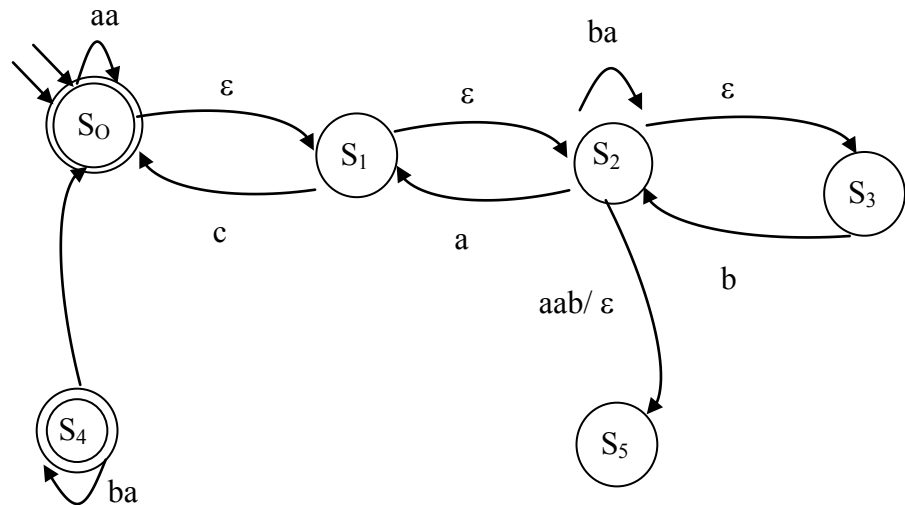
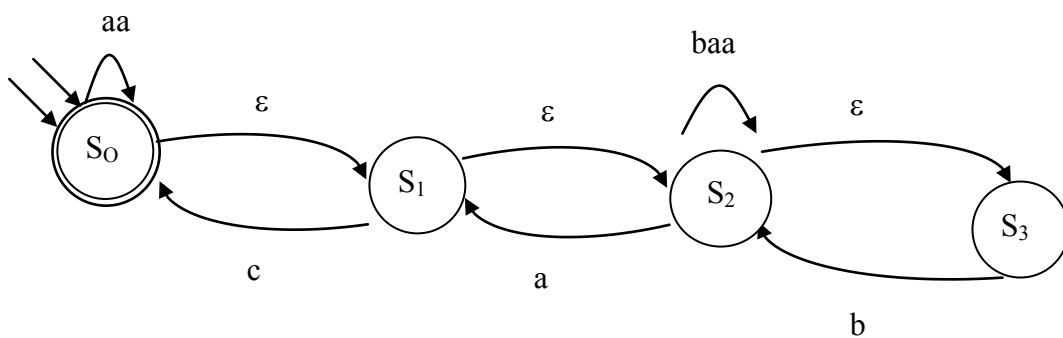
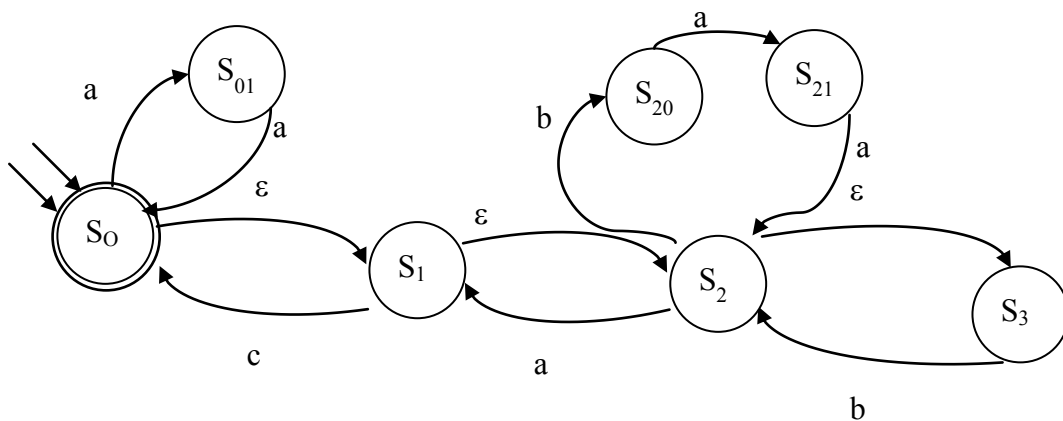


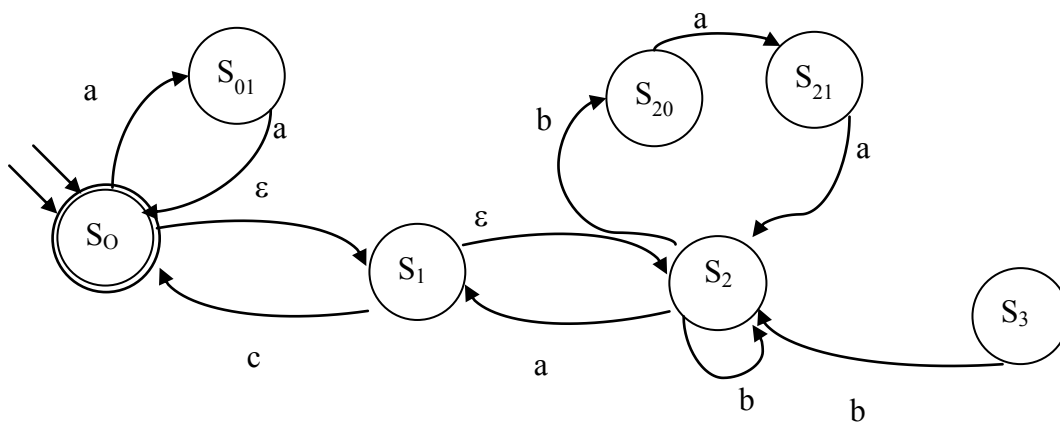
Contrôle Intermédiaire**Durée 2 heures** **Tout document interdit****Exercice I.** (8 Pts)Soit A l'automate d'états finis suivant :

1. Donnez la grammaire régulière droite du complément de $L(A)$. (Donnez toutes les étapes)

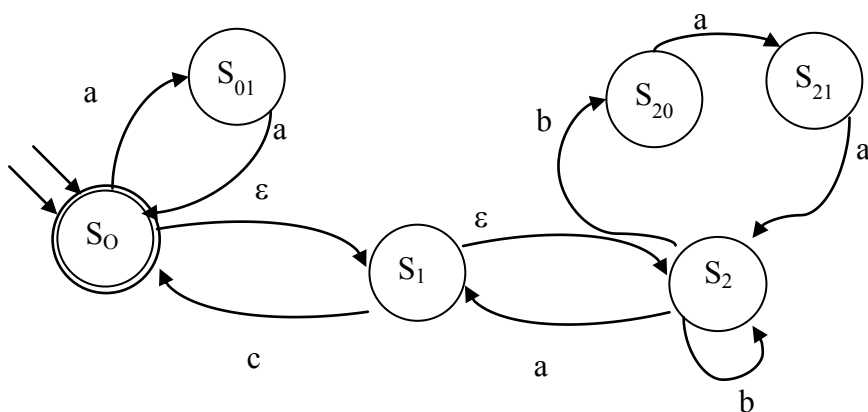
L'automate Réduit**L'automate Partiellement généralisé :**

L'automate Simple:

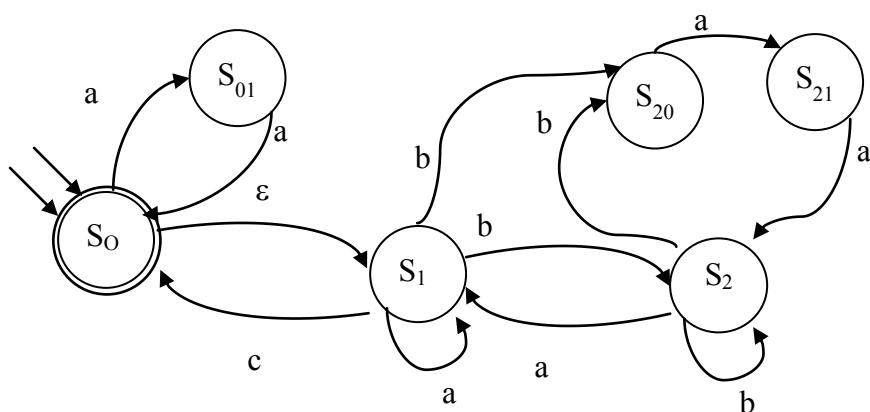
Elimination de la transition spontanée S2-S3



S3 est non accessible :

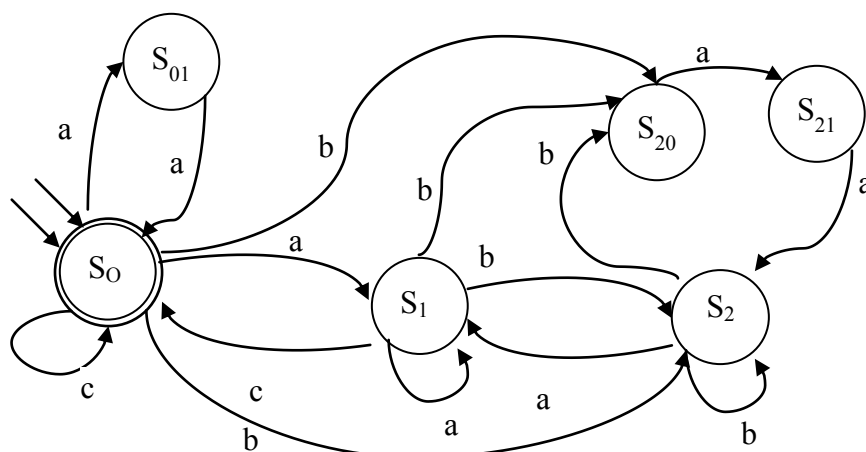


Elimination de la transition spontanée S1-



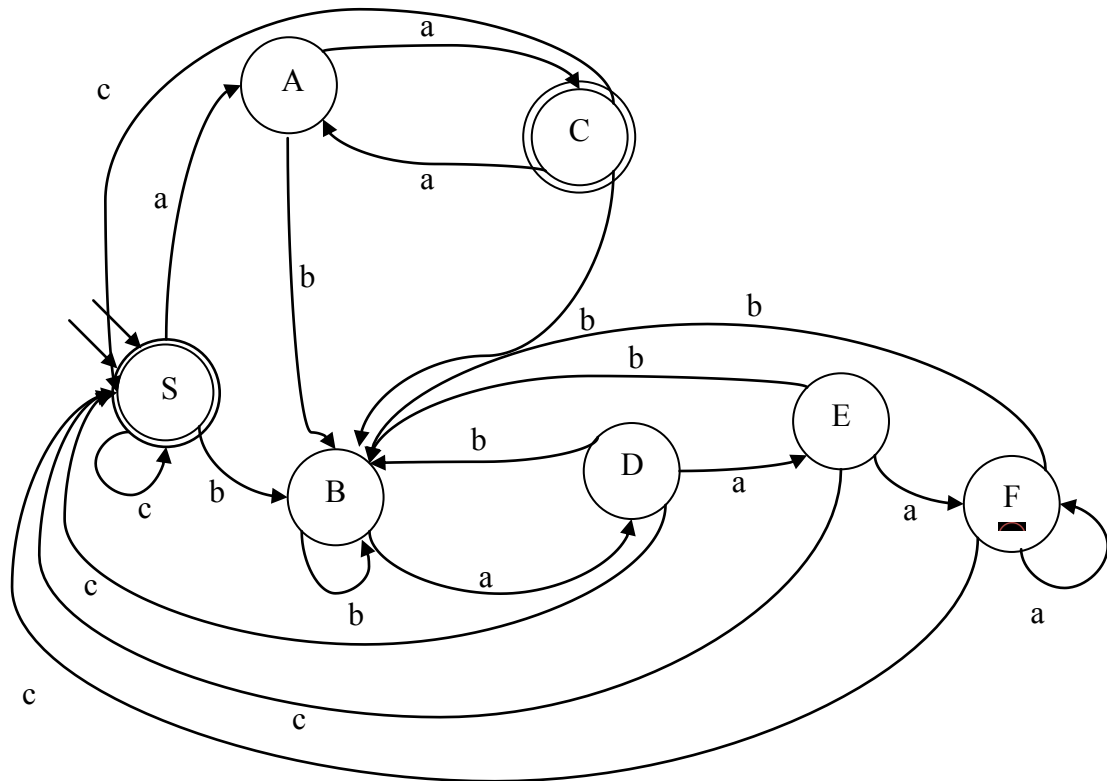
S2

Elimination de la transition spontanée S1-S2

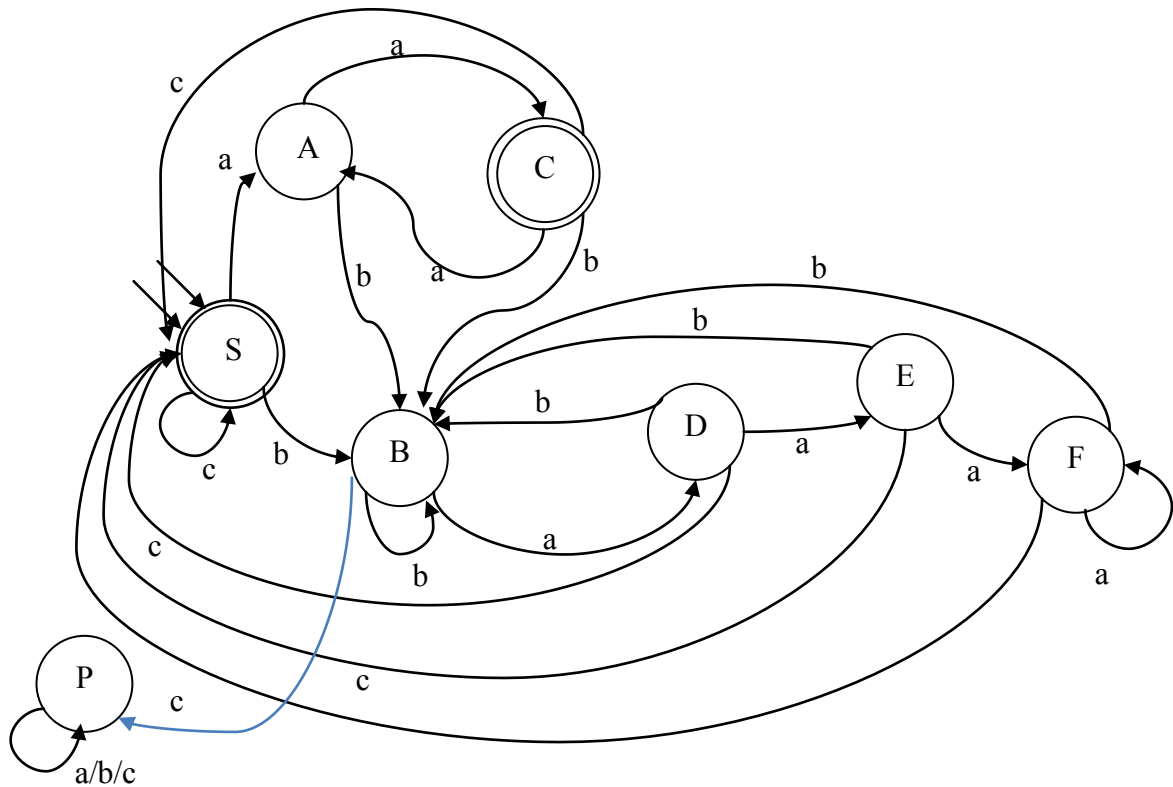


L'automate Déterministe:

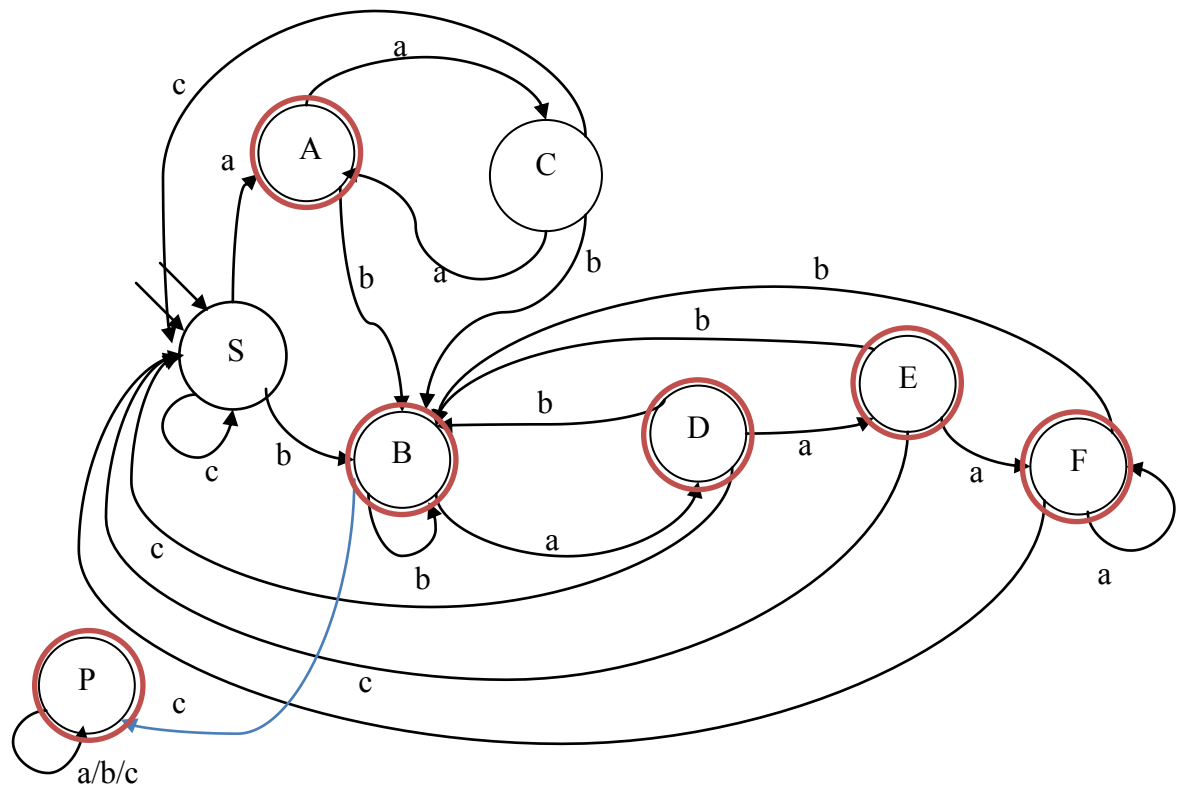
		a	b	c
S	S_0	S_{01}, S_1	S_{20}, S_2	S_0
A	S_{01}, S_1	S_0, S_1	S_{20}, S_2	S_0
B	S_{20}, S_2	S_{21}, S_1	S_{20}, S_2	-
C	S_0, S_1	S_{01}, S_1	S_{20}, S_2	S_0
D	S_{21}, S_1	S_2, S_1	S_{20}, S_2	S_0
E	S_2, S_1	S_1	S_{20}, S_2	S_0
F	S_1	S_1	S_{20}, S_2	S_0



L'automate Complet:



L'automate Complément:



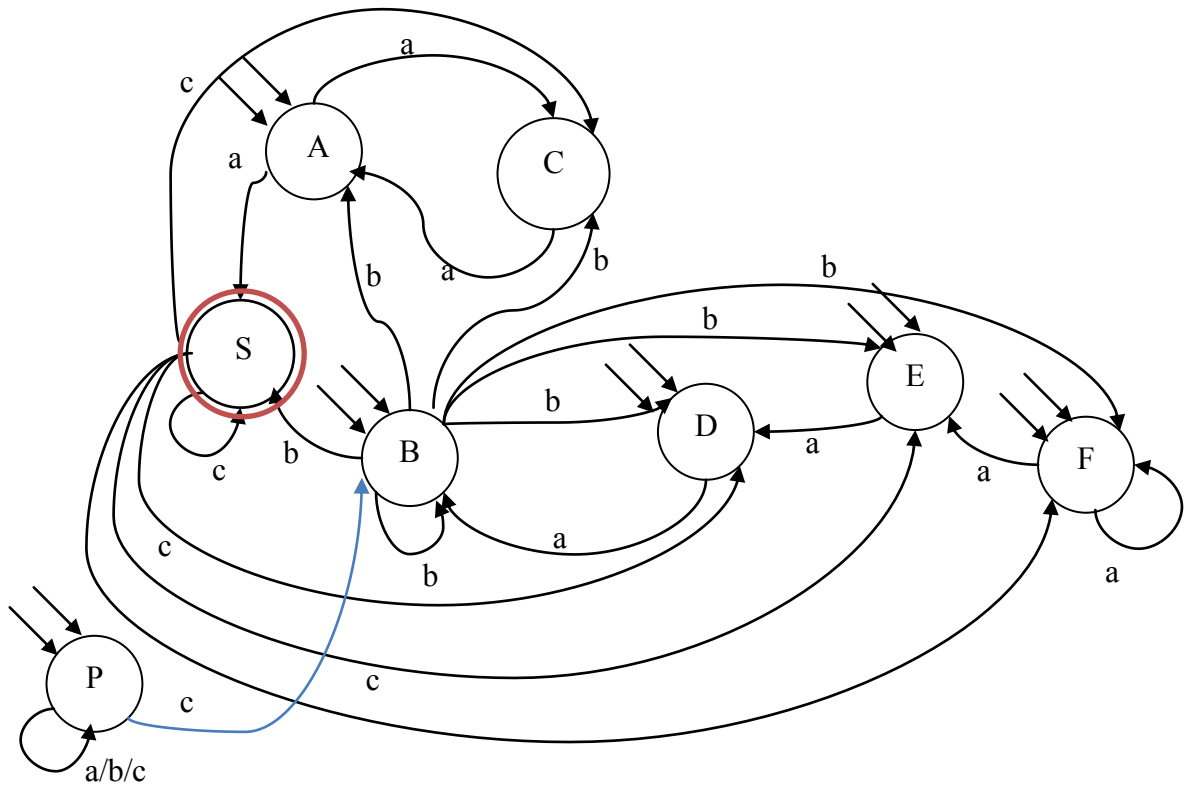
La grammaire régulière droite du complément:

$S \rightarrow aA / bB / cS$	$A \rightarrow aC / bB / cS / \epsilon$
$B \rightarrow aD / bB / cP / \epsilon$	$C \rightarrow aA / bB / cS$
$D \rightarrow aE / bB / cS / \epsilon$	$E \rightarrow aF / bB / cS / \epsilon$
$F \rightarrow aF / bB / cS / \epsilon$	$P \rightarrow aP / bP / cP / \epsilon$

2. Donnez la grammaire régulière gauche du complément de $L(A)$.

L'automate miroir du complément:

v



La grammaire régulière droite du miroir du complément:

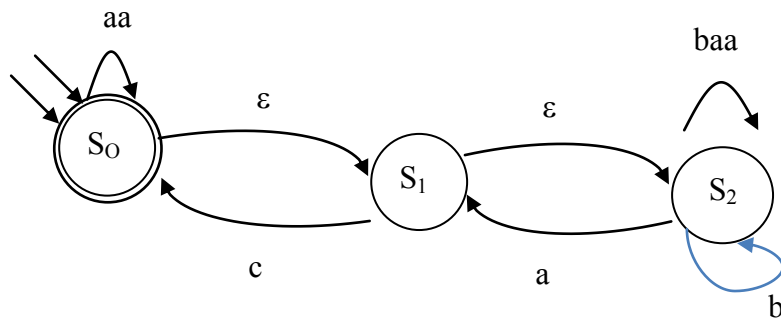
$SG \rightarrow A/B//D/E/F/P$
 $S \rightarrow cS/cA/cC/cD/cE/cF/\epsilon$
 $A \rightarrow aC/ aS$
 $B \rightarrow bA/bB/ bC /bS /bD /bE / bF$
 $C \rightarrow aA$
 $D \rightarrow aB$
 $E \rightarrow aD$
 $F \rightarrow aF/ aE$
 $P \rightarrow cB/ bP/ cP / aP$

La grammaire régulière gauche du complément:

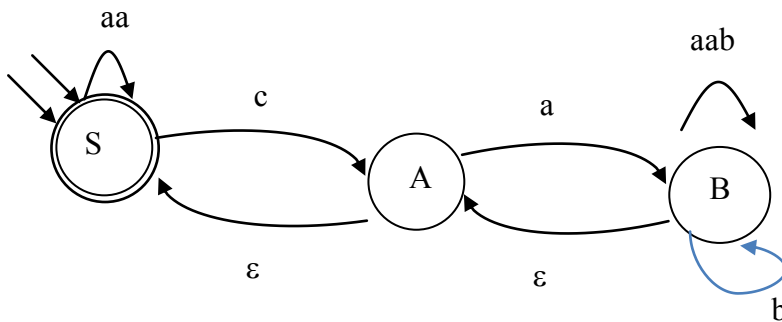
$SG \rightarrow A/B//D/E/F/P$
 $S \rightarrow Sc/ Ac / Cc/ Dc / Ec / Fc /\epsilon$
 $A \rightarrow Ca / Sa$
 $B \rightarrow Ab/Bb/ Cb /Sb /Db /Eb / Fb$
 $C \rightarrow Aa$
 $D \rightarrow Ba$
 $E \rightarrow Da$
 $F \rightarrow Fa/ Ea$
 $P \rightarrow Bc/ Pa/ Pb / Pc$

3. Donnez la grammaire régulière droite du miroir de $L(A)$.

L'automate Réduit



L'automate miroir



La grammaire régulière droite du miroir de L(A)

$S \rightarrow aaS / cA / \varepsilon$
 $A \rightarrow S/aB$
 $B \rightarrow aabB/bB/A$

Exercice II.

Donnez les grammaires des langages suivants :

$L_1 = \{a^{2i} w b^j \text{ avec } w \in \{d, c\}^* \text{ et } |w| \equiv 1[3]\}$

$S \rightarrow aaS / A$
 $A \rightarrow dB/cB$
 $B \rightarrow dC/cC / D$
 $C \rightarrow dA/cA$
 $D \rightarrow bD/\varepsilon$

$L_2 = \{a^n b^p / n \equiv p \bmod 3\}$

$S \rightarrow aaaS / A/aB/aaC$
 $A \rightarrow bbbB / \varepsilon$
 $B \rightarrow bbbB/b$
 $C \rightarrow bbbC/bb$

$L_3 = \{a^i c^k b^j \mid k \geq i+j\}$

$S \rightarrow ABC$
 $A \rightarrow aAc/\varepsilon$
 $B \rightarrow cB/c$
 $C \rightarrow cCb/\varepsilon$

$L_1 \cap L_3 = \{a^{i^2} c^k b^j \mid k \geq i+j \text{ et } |w| \equiv 1[3]\}$

$S \rightarrow S_0 / S_1 / S_2$		
$S_0 \rightarrow A_0 B_0$	$S_1 \rightarrow A_1 B_1$	$S_3 \rightarrow A_3 B_3$
$A_0 \rightarrow a^6 A_0 c^6 / \varepsilon$	$A_1 \rightarrow a^6 A_1 c^6 / a^4 c^4$	$A_3 \rightarrow a^6 A_3 c^6 / aacc$
$B_0 \rightarrow c^3 B_0 b^3 / C_0 / c C_1 b / cc$ $C_2 bb /$	$B_1 \rightarrow c^3 B_1 b^3 / C_1 / c C_2 b / cc$ $C_0 bb /$	$B_3 \rightarrow c^3 B_3 b^3 / C_2 / c C_0 b / cc$ $C_1 bb /$
$C_0 \rightarrow c C_1$	$// C_0 \rightarrow ccc C_0 / c$	
$C_1 \rightarrow c C_2 / \varepsilon$	$// C_1 \rightarrow ccc C_1 / \varepsilon$	
$C_2 \rightarrow c C_0$	$// C_2 \rightarrow ccc C_2 / cc$	

$L_5 = \{ww' \mid w \in X^* \text{ et } w' \text{ est un facteur gauche de } w\}$

$S \rightarrow S'F / \varepsilon$		
$S' \rightarrow aS'A / bS'B / aMA / bMB$	$// \text{générer } ww^r \mid w \in \{a,b\}^* \mid w^r \in \{A,B\}^*$	
$MA \rightarrow Ma$	$MB \rightarrow Mb$	
$aA \rightarrow Aa$	$bA \rightarrow Ab$	
$aB \rightarrow Ba$	$bB \rightarrow Bb$	
$aF \rightarrow F / aF'$	$bF \rightarrow F / bF'$	
$aF' \rightarrow F'a$	$bF' \rightarrow F'b$	
$MF' \rightarrow \varepsilon$		

Exercice III.

Donnez les automates les plus adéquats reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{ (01)^i a^n (10)^j (01)^j b^n (10)^i \mid i, j \geq 0, n > 0 \}$

$\# S_0 0 \rightarrow \# 0 S_0$	// empiler $(01)^i$
$0 S_0 1 \rightarrow 0 1 S_0$	
$1 S_0 0 \rightarrow 1 0 S_0$	
$1 S_0 a \rightarrow 1 a S_0$	// empiler a^n
$a S_0 a \rightarrow a a S_0$	
$a S_0 1 \rightarrow a 1 S_1$	
$1 S_1 0 \rightarrow 1 0 S_1$	// empiler $(10)^j$
$0 S_1 1 \rightarrow 0 1 S_1$	
$0 S_1 0 \rightarrow S_2$	
$0 S_2 0 \rightarrow S_2$	// dépiler $(01)^j$
$1 S_2 1 \rightarrow S_2$	
$a S_2 b \rightarrow S_3$	
$a S_3 b \rightarrow S_3$	// dépiler b^n
$0 S_3 0 \rightarrow S_3$	
$1 S_3 1 \rightarrow S_3$	
$\# S_3 \rightarrow \# S_f$	// dépiler $(10)^i$
$\# S_0 a \rightarrow \# a S_0$	
$a S_0 b \rightarrow S_3$	
	I=0
	J=0

2. $L_1 = \{ (01)^i (10)^j (01)^j (10)^i \mid i, j \geq 0, n > 0 \}$

# S ₀ 0 → # 0 S ₀	// empiler (01) ⁱ
0 S ₀ 1 → 0 1 S ₀	
1 S ₀ 0 → 1 0 S ₀	
1 S ₀ 1 → 1 1 S ₁	// empiler (10) ^j
1 S ₁ 0 → 1 0 S ₁	
0 S ₁ 1 → 0 1 S ₁	
0 S ₁ 0 → S ₂	// dépiler (01) ^j (10) ⁱ
0 S ₂ 0 → S ₂	
1 S ₂ 1 → S ₂	
# S ₃ → # S _f	
# S ₀ 1 → # 1 S ₁	I=0
1 S ₀ 1 → S ₂	J=0

Exercice V. (3 Pts)

Monter que si L est un langage rationnel alors $h(L) = \{ h(w) \mid w \in L \}$ est également rationnel. h est un homomorphisme

Par exemple pour $E=a*b^*$ avec $h(a)=0$ et $h(b)=11$, on a $h(L(E))=0^*(11)^*$.

Pour la démonstration, n'utilisez pas les automates.