Chapitre 4
Problèmes de cheminement dans les graphes

Présenté par :
H. BENKAOUHA
Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB
haroun.benkaouha@gmail.com
haroun.benkaouha@usthb.edu.dz

Graphe sans circuits (S.C.)

- Un graphe orienté $G=(X, U)$ est dit S.C.
- Ssi toute composante fortement connexe est réduite à un sommet.
- Ssi il est isomorphe à son graphe réduit.
- Ssi tout chemin dans G est élémentaire.

Source et Puits

- Un sommet s est appelé <u>source</u> Ssi $d^-(s)=0$.
- Un sommet p est appelé <u>puits</u> Ssi $d^+(p)=0$.
- Tt graphe S.C. possède une source et un puits.
- Dans un graphe S.C. $G=(X, U)$ $\forall x \in X$,
  - L'<u>extrémité initiale</u> ($\boldsymbol{s} \in X$) du <u>plus long chemin</u> vers x est une <u>source</u>.
  - L'<u>extrémité terminale</u> ($\boldsymbol{p} \in X$) d'<u>un plus long chemin</u> commençant en x est un <u>puits</u>.

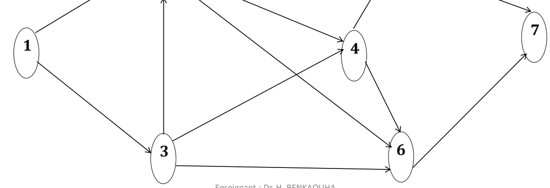
Niveau d'un sommet

- Soit $G=(X, U)$, un graphe orienté sans circuits. A tout $x \in X$, on associe un entier :
  - $v(x)$: **niveau** de x = la longueur max. d'un chemin élémentaire se terminant à x.
- On affecte par convention à une source s la valeur $v(s)=0$.
- On note par $\lambda(G)$ le plus grand niveau dans G.
- $\lambda(G)$ correspond au niveau d'un puits.

Partition en niveaux

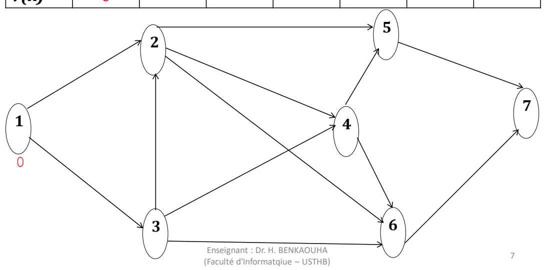
- Soit $G=(X,U)$ est un graphe S.C.
- L'ensemble des sommets X peut être partitionné au maximum en $\lambda(G)+1$ stables. Où
  - chaque sommet de niveau i sera placé dans le stable N_i.
  - Chaque stable N_i représente un niveau de G.
- $G=(X,U)$ est S.C. <u>Ssi</u>
  - X admet une partition $\{N_0 \cup N_1 \cup \ldots\ldots \cup N_p\}$ / $x \in N_i \Leftrightarrow v(x)=i$

Partitionnement en niveaux - Exemple



Partitionnement en niveaux - Exemple

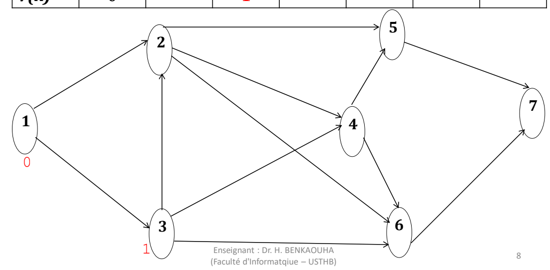
x	1	2	3	4	5	6	7
v(x)	0						



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatqiue – USTHB) 7

Partitionnement en niveaux - Exemple

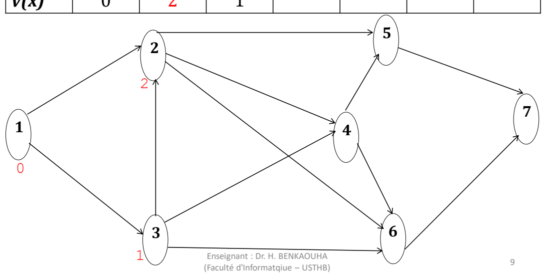
x	1	2	3	4	5	6	7
v(x)	0		1				



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatqiue – USTHB) 8

Partitionnement en niveaux - Exemple

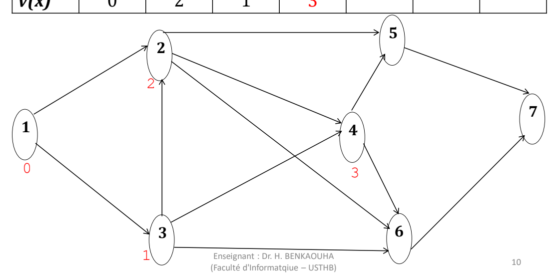
x	1	2	3	4	5	6	7
v(x)	0	2	1				



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatqiue – USTHB) 9

Partitionnement en niveaux - Exemple

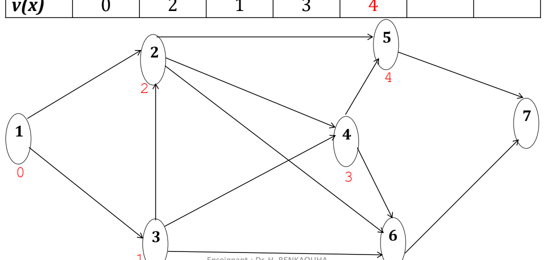
x	1	2	3	4	5	6	7
v(x)	0	2	1	3			



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatqiue – USTHB) 10

Partitionnement en niveaux - Exemple

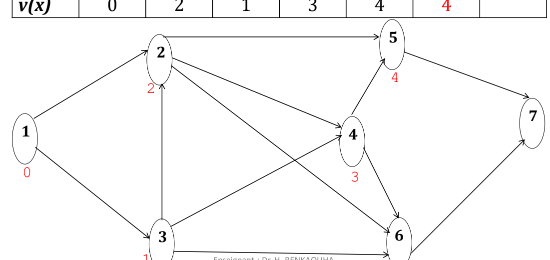
x	1	2	3	4	5	6	7
v(x)	0	2	1	3	4		



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatqiue – USTHB) 11

Partitionnement en niveaux - Exemple

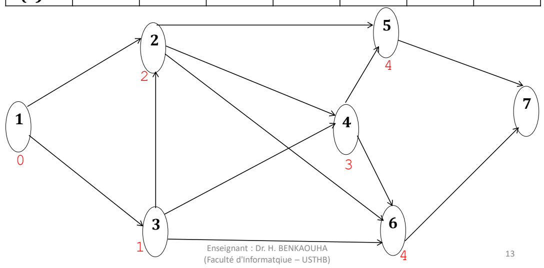
x	1	2	3	4	5	6	7
v(x)	0	2	1	3	4	4	



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatqiue – USTHB) 12

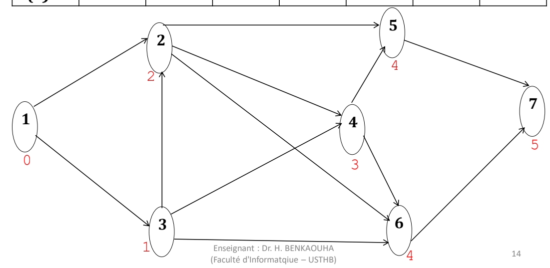
Partitionnement en niveaux - Exemple

x	1	2	3	4	5	6	7
$v(x)$	0	2	1	3	4	4	5



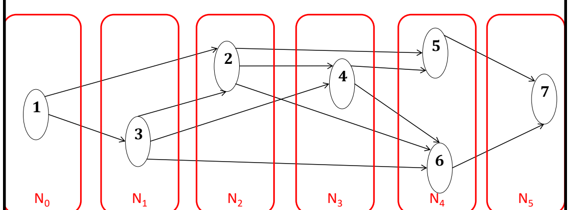
Partitionnement en niveaux - Exemple

x	1	2	3	4	5	6	7
$v(x)$	0	2	1	3	4	4	5



Partitionnement en niveaux - Exemple

x	1	2	3	4	5	6	7
$v(x)$	0	2	1	3	4	4	5

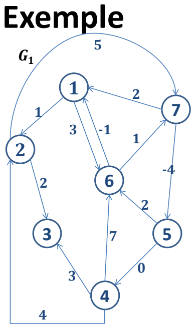


Poids d'un chemin

- On définit le poids d'un chemin γ comme la somme des poids des arcs de γ, $p(\gamma)$= . On l'appelle aussi distance.
- Un circuit γ est dit absorbant si son poids est négatif ($p(\gamma)$< 0).

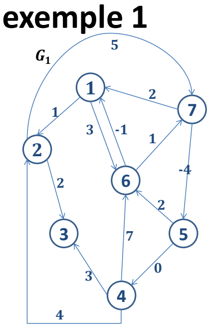
Poids d'un chemin - Exemple

- γ=1 6 7 5 4 2.
- $p(\gamma) = p(1, 6)+p(6, 7)+p(7, 5) +p(5, 4)+p(4, 2) = 3+1-4+0+4 =4$



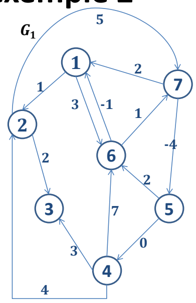
Circuit absorbant – exemple 1

- γ'=1 6 1.
- $p(\gamma) = p(1, 6)+p(6, 1) = 3-1 =2$
- *Le circuit γ' n'est pas absorbant.*



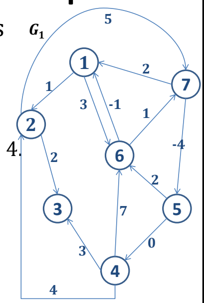
Circuit absorbant – exemple 2

- γ''=6 7 5 6.
- $p(\gamma)$ = 1-4+2 = -1
- *Le circuit γ'' est absorbant.*



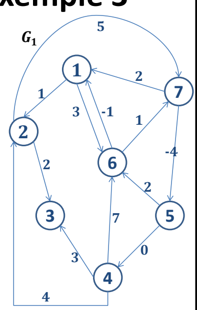
Circuit absorbant – exemple 3

- On cherche le chemin de poids minimal de 1 vers 4
  - γ_0=1 6 7 5 4.
  - $p(\gamma_0)$ = 3+1-4+0 = 0
  - γ_1=1 6 7 5 6 7 5 4=1 6(7 5 6)7 5 4.
  - $p(\gamma_1)$ = 3+1-4+2+1-4+0 = -1
  - γ_2=1 6 7 5 6 7 5 6 7 5 4 =1 6 (7 5 6)^2 7 5 4
  - $p(\gamma_2)$ = 3+(-1*2)+1-4+0 = -2
  - γ_k= 1 6 (7 5 6)^k 7 5 4.
  - $p(\gamma_k)$ = 3+(-1*k)+1-4+0 = -k



Circuit absorbant – exemple 3

- On cherche le chemin de poids minimal de 1 vers 4
- Le meilleur chemin est lorsque –k est le plus petit possible
  $\Rightarrow -k \to -\infty \Rightarrow k \to +\infty$
  $\Rightarrow$Passer par le circuit un nombre infini de fois
  $\Rightarrow$ne jamais atteindre 4
  $\Rightarrow\Rightarrow$ Pas de solution



Chemin optimal

- A chaque sommet $x \in X$, on veut associer un chemin de poids optimal joignant la source du graphe $r \in X$ à x dans le réseau $R=(X, U, p)$
- Consiste à affecter à chaque sommet x d'un réseau $R=(X,U,p)$ une valeur $\pi(x)$ (appelée potentiel de x) qui représente le poids du chemin optimal reliant r à x.

Algorithme de Bellman-Ford

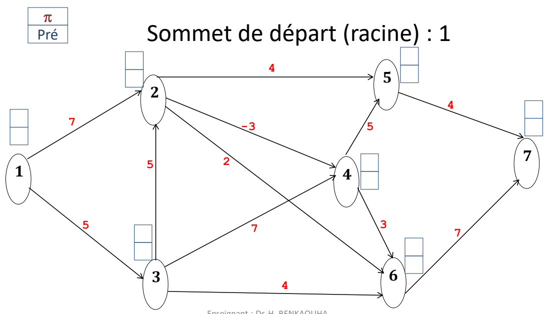
- Condition :
  - Graphe sans circuits
  - Afin d'éviter les circuits absorbants

Algorithme de Bellman-Ford

```
S←{r};
Pour tout x∈X
  Faire
  π[x]← +∞ ;   Pré[x] ←NULL ;
  Fait
π[r]← 0;
Pour tout (x∈X-S) tel que (∀u∈U si T(u)=x on a I(u)∈S)
  Faire
  Pour tout ((y, x) ∈ U)
      Faire
      Si π[x] > π[y]+p[(y,x)]
            Alors π[x] ← π[y]+p[(y,x)]; Pré[x] ← y;
      fSi
      Fait
  S ← S ∪{x} ;
  Fait
```

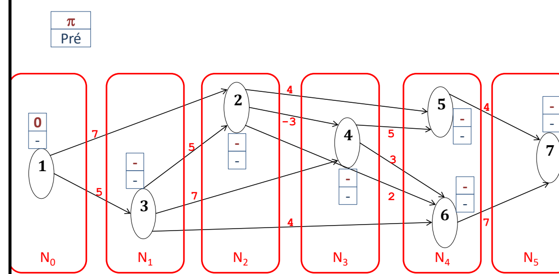
Bellman-Ford - Exemple

Sommet de départ (racine) : 1



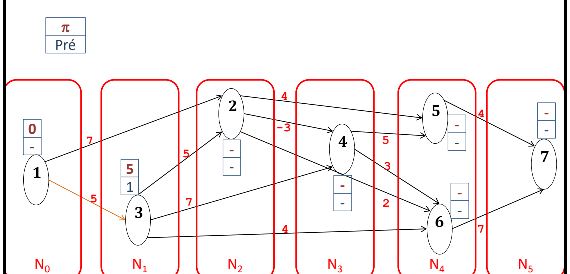
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB) 25

Bellman-Ford - Exemple



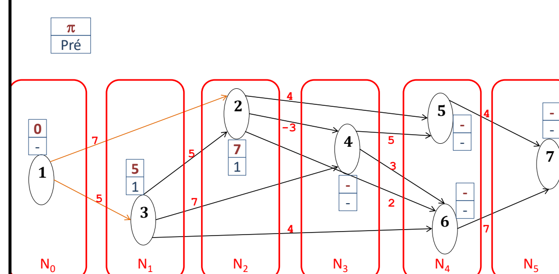
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB) 26

Bellman-Ford - Exemple



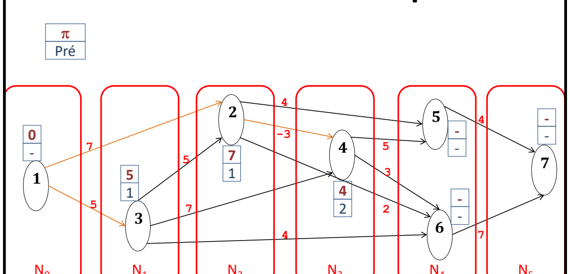
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB) 27

Bellman-Ford - Exemple



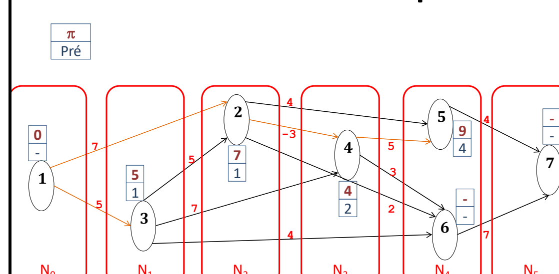
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB) 28

Bellman-Ford - Exemple



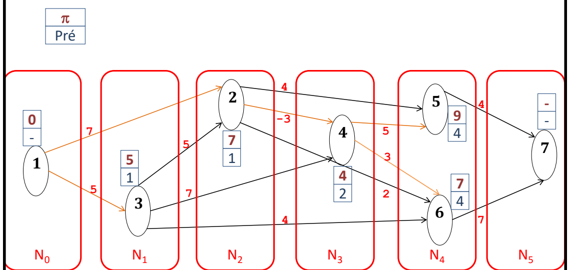
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB) 29

Bellman-Ford - Exemple



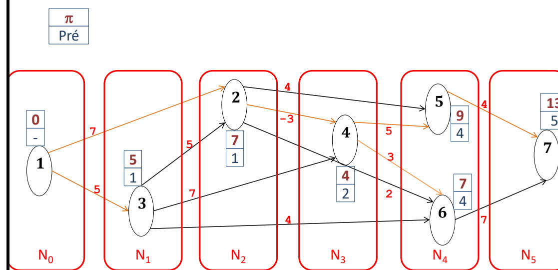
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB) 30

Bellman-Ford - Exemple



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB)
31

Bellman-Ford - Exemple



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB)
32

Bellman-Ford - Remarques

- L'algorithme retourne une arborescence optimale.
- Si le chemin optimal est le chemin de poids maximal, on change dans l'algorithme « *min* » par « *max* » et « $+\infty$ » par « $-\infty$ ».
- Si $\forall x \in X\ p(x)=1$, l'algorithme calculera le plus court chemin en nombre d'arcs.
- La complexité de l'algorithme est $o(n^2)$.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB)
33

Bellman-Ford - Remarques

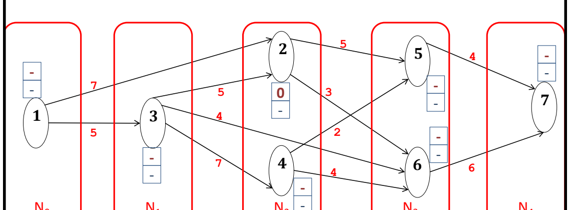
- Si le graphe contient plusieurs sources ou le sommet initial *r* n'est pas la source du graphe, il est exigé de :
  - partitionner le graphe en niveaux au préalable
  - mettre tous les sommets de niveau $\leq v(r)$ dans *S*.
  - A chaque itération, faire le choix du prochain sommet celui qui n'est pas dans *S* ayant le plus petit niveau.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB)
34

Bellman-Ford - Exemple

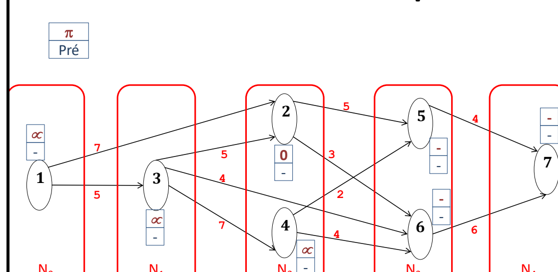
π
Pré

Départ : sommet 2



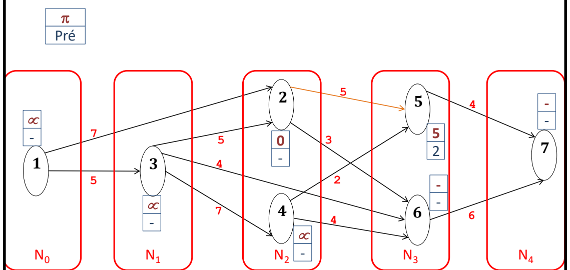
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB)
35

Bellman-Ford - Exemple

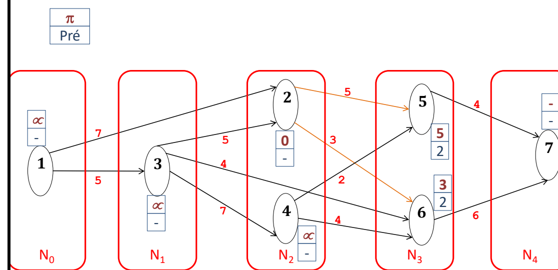


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue – USTHB)
36

Bellman-Ford - Exemple

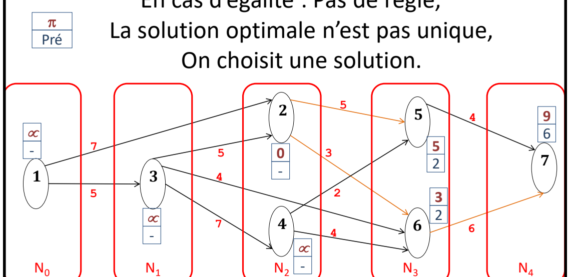


Bellman-Ford - Exemple



Bellman-Ford - Exemple

En cas d'égalité : Pas de règle,
La solution optimale n'est pas unique,
On choisit une solution.



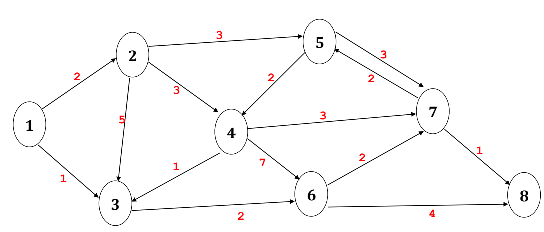
Algorithme de Dijkstra

- Condition :
  - Tous les poids positifs ou nuls
  - Pour éviter les circuits absorbants

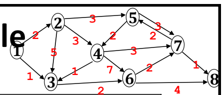
Algorithme de Dijkstra

```
s←{r};     k←1;     f[k]←r;
Pour tout x∈X faire π[x]← +∞ ; fait
π[r]←0 ;
Tant que (k<n) et (π[x]<+∞)
  Faire
  Pour tout u∈U / (I(u)=f[k]) et (T(u)∉S)
     Faire
     x = T(u);
     Si (π[x] > π[f[k]]+p[u]])
          Alors π(x) ← π[f[k]]+p[u]; Pré[x] ←
  f[k];
     fSi
     Fait
  x ← y / y ∈ X-S et π[y] minimal;
  k ← k+1; f[k] ← x; S ←S {x};
  Fait
```


Dijkstra - Exemple

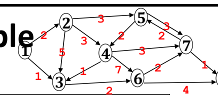


Dijkstra - Exemple



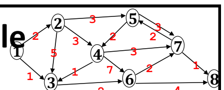
k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	∝	∝	∝	∝	∝	∝	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		

Dijkstra - Exemple



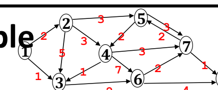
k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	~~∝~~	~~∝~~	∝	∝	∝	∝	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	(1,2) (1,3)		2	1							1	1					
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		

Dijkstra - Exemple



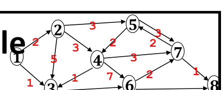
k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	~~∝~~	~~∝~~	∝	∝	~~∝~~	∝	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	(1,2) (1,3)		2	1							1	1					
2	3	(3,6)						3								3		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		

Dijkstra - Exemple



k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	∝	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	(1,2) (1,3)		2	1							1	1					
2	3	(3,6)						3								3		
3	2	~~(2,3)~~ (2,4) (2,5)				5	5							2	2			
4																		
5																		
6																		
7																		

Dijkstra - Exemple

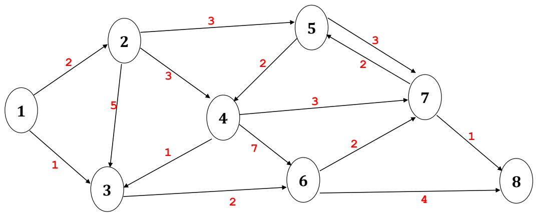


k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	(1,2) (1,3)		2	1							1	1					
2	3	(3,6)						3								3		
3	2	~~(2,3)~~ (2,4) (2,5)				5	5							2	2			
4	6	(6,7) (6,8)							5	7							6	6
5																		
6																		
7																		

Dijkstra - Exemple

k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	(1,2) (1,3)		2	1							1	1					
2	3	(3,6)						3								3		
3	2	~~(2,3)~~ (2,4) (2,5)				5	5							2	2			
4	6	(6,7) (6,8)							5	7							6	6
5	4	~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ (4,7)							~~8~~									
6																		
7																		

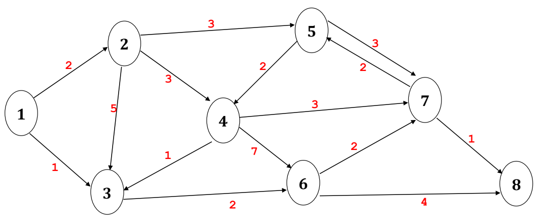
Dijkstra - Exemple



Dijkstra - Exemple

k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	(1,2) (1,3)		2	1							1	1					
2	3	(3,6)						3								3		
3	2	~~(2,3)~~ (2,4) (2,5)				5	5							2	2			
4	6	(6,7) (6,8)							5	7							6	6
5	4	~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ (4,7)							~~8~~									
6	5	~~(5,4)~~ (5,7)							~~8~~									
7																		

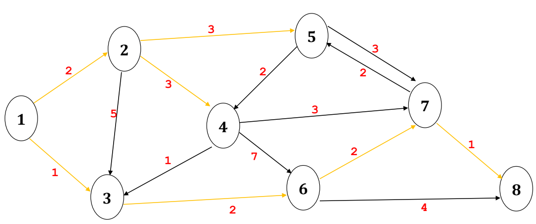
Dijkstra - Exemple



Dijkstra - Exemple

k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	(1,2) (1,3)		2	1							1	1					
2	3	(3,6)						3								3		
3	2	~~(2,3)~~ (2,4) (2,5)				5	5							2	2			
4	6	(6,7) (6,8)							5	~~7~~							6	~~6~~
5	4	~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ (4,7)							~~8~~									
6	5	~~(5,4)~~ (5,7)							~~8~~									
7	7	~~(7,5)~~ (7,8)								6								7

Dijkstra - Exemple



Dijkstra - Remarques

- On dit que l'algorithme retourne une arborescence optimale.
- La complexité de l'algorithme est $o(m^2)$ où m est le nombre d'arcs.
- Si le graphe est non orienté, on peut associer à chaque arête $\{x,y\}$ de poids p, deux (2) arcs (x,y) et (y,x) de même poids p, puis on applique l'algorithme de Dijkstra.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(haroun.benkaouha@usthb.dz)