**U.S.T.H.B.** **L3 Académique** **Année Universitaire 2011/2012**
**Fac. d'Electronique et Informatique** **Semestre 5** **9 Janvier 2012**
**Département Informatique** **Sections : A et B** **Durée : 1h30'**

# Examen Final de Théorie des Graphes

## Exercice 1. (7 points)

Soit un tournoi de volley-ball regroupant $n$ clubs. Chaque club affronte un autre exactement une (1) seule fois. On veut représenter à travers un graphe les résultats de ce tournoi. Sachez qu'en volley-ball il n'y a pas de score d'égalité.

1. Modéliser (sans dessiner) le problème. Puis dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.
2. Etudier les propriétés du graphe : simple, complet, régulier, symétrique, antisymétrique, transitif.
3. Est-il possible de trouver une situation où le club $C_1$ a gagné contre $C_2$ et $C_2$ a battu $C_3$ et ainsi de suite jusqu'à $C_{n-1}$ a gagné contre $C_n$ ? Justifier. ($C_i$ est un club quelconque)
4. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus $C_n$ a gagné contre $C_1$.

## Exercice 2. (7 points)

Soit $G=(X, E)$ un graphe non-orienté simple d'ordre $n=2p$.

1. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à $p$. Démontrer que ce graphe est connexe.

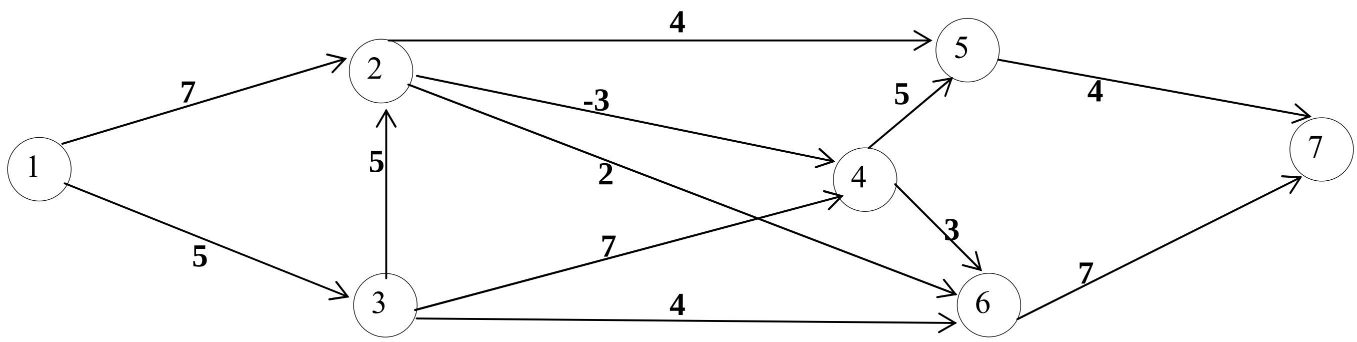
2. On suppose que $G$ est connexe et que $x$ est un sommet de $G$ de degré 1. Prouvez que $G\backslash\{x\}$ (le sous-graphe de $G$ engendré par l'ensemble de sommets $X-\{x\}$) est connexe.

3. En déduire que si $G$ est connexe et d'ordre $n \geq 2$, alors $G$ comporte au moins $n-1$ arêtes.

4. Démontrer que si $G$ d'ordre $n\geq 3$ comporte au moins $(n-1)(n-2)/2$ arêtes, alors $G$ est connexe.

## Exercice 3. (6 points)

Soit le graphe valué suivant :




1. Décomposer le graphe en niveaux.

2. Trouver tous les chemins optimaux en démarrant du sommet source.

3. L'algorithme de Dijkstra n'admet pas qu'il y ait des poids négatifs dans le graphe. On rajoute +4 au poids de chaque arc afin de les rendre tous positifs.

   a. Trouver tous les chemins optimaux à partir du sommet source dans le nouveau graphe.

   b. Est-il possible d'utiliser ce raisonnement pour résoudre le problème du chemin de poids optimal à l'aide de l'algorithme de Dijkstra dans des graphes ayant des poids négatifs.

*Bon Courage*