Ecole Nationale Supérieure Informatique. **Décembre 2018**

T.D. sur les automates à pile et grammaires algébriques.

EXERCICE 1 :

Construire les automates qui reconnaissent les langages suivants :

- $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* ww^r\}$
- $L_2 = \{(01)^j \, aa \, 0^{i+j}, i, j \geq 0\}$
- $L_3 = \{(ab)^n c^m (be)^{n+m}, n, m \geq 0\}$
- $L_4 = \{ a^n b^i c^n d^j / n, i, j \geq 0\} \cup \{ a^i b^n c^j d^n / n, i, j \geq 0\}$
- $L_5 = \{ a^n b^m c^l d^k , n+l = m+k\}$
- $L_6 = \{ w \in \{a, b\}^* / |w|_a = 2|w|_b\}$
- $L_7 = \{ a^i b^j (ab)^{|i-j|} i, j \geq 0 \text{ et } i \neq j \}$
- Le complément de $\{ a^n b^n \geq 0\}$

EXERCICE 2 :

Donner le langage reconnu par l'automate A<X,Y,S, S_0, F, II, #> avec
X = {a, b, c}, Y = X, S = { S_0, S_1, S_2, S_f}, F= {S_f} et II :

$\# S_0 a \to \# a S_0$	$a S_1 a \to S_1$
$\# S_0 b \to \# b S_0$	$b S_1 b \to S_1$
$\# S_0 c \to \# S_2$	$b S_1 a \to S_2$
$a S_0 a \to aa S_0$	$a S_1 b \to S_2$
$a S_0 b \to ab S_0$	$a S_2 b \to S_2$
$b S_0 a \to ba S_0$	$a S_2 a \to S_2$
$b S_0 b \to bb S_0$	$b S_2 b \to S_2$
$a S_0 c \to a S_1$	$b S_2 a \to S_2$
$b S_0 c \to b S_1$	$\# S_2 \to \# S_f$
}	

EXERCICE 3:

Rendre les grammaires suivantes propres:

<table>
<tr><td>• G < {a,b}, {S,A},S,P>
P = {$S \to Ba / A b / \varepsilon / aDb$
$A \to AA a / \varepsilon / Sa$
$B \to S b / \varepsilon$
$D \to aDb / AD$}</td><td>• G < {a,b}, {S},S,P>
P= { $S \to aSbS / bSaS / \varepsilon$}</td></tr>
<tr><td>• G < {a,b}, {S,A, C},S,P></td><td>• G < {a,b,c}, {S,A,B,C,D,E},S,P></td></tr>
</table>

P={ S → AS / bC A → a / ε C → a C / a / ε}	P= { S→ aS | BS | ε B → bAb | SaS A → a | Sa

EXERCICE 4:

Donner les grammaires équivalentes à G sous forme Normal de Chomsky de l'exercice 2

EXERCICE 5:

Donner la grammaire G' équivalente à G sous forme Normal de Chomsky:

• G < {a,b,c}, {S, A,B, C}, S, P> P : { S → AA / a / b A → SS / b B → BC / AB C → aB / b }	• G <{a,b,c,d}, {S,A}, S, P > P: { S → aSAb / bSS / d A → cASaA / bcd }
• G <{a,b}, {S,A,B,C}, S, P > P : { S → bA / aB A → bAA / aS/a B → aBB / bS / b}	

EXERCICE 6:

Pour les grammaires suivantes donner les formes de Greibach

- La grammaire G = <X, V, P, S> où X = {a, b}, V = {S, A} et
  P= { S → a S / A a / ε
  A → A a / b }

- La grammaire G <X, V, P, S> algébrique suivante où P est l'ensemble suivant :
  S → A B
  A → B S / b
  B → S A / a

- La grammaire G <X, V, P, A> suivante où :
  P = {A → BC / a
  B → CA / Ab
  C → AB / CC / a
  D → AB / b }

EXERCICE 7:

Donner la grammaire du langage suivant:

$L = \{a^i b^j c^k \text{ tq } i \geq 2j + 3k \}$

Donner l'automate a pile qui reconnaît L(G) .

EXERCICE 8:

Soit G <X={a, b}, V={S, A, B, D, F}, P, S> la grammaire algébrique suivante où :

P = { $S \rightarrow SaB \,/\, bB \,/\, aDB \,/\, F$
$A \rightarrow aAB \,/\, aA \,/\, \varepsilon$
$B \rightarrow a\,S \,/\, aSB \,/\, BaB \,/\, \varepsilon$
$D \rightarrow aD \,/\, Da$
$F \rightarrow \varepsilon$ }

- Donner l'automate à pile reconnaissant L(G)
- Donner la grammaire G_1 sous forme normale de Chomsky équivalente à G
- Donner la grammaire G_2 sous forme normale de Greibach équivalente à G

EXERCICE 9:

Montrer que la classe des langages algébriques est fermée par rapport aux opérations suivantes : Union, Concaténation, l'itération et l'opération miroir (utiliser les grammaires).

EXERCICE 10:

Donner les automates les plus adéquats (Automate d'états finis, Automate à pile et Automate à bornes linéaires) reconnaissants les langages suivants :

$L_1 = \{a^i b^{2i} a^i \text{ avec } i \geq 0 \}$
$L_2 = \{a^i b^j a^k \text{ avec } i=\max(j, k) \}$
$L_3 = \{a^i b^j c^k \text{ avec } j=\min(i, k) \}$
$L_4 = \{a^i b^j c^k \text{ avec } i\neq j \text{ et } i\neq k \text{ et } j\neq k\}$
$L_5 = \{wcw, w\in \{a, b\}^* \}$
$L_6 = \{ww, w\in \{a, b\}^* \}$
$L_7 = \{a^i b^j a^j \text{ avec } i, j \geq 0 \}$
$L_8 = \{a^i b^j a^j \text{ avec } i, j \geq 0 \}$
$L_9 = \{0^n 0^{2n} 0^{3n} \text{ avec } n \geq 0 \}$
$L_{10} = \{0^n 1^m 2^k \text{ avec } k > n+m \}$
$L_{11} = \{0^n 1^m 2^k$, k n'est pas un multiple de 3$\}$
$L_{12} = \{a^i b^j c^k d^e \text{ tq } j = i+2k, e \equiv 1[3] \}$
Le complément de $L = \{a^n (ba)^n c^n, n > 0\}$
$L_{14} = \{ u u^R w^R w \,/\, x, w \in \{a, b\}^* \}$
$L_{15} = \{a^i b^j c^k \text{ tq } j \geq i+k \text{ tq } |w|_a \equiv 0[2] \text{ et } |w|_c \equiv 1[2]$
$L_{16} = \{ a^i b^j c^{2n} d^{3n} \,/\, j= 2i\}$