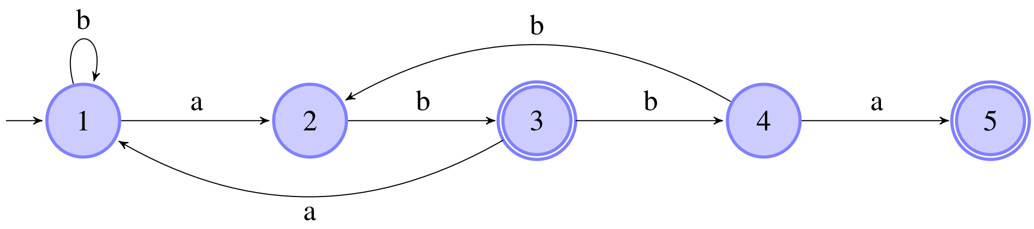
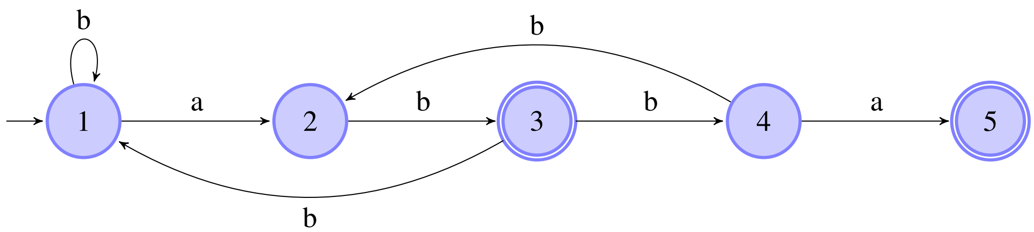
Théorie des Langages – TD 3 et 4
AUTOMATES FINIS

Exercice 1 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Soit l'automate M suivant



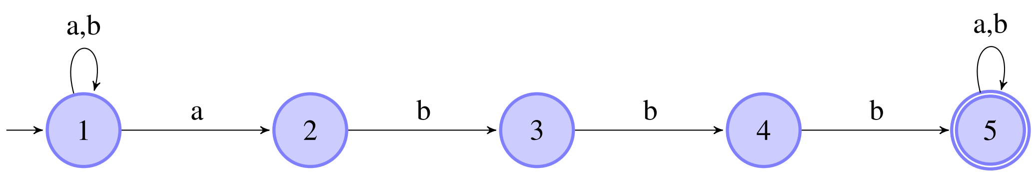
1. Combien d'etats possède l'automate M ? Donner l'ensemble des états finaux, et l'ensemble des états initiaux
2. L'automate M est-il déterministe ?
3. Dans quel état se trouve l'automate après avoir lu le mot *bbabbb* ? Ce mot est-il reconnu par l'automate ? accepté par l'automate ? Mêmes questions pour le mot *babaabba*.
4. L'automate M est-il complet ? Le mot *baa* est-il reconnu par cet automate ? accepté par cet automate ?
5. L'automate suivant M' est-il déterministe ?



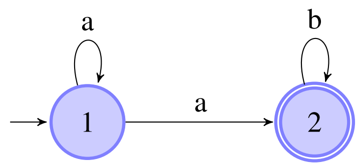
6. Dans quels états peut-être l'automate M' après avoir lu *babba* ? Ce mot est-il accepté par cet automate ?
7. Même question pour le mot *abbb*.

Exercice 2 - Pour chacun des automates suivants, dire s'il est déterministe et s'il est complet.
Décrire ensuite le langage reconnu par cet automate en donnant une caractérisation de l'ensemble des mots acceptés.

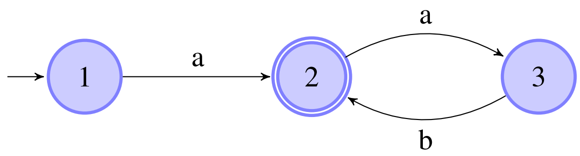
1. Automate M_1



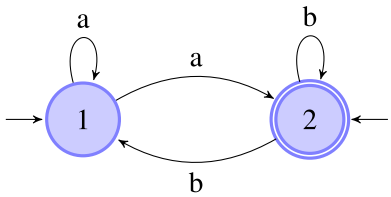
2. Automate M_2



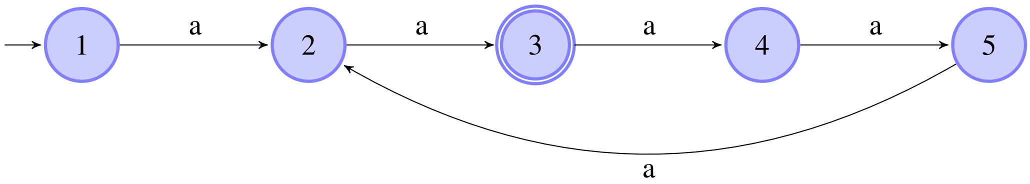
3. Automate M_3



4. Automate M_4



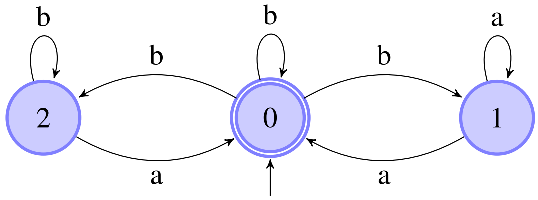
5. Automate M_5



Exercice 3 - Dans chacun des cas suivants, donner un automate **déterministe et complet** reconnaissant le langage sur l'alphabet $\{0,1\}$:

1. l'ensemble des mots se terminant par 00
2. l'ensemble des mots ayant au moins 3 zeros consécutifs
3. l'ensemble des mots dont l'avant-dernier symbole est un 1
4. l'ensemble des mots qui contiennent au plus deux 0 consécutifs et au plus deux 1 consécutifs

Exercice 4 - Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soit l'automate M suivant



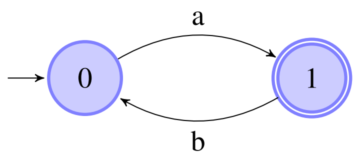
1. Donner le système d'équations de l'automate M
2. Déterminiser l'automate M
3. Caractériser le langage $\mathcal{L}(M)$ reconnu par M
4. Donner une grammaire linéaire à droite qui engendre $\mathcal{L}(M)$
5. Construire l'automate complémentaire à M

Exercice 5 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Soient $L_1 = \{w \in \Sigma^* | \ |w|_a = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ et $L_2 = \{w \in \Sigma^* | \ |w|_b = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$

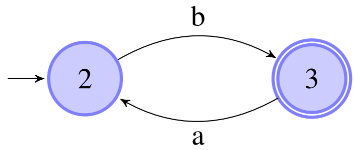
1. Caractérisez en français les langages L_1 et L_2
2. Construire les automates qui reconnaissent respectivement L_1 et L_2
3. Construire l'automate qui reconnaît $L_1 + L_2$

Exercice 6 - Soient les deux automates M_1 et M_2. Construire le l'automate qui reconnaît le langage $\mathcal{L}(M_1).\mathcal{L}(M_2)$.

– Automate M_1



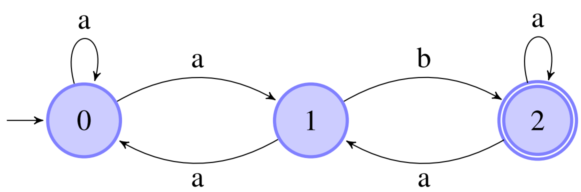
– Automate M_2



Exercice 7 - Soit la grammaire $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$, avec $V = \{S, T, U, a, b\}$, $\Sigma = \{a,b\}$, $P = \{S \to aS,\ S \to bT,\ S \to \varepsilon,\ T \to bT,\ T \to aU,\ T \to \varepsilon,\ U \to aU,\ U \to \varepsilon\}$.

Construire l'automate M tel que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

Exercice 8 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Soit l'automate M suivant



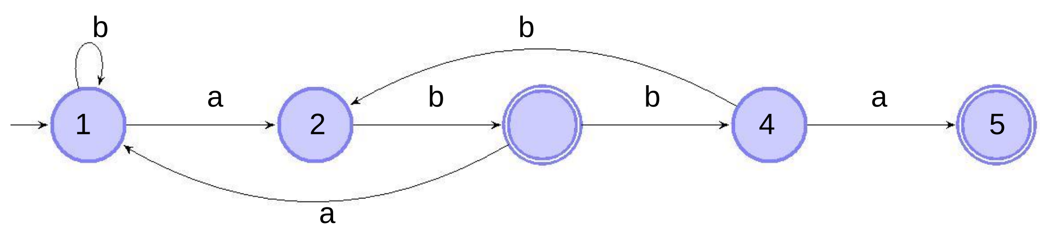
1. Donner le système d'équations de l'automate M
2. Déterminiser l'automate M
3. Donner une grammaire linéaire à droite qui engendre $\mathcal{L}(M)$
4. Construire l'automate complémentaire à M

Exercice 9 - Soit la grammaire $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$, avec $V = \{S, T, a, b\}$, $\Sigma = \{a,b\}$, $P = \{S \to aS,\ S \to bT,\ S \to \varepsilon,\ S \to a,\ T \to aS,\ T \to bT,\ T \to a\}$.

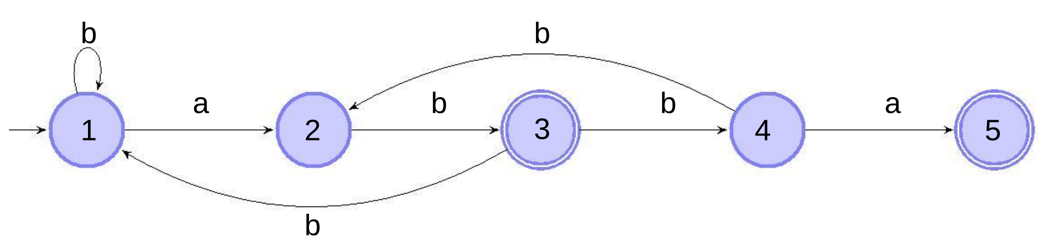
Construire l'automate M tel que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

Théorie des Langages – TD 3 et 4
AUTOMATES FINIS

Exercice 1 - Soit Σ = {a, b}. Soit l'automate M suivant



1. Combien d'états possède l'automate M ? Donner l'ensemble des états finaux, et l'ensemble des états initiaux
2. L'automate M est-il déterministe ?
3. Dans quel état se trouve l'automate après avoir lu le mot bbabbb ? Ce mot est-il reconnu par l'automate ? accepté par l'automate ? Mêmes questions pour le mot babaabba.
4. L'automate M est-il complet ? Le mot baa est-il reconnu par cet automate ? accepté par cet automate ?
5. L'automate suivant M' est-il déterministe ?



6. Dans quels états peut-être l'automate M' après avoir lu babba ? Ce mot est-il accepté par cet automate ?
7. Même question pour le mot abbb.

Corrigé :

1. Les états de l'automate *M, Q= {1, 2, 3, 4, 5}*. l'automate M possède 5 états.

   Rappel : Un automate est déterministe si, pour chacun de ses états, il y a au plus une transition pour chaque étiquette possible.

2. M est-il un automate déterministe ?
   Rappel : Une fonction de transition peut être définie comme suit :

δ : $Q \times \Sigma \rightarrow Q$

Pour l'automate *M*, *Σ = {a, b},* Q= {1, 2, 3, 4, 5}.

On a *δ(1,a)= {2}, δ(1,b)= {1}, δ(2,a)= ∅, δ(2,b)= {3}, δ(3,a)= {1}, δ(3,b)= {4}, δ(4,a)= {5}, δ(4,b)= {2}, δ(5,a)= δ(5,b)= ∅.*

Ces résultats peuvent être inscrits dans une matrice de transition.

	a	b
1	{2}	{1}
2	∅	{3}
3	{1}	{4}
4	{5}	{2}
5	∅	∅

Comme il n'y a pas plus d'un état dans chacune des cases de la matrices de transition, l'automate M est déterministe.

Rappel :
Un mot w est accepté par un automate si et seulement si

$$(q0, w) \Rightarrow (q_1, w_1) \Rightarrow (q_2, w_2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (q_n, w_n) \text{ avec } q_n \in F$$

Ou bien

$$(q_0, w) \ {}^*\!\!\Rightarrow (q, \varepsilon) \text{ avec } q \in F$$

3. Le mot à lire bbabbb

Etat courant	**Symbole lu**	**transition**
1	b	δ (1,b)=1
1	b	δ (1,b)=1
1	a	δ (1,a)=2
2	b	δ (2,b)=3
3	b	δ (3,b)=4
4	b	δ (4,b)=**2**

On peut aussi écrire :

(1, bbabbb) ⇒ (1, babbb) ⇒ (1, abbb) ⇒ (2, bbb) ⇒ (3, bb) ⇒ (4, b) ⇒ (2, ε)

Après lecture du mot bbabbb, l'automate M est à l'état 2. Comme on est pas en un état final, ce mot n'est pas reconnu (n'est pas accepté).

Rappel : Un **automate est complet** si pour tout état q ∈ Q il existe une transition pour chaque lettre de l'alphabet Σ.

$$\forall q \in Q, \forall x \in \Sigma, \delta (q, x) \text{ est défini}$$

4. L'automate M n'est pas complet car δ (2, a), δ (5, a) et δ (5, b) ne sont pas définis.

5. Pour l'automate M', Σ = {a, b}, Q= {1, 2, 3, 4, 5}.
La matrice de transition

	a	b
1	{2}	{1}
2	∅	{3}
3	∅	{1,4}
4	{5}	{2}
5	∅	∅

Comme *δ (3, b)= {1,4},* l'automate *M'* n'est pas déterministe.

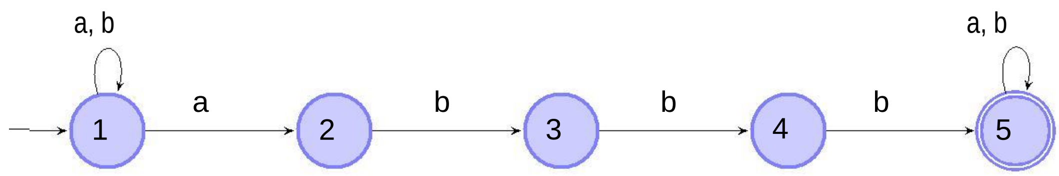
6. Il y a deux possibilités :
$(1, babba) \Rightarrow (1, abba) \Rightarrow (2, bba) \Rightarrow (3, ba) \Rightarrow (1, a) \Rightarrow (2, \varepsilon)$
$(1, babba) \Rightarrow (1, abba) \Rightarrow (2, bba) \Rightarrow (3, ba) \Rightarrow (4, a) \Rightarrow (5, \varepsilon)$
Pour la deuxième, le mot babba est accepté par l'automate.

7. Même chose pour le mot abbb.

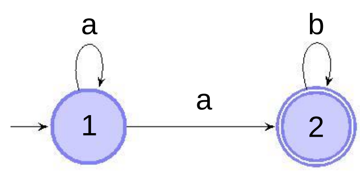
Exercice 2 - Pour chacun des automates suivants, dire s'il est déterministe et s'il est complet.

Décrire ensuite le langage reconnu par cet automate en donnant une caractérisation de l'ensemble des mots acceptés.

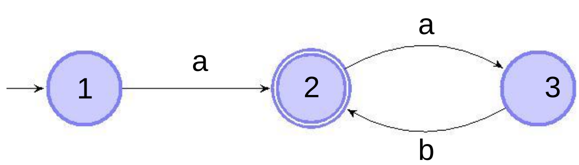
1. **Automate M_1**



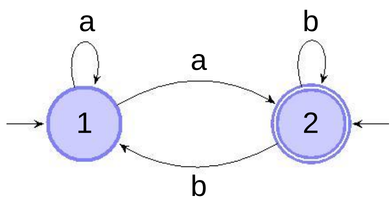
2. **Automate M_2**



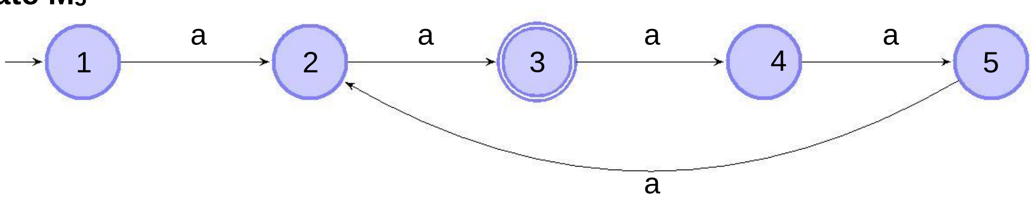
3. **Automate M_3**



4. **Automate M_4**

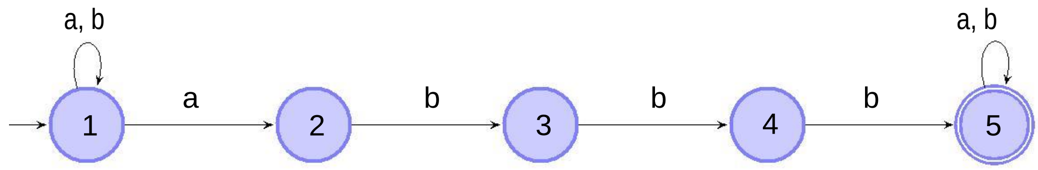


5. **Automate M_5**



Corrigé :

1.



Cet automate n'est pas déterministe car on a *δ (1, a)= {1, 2}.* Il n'est pas complet car *δ (2, a), δ (3, a) et δ (4, a)* ne sont pas définis.

Cet automate reconnait tous les mots ayant abbb, soit $(a+b)^*abbb(a+b)^*$

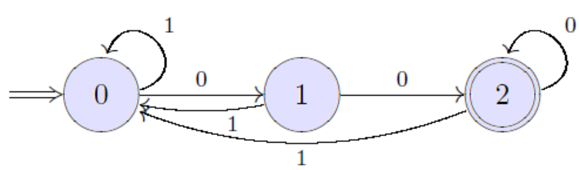
2. Même chose pour l'automate M2
3. Même chose pour l'automate M3
4. Même chose pour l'automate M4
5. Même chose pour l'automate M5

Exercice 3 - Dans chacun des cas suivants, donner un automate déterministe et complet reconnaissant le langage sur l'alphabet {0, 1} :

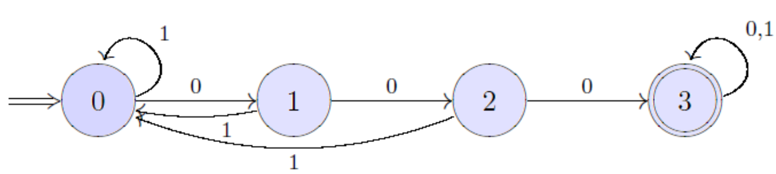
1. l'ensemble des mots se terminant par 00
2. l'ensemble des mots ayant au moins 3 zeros consécutifs
3. l'ensemble des mots dont l'avant-dernier symbole est un 1
4. l'ensemble des mots qui contiennent au plus deux 0 consécutifs et au plus deux 1 consécutifs

Corrigé :

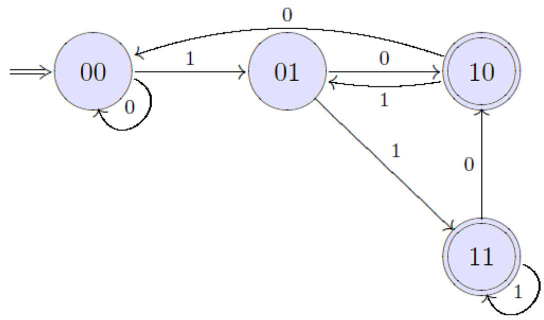
1. L'automate qui reconnait l'ensemble des mots se terminant par 00



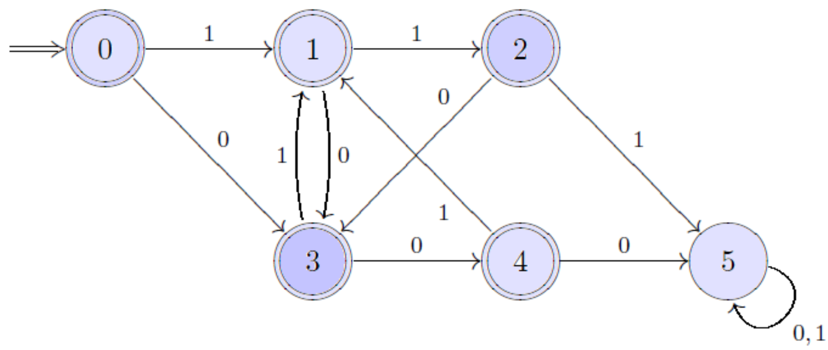
2. L'automate qui reconnait l'ensemble ayant au moins 3 zéros consécutifs



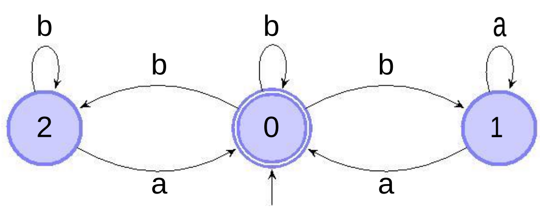
3. L'automate qui reconnait l'ensemble des mots dont l'avant-dernier symbole est un 1



4. L'automate qui reconnait l'ensemble des mots qui contiennent au plus deux 0 consécutifs et au plus deux 1 consécutifs



Exercice 4 - Soit Σ = {a, b}. Soit l'automate M suivant



1. Donner le système d'équations de l'automate M
2. Déterminiser l'automate M
3. Caractériser le langage L (M) reconnu par M
4. Donner une grammaire linéaire à droite qui engendre L (M)
5. Construire l'automate complémentaire à M

Corrigé:

1. **Le système d'équations de l'automate M**

$$\begin{cases} L_0=bL_0+bL_1+bL_2+\varepsilon \\ L_1=aL_1+aL_0 \\ L_2=bL_2+aL_0 \end{cases}$$

2. **Déterminisons l'automate M**

$L_0=bL_0+bL_1+bL_2+\varepsilon$

$L_0=b(L_0+L_1+L_2)+\varepsilon$

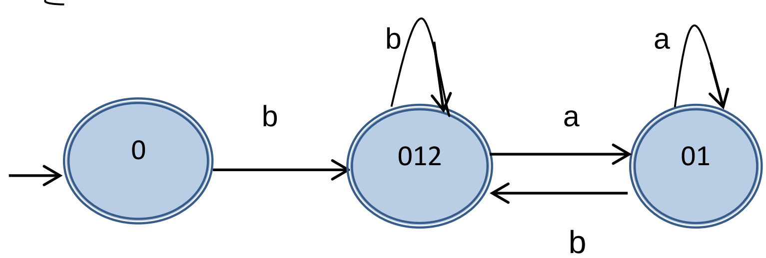
$L_0+L_1+L_2=b(L_0+L_1+L_2)+\varepsilon+a(L_1+L_0)+bL_2+aL_0$

$L_0+L_1+L_2=b(L_0+L_1+L_2)+a(L_0+L_1)+\varepsilon$

$L_0+L_1=b(L_0+L_1+L_2)+a(L_0+L_1)+\varepsilon$

Le système d'équations de l'automate M déterminisé

$$\begin{cases} L_0=b\,L_{012}+\varepsilon \\ L_{012}=b\,L_{012}+a\,L_{01}+\varepsilon \\ L_{01}=b\,L_{012}+a\,L_{01}+\varepsilon \end{cases}$$



3. $\varepsilon/b^+/b^+a^+/b^+a^+b^+/b^+a^+b^+a^+/\ldots$

   C'est une chaine composée d'alternation de séquence de b et de séquence de a

   Elle peut être une chaine vide ou une séquence de b.

4. **La grammaire linéaire qui engendre M**

   $S \rightarrow bA/\varepsilon$

   $A \rightarrow bA/aB/\varepsilon$

   $B \rightarrow bA/aB/\varepsilon$

   Rappel :

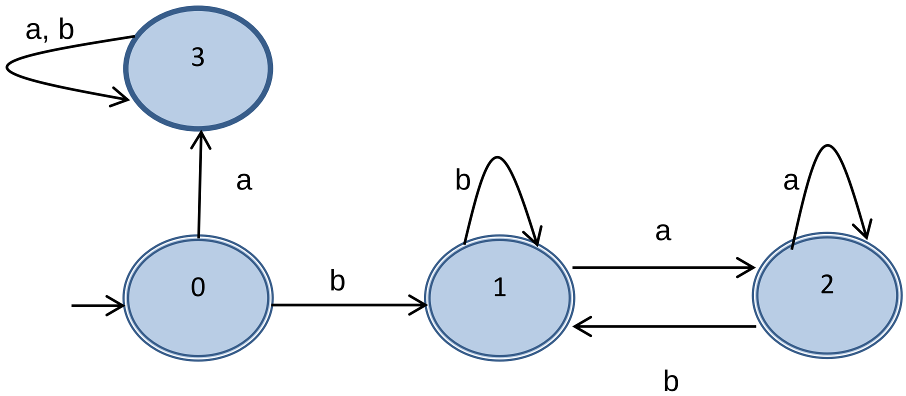
   La méthode qui permet de construire un automate complémentaire à M

   a) Déterminiser et compléter l'automate M

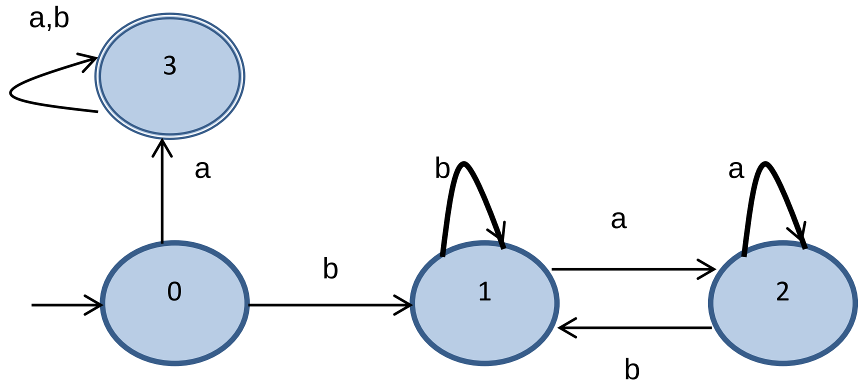
   b) Transformer tous les états finaux en états non finaux, et vice-versa

5. **L'automate complémentaire à M**

D'abord, complétons l'automate ci-dessus



Ensuite, en transformant tous les états finaux en états non finaux, et vice-versa, on obtient l'automate complémentaire à M.

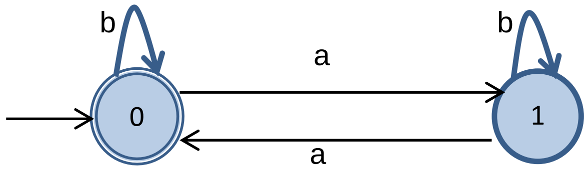


Exercice 5 - Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soient $L_1 = \{ w \in \Sigma^* | \ |w|_a = 2n,\ n \in \mathbf{N} \}$ et $L_2 = \{ w \in \Sigma^* | \ |w|_b = 2n + 1, n \in \mathbf{N}\}$

1. Caractérisez en français les langages L_1 et L_2
2. Construire les automates qui reconnaissent respectivement L_1 et L_2
3. Construire l'automate qui reconnaît $L_1 + L_2$

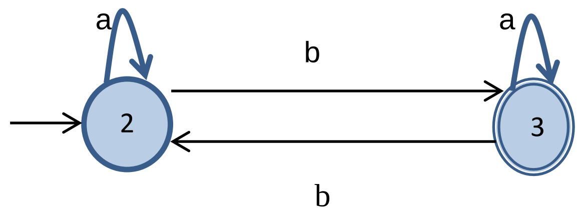
Corrigé :

1. L1 est le Langage reconnaissant les mots contenant un nombre pair de lettres a.
   L2 est le Langage reconnaissant les mots contenant un nombre impair de lettres b.
2. Automate reconnaissant les mots contenant un nombre pair de lettres a.
   M1



Automate reconnaissant les mots contenant un nombre impair de lettres b.

M2



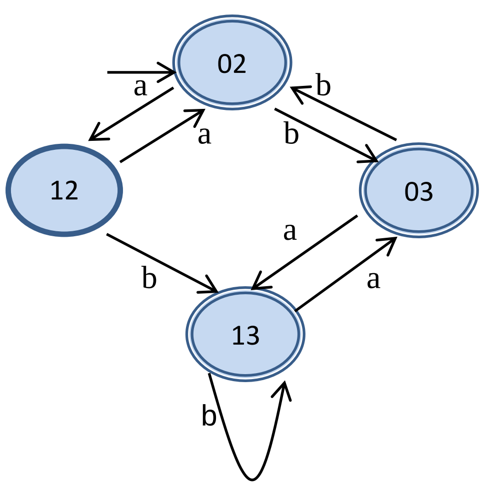
3. Il s'agit de calculer l'union L(M1) U L(M2). Pour calculer l'union de deux automates, il faut calculer l'équation qui correspond à chacun des langages. (voir page 39 du cours).

$L(M_1)$ $\quad\quad\quad\quad$ $L(M_2)$

$$\begin{cases} L_0=bL_0+aL_1+\varepsilon \\ L_1=bL_1+aL_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_2=aL_2+bL_3 \\ L_3=aL_3+bL_2+\varepsilon \end{cases}$$

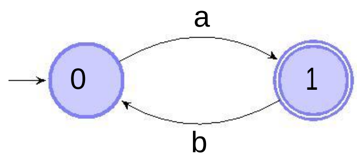
$L(M_1)$ U $L(M_2)$

$$\begin{cases} L_0+L_2=a(L_1+L_2)+b(L_0+L_3)+\varepsilon \\ L_1+L_2=b(L_1+L_3)+a(L_0+L_2) \\ L_0+L_3=a(L_1+L_3)+b(L_0+L_2)+\varepsilon \\ L_1+L_3=b(L_1+L_3)+a(L_0+L_3)+\varepsilon \end{cases}$$

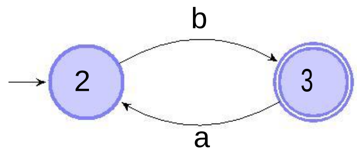


Exercice 6 - Soient les deux automates M_1 et M_2. Construire le l'automate qui reconnaît le langage $L(M_1).L(M_2)$.

– Automate M_1



– Automate M_2



Exercice 7 - Soit la grammaire $G = (V, \Sigma, P, S)$, avec $V = \{S, T, U, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,

$P = \{S \rightarrow aS,\ S \rightarrow bT,\ S \rightarrow \varepsilon,\ T \rightarrow bT,\ T \rightarrow aU,\ T \rightarrow \varepsilon,\ U \rightarrow aU,\ U \rightarrow \varepsilon\}$.

Corrigé :

Rappel

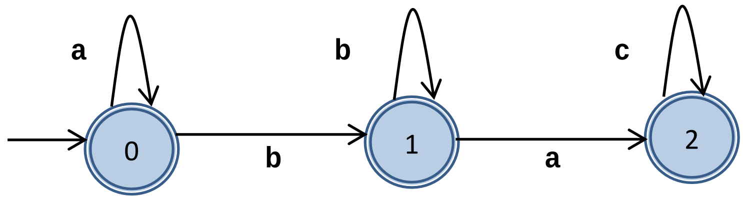
Grammaire associée à un automate fini

Pour tout automate $M = (Q, \Sigma, \Delta, q0, F)$, il existe une grammaire linéaire à droite qui génère L(M).

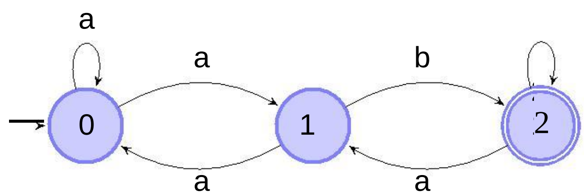
$G = (V_G, \Sigma_G, P_G, S_G)$, avec

- Σ_G : l'ensemble des symboles terminaux
- $V_G = Q \cup \Sigma$: l'alphabet. Il y a donc un symbole non terminal pour chaque état de l'automate
- $S_G = S$, ou S est le symbole non terminal associé à q_0
- $P_G = \{ A \rightarrow wB \mid (A, w, B) \in \Delta \} \cup \{ A \rightarrow \varepsilon \mid A \in F \}$

Construire l'automate M tel que L (G) = L (M).



Exercice 8 - Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soit l'automate M suivant



1. Donner le système d'équations de l'automate M
2. Déterminiser l'automate M
3. Donner une grammaire linéaire à droite qui engendre L (M)
4. Construire l'automate complémentaire à M

Corrigé :

1. Le système d'équation de l'automate M

$$\begin{cases} L_0=aL_0+aL1 \\ L1=aL_0+bL2 \\ L2=aL1+aL2+\varepsilon \end{cases}$$

2. Déterminisons l'automate M

   Le système d'équation du système de l'automate M déterminisé est :

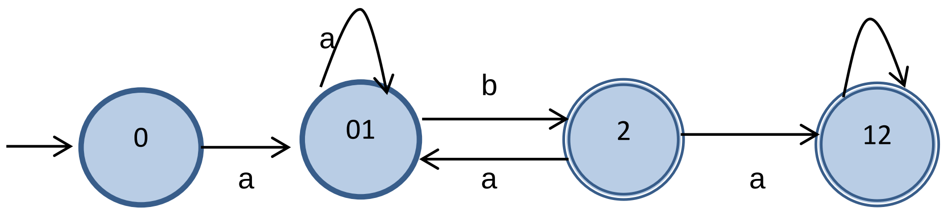
$$\begin{cases} L_0=a(L_0+L_1) \\ L_0+L_1=a(L_0+L_1)+bL_2 \\ L_2=a(L_1+L_2)+\varepsilon \\ L_1+L2=a(L_0+L_1+L_2)+bL_2+\varepsilon \\ L_0+L_1+L_2=a(L_0+L_1+L_2)+bL_2+\varepsilon \end{cases}$$

   Notons que L1+L2= L0+L1+L2

   Le système d'équation du système de l'automate M déterminisé s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} L_0=a(L_0+L_1) \\ L_0+L_1=a(L_0+L_1)+bL_2 \\ L_2=a(L_1+L_2)+\varepsilon \\ L_1+L2=a(L_1+L2)+bL_2+\varepsilon \end{cases}$$

L'automate M déterminisé



3. Une grammaire linéaire à droite qui engendre L(M)

$$\begin{cases} S \rightarrow aA \\ A \rightarrow aA/bB \\ B \rightarrow aC/\varepsilon \\ C \rightarrow aD/bB/\varepsilon \\ D \rightarrow aD/bB/\varepsilon \end{cases}$$

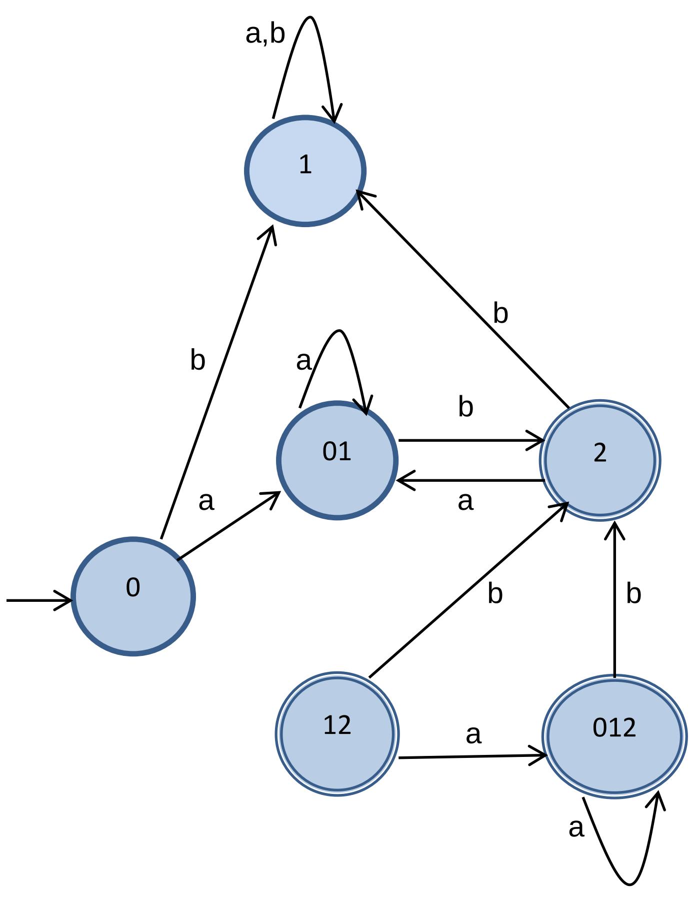
4. L'automate complémentaire à M

Pour trouver l'automate complémentaire à M, il faut suivre la méthode suivante (p. 35 du cours) :

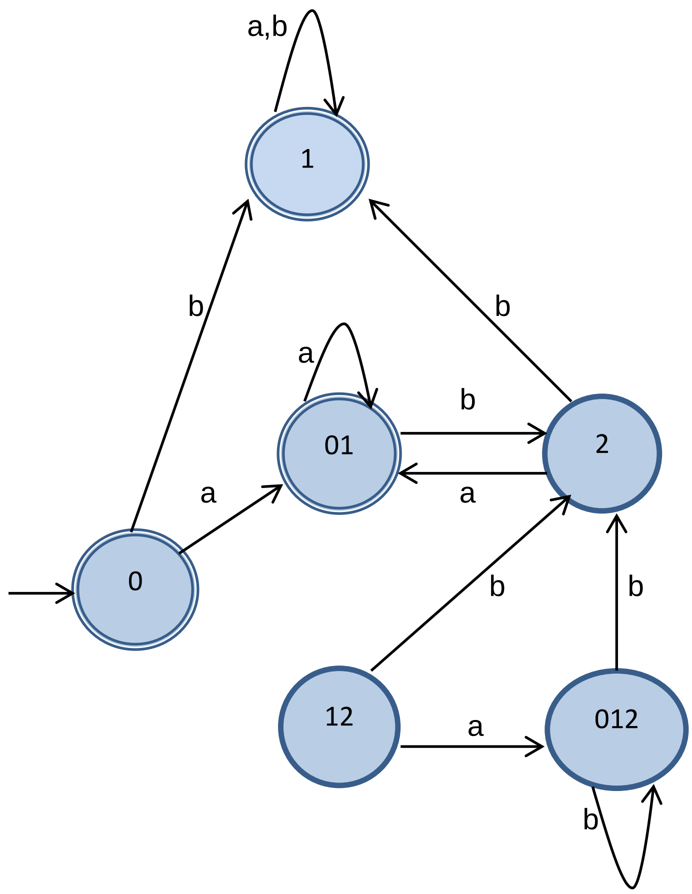
a) Déterminiser et compléter l'automate

b) Transformer tous les états finaux en états non finaux, et vice-versa

Complétons l'automate ci-dessous :



Transformons tous les états finaux en états non finaux, et vice-versa



Exercice 9 - Soit la grammaire $G = (V, \Sigma, P, S)$, avec $V = \{S, T, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aS,\ S \to bT,\ S \to \varepsilon,\ S \to a,\ T \to aS,\ T \to bT,\ T \to a\}$.

Construire l'automate M tel que $L(G) = L(M)$.

Corrigé :

Rappel

Une production de la forme A → a peut être transformée en { A → aU, U → ε }

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to aS, \\ S \to bT, \\ S \to \varepsilon, \\ S \to a, \\ T \to aS, \\ T \to bT, \\ T \to a \end{array} \right. \qquad P \left\{ \begin{array}{l} S \to aS, \\ S \to bT, \\ S \to \varepsilon, \\ S \to aU, \\ U \to \varepsilon, \\ T \to aS, \\ T \to bT, \\ T \to aV, \\ V \to \varepsilon \end{array} \right.$$

L'automate *M* tel que *L (G)* = *L (M)* est celui-ci