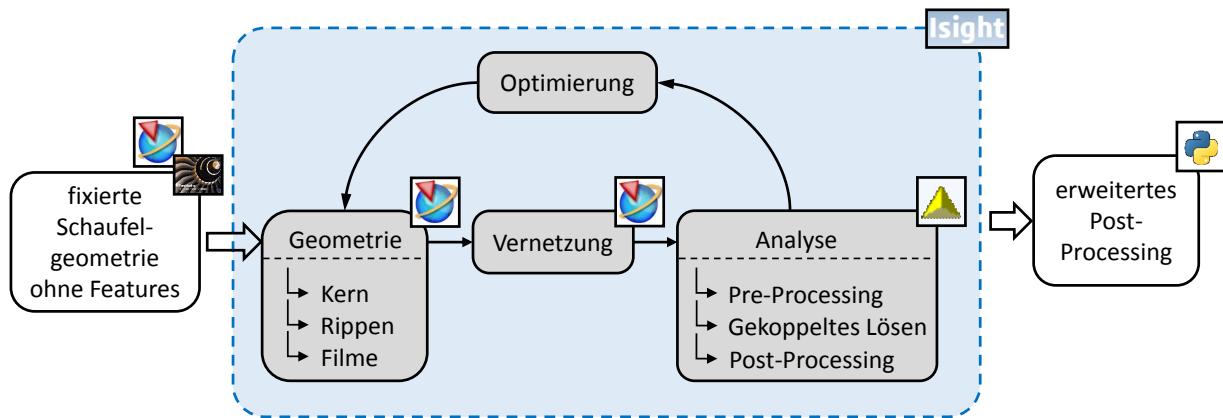


Abbildung 4.4: Strukturgramm für den verwendeten Arbeitsablauf der Kühlungsoptimierung mit Markierungen für die genutzten Programme

Des Weiteren sollte erwähnt werden, dass die Schaufelausßenflächen mit dem Rolls-Royce internen Auslegungstool *Parablading* (siehe Graesel [18]) erstellt wurden.

Innerhalb von *Isight* wurde zunächst eine Geometrie generiert, die den inneren Kern mit den glatten Kühlkanälen enthält. Danach wurden die Rippen und Filmkühlbohrungen erzeugt. Dies erfolgte mit Hilfe der angegebenen Parametrisierung im vorherigen Kapitel 4.2. Dazu wurden ausschließlich Operationen des CAD-Programmes NX von Siemens verwendet, welche in geskripteter Form durchgeführt wurden. Als nächster Schritt wurde die Geometrie vernetzt, was ebenfalls in NX realisiert wurde.

Die Analyse umfasste neben dem eigentlichen Lösen des gekoppelten Problems auch das Pre- und Post-Processing. Für alle drei Teilschritte wurde das Rolls-Royce interne Programm *SC03* beziehungsweise das Kühlungstool *JB56*, welches ein Plugin von *SC03* ist, verwendet. Das Kühlungstool *JB56* besteht im Wesentlichen aus einem 1D-Strömungslöser für die internen Kanäle mit ihren Bestandteilen (*INCA*<sup>39</sup>), einem 2D-Grenzschichtlöser für die externe Strömung (*BLAY*<sup>40</sup>) und einem FEM-basierten Löser für die Wärmeleitungsgleichung im Material, welches der Grund für die Implementierung in *SC03* ist. Diese Disziplinen tauschen automatisch Randbedingungen aus und laufen solange bis eine gesamtheitliche Konvergenz erreicht wird. Dieser beschriebene Aufbau ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Für eine detaillierte Beschreibung der verwendeten Software sei auf Kingston [36] verwiesen.

Als erweitertes Post-Processing wurden die Daten aus den Optimierungen mit *python* aufgegriffen, um Grafiken wie Abbildungen 4.6 bis 4.9 zu erstellen, da diese detaillierte Art der Darstellung in keinem verfügbaren Softwarepaket vorhanden war. Des Weiteren muss angemerkt werden, dass die Optimierungskomponente von *Isight* sowohl die verwendeten Optimierungsalgorithmen als auch Elemente zur Parameterstudie und DoE zur Verfügung stellte.

#### 4.4. Parameterreduzierung

Zur Reduzierung der Parameter wurde eine Mischung aus strategischem Vorgehen und vorhandener Erfahrung angewendet. Das strategische Vorgehen ist ausführlich im Anhang A.4 erläutert und zielt nicht nur auf Optimierungen mit direkter Auswertung ab, sondern auch auf Antwortflächen-basierte Optimierung. Erfahrungswerte von vorangegangenen Rotorschaufeln wurden ebenfalls genutzt, um Parameter auszuschließen, welche keinen signifikanten Einfluss auf die betrachteten Zielgrößen haben.

<sup>39</sup>INCA: internal cooling analysis → 1D Strömungslöser für die interne Kühlungsgeometrie mit allen Features (Rippen, Filme, Bends, Coretie, ...)

<sup>40</sup>BLAY: boundary layer analysis → Grenzschichtlöser, welcher auf gekrümmten 2D-Sektionen die vereinfachten Strömungsgleichungen löst

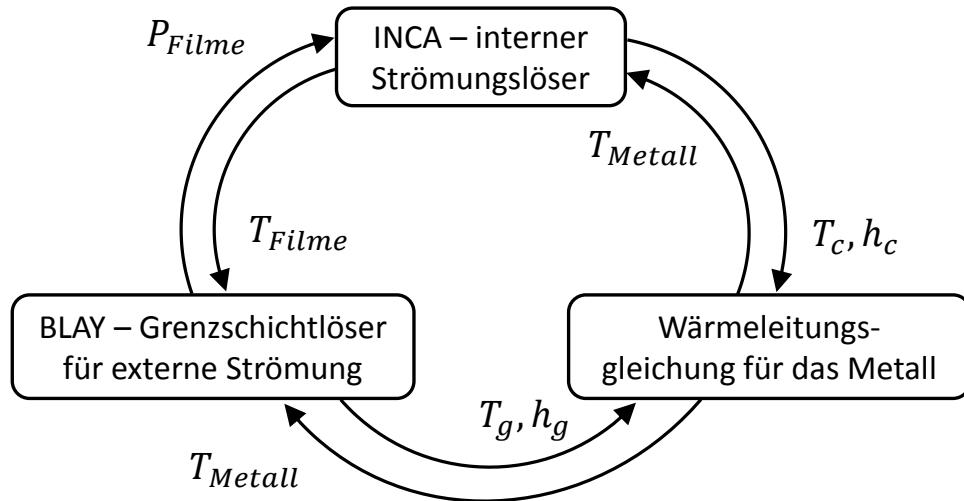


Abbildung 4.5: Aufbau der Auslegungssoftware JB56 mit Austausch der Randbedingungen der einzelnen Elemente

Die vorliegende Kühlungskonfiguration besitzt fünf Filmkühlungsreihen und acht Rippenreihen. Somit ergibt sich bei den vorgestellten Parametrisierungen eine Gesamtanzahl von 35 Parametern (jeweils sieben Parameter pro Reihe) für die Filmkühlung und 48 Parametern (jeweils sechs Parameter pro Reihe) für die Rippenkonfiguration. Diese Anzahl wäre selbst für eine Ein-Ziel-Optimierung bei relativ moderaten Rechenzeiten eine Herausforderung. Im vorliegenden Fall sind es jedoch rund 45 Minuten pro Rechnung in serieller Form und es handelt sich um eine Zwei-Ziel-Optimierung, welche deutlich mehr Durchläufe als eine Ein-Ziel-Optimierung benötigt. Aus diesem Grund muss die Anzahl der Parameter auf ein akzeptables Maß reduziert werden.

In den durchgeführten Voruntersuchungen stellte sich heraus, dass die Filmkühlbohrungen an dem Hinterkantenkanal kaum Variation ermöglichen. Dies ist mit Hilfe der geometrischen Lage zu erklären, da sowohl die Hinterkante der Rotorschaukel (externe Fläche) als auch der Hinterkantenkanal selber, kleine Flächen sind. Zusätzlich ist der Einfluss auf die mittelten Zielgrößen gering, da es stromab keine Fläche gibt, die beeinflusst werden kann. Dementsprechend wurde diese Filmkühlungsreihe aus der Optimierung ausgeschlossen. Die Positionen der Filme neben der Staupunktlinie sind aus physikalischen Gründen an ihre Position gebunden. Aus diesem Grund wird zwar ihre Form nicht mehr variiert, jedoch die Anzahl der Bohrungen und die Anfangs- und Endpunkte auf dem gegebenen Spline. Um Anzahl der Parameter möglichst klein zu halten, wird ebenfalls die Form der Filme auf Druck- und Saugseite (PS2 und SS2) fixiert. Zusätzlich wird für diese beiden Filmreihen eine Verschiebungsvariable eingeführt, welche Bewegung in die axiale Richtung ermöglicht (die  $u$  Variablen der drei Kontrollpunkte werden gleichzeitig verändert). Dadurch stellen sich für diese beiden Filmreihen je vier Freiheitsgrade ein: Anzahl der Bohrungen, Anfangs- und Endpunkt und axiale Verschiebung.

Insgesamt ergeben sich 14 Parameter für die Filmkühlungskonfiguration, wobei vier Parameter (die jeweilige Anzahl der Bohrungen) als diskrete Werte vorliegen und die restlichen zehn Parameter kontinuierliche Werte sind. Somit ergibt ein sogenanntes Mixed-Integer-Problem, welches erhöhte Anforderungen an den Optimierungsalgorithmus stellt.

Der Einfluss der Rippenparameter auf die zu betrachteten Zielgrößen stellte sich in den Voruntersuchungen als gering im Verhältnis zu den Filmparametern heraus. Lediglich Rippenparameter im Vorderkantenkanal waren signifikant. Dies ist bei der gegebenen Kühlungskonfiguration durchaus schlüssig, da der Vorderkantenkanal durch drei Filmkühlungsreihen angezapft wird und dort eine hohe thermale Last auftritt. Als wichtig in Bezug auf die Rippen stellte sich vor allem die Größe der berippten Oberfläche heraus, sodass für den Vorkantenkanal eine Parameter-

kombination gewählt wurde, welche sich maßgeblich auf die berippte Oberfläche auswirkt. Dies sind die Anzahl der Rippen und der Startwert als z-Koordinate. Die Werte für die Breite und Höhe wurden als *Low-Blockage-Rib* gewählt und fixiert (Han [21]). Beim Winkel und Abstand gibt es sowohl hausinterne Erfahrungswerte als auch in der Literatur verfügbare Daten, sodass diese beiden Parameter entsprechend festgehalten wurden.

Die restlichen Rippenreihen wurden fixiert, sodass insgesamt vier Parameter für die Rippen variiert wurden. Dabei sind zwei Parameter diskret und die anderen zwei Parameter kontinuierlich. Somit wurden aus 83 Parametern 18 Parameter für die folgenden Optimierungen ausgewählt, womit eine vertretbare Anzahl gegeben ist. Einen Überblick über diese finalen Parameter gibt die folgende Tabelle 4.3.

Tabelle 4.3: Überblick der finalen Parameter für die folgenden Optimierungen mit **hervorgehobenen** diskreten Parametern

Typ	Feature	Liste der Eingabeparameter
Film	PS1	Start-/Endwert s, <b>Anzahl Bohrungen</b>
	PS2	Start-/Endwert s, <b>Anzahl Bohrungen</b> , Verschiebung
	SS1	Start-/Endwert s, <b>Anzahl Bohrungen</b>
	SS2	Start-/Endwert s, <b>Anzahl Bohrungen</b> , Verschiebung
Rippe	Vorderkante PS	<b>Anzahl Rippen</b> , Startwert z
	Vorderkante SS	<b>Anzahl Rippen</b> , Startwert z

Abschließend muss erwähnt werden, dass der in Kapitel 4.3 beschriebene Arbeitsablauf in den diversen Voruntersuchungen verwendet wurde. Dort konnte durch Austauschen der Kopfkomponente sowohl der jeweilig valide Parameterbereich, als auch der Einfluss auf die zu untersuchenden Zielgrößen bestimmt werden. An dieser Stelle sei erneut auf den Anhang A.4 verwiesen, welcher verallgemeinert das strategische Vorgehen für das Vorbereiten von Optimierungen erläutert.

## 4.5. Optimierungsformulierung

Im Folgenden sollen zwei unterschiedliche Optimierungsformulierungen untersucht werden. In der ersten Formulierung werden dimensionslose Kenngrößen adressiert, welche vor allem im *Prelim*-Design eine übergeordnete Rolle spielen. Bei der zweiten Formulierung werden dimensionsbehaftete Größen betrachtet, welche gegen Ende des Auslegungsprozesses von Interesse sind.

Bei den dimensionslosen Kenngrößen der ersten Optimierungsformulierung handelt es sich um den dimensionslosen Massenstrom  $\tilde{m}^*$  und die Kühlungseffizienz (englisch: overall cooling effectiveness)  $\varepsilon_c^*$ . Diese Zielgrößen wurden innerhalb des Theoriekapitels 2.2.2 eingehend beschrieben. Zusätzlich zu den Zielgrößen gehen Zwangsbedingungen in die Formulierung des Optimierungsproblems ein. In diesem Fall wurden die mittleren Oberflächentemperaturen auf Vorderkante, Druck- und Saugseite aus einem Referenzdesign gewählt. Die Hinterkante wurde nicht ausgewählt, da diese maßgeblich von der Filmkühlungsreihe beeinflusst wird, welche nicht variiert wird. Als weitere Zwangsbedingung wurde der reale Massenstrom der Kühlluft aus dem Referenzdesign verwendet.

Zusammenfassend kann man das Optimierungsproblem in der folgenden mathematischen Form schreiben:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} \begin{bmatrix} \tilde{m}^* \\ -\varepsilon_c^* \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{14} \cup \mathbb{Z}^4 \mid \mathbf{h}(\mathbf{p}) \leq 0, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o\}. \quad (4.1)$$

Wobei der dimensionslose Massenstrom  $\tilde{m}^*$  minimiert und die Kühlungseffizienz  $\varepsilon_c^*$  maximiert werden soll. Der Parameterraum  $\mathbf{P}$  wird dabei aufgespannt durch die 14 kontinuierlichen und vier diskreten Parameter. Der aktuelle Parametersatz  $\mathbf{p}$  wird begrenzt durch die Ober- und Untergrenze  $\mathbf{p}^o$  beziehungsweise  $\mathbf{p}^u$ , während die Zwangsbedingungen  $\mathbf{h}(\mathbf{p})$  in Bezug auf ihren Referenzwert verrechnet werden.

Bei der zweiten oder auch alternativen Optimierungsformulierung werden die gemittelte Oberflächentemperatur  $\bar{T}_b$  und der benötigte Massenstrom für die Kühlung  $\dot{m}_c$  optimiert. Somit bleiben sowohl die Zwangsbedingungen als auch die Parameterräume gleich. Es kann wieder die mathematische Form angegeben werden mit:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} \begin{bmatrix} \bar{T}_b \\ \dot{m}_c \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{14} \cup \mathbb{Z}^4 \mid \mathbf{h}(\mathbf{p}) \leq 0, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o\}. \quad (4.2)$$

An dieser Stelle soll noch einmal der Unterschied zwischen diesen beiden Optimierungsformulierungen verdeutlicht werden. Dazu ist es notwendig sich die entsprechenden Gleichungen der dimensionslosen Kennzahlen vor Augen zu halten und auf die eigentlichen Freiheitsgrade innerhalb der vorliegenden Untersuchungen einzugehen.

Bei der Kühlungseffizienz  $\varepsilon_c^*$  (gegeben in Gleichung 2.25) handelt es sich zwar um eine reine Definition unterschiedlicher Temperaturen, aber bei genauerer Betrachtung gibt es nur einen Freiheitsgrad. Die gewichteten Eingangstemperaturen  $\bar{T}_{c,i}^*$  sind aus dem Sekundärflusystem vorgegeben und die externe Gasttemperatur  $\bar{T}_g$  wurde durch die Berechnung der externen Aerodynamik fixiert. Somit ist die gemittelte Temperatur auf der Schaufeloberfläche  $\bar{T}_b$  der einzige Freiheitsgrad und kann direkt mit der Kühlungseffizienz  $\varepsilon_c^*$  gleichgesetzt werden.

Im Gegensatz dazu steht der dimensionslose Massenstrom  $\tilde{m}^*$ . Dieser wird aus einer Enthalpie-Bilanz gewonnen und kann aus der rechten Seite der Gleichung 2.23 abgelesen werden. Hierbei ist ersichtlich, dass abermals die externe Gasttemperatur  $\bar{T}_g$  und die gewichtete Eingangstemperaturen  $\bar{T}_{c,i}^*$  fix sind und zwei Freiheitsgrade auftreten. Es handelt sich wiederum um die gemittelte Temperatur auf der Schaufeloberfläche  $\bar{T}_b$  und als zweiter Freiheitsgrad kommt die Massenstrom-gewichtete Filmaustrittstemperatur  $\bar{T}_{c,e}^*$  hinzu.

Somit unterscheiden sich die beiden Optimierungsformulierungen im benötigten Kühlungsmassenstrom  $\dot{m}_c$  gegen die Massenstrom-gewichtete Filmaustrittstemperatur  $\bar{T}_{c,e}^*$ . Dementsprechend kann die Wärme-Aufnahmefähigkeit der Kühlungskonfiguration in der zweiten Optimierungsformulierung besser wiedergegeben werden.

## 4.6. Ergebnisse und Diskussion

Innerhalb dieses Unterkapitels werden die Ergebnisse von drei unterschiedlichen Optimierungen vorgestellt und verglichen. In der ersten Optimierung wurde die erste Optimierungsformulierung mit den dimensionslosen Zielgrößen und dem Optimierungsalgorithmus AMGA, welcher in der Theorie 2.1.2 vorgestellt wurde, durchgeführt. Die zweite Optimierung wurde bei derselben Formulierung, jedoch mit dem NSGA-II Algorithmus realisiert und wird entsprechend mit der ersten Optimierung verglichen. Bei der dritten Optimierung wird die zweite Formulierung mit den direkten Zielgrößen und dem AMGA Algorithmus behandelt. Dadurch ist ein Vergleich der Optimierungsformulierung aus der ersten und dritten Optimierung möglich.

Um eine gewisse Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurden alle Optimierungen mit einer gleichen Anzahl an Auswertungen durchgeführt. Diese Anzahl beträgt für AMGA 1000 Auswertungen und für NSGA-II 996 Auswertungen aufgrund der Generationsgröße von 12 Individuen über insgesamt 83 Generationen. An dieser Stelle muss anmerkt werden, dass AMGA mit einer initialen DoE zunächst den Parameterraum erkundet und danach mit der eigentlichen Optimierungsphase beginnt. Hierbei wurde die initiale DoE mit einer Größe von 200 Auswertungen gewählt, was mit 20% ein üblicher Startwert ist. Untersuchungen für optimale Eigenstellungen der jeweiligen Optimierungsalgorithmen wurden nicht durchgeführt, da das vorliegende Beispiel zu rechenintensiv ist, um solche Studien effektiv durchzuführen.

Alle Optimierungen wurden auf einem High-End-Desktop-PC ausgeführt, welcher mit 16 Intel Xeon<sup>©</sup> E5-2650 @ 2.60 GHz Kernen (2 Threads pro Kern) und 128 GB Arbeitsspeicher ausgestattet ist. Die Anzahl an Durchläufen wurde mit dem Hintergedanken gewählt, dass eine Optimierung in dem akzeptablen Zeitrahmen von rund einer Woche fertiggestellt wird. Dies adressiert die täglichen Rahmenbedingungen innerhalb eines laufenden Projektes.

#### 4.6.1. Optimierung mit dem AMGA-Algorithmus

Die Ergebnisse der AMGA-Optimierung bei dimensionslosen Zielgrößen sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Da der dimensionslose Massenstrom  $\tilde{m}^*$  auf der x-Achse und die Kühlungseffizienz  $\epsilon_c^*$  auf der y-Achse aufgetragen ist, bewegt sich die Pareo-Front über die Generationen nach oben links, was durch die Pfeile *min* und *max* verdeutlicht werden soll. Zwar sind die Achsen nicht beschriftet, jedoch können relative Werte aufgrund des gegebenen Gitterabstandes abschätzt werden. So entspricht zum Beispiel der Abstand 0.002 bei der Kühlungseffizienz 0.2%. Bei dem dimensionslosen Massenstrom ist eine ähnliche Aussage schwierig, da sowohl die Anzahl der Schaufeln als auch der gesamte abgezapfte Massenstrom an der letzten Verdichterstufe mit in die Berechnung hineingeht.

Die Farbkodierung der Abbildung 4.6 lässt sich am Besten bei einem Optimierungsdurchlauf erklären. Zunächst wird die initiale DoE (●) durchgeführt, welche den Parameterraum abtastet. Darunter verletzten viele Individuen die gegebenen Zwangsbedingungen (○) oder liefern überhaupt kein Ergebnis zurück. Im letzteren Fall kann auch kein Punkt in der Abbildung 4.6 dargestellt und es muss die Tabelle 4.4 zu Rate gezogen werden. In der eigentlichen Optimierungsphase wird mit Hilfe des evolutionsbasierten Optimierungsalgorithmus AMGA die aktuelle Pareto-Front immer weiter in Richtung wahrer, jedoch unbekannter Pareto-Front verschoben. Da AMGA keine feste Generationsgröße besitzt, wurde eine Unterteilung zwischen den letzten 50 Individuen (●) und vorherigen Individuen (○) aus der Optimierungsphase vorgenommen, um einen Eindruck von der Bewegung der Pareto-Front zu vermitteln.

Das Referenzdesign (●) wurde schon innerhalb der initialen DoE verbessert und ist klar dominiert von der letztendlichen Pareto-Front (—), welche sich nach den 1000 Durchläufen eingestellt hat. Diese setzt sich hauptsächlich aus den letzten 100 Individuen zusammen.

Um sich einen besseren Überblick der jeweiligen Erfolgs- und Fehlerraten zu verschaffen, ist in der Tabelle 4.4 für alle drei Optimierungen eine Unterteilung nach Optimierungsphasen gegeben. Dort sind für die erste Optimierung einige Auffälligkeiten zu erkennen. Die Anzahl der Individuen, welche die Zwangsbedingungen verletzten, ist hoch. Dies ist damit zu begründen, dass ein großer Teil des Parameterraumes von den Zwangsbedingungen überzogen ist. Bei genauerer Untersuchung der Rohdaten stellte sich heraus, dass die Zwangsbedingungen bezüglich des realen Massenstromes und der mittleren Oberflächentemperatur auf der Saugseite herausfordernd gestellt wurden. Des Weiteren ist die Anzahl der fehlgeschlagenen Durchläufe in der Optimierungsphase hoch. Grund dafür waren IT-Probleme auf dem Rechner, die während der Optimierung aufgetreten sind. Die dritte Auffälligkeit ist die geringe Zahl der verletzten Zwangsbedingungen in der Optimierungsphase. Dies lässt vermuten, dass die Optimierung in ein Gebiet läuft, welches nicht von den Zwangsbedingungen überzogen ist.

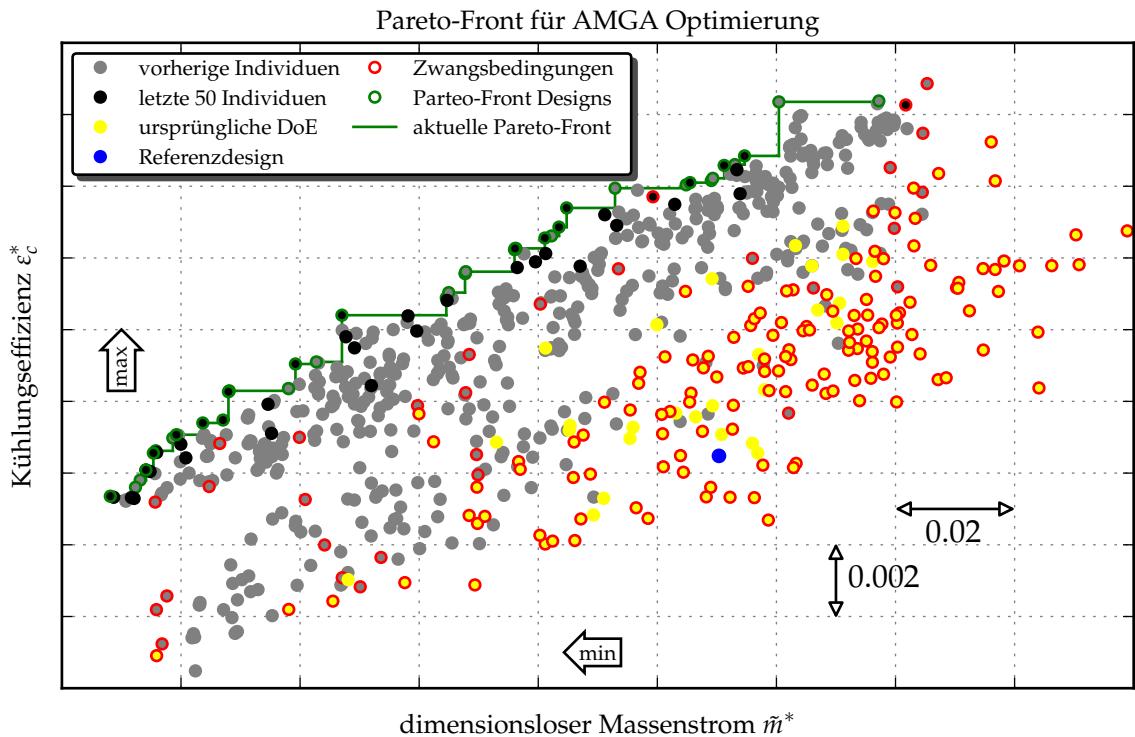


Abbildung 4.6: Ergebnisse der Optimierung und dem AMGA Algorithmus mit Pareto-Front (—), Referenzdesign (●), anfänglichen DoE mit 200 Individuen (○), letzten 100 Individuen (●) und 700 vorherigen Individuen (●) aus der Optimierungsphase. Verletzte Zwangsbedingungen (○) und Pareto-Front Individuen (○) hervorgehoben sind.

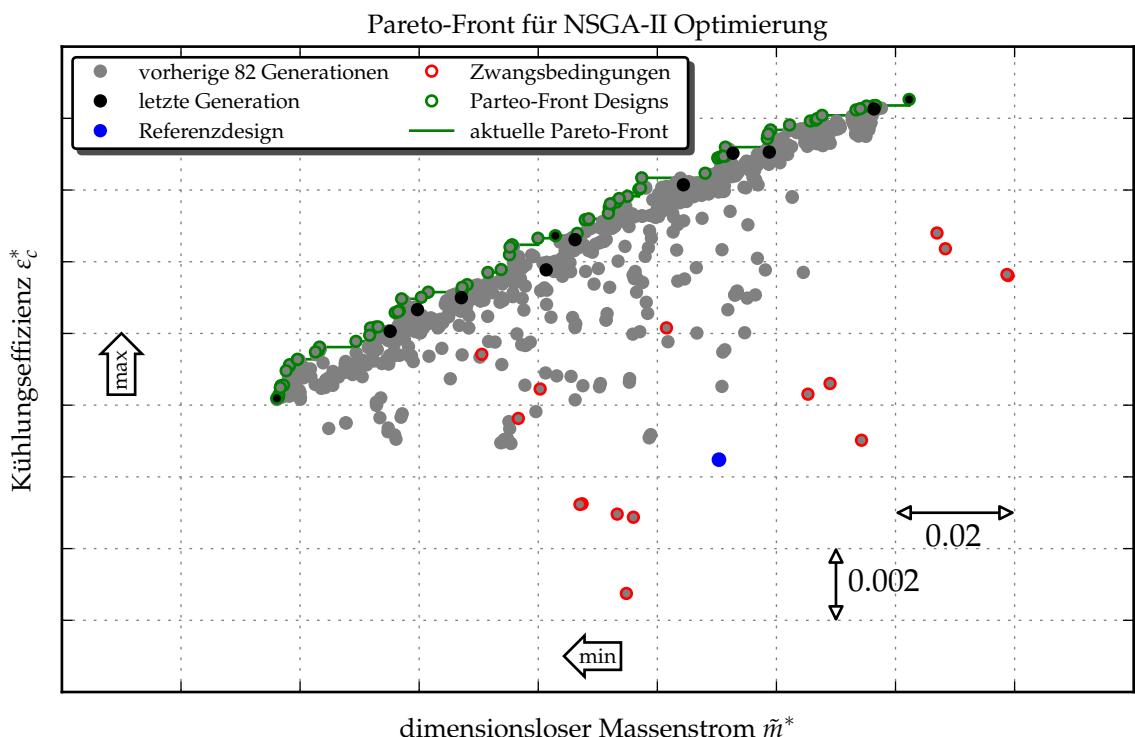


Abbildung 4.7: Ergebnisse der Optimierung mit dem NSGA-II Algorithmus mit Pareto-Front (—), Referenzdesign (●), letzten Generation (●) und vorherigen Generationen (●). Verletzte Zwangsbedingungen (○) und Pareto-Front Individuen (○) hervorgehoben sind.

Tabelle 4.4: Zusammenfassung der Fehler- und Erfolgsraten der drei Optimierungen bezüglich fehlgeschlagener Durchläufe, Durchläufe mit Verletzung der Zwangsbedingungen und erfolgreicher Durchläufe

Optimierung	fehlgeschlagen	Zwangsbedingungen	erfolgreich	Summe
AMGA	DoE	34 (17,0%)	138 (69,0%)	28 (14,0%) 200
	Opt.	255 (31,9%)	30 (3,8%)	515 (64,4%) 800
	Summe	289 (28,9%)	168 (16,8%)	543 (54,3%) 1000
NSGA-II	Opt.	92 (9,2%)	16 (1,6%)	888 (89,2%) 996
AMGA (alternativ)	DoE	43 (21,5%)	127 (63,5%)	30 (15,0%) 200
	Opt.	112 (14,0%)	106 (13,2%)	582 (72,8%) 800
	Summe	155 (15,5%)	233 (23,3%)	612 (61,2%) 1000

#### 4.6.2. Optimierung mit dem NSGA-II-Algorithmus und Vergleich mit dem AMGA-Algorithmus

Der NSGA-II-Algorithmus benutzt eine feste Populationsgröße, welche anhängig von der Anzahl der Eingabeparameter ist. Im vorliegenden Fall von 18 Eingabeparametern beträgt die Anzahl der Individuen in einer Generation 12 Stück. Entsprechend sind in der Abbildung 4.7 die Ergebnisse von 83 Generationen mit jeweils 12 Individuen dargestellt. Dies ergibt die zuvor schon erwähnte Anzahl von 996 Auswertungen. Die Skalierung und Achsen in Grafik 4.7 sind mit denen der Grafik 4.6 identisch, um eine gute Vergleichbarkeit zu gewährleisten.

Die Beschriftung wurde ebenfalls möglichst konsistent gehalten. Es findet eine Unterteilung in die letzte Generation (●) und vorherige Generationen (○) statt. Dies ist nun eindeutig aufgrund der fixen Generationsgröße möglich. Sowohl die Individuen, welche die Zwangsbedingungen verletzen (○), als auch Pareto-Front-Designs (○) sind mit einem farbigen Rand hervorgehoben und die Pareto-Front (—) ist verdeutlicht. Das Referenzdesign (●) ist ebenfalls eingezeichnet, während die anfängliche DoE (●) nicht existiert.

Da die erste Generation innerhalb des NSGA-II zufällig gewählt wird, ist der Startpunkt dieses Algorithmus mehr vom Zufall abhängig, als vergleichsweise der AMGA. Dort tastet die anfängliche DoE, je nach Größe, den Designraum ab. Auffällig bei der Optimierung mit dem NSGA-II-Algorithmus ist die geringe Anzahl an verletzten Zwangsbedingungen. Bei einem Blick auf die Tabelle 4.4 wird dieser optische Eindruck durch die Rate von 1,6% für NSGA-II gegenüber 16,8% beim AMGA noch deutlicher. Die Rate fehlgeschlagener Durchläufe unterscheidet sich ebenfalls massiv. Während NSGA-II bei 9,2% liegt, fallen beim AMGA 28,9% der Durchläufe aus. Dafür gibt es mehrere Gründe. Zum einen traten während der Optimierung mit dem AMGA-Algorithmus IT-Probleme auf, welche bei der Optimierung mit dem NSGA-II-Algorithmus nicht auftraten. Zum anderen wird vermutet, dass eine breitere Pareto-Front zu Beginn der Optimierung nicht nur die Konvergenzgeschwindigkeit stark beeinflusst, sondern auch die Fehlerrate erhöht.

Die Entwicklung der Pareto-Front fächert sich über die Anzahl der Generationen auf. Dies ist auf zwei Ursachen zurückzuführen. Zum einen ist die Erstellung der ersten Generation zufallsbasiert. Zum anderen existiert eine starke Gewichtung der Extrema in der Pareto-Front. Diese Individuen sind automatisch für die nächste Generation gesetzt und haben eine entsprechend höhere Chance eine Verbesserung der Extrema der Pareto-Front zu erreichen.

Ein Vergleich der Pareto-Fronten vom AMGA- (—) und NSGA-II-Algorithmus (—) ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Dort wurden unterschiedliche Stadien hervorgehoben. Die gepunktete Linie

(...) zeigt die Front nach 333 Durchläufen, die gestrichelte Linie (- -) nach 666 Durchläufen und die durchgezogene Linie (—) nach 1000 beziehungsweise 996 Durchläufen.

Erkennbar ist an dieser Stelle das unterschiedliche Konvergenzverhalten der beiden Algorithmen. Während sich NSGA-II relativ schnell gegen die wahre, jedoch nicht bekannte Pareto-Front bewegt, ist AMGA sehr breit aufgestellt und konvergiert vergleichsweise langsam. Dies ist ein typischer Konflikt bei Optimierungsproblemen. Oft tauscht man eine möglichst breite Pareto-Front gegen höhere Konvergenzgeschwindigkeit ein oder anders herum. Entsprechend ist es dem Anwender überlassen zu entscheiden, was relevanter ist. Im Fall einer breiten Pareto-Front wäre AMGA zu bevorzugen und im Fall einer Lösung möglichst nahe der *wahren* Pareto-Front NSGA-II. Oftmals ist man jedoch an den Extremen interessiert, sodass der AMGA-Algorithmus empfehlenswert ist.

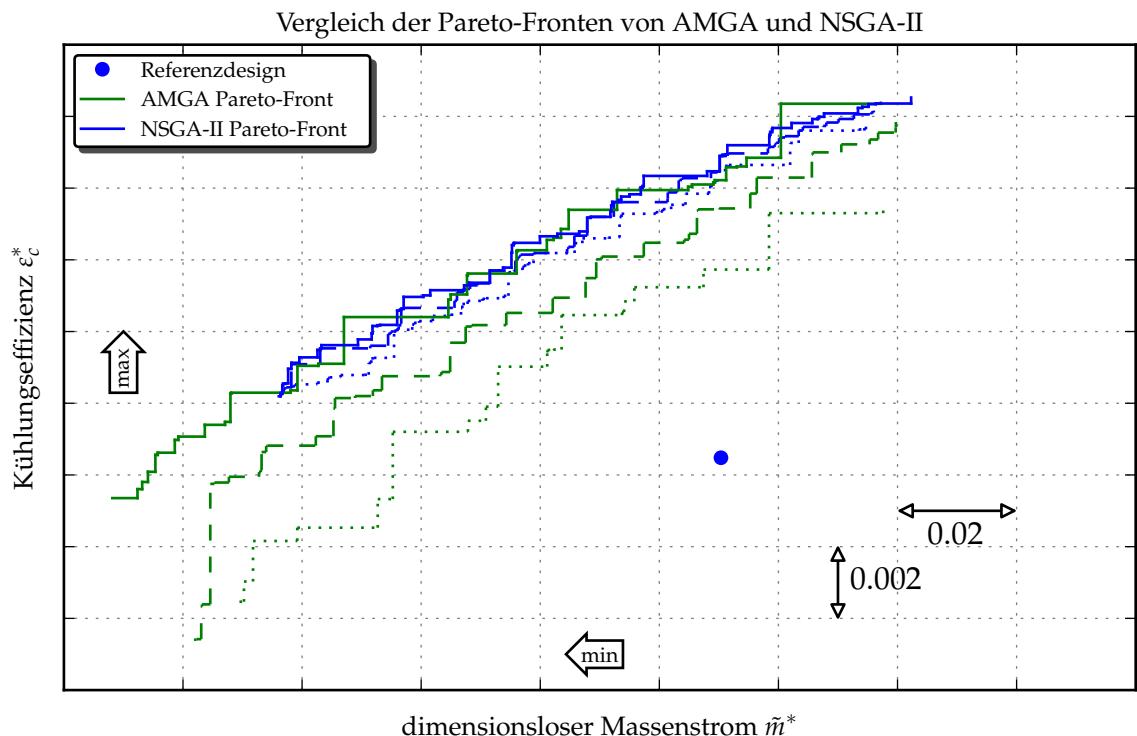


Abbildung 4.8: Vergleich der Pareto-Fronten von AMGA (—) und NSGA-II (—) nach 1/3 (...), 2/3 (- -) und 100% (—) der gesamten Durchläufe. Zusätzlich ist das Referenzdesign (•) hervorgehoben.

#### 4.6.3. Optimierung mit der alternativen Formulierung und AMGA-Algorithmus

In der alternativen Optimierungsformulierung werden keine dimensionslosen Kenngrößen verwendet, sondern direkte Größen. In diesem Fall handelt es sich, wie schon im Kapitel 4.5 beschrieben, um die gemittelte Temperatur  $\bar{T}_b$  auf den vier Schaufeloberflächen (Druck-/Saugseite und Vorder-/Hinterkante) und dem verbrauchten Massenstrom  $\dot{m}_c$  für die Kühlung der Turbinenschaufel. Die Ergebnisse dieser Optimierung sind in der Abbildung 4.9 dargestellt. Es wurde dieselbe Nomenklatur wie in Abbildung 4.6 verwendet und zusätzlich sind die Ergebnisse der AMGA-Optimierung mit dimensionslosen Zielgrößen (—) eingetragen.

An dieser Stelle ist zu beachten, dass die beiden Zielgrößen nun gleichzeitig minimiert werden, sodass sich die Pareto-Front (—) nach unten links bewegt. Auch die Schrittweite des Hinter-

grundgitters hat sich gemäß den neuen Zielgrößen geändert. Ähnlich zu der ersten Optimierung mit dem AMGA-Algorithmus werden in der anfänglichen DoE oftmals die Zwangsbedingungen verletzt. Dabei handelt es sich um mindestens eine der vier mittleren Oberflächentemperaturen oder den benötigten Massenstrom, welcher direkt auf der  $x$ -Achse (in Form der grau-gestrichelten Hintergrundlinie neben der Pareto-Front der Optimierung mit dimensionslosen Zielgrößen (—)) sichtbar ist.

Zum Vergleich der beiden Optimierungen können sowohl die Linien der Pareto-Front mit dimensionsloser (—) und dimensionsbehafteter (—) Formulierung als auch die Übersicht der Durchläufe aus Tabelle 4.4 zu Rate gezogen werden. Auffällig in Abbildung 4.9 ist, dass sich die Pareto-Fronten bei niedrigen Massenströmen beziehungsweise hohen Oberflächentemperaturen kaum unterscheiden, jedoch bei hohen Massenströmen beziehungsweise niedrigen Oberflächentemperaturen der Unterschied zunimmt. Grund dafür ist die unterschiedliche Definition des Optimierungsproblems, welches in Kapitel 4.5 erläutert wurde. Während in der dimensionsbehafteten Formulierung direkt der Massenstrom  $\dot{m}_c$  verwendet wird, ist in der dimensionslosen Formulierung der dimensionslose Massenstrom  $\tilde{m}^*$  auf die Freiheitsgrade der mittleren Oberflächentemperatur  $\bar{T}_b$  und der Massenstrom-gewichteten Filmaustrittstemperatur  $\bar{T}_{c,e}^*$  zurückzuführen.

Im Vergleich der Durchläufe gemäß Tabelle 4.4 fallen zunächst zwei Dinge auf. Die Anzahl der fehlgeschlagenen Durchläufe ist im Fall mit direkten Zielgrößen weitaus geringer, dafür ist die Zahl der Durchläufe mit verletzten Zwangsbedingungen größer. Hauptgrund dafür sind die IT-Probleme während der ersten Optimierung, wobei rund acht Generationen (122 Durchläufe) ausgefallen sind. Dies erklärt die hohe Anzahl verletzter Zwangsbedingungen während der Optimierungsphase in der dimensionsbehafteten Optimierung jedoch nur bedingt. An dieser Stelle wäre eine wiederholte Durchführung der Optimierung wünschenswert gewesen, um ein statistisches Verhalten zu untersuchen. Aufgrund der hohen Rechenzeiten ist dies jedoch nicht in einem akzeptablen Zeitrahmen möglich gewesen.

Auffällig ist ein Clustering<sup>41</sup> in Abbildung 4.9, welches in der analogen Abbildung 4.6 nicht zu erkennen ist. Es besteht an dieser Stelle die Vermutung, dass sich durch das *Mixed-Integer-Problem* mehrere "Inseln" ausgebildet haben, bei denen die Kombination aus diskreten Eingabeparameter fest ist und sich nur die kontinuierlichen Eingabeparameter ändern. Dementsprechend wäre die abgebildete Pareto-Front in Abbildung 4.9 nur eine Superposition aus mehreren Optimierungen mit fixierten Integer-Parametern.

Um diese These zu untersuchen, wurde in Abbildung 4.10 zusätzlich zu den beiden Zielgrößen auf der  $x$ - und  $y$ -Achse die Formatierung der Punkte geändert. Somit wurden zwei weitere Eingabeparameter durch Änderung der Farbe und Größe der Punkte dargestellt. Die Farbcodierung entspricht dem Eingabeparameter der Anzahl der Filmbohrungen in der SS2-Filmreihe und die Größe der Punkte entspricht der Anzahl der Filmbohrungen in der PS1-Filmreihe. Auf eine Unterscheidung zwischen DoE- und Optimierungsphase und Markierungen für Pareto-Designs und verletzte Zwangsbedingungen sowie das Referenzdesign wurde aus Übersichtlichkeit verzichtet.

Durch die Farbcodierung in Abbildung 4.10 ist die Vermutung des Clustering bei Individuen mit geringem Massenstrom gut zu erkennen. Bei zunehmendem Massenstrom dominiert eine hohe Anzahl von Bohrungen in SS2 nahe der Pareto-Front. In dieser Region steigt die Anzahl der Bohrungen in PS1, welche über die Größe der Punkte dargestellt ist. Zur Vollständigkeit werden die übrigen vier direkten Parameter auf analoge Weise im Anhang A.6 dargestellt, wobei die aussagekräftigste Grafik mit Abbildung 4.10 gezeigt wurde.

*Anmerkung: Abschließend muss noch erwähnt werden, dass es sich hier um Aussagen von nicht auskonvergierten Pareto-Fronten handelt. Dementsprechend sollten die Erkenntnisse kritisch hinterfragt werden.*

<sup>41</sup>Clustering: Damit ist eine Häufung von Individuen mit ähnlichen Eigenschaften gemeint.

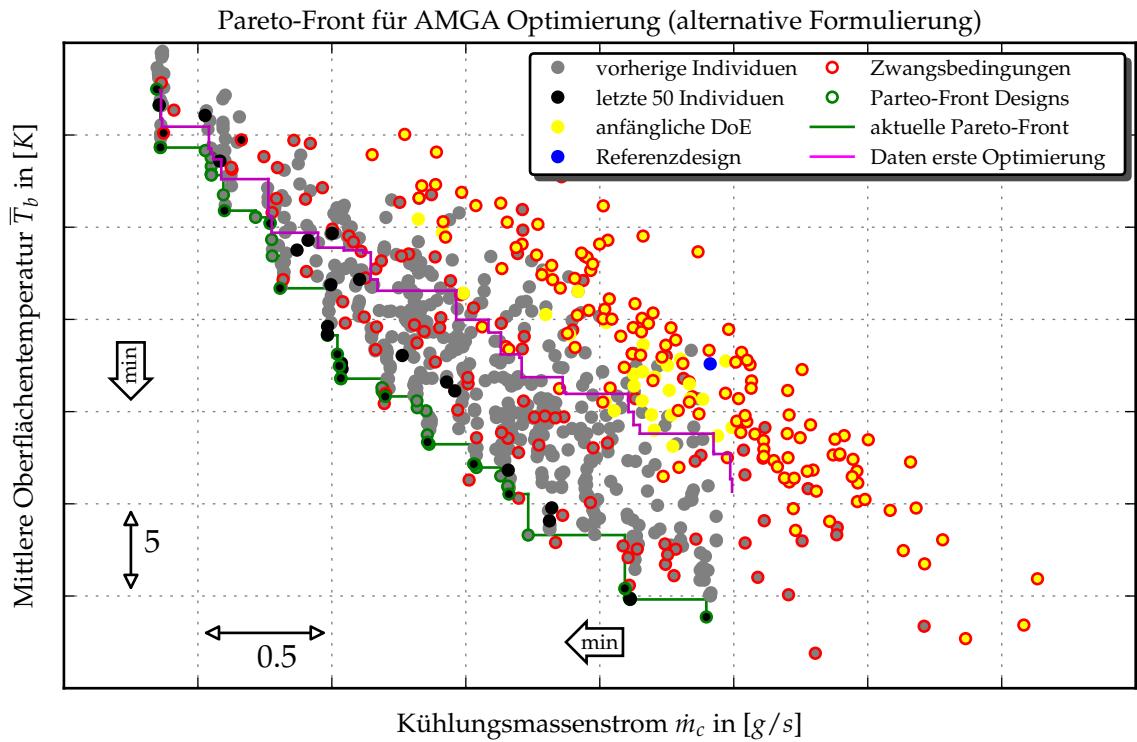


Abbildung 4.9: Ergebnisse der alternativen Optimierungsformulierung mit dem AMGA Algorithmus bei aufgezeigter Pareto-Front (—) und Vergleich mit der Pareto-Front der ursprünglichen Optimierungsformulierung (—). Wobei die sonstige Bezeichnungen aus Abbildung 4.6 beibehalten wurden.

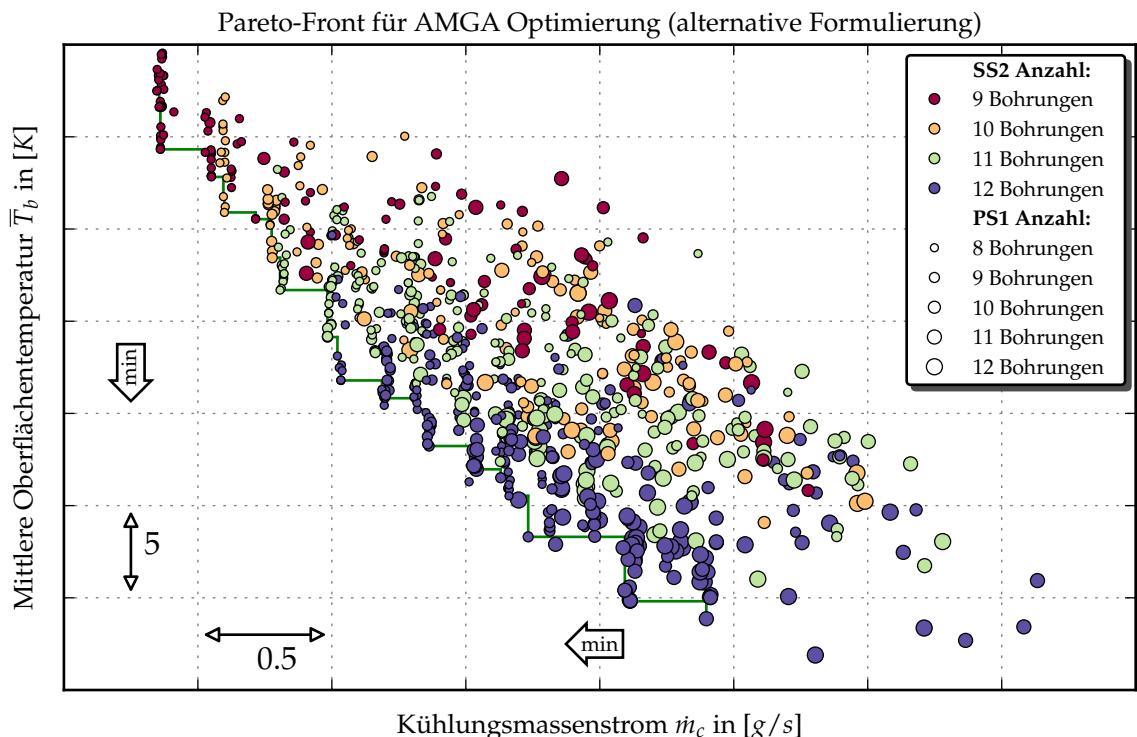


Abbildung 4.10: Clustering bei der alternativen Optimierungsformulierung mit den zwei Eingabeparametern: Anzahl der Bohrungen für Filmreihe SS2 und PS1 über die Farbe/Größe des jeweiligen Punktes dargestellt.

## 4.7. Zusammenfassung und Ausblick

Der Fokus des vorliegenden Kapitels richtet sich auf die Anwendbarkeit von unterschiedlichen Algorithmen und Formulierungen für Mehr-Ziel-Optimierungen anhand eines komplexen Realbeispiels. Bei der Anwendung handelt es sich um die Kühlungskonfiguration des ersten Rotors einer Hochdruckturbine für kleine zivile Triebwerke. Die externe und interne Oberflächengeometrie wird zwar konstant gehalten, jedoch die Elemente der Kühlungskonfiguration variiert. Konkret sind damit Parameter für Filmkühlbohrungen und Rippen gemeint, welche durch Verwendung von diskreten und kontinuierlichen Parametern ein *Mixed-Integer-Problem* darstellen.

Als Arbeitsablauf wurde ein vom Industriepartner entwickelter Prozess aufgegriffen und entsprechend der Anforderungen angepasst und erweitert. Die Parametrisierung für Filme und Rippen wurde dargestellt und eine Parameterreduzierung auf eine akzeptable Anzahl von Parametern durchgeführt. Bei den beiden Formulierungen des Optimierungsproblems wurden sowohl typische dimensionslose Kenngrößen als auch charakteristische direkte Zielgrößen verwendet. Die beiden Optimierungsalgorithmen AMGA und NSGA-II wurden im Theorie-Kapitels vorgestellt und innerhalb dieses Kapitels angewendet.

Die Ergebnisse der unterschiedlichen Algorithmen AMGA und NSGA-II wurden in den Unterkapiteln 4.6.1 und 4.6.2 mit Hilfe von Pareto-Fronten in den Abbildungen 4.6, 4.7 und 4.8 aufgezeigt und verglichen. Es stellte sich, der für Optimierungen typische Kompromiss ein, zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Breite der Pareto-Front. Der AMGA-Algorithmus liefert durch die anfängliche DoE eine vergleichsweise breite Front, die sich über die Generationen langsamer entwickelt als bei dem NSGA-II-Algorithmus. Letzterer strebt schnell gegen die Pareto-Front, hat aber Probleme die Extrema der Front zu finden. Ein Vorteil des AMGA-Algorithmus ist die Verwendung einer Datenbank für die besten Individuen, wodurch das zwischenzeitliche Ausfallen ganzer Generationen nicht zum Abbruch oder Neustart der Optimierung führt.

Bei der Formulierung des Optimierungsproblems als Zwei-Ziel-Optimierung wurden sowohl die typischen Kennzahlen des dimensionslosen Massenstromes  $\tilde{m}^*$  und der Kühlungseffizienz  $\varepsilon_c^*$  als auch die direkten Zielgrößen der mittleren Oberflächentemperatur  $\bar{T}_b$  und des Massenstromes  $\dot{m}_c$  verwendet. In beiden Fällen kam der AMGA-Algorithmus zum Einsatz und der Raum der Eingabeparameter und die Zwangsbedingungen wurden identisch gewählt. Im Vergleich stellten sich aufgrund der Definition des Massenstromes Unterschiede heraus.

Auffällig war ein Clustering in der Pareto-Front der Optimierung mit den direkten Zielgrößen. Dies kann durch die Natur des *Mixed-Integer-Problem*s erklärt werden, sodass die Pareto-Front auch als Superposition von Pareto-Fronten aus mehreren Optimierungen mit fixierten diskreten Eingabeparametern interpretiert werden kann. In Abbildung 4.10 konnten zwei maßgebliche Eingabeparameter den beiden Zielgrößen gegenübergestellt werden, sodass das Clustering hervorgehoben wurde. Nichtsdestotrotz ist die Auswertung mehrdimensionaler Datensätze problematisch, da es sowohl an entsprechender Darstellung mangelt als auch das menschliche Vorstellungsvermögen an seine Grenzen stößt.

Zum Ausblick muss gesagt werden, dass als Erstes eine Kopplung zu den benachbarten Disziplinen wünschenswert wäre. Bei der Durchführung einer Spannungs- und Lebensdauerberechnung würde die Lebensdaueraussage die Oberflächentemperatur ersetzen. Eine Einbeziehung der aerodynamischen Auslegung würde den aerodynamischen Wirkungsgrad liefern und eine Variation der externen Schaufeloberfläche ermöglichen. Somit würden sich drei Zielgrößen für die Rotorschaukel aus multidisziplinärer Sicht ergeben: Der verbrauchte Kühlmassenstrom, die Lebensdauer und der aerodynamische Wirkungsgrad der Schaufel.

Des Weiteren würde die Verwendung höherwertiger Methoden, wie zum Beispiel CFD- oder CHT-Modelle, die Güte maßgeblich verbessern. Jedoch auch die Auslegungszeiten verlangsamen und die Rechenanforderungen vergrößern. Zur Beschleunigung der Rechenzeiten könnten Antwortflächen eingesetzt werden, auf denen vergleichsweise schnell optimiert werden kann.





## 5. Multidisziplinäre Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung

Innerhalb dieses Kapitels stehen die Methoden im Fokus, welche für die Ausführung der gleichzeitigen Mehr-Ziel- und Robustheitsoptimierung erforderlich sind. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes, wobei sowohl die Anzahl der Rechnungen als auch die Durchlaufzeit einer einzelnen Rechnung gemeint sind, werden Antwortflächen benötigt. Somit sind die Methoden zur Erzeugung von Antwortflächen und dazugehörigen Stützstellen und deren Bewertung beziehungsweise Validierung von besonderem Interesse. Bei den Optimierungen wird aufbauend zunächst eine standardmäßige Ein-Ziel-Optimierung der Lebensdauer der Turbinenschaufel durchgeführt und anschließend die Robustheit mit einer Zwei-Ziel-Optimierung untersucht. Als Letztes werden Lebensdauer, Masse und aerodynamische Effektivität in einer Robustheit- und Mehr-Ziel-Optimierung (jeweils Mittelwert und Standardabweichung) verbessert. Anzumerken ist, dass ein Großteil der hier aufgeführten Inhalte/Ergebnisse bereits von dem Autor in Wagner [72, 74] publiziert wurde, sodass auf wiederholten Quellenverweis verzichtet wird.

### 5.1. Einleitung und Stand der Technik

Ziel der Mehr-Ziel-Optimierung ist es einen Trade-Off zwischen den oft gegenläufigen Zielen zu ermöglichen. In der standardmäßigen Vorgehensweise wird meist von einer Disziplin die jeweilige Zielgröße optimiert und das Ergebnis an die anderen Disziplinen weitergegeben. Dies ist bei der gleichzeitigen Mehr-Ziel-Optimierung nicht mehr der Fall. Dort werden simultan alle adressierten Disziplinen gerechnet beziehungsweise alle interessanten Zielgrößen bestimmt. Da sich die Zielgrößen meist gegenläufig verhalten, dass heißt eine Verbesserung in der einen Zielgröße nur durch Verschlechterung einer anderen Zielgröße möglich ist, entsteht automatisch ein Trade-Off. Diese Vorgehensweise ist meist rechenaufwendiger als die vergleichbare Vorgehensweise per Hand, da mehrere Iterationen durchlaufen werden.

Gefertigte Bauteile weisen immer eine Abweichung zum beabsichtigten Referenzmodell auf, sodass sich auch das Verhalten des Bauteils negativ ändern kann. Durch die Betrachtung der Robustheit wird versucht dieses Verhalten zu erfassen und allgemeine Aussagen daraus zu schließen. Notwendig sind dazu das Wissen über die auftretenden Abweichungen, welche sich auf den durchgeführten Herstellungsprozess beziehungsweise die verwendeten Hilfsteile zurückführen lassen. Die Datenerfassung gefertigter Bauteile stellt oftmals ein Problem dar, da meist nur einfache Toleranzbänder zur Qualitätsprüfung verwendet werden und die Rückführung eines gefertigten Bauteiles in den Auslegungsprozess eine erweiterte Datenbasis benötigt.

Die Zusammenführung dieser beiden Ansätze endet in einer gleichzeitigen Optimierung mehrerer Ziele unter Beachtung der Robustheit. Ziel dieses Kapitels ist es systematisch die dafür notwendigen Methoden aufzuarbeiten und jeweilige Gütekriterien an die Hand zu geben. Wegen der hohen Anzahl an Durchläufen ist es selbst bei sehr geringen Rechenzeiten (unter einer Minute) notwendig, Antwortflächen zu verwenden.

Beim Stand der Technik muss in diesem Kapitel ein breites Themengebiet abgedeckt werden. Zum einen beinhaltet ein umfangreicher Block die Methoden zur Erstellung von Stützstellen und Antwortflächen, die Optimierungsmethoden, sowie Testfunktionen mit denen diese Methoden getestet und validiert werden. Zum anderen geht es um die allgemeine Anwendung dieser Methoden beziehungsweise die Anwendung auf artverwandte Probleme.

Bei den Methoden zur Erstellung der Stützstellen steht vor allem eine gleichmäßige Abtastung des Parameterraumes im Vordergrund. Eine alternative Zielstellung wäre die Untersuchung des Systemverhaltens in der Nähe eines ausgewählten Punktes. Je nach Verwendungszweck drängen sich andere Methoden auf, wobei in Bezug auf die Verwendung für Antwortflächen der erste Fall im Vordergrund steht. Schon in Kapitel 2.1.4 wurden die elementaren Methoden vorgestellt. Dies sind der vollfaktorielle Versuchsplan (Siebertz [63]), welcher aufgrund der hohen Anzahl

an Auswertungen unpraktikabel ist, rein zufallsbasierte Methoden wie Monte-Carlo-Simulation (MCS) und Verfahren basierend auf unterschiedlichen Strategien für Latin-Hypercube-Sampling (LHS). Bei Letzterem gibt es relativ simple Methoden, welche die Stützstellen zufällig gemäß eines äquidistanten Gitters auf dem  $n$ -dimensionalen Parameterraum verteilen, aber ebenfalls Methoden, welche aufgrund von Abstandsmaßen die Stützstellen auf Gleichverteilung optimieren. Dazu zählen unter anderem die improved Latin-Hypercube-Sampling (iLHS) Methode (Beachkofski [7]) und die optimal Latin-Hypercube-Sampling (oLHS) Methode (Johnson [34], Morris [49] und Jin [32]). Eine Untersuchung bezüglich der gleichmäßigen Abtastung des Parameterraumes wird im Unterkapitel 5.2.2 vorgenommen, wobei geeignete Vergleichskriterien zu Rate gezogen wurden.

Die Methoden zur Erstellung der Antwortflächen sollen eine möglichst hochwertige Qualität der Approximation liefern. Dazu werden in der Praxis die drei Methoden der linearen Regression mit unterschiedlichen Polynomgraden, die radialen Basisfunktionen und die Kriging-Methode verwendet (siehe Kapitel 2.1.5). Einer der markantesten Unterschiede, ist die Tatsache, dass die lineare Regression (Hedderich [28]) an den Stützstellen (aufgrund der internen Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate) nicht exakt ist, während die radialen Basisfunktionen (Larsson [40]) und Kriging (Lophaven [45]) an den verwendeten Stützstellen exakt ist und den Charakter einer lokalen Interpolationsmethode besitzt. Eine gute Zusammenfassung ist in Flassig [15] gegeben. Insbesondere die Kriging-Methode beinhaltet eine Vielzahl unterschiedlicher Abwandlungen, wobei in dieser Arbeit mit Kriging immer das sogenannte *Ordinary Kriging* gemeint ist, welches auf den Namensgeber Krige [39] zurückzuführen ist. Ein Vergleich dieser Antwortflächen-Methoden mit einer ausgewählten Testfunktion (Branin-Testfunktion) und zwei unterschiedlichen Stützstellen-Methoden wird in Unterkapitel 5.2.3 vorgestellt.

Die Bandbreite der typischen Testfunktionen für Optimierungsalgorithmen umfasst alle auftretenden Eigenschaften: höher-dimensionaler Raum von Eingabeparametern, mehrere globale Extrema, zerfallene Pareto-Fronten, Auftreten von Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen, Mischung von natürlichen und reellen Zahlen als Eingabeparameter (*mixed-integer-problem*) und vieles mehr. Eine Übersicht kann aus mehreren Quellen [3, 27, 76] entnommen werden. Die Auswahl der betrachteten Testfunktion(en) sollte der Charakteristik des Real-Problems entsprechen, wobei ein gewisses Grundverständnis des Problems vorausgesetzt wird. Im vorliegenden Fall der Optimierung von Triebwerkskomponenten wird das Vorhandensein mehrerer lokaler Extrema vermutet, sodass die Branin-Testfunktion oftmals verwendet wird (z.B. bei den Autoren Flassig [15], Arsenyev [2] und Wagner [74]).

Bei den Optimierungsmethoden für die Ein-Ziel-Optimierung liefert der CMA-ES Algorithmus (Hansen [23–26]) eine hervorragende Performance (siehe Hansen [22]), welcher zwar in Kapitel 3 eingesetzt wurde, hier aber nicht angewendet wird, da es sich bei der finalen Untersuchung um eine Mehr-Ziel-Optimierung handelt. Dort liefern sowohl der AMGA Algorithmus (Tiwari [70]) als auch der NSGA-II Algorithmus (Deb [11]) gute Ergebnisse. Diese beiden Mehr-Ziel-Algorithmen wurden in Kapitel 4 ebenfalls verwendet, wobei sich die Konvergenzgeschwindigkeit gegen die Pareto-Front (Vorteil von NSGA-II) gegenläufig zur Breite der Pareto-Front (Vorteil von AMGA) verhält. Aus praktischen Gründen (Implementierung in die Matlab-Toolbox) wird der NSGA-II Algorithmus innerhalb dieses Kapitels verwendet. Durch das Vorhandensein einer Antwortfläche, sollte dies jedoch keine signifikanten Auswirkungen haben, da die Anzahl der Auswertungen um Größenordnungen höher ist.

Bevor zu den speziellen Anwendungsfällen übergegangen wird, sollen an dieser Stelle noch einmal zwei zusammenfassende Arbeiten erwähnt werden. Zum einen befasst sich Forrester [16] mit der Erstellung der Stützstellen, der Erstellung und Validierung von Antwortflächen (mit unterschiedlichen Kriging-Methoden), dem systematischen Auffüllen des Parameterraumes, der Behandlung von Zwangsbedingungen und der Mehr-Ziel-Optimierung. Des Weiteren werden Empfehlungen gegeben, wann welche Antwortfläche zu verwenden ist. Zum anderen behandelt Quei-

po [55] die Erstellung von Stützstellen und Antwortflächen, Validierungsstrategien für Antwortflächen, Sensitivitätsanalysen, unterschiedliche Strategien zur Optimierung auf Antwortflächen und wendet dies auf das Beispiel einer Düse für eine Flüssigkeitsrakete an.

Im Sinne der multidisziplinären Auslegung für Triebwerksbauteile befasste sich Arsenyev [2] mit einem Stator der Niederdruckturbine. Dort wurden die Disziplinen Aerodynamik, instationäre Thermalanalyse und Strukturanalyse abgedeckt und in der Optimierungsformulierung der Entropieanstieg minimiert, bei gleichzeitiger Einhaltung mehrerer Nebenbedingungen. Dies beinhaltete den Massenstrom, den gemittelten statischen Druck, die Maximalspannungen und eine Schadensformulierung für die Leitschaufel. Die variierten 41 Eingabeparameter adressieren ausschließlich die externe Form der Schaufeloberfläche und es wird eine adaptive Antwortfläche mit der Kriging-Methode verwendet.

In der Antwortflächen-basierten Optimierung von Baert [5] wird hauptsächlich der Einfluss von unterschiedlichen Typen von Eingabeparametern untersucht. Dabei wird die Strömung in einem ByPass-Kanal (nicht im Kerntriebwerk) durch Variation eines OGV<sup>42</sup> beziehungsweise deren Geometrieparametern auf die Reduzierung von Druckverlust optimiert. Kernstück ist die Software *Minamo* von der Firma Cenareo, welche sowohl die initialen Stützstellen als auch die adaptive Antwortfläche generiert. Es werden wiederum Kriterien zum Auffüllen des Parameterraumes verwendet, welche entweder die Antwortfläche in der Nähe der Optima verbessern oder eine bessere Abtastung des Parameterraumes ermöglichen sollen. Dieselbe Software wurde zuvor in der Arbeit von Beauthier [8] am Beispiel eines kryogenen Triebstoffbehälters für ein Hyperschallpassagierflugzeuges benutzt, wobei die *mixed-integer* Natur des Parameterraumes und deren Einfluss auf die Antwortfläche im Vordergrund stand.

Analog zu Kapitel 4 kann an dieser Stelle erneut auf die Arbeit von Lee [43] verwiesen werden. Dort wird mit Hilfe adaptiver Antwortflächenverfahren (mit Hilfe der Kriging-Methode) eine Robustheitsoptimierung von Filmkühlkonfigurationen einer Hochdruckleitschaufel durchgeführt. Optimierungsziele waren die gemittelte Oberflächentemperatur und deren Schwankungsgröße, wobei CHT-Rechnungen eingesetzt wurden. Aus der resultierenden Pareto-Front sind einzelne Konfigurationen ausgewählt und experimentell überprüft worden (Lee [42] und Rhee [56]).

## 5.2. Validierung der Methoden

Unter Validierung soll hier die Bewertung der Qualität der jeweiligen Methoden verstanden werden, sodass für die darauffolgenden Untersuchungen sichergestellt werden kann, dass physikalisch korrekte Ergebnisse erzeugt werden können.

### 5.2.1. Matlab-Toolbox für Validierung und Optimierung

Um die größtmögliche Flexibilität zu gewährleisten und ein tiefes Verständnis der Funktionsweisen zu erhalten, wurde dazu übergegangen ein Großteil der zu untersuchenden Methoden selbst zu implementieren. Dazu wurde mit Hilfe von Matlab eine eigene Toolbox erstellt<sup>43</sup>, welche die Methoden der einzelnen Schritte beinhaltet. Darunter fallen die Erstellung der Stützstellen, die Bestimmung der "realen" Werte (automatische Einbindung üblicher Testfunktionen für Optimierungen oder manuelle Verbindung zum finalen Arbeitsprozess → siehe Abbildung 5.6), die Erstellung der Antwortflächen und die Optimierung selbst.

Zur Verdeutlichung des Aufbau wurde in Abbildung 5.1 die Struktur der Matlab-Toolbox dargestellt. Der Kernprozess ist mittig in horizontaler Form aufgezeigt und die weißen Boxen **A**, **B** und **C** stellen die Möglichkeiten zur Validierung der einzelnen Elemente dar. In der blauen Box

<sup>42</sup>OGV: Outlet Guide Vane

<sup>43</sup>Diese Toolbox hat nichts mit den vorgefertigten Produkten von Matlab zu tun, sondern wurde vom Autor eigenständig erstellt. Elemente aus anderen Quellen sind entsprechend gekennzeichnet.

können durch die Wahl der Optimierungsformulierung relativ schnell unterschiedlichste Optimierungen durchgeführt werden, dazu mehr in den Unterkapiteln 5.5.2, 5.5.3 und 5.5.4.

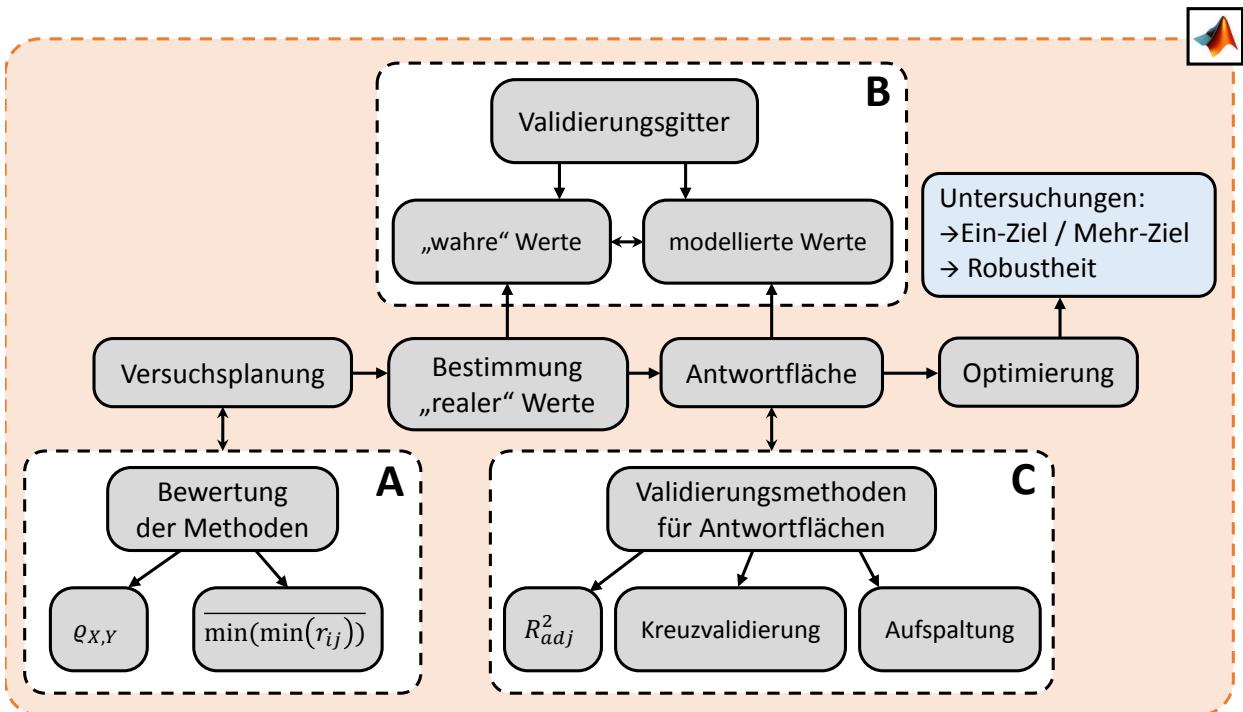


Abbildung 5.1: Überblick über die erstellte Matlab-Toolbox mit Fokus auf die unterschiedlichen Bewertungsmethoden/-kriterien in den weißen Boxen.

Innerhalb der Versuchsplanung, meist als DoE abgekürzt, wurden die gängigen Methoden zur Erstellung von Stützstellen implementiert. Dazu gehören primär die zufallsbasierte Monte-Carlo-Simulation (MCS), verschiedene Versionen vom Latin-Hypercube-Sampling (LHS) und darauf aufbauende Methoden, welche intern eine Optimierung der Stützstellenverteilung vornehmen. Dort sind vor allem improved-Latin-Hypercube-Sampling (iLHS) und optimal-Latin-Hypercube-Sampling (oLHS) zu nennen. Wobei im ersten Fall eine externe Matlab-Routine verwendet wurde und im zweiten Fall entsprechende Daten aus *Isight* extrahiert wurden.

Die „realen“ Werte sind meist unbekannt und müssen aufwendig numerisch oder experimentell bestimmt werden. Aus diesem Grund können Testfunktionen für Optimierungsprobleme zu Rate gezogen werden. Es wurden in der Matlab-Toolbox mehrere solcher Testfunktionen implementiert. Eine Übersicht diverser Testfunktionen ist in Back [3] und Haupt [27] zu finden (eine gute grafische Übersicht gibt Wikipedia - *test functions for optimization* [76]). Die Bandbreite der Testfunktionen umfasst Ein-Ziel- und Mehr-Ziel-Probleme, Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen, hochdimensionale Parameterräume, globale und lokale Optima und geteilte Pareto-Fronten.

Bei den Methoden für die Generierung der Antwortflächen wurden ebenfalls mehrere Alternativen implementiert. Hierbei handelt es sich konkret um die Lineare Regression (LR) mit variablen Polynomgraden und Mischtermen, radiale Basisfunktionen (RBF), eine Kombination aus den beiden zuvor genannten Methoden (LR+RBF) und die Kriging-Methode (KRIG). Die Kriging-Methode wurde als Matlab-Routine aus Lophaven [45] entnommen. Eine detaillierte Übersicht, wie das zugrundeliegende Gleichungssystem der einzelnen Methoden aufgebaut wird, ist im Anhang von Wagner [72] zu finden.

Da der Fokus auf der Validierung der vorhergehenden Schritte liegt, wurden in der Optimierung nur jeweils ein Ein-Ziel- und Mehr-Ziel-Algorithmus implementiert. Bei dem Algorithmus für die Ein-Ziel-Optimierung handelt es sich um den weit verbreiteten Simplex-Algorithmus nach

Nelder und Mead [50] und für die Mehr-Ziel-Optimierung um den NSGA-II Algorithmus, welcher durch *MathWorks* zur Verfügung gestellt wurde.

### 5.2.2. Vergleich der Methoden zur Stützstellengenerierung

Die Stützstellen sollten möglichst gleichmäßig den Raum der Eingabeparameter abtasten. Weiterhin ist es wünschenswert, wenn dies unabhängig von der Anzahl der Eingabeparameter (sprich der Dimension des Problems) und von der Anzahl der Stützstellen von statthen geht. Als typische Bewertungskriterien fallen für die Stützstellenmethoden statistische Maße an. So ist zum Beispiel der Korrelationskoeffizient nach Pearson zu nennen oder es wird eine Abstandsmatrix der Stützstellen untereinander auswertet. Diese Kriterien sind ebenfalls in der Box A in der Abbildung 5.1 angedeutet.

Bei dem Korrelationskoeffizienten nach Pearson handelt es sich um ein Maß zur Bestimmung von linearen Zusammenhängen zwischen zwei Variablen  $x$  und  $y$ , wobei nicht lineare Zusammenhänge nicht abgebildet werden können. Die elementarste Form des Korrelationskoeffizienten nach Pearson ist in Gleichung 5.1 gegeben. Meist deuten betragsmäßig hohe Werte nahe 1 auf eine starke Linearität hin. An dieser Stelle wird jedoch die gegenteilige Aussage untersucht. So ist zu erwarten, dass perfekt im Raum verteilte Stützstellen keinerlei Zusammenhang aufweisen. Dementsprechend wird ein Korrelationskoeffizient von 0 erwartet.

$$\rho_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (5.1)$$

Als zweites Auswertekriterium kann die Abstandsmatrix genutzt werden. Vorteilhaft ist dabei die Tatsache, dass der Abstand zweier Punkte in einem beliebig hochdimensionalen Raum immer eine skalare Größe ist. Dementsprechend ist die Größe der Abstandsmatrix nur abhängig von der Anzahl der Stützstellen und nicht von der Anzahl der Eingabeparameter beziehungsweise von der Dimension des Problems. Diesen Sachverhalt nutzen auch diverse Varianten der LHS-Methode aus. Dort wird versucht entweder in internen Optimierungen den minimalen Abstand zu maximieren, den maximalen Abstand zu minimieren oder eine Kombination aus beiden Ansätzen.

So sind in der Abbildung 5.2 gemittelte Informationen für statistische Größen und Größen aus der Abstandsmatrix für eine steigende Anzahl an Stützstellen aufgezeigt. Hierbei wurden jeweils 1000 Durchläufe für eine fixe Stützstellenanzahl bei zwei Eingabeparametern durchgeführt. Neben dem Mittelwert des Korrelationskoeffizienten  $\bar{\rho}_{\text{Pear}}$  ist auch die Standardabweichung  $\bar{\sigma}_{\text{Pear}}$  des Korrelationskoeffizienten dargestellt.

Ebenfalls dargestellt sind unterschiedliche Kriterien, welche aus der Abstandsmatrix abgeleitet wurden. So wurde der Minimalabstand  $d_{\min}$  ausgewertet und dessen Mittelwert für den kleinsten  $\min(d_{\min})$ , gemittelten  $\text{mean}(d_{\min})$  und größten Minimalabstand  $\max(d_{\min})$  aufgetragen. Eine Gleichmäßigkeit wird erwartet, wenn alle drei gemittelten Abstandswerte nahe beieinanderliegen.

Eine analoge Untersuchung ist in der Abbildung 5.3 für eine steigende Anzahl an Eingabeparametern beziehungsweise der Dimension des Problems dargestellt. Hierbei wurde die Formierung analog zu Abbildung 5.2 gewählt, wobei die dort gewählte Dimension zwei ist, während in Abbildung 5.3 ein bis zu 20-dimensionales Problem simuliert wurde. Die Anzahl der Stützstellen beträgt jeweils 100 Stück und es wurden wiederum 1000 Durchläufe für statistisch aussagekräftige Ergebnisse durchgeführt.

Wie in den beiden Auswertekriterien zu erkennen ist, tastet die oLHS-Methode den Raum der Eingabeparameter am Gleichmäßigsten ab. Bei zwei Dimensionen liefert die iLHS-Methode ebenfalls gute Ergebnisse, während bei hoher-dimensionalen Problemen die Leistung stark abnimmt, sodass einfachere Methoden bessere Ergebnisse liefern. Dementsprechend ist die iLHS-Methode

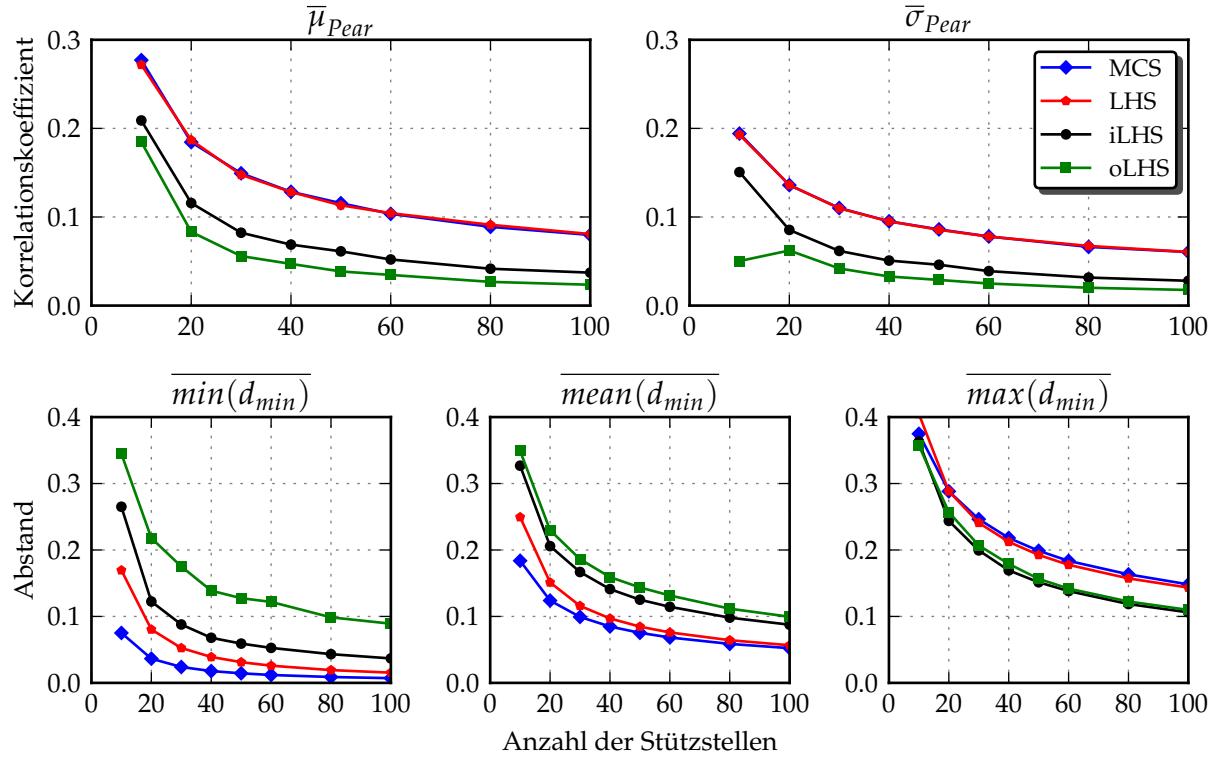


Abbildung 5.2: Ergebnisse der unterschiedlichen Stützstellenmethoden für steigende Anzahl an Stützstellen bei Mittelwert und Standardabweichung des Korrelationskoeffizienten nach Pearson und unterschiedlichen Kriterien aus der Abstandsmatrix

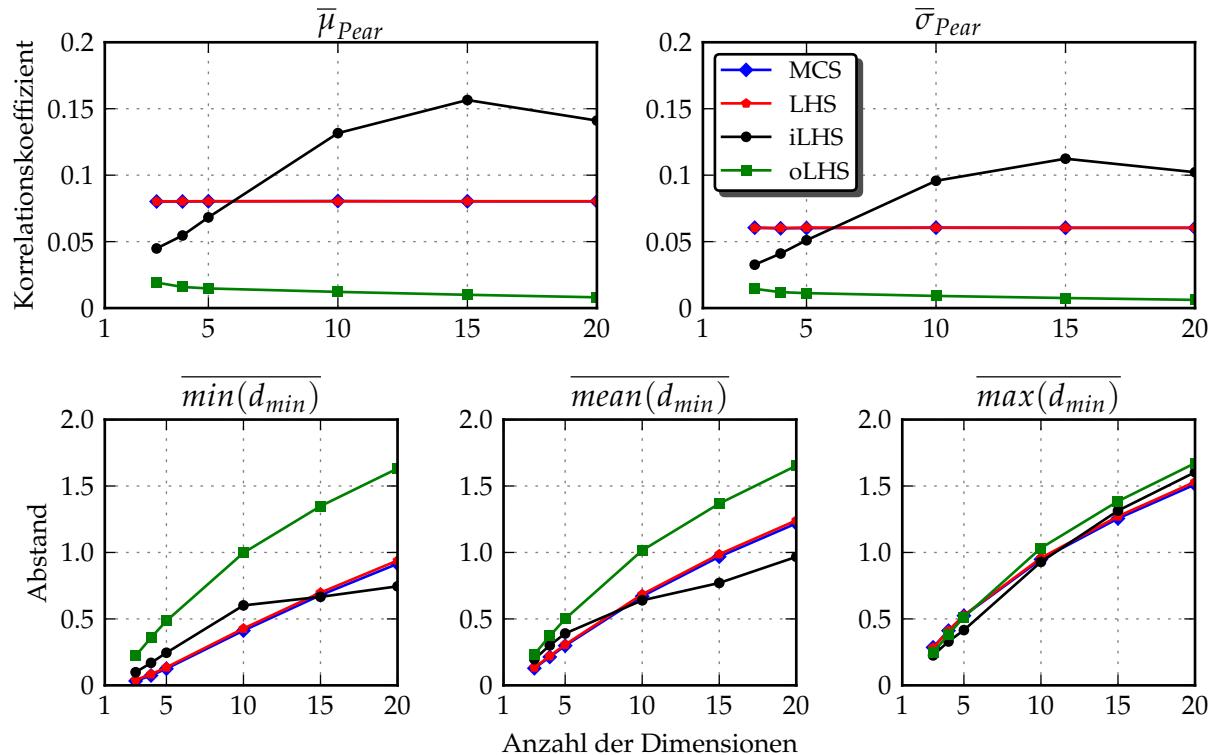


Abbildung 5.3: Ergebnisse der unterschiedlichen Stützstellenmethoden für steigende Dimension bei Mittelwert und Standardabweichung des Korrelationskoeffizienten nach Pearson und unterschiedlichen gemittelten Kriterien aus der Abstandsmatrix

für höherdimensionale Probleme nicht empfehlenswert. Interessanterweise liefern die LHS- und MCS-Methode sehr ähnliche Ergebnisse, sowohl bei steigender Stützstellenanzahl, als auch bei steigender Dimensionsanzahl. Nichtsdestotrotz liefert die oLHS-Methode die besten Ergebnisse und ist somit jederzeit zu bevorzugen. Folglich wurde konsequent die oLHS-Methode im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

### 5.2.3. Vergleich der Methoden zur Antwortflächengenerierung

Um die Methoden zur Erstellung einer Antwortfläche zu bewerten sind wiederum geeignete Kriterien notwendig. Es muss zunächst unterschieden werden, ob die Problemstellung bekannt oder unbekannt ist. Diese Unterscheidung ist ebenfalls in der Abbildung 5.1 mit der Box **B** für bekannte und Box **C** für unbekannte Funktionen angedeutet. An dieser Stelle soll zunächst nur anhand einer bekannten repräsentativen Testfunktion ein Einblick gegeben und in dem Unterkapitel 5.5.1 das Realbeispiel mit unbekanntem Funktionsverlauf aufgegriffen werden.

Als qualitativ hochwertigstes Auswertekriterium ist der RMS-Wert<sup>44</sup> zu nennen, welcher auf einem Validierungsgitter<sup>45</sup> einfach zu bestimmen ist. Wobei im Idealfall der RMS-Wert null ist und die Approximation mit dem wahren bekannten Funktionsverlauf übereinstimmt. Die Definition des RMS-Wertes ist in Gleichung 5.2 gegeben.

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \sum_{i=1}^L f(x_i) - \tilde{f}(x_i) \right)^2} \quad (5.2)$$

Anhand der Branin-Testfunktion (siehe Anhang A.7) sollen die vier zuvor genannten Antwortflächenmethoden untersucht werden. In der Abbildung 5.4 ist der Vergleich des RMS-Wertes über eine steigende Anzahl an Stützstellen angegeben, wobei jeweils der Mittelwert (—) und die Standardabweichung (---) aus 1000 Durchläufen angegeben ist. Des Weiteren wurde zwischen den Methoden zur Erstellung von Stützstellen unterschieden. Auf der linken Seite der Abbildung 5.4 wurden die Stützstellen mit MCS und auf der rechten Seite mit oLHS generiert.

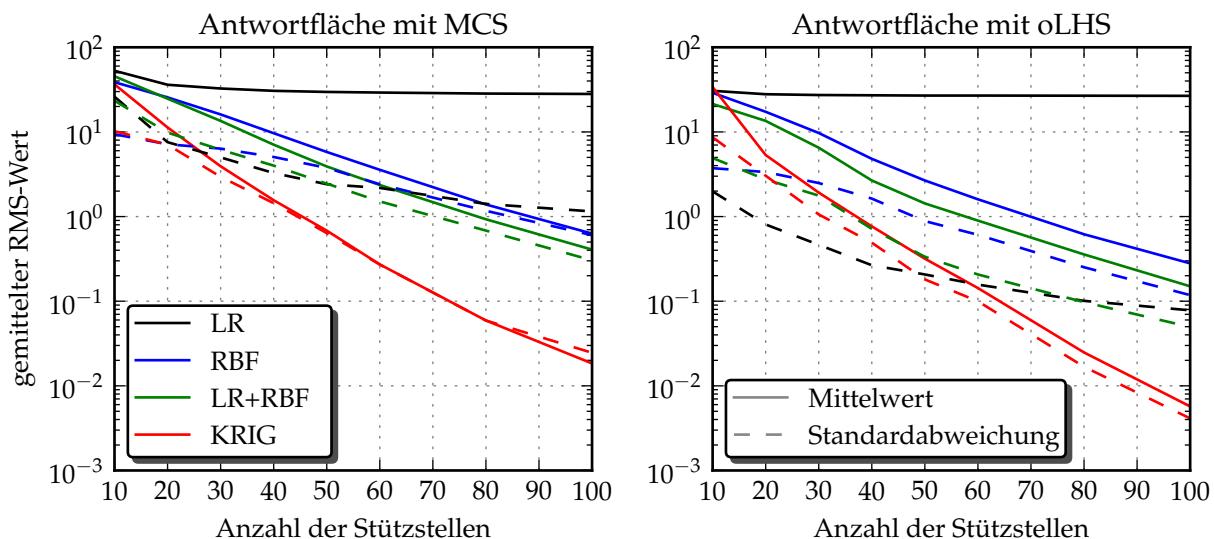


Abbildung 5.4: Verhalten der unterschiedlichen Antwortflächen-Methoden bei der Branin-Testfunktion über der Anzahl der Stützstellen bei MCS (links) und oLHS (rechts), wobei der Mittelwert (—) und die Standardabweichung (---) angegeben sind.

<sup>44</sup>RMS: Root-Mean-Square

<sup>45</sup>Validierungsgitter: Gleichmäßige Abtastung des Parameterraumes innerhalb der gegebenen Parametergrenzen

Aus diesen beiden Grafiken lassen sich diverse Schlüsse ziehen. Zunächst einmal liefern Datensätze, welche mit oLHS erstellt wurden, bessere Antwortflächen als bei MCS. Bei den Antwortflächen ergibt sich eine gewisse Reihenfolge der Qualität. Hierbei ist die lineare Regression unterlegen, gefolgt von der RBF-Methode und der Kombination von LR und RBF. Die beste Qualität wird durch die Kriging-Antwortfläche erreicht. Es muss betont werden, dass die hier verwendete Testfunktion zwar repräsentativ ist, aber nicht universell. Somit gibt es andere Problemstellungen, bei denen die Reihenfolge der Qualität anders aussehen könnte. Als einfaches Beispiel ist hier die lineare Regression zu nennen. Wenn dort die wahre Funktion den Ansatzfunktionen entspricht, dann kann die Funktion exakt abgebildet werden.

### 5.3. Parametrisierung und Optimierung

In diesem Unterkapitel werden einerseits die Eingabe- und Ausgabeparameter vorgestellt und erläutert, wobei der Fokus zunächst auf den Eingabeparametern liegt. Andererseits werden die aufeinander aufbauenden Optimierungsformulierungen vorstellt und es wird auf den Einfluss der Robustheit eingegangen.

#### 5.3.1. Parametrisierung

Bei der Parametrisierung war es eines der Hauptanliegen, den Einfluss der externen Schaufelpараметer auf die Lebensdauer der Hochdruckturbinschaufel zu quantifizieren. Für die Parametrisierung der Schaufeloberfläche wurde das hausinterne Programm *Parablading* (siehe Anhang A.2) verwendet, wobei vor allem drei Arten von Parametern angesprochen wurden. Dies umfasst die axiale Verschiebung entlang der Hauptachse  $x$  (Rotationsachse des Triebwerkes), welches mit dem Parameter *axial* bezeichnet wird. Bei der Rotation um die Hauptachse spricht man von *lean* (lehnen) und bei der Rotation um die Achse  $z$  in Schaufelrichtung von *skew* (verdrehen).

So adressieren die ersten 11 Parameter in der Tabelle 5.1 unterschiedliche Sektionen der Schaufeloberfläche. Zwar werden die Schaufeln mit 21 Sektionen aufgebaut, jedoch werden meist nicht alle als freie Parameter behandelt, da diese hohe Anzahl der Parameter unpraktisch wäre. Dementsprechend wurden die drei Parameter auf der 1., 11. und 21. Sektion variiert und intern für die restlichen Sektionen interpoliert. Weil erfahrungsgemäß die Verdrehung ein sensibler Parameter ist, wurden auf den Sektionen 6 und 16 zusätzlich der *skew*-Parameter mit betrachtet.

Analog zu den Parametern der Schaufeloberfläche wurde für die Plattform und den darunterliegenden Bereich die drei Parameter *axial*, *lean* und *skew* definiert. Somit ist eine Relativbewegung zur Schaufel möglich. Weiterhin wurden jeweils ein Skalierungsfaktor für die Wandstärke auf Druck- (PS) und Saugseite (SS) verwendet. Dadurch sind Bewegungen des internen Kerns, sowie Größenänderungen des Kerns realisierbar.

Um zu demonstrieren, dass die verwendeten Methoden nicht nur auf Geometrieparameter limitiert sind, wurden ebenfalls ein Parameter für das Material und ein Parameter für die Randbedingungen in die Untersuchung mit einbezogen. Bei dem Materialparameter handelt es sich um den Kristallwinkel  $\theta$  des ein-kristallinen Schaufelmaterials<sup>46</sup>, welcher in Voruntersuchungen als signifikant für die Lebensdauer identifiziert wurde. Bei dem Parameter für die Randbedingungen handelt es sich um einen Skalierungsfaktor für das radiale Temperaturprofil. Dieses wird als Vereinfachung des Prozesses für die Turbinenkühlung (siehe Kapitel 4) verwendet. Aus Voruntersuchungen (Wagner [72]) ist bekannt, dass der Einfluss auf die Lebensdauer dominant sein kann, sodass eine Einschränkung des validen Parameterbereiches stattgefunden hat.

<sup>46</sup>Schaufelmaterial: Typischerweise werden die Heißgaskomponenten in der Hochdruckturbine aus dem Werkstoff CMSX-4 gefertigt. Dabei handelt es sich um eine sogenannte Superlegierung, welche auch bei extrem hohen Belasten gute Stoffeigenschaften, wie z.B. für die Festigkeit, aufweist. Das Material besitzt ein kubisch-flächenzentriertes Kristallgitter mit drei Kristallwinkeln. Der Kristallwinkel  $\theta$  verläuft dabei in Schaufelrichtung ( $z$ ).

#	Parameter	Referenz	Min	Max	$\sigma$
1	Sektion 1 axial	0	-0.5	0.5	0.05
2	Sektion 1 lean	0	-0.5	0.5	0.05
3	Sektion 1 skew	0	-0.5	0.5	0.05
4	Sektion 6 skew	0	-0.5	0.5	0.05
5	Sektion 11 axial	0	-0.5	0.5	0.05
6	Sektion 11 lean	0	-0.5	0.5	0.05
7	Sektion 11 skew	0	-0.5	0.5	0.05
8	Sektion 16 skew	0	-0.5	0.5	0.05
9	Sektion 21 axial	0	-0.5	0.5	0.05
10	Sektion 21 lean	0	-0.5	0.5	0.05
11	Sektion 21 skew	0	-0.5	0.5	0.05
12	Plattform axial	0	-0.3	0.3	0.015
13	Plattform lean	0	-0.3	0.3	0.015
14	Plattform skew	0	-0.3	0.3	0.015
15	Skalierung Wandstärke PS	1	0.9	1.1	0.01
16	Skalierung Wandstärke SS	1	0.9	1.1	0.01
17	Kristallwinkel $\theta$	0	-20	20	2.0
18	Skalierung Temperatur	1	0.9975	1.0025	0.0005

Tabelle 5.1: Eingabeparameter der Robustheitsoptimierung der Hochdruckturbinenschaufel mit den Standardwerten und den Variationsbereichen

Bei den Ausgabeparametern wurden vier unterschiedliche Größen gewählt. Der erste Ausgabeparameter war die ursprüngliche Zielgröße dieser Untersuchung, welche in der Durchführung um die folgenden drei Zielgröße/Ausgabeparameter erweitert wurden. Bei der ersten Zielgröße handelt es sich um die Lebensdauer, welche durch Auswertung auf der externen Schaufelgeometrie bestimmt wird und soll fortan als externe Lebensdauer bezeichnet werden. Diese externe Lebensdauer ist eine Kombination aus der Lebensdauer der niederzyklischen Belastung (LCF) und der Lebensdauer, welche aufgrund von Kriechen berechnet wird. Die zweite Zielgröße ist die kombinierte Lebensdauer auf der internen Schaufelgeometrie, sprich des Schaufelkerns ( $\rightarrow$  interne Lebensdauer). Bei der dritten Zielgröße handelt es sich um den aerodynamischen Wirkungsgrad, welcher schon im Vorhinein ermittelt wurde und im Arbeitsprozess als Antwortfläche hinterlegt wurde. Die vierte Zielgröße ist die Masse der Rotorschaufel, welche aus der automatisierten Geometrieerzeugung hervorgeht.

### 5.3.2. Optimierungsformulierung

Aufeinander aufbauend werden drei unterschiedliche Optimierungen durchgeführt. Zunächst wird eine deterministische Ein-Ziel-Optimierung für die externe Lebensdauer der Schaufel vorgenommen. Gefolgt von einer Robustheitsoptimierung für den Mittelwert und die Standardabweichung der externen Lebensdauer. Bei der dritten Optimierung handelt sich um eine Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung für die externe Lebensdauer, die Masse und den aerodynamischen Wirkungsgrad. Die interne Lebensdauer wird, wie im noch folgenden Kapitel 5.5.1 erläutert, aus Qualitätsgründen ausgeschlossen.

Somit lässt sich die erste Optimierung in folgender Formulierung angegeben:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} [-L_{\text{Ext}}] \quad \text{mit } \mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{18} \mid \mathbf{p}^u + 3\sigma \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o - 3\sigma\}. \quad (5.3)$$

Die externe Lebensdauer  $L_{\text{Ext}}$  wird dabei maximiert. Da es üblich ist, die Formulierung mit  $\min$  zu beschreiben, wird das Minus-Zeichen verwendet, um die Richtung wieder umzukehren. Alle 18 Eingabeparameter sind reale Zahlen und werden innerhalb der Parametergrenzen variiert, welche durch die Robustheitsbetrachtung eingeschränkt werden müssen. Die dazugehörigen Werte sind in Tabelle 5.1 als Maximal-, Minimalwerte und Standardabweichung angegeben. Des Weiteren werden keine Zwangsbedingungen angesetzt. Da es sich um eine Ein-Ziel-Optimierung handelt, wurden neben dem NSGA-II auch der CMA-ES- und der Simplex-Algorithmus (nach Nelder und Mead [50]) getestet, wobei Letzterer ein typischer Vertreter der Gradienten-basierten Optimierungsalgorithmen ist.

Bei der zweiten Optimierung wird der Übergang zur Robustheit vollzogen. Das heißt, dass für die Eingabeparameter jeweils eine Normalverteilung angenommen wurde. Somit ergeben sich die reduzierten Parameterräume bezüglich der unteren und obere Grenzen um die dreifache Standardabweichung  $\sigma^{47}$ . Der Übergang von der deterministischen Optimierung zur Robustheitsoptimierung führt dazu, dass aus der Ein-Ziel-Optimierung des deterministischen Wertes der externen Lebensdauer eine Zwei-Ziel-Optimierung für den Mittelwert  $\mu(L_{\text{Ext}})$  und die Standardabweichung  $\sigma(L_{\text{Ext}})$  der externen Lebensdauer wird. Entsprechend müssen nun anstatt einer Rechnung für einen konkreten Parametersatz mehrere Rechnungen durchgeführt werden. Mehr dazu im Unterkapitel 5.5.3, wo die Ergebnisse der Robustheitsoptimierung für die externe Lebensdauer dargestellt und diskutiert werden. Somit lässt sich die Optimierung in der folgenden Form schreiben:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} \begin{bmatrix} -\mu(L_{\text{Ext}}) \\ \sigma(L_{\text{Ext}}) \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{18} \mid \mathbf{p}^u + 3\sigma \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o - 3\sigma\}. \quad (5.4)$$

<sup>47</sup>Die Annahme der Normalverteilung der Eingabeparameter ist zweckmäßig, da keine fertigungsbedingten Informationen über die Parameterschwankungen vorliegen.

An dieser Stelle soll kurz auf die Auswirkungen der Einschränkung der Parametergrenzen eingegangen werden. Dazu wurde in Abbildung 5.5 ein einfaches akademisches Beispiel mit zwei Eingabe- und Ausgabeparametern skizziert. Zunächst einmal wird der Parameterbereich an sich eingeschränkt. Dies kann Auswirkungen auf die Ergebnisse in den Zielgrößen haben. Zum einen kann ein besserer deterministischer Wert in dem Bereich liegen, welcher durch die Robustheit reduziert wurde. Zum anderen wird durch die Mittelung aufgrund der Robustheit das Ergebnis meist verschlechtert (Ausnahme wäre ein Plateau für den Optimalwert).

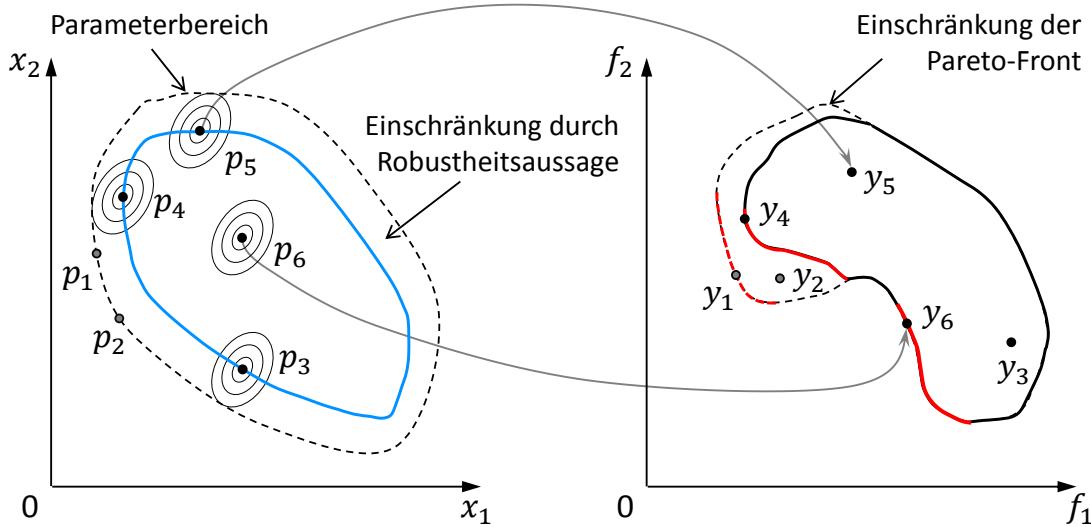


Abbildung 5.5: Skizze zur Einschränkung des Parameterbereiches aufgrund der Robustheit und deren potenzielle Auswirkungen auf die Pareto-Front am akademischen Beispiel mit zwei Eingabe- und Ausgabeparametern

Als dritte und letzte Formulierung ist die Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung in der Gleichung 5.5 angegeben. Die sechs Zielgrößen ergeben sich aus den zwei statistischen Größen Mittelwert und Standardabweichung, welche aus der Robustheit hervorgehen, und den drei Zielen Masse, externe Lebensdauer  $L_{\text{Ext}}$  und aerodynamischer Wirkungsgrad  $\eta$ .

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mu(\text{Masse}) \\ \sigma(\text{Masse}) \\ -\mu(L_{\text{Ext}}) \\ \sigma(L_{\text{Ext}}) \\ -\mu(\eta) \\ \sigma(\eta) \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{18} \mid \mathbf{p}^u + 3\sigma \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o - 3\sigma\} \quad (5.5)$$

Abschließend muss erwähnt werden, dass für alle drei Formulierungen der NSGA-II Algorithmus zum Einsatz kam. Für die Ein-Ziel-Optimierung wurde das Problem künstlich auf zwei gleiche Ziele erweitert, da der NSGA-II ausschließlich Mehr-Ziel-Probleme lösen kann.

## 5.4. Arbeitsablauf und Durchführung

Innerhalb dieses Unterkapitels wird zunächst der Arbeitsablauf hauptsächlich mit Hilfe von Flussdiagrammen erläutert, woraufhin gesondert auf die durchgeführten Implementierungsarbeiten eingegangen wird. Daraufhin werden Erkenntnisse aus diversen Voruntersuchungen hervorgehoben, wobei diese einen Einfluss auf die letztendliche Parametrisierung oder Optimierungsformulierung hatten. Als Letztes wird die Durchführung erläutert.

### 5.4.1. Arbeitsablauf

Der schematische Arbeitsablauf ist in der Abbildung 5.6 dargestellt und beinhaltet drei Hauptelemente. Bei der ersten Hauptkomponente in der blauen Box  handelt es sich um einen *Isight*-Arbeitsablauf, der die eigentlichen Daten liefert, das heißt für einen konkreten Eingabe-Parametersatz die Masse, Lebensdauer und den aerodynamischen Wirkungsgrad bestimmt. Die Matlab-Toolbox  wurde schon in Unterkapitel 5.2.1 vorgestellt und das Auswertungs- und Visualisierungsprogramm MOViT<sup>48</sup>  wird im Anhang A.3 genauer beschrieben.

Der *Isight*-Arbeitsablauf besteht im Wesentlichen aus den drei Bestandteilen: Geometrie, Vernetzung und Analyse. Im Geometrieteil wird die Schaufel und ein Scheibensegment von Grund auf mit der Software *Siemens NX* erstellt. Die Vernetzung adressiert die Rechengitter für die Strukturanalyse und erfolgt ebenfalls in *NX*. Die Analyse ist der aufwendigste Teil dieses Arbeitsablaufes und beinhaltet die drei Disziplinen externe Aerodynamik, Turbinenkühlung und Spannungs- und Lebensdauerberechnung.

Bei der externen Aerodynamik wurden die entsprechenden Eingabeparameter schon vorher in einer 3D CFD Software variiert und der aerodynamische Wirkungsgrad ist mit Hilfe einer Antwortfläche hinterlegt worden, während durch das Kühlungsmodul ein radiales Temperaturprofil bereitgestellt wurde. Der Hauptteil der Rechenzeit wird für die Spannungs- und Lebensdauerberechnung verwendet. In Abbildung 5.7  ist diese Detailanalyse genauer beleuchtet.

Zunächst wird das Modell durch aufbringen von Randbedingungen auf die Rechnungen vorbereitet. Auch eine separate Netzgenerierung für die Kriechrechnung ist möglich. Danach werden die elastische Analyse und Kriechanalyse durchgeführt, wobei die Kriechanalyse der zeitlich anspruchsvollste Teil des gesamten *Isight*-Arbeitsablaufes ist. Daraufhin erfolgt, basierend auf den Ergebnissen der Kriech-Analyse, eine Bestimmung des Kriech-Fortschritts für alle Gitterpunkte. Die schlussendliche Lebensdauerbestimmung erfolgt im letzten Schritt auf Grundlage der elastischen Ergebnisse und den Ergebnissen aus dem Kriech-Fortschritt.

Alternative Lebensdauerkriterien, wie zum Beispiel hoch-zyklische Belastungen oder ähnliches, wurden aus Gründen akzeptabler Rechenzeiten nicht betrachtet. Nach Festlegen des verbesserten Designs aus der Optimierung, müssen diese alternativen Kriterien noch überprüft werden.

### 5.4.2. Voruntersuchungen

Bei dem *Isight*-Arbeitsablauf mussten diverse Änderungen vorgenommen werden, um parametrische Untersuchungen in der vorliegenden Art und Weise zu ermöglichen. Das Referenzdesign wurde ohne Probleme berechnet, jedoch waren die Variation der Wandstärke und die Parameteränderungen im Plattformbereich herausfordernd. So wurden hauptsächlich Änderungen/Verbesserungen im Geometrieteil des Arbeitsablaufes vorgenommen. Modifikationen von Parametern der Schaufelfläche waren hingegen fast vollkommen stabil und die Parameter für Material und Randbedingungen verursachten keinerlei Ausfälle.

Nachdem eine zufriedenstellende Erfolgsrate erreicht wurde, konnten systematisch die Parametergrenzen erkundet werden. Es wurde analog zum schon beschriebenen strategischen Vorgehen gemäß Kapitel A.4 verfahren. Das heißt in ersten Parameterstudien wurden die Minimal- und Maximalgrenzen gesetzt und in der ersten DoE wurden sowohl die Einflüsse auf die Zielgrößen untersucht als auch Parameterkombinationen identifiziert, welche zu invaliden Geometrien führen. Für die finale fein aufgelöste DoE wurden letztendlich die Parameterbereiche wie in Tabelle 5.1 angegeben gewählt.

In weiteren Voruntersuchungen wurden der Einfluss von Druck und den drei Kristallwinkeln analysiert. Dabei stellte sich heraus, dass der Druck keinerlei Einfluss auf die Lebensdauer hat und nur ein Kristallwinkel signifikant die Lebensdauer beeinflusst. Des Weiteren stellte sich heraus,

<sup>48</sup>MOViT: Multi-Objective Visualisation Tool

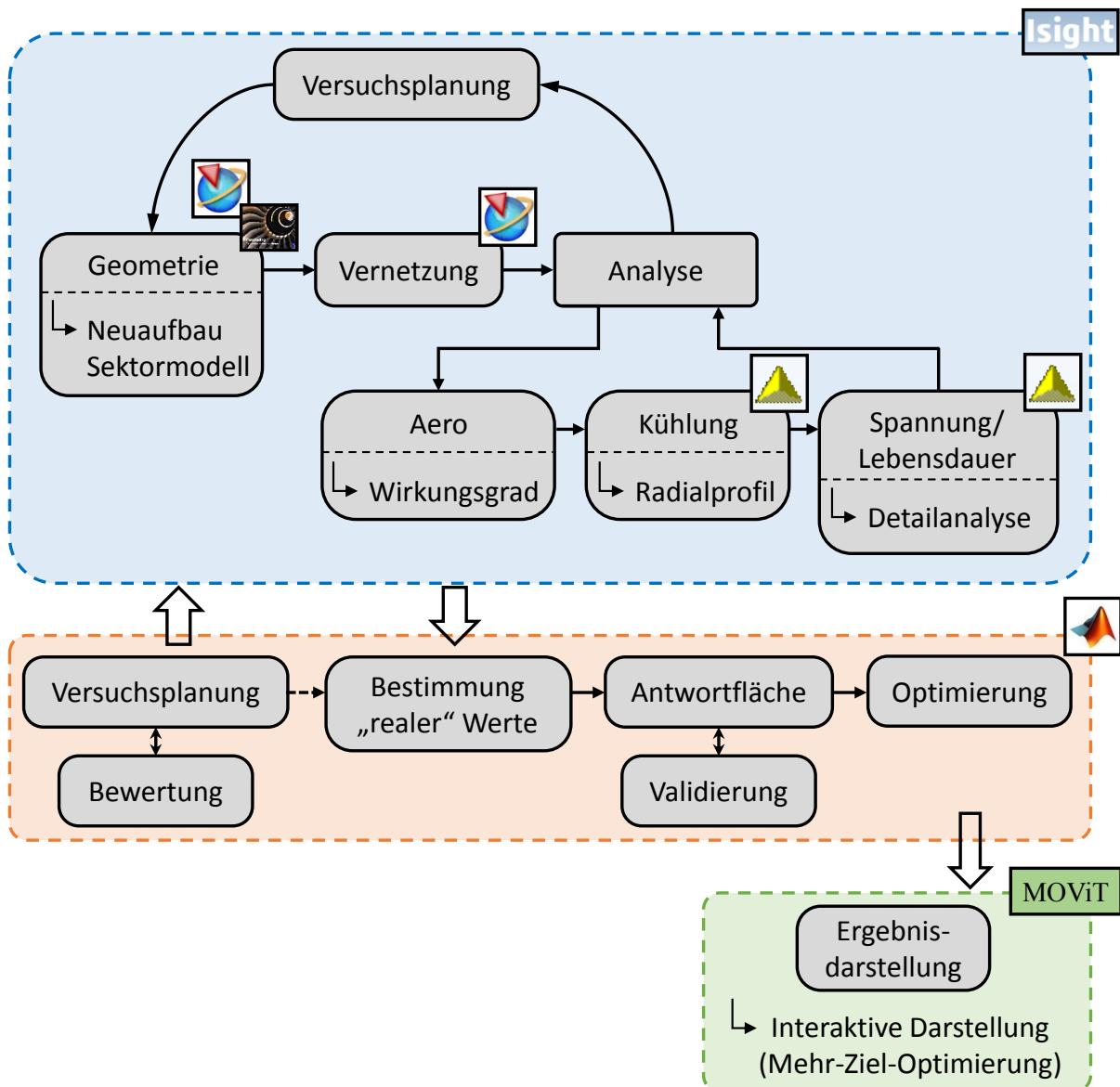


Abbildung 5.6: Schematischer Überblick des gesamten Arbeitsprozesses mit Systemschnittstellen zwischen *Isight*, der Matlab-Toolbox (Kap. 5.2.1) und MOViT (Anhang A.3)

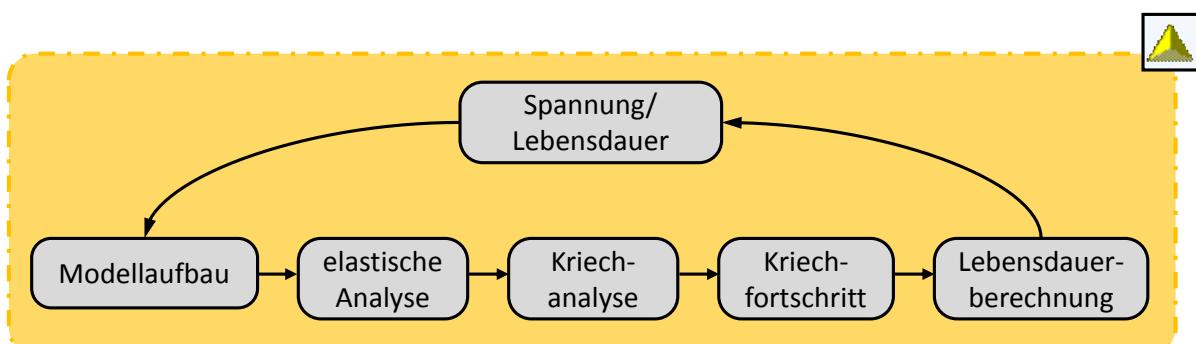


Abbildung 5.7: Detaillierter Blick auf den Prozess zur Bestimmung der Spannung und Lebensdauer

dass die Einstellungen der Kriechanalyse angepasst werden mussten. Hier wurde die Analyse zu früh abgebrochen, sodass eine Extrapolation zu ungenauer Aussagen für die Kriechlebensdauer führte.

#### 5.4.3. Durchführung

Zunächst wurden zwei voneinander unabhängige Datensätze für die Stützstellen erzeugt. Ziel war es, damit eine Art der Bewertung der Antwortflächenqualität zu realisieren, indem ein Datensatz zur Erzeugung der Antwortfläche genutzt und der andere Datensatz zur Bewertung der Qualität herangezogen wird. So wurde der erste Datensatz an Stützstellen mit der oLHS-Methode für insgesamt 300 Stützstellen erzeugt. Hierbei wurde die Anzahl von 300 so gewählt, dass bei der erwarteten Fehlerrate genug valide Ergebnisse für eine Antwortfläche mit linearer Regression und Polynomen zweiter Ordnung (mit Mischtermen) erzeugt werden konnte. Der zweite Datensatz von 120 Stützstellen wurde mit der MCS-Methode erzeugt, sodass eine zufallsbasierte Qualitätsbewertung stattfinden kann.

Wegen der hohen erwartenden Rechenzeiten, welche hauptsächlich der Kriechanalyse geschuldet ist, wurden die Analysen auf mehrere Rechner verteilt. Es handelte sich übliche Workstations mit einer Konfiguration von 16 Intel Xeon<sup>©</sup> E5-2650 @ 2.60 GHz Kernen und 32 GB Arbeitsspeicher. In der parallelen Ausführung konnten so bis zu vier Rechnungen gleichzeitig durchgeführt werden, wobei der limitierende Faktor der Speicherbedarf der Kriechrechnung war. Die Rechenzeit pro Rechnung im parallelen Modus belief sich auf circa 1,5 Stunden.

Nach dem Durchlauf der insgesamt 420 verteilten Rechnungen wurde eine erneute Fehleranalyse durchgeführt. Hierbei wurden Datensätze identifiziert, bei denen Probleme mit dem Netzwerk, den Lizzenzen oder *Isight*-Fehler auftraten. Diese Rechnungen wurden wiederholt, um die Erfolgsrate zu verbessern. Insgesamt konnten so 210 der 300 Rechnungen aus den oLHS-generierten Stützstellen (70%) und 82 der 120 Rechnungen aus den MCS-generierten Stützstellen (68,3%) erfolgreich durchgeführt werden. Als letzter Schritt zur Vorbereitung auf die Generierung der Antwortflächen wurden die Daten zusammengetragen und aufbereitet.

### 5.5. Ergebnisse und Diskussion

Bevor die eigentlichen Ergebnisse vorgestellt und diskutiert werden, muss die Qualität der Antwortflächen analysiert werden. Dies erfolgt zum einen über die Leave-Out-One-Crossvalidation (LOOCV) und zum anderen über die Aufspaltung in oLHS- und MCS-generierte Stützstellen. Das Bestimmtheitsmaß  $R^2_{\text{adj}}$  ist dafür ungeeignet, da es nur bei linearer Regression sinnvolle Ergebnisse liefert. Weiterhin wird begründet, warum die interne Lebensdauer von den Untersuchungen ausgeschlossen wird.

Bei der Vorstellung der Optimierungsergebnisse wird die schon erläuterte stufenweise Vorgehensweise gewählt. Zunächst werden die Ergebnisse der deterministischen Ein-Ziel-Optimierung für die externe Lebensdauer vorstellt, gefolgt von der robusten Zwei-Ziel-Optimierung für den Mittelwert und die Standardabweichung der externen Lebensdauer. Finales Ergebnis ist die Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung von Masse, externer Lebensdauer und aerodynamischem Wirkungsgrad.

#### 5.5.1. Bewertung der generierten Antwortflächen

Die sogenannte Leave-Out-One-Crossvalidation basiert auf der einfachen Annahme, dass genau eine Stützstelle (beziehungsweise deren Ergebnis) aus dem Datensatz entfernt wird und an dieser Entnahmestelle mit Hilfe einer neu generierten Antwortfläche (Datenbasis um den entnommenen Wert reduziert) ein Wert/Ergebnis vorhergesagt wird. Dies wird für alle Daten durchgeführt, sodass Paare von berechneten und vorhergesagten Ergebnissen existieren, deren Anzahl mit der

Anzahl der Stützstellen übereinstimmt. Basierend auf diesen Paaren wird eine Korrelationsanalyse mit dem Korrelationskoeffizienten nach Pearson ausgeführt. Im Idealfall würde der Wert 1 herauskommen. Qualitativ hohe Antwortflächen sind ab einem Korrelationskoeffizienten von 0.8 bis 0.9 zu erwarten.

In der Tabelle 5.2 sind die Korrelationskoeffizienten, welche mit der LOOCV erstellt wurden, für die vier Zielgrößen Masse, externe Lebensdauer (Extern), interne Lebensdauer (Intern) und aerodynamischer Wirkungsgrad aufgelistet. Es wurden unterschiedliche Methoden eingesetzt, um die Antwortfläche zu erzeugen. Diese Antwortflächenmethoden wurden in der Theorie (siehe Kapitel 2.1.5) erklärt und vergleichend gegenübergestellt (siehe Kapitel 5.2.3).

Antwortflächenmethode	Masse	Extern	Intern	Wirkungsgrad
LR: dim=1.0	$\rho = 0.981$	$\rho = 0.662$	$\rho = 0.388$	$\rho = 0.953$
	$\rho = 0.749$	$\rho = 0.749$	$\rho = 0.348$	$\rho = 0.988$
RBF: Gauß	$\rho = 0.931$	$\rho = 0.896$	$\rho = 0.216$	$\rho = 0.991$
LR+RBF: Gauß+dim=1.0		$\rho = 0.901$		
		$\rho = 0.745$		
Kriging: (DACE [45])	$\rho = 0.976$	$\rho = 0.965$	$\rho = 0.715$	$\rho = 0.999$

Tabelle 5.2: Qualitätsbewertung der erstellten Antwortflächen mit Hilfe des Pearschen Korrelationskoeffizienten bei unterschiedlichen Zielgrößen

Auffällig ist zunächst, dass die Qualität der Antwortflächen für die interne Lebensdauer mit allen Methoden nicht hinreichend gut ist. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass die Gitterauflösung auf der internen Geometrie nicht fein gut war und der Ort der geringsten Lebensdauer zwischen bis zu fünf unterschiedlichen Positionen gesprungen ist. Anzumerken ist weiterhin, dass die interne Lebensdauer nachträglich als Zielgröße aufgenommen wurde, sodass Gitterverfeinerungen nicht mehr möglich waren ohne die gesamte DoE zu wiederholen.

Der aerodynamische Wirkungsgrad konnte in exzellenter Qualität mit allen Antwortflächenmethoden abgebildet werden. Eine andere Aussage hätte auch auf Fehler hingedeutet, da der Wirkungsgrad über eine Antwortfläche in den Arbeitsablauf implementiert wurde. Überraschenderweise liefert die lineare Regression mit einfachen linearen Polynomen schon eine sehr gute Qualität. Bei der Masse liefert die lineare Regression mit dem Polynom erster Ordnung sogar die beste Qualität der unterschiedlichen Antwortflächen. Dies ist auf die Dominanz der beiden Parameter für die Wandstärke an Druck- beziehungsweise Saugseite zurückzuführen.

Für die externe Lebensdauer liefert die Approximation mit linearer Regression mit Polynomen ersten oder zweiten Grades keine qualitativ hochwertige Antwortfläche. Erst die radialen Basisfunktionen und die Kombination von RBF und LR (Polynom erster Ordnung) erreicht eine zufriedenstellende Güte. Der Einbruch bei RBF und LR mit Polynomen zweiter Ordnung ist auf die Anzahl der Stützstellen zurückzuführen. Da bei 18 Eingabeparametern von Polynomen zweiter Ordnung mindestens 190 Stützstellen benötigt werden, sind verhältnismäßig viele Freiheitsgrade gebunden, sodass die restlichen 20 Freiheitsgrade (210 Stützstellen mit oLHS generiert) zu keiner Qualitätssteigerung beitragen. Die qualitativ beste Approximation liefert die Kriging-Methode.

An dieser Stelle ist zu bedenken, dass die Bewertung mit Hilfe der LOOCV eine konservative Abschätzung, insbesondere für die radialen Basisfunktionen und Kriging, ist. Diese Methoden sind exakt an den gegebenen Stützstellen und werden durch die Entnahme an der Auswerteposition stärker geschwächt als zum Beispiel globale Interpolationsmethoden wie die lineare Regression.

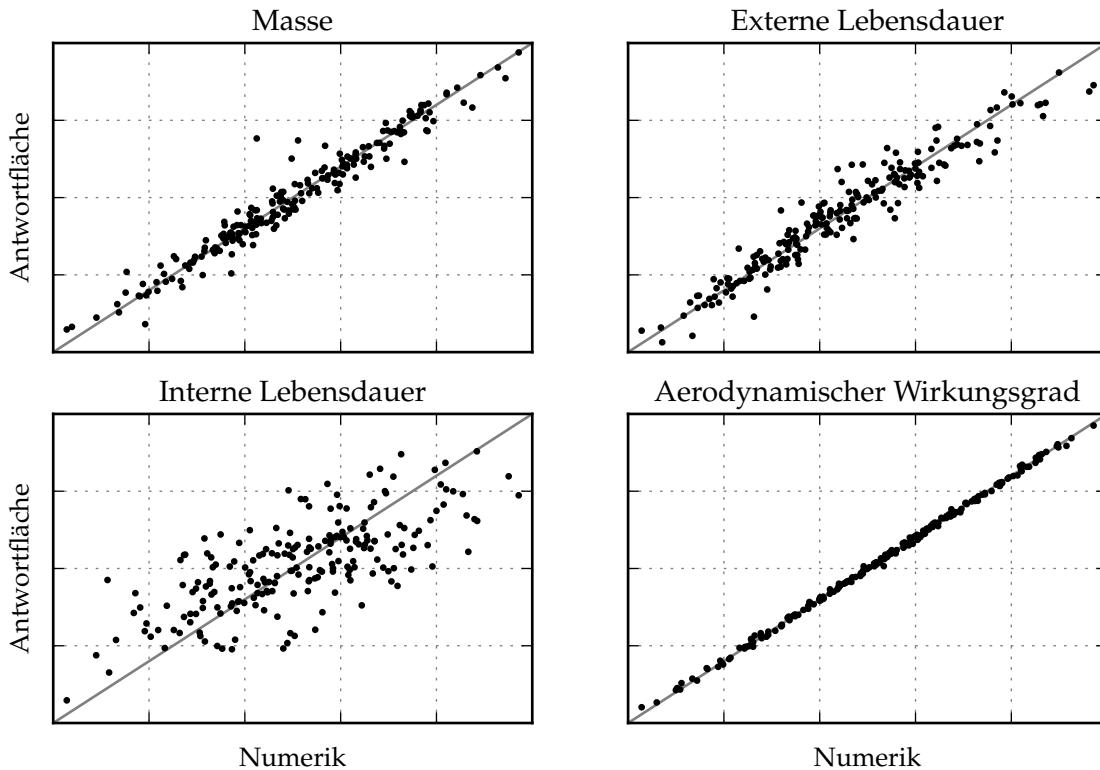


Abbildung 5.8: Kriging-Approximation der Antwortflächen bzgl. der vier Zielgrößen Masse, externe und interne Lebensdauer und Wirkungsgrad basierend auf den 210-oLHS Stützstellen mit idealem Fall —

Zur visuellen Verdeutlichung der Zahlwerte für Kriging-Approximationen in der Tabelle 5.2 sind in der Abbildung 5.8 die Werte der Antwortflächen (bei Entnahme der betrachteten Position) gegen die Ergebniswerte der numerischen Rechnungen für die vier Zielgrößen Masse, externe und interne Lebensdauer und Aerodynamischer Wirkungsgrad aufgetragen. Dabei ist der ideale Verlauf (—) als Diagonale eingetragen, d.h. das numerische Ergebnis lässt sich mit der Antwortfläche reproduzieren, welche ohne den entsprechenden Wert erstellt wurde (LOOCV). Dieser visuelle Eindruck bestätigt die Aussagen für die interne Lebensdauer, welche aufgrund der schlechten Qualität für weitere Untersuchungen ausgeschlossen wird. Der aerodynamische Wirkungsgrad kann wie erwartet in außerordentlicher Güte abgebildet werden.

#### Validierung mit zwei unterschiedlichen Datensätzen:

Als zweites Kriterium zur Bewertung der Antwortflächen sollen die Ergebnisse der Stützstellen, welche mit der MCS-Methode erstellt wurden, herangezogen werden. Von der Bewertungsmethodik her, handelt es sich dabei um eine Aufspaltung der Datensätze, welche schon in der Beschreibung der Matlab-Toolbox in Abbildung 5.1 als Validierungsmethode für die Antwortflächen angedeutet wurde. Als kompakte Zusammenfassung: Die Antwortfläche wird mit 210/300 Stützstellen (oLHS-Methode) erzeugt und mit 82/120 Stützstellen (MCS-Methode) validiert.

Es ergeben sich analoge Ergebnisse zu denen in Tabelle 5.2. Beispielhaft sollen die Korrelationskoeffizienten für die externe Lebensdauer von der Kombination mit RBF und LR ( $\text{Gauß+dim}=1.0$ ) und die Kriging-Methode dienen. Im ersten Fall liefert die LOOCV:  $\rho_{\text{LOOCV}, \text{LR+RBF}} = 0.901$  und die Aufspaltung:  $\rho_{\text{split}, \text{LR+RBF}} = 0.897$  und im zweiten Fall ergibt sich bei LOOCV:  $\rho_{\text{LOOCV}, \text{KRIG}} = 0.965$  gegen Aufspaltung:  $\rho_{\text{split}, \text{KRIG}} = 0.966$ . Wobei an dieser Stelle anzumerken ist, dass die MCS-Methode natürlich einem gewissen Zufall unterliegt und deshalb eine mehrfache Generierung und Bestimmung der Rechenwerte wünschenswert wäre, aber aufgrund der Rechenzeiten

unpraktikabel ist. Nichtsdestotrotz bestätigt die zweite Validierungsstrategie die Ergebnisse der LOOCV.

#### **Zusammenführung der Datensätze von oLHS- und MCS-generierten Stützstellen:**

Um eine weitere Verbesserung der Korrelationskoeffizienten zu erreichen, wurden die Datensätze der mit oLHS- und MCS-generierten Stützstellen zusammengeführt und untersucht. Dadurch verbesserte sich zum Beispiel der Korrelationskoeffizient der externen Lebensdauer von  $\rho_{\text{LOOCV,KRIG,oLHS}} = 0.965$  auf  $\rho_{\text{LOOCV,KRIG,oLHS+MCS}} = 0.975$ . Zwar erscheint diese Steigerung gering, jedoch sind Verbesserungen in der Nähe des idealen Wertes von  $\rho = 1.0$  meist mit viel Aufwand verbunden. Ein analoges Vorgehen verbesserte die Kriging-Approximation des aerodynamischen Wirkungsgrades nicht signifikant, da dieser schon Nahe des Idealwertes von 1 liegt. Bei der Masse und der internen Lebensdauer stellen sich ebenfalls keine signifikanten Änderungen ein.

Somit können diese Antwortflächen (292 Stützstellen bei 18 Eingabeparametern) für die folgenden Optimierungen der Masse, der externen Lebensdauer und dem aerodynamischen Wirkungsgrad verwendet werden. Aus Gründen der Konsistenz sollen für diese drei Zielgrößen ausschließlich Antwortflächen, welche mit der Kriging-Methode erstellt wurden, verwendet werden, obwohl für die Masse eine Antwortfläche aus linearer Regression ausreichend wäre und für den aerodynamischen Wirkungsgrad alle Antwortflächen eine genügende Qualität aufweisen.

#### **5.5.2. Ein-Ziel-Optimierung der Lebensdauer**

Zweck der Ein-Ziel- beziehungsweise deterministischen Optimierung der externen Lebensdauer war zum einen das Testen der Matlab-Toolbox für das Realbeispiel der Hochdruckturbineinschaukel. Zum anderen sollte ein Vergleichswert geschaffen werden, um gegen das Ergebnis aus der Robustheitsoptimierung für den besten Mittelwert der externen Lebensdauer zu vergleichen.

Das Ergebnis für die deterministische Ein-Ziel-Optimierung bei dem eingeschränkten Parameterbereich lautet rund 37500 Flugzyklen und wurde bei einer Populationsgröße von 250 Individuen nach 1000 Generationen erzielt. Die Anzahl von 250000 Auswertungen erscheint im ersten Moment zu viel, jedoch sind mit Hilfe der erstellten Antwortfläche rund 150000 Auswertungen pro Minute möglich, sodass die deterministische Optimierung nicht mehr als zwei Minuten gedauert hat. Das Ergebnis mit der besten externen Lebensdauer ist in der Tabelle 5.3 zusammen mit einer Übersicht der Eingabeparameter ausgelistet.

#### **5.5.3. Robustheitsoptimierung der Lebensdauer**

Die Robustheitsoptimierung für die externe Lebensdauer wurde über 100 Generationen bei jeweils 80 Individuen pro Generation und 500 Auswertungen pro Individuum für die Robustheit durchgeführt. Dabei wurden die 500 Auswertungen pro Individuum zufallsbasiert auf der angenommenen 18-dimensionalen Normalverteilung (Mittelwert wird durch den Parametersatz vom Individuum bestimmt und die Standardabweichung ist aus Tabelle 5.1 zu entnehmen) auf der Antwortfläche ausgewertet.

Als Hauptergebnis ist in Abbildung 5.9 die letzte Generation der Robustheitsoptimierung als Pareto-Front dargestellt. Die Front ist in drei Teilfronten zerfallen und es existieren nur noch Individuen vom Rang 1 oder 2. An diesem Punkt wurden die drei Individuen A, B und C markiert (●), da sie aus ihrer Teilfront als bester Kompromiss zwischen Mittelwert und Standardabweichung der Lebensdauer hervorgehen. Zusätzlich wurden diese Individuen in Tabelle 5.3 mit den dazugehörigen Zahlwerten eingetragen. An dieser Stelle wird noch einmal der Unterschied zur deterministischen Analyse deutlich. Während dort nur ein Zahlwert ohne statistische Aussagekraft den Parametersatz vervollständigt, beschreibt die robuste Aussage durch einen Mittelwert und eine Schwankungsgröße das Systemverhalten des Parametersatzes.

#	Parameter	Ein-Ziel	Zwei-Ziel: A	Zwei-Ziel: B	Zwei-Ziel: C
1	Sektion 1 axial	-0.350	-0.350	-0.346	-0.275
2	Sektion 1 lean	0.071	0.095	-0.018	-0.005
3	Sektion 1 skew	-0.204	-0.165	0.219	0.350
4	Sektion 6 skew	-0.343	-0.344	-0.350	-0.194
5	Sektion 11 axial	-0.350	-0.350	0.271	0.340
6	Sektion 11 lean	-0.181	-0.158	-0.347	-0.341
7	Sektion 11 skew	-0.307	0.160	0.169	0.347
8	Sektion 16 skew	0.350	0.342	0.003	0.246
9	Sektion 21 axial	0.350	0.350	0.350	-0.337
10	Sektion 21 lean	-0.231	-0.190	-0.250	-0.112
11	Sektion 21 skew	0.014	-0.236	-0.094	0.070
12	Plattform axial	-0.255	-0.242	0.067	0.081
13	Plattform lean	-0.255	-0.254	-0.232	-0.120
14	Plattform skew	0.198	0.193	0.255	-0.226
15	Skalierung Wandstärke PS	1.062	1.051	1.006	1.062
16	Skalierung Wandstärke SS	0.930	0.938	1.069	1.065
17	Kristallwinkel $\theta$	0.322	-5.905	-0.052	2.553
18	Skalierung Temperatur	0.999	0.999	0.999	1.001
19	(det.)	37634	—	—	—
20	ext. Lebensdauer ( $\mu$ )	—	22069	29857	37065
21	( $\sigma$ )	—	468	584	646

Tabelle 5.3: Parameterwerte zu den optimalen Punkten der Ein-Ziel-Optimierung und für ausgewählte Punkte der Pareto-Front der Zwei-Ziel-Optimierung

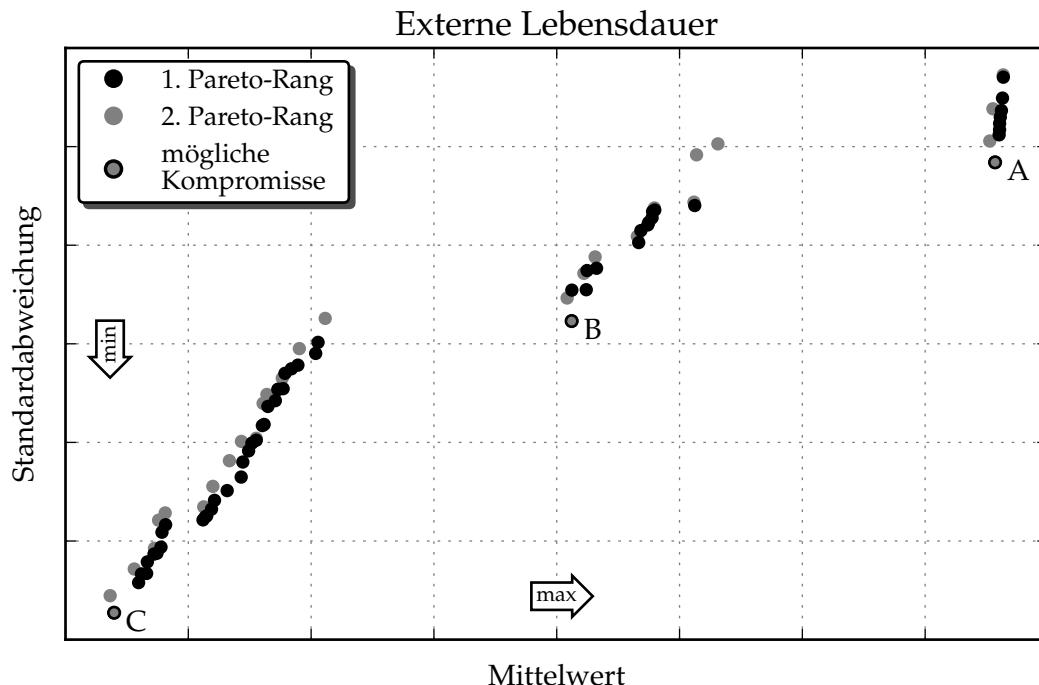


Abbildung 5.9: Pareto-Front der Robustheitsoptimierung für den Mittelwert und die Standardabweichung der externen Lebensdauer

Angemerkt werden muss, dass die Annahme der 18-dimensionalen Normalverteilung und das dazugehörige 500-fache zufallsbasierte Auswerten verbesserungswürdig sind. Sowohl die ange nommene Normalverteilung muss durch Analyse aus Fertigungsdaten berichtigt werden als auch bei der Bestimmung der Robustheit kann durch höherwertige Methoden die Anzahl der Auswer tungen reduziert werden. Nichtsdestotrotz stellt die Anzahl von 4 Millionen (= 100 Generationen \* 80 Individuen \* 500 Auswertungen) Auswertungen für die Antwortfläche kein Problem dar, da hierfür etwas weniger als 30 Minuten benötigt wurden.

#### 5.5.4. Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung

Bei der Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung werden neben der externen Lebensdauer auch die Masse der Turbinenschaufel und der dazugehörige aerodynamische Wirkungsgrad optimiert. Die interne Lebensdauer wurde, wie schon erwähnt, aufgrund der Qualität der erzeugten Antwortflächen von den Untersuchungen ausgeschlossen. Da nun nicht mehr zwei, sondern sechs Zielgrößen optimiert werden, wurde sowohl die Populationsgröße einer Generation auf 150 Individuen, als auch die Anzahl der Generationen auf 300 erhöht. Zusammen mit den 500 Auswertungen für die Robustheit pro Individuum ergeben sich insgesamt 22,5 Millionen Evaluierungen auf der Antwortfläche. Der zeitliche Aufwand für diese Optimierung betrugt in etwa 2,5 Stunden.

Leider sind die Darstellungsmöglichkeiten für höherdimensionale Probleme begrenzt. Für zwei Dimensionen ist die Pareto-Front standardmäßig die beste Form der Darstellung. Eine Erweiterung auf drei oder vier Dimensionen ist über die Größe und/oder die Farbe der verwendeten Symbole (meist Punkte) möglich und durchaus üblich. Dies wurde auch schon im Kapitel 4 am Beispiel der Abbildung 4.10 demonstriert. Bei mehr als vier Dimensionen (Eingabe- und/oder Ausgabeparameter) werden oft Parallelgraphen oder Spinnennetzdiagramme verwendet. Nachteil ist die oftmals statische Darstellungsweise, da man in den vorliegenden Datensätzen suchen, sortieren oder filtern will. Aus diesem Grund wurde die Software MOViT geschrieben. Diese ist eine interaktive Kombination aus einem Parallelgraphen in Form eines doppelten Schiebe-

reglers (für Minimal- und Maximalwerte) und einem Spinnennetzdiagramm mit MouseOver-Funktionen. Eine detaillierte Beschreibung ist im Anhang A.3 zu finden.

Dementsprechend ist in Abbildung 5.10 mit Hilfe von MOViT die letzte Generation der Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung für externe Lebensdauer, Masse und aerodynamischen Wirkungsgrad in Form der jeweiligen Mittelwerte und Standardabweichungen dargestellt. Die besten Ergebnisse für jedes der sechs Ziele wurde farblich hervorgehoben. Die Achsen der Zielgrößen wurden so gedreht, dass das beste Design außen liegt, um einen visuellen Eindruck zu erhalten, der ein *gutes* Individuum durch einen großen Flächeninhalt dargestellt. Die Richtung der Achsen wird durch gelbe (nach innen) oder blaue (nach außen) Pfeile gekennzeichnet.

Das Referenzdesign (—) wurde ebenfalls in den Datensatz eingefügt. Die höchste mittlere externe Lebensdauer beträgt 36210 (—) und die geringste Standardabweichung der externen Lebensdauer beträgt 450 (—) Zyklen. Somit sind vergleichbare Ergebnisse, wie in der reinen Robustheitsoptimierung für die externe Lebensdauer (siehe Tabelle 5.3), erzielt worden.

- Referenz
- min  $\mu(Masse)$
- min  $\sigma(Masse)$
- max  $\mu(L_{Ext})$
- min  $\sigma(L_{Ext})$
- max  $\mu(\eta)$
- min  $\sigma(\eta)$

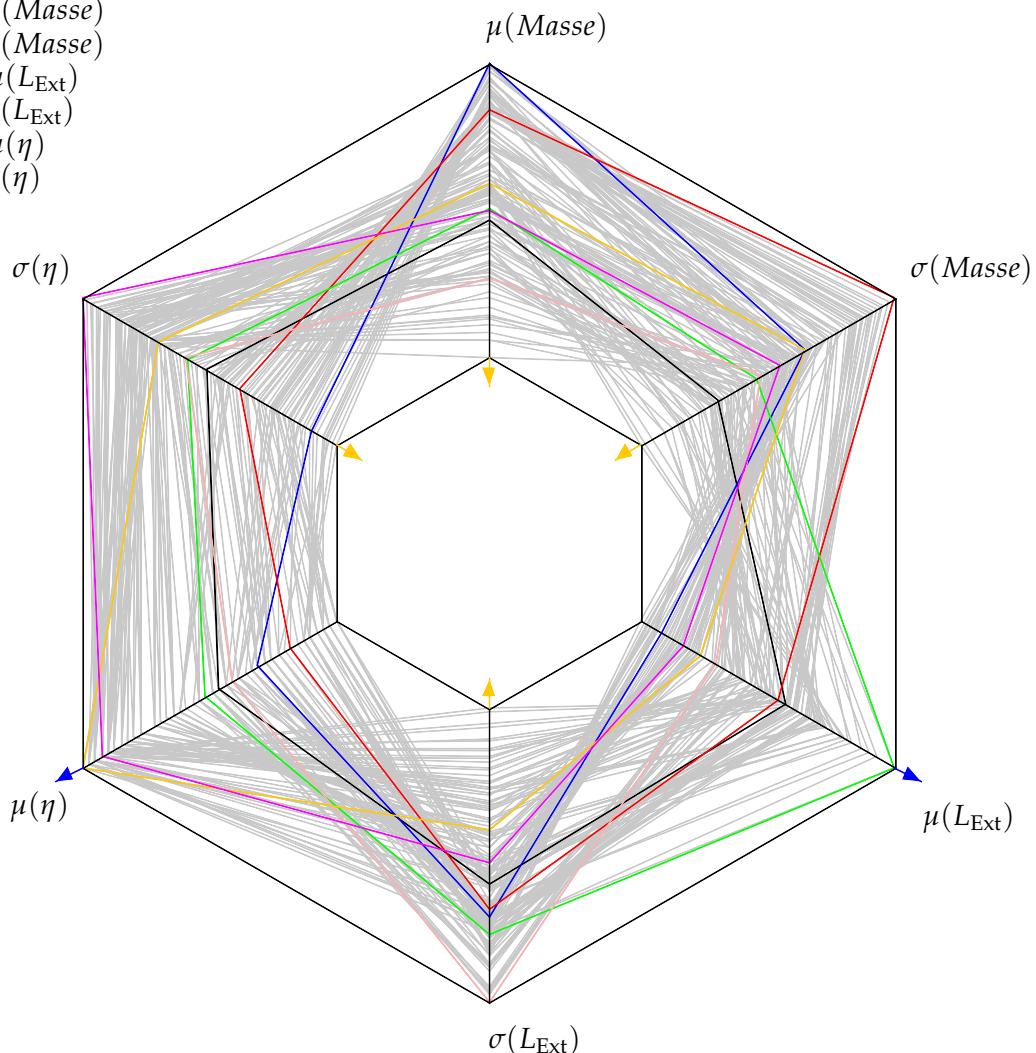


Abbildung 5.10: Ergebnisse der Mehr-Ziel- und Robustheitsoptimierung für die Mittelwerte und Standardabweichungen von Masse, Lebensdauer und aerodynamischem Wirkungsgrad

## 5.6. Zusammenfassung und Ausblick

Innerhalb des Kapitels 5 konnte eine Auslegungsstrategie aufgezeigt werden, welche nicht nur mehrere Disziplinen umfasst, sondern auch die Robustheit eines vorliegenden parametrischen Entwurfs behandelt. Es wurden nicht nur Parameter adressiert, welche die Geometrie beschreiben, sondern auch Parameter für das Material und die Randbedingungen. Der komplexe Fall der Rotorschaufel einer Hochdruckturbine erwies sich nur bezüglich der erhöhten Fehlerrate als herausfordernd.

Kernthema war die Validierung der Methoden zur Erstellung von Antwortflächen und die Bewertung der Qualität der Antwortflächen selbst, wobei beides mit den darunterliegenden Methoden zur Erstellung der benötigten Stützstellen verknüpft ist. Namentlich handelt es sich dabei um die Monte-Carlo-Simulation (MCS), Latin-Hypercube-Sampling (LHS), improved Latin-Hypercube-Sampling (iLHS) und optimal Latin-Hypercube-Sampling (oLHS). Es stellte sich heraus, dass die oLHS-Methode den anderen untersuchten Methoden im Sinne der gleichmäßigen Abtastung des Parameterraumes überlegen war. Dementsprechend ist es die Empfehlung des Autors diese Methode bevorzugt anzuwenden.

Bei den Methoden zur Erstellung der Antwortfläche wurden die lineare Regression (LR) mit unterschiedlichen Polynomen (erster Grad, mit Mischtermen und zweiter Grad), die radialen Basisfunktionen (RBF), die Kombination von linearer Regression und radialen Basisfunktionen (LR+RBF) und die Kriging-Methode (KRIG) untersucht. Die Kriging-Methode lieferte einerseits die beste Qualität für die Antwortflächen bei den Testfunktionen für Optimierungsalgorithmen und erzeugte andererseits beim Realbeispiel der Turbinenschaufel immer vertrauenswürdige Antwortflächen (interne Lebensdauer wegen genereller Qualitätsmängel ausgenommen). Als Bewertung für die Qualität der Antwortfläche erwies sich die Leave-One-Out-Crossvalidation (LOOCV) als zuverlässiges Kriterium. Die Erstellung der Antwortfläche mit der Kriging-Methode und die Überprüfung der Qualität mit der LOOCV ist dementsprechend die Empfehlung des Autors.

Mit Hilfe der erstellten und validierten Antwortflächen konnten mehrere Optimierungen erfolgreich durchgeführt werden. Aufgrund der Geschwindigkeit der Auswertungen auf den Antwortflächen war es möglich eine gleichzeitige Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung für die Disziplinen Aerodynamik, Kühlung und Strukturmechanik/Lebensdauerberechnung durchzuführen. Als Zielgrößen dienten die externe kombinierte Lebensdauer (LCF und Kriechen) auf der Schaufeloberfläche, die Gesamtmasse und der aerodynamische Wirkungsgrad der Turbinenschaufel. Hierbei wurde der aerodynamische Wirkungsgrad aus zuvor durchgeführten 3D-CFD Rechnungen entnommen und als Antwortfläche in den Arbeitsablauf implementiert. Die Modellierung der Turbinenkühlung wurde als einfaches Radialprofil in den Arbeitsablauf übernommen und mit einem Skalierungsfaktor versehen.

Trotz der komplexen Modellierung über mehrere Disziplinen und unterschiedliche Detaillierungsgrade konnte die Durchführung der Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung mit Hilfe von Antwortflächen realisiert werden. Die 22,5 Millionen Auswertungen verdeutlichen die Notwendigkeit einer Antwortfläche als Mittel der Wahl, insbesondere für die Robustheitsuntersuchung des aktuellen Parametersatzes. Eine solche Analyse wurde beim Industriepartner hiermit erstmals erfolgreich durchgeführt.

Als Ausblick sind jedoch noch mehrere Punkte zu nennen. Zunächst einmal wäre es wünschenswert gewesen, wenn eine umfangreiche Datenbasis aus fertigungsbedingten Abweichungen für die Eingabeparameter vorgelegt hätte. Damit wäre eine Auswahl sinnvoller Verteilungsfunktionen und Interaktionen zwischen den einzelnen Parametern möglich. In diesem Zusammenhang wäre die Verwendung von intelligenteren Methoden zur Robustheitsbewertung angebracht. Dadurch kann die Anzahl an 500 Auswertungen (auf der 18-dimensionalen Normalverteilung) sicherlich drastisch reduziert werden.

Durch die Verwendung eines eigenen Arbeitsablaufes für die Turbinenkühlung, wie es in Kapitel 4 schon angewendet wurde, wäre eine Verbesserung der Ergebnisqualität möglich. Des Weiteren würde mit dem benötigten Kühlmassenstrom eine weitere Zielgröße zur Verfügung stehen, welche ebenfalls aus gesamtheitlicher Sicht von Interesse ist. Nachteilhaft würde sich die teilweise erhöhte Rechenzeit auswirken, welche jedoch immer noch geringer ist, als die Rechenzeit der Kriechanalyse.

Eine der wichtigsten Verbesserungen wäre die Verwendung von sogenannten adaptiven Antwortflächenverfahren. Das heißt, nach der Erstellung und Optimierung auf der Antwortfläche würden automatisiert neue, speziell ausgewählte Stützstellen nachgerechnet werden und deren Ergebnisse würden in eine zweite Iteration für die Erstellung und Optimierung auf der neu generierten Antwortfläche fließen. Die Auswahl der Stützstellen würde auf unterschiedlichen Kriterien basieren: z.B. Nähe zum Optimum zur Erhöhung lokaler Qualität, detaillierte Abtastung des globalen Parameterraumes und/oder Eingrenzung der fehlgeschlagenen Durchläufe/Geometrien.

Als längerfristige Vision wäre eine automatische Überprüfung der gemessenen Fertigungsabweichungen in einen gesamtheitlichen Auslegungsprozess erstrebenswert, sodass jede hergestellte Komponente eine digitale Kopie besitzt deren Eigenschaften bekannt sind. Diese Idee ist unter dem Schlagwort *Digital Twin* bekannt.





## 6. Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Komponente der Rotorschaufel der ersten Stufe einer Hochdruckturbine eines Flugzeugtriebwerkes aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachtet. Zunächst wurde der allgemeine Einfluss der Parametrisierung auf den gesamten Auslegungsprozess, beginnend mit dem Aufbau der Parametrisierung in der Theorie bis zum besten Entwurf, in Kapitel 3 untersucht. Kern der Arbeit stellt mit Kapitel 4 die Auslegung einer Kühlungskonfiguration dar, wobei kontinuierliche und diskontinuierliche Eingabeparameter von Rippen und Filmen in einer Zwei-Ziel-Optimierung variiert wurden. In Kapitel 5 wurde ein Satz von unterschiedlichen Methoden vorgestellt, um die Auslegung zu beschleunigen beziehungsweise die Rechenzeit zu reduzieren. Ziel war eine gleichzeitige Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung. Als Hilfsmittel wurde jeweils ein automatischer Arbeitsablauf entwickelt oder aufgegriffen und angepasst, um als Zielstellung eine oder mehrere Optimierungen durchzuführen.

Aus der Erfahrung, welche durch die Erstellung und Verwendung der vorgestellten Arbeitsabläufe gewonnen wurde, lassen sich allgemein gültige Anforderungen ableiten. Zunächst müssen alle Bestandteile des Arbeitsablaufes automatisierbar sein. Diese zuerst trivial erscheinende Anforderung ist im industriellen Alltag nicht immer gegeben. Des Weiteren ist ein modularer Aufbau empfehlenswert, da sich dadurch die Erweiterbarkeit und Wartbarkeit des Arbeitsablaufes leichter umsetzen lassen. Die Definition der Schnittstellen zwischen den einzelnen Elementen des Arbeitsablaufes und benachbarten Disziplinen sollte eindeutig, plausibel und möglichst einfach sein. Das Abfangen von Fehlern sollte dort passieren, wo sie auftreten, um die Identifizierung und Behebung zu vereinfachen. Als Strategie zur Fehlerreduzierung ist umfangreiches Testen auf unterschiedlichen Ebenen zu nennen. Eine Verwendung von sogenannten *work-arounds* sollte vermieden werden.

Diese Faktoren waren die Ausgangsposition für den automatisierten Arbeitsablauf zur Untersuchung des Firtree im dritten Kapitel. Der Einfluss der Parametrisierung stand dabei im Vordergrund, da häufig nur eine Parametrisierung verwendet wird, jedoch die Ergebnisse stark davon abhängen können und sich die Qualität der Parametrisierung erst im Rahmen einer Optimierung zeigt. Anwendung fanden in dieser Untersuchung drei unterschiedliche Parametrisierungen. Diese teilen sich einen globalen Satz an Parametern und verfolgen lokal an den kritischen Stellen verschiedene Ansätze. Die erste Parametrisierung (*ParamA*) verwendete für die Fillets einen einfachen Kreisbogen, während die zweite Parametrisierung (*ParamB*) den Kurvenzug mit zwei Kreisbögen aufbaute. Des Weiteren kam eine komplexe Hilfskonstruktion zum Einsatz, um die C1-Stetigkeit zu gewährleisten. Bei der dritten Parametrisierung (*ParamC*) wurden verschiedene Spline-Methoden mit einer unterschiedlichen Anzahl an Stützstellen und Polynomgraden verwendet. Es wurde ebenfalls eine Hilfskonstruktion zur Erzeugung des Splines benötigt. Der rekursive Aufbau dieser Konstruktion erhöhte die Stabilität der Geometriegenerierung, könnte jedoch aus Anwendersicht unvorteilhaft sein, da der Zusammenhang der Parameter zunächst nicht intuitiv erscheint.

Hauptergebnis der Firtree-Optimierung ist, dass alle Parametrisierungen spezifische Vor- und Nachteile besitzen. Zwar benötigt die Parametrisierung mit den Splines die meisten Durchläufe in der Optimierung, jedoch wird der geringste Spannungsverlauf erreicht. Bei der Parametrisierung mit einem Kreisbogen pro Fillet ist die Anzahl der Durchläufe gering, hingegen lagen die Ergebnisse oberhalb des gesetzten Grenzwertes. Somit konnte kein valides Design erstellt werden. Die Parametrisierung mit dem Doppel-Kreisbogen ist bei dieser Problemstellung ein guter Kompromiss in Bezug auf das erreichte Spannungsniveau bei moderater Anzahl an Durchläufen in der Optimierung.

Bei der Optimierung der Kühlungskonfiguration wurden Geometrieparameter der internen Turbulatoren (Rippen) und der Filmkühlbohrungen variiert. Ziel war die gleichzeitige Reduzierung der Oberflächentemperatur der Rotorschaufel und des benötigten Massenstromes für die Kühlung. Es wurden zwei verschiedene Optimierungsformulierungen getestet. Zum einen eine dimensionslose Formulierung, um die Ergebnisse mit anderen Konfigurationen vergleichbar zu halten, und zum anderen die direkten Größen, um einen Eindruck von den absoluten Änderungen zu betonen. Darüber hinaus wurden zwei unterschiedliche Optimierungsalgorithmen (AMGA- und NSGA-II) betrachtet. Eine zusätzliche Komplexität stellte die Tatsache dar, dass bei den Eingabegrößen sowohl kontinuierliche (z.B. Anzahl der Bohrungen), als auch diskontinuierliche Parameter (z.B. Abstand von zwei Rippen) verwendet wurden.

Beide Optimierungsalgorithmen konnten sowohl mit den Eingabeparametern umgehen als auch das Referenzdesign verbessern. Dies geschah schon in der anfänglich durchgeföhrten DoE beim AMGA und beim NSGA-II innerhalb der ersten Generation. Dabei stellte sich heraus, dass der AMGA eine breitere Pareto-Front liefert, jedoch langsamer gegen diese Pareto-Front konvergiert als der NSGA-II. Der AMGA ist außerdem in der Lage kurzzeitige Ausfälle ganzer Generationen zu handhaben, während der NSGA-II den Entwurfsraum wieder aufweitet. Bei den Ergebnissen aus dem Vergleich der Optimierungsformulierungen gilt zu beachten, dass die dimensionslose und dimensionsbehaftete Formulierung jeweils verschiedene Freiheitsgrade im System ansprechen und die Rahmenbedingungen unterschiedlich sind (Fehlerrate, unbekannte "wahre" Pareto-Front). Auffällig bei der Optimierung mit den direkten Zielgrößen ist ein Clustering in der Pareto-Front. Dies ist dadurch zu erklären, dass diese Optimierung auch als Superposition mehrerer Optimierungen mit fixen kontinuierlichen Eingabeparametern gesehen werden kann.

Ziel des fünften Kapitels zur Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung war es mit Hilfe von Antwortflächen den Rechenaufwand zu reduzieren und gleichzeitig die Ergebnisqualität beizubehalten. Als Demonstrator wurden nicht nur Eingabeparameter zur Geometrie variiert, sondern auch für das Material und die Randbedingungen. Der verwendete Arbeitsablauf umfasste ein reduziertes Kühlungsmodell und eine Spannungs- und Lebensdauerberechnung, die aus einer kombinierten Lebensdauer von LCF und Kriechen bestand. Schwerpunkt war die Methodik zur Validierung der Antwortflächen und deren Anwendung auf das vorliegende Beispiel der Rottorschaufel. Vier Zielgrößen wurden adressiert: die Masse der Schaufel, der aerodynamische Wirkungsgrad und die kombinierte Lebensdauer auf den äußeren beziehungsweise inneren Oberflächen der Schaufel.

Bei der Qualitätsbewertung der Antwortflächen stellte sich heraus, dass die interne Lebensdauer nur ungenügend abgebildet wurde. Grund dafür war die häufig wechselnde geometrische Position der geringsten Lebensdauer und die zu geringe Netzauflösung an den entsprechenden Punkten. Die Antwortfläche der externen Lebensdauer, die das Hauptziel dieser Untersuchung war, konnte (wie auch die Antwortflächen für Masse und aerodynamischen Wirkungsgrad), aufgrund der hohen Qualität für weitere Untersuchungen verwendet werden. Es wurde zunächst eine deterministische Optimierung für die externe Lebensdauer vollzogen, gefolgt von einer Robustheitsoptimierung für den Mittelwert und die Standardabweichung der externen Lebensdauer. Abschließend wurde eine Robustheitsoptimierung mit den Mittelwerten und Standardabweichungen der drei Größen Masse, aerodynamischer Wirkungsgrad und externe Lebensdauer durchgeföhrt. Diese Optimierung benötigte rund drei Stunden und 22,5 Millionen Funktionsauswertungen auf der Antwortfläche.

Zusammenfassend konnte innerhalb dieser Arbeit der Einfluss der Parametrisierung auf den Gesamtprozess, ein detaillierter Auslegungsprozess für die Optimierung einer Konfiguration für die Turbinenkühlung, ebenso wie die Leistung von vertrauenswürdigen Antwortflächen aufgezeigt werden.

## 6.2. Ausblick

Folgend aus diesen Erkenntnissen, wäre eine engere Kopplung der drei beteiligten Disziplinen von aerodynamischer Auslegung, Bewertung der Kühlungskonfiguration und die Spannungsbzw. Lebensdauerberechnung der Rotorschaufel der nächste Schritt. Hierbei sind zwei Punkte im Flugzyklus von übergeordneter Bedeutung. Zum einen die Reiseflug-Bedingung ("cruise"), welche den Großteil der Flugdauer beansprucht, und zum anderen die Start-Bedingung ("max-take-off"), welche aufgrund der erhöhten Drehzahl und Temperaturbelastung einen Großteil des Lebensdauerverbrauches ausmacht. Momentan wird die aerodynamische Auslegung im Reiseflug und die Kühlung/Lebensdauer für den Start konzipiert. Ein Datenaustausch (z.B. für Randbedingungen) findet durch Skalierung in den jeweils anderen Flugzustand statt. Ideal wäre die Berechnung aller drei Disziplinen bei den zwei beschriebenen Punkten im Flugzyklus.

Bei der Kopplung steht auch das Genauigkeitslevel zur Diskussion. Hierbei ist die Frage in welchem Punkt man sich im Design-Prozess befindet ebenfalls von Bedeutung. Im "Prelim"-Design wäre eine Verwendung niederwertiger Methoden zur Kopplung empfehlenswert, da eine Vielzahl von Konzepten zur Auswahl steht und entsprechende Zeitrahmen keine großen Rechenzeiten zulassen. Im "Detailed"-Design sollte die Qualität und Belastbarkeit der Aussagen steigen und damit auch das dahinterliegende Genauigkeitslevel des gekoppelten Auslegungsprozesses.

Für die Kühlungsauslegung an sich ist eine Erhöhung des Genauigkeitslevels erforderlich. Dies kann einerseits durch automatisierte interne 3D-CFD erfolgen, wobei immer noch eine Iteration mit der externen Aerodynamik und der Bestimmung der Metalltemperaturen notwendig ist. Ein anderer Weg ist mit der CHT gegeben, die das gleichzeitige Lösen der strömungsmechanischen Gleichungen für externe und interne Domain und das Temperaturfeld des Metalls ermöglicht. Das Hilfsmittel des Wärmeübergangskoeffizienten, welcher Ursache vieler Fehler und Ungenauigkeiten ist, entfällt dabei. Nachteil ist der erhöhte Rechenaufwand und damit entsprechende Zeit und Kosten.

Ein weiterer Punkt ist der Einfluss der fertigungsbedingten Bauteilabweichungen. Diese Abweichungen sind in der Regel nur marginal Bestandteil des Auslegungsprozesses und sollten zunächst in ihrer Auswirkung auf die Zielgrößen untersucht und nach Signifikanz in den Auslegungsprozess übernommen werden. Leider ist die Datenlage nicht ausreichend, sodass in der Regel nur Schätzungen der Abweichungen betrachtet wurden. Der Trend geht dahin, vermehrt die Abweichungen durch Messungen innerhalb des Herstellungsprozesses zu erfassen und dem Auslegungsprozess zugänglich zu machen.

Methodisch sind ebenfalls einige Verbesserungen zu erwarten. Ein Thema wären die Antwortflächen. Dort gibt es adaptive Verfahren, die eine Reduzierung der Anzahl von notwendigen Stützstellen zur Folge hat. Bisher wurden auch leistungsfähigere Methoden zur Betrachtung von Robustheit weitestgehend vernachlässigt, sodass eine weitere Reduzierung der Anzahl an Auswertungen von gleichzeitiger Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung zu erwarten ist.





## Abbildungsverzeichnis

1.1.	Schnittmodell eines Rolls-Royce BR715 Triebwerk . . . . .	1
1.2.	Idealisierter Kreisprozess eines Flugzeugtriebwerkes . . . . .	2
1.3.	Kühlung der ersten Stufe einer Hochdruckturbine . . . . .	3
1.4.	Außen- und Innenansicht der Rotorschaufel des BR725-Triebwerkes . . . . .	4
1.5.	Herstellungsprozess einer Turbinenschaufel am Beispiel des Mittelschnittes . . . . .	6
2.1.	Überblick der Optimierungsalgorithmen . . . . .	14
2.2.	Vereinfachter Pareto-Rang und Strategie für die Folgegeneration . . . . .	15
2.3.	Überführung von der deterministischen zur stochastischen Analyse . . . . .	17
2.4.	Überblick unterschiedlicher Methoden zur Erstellung von Stützstellen . . . . .	18
2.5.	Verbindung der theoretischen Elemente und der beteiligten Disziplinen . . . . .	22
2.6.	Schematisches Temperaturprofil bei Metall und Strömung . . . . .	24
2.7.	Zusammenhang der dim. Kenngrößen bei Anwesenheit von Filmkühlung . . . . .	27
2.8.	Isentroper Wirkungsgrad der Turbine im T-s-Diagramm . . . . .	28
2.9.	Strömungsphänomene bei einer Rotorschaufel . . . . .	29
2.10.	Zusammenhang von Spannungs-Dehnungs-Kurve und Wöhlerkurve . . . . .	30
2.11.	Darstellung der Kriech-Phasen mit Hilfe von Dehnung, Dehnrate und Zeit . . . . .	31
3.1.	Firtree-Geometrie für Parametrisierung A . . . . .	37
3.2.	Hilfs-Konstrukt für die Parametrisierung B mit zwei Kreisbögen . . . . .	39
3.3.	Grundidee der Spline-Parametrisierung des Fillet . . . . .	40
3.4.	Beschreibung des Hilfs-Konstruktes zum Aufbauen der verschiedenen Splines . . . . .	41
3.5.	Beispielhafte Ergebnisse der Anfangsgeometrie für Parametrisierung A . . . . .	42
3.6.	Gitterkonvergenzstudie für die Spannung gegenüber der lokalen Kantenlänge . . . . .	43
3.7.	Strukturgramm für den verwendeten Arbeitsablauf der Firtree-Optimierung . . . . .	44
3.8.	Verhalten der spezifischen Eingabeparameter für Parametrisierung A . . . . .	47
3.9.	Verhalten der globalen Eingabeparameter für Parametrisierung A . . . . .	47
3.10.	Verhalten von Zielgröße und Nebenbedingungen für Parametrisierung A . . . . .	48
3.11.	Ergebnisse der unterschiedlichen Optimierungen für den vierten Fillet . . . . .	49
4.1.	Schematische Darstellung des Mittelschnittes der Turbinenschaufel . . . . .	57
4.2.	Visualisierung der Film-Parametrisierung . . . . .	58
4.3.	Visualisierung der Rippen-Parametrisierung . . . . .	59
4.4.	Strukturgramm für den verwendeten Arbeitsablauf der Kühlungsoptimierung . . . . .	60
4.5.	Aufbau der Auslegungssoftware JB56 . . . . .	61
4.6.	Ergebnisse der Zwei-Ziel-Optimierung mit dem AMGA Algorithmus . . . . .	65
4.7.	Ergebnisse der Zwei-Ziel-Optimierung mit dem NSGA-II Algorithmus . . . . .	65
4.8.	Vergleich der Pareto-Fronten von AMGA und NSGA-II . . . . .	67
4.9.	Ergebnisse der alternativen Optimierungsformulierung mit dem AMGA . . . . .	69
4.10.	Clustering der alt. Formulierung mit Anzahl Bohrungen für Filmreihe SS2 und PS1 . . . . .	69
5.1.	Überblick über die erstellte Matlab-Toolbox . . . . .	76
5.2.	Ergebnisse der Stützstellenmethoden für steigende Anzahl an Stützstellen . . . . .	78
5.3.	Ergebnisse der Stützstellenmethoden für steigende Dimension . . . . .	78
5.4.	Verhalten der Antwortflächen-Methoden für der Anzahl der Stützstellen . . . . .	79
5.5.	Einschränkung des Parameterbereiches aufgrund der Robustheit . . . . .	83
5.6.	Schematischer Überblick des gesamten Arbeitsprozesses mit Systemschnittstellen . . . . .	85
5.7.	Detaillierter Blick auf den Prozess zur Bestimmung der Spannung und Lebensdauer . . . . .	85
5.8.	Kriging-Approximation der Antwortflächen für die vier Zielgrößen . . . . .	88
5.9.	Pareto-Front der Robustheitsoptimierung für die externe Lebensdauer . . . . .	91
5.10.	Ergebnisse der Mehr-Ziel- und Robustheitsoptimierung . . . . .	92
A.1.	Beispielhafte Darstellung eines zufallsgenerierten Datensatzes in MOViT . . . . .	111

A.2. Modus für Mouse-Over in MOViT . . . . .	112
A.3. Modus für Auswahl mehrerer Individuen in MOViT . . . . .	113
A.4. Modus für gewichtete Ein-Ziel-Sortierung in MOViT . . . . .	113
A.5. Schematische Beschreibung des strategischen Vorgehens bei Optimierungen . . . . .	114
A.6. Clustering der alt. Formulierung mit Anzahl Rippen für Reihe $PS_1$ und $SS_1$ . . . . .	119
A.7. Clustering der alt. Formulierung mit Anzahl Bohrungen für Filmreihe $SS_1$ und $PS_2$ . . . . .	119
A.8. Branin-Funktion . . . . .	120

## Tabellenverzeichnis

2.1. Eigenschaften einer guten Parametrisierung . . . . .	11
3.1. Überblick der wichtigen globalen Parameter . . . . .	36
3.2. Benennungen zu Abb. 3.1 . . . . .	37
3.3. Benennung für $ParamB$ . . . . .	39
3.4. Benennung für $ParamC$ . . . . .	41
3.5. Liste von möglichen Zielgrößen und Nebenbedingungen für die Firtree-Optimierung	45
3.6. Überblick der durchgeföhrten Optimierungen des Firtree . . . . .	46
3.7. Vergleichsmatrix für die unterschiedlichen Parametrisierungen . . . . .	51
4.1. Benennung der Filmparameter . . . . .	58
4.2. Benennung der Rippenparameter . . . . .	59
4.3. Überblick der finalen Parameter für die folgenden Optimierungen . . . . .	62
4.4. Zusammenfassung der Fehler- und Erfolgsraten der drei Optimierungen . . . . .	66
5.1. Eingabeparameter der Robustheitsoptimierung . . . . .	81
5.2. Qualitätsbewertung der erstellten Antwortflächen . . . . .	87
5.3. Parameterwerte zu den optimalen Punkten . . . . .	90
A.1. Überblick der Parameter für die Firtree-Parametrisierungen . . . . .	118

## Literatur

- [1] J. Anderson. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, 1st Edition, 1995.
- [2] I. Arsenyev, F. Duddeck, and A. Fischersworing-Bunk. *Adaptive Surrogate-based Multi-Disciplinary Optimization for Vane Clusters*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2015-42164, Montréal, Canada, 2015.
- [3] T. Back. *Evolutionary algorithms in theory and practice*. Oxford University Press, 1st Edition, 1996.
- [4] H. Baehr and K. Stephan. *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer Vieweg, 8. Auflage, 2013.
- [5] L. Baert, C. Beauthier, M. Leborgne, and I. Lepot. *Surrogate-based Optimization for a Mixed-variable Design Space: Proof of Concept and Opportunities for Turbomachinery Applications*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2015-43254, Montréal, Canada, 2015.
- [6] K. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2. Auflage, 2002.
- [7] B. Beachkofski and R. Grandhi. *Improved Distributed Hypercube Sampling*. Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA 2002-1274, Denver, USA, 2002.
- [8] C. Beauthier, A. Mahajan, C. Sainvitu, P. Hendrick, S. Sharifzadeh, and D. Verstraete. *Hyper-sonic cryogenic tank design using mixed-variable surrogatebased optimization*. Proceedings of the 4th International Conference on Engineering Optimization, ENGOPT 2014, Lisbon, Portugal, pages 543-549, 2014.
- [9] D. Bestle. *Optimeirung dynamischer Systeme*. Vorlesung an der BTU Cottbus-Senftenberg, 2016.
- [10] W. Bräunling. *Flugzeugtriebwerke*. Springer, 4. Auflage, 2015.
- [11] K. Deb. *A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II*. Journal of Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 6 No. 2: pages 182-197, 2002.
- [12] R. Dennis. *The Gas Turbine Handbook*. U.S. Department of Energy, 2006.
- [13] J. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3rd Edition, 2002.
- [14] J. Ferziger and M. Peric. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer, 1. Auflage, 2008.
- [15] P. Flassig. *Unterstützende Optimierungsstrategien zur robusten aerodynamischen Verdichterschau-felauslegung*. Doktorarbeit, BTU Cottbus, Shaker-Verlag, 2011.
- [16] A. I. J. Forrester and A. J. Keane. *Recent advances in surrogate-based optimization*. Journal of Progress in Aerospace Sciences, Vol. 45 No. 1-3: pages 50-79, 2009.
- [17] J. Fröhlich. *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. Teubner Verlag, 1. Auflage, 2006.
- [18] J. Gräsel, A. Keskin, M. Swoboda, H. Przewozny, and A. Saxer. *A full parametric model for turbomachinery blade design and optimisation*. Proceedings of the ASME, DETC2004-57467, Salt Lake City, USA, 2004.
- [19] E. Haibach. *Betriebsfestigkeit*. Springer, 3. Auflage, 2006.
- [20] G. Halls. *Air Cooling of Turbine Blades and Vanes: An account of the history and development of gas turbine cooling*. Journal of Aircraft Engineering, Vol. 39 No. 8: pages 4-14, 1967.

- [21] J. Han, S. Dutta, and S. Ekkad. *Gas turbine heat transfer and cooling technology*. CRC Press, 2nd Edition, 2012.
- [22] N. Hansen, A. Auger, R. Ros, S. Finck, and P. Posik. *Comparing Results of 31 Algorithms from the Black-Box Optimization Benchmarking BBOB-2009*. Proceedings of the GECCO Genetic and Evolutionary Computation Conference 2010, pages. 1689-1696, Portland, USA, 2010.
- [23] N. Hansen and A. Ostermeier. *Adapting arbitrary normal mutation distributions in evolution strategies: The covariance matrix adaptation*. Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation, ICEC 96, pages 312-317, Nagoya, Japan, 1996.
- [24] N. Hansen and A. Ostermeier. *Convergence properties of evolution strategies with the derandomized covariance matrix adaptation*. Proceedings of the EUFIT'97, 5th European Congres on Intelligent Techniques and Soft Computing, pages 650-654, Aachen, Germany, 1997.
- [25] N. Hansen and A. Ostermeier. *Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies*. Journal of Evolutionary Computation, Vol. 6 No. 2: pages 159-195, 2001.
- [26] N. Hansen, A. Ostermeier, and A. Gawelczyk. *On the adaptation of arbitrary normal mutation distributions in evolution strategies: The generating set adaptation*. Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms, pages 57-64, San Francisco, USA, 1995.
- [27] R. L. Haupt and S. E. Haupt. *Practical Genetic Algorithms*. John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2004.
- [28] J. Hedderich and L. Sachs. *Angewandte Statistik*. Springer, 15. Auflage, 2016.
- [29] J. Henson, R. Dolan, G. Thomas, and C. Georgakis. *Automated Optimization of T-Root Rotor Grooves with B-Splines and Finite Element Analysis*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2015-43179, Montréal, Canada, 2015.
- [30] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Elsevier, 2nd Edition, 2007.
- [31] M. Holland and T. Thake. *Rotor Blade Cooling in High Pressure Turbines*. Journal of Aircraft, Vol. 17 No. 6: pages 412-418, 1980.
- [32] R. Jin, W. Chen, and A. Sudjianto. *An Efficient Algorithm for Constructing Optimal Design of Computer Experiments*. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 134 No. 1: pages 268-287, 2005.
- [33] J. J. Johnson, P. I. King, J. P. Clark, and M. K. Ooten. *Genetic Algorithm Optimization of a High-Pressure Turbine Vane Pressure Side Film Cooling Array*. Journal of Turbomachinery, Vol. 136 No. 1: 11 pages, 2014.
- [34] M. Johnson, L. Moore, and D. Ylvisaker. *Minimax and Maximin Distance Designs*. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 26 No. 2: pages 131-148, 1990.
- [35] T. R. Kingston. *Preliminary Assessment of Blade and Vane Cooling Flow Requirements*. Rolls-Royce Technical Report, DNS 94373, 2003.
- [36] T. R. Kingston. *Rapid design, analysis and optimisation of cooled Turbine blades*. Proceedings of the 22nd ISABE Conference, 2015-20275, Phoenix, USA, 2015.
- [37] B. Klein. *FEM - Grundlagen und Anwendungen*. Springer, 9. Auflage, 2012.
- [38] K. Knothe and H. Wessels. *Finite Elemente - Eine Einführung für Ingenieure*. Springer, 5. Auflage, 2017.

- [39] D. G. Krige. *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*. Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa, Vol. 52 No. 9: pages 201-203, 1952.
- [40] E. Larsson and B. Fornberg. *A Numerical Study of some Radial Basis Function based Solution Methods for Elliptic PDEs*. Journal of Computers & Mathematics with Applications, Vol. 46 No. 5-6: pages 891-902, 2003.
- [41] S. Lavagnoli, C. De Maesschalck, and G. Paniagua. *Analysis of the Heat Transfer driving Parameters in Tight Rotor Blade Tip Clearances*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2014-25291, Düsseldorf, Germany, 2014.
- [42] S. Lee, D.-H. Rhee, B. J. Cha, and K. Yee. *Film Cooling Performance Improvement with Optimized Hole Arrangement on Pressure Side Surface of Nozzle Guide Vane - Part 1: Optimization & Numerical Investigation*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2016-57975, Seoul, South Korea, 2016.
- [43] S. Lee, D.-H. Rhee, and K. Yee. *Optimal Arrangement of the Film Cooling Holes considering the Manufacturing Tolerance for High Pressure Turbine Nozzle*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2016-57973, Seoul, South Korea, 2016.
- [44] J.-S. Liu, M. Morris, M. Malak, R. Mathison, and M. Dunn. *Comparison of 3D Unsteady Transient Conjugate Heat Transfer Analysis on a high pressure Cooled Turbine Stage with Experimental Data*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2017-64596, Charlotte, USA, 2017.
- [45] S. Lophaven, H. Nielsen, and J. Sondergaard. *DACE, A Matlab Kriging Toolbox*. Technical Report, IMM-TR-2002-12, Technical University of Denmark, Copenhagen, 2002.
- [46] R. Maffulli and L. He. *Wall Temperature Effects on Heat Transfer Coefficient*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2013-94291, San Antonio, USA, 2013.
- [47] S. Meguid, P. Kanth, and A. Czekanski. *Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs*. Journal of Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 35 No. 4: pages 305-317, 2000.
- [48] C. Moeckel, D. Darmofal, T. R. Kingston, and R. Norton. *Toleranced Designs of Cooled Turbine Blades through Probabilistic Thermal Analysis of Manufacturing Variability*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2007-28009, Montréal, Canada, 2007.
- [49] M. Morris and T. Mitchell. *Exploratory Designs for Computational Experiments*. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 43 No. 3: pages 381-402, 1995.
- [50] J. A. Nelder and R. Mead. *A simplex method for function minimization*. The Computer Journal, Vol. 7 No. 4: pages 308-313, 1965.
- [51] P. Papanikos, S. Meguid, and Z. Stjepanovic. *Three-dimensional nonlinear finite element analysis of dovetail joints in aeroengine discs*. Journal of Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 29 No. 3-4: pages 173-186, 1998.
- [52] S. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, 1st Edition, 1980.
- [53] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book*. Springer, 2nd Edition, 1997.
- [54] S. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 1st Edition, 2000.
- [55] N. V. Queipo, R. T. Haftka, W. Shyy, T. Goel, R. Vaidyanathan, and P. K. Tucker. *Surrogate-based Analysis and Optimization*. Journal of Progress in Aerospace Sciences, Vol. 41 No. 1: pages 1-28, 2005.

- [56] D.-H. Rhee, Y. S. Kang, B. J. Cha, J.-S. Kang, S. Lee, and K. Yee. *Film Cooling Performance Improvement with Optimized Hole Arrangement on Pressure Side Surface of Nozzle Guide Vane - Part 2: Experimental Validation*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2016-57978, Seoul, South Korea, 2016.
- [57] J. Rodriguez, P. Cavadini, M. Brunelli, C. Custer, and C. Carpenter. *High Fidelity CHT CFD for Gas Turbine Heat Transfer Applications*. Proceedings of the 1st Global Power and Propulsion Forum, GPPF-2017- 171, Zürich, Schweiz, 2017.
- [58] Rolls-Royce. *The Jet Engine*. Wiley, ISBN 9781119065999, 2015.
- [59] A. Rosenbaum, A. Chamanfar, M. Jahazi, and A. Bonakdar. *Microstructure Analysis of Broached Inconel-718 Gas Turbine Disc Firtress*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2014-26972, Düsseldorf, Germany, 2014.
- [60] J. Rösler, H. Harders, and M. Bäker. *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. Teubner Verlag, 3. Auflage, 2008.
- [61] H. Schlichting and K. Gersten. *Grenzschicht-Theorie*. Springer, 10. Auflage, 2006.
- [62] H. Schwarz. *Methode der Finiten Elemente*. Teubner Verlag, 3. Auflage, 1991.
- [63] K. Siebertz, D. van Bebber, and T. Hochkirchen. *Statistische Versuchsplanung*. Springer, 2. Auflage, 2017.
- [64] W. Song and A. Keane. *An efficient evolutionary optimisation framework applied to turbine blade firtree root local profiles*. Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 29 No. 5: pages 382-390, 2005.
- [65] W. Song, A. Keane, J. Rees, A. Bhaskar, and S. Bagnall. *Local Shape Optimisation of Turbine Disc Firtrees using NURBS*. Proceedings of the 9th AIAA/ISSMO, AIAA 2002-5486, Atlanta, USA, 2002.
- [66] W. Song, A. Keane, J. Rees, A. Bhaskar, and S. Bagnall. *Turbine blade fir-tree root design optimisation using intelligent CAD and finite element analysis*. Journal of Computer & Structures, Vol. 80 No. 24: pages 1853-1867, 2002.
- [67] N. Srinivas and K. Deb. *Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms*. Journal of Evolutionary Computation, Vol. 2 No. 3: pages 221-248, 1994.
- [68] P. Steinke. *Finite-Elemente-Methode*. Springer, 5. Auflage, 2015.
- [69] M. Taylor. *Axial Flow Turbine - Aerodynamic Design*. Rolls-Royce internal lecture, 2003.
- [70] S. Tiwari, P. Koch, G. Fadel, and K. Deb. *AMGA: An Archive-based Micro Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization*. Proceedings of the GECCO Genetic and Evolutionary Computation Conference 2008, pages 729-736, Atlanta, USA, 2008.
- [71] L. Torbidoni and J. Horlock. *A New Method to Calculate the Coolant Requirements of a High Temperature Gas Turbine Blade*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2004-53729, Vienna, Austria, 2004.
- [72] F. Wagner. *Robustheitsoptimierung einer Hochdruckturbinenschaufel mit Hilfe von Antwortflächen*. Masterarbeit, Technische Universität Berlin, 2014.

- [73] F. Wagner, A. Kühhorn, T. Janetzke, and U. Gerstberger. *Multi-Objective Optimization of the Cooling Configuration of a High Pressure Turbine Blade*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2018-75616, Oslo, Norway, 2018.
- [74] F. Wagner, A. Kühhorn, and R. Parchem. *Robust design optimization applied to a high pressure turbine blade based on surrogate modelling techniques*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2015-42365, Montréal, Canada, 2015.
- [75] F. Wagner, A. Kühhorn, T. Weiss, and D. Otto. *Influence of Different Parametrizations on the Optimum Design of a High Pressure Turbine Blade Firtree*. Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2016-56749, Seoul, South Korea, 2016.
- [76] Wikipedia.org. [https://en.wikipedia.org/wiki/Test\\_functions\\_for\\_optimization](https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization). abgerufen am 20.03.2018.
- [77] D. Wilcox. *Turbulence Model for CFD*. DCW Industries, 3rd Edition, 2006.
- [78] L. Witek. *Failure analysis of turbine disc of an aero engine*. Journal of Engineering Failure Analysis, Vol. 13 No. 1: pages 9-17, 2005.
- [79] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and D. Fox. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier, 7th Edition, 2013.
- [80] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, 7th Edition, 2013.

## A. Anhang

### A.1. Dimensionslose Kennzahlen

An dieser Stelle soll eine kleine Übersicht gegeben werden, welche Kennzahlen in dieser Arbeit von Bedeutung sind. Dabei ist als Erstes die Reynolds-Zahl zu nennen, welche eine der wichtigsten Kennzahlen ist. Verwendung findet diese Kennzahl z.B. im Kapitel 4 bezüglich der externen Umströmung der Turbinenschaufel und bei der internen Durchströmung der Kühlkanäle. Die Referenzlängen und -geschwindigkeiten sind je nach betrachtetem Bereich unterschiedlich.

$$\text{Re} := \frac{\rho u_0 L_0}{\mu} = \frac{\rho u_\infty L_{\text{chord}}}{\mu} = \frac{\frac{\dot{m}}{A} D_h}{\mu} \hat{=} \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} \quad (\text{A.1})$$

Durch die Mach-Zahl werden die Strömungsgebiete nach der Geschwindigkeit aufgeteilt. Dies hat wiederum Einfluss auf die zu verwendende Numerik. Im Allgemeinen ist die umströmte Rotorshaufel im transsonischen Bereich bei Mach-Zahlen um 1 und die interne Durchströmung bei  $\text{Ma} < 0.3$ .

$$\text{Ma} := \frac{u}{c_0} \hat{=} \frac{\text{aktuelle Geschwindigkeit}}{\text{Schallgeschwindigkeit}} \quad (\text{A.2})$$

Die Nusselt-Zahl wird meist zur dimensionslosen Darstellung des Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  verwendet, wobei mit  $k_l$  der Wärmeleitkoeffizient der Flüssigkeit (*fluid*) in der Gleichung Anwendung findet. Hierbei ist die physikalische Deutung hervorzuheben: Es wird das Verhältnis vom konvektiven Wärmeübergang zur reinen Wärmeleitung betrachtet.

$$\text{Nu} := \frac{hL_0}{k_f} \hat{=} \frac{\text{konvektiver Wärmetransfer}}{\text{reine Wärmeleitung}} \quad (\text{A.3})$$

Oftmals führt dies zu Verwirrung im Zusammenhang mit der Biot-Zahl. Dort findet mit  $k_s$  ist der Wärmeleitkoeffizient des Festkörpers (*solid*) Anwendung. Dementsprechend steht eine andere physikalische Bedeutung dahinter: Es wird der Widerstand von Wärmeleitung zum Wärmeübergang beschrieben. Es gutes Beispiel für die Biot-Zahl ist die Vorauslegung für die Turbinenkühlung. Dort können unterschiedlich dicke Wandschichten zu einer gemeinsamen Biot-Zahl zusammengerechnet werden.

$$\text{Bi} := \frac{hL_0}{k_s} \hat{=} \frac{\text{Wärmeleitwiderstand}}{\text{Wärmeübergangswiderstand}} \quad (\text{A.4})$$

Die Prandtl-Zahl beschreibt die Dicke der Strömungsgrenzschicht zur Temperaturgrenzschicht und gibt so zum Beispiel Informationen, wie stark das Gitter aufgelöst werden soll. So ist z.B. bei  $y^+ \approx 1.0$  zwar ausreichend für die Auslösung der Strömungsgrenzschicht, jedoch kann dies nicht ausreichen für die Temperaturgrenzschicht. Bei üblichen Prandtl-Zahlen von 0.7 bedeutet dies, dass die Temperaturgrenzschicht halb so groß ist und mit  $y^+ \approx 0.5$  aufgelöst werden muss.

$$\text{Pr} := \frac{\nu}{a} = \frac{c_p \mu}{k} \hat{=} \frac{\text{Strömungsgrenzschicht}}{\text{Temperaturgrenzschicht}} \quad (\text{A.5})$$

### A.2. Software

Dieser Abschnitt soll dazu einen groben Einblick in die verwendete/n Software/Programme zu geben. Dazu werden diejenigen Programme kurz erläutert, welche in dieser Arbeit hauptsächlich zum Einsatz kamen.

**Isight** ist eine sogenannte Process-Integration-Software und wurde von der Firma *simulia* entwickelt. Kernfunktionalität ist die Fähigkeit jedwede Software miteinander zu verbinden, welche

einen Batch-Mode besitzt, spricht automatisch aufgerufen werden kann. Dem Benutzer wird eine grafische Oberfläche zur Verfügung gestellt, sodass die logischen Verbindungen für einen Arbeitsablauf leichter erkennbar sein sollen. Diese Art der Betrachtung wird auch oft grafisches Programme genannt. Der Funktionsumfang beinhaltet unter anderem Komponenten für Aufgaben, Schleifen, Versuchsplanung und Optimierungen. Es existieren ebenfalls vordefinierte Schnittstellen zu weit verbreiteten Programmen wie z.B. Matlab oder Excel. Des Weiteren besteht die Möglichkeit eigene Komponenten selbst zu erstellen (mit Hilfe von Eclipse und gegebenen Vorlagen). Abschließend muss bemerkt werden, dass alle durchgeführten Optimierungen in dieser Arbeit unter Verwendung von **Isight**-Workflows realisiert wurden.

Die Software **Siemens NX** (Version 9.0) wurde innerhalb dieser Arbeit als CAD-Programm für die Erstellung aller Geometrien beziehungsweise den Aufbau der Parametrisierungen verwendet. Auch die Vernetzungsfunktionalität fand Anwendung für die Kühlungsoptimierung und die Robustheits- und Mehr-Ziel-Optimierung in Kapitel 4 respektive Kapitel 5. Es wurden unterschiedliche Strategien zur Erstellung einer Geometrie verwendet. Zum einen das Aktualisieren einer bestehenden Geometrie mit einem neuen Parametersatz (über eine *expression*-Datei) und zum anderen der komplette automatisierte Neuaufbau einer Geometrie über Skripte. Eine Ausnahme für die Parametrisierung stellt das Programm **Parablading** dar. Innerhalb dieser Rolls-Royce internen Software wurde die parametrisierte Oberfläche der Rotorschaufel aufgebaut und/oder mit einem Parametersatz aktualisiert.

Für die Berechnung aller strukturmechanischen Probleme wurde die Rolls-Royce interne Software **SC03** genutzt, welche Standard für haus-interne FE-Rechnungen ist. Dieses Programm ist über sogenannte Plugins erweiterbar. Einer der größten Vertreter ist die Auslegungssoftware für Turbinenkühlung **JB56**, dabei wird die Wärmeleitungsgleichung als FE-Teil in **SC03** gelöst und die anderen Teile werden von **JB56** behandelt. Eine Ausnahme stellt die Untersuchung des Firtree in Kapitel 3 dar. An dieser Stelle wird nur das Pre- und Post-Processing in **SC03** abgearbeitet und ein Plugin ruft **Abaqus** auf. **Abaqus** ist eine kommerzielle Software von der Firma *simulia* und beinhaltet eine hervorragende Behandlung von Kontakt-Problemen, was auch den Grund für die Anwendung bei der Firtree-Optimierung darstellt.

Für die Generierung der notwendigen Randbedingungen, für z.B. die Kühlungsoptimierung wurden ebenfalls 3D-CFD-Berechnungen der externen Aerodynamik durchgeführt. Dies erfolgte mit der Rolls-Royce internen Software **Hydra**, welche nicht nur ein Strömungslöser ist, sondern auch das Pre- und Post-Processing behandelt. Dieser Dichte-basierte Löser ist vor allem für CFD-Berechnungen für hohe Mach-Zahlen geeignet, was der Fall bei der externen Umströmung einer Stator- oder Rotorschaufel ist. Hierbei wurden unterschiedliche Vernetzer angewendet. Zum einen war dies **Boxer**, eine Software von der Universität Cambridge (*Cambridge Flow Soultons*), welche auf der sogenannten Octree-Meshing-Strategie aufsetzt. Zum anderen war dies **Centaur**, eine kommerzielle Software der Firma *CentaurSoft*. Beide Vernetzersprogramme wurden im Rahmen des Arbeitspakets automatisiert und für Arbeitsabläufe zugänglich gemacht, wurden aber nicht in dieser Arbeit beschrieben.

Für die Berechnung der internen Strömung in der Rotorschaufel wurden CFD-Rechnungen mit den Softwareprodukten von **Ansys** durchgeführt. Dabei handelte es sich sowohl um **Fluent**, als auch um **CFX**. Diese Ergebnisse fanden Anwendung als zusätzliche Informationen für die Randbedingungen auf den internen Oberflächen der Rotorschaufel in der Kühlungsoptimierung in Kapitel 4.

Viele kleinere Skripte in eigentlich allen Arbeitsabläufen und vor allem im Post-Processing und grafischen Darstellungen wurde mit der Programmiersprache **python** gemacht. Dabei kam die Arbeitsumgebung (IDE - integrated development environment) **Eclipse** zum Einsatz, welche sich in Kombination als außerordentliches Hilfsmittel erwies.

### A.3. MOViT

Die entwickelte Software MOViT (Multi Objective Visualisation Tool) adressiert die fehlenden Darstellungsmöglichkeiten zur Verfügung stehender Auswerteprogramme. Im Wesentlichen besteht MOViT aus einer interaktiven Verbindung zwischen der Datendarstellung in Form eines Parallelgraphen und eines Spinnennetzdiagrammes, welches die eigentlichen Daten anzeigen. Um einen ersten Eindruck zu vermitteln ist in Abbildung A.1 ein Datensatz mit acht Ausgabeparametern, welche zufällige Daten zwischen 0 und 1 basieren, abgebildet.

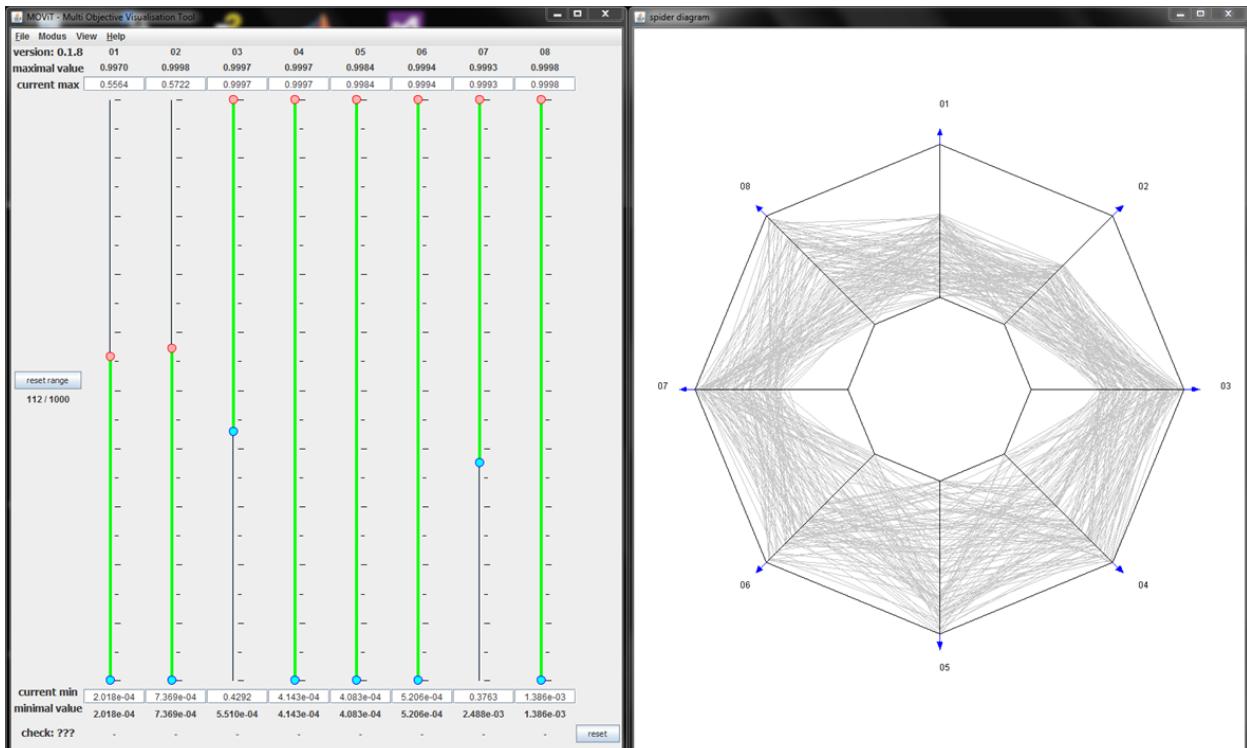


Abbildung A.1: Beispielhafte Darstellung eines zufallsgenerierten Datensatzes in MOViT, wobei die Parametergrenzen für einige Zielgrößen eingegrenzt sind

Bei MOViT handelt es sich um ein reines Auswertungsprogramm, das ausschließlich auf dem gegebenen Datensatz arbeitet. Speziell für umfangreichere Daten mit mehr als 100 Ergebnissen erweist sich MOViT als enorm mächtig. Die Anzahl der Ausgabeparameter muss größer als zwei sein, da eine Ein-Ziel-Optimierung trivial ist und bei der Zwei-Ziel-Optimierung die Darstellung in der Pareto-Front am Aussagekräftigsten ist.

Die Interaktivität zeichnet sich durch gegenseitiges Ändern im Spinnennetzdiagramm beziehungsweise Parallelgraph, welcher über Schieberegler abgebildet wird, aus. Wiederum sei auf Abbildung A.1 verwiesen. Dort sind die Parametergrenzen einiger Ausgabegrößen über die Schieberegler variiert, wobei sich gleichzeitig die Darstellung im Spinnennetzdiagramm ändert.

Im Wesentlichen gibt es drei verschiedene Darstellungsmodi innerhalb von MOViT. Der erste Modus ist in Abbildung A.2 verdeutlicht. Hier spielt die Interaktion mit der Maus die entscheidende Rolle. Durch Anklicken wird ein Individuum rot markiert und die entsprechenden Daten sind in der untersten Zeile des Fensters vom Parallelgraphen/Schieberegler zu erkennen. Als Mouse-Over wird ebenfalls das aktuelle Individuum unter der Maus mit grün markiert und kann durch Anklicken ausgewählt werden.

Im zweiten Modus können über den bekannten Index innerhalb des geladenen Datensatzes mehrere Individuen ausgewählt werden. Dies ist exemplarisch in der Abbildung A.3 aufgezeigt. Die Auswahl der markierten Individuen kann ebenfalls mit einer Legende beschriftet werden. Dieser Modus wurde zur Erstellung der Grafik 5.10 für die 6-Ziel-Optimierung in Kapitel 5.5.4

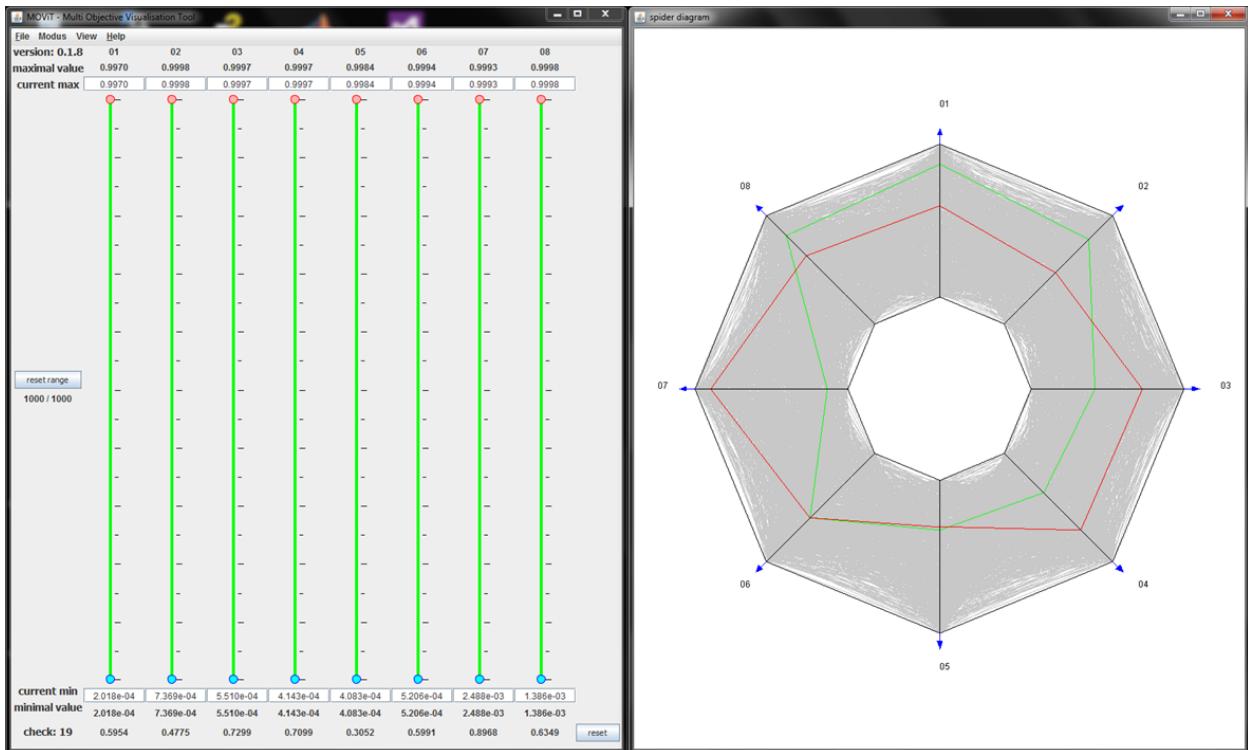


Abbildung A.2: Modus für Mouse-Over in MOViT mit selektiertem Individuum in rot (check: 19 im Parallelgraph/Schieberegler) und Mouse-Over-Individuum in grün

verwendet. An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass das Spinnennetzdiagramm als separate Vektorgrafik gespeichert werden kann.

Der dritte und letzte Modus befasst sich mit einer nachträglichen Gewichtung auf den Ergebnissen der Mehr-Ziel-Optimierung und ist beispielhaft in Abbildung A.4 dargestellt. Es können innerhalb des Fensters für den Parallelgraphen/Schieberegler die jeweiligen Gewichte für die Zielgröße angegeben werden, wobei Null den Ausgabeparameter ausschließt. Es muss angemerkt werden, dass die Parameter intern mit ihren absoluten Werten vorliegen und die Gewichte entsprechend der Parametergrenzen anzupassen sind. Standardmäßig werden die drei besten Kandidaten durch Drücken des *calc*-Knopfes ermittelt und können durch *show* angezeigt werden.

Weiterhin ist es möglich zwischen den drei Modi ohne Datenverlust hin und her zu wechseln. Eine Speicherung als Projekt oder Ähnliches, damit dieselbe Ansicht beim erneuten Laden wieder erscheint, ist jedoch noch nicht implementiert. Die Benutzerfreundlichkeit wurde verbessert durch Verwendung der generischen Einlese-Routine, die unter anderem auch *Isight*-Datensätze verarbeitet.<sup>49</sup>

Für zukünftige Entwicklungen sind zwei größere Änderungen geplant. Zum einen soll ein Schieberegler-Fenster für die Eingabegrößen hinzugefügt werden und zum anderen ist ein Fenster vorgesehen um Screenshots von Geometrien und/oder Ergebnissen darzustellen. Diese sollen zum Beispiel über den ausgewählten Index im Mouse-Over-Modus automatisch, nach Angabe eines Pfades, nachgeladen werden. Somit hat der Benutzer direkt eine Visualisierung, wie sowohl die Geometrie aussieht, als auch ein repräsentatives Ergebnis.

<sup>49</sup>Dank gebührt an dieser Stelle Herrn P. Kupijai und Herrn M. Hinze

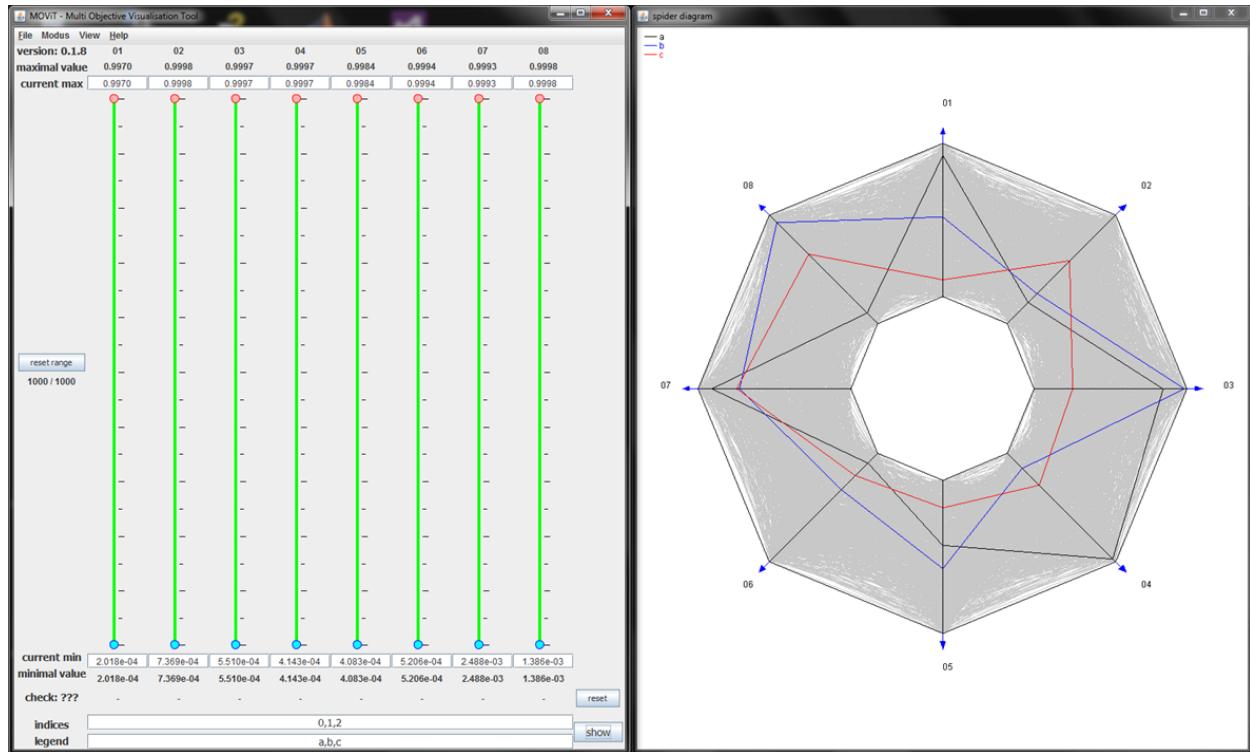


Abbildung A.3: Modus für Auswahl mehrerer Individuen in MOViT über den bekannten Index innerhalb des geladenen Datensatzes

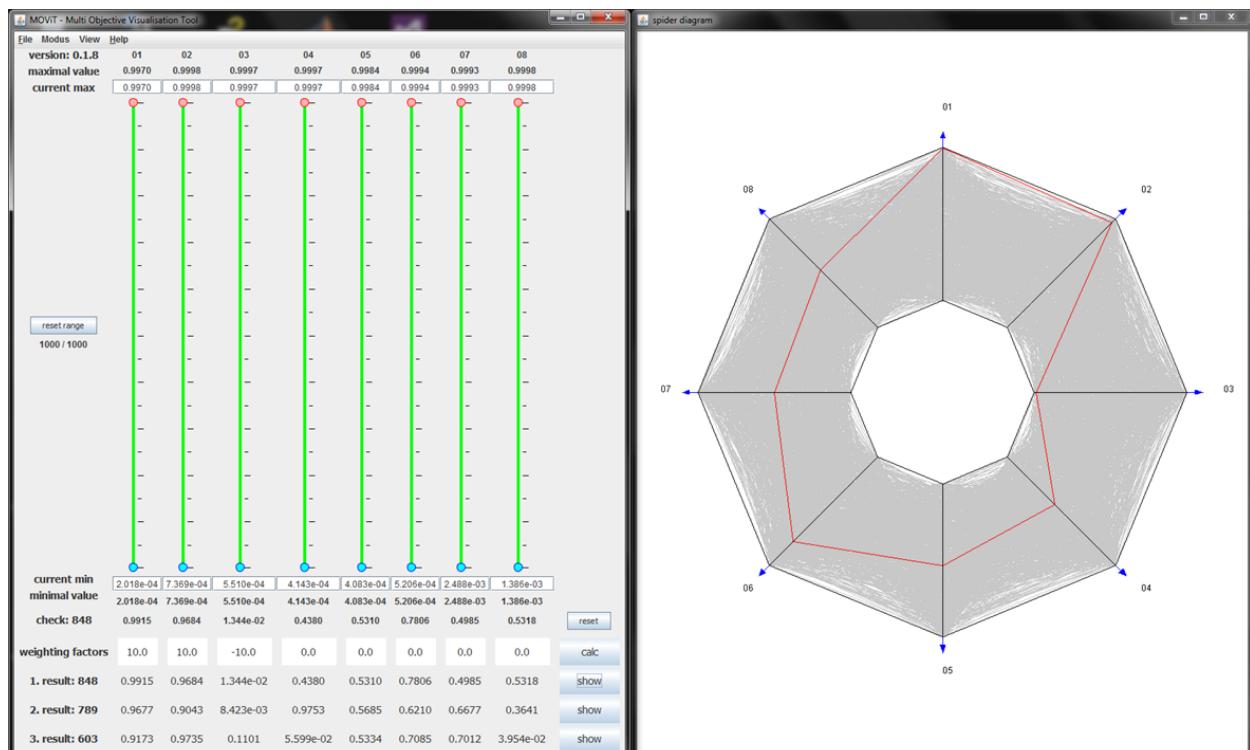


Abbildung A.4: Modus für gewichtete Ein-Ziel-Sortierung in MOViT mit Anzeige der drei besten Individuen

#### A.4. Strategisches Vorgehen zur Vorbereitung von Optimierungen

Innerhalb dieses Unterkapitels soll ein strategisches Vorgehen beschrieben werden, welches sich nach Erfahrung des Autors im Alltag als äußert praktikabel herausgestellt hat. Grundsätzlich war der Hintergedanke immer einen Prozess bis zur Optimierung voranzutreiben, jedoch kann er vordere Teil des strategischen Vorgehens auch für Parameterstudien und statische Versuchsplanungen (DoE) angewendet werden.

In Abbildung A.5 ist die grobe Vorgehensweise dargestellt, wobei die folgende Beschreibung erst den Hintergrund dieses Aufbaus verdeutlicht.

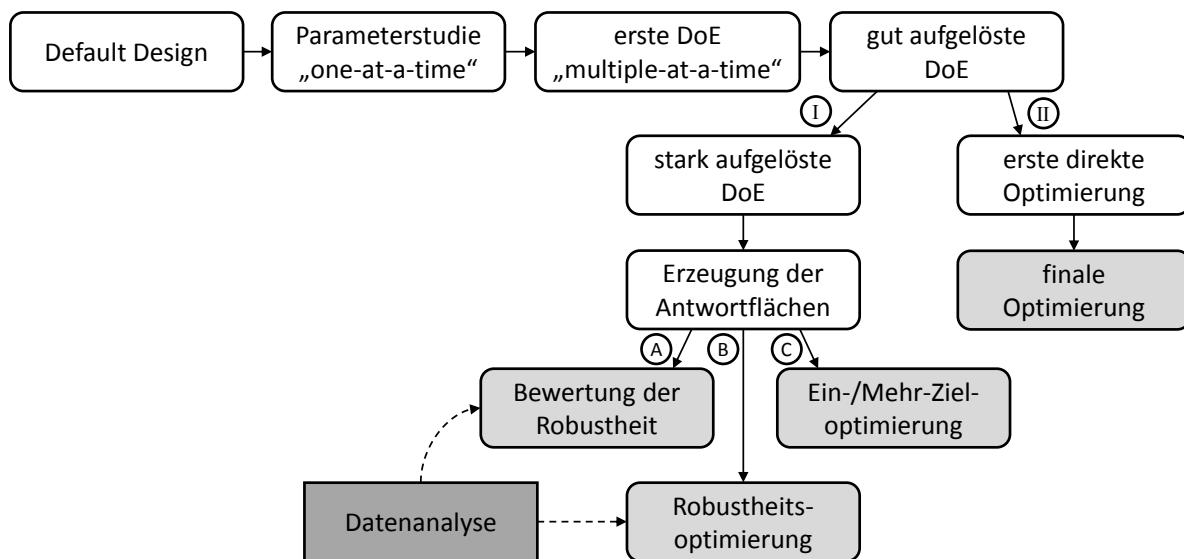


Abbildung A.5: Schematische Beschreibung des strategischen Vorgehens bei Optimierungen

##### Default Disign:

Das Default Design oder Referenz Design dient zum Aufsetzen der Automatisierung. Generell sollte getestet werden, ob dieselben Ergebnisse wie aus der/des Rechnung/Workflows per Hand ermittelt werden. Physikalische Korrektheit der Ergebnisse sind an dieser Stelle elementar und sollten im Detail überprüft werden, da eine Detailprüfung mit ansteigender Anzahl an Rechnungen meist nur noch stichprobenartig erfolgt.

##### Parameterstudie (“one-at-a-time”):

Bei der Variation von nur einem Eingabeparameter gleichzeitig wird der erste Stabilitätstest der Automatisierung durchgeführt. Hierbei ist es eine erste Fehler- beziehungsweise Ausfallrate erkennbar und es muss entsprechend bei der Automatisierung oder den Grenzen der Eingabeparameter nachgebessert werden. Zu diesem Zeitpunkt sollte auch die Plausibilität der Änderungen (der Ausgabeparameter in Bezug auf die Änderung der Eingabeparameter) überprüft werden. Das heißt die Ergebnisse sollten mit den Vorüberlegungen übereinstimmen. Jedoch können auch schon an dieser Stelle Nichtlinearitäten auftreten, welche nicht unbedingt mit den Vorüberlegungen übereinstimmen. Dementsprechend verbessern diese Studien schon das Verständnis des Systemverhaltens des vorliegenden Falles.

Des Weiteren kann man durch Austesten von Parallelisierung der Rechenaufwand für aufwendigere Untersuchungen abgeschätzt werden. Auch hier werden Schwächen im Arbeitsablauf schnell erkennbar und entsprechende Anpassungen müssen vorgenommen werden.

##### Erste DoE (“multiple-at-a-time”):

Beim verändern mehrerer Eingabeparameter werden erstmals Kreuzkorrelationen oder Interaktionen zwischen den einzelnen Parametern auf die Ausgabegrößen sichtbar. Oftmals ist dies schon der Zeitpunkt, wo die Änderungen der Ergebnisse menschlich schwer abschätzbar sind, da nun meist verstärkt nichtlineares Systemverhalten auftritt.

Nun ist erkennbar wie gut der Workflow / Arbeitsablauf mit einer hohen Anzahl an Rechnungen umgehen kann. Dementsprechend muss an dieser Stelle oftmals das Post-Processing nachgebessert werden, da nicht mehr im Detail die einzelnen Rechnungen überprüft werden können. Des Weiteren erhält man einen ausführlicheren Einblick in die Stabilität des Workflows. Dies betrifft nicht nur den Aufbau des Workflows selber, sondern auch die Qualität der Parametrisierung (siehe Kapitel 2.1.1). Außerdem können ebenfalls die Parametergrenzen neu abgeschätzt werden um eine akzeptable Fehlerrate der Geometrieerzeugung zu erhalten.

#### Gut aufgelöste DoE:

Die gut aufgelöste DoE ist oftmals schon das Ziel der Untersuchungen. Dabei steht meist das Systemverständnis im Vordergrund. Relevante und nicht relevante Eingabeparameter (immer in Bezug auf die betrachteten Ausgabeparameter) können entweder identifiziert oder für zukünftige Untersuchungen ausgeschlossen werden. Die Belastbarkeit der Ergebnisse steigt hierbei natürlich mit der Auflösung der Eingabeparameter (siehe nächster Punkt). Nun können auch finale Aussagen über die Parametergrenzen und die Fehler- beziehungsweise Erfolgsraten getroffen werden. Interessanterweise wird meist an dieser Stelle schon eine Verbesserung des Referenz-Designs erreicht.

*Anmerkung zur Aufteilung: An dieser Stelle trennt sich die Aufteilung im Strukturgramm aus dem einfachen Grund, dass unterschiedliche Zielstellungen verfolgt werden. Auf der einen Seite steht eine direkte Optimierung (Nachrechnen jedes Kandidaten) im Vordergrund II, da die jeweiligen Rechenzeiten vergleichsweise gering sind, während auf der anderen Seite die hohen Rechenzeiten dazu führen, dass letztendlich Antwortflächen verwendet werden I. Der zweite Weg ist bei einigen Problemstellungen unumgänglich, wie z.B. der Robustheitsoptimierung (siehe Kapitel 5)*

#### Erste direkte Optimierung:

Die erste Optimierung erfolgt mit dem reduzierten Satz an Eingabeparameter, welche sich in den Voruntersuchungen als relevant herausgestellt haben. Auch die Optimierungsformulierung wird dadurch getestet, dass man sich die Richtung der Optimierung (Verhalten der Eingabe- und Ausgabeparameter) genau anschaut. Hier ist von Interesse, ob Eingabeparameter gegen ihre Grenzen laufen und ob diese Grenzen eventuell verändert werden müssen oder eher aus Stabilitätsgründen beibehalten werden.

#### Finale Optimierung:

Die finale Optimierung ist das Ziel des Astes mit direkter Auswertung aller Kandidaten. Auf jeden Fall sollten die besten Ergebnisse im Detail überprüft und jeweilige Detailergebnisse kritisch hinterfragt werden. Des Weiteren sollte man sich das Verhalten der Eingabeparameter während der Optimierung anschauen und dabei immer die Frage im Hinterkopf behalten, ob ein lokales Optima erreicht wurde.

#### Stark aufgelöste DoE:

Die stark aufgelöste DoE ist der erste Abschnitt des zweiten Astes im Strukturgramm A.5 und Grundlage der Antwortfläche. Spätestens jetzt stellt sich die Frage nach der Anzahl der Rechnungen für die DoE. Als Daumenregel gilt zwar Zehn mal die Anzahl der relevanten Eingabeparameter, aber im Prinzip hängt dies vom Zusammenhang zwischen und Eingabe- und Ausgabeparametern ab. Herrscht ein linearer Zusammenhang würden zwei Punkte ausreichen, wohingegen ein sinusförmiger Zusammenhang (über z.B. eine komplette Schwingung) sehr viel höher aufgelöst werden muss.

Ein weiterer Punkt ist die Identifizierung von sogenannten *grey areas*<sup>50</sup>. Dies ist insofern wichtig, als das die Optimierung auf der Antwortfläche nicht in solche Bereiche laufen sollte. Lösung wäre an dieser Stelle eine adaptive Antwortfläche, bei welcher während der Optimierung einzelne ausgewählte Parametersätze nachgerechnet werden. Alternativ könnte auch eine Antwortflä-

<sup>50</sup>grey areas: Bereiche, in denen durch die Parameterkombination keine valide Geometrie erstellt werden kann oder kein Ergebnis erzeugt werden kann (Meshing-Probleme, Solver-Instabilitäten, ...).

che "Fehler-Flag" bestimmt werden, welche mit in die Optimierungsformulierung aufgenommen werden muss.

#### **Erstellung von Antwortflächen:**

Der wichtigste Punkt bei der Erstellung der Antwortfläche spielt die Bewertung der Qualität. Bei der eigentlichen Antwortflächen-Methode ist es empfehlenswert Kriging zu verwenden, wobei auch Lineare Regression ausreichend sein kann, um das Systemverhalten zu beschreiben. An dieser Stelle sei auf das Unterkapitel 2.1.5 in der Theorie und das Unterkapitel 5.2.3 in der Robustheitsoptimierung verwiesen.

Anzumerken ist, dass es notwendig ist für jede betrachtete Ausgabegröße und jede verwendete Nebenbedingung in der Optimierungsformulierung eine Antwortfläche zu erstellen. Des Weiteren ist es ebenfalls eine Antwortfläche für die "Fehler-Flag" zu erstellen. Damit ist die Tatsache gemeint, dass nicht jeder Satz an Eingabeparameter gerechnet werden konnte und dies an sich eine wichtige, nicht zu vernachlässigende Information darstellt.

#### **A Robustheitsuntersuchungen:**

Da für jeden Satz an Eingabeparametern mehrere Auswertungen, gemäß der fertigungsbedingten Abweichungen, durchgeführt werden müssen erleichtert die Verfügbarkeit der Antwortflächen die Analysen maßgeblich. Für statistisch auskonvergierte Ergebnisse sind die Antwortflächen sehr wertvoll, da eine entsprechend hohe Anzahl an Auswertungen vorgenommen werden kann.

#### **B Robustheitsoptimierung:**

Die eigentliche Stärke der Antwortflächen kommt erst bei der Kombination von Optimierung und Robustheitsanalyse zur Geltung. Nach heutigem Stand der Technik ist dieses Vorgehen fast unumgänglich, da eine extrem hohe Anzahl an Auswertungen notwendig ist. Als Beispiel dafür sei auf die Sechs-Ziel-Robustheitsoptimierung im Unterkapitel 5.5.4 verwiesen.

#### **C Ein-/Mehr-Ziel-Optimierung:**

Basierend auf den erzeugten, vertrauenswürdigen Antwortflächen können nun diverse Optimierungen durchgeführt werden. Da diese Optimierungen extrem schnell vonstattengehen, kann der Anwender an der Optimierungsformulierung herumexperimentieren. (Immer mit der Limitierung, das für die gewählten Ausgabeparameter und Nebenbedingungen eine Antwortfläche existiert!)

#### **Datenanalyse:**

Es soll an dieser Stelle betont werden, wie elementar wichtig die Datenanalyse zur Erstellung der Verteilungen und Korrelationen für die Robustheitsuntersuchungen sind. Zwar gehört diese Datenanalyse nicht direkt zum strategischen Vorgehen für Optimierungen, aber damit steht und fällt jede Aussage zur Robustheit. Oftmals werden Verteilungen und Korrelationen der Eingabeparameter geschätzt, wobei die daraus gewonnenen Ergebnisse nur mit Vorsicht zu genießen sind. Dieses Vorgehen eignet sich eher um methodische Möglichkeiten zu testen.

Generell sollte bei der Datenanalyse für jede ermittelte Verteilung ein entsprechender Qualitätswert zum "fitten" angegeben und bei den Korrelationen sollten auch nicht lineare Zusammenhänge untersucht werden. Ein Identifizieren von Ausreißern sollte selbstverständlich sein. Auch sollten Clusteruntersuchungen (z.B. das Herstellen mit zwei unterschiedlichen Maschinen, was zwei getrennte Populationen für Fertigungsabweichungen zur Folge haben kann) Teil der Datenanalyse sein. Entsprechend muss auch Zeit für die Datenanalyse eingeplant werden!

## A.5. Parameterübersicht für den Firtree

In der Tabelle A.1 ist ein Überblick der globalen und lokalen Parameter für die Parametrisierungen A, B und C gegeben. Dabei sind im ersten Abschnitt die globalen Parameter, die in allen Optimierungen variiert werden (#1 – #5) normalisiert dargestellt und die restlichen Parameter, die zum Verständnis der Parametrisierung beitragen (siehe Kapitel 3.2.1 und/oder Abbildung 3.1) ausgegraut aufgelistet. Die restlichen drei Abschnitte in der Tabelle A.1 richten sich an die lokalen Parameter der Parametrisierungen A, B und C, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit nur einige Parameter der Parametrisierung C angegeben sind.

## A.6. Clustering in der Kühlungsoptimierung

Während der Trend des Clustering nahe der Pareto-Front bei den beiden Parametern der Anzahl der Bohrungen für die Filmreihe *SS2* und *PS1* relativ eindeutig in Abbildung 4.10 im Kapitel 4.6.3 zu erkennen ist, ist dies nicht mehr der Fall für die anderen diskreten Eingabeparameter der Kühlungsoptimierung. Nichtsdestotrotz können aus den beiden Abbildungen A.6 und A.7 wertvolle Informationen gewonnen werden.

In Abbildung A.6 sind die beiden Parameter für die Anzahl der Rippen auf Druck- (*PS1*) und Saugseite (*SS1*) innerhalb des ersten Kühlkanals in der Kühlungskonfiguration als Farbe beziehungsweise Größe des jeweiligen Punktes dargestellt. In der DoE-Phase und anfänglichen Optimierung werden noch geringe Werte für die Rippenanzahl auf der Druckseite (*PS1*) untersucht, während nahe der Pareto-Front hohe Werte dominieren. Daraus kann man entnehmen, dass für beide Zielgrößen dieser Parameter nicht unbedingt gegenläufige Tendenzen verursacht. Ähnlich wirkt sich die Anzahl der Rippen auf der Saugseite (*SS1*) aus. Dort dominiert der Maximalwert und eine Erweiterung des Parameterraumes wäre eine mögliche Option.

In Abbildung A.6 sind die beiden Parameter für die Anzahl der Bohrungen in der Filmreihe *SS1* und *PS2* als Farbe beziehungsweise Größe des jeweiligen Punktes dargestellt. Dabei zeigt vor allem die Anzahl der Bohrungen für die Reihe *PS2* einen eindeutigen Trend früh gegen den Minimalwert zu gehen. Auch an dieser Stelle steht die Frage im Raum, ob man den Parameterraum erweitern soll und eventuell sogar die gesamte Reihe entfernt werden könnte. Der Parameter für die Anzahl der Bohrungen in Reihe *SS1* zeigt wiederum einen Beitrag zum Clustering. An der linken oberen Seite der Pareto-Front dominieren kleine Werte und an der rechten unteren dominieren hohe Werte für diesen Parameter.

Tabelle A.1: Überblick der Parameter für die Firtree-Parametrisierungen

#	Parametername	Typ	Basiswert A/B/C	Min	Max	Funktion des Parameters / Kommentar
1	Bedding_Width_A	variabel	0.5	0.0	1.0	Länge der Kontaktlinie an Auswerteposition <b>A</b> (zw. Fillet 1 & 2)
2	Bedding_Width_B	variabel	0.5	0.0	1.0	Länge der Kontaktlinie an Auswerteposition <b>B</b> (zw. Fillet 3 & 4)
3	Firtree_Neck_Width	variabel	0.5	0.0	1.0	Breite des Schaufel-Firtree
4	Flank_Angle	variabel	0.333	0.0	1.0	Winkel der Kontaktlinie
5	NC_Flank_Angle	variabel	0.2	0.0	1.0	Winkel der Nicht-Kontakt-Linie
6	Barrel_Height	fix	normalisiert	-	-	Verschiebung zwischen Kontakt-Kreisbogen und -Linie
7	Clearance	fix	normalisiert	-	-	Abstand der Nicht-Kontakt-Flächen von Schaufel und Scheibe
8	Disc_Bore_Rad	fix	normalisiert	-	-	Innerer Radius der Scheibe
9	Disc_Rim_Rad	fix	normalisiert	-	-	Äußerer Radius der Scheibe
10	Firtree_Height	fix	normalisiert	-	-	Höhe des Firtree (Scheibe)
11	Overlap	fix	normalisiert	-	-	Versatz zwischen Kontakt-Kreisbogen und -Linie
12	Shank_Neck_Rad	fix	normalisiert	-	-	Äußerer Radius der Schaufel ( <i>shank</i> )
13	Shank_Neck_Width	fix	normalisiert	-	-	Breite des <i>shank</i> am äußeren Radius
14	Firtree_Length	3D Par.	3D Par.	-	-	Gesamtlänge des Firtree (in 3D)
15	Skew	3D Par.	3D Par.	-	-	Schrägungswinkel des Firtree (in 3D)
20	Ang2Disc	variabel	0.333	0.0	1.0	Radius des Kreisbogen am zweiten Fillet (disc → Scheibe)
21	Ang3Blade	variabel	0.333	0.0	1.0	Radius des Kreisbogen am dritten Fillet (blade → Schaufel)
22	Ang4Disc	variabel	0.333	0.0	1.0	Radius des Kreisbogen am vierten Fillet (disc → Scheibe)
31	Fillet2_Large	variabel	0.777	0.0	1.0	Größerer Radius des Kreisbogen zweiten Fillet auf der Scheibe (L → large)
32	Fillet2_Small	variabel	0.4	0.0	1.0	Kleinerer Radius des Kreisbogen zweiten Fillet auf der Scheibe (S → small)
33	Fillet3_Large	variabel	0.111	0.0	1.0	Größerer Radius des Kreisbogen dritten Fillet auf der Schaufel
34	Fillet3_Small	variabel	0.4	0.0	1.0	Kleinerer Radius des Kreisbogen dritten Fillet auf der Schaufel
35	Fillet4_Large	variabel	0.111	0.0	1.0	Größerer Radius des Kreisbogen vierten Fillet auf der Scheibe
36	Fillet4_Small	variabel	0.4	0.0	1.0	Kleinerer Radius des Kreisbogen vierten Fillet auf der Scheibe
37	TangAngle2	variabel	0.5	0.0	1.0	Winkel für die Hilfs-Konstruktion am zweiten Fillet
38	TangAngle3	variabel	0.5	0.0	1.0	Winkel für die Hilfs-Konstruktion am dritten Fillet
39	TangAngle4	variabel	0.5	0.0	1.0	Winkel für die Hilfs-Konstruktion am vierten Fillet
40	S2D_L0_Ang	variabel	0.8	0.0	1.0	Winkel der Hilfslinie L0 gegen die y-Achse
41	S2D_L0_Len	variabel	0.732	0.0	1.0	Länge der Hilfslinie L0
42	S2D_H1_Ang	variabel	10.0	5.0	60.0	Winkel der Hilfslinie H1 (für bei <i>ByPoles</i> -Methode verwendet)
43	S2D_H2_Ang	variabel	10.0	5.0	60.0	Winkel der Hilfslinie H2 (für bei <i>ByPoles</i> -Methode verwendet)
44	S2D_L1_Scal	variabel	0.45	0.3	0.7	Skalierungsfaktor für die Länge der Hilfslinie L1
45	S2D_L1_Rand	variabel	0.2	0.1	0.9	Rekursiver Skalierungsfaktor für den Restwinkel bzgl. der Hilfslinie L1
46	S2D_RemainAng	fix	<180	-	-	Restwinkel (genutzt in der rekursiven Definition)
47	switch	fix	0/1	-	-	Logischer Schalter zwischen den Methoden <i>ThroughPoints</i> und <i>ByPoles</i>
48	helpExtend	fix	1.0	-	-	Wert für die Verlängerung der Hilfslinie H1 und H2

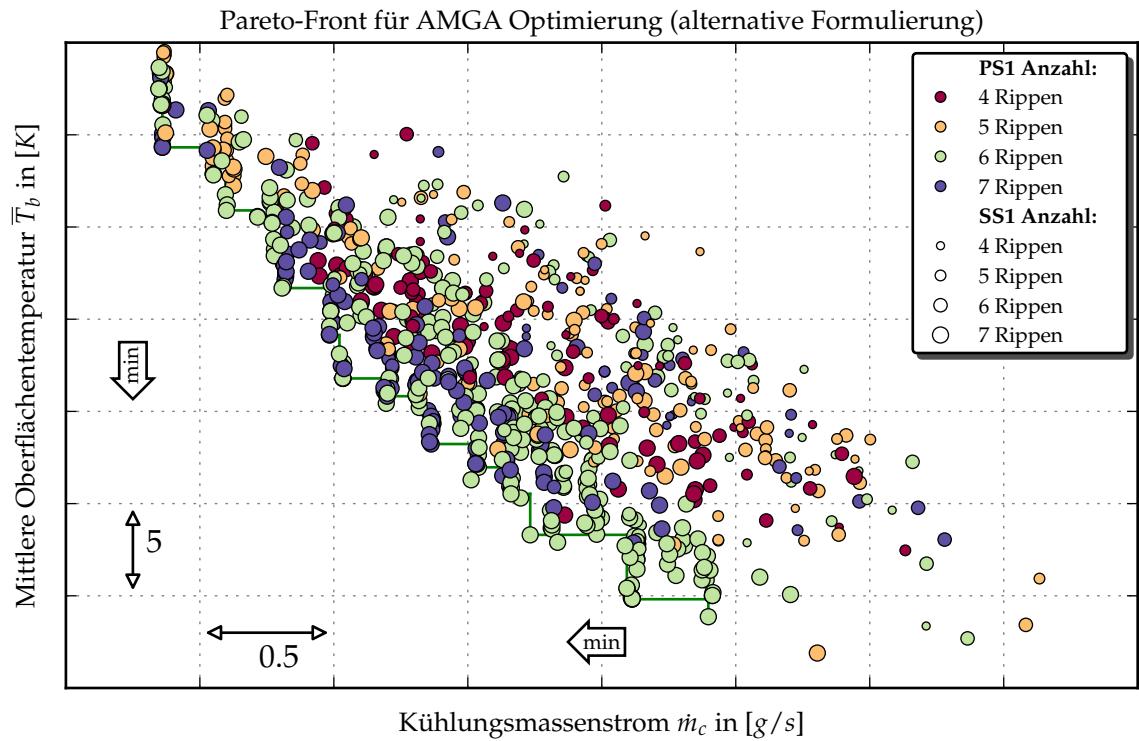


Abbildung A.6: Clustering bei der alternativen Optimierungsformulierung mit den zwei Eingabeparametern: Anzahl der Rippen im ersten Kühlkanal auf der Druckseite (PS1) und Saugseite (SS1) über die Farbe/Größe des jeweiligen Punktes dargestellt.

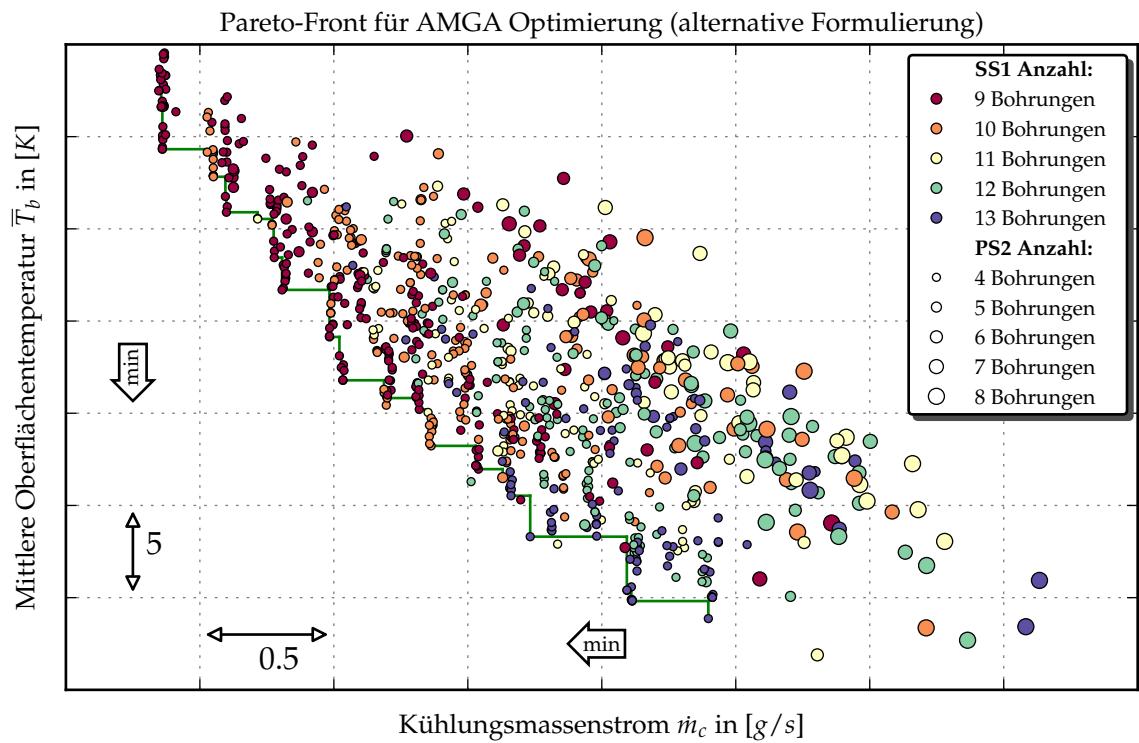


Abbildung A.7: Clustering bei der alternativen Optimierungsformulierung mit den zwei Eingabeparametern: Anzahl der Bohrungen für Filmreihe SS1 und PS2 über die Farbe/Größe des jeweiligen Punktes dargestellt.

### A.7. Branin-Testfunktion

Die Branin-Funktion ist eine typische Testfunktion für Optimierungsalgorithmen. Die mathematische Formulierung kann geschrieben werden als:

$$f(x, y) = \left( y - \frac{5.1}{4\pi^2}x^2 + \frac{5}{\pi}x - 6 \right)^2 + 10 \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos(x) + 10. \quad (\text{A.6})$$

Die Branin-Funktion besitzt mehrere Minima vom gleichen Wert. Der Minimalwert ist  $f(x_{min}, y_{min}) = 0.397887$  und kann an den Positionen  $[x_{min}, y_{min}] = [(-\pi, 12.275); (\pi, 2.275); (3\pi, 2.475)]$  gefunden werden. Diese Testfunktion ist somit eine Herausforderung für evolutionäre Optimierungsalgorithmen, welche alle Minima finden sollten. Gradienten-basierte Algorithmen finden währenddessen nur das Gradienten-mäßig nächstgelegene Minimum. Eine grafische Darstellung der Branin-Funktion ist in der folgenden Abbildung A.8 gegeben.

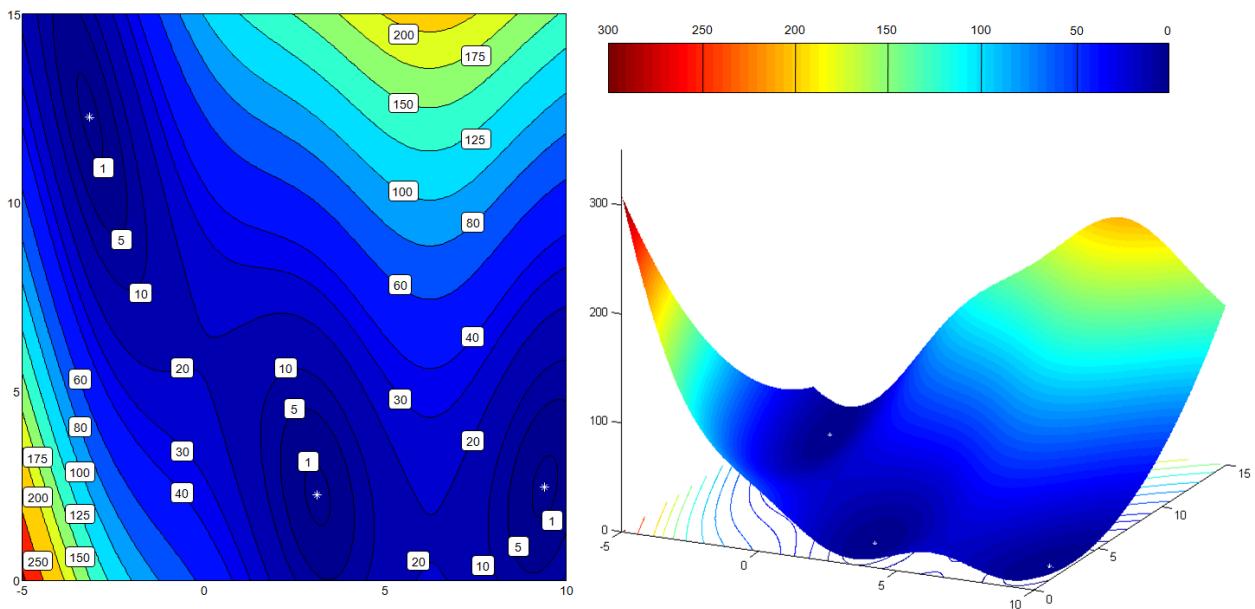


Abbildung A.8: Branin-Funktion mit drei betragsmäßig gleichen globalen Minima



