Correction de l'interrogation N°01 / Les mots et les langages

Sujet N°1 :

Exercice 1 : (03 pts)

$(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$

Contre-exemple : Soit : $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$

$L_1 \cup L_2 = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ / $L_1^* = \{a^i \,/\, i \geq 0\}$ / $L_2^* = \{b^i \,/\, i \geq 0\}$

$(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, baa, bbbab, \ldots\}$

$L_1^* \cup L_2^* = \{a^i \,/\, i \geq 0\} \cup \{b^i \,/\, i \geq 0\} = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, bbb, \ldots\}$

Soit : $w = ab \in (L_1 \cup L_2)^*$, $w \notin L_1^* \cup L_2^*$

Exercice 2 : (04 pts)

Soit $x,y \in X^*$. On démontre $(xy)^R = y^R x^R$ par récurrence sur $|x|$:

Si $|x| = 0$ alors $x = \varepsilon = x^R$ et $(xy)^R = (\varepsilon y)^R = y^R \varepsilon = y^R x^R$

On suppose maintenant que la formule est vraie $\forall x,y \in X^*$ tel que :$|x| \leq n$ et vérifions qu'elle restera vraie pour l'ordre n+1.

Soit $x = a.w$ tel que $|x| = n+1$ avec : $w \in X^*$ ($|w| = n$) et $a \in X$

On a : $(xy)^R = (a.wy)^R = (wy)^R a = y^R w^R a = y^R x^R$. ($x = a.w$ et donc $x^R = w^R a$)

(Par hypothèse de récurrence tous les mots w de taille <=n vérifiant la propriété, c'est-à-dire : $(wy)^R = y^R w^R$)

Exercice 3 : (03 pts)

$L_1 = \overline{L_2}$

On démontrer que :

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$

$L_1 \cup L_2 \subseteq X^*$

$X^* \subseteq L_1 \cup L_2$

Sujet N°2 :

Exercice 1 : (03 pts)

$(L_1 . L_2)^* . L_1 \neq L_1 . (L_1 . L_2)^*$

Contre-exemple : Soit : $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$

$L_1 . L_2 = \{a\}.\{b\} = \{ab\}$ /$(L_1 . L_2)^* = \{(ab)^i \,/\, i \geq 0\}$

$(L_1 . L_2)^* . L_1 = \{(ab)^i a \,/\, i \geq 0\}$

$L_1 . (L_1 . L_2)^* = \{a(ab)^i \,/\, i \geq 0\}$

Soit : $w = aba \in (L_1 . L_2)^* . L_1$, $w \notin L_1 . (L_1 . L_2)^*$

Exercice 2 : (04 pts)

1/ $L_2 \subset L_1$

Montrons que : $\forall w\ (w \in L_2 \Rightarrow w \in L_1)$

Soit $w \in L_2 \Rightarrow w = 1^{2i}\ 0^{3j}$ avec $i, j \geq 0$

$w \in L_2 \Rightarrow w = 1^{k}\ 0^{m}$ avec $k=2i$ et $m=3j$, $k,m \geq 0$

$w \in L_2 \Rightarrow w \in L_1$

2/ $L_1 \not\subset L_2$

Vérifions qu'il existe un mot w tel que : $w \in L_1$ et $w \notin L_2$

Soit $w=10$, $w \in L_1$ mais $w \notin L_2$

Exercice 3 : (03 pts)

- ✓ Si $|x| \geq |y|$, alors le résultat précédent nous permet d'écrire directement $x = yt$, ce qui, en identifiant u et y, et v à t, nous permet de dériver directement les égalités voulues pour $k = 0$.
- ✓ Le cas où $|y| > |x|$ se traite par induction sur la longueur de y. Le cas où $|y|$ vaut 1 étant immédiat,
- ✓ Supposons la relation vraie pour tout y de longueur au moins n, et considérons y avec $|y| = n+1$. Il existe alors t tel que $y = xt$, d'où l'on dérive $xtz = xxt$, soit encore $tz = xt$, avec $|t| \leq n$. L'hypothèse de récurrence garantit l'existence de u et v tels que $x = uv$ et $t = (uv)ku$, d'où $y = uv(uv)^{k}u = (uv)^{k+1}u$.

Sujet N°3 :

Exercice 1 : (03 pts)

$L_1 \cup (L_2 . L_3) \neq (L_1 \cup L_2).(L_1 \cup L_3)$

Contre-exemple : Soit : $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ et $L_3 = \{c\}$

$L_1 \cup (L_2 . L_3) = \{a\} \cup \{bc\} = \{a, bc\}$

$(L_1 \cup L_2).(L_1 \cup L_3) = \{a, b\}.\{a, c\} = \{aa, ac, ba, bc\}$

Exercice 2 : (04 pts)

Voir l'exercice 2 du sujet 01.

Exercice 3 : (03 pts)

1/ $L_2 \subset L_1$

Montrons que : $\forall w\ (w \in L_2 \Rightarrow w \in L_1)$

Soit $w \in L_2 \Rightarrow w = 1^{4i}\ 0^{2j}$ avec $i, j \geq 0$

$w \in L_2 \Rightarrow w = 1^{k}\ 0^{m}$ avec $k=4i$ et $m=2j$, $k,m \geq 0$

$w \in L_2 \Rightarrow w \in L_1$

2/ $L_1 \not\subset L_2$

Vérifions qu'il existe un mot w tel que : $w \in L_1$ et $w \notin L_2$

Soit $w=10$, $w \in L_1$ mais $w \notin L_2$