Chapitre 4 : Chemin optimal
Série d'exercices de TD
avec Corrigé

Présenté par :
H. BENKAOUHA
Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB
haroun.benkaouha@usthb.edu.dz
haroun.benkaouha@gmail.com

Exercice 1

- Soit le graphe orienté valué $G = (X, U, p)$ donné par la matrice ci-dessous :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1		5		-4		2
2								
3		8			2		1	
4						-1		
5								
6		3						
7				2	1			
8		1						

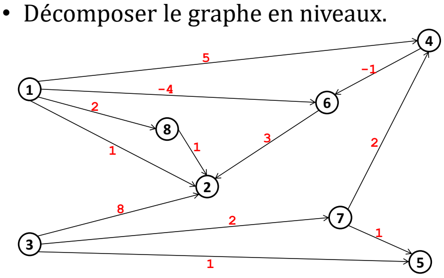
- $m_{ij}=k$ veut dire que le poids de l'arc (i, j) est k.
- Si m_{ij} est vide alors l'arc (i, j) n'existe pas.

Exercice 1 - Suite

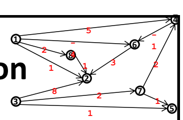
- Décomposer le graphe en niveaux.
- Appliquer l'algorithme de Bellmann-Ford sur ce graphe à partir du (des) sommet(s) source(s) afin d'obtenir les chemins de poids minimaux.

Exercice 1 – Solution

- Décomposer le graphe en niveaux.



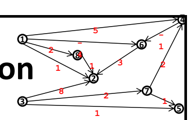
Exercice 1 – Solution



- Décomposer le graphe en niveaux.
- Niveau 0
- 1 et 3 sont des sources

x	1	2	3	4	5	6	7	8
v(x)	0		0					

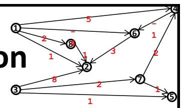
Exercice 1 – Solution



- Décomposer le graphe en niveaux.
- Niveau 1
- Le 7 et le 8 ont uniquement des arcs entrant venant de sommets de niveau 0

x	1	2	3	4	5	6	7	8
v(x)	0		0				1	1

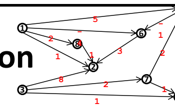
Exercice 1 – Solution



- Décomposer le graphe en niveaux.
- Niveau 2
- Le 4 et le 5 ont uniquement des arcs entrant venant de sommets de niveau ≤ 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8
v(x)	0		0	2	2		1	1

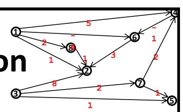
Exercice 1 – Solution



- Décomposer le graphe en niveaux.
- Niveau 3
- Seul le 5 qui uniquement des arcs entrant venant de sommets de niveau ≤ 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8
v(x)	0		0	2	2	3	1	1

Exercice 1 – Solution

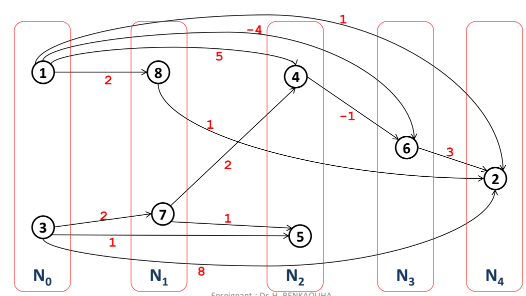


- Décomposer le graphe en niveaux.
- Niveau 4
- Seul le 2 qui uniquement des arcs entrant venant de sommets de niveau ≤ 3

x	1	2	3	4	5	6	7	8
v(x)	0	4	0	2	2	3	1	1

Exercice 1 – Solution

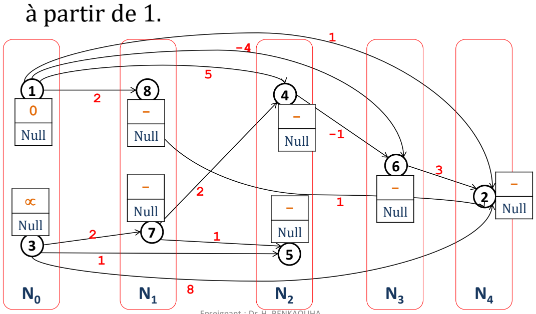
- Décomposer le graphe en niveaux.



π
Préd

Exercice 1 – Solution

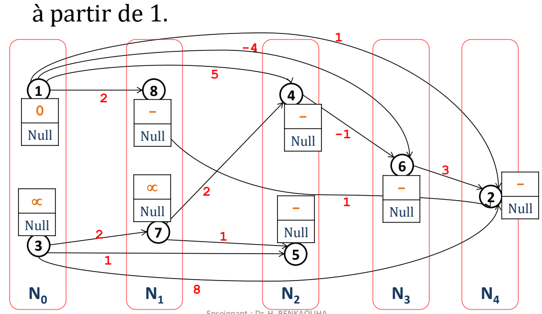
- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 1.



π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 1.

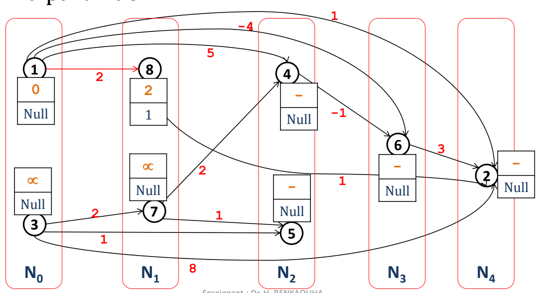


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(haroun.benkaouha@usthb.dz)

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 1.

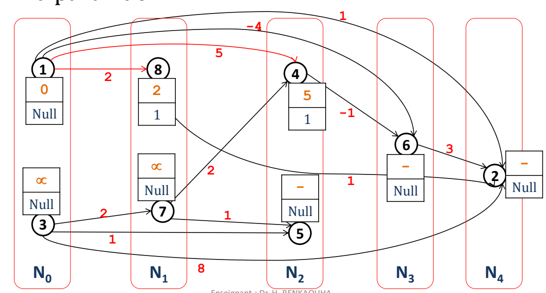


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 13

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 1.

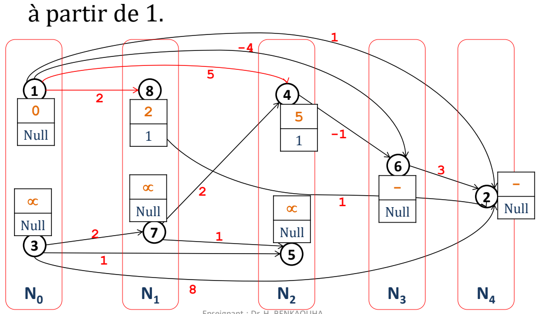


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 14

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 1.

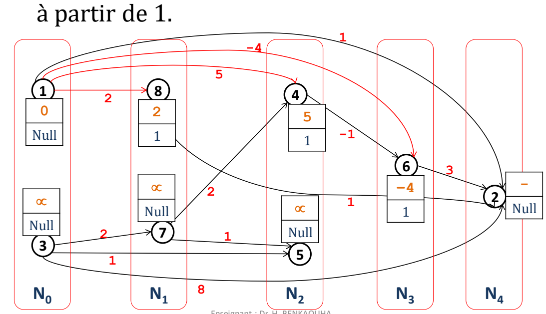


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 15

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 1.

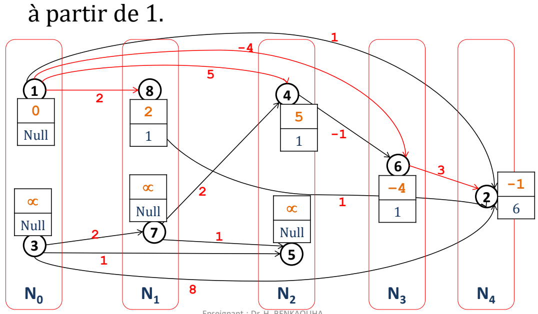


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 16

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 1.

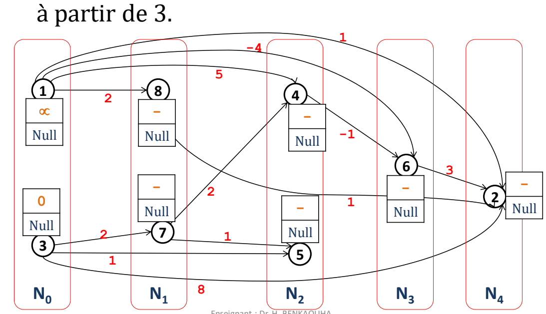


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 17

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 3.

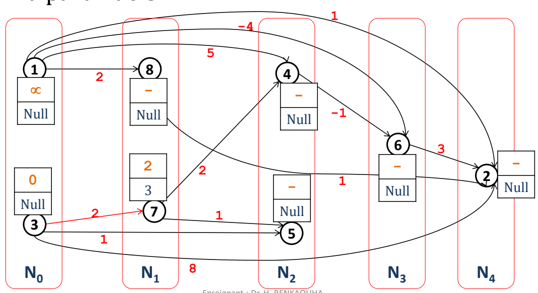


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 18

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 3.

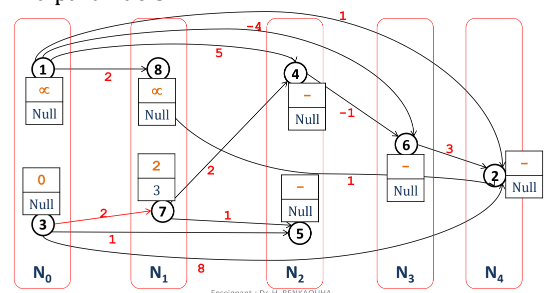


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 19

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 3.

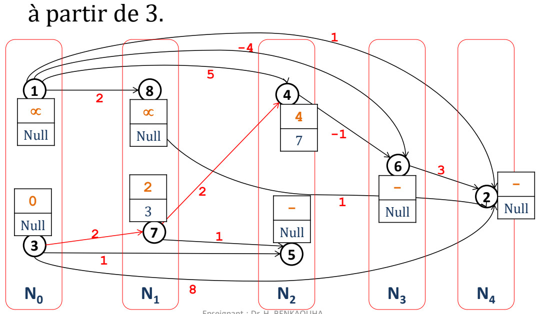


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 20

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 3.

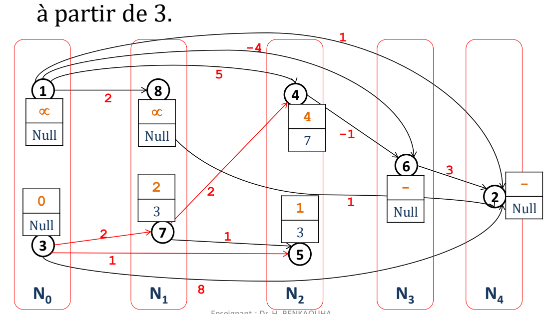


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 21

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 3.

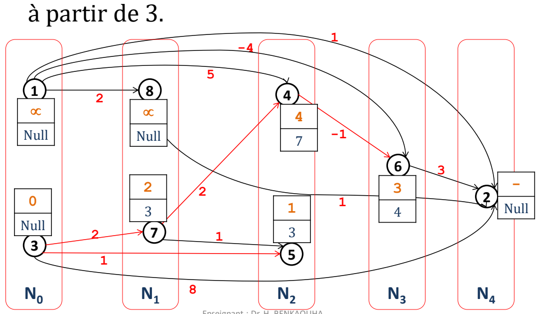


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 22

π
Préd

Exercice 1 – Solution

- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 3.

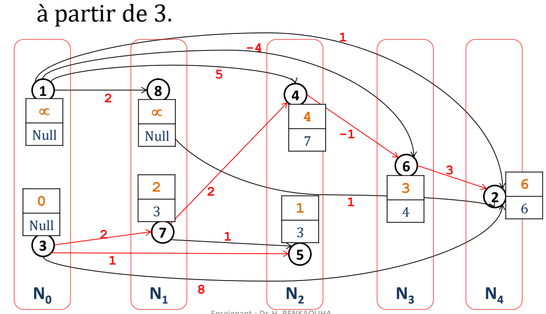


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 23

π
Préd

Exercice 1 – Solution

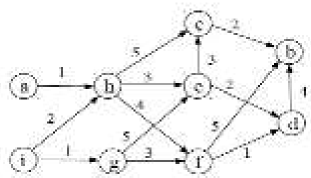
- Application de l'algorithme de Bellmann-Ford à partir de 3.



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (Faculté d'Informatique - USTHB) 24

Exercice 2

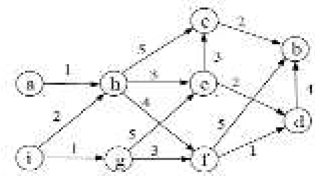
- Considérons le graphe G suivant :



1. Déterminer les niveaux de ce graphe
2. Donner la longueur des chemins minimaux reliant le sommet a aux autres sommets du graphe.

Exercice 2 – Solution

- Les niveaux du graphe :

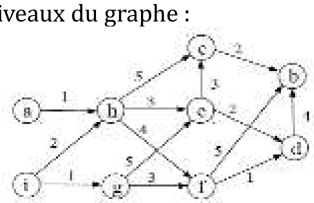


- Niveau 0

x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
v(x)	0								0

Exercice 2 – Solution

- Les niveaux du graphe :

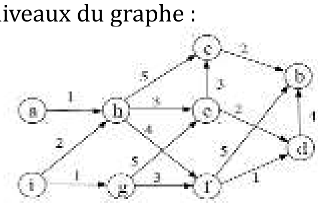


- Niveau 1

x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
v(x)	0						1	1	0

Exercice 2 – Solution

- Les niveaux du graphe :

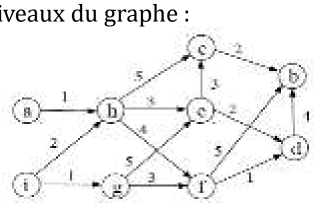


- Niveau 2

x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
v(x)	0				2	2	1	1	0

Exercice 2 – Solution

- Les niveaux du graphe :

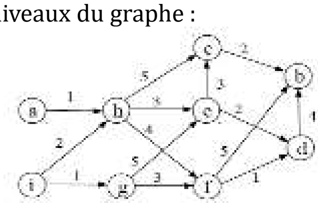


- Niveau 3

x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
v(x)	0		3	3	2	2	1	1	0

Exercice 2 – Solution

- Les niveaux du graphe :



- Niveau 4

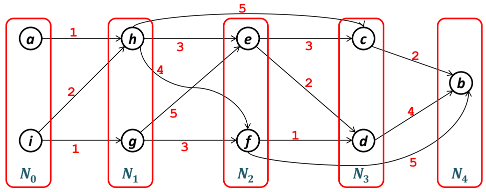
x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
v(x)	0	4	3	3	2	2	1	1	0

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(haroun.benkaouha@usthb.edu.dz)

Exercice 2 – Solution

- Les niveaux du graphe :

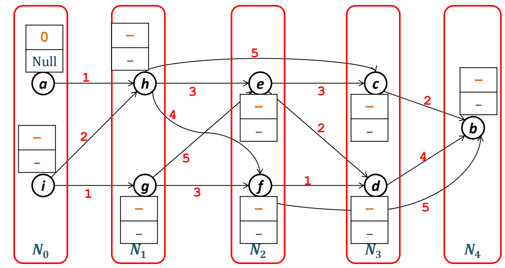
x	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$v(x)$	0	4	3	3	2	2	1	1	0



π
Préd

Exercice 2 – Solution

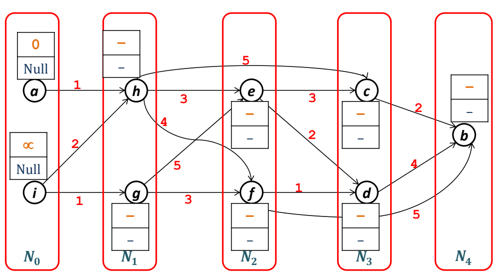
- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



π
Préd

Exercice 2 – Solution

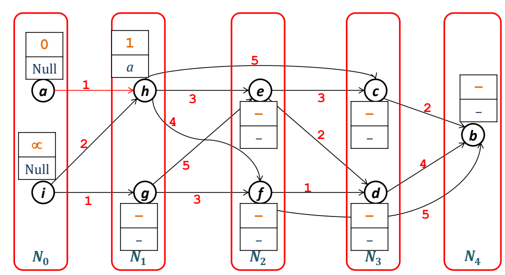
- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



π
Préd

Exercice 2 – Solution

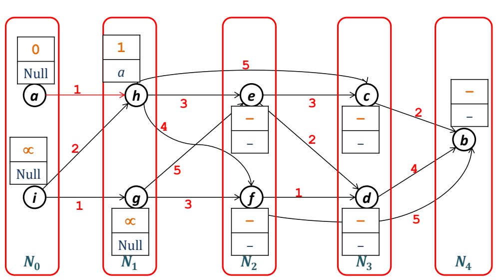
- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



π
Préd

Exercice 2 – Solution

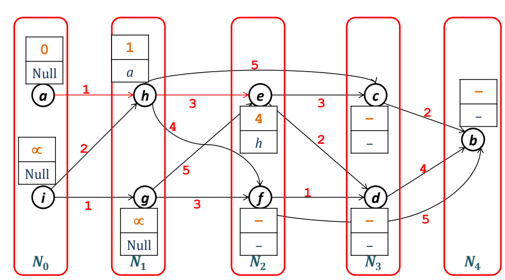
- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



π
Préd

Exercice 2 – Solution

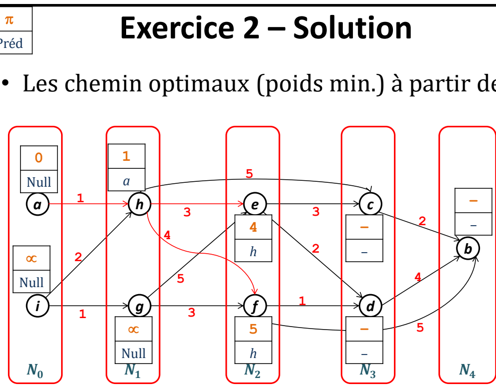
- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(haroun.benkaouha@usthb.edu.dz)

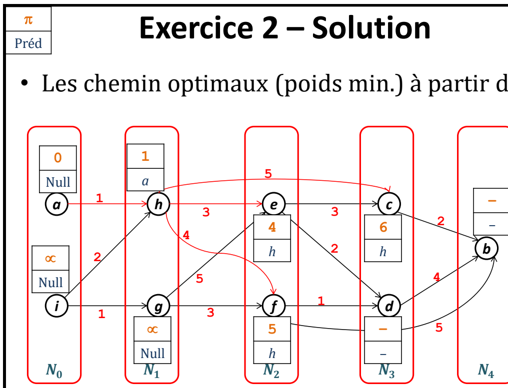
Exercice 2 – Solution

- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



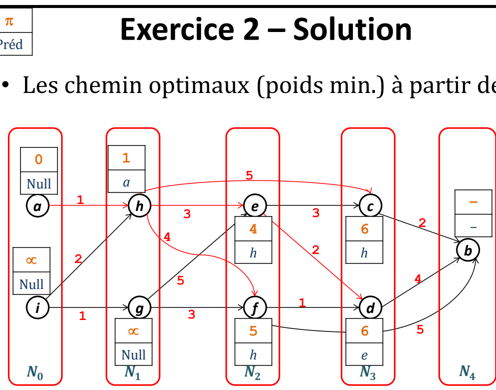
Exercice 2 – Solution

- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



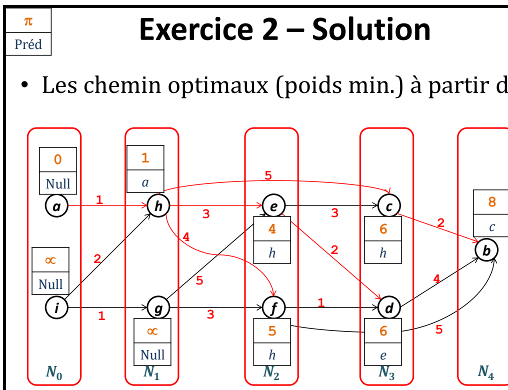
Exercice 2 – Solution

- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



Exercice 2 – Solution

- Les chemin optimaux (poids min.) à partir de a :



Exercice 3

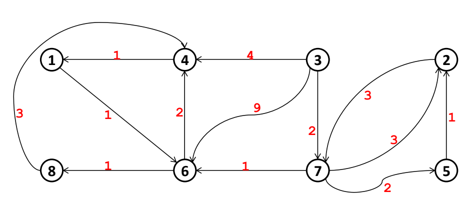
- Soit un graphe orienté pondéré $G=(X, U, p)$. Nous donnons les poids associés aux arcs comme le montre le tableau ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1						1		
2							3	
3				4		9	2	
4	1							
5		1						
6				2				1
7		3			2	1		
8				3				

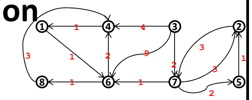
- Appliquer l'algorithme le plus adéquat pour calculer les chemins de poids minimaux à partir du sommet 3.

Exercice 3 – Solution

- Tous les sommets ont des arcs sortants ⇒ Pas de puits ⇒ Le graphe admet au moins un circuit.
- On applique l'algorithme de Dijkstra.



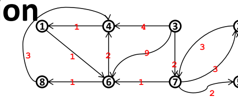
Exercice 3 – Solution



k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			∝	∝	0	∝	∝	∝	∝	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 43

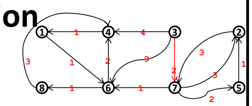
Exercice 3 – Solution



k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			∝	∝	0	~~∝~~	∝	~~∝~~	~~∝~~	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1	3	(3,4) (3,6) (3,7)				4		9	2					3		3	3	

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 44

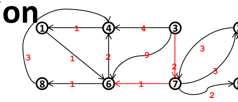
Exercice 3 – Solution



k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			∝	~~∝~~	0	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1	3	(3,4) (3,6) (3,7)				4		~~9~~	2					3		~~3~~	3	
2	7	(7,2) (7,5) (7,6)		5			4	3				7			7	7		

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 45

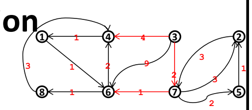
Exercice 3 – Solution



k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			∝	~~∝~~	0	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	3	(3,4) (3,6) (3,7)				4		~~9~~	2					3		~~3~~	3	
2	7	(7,2) (7,5) (7,6)		5			4	3				7			7	7		
3	6	(6,4) (6,8)				~~5~~				4								6

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 46

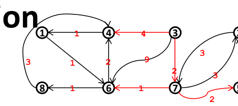
Exercice 3 – Solution



k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			~~∝~~	~~∝~~	0	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	3	(3,4) (3,6) (3,7)				4		~~9~~	2					3		~~3~~	3	
2	7	(7,2) (7,5) (7,6)		5			4	3				7			7	7		
3	6	(6,4) (6,8)				~~5~~				4								6
4	4	(4,1)	5								4							

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 47

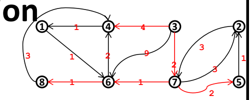
Exercice 3 – Solution



k	x	(x,y)	π								PRE							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			~~∝~~	~~∝~~	0	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	3					4		~~9~~	2					3		~~3~~	3	
2	7	(7,2) (7,5) (7,6)		5			4	3				7			7	7		
3	6	(6,4) (6,8)				~~5~~				4								6
4	4	(4,1)	5								4							
5	5	(5,2)		~~5~~														

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 48

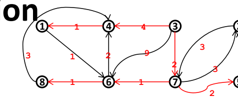
Exercice 3 – Solution



k	*x*	*(x,y)*	*π*								*PRE*							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			~~∞~~	~~∞~~	0	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	3					4		~~9~~	2					3		~~3~~	3	
2	7			5			4	3				7			7	7		
3	6	(6,4) (6,8)				~~5~~				4								6
4	4	(4,1)	5								4							
5	5	(5,2)		~~5~~														
6	8	~~(8,4)~~																

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 49

Exercice 3 – Solution



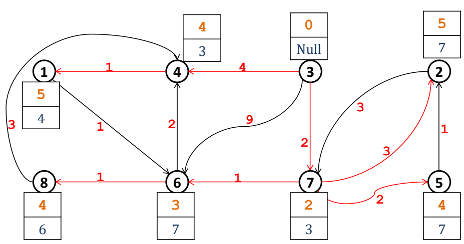
k	*x*	*(x,y)*	*π*								*PRE*							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
			~~∞~~	~~∞~~	0	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	-	-	-	-	-	-	-	-
1	3					4		~~9~~	2					3		~~3~~	3	
2	7			5			4	3				7			7	7		
3	6	(6,4) (6,8)				~~5~~				4								6
4	4	(4,1)	5								4							
5	5	(5,2)		~~5~~														
6	8	~~(8,4)~~																
7	1	~~(1,6)~~																

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 50

π
Préd

Exercice 3 – Solution

- Fin Algo après n–1 itérations.



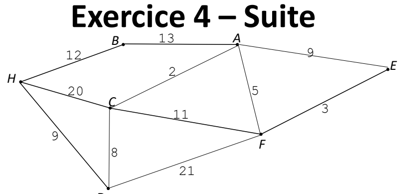
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 51

Exercice 4

- Des touristes sont logés dans un hôtel *H*.
- Un guide fait visiter six (6) sites touristiques (*A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F*).
- Le graphe ci-dessous représente cette situation,
  - sommet : l'hôtel ou un site touristique
  - arête : l'existence de route entre les deux (2) endroits étiquetée par la longueur de cette route.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 52

Exercice 4 – Suite



1. Est-il possible pour ce guide, à partir de l'hôtel, d'emprunter toutes les routes (une seule et unique fois) ? Justifier. Si oui, où se terminera son parcours ?
2. Est-il possible au guide de visiter tous les sites une seule et unique fois et revenir à l'hôtel ? Justifier.
3. Déterminer le plus court chemin qui le mène de l'hôtel vers n'importe quel site.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 53

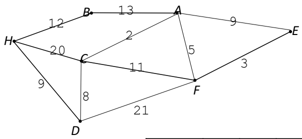
Exercice 4 – Solution

1. Est-il possible pour ce guide, à partir de l'hôtel, d'emprunter toutes les routes (une seule et unique fois) ? Justifier. Si oui, où se terminera son parcours ?

- Emprunter toutes les routes revient à utiliser toutes les arêtes ⇒ former une chaîne
- Utiliser chaque route une seule et unique fois ⇒ chaque arête apparaît exactement une fois ⇒ Chaine élémentaire passant par toutes les arêtes ⇒ Chaîne Eulérienne.
- Selon le théorème d'Euler, *G* admet une chaine Eulérienne ssi il est connexe (à des sommets isolés près) et le nombre de sommets de degrés impairs est 0 ou 2.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 54

Exercice 4 – Solution

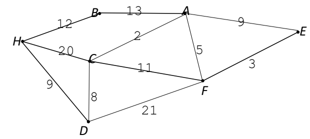


- G est connexe.
- Calculons les degrés :

x	A	B	C	D	E	F	H
$dG(x)$	4	2	4	3	2	4	3

- 2 sommets de degrés impairs (D et H)
- G admet une chaîne Eulérienne
- Il est possible de réaliser un tel parcours en démarrant de l'hôtel (H) car son degré est impair.
- L'arrivée est au niveau de l'autre sommet de degré impair, c'est-à-dire D.

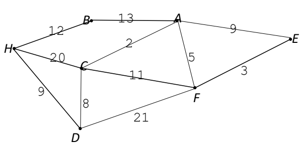
Exercice 4 – Solution



2. Est-il possible au guide de visiter tous les sites une seule et unique fois et revenir à l'hôtel ? Justifier.

- Visiter tous les sites une seule et unique fois $\Rightarrow$ passer par tous les sommets une seule et unique fois $\Rightarrow$ Former une chaîne Hamiltonienne
- Revenir au point de départ $\Rightarrow$ Former un cycle Hamiltonien
- Oui, c'est possible
- Le cycle Hamiltonien est : $H\ B\ A\ E\ F\ C\ D\ H$

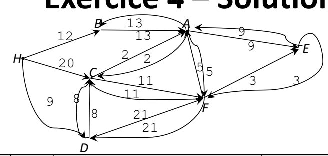
Exercice 4 – Solution



3. Déterminer le plus court chemin qui le mène de l'hôtel vers n'importe quel site.

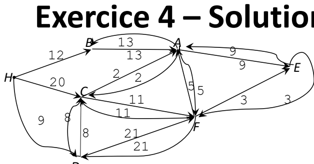
- Le graphe n'est pas orienté, on doit l'orienter
- On remplace chaque arête $\{i,j\}$ de poids p par 2 arc (i,j) de poids p et (j,i) de poids p.
- Pour optimiser et vu que le départ c'est le H, on peut ne pas représenter les arcs entrants vers H.
- Le graphe contient des circuits $\Rightarrow$ Algorithme de Dijkstra

Exercice 4 – Solution



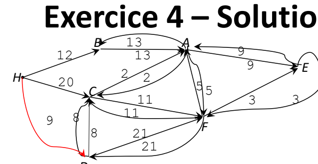
k	x	(x,y)	π							PRE						
			A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
			∝	∝	∝	∝	∝	∝	0	-	-	-	-	-	-	-
1	H															
2																
3																
4																
5																
6																

Exercice 4 – Solution



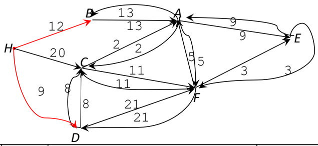
k	x	(x,y)	π							PRE						
			A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
			∝	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	∝	∝	0	-	-	-	-	-	-	-
1	H	(H,B) (H,C) (H,D)		12	20	9					H	H	H			

Exercice 4 – Solution



k	x	(x,y)	π							PRE						
			A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
			∝	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	∝	~~∝~~	0	-	-	-	-	-	-	-
1	H	(H,B) (H,C) (H,D)		12	~~20~~	9					H	~~H~~	H			
2	D	(D,C) (D,F)			17			30				D			D	

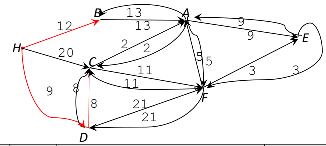
Exercice 4 – Solution



k	x	(x,y)	π							PRE						
			A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
			∝	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	∝	~~∝~~	0	-	-	-	-	-	-	-
1	H	(H,B) (H,C) (H,D)		12	~~20~~	9					H	~~H~~	H			
2	D	(D,C) (D,F)			17			30				D			D	
3	B	(B,A)	25							B						

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 61

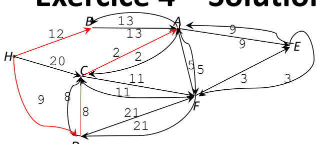
Exercice 4 – Solution



k	x	(x,y)	π							PRE						
			A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
			∝	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	∝	~~∝~~	0	-	-	-	-	-	-	-
1	H			12	~~20~~	9					H	~~H~~	H			
2	D	(D,C) (D,F)			17			~~30~~				D			~~D~~	
3	B	(B,A)	~~25~~							~~B~~						
4	C	(C,A) ~~(C,D)~~ (C,F)	19					28		C					C	

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 62

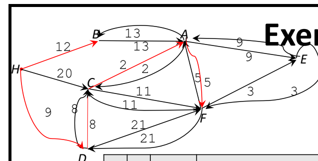
Exercice 4 – Solution



k	x	(x,y)	π							PRE						
			A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
			∝	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	0	-	-	-	-	-	-	-
1	H			12	~~20~~	9					H	~~H~~	H			
2	D				17			~~30~~				D			~~D~~	
3	B	(B,A)	~~25~~							~~B~~						
4	C		19					~~28~~		C					~~C~~	
5	A	~~(A,B)~~ ~~(A,C)~~ (A,E) (A,F)					28	24						A	A	

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 63

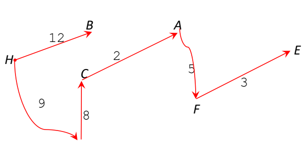
Exercice 4 – Solution



k	x	(x,y)	π							PRE						
			A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
			∝	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	~~∝~~	0	-	-	-	-	-	-	-
1	H			12	~~20~~	9					H	~~H~~	H			
2	D				17			~~30~~				D			~~D~~	
3	B	(B,A)	~~25~~							~~B~~						
4	C		19					~~28~~		C					~~C~~	
5	A						~~28~~	24						~~A~~	A	
6	F	~~(F,A)~~ ~~(F,C)~~ ~~(F,D)~~ (F,E)					27							F		

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 64

Exercice 4 – Solution



π							PRE						
A	B	C	D	E	F	H	A	B	C	D	E	F	H
19	12	17	9	27	24	0	C	H	D	H	F	A	-

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 65

Exercice 5

- L'algorithme de *Dijkstra* n'admet pas qu'il y ait des poids négatifs dans le graphe.
- Si le poids minimal est –*k*, où *k* >0
- On rajoute +*k* au poids de chaque arc afin de les rendre tous positifs.
- Est-il possible d'utiliser ce raisonnement pour résoudre le problème du chemin de poids optimal à l'aide de l'algorithme de *Dijkstra* dans des graphes ayant des poids négatifs.

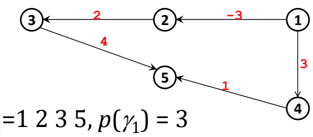
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB) 66

Exercice 5 – Solution

- Soit un chemin γ_1 allant de x vers y de longueur l_1 et de poids p_1
- Soit un chemin γ_2 allant de x vers y de longueur l_2 et de poids p_2
- Après rajout de $+k$ à chaque arc, les poids changent :
  - $p(\gamma_1)= p_1 + (l_1 * k)$
  - $p(\gamma_2)= p_2 + (l_2 * k)$
- Les poids vont changer selon la longueur des chemins et il est possible qu'un chemin optimal ne le soit plus à cause de la longueur.

Exercice 5 – Solution

- Contre-exemple



γ_1=1 2 3 5, $p(\gamma_1) = 3$

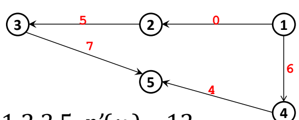
γ_2=1 4 5, $p(\gamma_2) = 5$

$p(\gamma_1) < p(\gamma_2) \Rightarrow \gamma_1$ est meilleur

- On rajoute +3 aux poids de tous les arcs

Exercice 5 – Solution

- Contre-exemple



γ_1=1 2 3 5, $p'(\gamma_1) = 12$

γ_2=1 4 5, $p'(\gamma_2) = 10$

$p(\gamma_2) < p(\gamma_1) \Rightarrow \gamma_2$ est devenu meilleur