Université des Sciences et Technologie Houari Boumediene
Faculté d'Électronique et Informatique
Département Informatique

Travaux Dirigés de

Théorie des Graphes

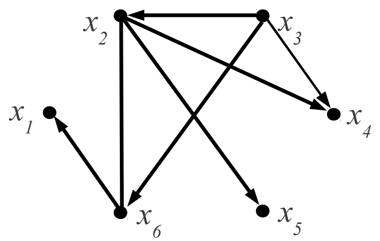
Licence Informatique, L3

Table des matières :

Chapitre 1
Concepts fondamentaux des graphes

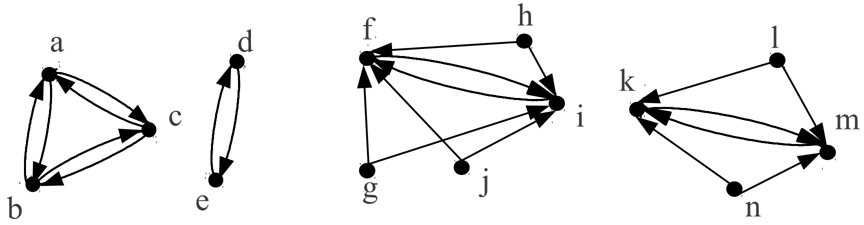
Exercice 1

Donner la représentation matricielle du graphe suivant, Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs de chacun des sommets.



Exercice 2

On considère l'ensemble E d'habitant d'un immeuble, on défini dans E la relation R telle que : a R b ⇔ b est la sœur de a. Soit G le graphe représentant cette relation.



1. Est-il possible de déterminer à partir du graphe G tous les couples vérifiant la relation R' : a R' b ⇔ b est le frère de a.
2. Soit R* la relation définie par : a R* b ⇔ b est le frère ou la sœur de a, et soit G* le graphe associé. Que peut-on dire de G*
3. Caractériser G par rapport à G*.
4. Si on ne considère que les éléments {f,g,h,i,j,k,l,m} nous aurions un autre graphe G'. Caractériser G' par rapport à G.

Exercice 3

On Dispose d'un récipient *d'une quinzaine de litres* plein de liquide et *deux récipients* respectivement de 8 *litres* et 5 *litres, vides.*
On veut isoler 7 *litres de liquide* dans le récipient de 8 *litres* sans perdre de liquide. Résoudre ce problème en utilisant un graphe.

Exercice 4

Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 5

On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, 7 sommets. Qu'en déduisez-vous? Prouvez-le!

Exercice 6

Un groupe de 15 fans d'un chanteur célèbre, possède les deux particularités suivantes :
• Chaque personne connaît au moins 7 autres
• Toute information détenue par une personne est répercutée dans la minute qui suit à ses connaissances (et uniquement à elles) .
Quel est le temps maximal entre le moment où une des 15 fans apprend une chose nouvelle sur leur idole, et celui où le groupe entier est au courant ?

Exercice 7

Soit $G = (X,E)$ un graphe simple tel que $|X| = n$

1. Montrer que $x \in X$, $d_G(x) \leq n$-1,

2. Montrer qu'il ne peut y avoir dans *G* à la fois un sommet de *degré égal à zéro* et un sommet de *degré égal à n*-1,
3. Montrer qu'il existe *deux sommets* ayant *le même degré* dans *G.*

Exercice 8

Soit *G=(X,U)* un graphe d'ordre n, le nombre d'arcs est désigné par *m*. Soient *δ(G)* et Δ*G)* respectivement les degrés minimum et maximum du graphe *G* montrer que : $\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$

Exercice 9

Soit *G* un *graphe simple biparti* d'ordre *n,* montrer que le nombre d'arêtes $m \leq n^2/4$.
En déduire qu'il existe un sommet *x* tel que $d_G(x) \leq n/2$.

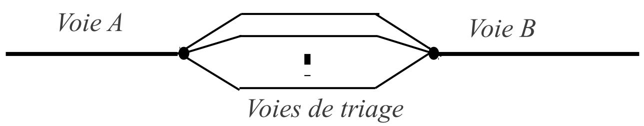
Exercice 10 (organisation d'un examen)

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, 6 matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Informatique (I), Sport (S). Les profils des candidats à options multiples sont : F,A,M - D,S - I,S - I,M

1. Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?
2. Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

Exercice 11

On a 6 wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant, Deux wagons i et j peuvent être mis sur la même voie de triage si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir.



Dessiner le graphe illustrant la situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes du graphe.
Quel sera le nombre minimal de voies de triage nécessaires ?

Chapitre 2

Cheminement dans les graphes

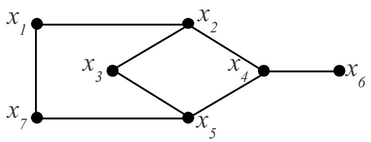
Exercice 1

Soit G=(X,E) un graphe non orienté, simple et connexe d'ordre n.

- On appelle <u>longueur</u> d'une chaîne $\mu(x,y)$ joignant les deux sommets x et y, $|\mu(x,y)|$, le nombre d'arêtes de cette chaîne.
- On désigne par $e(x,y)$, l'<u>écart</u> entre x et y, la longueur de la plus courte chaîne joignant x et y; $e(x,y) = \min\{|\mu(x,y)|\}$ $e(x,x) = 0$.

  On appelle:
- <u>Écartement</u> d'un sommet x, le nombre $E(x) = \max\{e(x,y)\}$, y ЄX
- <u>Diamètre</u> de G, le nombre $e(G) = \max\{e(x,y)\}$, x, y ЄX
- <u>Rayon</u> de G, le nombre $r(G) = \min\{E(x)\}$, x ЄX
- <u>Centre</u> de G, un sommet s Є X tel que E(s) = r(G)

Déterminer le diamètre, le rayon et le ou les centres du graphes suivants:



Exercice 2

Soit G = (X, U) un graphe orienté simple et M (de terme général m_{ij}) sa matrice d'adjacence. On définit par récurrence sur l'entier k ≥ 2, la puissance booléenne $M^{[k]}$ qui est la matrice de terme général:

$$m_{ij}^{[k]} = \bigvee_{l=1}^{n} \left(m_{il}^{[k-1]} \wedge m_{lj}\right) \quad \text{et on pose} \quad M^{[1]} = M \quad et \quad \hat{M} = M^{[n]}$$

1. Donner une interprétation aux éléments de $M^{[l]}$.
2. Interpréter les éléments de $\hat{M}$ en particulier $\hat{m}_{ii}$.
3. Montrer que $I \vee \hat{M} = (I \vee M)^{[n]} = (I \vee M)^{[p]}, \quad \forall\, p \geqslant n$
4. En déduire un procédé de calcul de $(I \vee \hat{M})$. comportant au plus $E[\log_2(n)] + 1$ produits booléens de matrices. Et comparer le avec le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $\hat{M}$

Algorithme de Warshall.

Le calcul direct de la matrice nécessite $\hat{M}$ trop d'opérations matricielles. L'algorithme de Warshall, donné ci-dessous, permet de calculer $\hat{M}$ avec un gain considérable en nombre d'opérations (n^2 tests et au plus n^3 opération V, c'est donc un algorithme en $O(n^3)$.

```
Procédure Warshall (Donnée: M, résultat: ) M̂
Début
    Pour i de 1 à n faire
       pour j de 1 à n faire
          si mji = 1 alors
             pour k de 1 à n faire
                 mjk = mjk  v  mik
             fait
          fsi
       fait
    fait
fin.
```

Exercice 3

Soit le graphe orienté G=(X,U) représenté dans le tableau ci-dessous:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
pred(x)	x_3,x_7	x_4,x_6	x_5	x_1	x_1	x_7,x_8	x_5	x_2

1. Donner la matrice d'adjacence M du graphe G

2. G est-il connexe ?
3. G admet-il un parcours Eulerien ? Pourqoui ?
4. Donner la matrice de fermeture transitive du graphe G.
   G amet-il un circuit ?
5. Trouver les composantes fortement connexes de G

Exercice 4

Soit G = (X,U) un graphe orienté et M sa matrice d'adjacenc $\hat{M}$ e, la fermeture transitive de M.

1. Décrire un algorithme permettant d'obtenir les composantes fortement connexes de G
2. Comment Cet algorithme peut-il être utilisé pour simplifier l'énumération des circuits de G ?. A quoi se réduit cet algorithme lorsque le graphe est sans circuit ?.
3. Définir la matrice booléenne de G, le graphe réduit de G. Montrer comment obtenir ses éléments à partir de . $\hat{M}$
4. Appliquer cet algorithme au graphe donné par le tableau suivant:

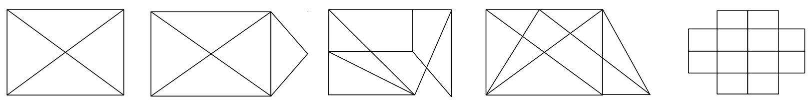
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
succ	12	1, 3	10	5, 6	4, 6	3, 9	8, 9	8, 9	10	9	10	2, 3

Exercice 5

Démontrer que si deux sommets *x* et *y* appartiennent à une même composante fortement connexe *C*, alors tout chemin de *x* à *y* est entièrement inclus dans *C*.

Exercice 6

Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux foix sur le même trait!) ?



Exercice 7

Soit G=(X,U) un 1-graphe orienté complet fortement connexe. Montrer alors que G admet un circuit Hamiltonien.

Exercice 8

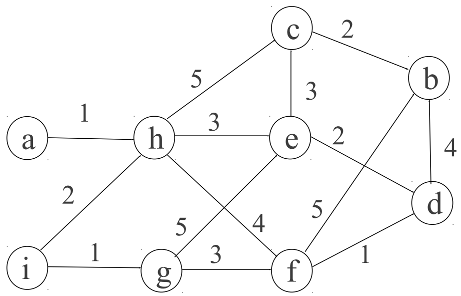
Dans un réseau téléphonique constitué de 2n centraux téléphoniques disposés de telle façon que chaque centrale est reliée par une ligne téléphonique directe avec au moins n autres centraux. Montrez qu'il est toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.

Chapitre 3

Problèmes de cheminement dans les graphes

Exercice 2

Considérons le graphe G suivant :



1. Déterminer les niveaux de ce graphe

2. Donner la longueur des chemins minimaux reliant le sommet a aux autres sommets du graphe.

Exercice 2

Soit l'algorithme de DJIKSTRA permettant de déterminer les plus courts chemins issus d'un sommet donné s vers tous les autres sommets dans un graphe orienté G=(X,U). Pour tout arc $u=(i,j) \in$ U, on utilise la notation suivante:

$j \in$ succ(i) et c_{ij} est le poids de l'arc (i,j)

```
Algorithme de DJIKSTRA
Debut
      S := x1 ;  D[s] := 0 ; Opt[s] = 0 ;
      Pour tout i∈X et i≠s faire D[i] := ∞ ; fait
      tant que |S| < n faire
            choisir un sommet i∉S / D[i] = min{D[j],j∉S} ;
            S := S U {i} ;
            Pour tout j∈ succ(i) faire
                  si D[j]>D[i]+cij alors  D[j]:= D[i]+cij ;
                                          Opt[j] = i ;
            fait
      fait
fin
```

On obtient à la fin dans D[i] le poids du chemin optimal issu du sommet s vers le sommet i, et dans Opt[i] le prédécesseur de i dans le chemin optimal.

On définit la fiabilité comme une mesure de probabilité sur les arcs. On associe à tout arc (i,j) une valeur r_{ij} comprise entre 0 et 1 et qui représente la probabilité que l'arc soit opérationnel.

On définit la fiabilité d'un chemin Υ dans un graphe comme étant:

$$r(\gamma)=\prod_{(i,j)\in\gamma} r_{ij}$$

On veut déterminer le chemin de fiabilité maximale dans un graphe orienté G=(X,U) partant d'un sommet s.

1. Réécrire l'algorithme de DJIKSTRA en apportant les modification nécessaire pour résoudre le problème de fiabilité maximale.
2. Appliquer l'algorithme de DJIKSTRA modifié sur le graphe :

Arc	(1.2)	(1.3)	(2.3)	(2.4)	(3.4)	(3.5)	(4.6)	(5.4)	(5.6)
Fiabilité	0.6	0.4	0.2	0.2	0.5	0.8	0.7	0.1	0.3

3. Montrer qu'en employant les logarithmes, on peut ramener le problème de chemin de fiabilité maximale à celui du plus court chemin.

Exercice 3

Soit G un graphe connexe et soit μ une chaîne de longueur minimale reliant deux sommets x et x'. Montrer que toute sous chaîne incluse dans μ reliant les deux sommets y et y', appartenant à μ, est aussi une chaîne de longueur minimale.

Exercice 4

Soit $R = (X, U, p)$ un réseau sur n sommets. On suppose connu un chemin Y de valeur optimale (min ou max) allant de $i = i_0$ à j = i_{k+1} et passant par les sommets intermédiaires $i_1, i_2, \ldots, i_k$:

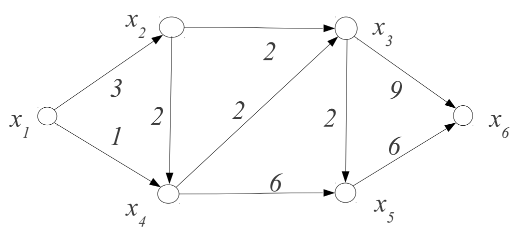
$$Y(i, j) = (i = i_0) \to i_1 \to i_2 \to \ldots \ldots \to i_k \to (i_{k+1} = j).$$

1. Montrer que tous les chemins entre les sommets i_l et i_m de la forme : $i_l \to i_{l+1} \to \ldots \to i_m$, pour $l = 0, 1, \ldots, k$ et $m = l+1, \ldots, k+1$, sont aussi de valeur optimale.

2. En déduire deux méthodes pour retrouver les itinéraires des chemins de valeur optimale entre tous couples de sommets (matrices de routage des successeurs et des prédécesseurs).

3. A quoi se réduisent ces matrices de routage lorsqu'on s'intéresse aux problèmes de chemin de valeur optimale issus d'un sommet donné i0 ou aboutissant à un sommet donné j_0.

4. Appliquer ces méthodes sur le graphe suivant en considérant les chemins de valeur minimale :



Chapitre 4
Problèmes d'ordonnancement

Exercice 1

Le Tableau suivant décrit les différentes étapes d'une étude préparatoire à la construction d'un bâtiment public ainsi que les contraintes d'antériorités qui les lient.

Tâches	Description	Durée en mois	Tâches antérieures
a	Recherche du site	2	
b	Recherche de financement	2	a, c
c	Autorisation	4	
d	Concours d'architectes	2	b, e à 75%
e	Publicité, sondages d'opinion	4	c
f	Recherche d'entreprise	1	d
g	Réalisation d'une maquette	3	d, e

Pour la bonne conduite de ce projet, on souhaite déterminer, à partir de ses données divers indicateurs comme la durée minimale de l'étude, les tâches critiques, ...

Exercice 2

Un laboratoire doit effectuer une étude comprenant 02 groupes de travaux distincts A et B . A désigne les travaux de recherche et d'études préliminaires, B les travaux d'exécution. On se propose de minimiser la durée total de de cette étude.

1. Les effectifs nA et nB affectés respectivement à A et B sont compris entre les limites:

$3 \leq nA \leq 6 \qquad 6 \leq nB \leq 15$

De plus, la direction décide de n'a#ecter à la réalisation de cette étude qu'un nombre limité de n personnes.

2. Les durées de A et B respectivement sont estimées, en jours, à 600 /nA et 300 /nB

3. B doit débuter au plus tôt à la date 10, et avant que la moitié des travaux A soit accomplie.

4. B doit être terminé avant que la moitié de A ne soit accomplie.

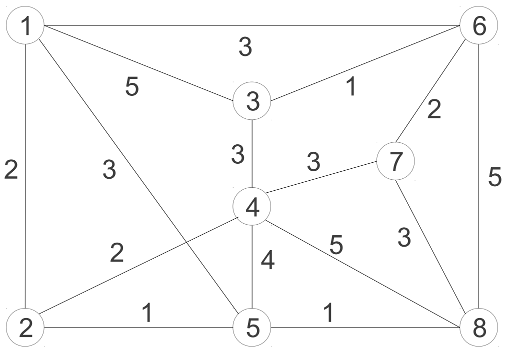
Question: Quelle est l'influence de n sur la durée minimale de réalisation de l'étude.

Chapitre 5

Arbres et arborescences

Exercice 1

Soit le graphe suivant :



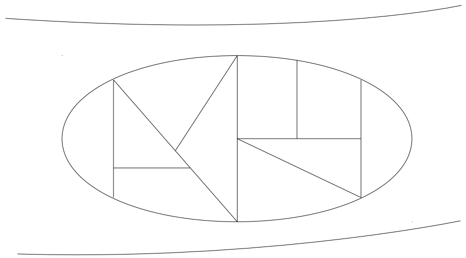
Trouver l'arbre de poids minimum puis l'arbre de poids maximum.

Exercice 2

Montrer que la moyenne des degrés des sommets d'un arbre est strictement inférieure à 2.

Exercice 3

Une île entourée d'un fleuve est consacrée à la culture du riz, cette île est constituée de plusieurs parcelles entourées de murs et disposés de la façon suivante :



La culture du riz suppose que l'on puisse périodiquement inonder l'ensemble des champs. Cela est réalisé en ouvrant des vannes placées dans les murs séparant les champs et le fleuve ou les champs entre eux. Etant donné que l'installation d'une vanne est coûteuse, il s'agit de déterminer le nombre minimum de vannes et leur emplacement pour pouvoir, quand on le désire, inonder tous les champs.

Chapitre 6

Les Flots

Exercice 1

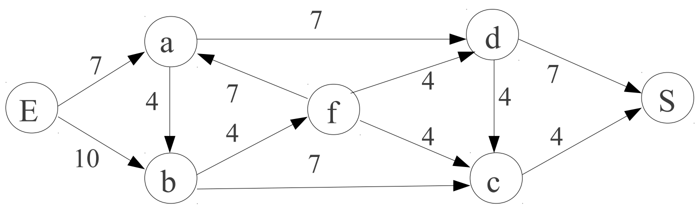
Une ville F est alimentée en eau grâce à des réservoirs situées dans 3 villes (A, B et C). Chaque réservoir est alimenté à partir de différentes sources (nappes souterraines, châteaux d'eau, ...) comme suit : 10000 m3/jour pour A et C et 1 000 m3/jour pour B. Le réseau de distribution reliant la ville F aux réservoirs passe par plusieurs points qui sont reliés entres eux à travers des canalisations de différentes capacités selon le tableau ci-dessous :

Point de départ	A	A	B	C	C	D	E	E
Point d'arrivée	C	D	D	B	E	F	A	F
Capacité du canal (en milliers de m3)	2	4	5	4	11	7	3	13

1. Modéliser le problème sous forme d'un graphe.
2. Déterminer le flot maximal de chaque canalisation.
3. Quelle est la quantité journalière maximale acheminée vers la ville F.

Exercice 2.

Soit le réseau de transport ci-dessous ayant comme entrée (source) le sommet E et comme sortie (puits) le sommet S.



Les poids des arcs représentent les capacités des canaux.

1. Compléter le flot suivant :

(E,a)	(E,b)	(a,b)	(a,b)	(b,c)	(b,f)	(c,S)	(d,c)	(d,S)	(f,a)	(f,c)	(f,d)
?	?	2	2	1	?	?	1	3	1	1	?

2. Le flot précédent n'est pas maximal, dites pourquoi.
3. Trouver le flot maximal en appliquant l'algorithme de Ford-Fulkerson.

Bibliographie :

1. C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, 1970

2. C. Berge, Graphes, ISBN 2-04-15555-4, Gauthiers-Villars, Bordas, Paris, 1983.

3. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, 1958

4. M. Gondran et M. Minoux,Graphes et algorithmes, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles 1985.

5. M. Minoux et G. Bartnik, Graphes, algorithmes, logiciels, Dunod Informatique, ISBN 2-04- 016470-7, Bordas Paris, 1986.

6. Roseaux, Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle. Tome 1. Graphes: leurs usages, leurs algorithmes, ISBN 2-10-003935-0, Dunod, Paris, 1998.

7. F. Droesbeke, M. Hallin et C. Lefevre, Les graphes par l'exemple, ISBN 2-7298-8730-X, Ellipses, 1987.