Université BADJI MOKHTAR ANNABA
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département d'informatique

Théorie des langages

Support de cours

Préparé par : Dr. T. BENOUHIBA

Dernière mise à jour

décembre 2014

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Chapitre 1

Notions fondamentales en théorie des langages

1.1 Rappels sur la théorie des ensembles

1.1.1 Définitions

Définition 1 : Un ensemble est une collection d'objets sans répétition, chaque objet étant appelé un élément. L'ensemble ne contenant aucun élément est dit l'ensemble vide et est noté $\emptyset$.

Un ensemble peut être défini de plusieurs façons, chacune a ses avantages et ses inconvénients. Notons au passage le parallèle entre la théorie des ensembles et la logique des prédicats, ce qui fait que beaucoup de notions relatives aux ensembles sont données en logique des prédicats.

Définition en extension

Définir un ensemble par extension revient simplement à donner la liste de ses objets. Prenons l'exemple des chiffres entiers de 0 à 9 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Cette définition est utile lorsque le nombre d'éléments d'un ensemble est fini et n'est pas très important. Notons que lorsqu'un élément x figure dans un ensemble A, cela est noté par $x \in A$. Par certains artefacts, on arrive à noter des ensembles infinis mais cela n'est pas pratique.

Définition par compréhension

Définir un ensemble A par compréhension revient à définir un prédicat P qui ne peut prendre la valeur "vraie" que si et seulement s'il évalué pour un élément de A, on écrira alors : $A = \{x|P(x)\}$. Comme exemple, nous pouvons définir l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 par $\{x|x \bmod 3 = 0\}$.

La définition par compréhension est plus pratique car elle permet de définir aisément des ensembles ayant un nombre infini d'éléments (comme c'est le cas pour l'exemple donné). Elle peut néanmoins mener à un paradoxe appelé paradoxe de Russel si on autorise P à être n'importe quel prédicat.

Définition par induction

Définir un ensemble A par induction revient à montrer comment les éléments de A sont construits. On parlera de preuve d'appartenance pour tout élément appartenant à A. Concrètement, la définition par induction de A nécessite de définir un ensemble fini d'éléments de A (appelé les triviaux de A et noté $triv(A)$) dont on suppose l'appartenance (des axiomes) à A, une ou plusieurs fonctions $f : A \longrightarrow A$ et des règles de la formes :

$$x \rightarrow f(x)$$

signifiant que si x est un élément de A alors $f(x)$ est également un élément de A. On écrira $A = \{triv(A); x \in A \longrightarrow f(x) \in A\}$.

Comme exemple, on peut définir les entiers naturels par $\mathbb{N} = \{0; x \in \mathbb{N} \rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}\}$. La définition par induction permet, tout comme la définition par compréhension, des ensembles infinis. Cependant, en permettant une meilleure structuration, elle permet de définir plus facilement des ensembles complexes.

1.1.2 Démonstration de propriétés sur les ensembles

Souvent on s'intéresse à une propriété Q sensée être vérifiée par tout élément d'un ensemble A. Selon la définition adoptée de A, on peut obtenir plusieurs types de démonstration :

Cas de définition en extension

Dans le cas de définition en extension, Q est vérifiée par A si elle l'est pour tout élément A. En d'autres termes, il faut prendre chaque élément de A , le placer comme argument de Q puis vérifier si Q s'évalue à vrai. Évidemment, cette démonstration ne peut fonctionner que si l'ensemble A est fini.

Cas de définition par compréhension

Supposons que $A = \{x|P(x)\}$. Dans ce cas, Q est vérifiée par A si on arrive à démontrer que $P(x) \rightarrow Q(x)$ en utilisant les axiomes de l'ensemble. Bien sûr, on sera confronté au problème de complétude et démontrabilité des théorèmes (par exemple, il existera toujours des propriétés vraies sur les entiers que l'on ne pourra jamais démontrer quelque soit l'ensemble des axiomes définissant les entiers).

Cas de définition par induction

Supposons que $A = \{triv(A); x \in A \rightarrow f(x) \in A\}$. Montrer qu'une propriété Q est vérifiée par A revient à :

1. Vérifier que Q est vérifiée pour tout élément de $triv(A)$ (faisable car cet ensemble est fini) ;
2. Supposer que x vérifie Q, et démontrer que $f(x)$ vérifie également Q.

Cette méthode de démonstration s'appelle démonstration par induction. Elle est très utile pour démontrer des propriétés très complexes. Une de ses applications est la suivante : considérons l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ défini précédemment (par induction), on cherche à vérifier une propriété Q sur les nombres entiers. On procède alors comme suit :

1. Vérifier que Q est vérifiée pour 0 ;
2. Supposer que Q est vérifiée pour un entier n et démontrer que Q est vérifiée pour $n+1$.

On peut facilement s'apercevoir que le dernier raisonnement n'est autre que le raisonnement par récurrence. On vient, en fait, de montrer que ce raisonnement n'est qu'un cas particulier du raisonnement par induction.

1.1.3 Opérations sur les ensembles

Inclusion et égalité

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus ou égal à B (et on note $A \subseteq B$) si $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$(on dit que A est un sous-ensemble de B). On peut voir tout de suite que pour tout ensemble A, on a : $\emptyset \subseteq A$.

Si on utilise la définition par compréhension, c'est-à-dire que $A = \{x|P(x)\}$ et $B = \{x|Q(x)\}$, alors $A \subseteq B$ tient si et seulement si $P \rightarrow Q$.

On parle d'égalité ($A = B$) lorsque $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. En compréhension, cela revient à montrer que : $A \leftrightarrow B$.

Opérations binaires

Soit Ω un ensemble que l'on appellera l'ensemble référence. Soient A et B deux sous-ensembles quelconques de Ω définis par compréhension comme suit $A = \{x|P(x)\}$ et $B = \{x|Q(x)\}$, et définis par extension comme suit : $A = \{triv(A); x \rightarrow f(x)\}$ et $B = \{triv(B); x \rightarrow g(x)\}$. On définit alors les opérations suivantes :

- **Union :** notée $A \cup B$, elle comporte tout élément appartenant à A *ou* B, en d'autres termes, $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$. L'union est définie par compréhension comme suit : $A \cup B = \{x|P(x) \vee Q(x)\}$. Elle peut également être définie par induction comme suit : $A \cup B = \{triv(A) \cup triv(B); x \rightarrow f(x), x \rightarrow g(x)\}$.
- **Intersection :** notée $A \cap B$, elle comporte tout élément appartenant à A *et* B ; en d'autres termes, $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$. L'intersection est définie par compréhension comme suit : $A \cup B = \{x|P(x) \wedge Q(x)\}$. Cependant, dans le cas général, on ne peut pas donner une définition inductive à l'intersection.
- **Différence :** notée $A - B$, elle comporte tout élément appartenant à A *et* qui n'appartient pas à B ; en d'autres termes, $A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$. La différence est définie par compréhension comme suit : $A - B = \{x|P(x) \wedge \neg Q(x)\}$. Cependant, dans le cas général, on ne peut pas donner une définition inductive à la différence.
- **Complément :** notée $\overline{A} = \Omega - A$; en d'autres termes, $\overline{A} = \{x|x \in \Omega \wedge x \notin A\}$. Le complément est défini par compréhension comme suit : $\overline{A} = \{x|\neg P(x)\}$. Cependant, dans le cas général, on ne peut pas donner une définition inductive au complément.
- **Produit cartésien :** noté $A \times B$ qui est l'ensemble des paires (a, b) telles que $a \in A$ et $b \in B$; en d'autres termes, $A \times B = \{(x, y)|x \in A \wedge x \in B\}$. Le produit cartésien est défini par compréhension comme suit : $A \times B = \{(x, y)|P(x) \wedge Q(y)\}$. La définition par induction se fait comme suit : $A \times B = \{triv(A) \times triv(B); (x, y) \rightarrow (f(x), g(y))\}$.

Autres opérations

- **Cardinalité :** notée $card(A)$ qui est le nombre d'éléments de A. Nous avons $card(A \times B) = card(A)card(B)$.
- **L'ensemble des parties de A :** notée 2^A qui est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A. On a : $card(2^A) = 2^{card(A)}$.

Exemple 1 : $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, $\Omega = \{a, b, c\}$:
- $A \cap B = \{a\}$;
- $A \cup B = \{a, b, c\}$;
- $A - B = \{b\}$;
- $\overline{A} = \{c\}$;
- $A \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c)\}$;
- $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

1.2 Théorie des langages

1.2.1 Notions sur les mots

Définition 2 : Un symbole est une entité abstraite. Les lettres et les chiffres sont des exemples de symboles utilisés fréquemment, mais des symboles graphiques, des sons ou tout type de signal peuvent également être employés.

Définition 3 : Un alphabet est un ensemble de symboles. Il est également appelé le vocabulaire.

Définition 4 : Un mot (ou bien une chaîne) défini sur un alphabet A est une suite finie de symboles juxtaposés de A.

Exemple 2 :
- Le mot 1011 est défini sur l'alphabet $\{0, 1\}$
- Le mot 1.23 est défini sur l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$;

1.2.2 Longueur d'un mot

Si w est un mot, alors sa longueur est définie comme étant le nombre de symboles contenus dans w, elle est noté par $|w|$. Par exemple, $|abc| = 3, |aabba| = 5$. En particulier, on note le mot dont la longueur est nulle par ε : $|\varepsilon| = 0$.

On définit également la cardinalité d'un mot w par rapport à un symbole $a \in A$: $|w|_a$ comme étant le nombre d'occurrence de a dans w. Par exemple, $|abc|_a = 1, |aabba|_b = 2$.

1.2.3 Concaténation des mots

Soient w_1 et w_2 deux mots définis sur l'alphabet A. La concaténation de w_1 et w_2 est un mot w défini sur le même alphabet. w est obtenu en écrivant w_1 suivi de w_2, en d'autres termes, on colle le mot w_2 à la fin du mot w_1 :

$$w_1 = a_1...a_n,\ w_2 = b_1b_2...b_m$$
$$w = a_1...a_nb_1b_2...b_m$$

La concaténation est notée par le point, mais il peut être omis s'il n'y a pas d'ambiguïté. On écrira alors : $w = w_1.w_2 = w_1w_2$.

Propriété de la concaténation

Soient w, w_1 et w_2 trois mots définis sur l'alphabet A :
- $|w_1.w_2| = |w_1| + |w_2|$;
- $\forall a \in A : |w_1.w_2|_a = |w_1|_a + |w_2|_a$;
- $(w_1.w_2).w_3 = w_1.(w_2.w_3)$ (la concaténation est associative)
- $w.\varepsilon = \varepsilon.w = w$ (ε est un élément neutre pour la concaténation) ;

Remarque 1 : L'ensemble des mots muni de l'opération concaténation forme ce qu'on appelle *monoïde*. Cette structure algébrique possède des propriétés pouvant être utilisée dans l'analyse des langages (on parle, par exemple, de reconnaissance par morphisme sur un monoïde).

L'exposant

L'opération $w.w$ est notée par w^2. En généralisant, on note $w^n = \underbrace{w...w}_{n\ fois}$. En particulier, l'exposant 0 fait tomber sur ε : $w^0 = \varepsilon$ (le mot w est répété 0 fois).

Le mot miroir

Soit $w = a_1a_2...a_n$ un mot sur A ($a_i \in A$). On appelle mot miroir de w et on le note par w^R le mot obtenu en écrivant w l'envers, c'est-à-dire que $w^R = a_n...a_2a_1$. Il est donc facile de voir que $(w^R)^R = w$ ainsi que $(u.v)^R = v^R.u^R$.

Certains mots, appelés palindromes, sont égaux à leur miroir. En d'autres termes, on lit la même chose dans les deux directions. Si l'on considère l'alphabet X, l'ensemble des palindromes sont les mots de la forme ww^R ou waw^R tel que a est un seul symbole.

Préfixe et suffixe

Soit w un mot défini sur un alphabet A. Un mot x (resp. y) formé sur A est un préfixe (resp. suffixe) de w s'il existe un mot u formé sur A (resp. v formé sur A) tel que $w = xu$ (resp. $w = vy$). Si $w = a_1a_2...a_n$ alors tous les mots de l'ensemble $\{\varepsilon, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2...a_n\}$ sont des préfixes de w. De même, tous les mots de l'ensemble $\{\varepsilon, a_n, a_{n-1}a_n, a_{n-2}a_{n-1}a_n, ..., a_1a_2...a_n\}$ sont des suffixes de w.

Entrelacement (mélange)

Soient u et v deux mots tels que $u = u_1u_2...u_n$ et $v = v_1v_2...v_m$. On appelle entrelacement de u et v (on le note par $u \sqcup\!\sqcup v$) l'ensemble des mots w qui mélangent les symboles de u de v tout en gardant l'ordre des symboles de u et de v. Par exemple, $ab \sqcup\!\sqcup ac = \{abac, aabc, aacb, acab\}$. Cette opération est commutative.

En particulier, lorsque v se réduit un seul symbole, l'opération d'entrelacement se résume à l'insertion dudit symbole quelque part dans le mot u. Si a est un symbole, alors $u \sqcup\!\sqcup v = \{u_1.a.u_2 | u_1.u_2 = u\}$. Par exemple, $ab \sqcup\!\sqcup c = \{cab, acb, abc\}$.

1.2.4 Notions sur les langage

Définition 5 : Un langage est un ensemble (fini ou infini) de mots définis sur un alphabet donné.

Exemple 3 :
- Langage des nombre binaires définies sur l'alphabet $\{0, 1\}$ (infini) ;
- Langage des mots de longueur 2 défini sur l'alphabet $\{a, b\}$=$\{aa, ab, ba, bb\}$;
- Langage C (quel est le vocabulaire ?) ;
- Langue française (quel est le vocabulaire ?).

Opérations sur les langages

Soient L, L_1 et L_2 trois langages dont l'alphabet est X, on définit les opérations suivantes :
- **Union :** notée par $+$ ou $|$ plutôt que $\cup$. $L_1 + L_2 = \{w | w \in L_1 \vee w \in L_2\}$;
- **Intersection :** $L_1 \cap L_2 = \{w | w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$;
- **Concaténation :** $L_1.L_2 = \{w | \exists u \in L_1, \exists v \in L_2 : w = uv\}$;
- **Exposant :** $L^n = \underbrace{L.L...L}_{n \text{ fois}} = \{w | \exists u_1, u_2, ...u_n \in L : w = u_1u_2...u_n\}$;
- **Fermeture transitive de Kleene :** notée $L^* = \bigcup_{i \geqslant 0} L^i$. En particulier, si $L = X$ on obtient X^* c'est-à-dire l'ensemble de tous les mots possibles sur l'alphabet X. On peut ainsi définir un langage comme étant un sous-ensemble quelconque de X^*. Une autre définition possible de L^* est la suivante : $L^* = \{w | \exists n \geqslant 0, \exists u_1 \in L, \exists u_2 \in L, ..., \exists u_n \in L, w = u_1u_2...u_n\}$;
- **Fermeture non transitive :** $L^+ = \bigcup_{i>0} L^i$;
- **Le langage miroir :** $L^R = \{w | \exists u \in L : w = u^R\}$;
- **Le mélange ou l'entrelacement de langages :** $L \sqcup\!\sqcup L' = \{u \sqcup\!\sqcup v | u \in L, v \in L'\}$. En particulier, lorsque le langage L' se réduit à un seul mot composé à d'un seul symbole a, on a : $L \sqcup\!\sqcup a = \{u.a.v | (u.v) \in L\}$

Propriétés des opérations sur les langages

Soient L, L_1, L_2, L_3 quatre langage définis sur l'alphabet A :

- $L^* = L^+ + \{\varepsilon\}$;
- $L_1.(L_2.L_3) = (L_1.L_2).L_3$;
- $L_1.(L_2 + L_3) = (L_1.L_2) + (L_1.L_3)$;
- $L.L \neq L$;
- $L_1.(L_2 \cap L_3) \neq (L_1 \cap L_2).(L_1 \cap L_3)$;
- $L_1.L_2 \neq L_2.L_1$.
- $(L^*)^* = L^*$;
- $L^*.L^* = L^*$;
- $L_1.(L_2.L_1)^* = (L_1.L_2)^*.L_1$;
- $(L_1 + L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$;
- $L_1^* + L_2^* \neq (L_1 + L_2)^*$

1.3 Grammaire (système générateur de langage)

L'une des notions les plus utilisées en théorie des langages est la notion de grammaire. Pour bien l'illustrer, nous allons prendre un exemple.

1.3.1 Exemple introductif

Pour analyser une classe de phrases simples en français, on peut supposer qu'une phrase est composée de la manière suivante :

- PHRASE → ARTICLE SUJET VERBE COMPLEMENT
- SUJET → "garçon" ou "fille"
- VERBE → "voit" ou "mange" ou "porte"
- COMPLEMENT → ARTICLE NOM ADJECTIF
- ARTICLE → "un" ou "le"
- NOM → "livre" ou "plat" ou "wagon"
- ADJECTIF → "bleu" ou "rouge" ou "vert"

En faisant des substitutions (on remplace les parties gauches par les parties droites) on arrive à générer les deux phrases suivantes :

Le garçon voit un livre rouge
Une fille mange le plat vert

De même, à partir des phrases, on peut retrouver la catégorie de chaque mot en utilisant ces règles. On dit ici que PHRASE, ARTICLE, SUJET sont des concepts du langage ou encore des symboles non-terminaux (car ils ne figurent pas dans la phrase aux quelles on s'intéresse). Les symboles GARCON, FILLE, VOIT, MANGE, etc sont des terminaux puisqu'ils figurent dans le langage final (les phrases).

Le processus de génération de la phrase à partir de ces règles est appelé dérivation.

Définition 6 : On appelle grammaire le quadruplet (V, N, X, R)

- V est un ensemble fini de symboles dits terminaux, on l'appelle également vocabulaire terminal ;

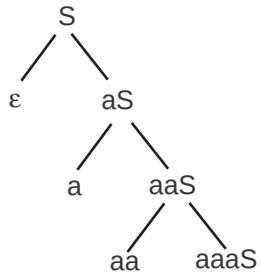
- N est un ensemble fini (disjoint de V) de symboles dits non-terminaux ou encore concepts ;
- S un non-terminal particulier appelé axiome (point de départ de la dérivation) ;
- R est un ensemble de règles de productions de la forme $g \to d$ tel que $g \in (V + N)^+$ et $d \in (V + N)^*$.

Les règles de la forme $\varepsilon \to \alpha$ sont interdites. Pourquoi ?

Par convention, on utilisera les lettres majuscules pour les non-terminaux, et les lettres minuscules pour représenter les terminaux.

Soit une suite de dérivations : $w_1 \to w_2 \to w_3 \to ... \to w_n$ alors on écrira : $w_1 \xrightarrow{*} w_n$. On dit alors qu'il y a une séquence de dérivation qui mène de w_1 vers w_n.

Exemple 4 : Soit la grammaire $G = (\{a\}, \{S\}, S, \{S \to aS|\varepsilon\})$ génère le langage $\{\varepsilon, a, aa, aaa\} = a^*$ selon l'arbre suivant :



Définition 7 : Soit une grammaire $G = (V, N, S, R)$. On dit que le mot u appartenant à V^* est dérivé (ou bien généré) à partir de G s'il existe une suite de dérivation qui, partant de l'axiome S, permet d'obtenir u : $S \xrightarrow{*} u$. Le langage de tous les mots générés par la grammaire G est noté L(G). La suite des règles appliquées pour obtenir le mot s'appelle chaîne de dérivation.

Exemple 5 : La chaîne de dérivation du mot $aaaa$ selon la grammaire précédente est : $S \to aS \to aaS \to aaaS \to aaaaS \to aaaa$

Définition 8 : Etant donnée une grammaire $G = (V, N, S, R)$, les arbres de syntaxe de G sont des arbres où les nœud internes sont étiquetés par des symboles de N, et les feuilles étiquetés par des symboles de V, tels que, si le nœud p apparaît dans l'arbre et si la règle $p \to a_1 ... a_n$ (a_i terminal ou non terminal) est utilisée dans la dérivation, alors le nœud p possède n fils correspondant aux symboles a_i.

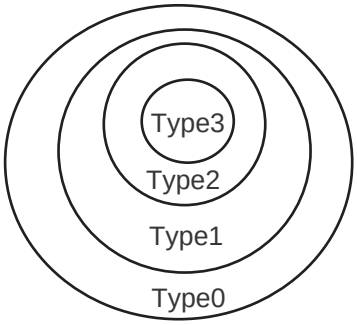
Si l'arbre syntaxique a comme racine l'axiome de la grammaire, alors il est dit arbre de dérivation du mot u tel que u est le mot obtenu en prenant les feuilles de l'arbre dans le sens gauche$\to$ droite et bas $\to$ haut.

1.3.2 Classification de Chomsky

La classe d'une grammaire est reconnue grâce à la forme de ses règles de production. Chomsky a établi une classification hiérarchique qui permet de classer les grammaires en quatre catégories. A chacune des catégories, on associe un type d'automate minimal permettant d'analyser les langages générés par ces grammaires. Une grammaire de type i génère un langage de type j tel que $j \geqslant i$.

Soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire, les classes de grammaires de Chomsky sont :
- Type 3 ou grammaire régulière (à *droite*) : toutes les règles de production sont de la forme $g \to d$ où $g \in N$ et $d = aB$ tel que a appartient à V^* et B appartient à $N \cup \{\varepsilon\}$;
- Type 2 ou grammaire hors-contexte : toutes les règles de production sont de la forme $g \to d$ où $g \in N$ et $d \in (V + N)^*$;
- Type 1 ou grammaire contextuelle : toutes les règles sont de la forme $g \to d$ tel que $g \in (N + V)^+$, $d \in (V + N)^*$ et $|g| \leqslant |d|$. De plus, si ε apparaît à droite alors la partie gauche doit seulement contenir S (l'axiome). On peut aussi trouver la définition suivante des grammaires de type 1 : toutes les règles sont de la forme $\alpha B \beta \to \alpha \omega \beta$ tel que $\alpha, \beta \in (V + N)^*$, $B \in X$ et $\omega \in (V + N)^*$;
- Type 0 : aucune restriction. Toutes les règles sont de la forme : $d \to g$, $g \in (V + N)^+$, $d \in (V + N)^*$

Il existe une relation d'inclusion entre les types de grammaires selon la figure suivante :



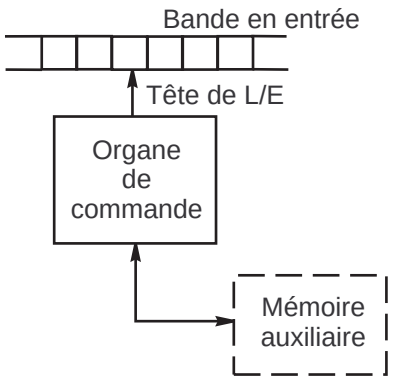
Le type retenu pour une grammaire est le plus petit qui satisfait les conditions.

1.4 Les automates

Les grammaires représentent un moyen qui permet de *décrire* un langage d'une manière que l'on peut qualifier d'inductive. Elles montrent comment les mots du langage sont dérivés.

Pour un langage donné L, on se propose de répondre à la question $w \in L$. On peut répondre à cette question de plusieurs façons. D'abord, on peut vérifier l'existence de w dans la liste des mots de L (impossible à réaliser si le langage est infini). On peut également chercher une grammaire générant L puis vérifier si cette grammaire génère L. Il existe en réalité un troisième moyen permettant de répondre à cette question : les automates. Un automate est une machine qui, après avoir exécuté un certain nombre d'opérations sur le mot, peut répondre à cette question par oui ou non.

Définition 9 : Un automate est une machine abstraite qui permet de lire un mot et de



répondre à la question : "un mot *w* appartient-il à un langage ?" par oui ou non. Aucune garantie n'est cependant apportée concernant le temps d'analyse ou même la possibilité de le faire. Un automate est composé de :

- Une bande en entrée finie ou infinie sur laquelle sera inscrit le mot à lire ;
- Un organe de commande qui permet de gérer un ensemble fini de pas d'exécution ;
- Eventuellement, une mémoire auxiliaire de stockage.

Formellement, un automate contient au minimum :
- Un alphabet pour les mots en en entrée noté X ;
- Un ensemble non vide d'états noté Q ;
- Un état initial noté $q_0 \in Q$;
- Un ensemble non vide d'états finaux $q_f \in Q$;
- Une fonction de transition (permettant de changer d'état) notée δ.

1.4.1 Configuration d'un automate

Le fonctionnement d'un automate sur un mot se fait à travers un ensemble de configurations.

Définition 10 : On appelle configuration d'un automate en fonctionnement les valeurs de ses différents composants, à savoir la position de la tête L/E, l'état de l'automate et éventuellement le contenu de la mémoire auxiliaire (lorsqu'elle existe). Il existe deux configurations spéciales appelées configuration initiale et configuration finale.

Définition 11 : La configuration initiale est celle qui correspond à l'état initial q_0 et où la tête de L/E est positionnée sur le premier symbole du mot à lire.

Définition 12 : Une configuration finale est celle qui correspond à un des états finaux q_f et où le mot a été entièrement lu.

On dit qu'un mot est accepté par un automate si, à partir d'une configuration initiale, on arrive à une configuration finale à travers une succession de configurations intermédiaires .

On dit aussi qu'un langage est accepté par un automate lorsque tous les mots de ce langage sont acceptés par l'automate.

1.4.2 Classification des automates

Comme les grammaires, les automates peuvent être classés en 4 classes selon la hiérarchie de Chomsky :

- Type 3 ou automate à états fini (AEF) : il accepte les langages de type 3. Sa structure est la suivante :
  - bande en entrée finie ;
  - sens de lecture de gauche à droite ;
  - Pas d'écriture sur la bande et pas de mémoire auxiliaire.
- Type 2 ou automate à pile : il accepte les langages de type 2. Sa structure est similaire à l'AEF mais dispose en plus d'une mémoire organisée sous forme d'une pile infinie ;
- Type 1 ou automate à bornes linéaires (ABL) : il accepte les langages de type 1. Sa structure est la suivante :
  - Bande en entrée **finie** accessible en lecture/écriture ;
  - Lecture dans les deux sens ;
  - Pas de mémoire auxiliaire.
- Type 0 ou machine de Turing : il accepte les langages de type 0. Sa structure est la même que l'ABL mais la bande en entrée est infinie.

Le tableau suivant résume les différentes classes de grammaires, les langages générés et les types d'automates qui les acceptent :

Grammaire	**Langage**	**Automate**
Type 0	Récursivement énumérable	Machine de Turing
Type 1 ou contextuelle	Contextuel	Machine de Turing à borne linéaire
Type 2 ou hors-contexte	Algébrique	Automate à pile
Type 3 ou régulière	Régulier ou rationnel	Automate à états fini

1.5 Exercices de TD

Exercice 1 : Déterminer l'alphabet pour chacun des langages suivants :
- Les nombres binaires ;
- Les nombres entiers éventuellement munis d'un signe ;
- Les nombres réels en C ;
- Les identificateurs en C ;
- Le langage C ;

Exercice 2 : Trouver les langages correspondants aux définitions suivantes :
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ de longueur 2 ne contenant pas un c ;
- Tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant au maximum deux a ou bien un b ;
- Tous les mots sur $\{a, b\}$ qui contenant plus de a que de b ;
- Le langage L défini comme suit : $\varepsilon \in L$, si $u \in L$ alors $auab \in L$

Exercice 3 :
- Calculez $\varepsilon \sqcup a$, $abca \sqcup d$, $abca \sqcup a$, $a^n \sqcup b$.
- Calculez $\{a^n | n \geqslant 0\} \sqcup a$, $\{a^n b^n | n \geqslant 0\} \sqcup a$.

Exercice 4 : On note par $\mathrm{Pref}(L)$ l'ensemble suivant : $\{u | \exists w \in L : u \text{ est préfixe de } w\}$. Calculer $\mathrm{Pref}(L)$ dans chacun des cas suivants : $L = \{ab, abc, \varepsilon\}$, $L = \{a^n b^m | n, m \geqslant 0\}$, $L = \{a^n b^n | n \geqslant 0\}$.

On note par $\mathrm{Suf}(L)$ l'ensemble suivant : $\{u | \exists w \in L : u \text{ est suffixe de } w\}$. Calculer $\mathrm{Suf}(L)$ pour les langages précédents.

Exercice 5 : Définir la fermeture de Kleene (L^*) pour chacun des langages suivants :
- $L = \{\varepsilon\}$;
- $L = \{a\}$;
- $L = \{a, ab\}$;
- $L = \{aa, ab, ba, bb\}$;

Exercice 6 : Soit X un alphabet, trouver les mots $w \in X^*$ qui vérifient :
- $w^2 = w^3$;
- $\exists v \in X^* : w^3 = v^2$;

Exercice 7 : Préciser le type de chacune des grammaires suivantes ainsi que les types des langages qui en dérivent :
- $G = (\{a, b\}, \{S, T\}, S, \{S \to aabS | aT, T \to bS | \varepsilon\})$;
- $G = (\{a, b, c\}, \{S, T, U\}, S, \{S \to bSTa | aTb, T \to abS | cU, U \to S | \varepsilon\})$;
- $G = (\{x, +, *\}, \{S\}, S, \{S \to S + S | S * S | x\})$;
- $G = (\{0, 1, 2\}, \{S, T, C, Z, U\}, S, \{S \to TZ, T \to 0U1, T \to 01, U \to 0U1C | 01C, C1 \to 1C, CZ \to Z2, 1Z \to 12\})$
- $G = (\{0, 1, 2\}, \{S, C, Z, T\}, S, \{S \to TZ, T \to 0T1C | \varepsilon, C1 \to 1C, CZ \to Z2, 1Z \to 1\})$;

– $G = (\{a, b, c\}, \{S, T\}, S, \{S \to Ta|Sa, T \to Tb|Sb|\varepsilon\})$

Exercice 8 : Donner, sans démonstration, les langages générés par les grammaires suivantes. Dites, à chaque fois, de quel type s'agit-il ? :
– $G = (\{a\}, \{S\}, S, \{S \to aS|\varepsilon\})$;
– $G = (\{a\}, \{S\}, S, \{S \to aSa|\varepsilon\})$;
– $G = (\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \to aSa|bSb|\varepsilon\})$;

Exercice 9 : Donner les grammaires qui génèrent les langages suivants :
– Les nombres binaires ;
– Les mots sur $\{a, b\}$ qui contiennent le facteur a

Exercice 10 : Soit G et G' deux grammaires qui génèrent respectivement les langages L et L'. Donner une construction qui permet de trouver la grammaire de :
– $L.L'$;
– $L + L'$;
– L^* ;

Chapitre 2

Les automates à états finis (AEF)

Les AEF sont les plus simples des machines d'analyse de langages car ils ne comportent pas de mémoire. Par conséquent, les langages acceptés par ce type d'automates sont les plus simples des quatre classes de Chomsky, à savoir les langages réguliers (type 3). Par ailleurs, les automates à états finis peuvent être utilisés pour modéliser plusieurs problèmes dont la solution n'est pas très évidente. La série de TD propose quelques exercices dans ce sens.

2.1 Généralités sur les AEF

Définition 13 : Un automate à états finis est machine abstraite définie par le quintuplet (X, Q, q_0, F, δ) tel que :

- X est l'ensemble des symboles formant les mots en entrée (l'alphabet du mot à analyser) ;
- Q est l'ensemble des états possibles ;
- q_0 est l'état initial ($q_0 \in Q$) ;
- F est l'ensemble des états finaux ($F \subseteq Q$). F représente l'ensemble des états d'acceptation ;
- δ est une fonction de transition qui permet de passer d'un état à un autre selon l'entrée en cours :

  $\delta : Q \times (X \cup \{\varepsilon\}) \mapsto 2^Q$
  $\delta(q_i, a) = \{q_{j_1}, q_{j_2}, ..., q_{j_k}\}$ ou $\emptyset$ ($\emptyset$ signifie que la configuration n'est pas prise en charge ou encore que la transition n'existe pas)

Un mot est accepté par un AEF si, après avoir lu tout le mot, l'automate se trouve dans un état final ($q_f \in F$). En d'autres termes, un mot est rejeté par un AEF dans deux cas :

- L'automate est dans l'état q_i, l'entrée courante étant a et la transition $\delta(q_i, a)$ n'existe pas (on n'arrive pas à lire tout le mot) ;
- L'automate arrive à lire tout le mot mais l'état de *sortie* n'est pas un état final.

Un AEF A est donc un *séparateur* (ou classifieur) des mots de X^* en deux parties : l'ensemble des mots acceptés par l'automate (notons le par $L(A)$) et le reste des mots ($X^* - L(A)$).

Exemple 6 : Soit l'AEF défini par $(\{a, b\}, \{0, 1\}, 0, \{1\}, \delta)$ tel que :
Voici comment se fait l'analyse de différents mots :

- Le mot aab : on a la suite des configurations suivantes : $(0, a) \to (0, a) \to (0, b) \to (1, \varepsilon)$. Notons que ε dans la dernière configuration signifie que l'on est arrivé à la fin du mot. aab est accepté car l'état de sortie 1 est final et le mot a été entièrement lu.

$$\delta(0,a) = \{0\} \quad \delta(0,b) = \{1\}$$
$$\delta(1,a) = \emptyset \quad \delta(1,b) = \{1\}$$

- Le mot ε : la seule configuration est $(0,\varepsilon)$. Le mot est rejeté car 0 n'est pas un état final même s'il a été entièrement lu.
- Le mot ba : on a la suite des configurations suivantes : $(0,b) \rightarrow (1,a)$. Le mot n'est pas accepté car il n'a pas été entièrement lu (même si l'état de sortie est bien final).

On peut facilement voir que le langage accepté par cet automate est $a^n b^m (n,m \geqslant 0)$.

Un AEF peut être représenté de deux manières : soit par une table définissant la fonction de transition soit par *graphe orienté*.

2.1.1 Représentation par table

La table possède autant de lignes qu'il y a d'états dans l'automate de telle sorte que chaque ligne correspond à un état. Les colonnes correspondent aux différents symboles de l'alphabet. Si l'automate est dans l'état i et que le symbole j est le prochain à lire, alors l'entrée (i,j) de la table donne l'état auquel l'automate passera après avoir lu j. Notons que la définition par table n'est pas suffisante pour définir l'AEF entièrement étant donné que la table ne donne ni l'état initial ni les états finaux.

Exemple 7 : L'automate précédent est représenté comme suit :

État	a	b
0	0	1
1	-	1

2.1.2 Représentation graphique

La représentation graphique consiste à représenter l'automate par un graphe orienté. Chaque état de l'automate est schématisé par un rond (ou sommet). Si la transition $\delta(q_i,a) = \{q_j\}$ est définie, alors on raccorde le sommet q_i au sommet q_j par un arc décoré par le symbole a. L'état initial est désigné par une flèche entrante au sommet correspondant tandis que les états finaux sont marqués par un double rond. Le schéma suivant reprend l'automate précédent :

Lorsqu'il y a plusieurs symboles $a_1, ...a_k$ tels que $(q_i,a_l) = \{q_j\}(l = 1..k)$ alors on se permet de décorer l'arc (q_i,q_j) par l'ensemble $a_1,...,a_k$.

Remarque 2 : La définition d'un AEF en tant que AEF a un avantage car elle permet de définir l'acceptation d'un mot. En effet, un mot est accepté par un AEF si on arrive à trouver un chemin partant à l'état initial et se terminant pas un état final tel que si on suit le chemin on arrive à lire le mot à analyser. Par exemple, dans l'AEF précédent, le aab est accepté car il correspond au chemin : 0,0,0,1.

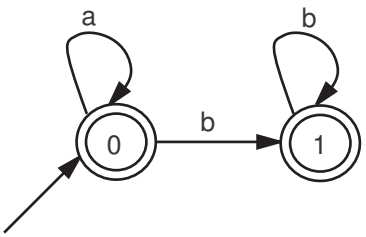


Figure 2.1 – L'automate acceptant $a^n b^m (n, m \geqslant 0)$

2.2 Les automates et le déterminisme

2.2.1 Notion de déterminisme

Un programme informatique doit, en général, être déterministe : c'est-à-dire que l'on doit toujours connaître son comportement dans les différentes situations possibles. Par exemple, on ne peut pas accepter un programme qui agit de deux manières différentes au même événement et dans les mêmes conditions. Un AEF, étant une forme spéciale d'un programme informatique, doit agir de la sorte. En d'autres mots, étant donné un mot à analyser, on doit être en mesure de connaître, en avance ,la liste des états par lesquels passera l'automate. Ceci revient à dire que si l'automate est dans l'état q_i et que l'entrée courante est a alors il existe au plus un état q_j tel que $\delta(q_i, a) = \{q_j\}$. Le cas échéant, on dit que l'automate est déterministe parce qu'il sait **déterminer** le prochain état passer à tout moment. Dans le cas inverse, l'automate doit choisir une action et la tester à terme, si l'acceptation n'est pas possible l'automate doit tester les autres éventualités.

Le non déterminisme peut également provenir des transitions (arcs). En effet, rien n'interdit dans la définition des AEF d'avoir des ε-transitions, c'est-à-dire des transitions décorées avec ε. L'existence d'une ε-transition entre les états q_i et q_j signifie que l'on n'a pas besoin de lire un symbole [1] pour passer de q_i vers q_j (attention ! l'inverse n'est pas possible). Voyons maintenant une définition formelle de la notion du déterminisme pour les AEF.

Définition 14 : Un AEF (X, Q, q_0, F, δ) est dit déterministe si les deux conditions sont vérifiées :
- $\forall q_i \in Q, \forall a \in X$, il existe au plus un état q_j tel que $\delta(q_i, a) = \{q_j\}$;
- L'automate ne comporte pas de ε-transitions.

Exemple 8 : Soit le langage des mots définis sur $\{a, b\}$ possédant le facteur ab. La construction d'un AEF non déterministe est facile. La table 2.1 donne la fonction de transition (l'état initial est l'état 0 et l'état 2 est final). La figure 2.2 reprend le même automate :

1. Par abus de langage, on dit qu'on lit ε

État	a	b
0	0,1	0
1	-	2
2	2	2

Table 2.1 – Table de transition de l'automate de la figure 2.2

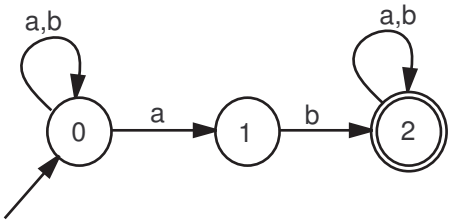


Figure 2.2 – L'automate des mots contenant le facteur ab

Exemple 9 : L'automate donné par la figure 2.3 accepte le même langage que le précédent mais en utilisant des ε-transitions.

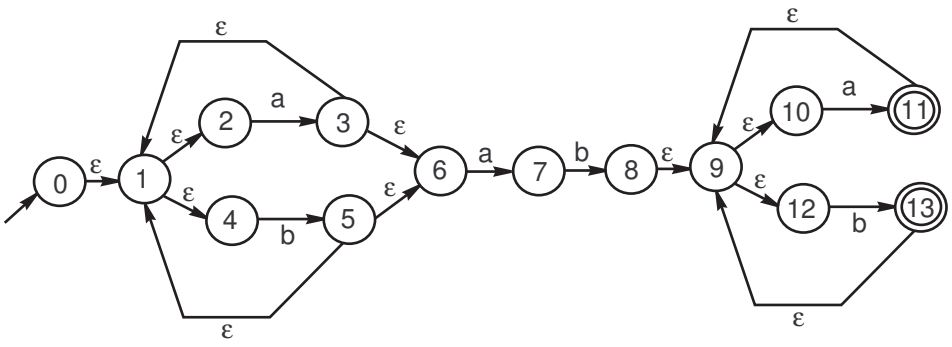


Figure 2.3 – L'automate acceptant les mots contenant le facteur ab (avec des ε-transitions)

2.2.2 Déterminisation d'un automate à états fini

Si on analyse le mot aba, on aura la première configuration $(0, a)$ suite à laquelle deux états sont possibles : soit 0 ou 1. A ce stade et vu que l'on ne connaît pas la suite du mot, on est incapable de déterminer quel état permet-il d'accepter le mot. Etant donné que dans un AEF, la tête L/E est sensée bouger dans un seul sens, on se trouve dans la situation suivante : chaque fois que l'on n'arrive pas à déterminer quel est le prochain état, on en choisit un puis on continue l'analyse. Si cette dernière permet d'accepter le mot alors le choix était bon, sinon on revient au point de non-déterminisme pour choisir un autre état et continuer l'analyse. Pour le mot aba, cela se passe comme suit :

$$
\begin{array}{cccccccc}
(0,a) & \rightarrow & (0,b) & \rightarrow & (0,a) & \rightarrow & (0,\varepsilon) & \textbf{échec} \\
 & \downarrow & & & & \searrow & (1,\varepsilon) & \textbf{échec} \\
 & \downarrow & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & \\
 & \rightarrow & (1,b) & \rightarrow & (2,a) & \rightarrow & (2,\varepsilon) & \textbf{succès}
\end{array}
$$

Cet exemple illustre bien le problème des automates non-déterministes. En effet, pour un mot de longueur n, un automate peut avoir besoin d'examiner a^n ($a > 1$) configurations possibles avant de dire si le mot est accepté ou non. Pour $a = 2$ et un mot de 100 symboles (ce qui n'est pas important), le nombre de configurations peut atteindre l'ordre de 2^{100}, ce qui équivaut à 10^{30} configurations. L'analyse peut alors durer des milliers de siècles même sur l'ordinateur le plus rapide au monde. En revanche, si l'AEF est déterministe, le nombre de configurations est simplement $n + 1$!

Nous pouvons alors déduire, dans un premier temps, que les automates non-déterministes ne sont guère intéressants vu qu'ils peuvent générer un coût très élevé lors de l'analyse, mais ce n'est pas le cas en réalité. En effet, il se trouve que, le plus souvent, il est beaucoup plus simple de concevoir un AEF non-déterministe que de construire un qui soit déterministe. De plus, comme on le verra dans le prochain chapitre, les langages réguliers sont souvent notés en utilisant *les expressions régulières*. Un algorithme (dit de Thompson) permet alors de construire l'AEF du langage à partir des expressions régulières mais l'AEF est presque toujours non-déterministe avec beaucoup d'ε-transitions.

Heureusement, lorsqu'il s'agit des langages réguliers, un théorème nous sera d'une grande utilité car il établit l'équivalence entre les automates déterministes et ceux non-déterministes (la démonstration de ce théorème sort du cadre de ce cours).

Théorème 1 : (appelé encore théorème de Rabin et Scott) Tout langage accepté par un AEF non déterministe est également accepté par un AEF déterministe.

Une conséquence très importante de ce théorème peut déjà être citée (en réalité, elle découle plutôt de la démonstration de ce théorème) :

Proposition 1 : Tout AEF non déterministe peut être transformé en un AEF déterministe.

Ce résultat établit que si l'on veut construire l'automate à états fini déterministe qui accepte les mots d'un certain langage, alors on peut commencer par trouver un AEF non déterministe (ce qui est plus facile). Il suffit de le transformer, après, pour obtenir un automate à états finis déterministe.

2.2.3 Déterminisation d'un AEF sans ε-transition

En réalité, l'algorithme de déterminisation d'un AEF est général, c'est-à-dire qu'il fonctionne dans tous les cas (qu'il y ait des ε-transitions ou non). Cependant, il est plus facile de considérer cet algorithme sans les ε-transitions. Dans cette section, on suppose que l'on a un AEF A ne comportant aucune ε-transition.

Algorithme : Déterminiser un AEF sans les ε-transitions

Principe : considérer des ensembles d'états plutôt que des états (dans l'algorithme suivant, chaque ensemble d'états représente un état futur automate).

1- Partir de l'état initial $E^{(0)} = \{q_0\}$ (c'est l'état initial du nouvel automate) ;
2- Construire $E^{(1)}$ l'ensemble des états obtenus à partir de $E^{(0)}$ par la transition a :
$$E^{(1)} = \bigcup_{q' \in E^{(0)}} \delta(q', a)$$
3- Recommencer l'étape 2 pour toutes les transitions possibles et pour chaque nouvel ensemble $E^{(i)}$;
$$E^{(i)} = \bigcup_{q' \in E^{(i-1)}} \delta(q', a)$$
4- Tous les ensembles contenant au moins un état final du premier automate deviennent finaux ;
5- Renuméroter les états en tant qu'états simples.

Pour illustrer cet algorithme, nous allons l'appliquer à l'automate donné par la figure 2.2. La table suivante illustre les étapes d'application de l'algorithme (les états en gras sont des états finaux) :

État	a	b
0	0,1	0
0,1	0,1	0,2
0,2	0,1,2	0,2
0,1,2	0,1,2	0.2

$\Longrightarrow$

État	a	b
0	1	0
1	1	2
2	3	2
3	3	2

La figure 2.4 donne l'algorithme obtenu (remarquons qu'il n'est pas optimal). Cet automate n'est pas évident à trouver mais grâce à l'algorithme de déterminisation, on peut le construire automatiquement.

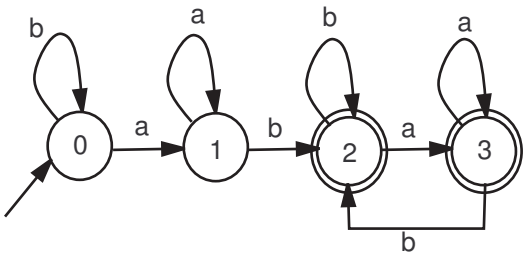


Figure 2.4 – L'automate déterministe qui accepte les mots ayant le facteur ab

2.2.4 Déterminisation avec les ε-transitions

Déterminiser un AEF contenant au moins une ε-transition est un peu plus compliqué puisqu'elle fait appel à la notion de l'ε-fermeture d'un ensemble d'états. Nous commençons donc par donner sa définition.

Définition 15 : Soit E un ensemble d'états. On appelle ε-fermeture de E l'ensemble des états incluant, en plus de ceux de E, tous les états accessibles depuis les états de E par un chemin étiqueté par le mot ε.

La construction des ε-transitions se fait donc d'une manière récursive. L'étudiant peut, en guise d'exercice, écrire l'algorithme permettant de construire un tel ensemble.

Exemple 10 : Considérons l'automate donné par la figure 2.3, calculons un ensemble d'ε-fermetures :

- ε-fermeture$(\{0\}) = \{0, 1, 2, 4\}$
- ε-fermeture$(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$
- ε-fermeture$(\{3\}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Algorithme : Déterminisation d'un AEF comportant des ε-transitions

Le principe de cet algorithme repose sur l'utilisation des ε-fermetures qui représenteront les états du nouvel automate.

1- Partir de l'ε-fermeture de l'état initial (elle représente le nouvel état initial) ;
2- Rajouter dans la table de transition toutes les ε-fermetures des nouveaux états produits avec leurs transitions ;
3- Recommencer l'étape 2 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de nouvel état ;
4- Tous les ε-fermetures contenant au moins un état final du premier automate deviennent finaux ;
5- Renuméroter les états en tant qu'états simples.

Exemple 11 : Appliquons maintenant ce dernier algorithme à l'automate de la figure 2.3.

État	a	b
0,1,2,4,6	1,2,3,4,6,7	1,2,4,5,6
1,2,3,4,6,7	1,2,3,4,6,7	1,2,4,5,6,8,9,10,11,13
1,2,4,5,6	1,2,3,4,6,7	1,2,4,5,6
1,2,4,5,6,8,9,10,11,13	1,2,3,4,6,7,10,11,12,13	1,2,4,5,6,8,9,10,11,13,14
1,2,3,4,6,7,10,11,12,13	1,2,3,4,6,7,10,11,12,13	1,2,4,5,6,8,9,10,11,13,14
1,2,4,5,6,8,9,10,11,13,14	1,2,3,4,6,7,10,11,12,13	1,2,4,5,6,8,9,10,11,13,14

ce qui produit (surprise) l'automate suivant :

État	a	b
0	1	2
1	1	3
2	1	2
3	4	5
4	4	5
5	4	5

2.3 Minimisation d'un AEF déterministe

Si on prend deux automates déterministes acceptant le même langage, le nombre de configurations considérés ne dépend que de la taille du mot. A priori, on peut dire alors que le nombre d'états d'un automate importe peu. Mais, ce n'est pas tout à fait correct.

D'abord signalons que l'opération de déterminisation a la fâcheuse tendance de produire beaucoup d'états. Pour un AEF non déterministe comportant n états, la procédure de déterminisation peut produire jusqu'à $2^n - 1$ états possibles (ce qui est un nombre considérable). Or, explorer une petite structure mémoire n'est pas comme explorer une grande structure. Pour n assez grand, il se peut que la représentation mémoire d'un AEF nécessite plusieurs pages de mémoires, allant jusqu'à causer des défauts de pages (ce qui augmente le temple d'analyse). Sur un autre plan, dans les systèmes embarqués (où la dimension énergie est des plus capitales), nous avons tout intérêt à réduire le nombre de cellule mémoire occupée afin de minimiser la puissance électrique nécessaires pour maintenir les données.

En conclusion, il est tout à fait justifiable de vouloir s'intéresser à la réduction du nombre d'états nécessaires pour accepter un langage. D'ailleurs, on s'intéressera dans ce qui suit au calcul du nombre minimal d'états nécessaires à l'analyse d'un langage donné. Il est à noter, enfin, que si on peut trouver une multitude d'automates pour analyser le même langage, on ne peut trouver qu'un seul automate minimal acceptant le même langage.

La minimisation s'effectue en éliminant les états dits inaccessibles et en *confondant* (ou fusionnant) les états acceptant le même langage.

2.3.1 Les états inaccessibles

Définition 16 : Un état est dit inaccessible s'il n'existe aucun chemin permettant de l'atteindre à partir de l'état initial.

D'après la définition, les états inaccessibles sont improductifs (il existe néanmoins des états improductifs qui ne sont pas inaccessibles), c'est-à-dire qu'ils ne participeront jamais à l'acceptation d'un mot. Ainsi, la première étape de minimisation d'un AEF consiste à éliminer ces états. L'étudiant peut, en guise d'exercice, écrire l'algorithme qui permet de trouver les états inaccessibles d'un AEF (indice : pensez à un algorithme de marquage d'un graphe).

2.3.2 Les états β-équivalents

Définition 17 : Deux états q_i et q_j sont dits β-équivalents s'ils permettent d'atteindre un état final à travers les mêmes mots. On écrit alors : $q_i \ \beta \ q_j$.

Par le même mot, on entend que l'on lit la même séquence de symboles pour atteindre un état final à partir de q_i et q_j. Par conséquent, ces états acceptent le même langage. La figure 2.5 montre un exemple d'états β-équivalents car l'état q_i atteint les états finaux via le mot a, de même pour l'état q_j. L'algorithme de minimisation consiste donc à fusionner simplement ces états pour n'en faire qu'un.

Remarque 3 : La relation β-équivalence est une relation d'équivalence. De plus, $\forall x \in X$ (X étant l'alphabet), $\delta(q_i, x)$ et $\delta(q_j, x)$ sont également β-équivalents (puisque q_i et q_j acceptent le même langage). La relation β-équivalence est donc dite une relation de congruence.

Remarque 4 : Le nombre de classes d'équivalence de la relation β-équivalence est égal au nombre des états de l'automate minimal car les état de chaque classe d'équivalence acceptent le même langage (ils seront fusionnés).

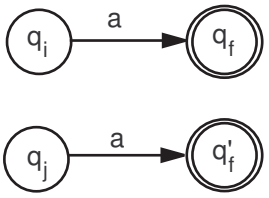


Figure 2.5 – Exemple d'états β-équivalents

2.3.3 Minimiser un AEF

La méthode de réduction d'un AEF est la suivante :

1. *Nettoyer* l'automate en éliminant les états inaccessibles ;
2. Regrouper les états congruents (appartenant à la même classe d'équivalence).

Algorithme : Regroupement des états congruents
Dans cet algorithme, chaque classe de congruence représentera un état dans l'automate minimal.

1- Faire deux classes : A contenant les états finaux et B contenant les états non finaux ;
2- S'il existe un symbole a et deux états q_i et q_j d'une même classe tel que $\delta(q_i, a)$ et $\delta(q_j, a)$ n'appartiennent pas à la même classe, alors créer une nouvelle classe et séparer q_i et q_j. On laisse dans la même classe tous les états qui donnent des états d'arrivée dans la même classe ;
3- Recommencer l'étape 2 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de classes à séparer ;

Les paramètres de l'automate minimal sont, alors, les suivants :
– Chaque classe de congruence est un état de l'automate minimal ;
– La classe qui contient l'ancien état initial devient l'état initial de l'automate minimal ;
– Toute classe contenant un état final devient un état final ;
– La fonction de transition est définie comme suit : soient A une classe de congruence obtenue, a un symbole de l'alphabet et q_i un état $q_i \in A$ tel que $\delta(q_i, a)$ est définie. La transition $\delta(A, a)$ est égale à la classe B qui contient l'état q_j tel que $\delta(q_i, a) = q_j$.

Exemple 12 : Soit à minimiser l'automate suivant (les états finaux sont les états 1 et 2 tandis que l'état 1 est initial) :

État	a	b
1	2	5
2	2	4
3	3	2
4	5	3
5	4	6
6	6	1
7	5	7

La première étape consiste à éliminer les états inaccessibles, il s'agit juste de l'état 7. Les étapes de détermination des classes de congruences sont les suivantes :

1. $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$;
2. $\delta(3, b) = 2 \in A$,$\delta(4, b) = 3 \in B$ ainsi il faut séparer 4 du reste de la classe B. Alors, on crée une classe C contenant l'état 4 ;
3. $\delta(3, b) = 2 \in A$, $\delta(5, b) = 6 \in A$ ainsi il faut séparer 5 du reste de la classe B. Mais inutile de créer une autre classe puisque $\delta(4, a) = 5 \in B$, $\delta(5, a) = 4 \in B$ et $\delta(4, b) = 3 \in B$ et $\delta(5, b) = 6 \in B$, il faut donc mettre 5 dans la classe C. $C = \{4, 5\}$ et $B = \{3, 6\}$;
4. Aucun autre changement n'est possible, alors on arrête l'algorithme.

Le nouvel automate est donc le suivant (l'état initial est A) :

Etat	a	b
A	A	C
B	B	A
C	C	A

Remarque 5 : L'automate obtenu est minimal et est unique, il ne peut plus être réduit. Si après réduction on obtient le même automate, alors cela signifie qu'il est déjà minimal.

Par ailleurs, l'automate déterministe et minimal d'un AEF le caractérise. En d'autres termes, si $L = L'$ (tous les deux étant des langages réguliers), alors ils ont alors le même automate déterministe et minimal (on peut être amenés à éliminer certains autres états non nécessaires néanmoins).

2.4 Opérations sur les automates

Notons d'abord que les opérations suivantes ne concernent pas que les AEF, elles peuvent plus ou moins être étendues à tout automate. Cependant, la complexité de ces opérations augmente inversement avec le type du langage.

2.4.1 Le complément

Soit A un automate déterministe défini par le quintuplet (X, Q, q_0, F, δ) acceptant le langage L. L'automate acceptant le langage inverse (c'est-à-dire $X^* - L$) est défini par le quintuplet $(X, Q, q_0, Q - F, \delta)$ (en d'autres termes, il suffit de changer les états finaux en états non finaux et vice-versa).

Cependant, cette propriété ne fonctionne que si l'automate est *complet* : la fonction δ est complètement définie pour toute paire $(q, a) \in Q \times X$ comme le montre les exemples suivants.

Exemple 13 : Soit le langage des mots définis sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ contenant le facteur ab. Il s'agit ici d'un automate complet, on peut, donc, lui appliquer la propriété précédente pour trouver l'automate des mots qui ne contiennent pas la facteur ab (notons que l'état 2 du deuxième automate correspond à une sorte d'état d'erreur auquel l'automate se branche lorsqu'il détecte le facteur ab. On dit que c'est un état *improductif* étant donné qu'il ne peut pas générer de mots).

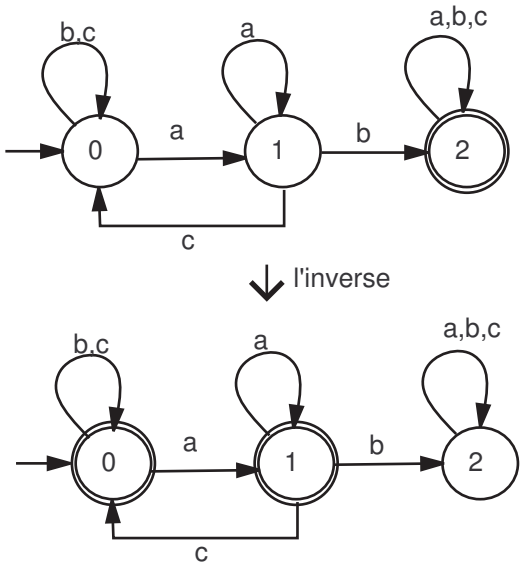


Figure 2.6 – Comment obtenir l'automate du langage complémentaire (d'un automate complet)

Soit maintenant le langage des mots définis sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement deux a (figure 2.7). L'automate n'est pas complet, donc, on ne peut pas appliquer la propriété précédente à moins de le transformer en un automate complet. Pour le faire, il suffit de rajouter un état non final E (on le désignera comme un état d'erreur) tel que $\delta(2, a) = E$.

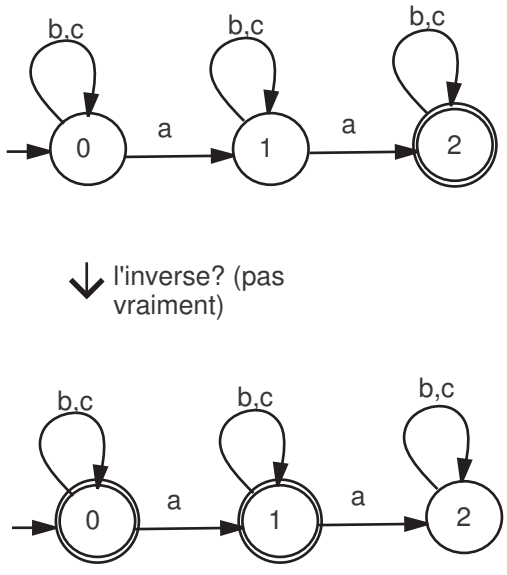


Figure 2.7 – Si l'automate n'est pas complet, on ne peut pas obtenir l'automate du langage inverse. L'automate obtenu accepte les mots contenant au plus 1 a.

Considérons à la fin l'automate de la figure 2.8. Les deux automates acceptant le mot a ce qui signifie que les deux automates n'acceptant pas des langages complémentaires.

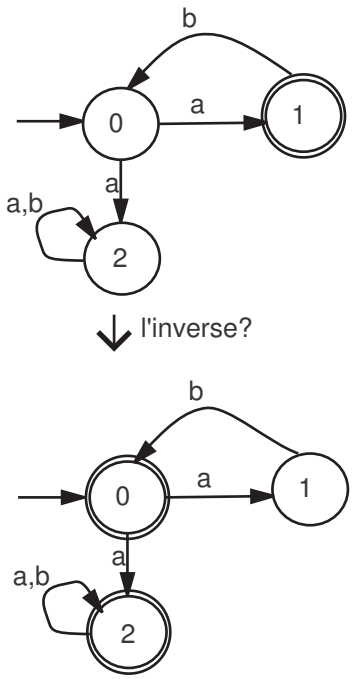


Figure 2.8 – Si l'automate n'est pas déterministe, on ne peut pas trouver l'automate du langage complémentaire.

Remarque 6 : Le fait qu'un AEF ne soit pas déterministe ne représente pas un obstacle pour trouver l'automate du langage inverse. En effet, on pourra toujours le construire en procédant à une transformation. *Laquelle ?*

La construction d'une version complète d'un AEF (qui doit être déterministe) se fait comme suit :

1. Rajouter un nouvel état N ;
2. Les transitions manquantes mènent dorénavant vers N ;
3. Toute transition sortante de N revient vers le même état.

2.4.2 L'opération d'entrelacement

Nous verrons ici le cas simple de l'entrelacement d'un langage avec un symbole (voir la figure 2.9). Soit L un langage accepté par un AEF (X, Q, q_0, F, δ). On note par Q' l'ensemble des états de Q auxquels on rajoute prime ($'$), par F' l'ensemble des états de F auxquels on rajoute $'$. L'automate acceptant le langage $L \sqcup a$ est donné par $(X, Q \cup Q', q_0, F', \delta')$ tel que :

- $\delta'(q_i, x) = \delta(q_i, x)$, $x \neq a$ et $q_i \in Q$;
- $\delta'(q_i, x) = (\delta(q_i, x))'$, $q_i \in Q'$;
- $\delta'(q_i, a) = q_i'$.

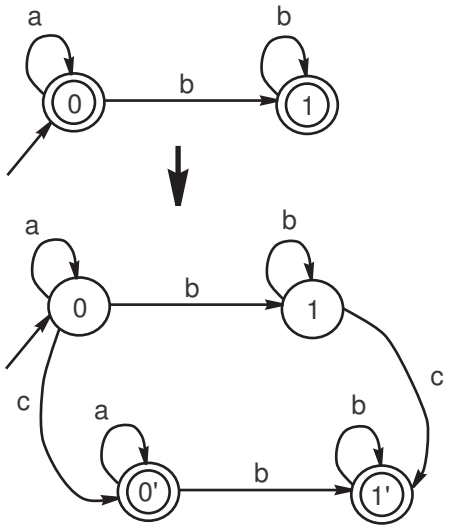


Figure 2.9 – Exemple d'entrelacement

2.4.3 Produit d'automates

Définition 18 : Soient $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (X', Q', q'_0, F', \delta')$ deux automates à états finis. On appelle produit des deux automates A et A' l'automate $A''(X'', Q'', q''_0, F'', \delta'')$ défini comme suit :

- $X'' = X \cup X'$;
- $Q'' = Q \times Q'$;
- $q''_0 = (q_0, q'_0)$;
- $F'' = F \times F'$;
- $\delta((q, q'), a) = (\delta(q, a) \times \delta(q', a)$

Cette définition permet de synchroniser l'analyse d'un mot par les deux automates. On pourra facilement démontrer que si w est un mot accepté par A'' alors il l'est par A, ceci est également le cas pour l'automate A'. Ainsi, si $L(A)$ est le langage accepté par A et $L(A')$ est le langage accepté par le langage A' alors l'automate A'' accepte l'intersection des deux langages : $L(A) \cap L(A')$.

Exemple 14 : Considérons la figure 2.10. L'automate (1) accepte les mots sur $\{a, b, c\}$ contenant deux a, l'automate (2) accepte les mots sur $\{a, b, c\}$ contenant deux b, l'automate (3) représente le produit des deux automates. Remarquons que dans l'automate (3), tout chemin qui mène de l'état initial vers l'état final passe forcément par deux a et deux b (tout ordre est possible). Or, ceci est exactement le langage résultant de l'intersection des deux premiers langages.

2.4.4 Le langage miroir

Soit $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ un automate acceptant le langage $L(A)$. L'automate qui reconnaît le langage $(L(A))^R$ est accepté par l'automate $A^R = (X, Q, F, \{q_0\}, \delta^R)$ tel que : $\delta^R(q', a) = q$ si $\delta(q, a) = q'$.

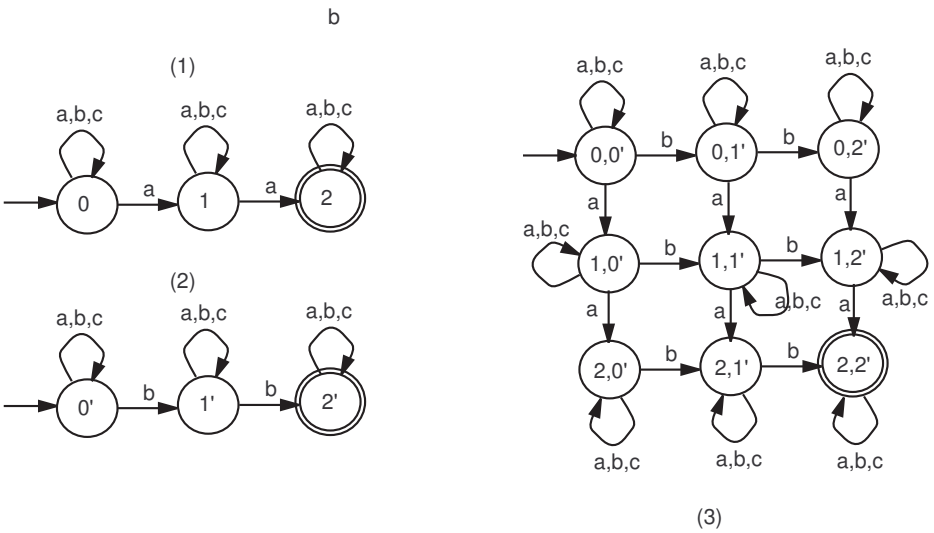


Figure 2.10 – Exemple d'intersection de produit d'automates

En d'autres termes, il suffit juste d'inverser les sens des arcs de l'automate et le statut initial/final des états initiaux et finaux. Notons, par ailleurs, que l'automate A^R peut contenir plusieurs états initiaux ce qui signifie qu'il est le plus souvent non déterministe. Pour éliminer le problème des multiples états initiaux, il suffit de rajouter un nouvel état initial et de le raccorder aux anciens états finaux par des ε-transitions.

Deuxième méthode de minimisation

La construction du miroir permet de réaliser une prouesse inattendue, elle permet de minimiser un AEF quelconque. Soit A un AEF acceptant le langage $L(A)$. L'algorithme de minimisation est le suivant :

1. Construire l'AEF de $(L(A))^R$, appelons cet AEF A^R ;
2. Déterminiser A^R, appelons l'AEF résultat $A^R_{dét}$;
3. Construie l'AEF du miroir à partir de $A^R_{dét}$, soit A' l'AEF résultant ;
4. Déterminiser A', le résultat représente l'AEF déterministe et minimal acceptant le langage $L(A)$.

Notons, enfin, que cet algorithme requiert que l'on accepte que l'AEF ait plusieurs états initiaux. Autrement, il ne fonctionne pas.

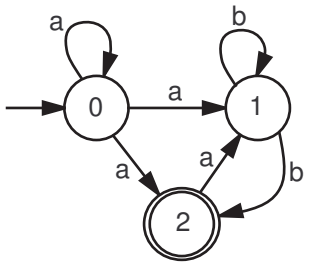
2.5 Conclusion

Nous pouvons dès maintenant annoncer les résultats suivants :
- Si L et M sont deux langages acceptés pas deux AEF, alors $L + M$ est également accepté par un AEF ;
- Si L et M sont deux langages acceptés par deux AEF, alors $L.M$ est également accepté par un AEF ;
- Si L est un langage accepté par un AEF, alors L^* est également accepté par un AEF ;

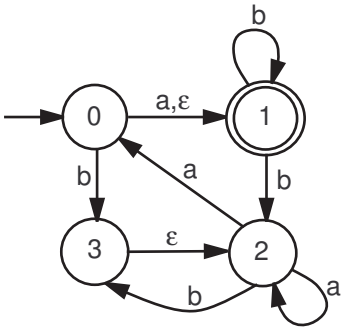
Le chapitre suivant traite des langages réguliers et des expressions régulières. On y abordera les opérations précédentes avec plus de détails étant donné qu'elles représentent les opérations de base lorsqu'on travaille avec les expressions régulières.

2.6 Exercices de TD

Exercice 1 : Déterminisez et minimisez si nécessaire l'automate suivant :



Exercice 2 : Déterminisez et minimisez si nécessaire l'automate suivant :



Exercice 3 : Minimiser l'automate suivant (l'état initial est 1, les états finaux sont $\{3, 6, 8\}$) :

État	a	b	c
1	2	3	4
2	1	5	6
3	1	5	6
4	2	6	1
5	4	7	8
6	4	5	3
7	4	5	3
8	9	3	6
9	7	3	9

Exercice 4 : Donnez les automates à états finis qui acceptant les langages suivants :
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ qui se terminent avec un symbole différent de celui du début ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ qui contiennent le facteur ab ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ qui ne contiennent pas le facteur aba ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ qui ne contiennent pas le facteur aac ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ qui ne contiennent ni le facteur aba ni le facteur aac ;

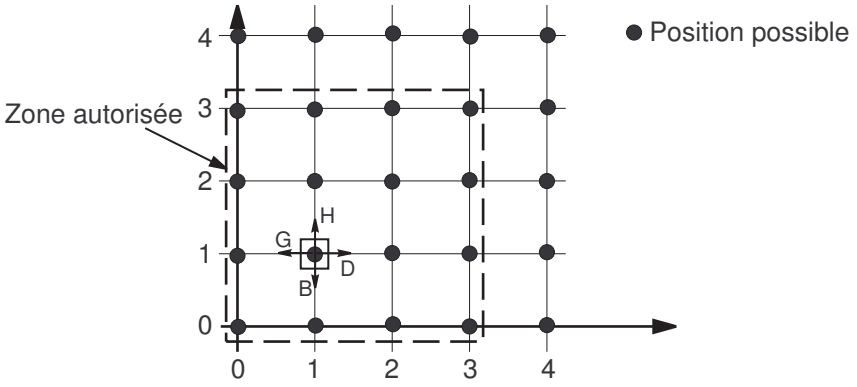
– Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ tels que toutes les occurrences de c précèdent celle de b tout en ayant deux a.

Exercice 5 : Donnez l'automate qui accepte tous les mots sur $\{a, b\}$ qui contiennent un nombre pair de a. En déduire l'automate qui accepte le langage de tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a et un nombre pair de b.

Exercice 6 : Considérons l'ensemble des nombres binaires, donnez les automates qui acceptent :
– Les nombres multiples de 2 ;
– Les nombres multiples de 4 ;
En déduire l'automate qui accepte les multiples des nombres de la forme $2^n (n > 1)$. Si n est fixe, peut-on concevoir un automate qui accepte les multiples de tous les nombres binaires de la forme 2^i $(0 < i \leqslant n)$ et qui permet de simuler le calcul de i ? Si oui, donnez l'automate, si non dites pourquoi ?

Exercice 7 : Donnez l'automate qui accepte les nombres binaires multiples de 3. Donnez ensuite deux façons pour construire l'automate qui accepte les multiples de 6.

Exercice 8 : Soit un mobile pouvant bouger dans un environnement sous forme d'une matrice $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ selon la figure suivante.



Les mouvements possibles sont D (droite), G (gauche), H (haut) et B (bas). Le mobile prend ses ordres sous forme de mots composés sur l'alphabet $\{D, G, H, B\}$ (tout déplacement se fait d'une unité). Par exemple, si le mobile se trouve sur le point $(0, 0)$, alors le mot DHHG va situer le mobile sur le point $(0, 2)$. Ainsi, on peut parler de *langages* de déplacements permettant d'effectuer telle ou telle tâche. Donnez, si possible, les automates des déplacements (*langages*) suivants (on suppose que le mobile se trouve, au départ, au point $(0, 0)$) :
– Tout chemin assurant que le mobile reste dans la zone autorisée ;
– Les chemins qui n'entrent pas dans le carré $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$;
– Les déplacements qui font revenir le mobile vers l'origine des coordonnées.

Exercice 9 : Donnez un automate acceptant une date de la forme *jour/mois*. Faites attention aux dates invalides du type 30/02 (on considère que la date 29/02 est valide).

Exercice 10 : Donnez les algorithmes permettant d'effectuer les opérations suivantes :
- Déterminer les états inaccessibles d'un automate ;
- Transformer un AEF incomplet en un AEF complet.

Exercice 11 : Donnez un automate déterministe acceptant les nombres réels en langage C.

Exercice 12 : Donnez l'automate qui accepte les mots qui contiennent un a dans tout facteur de longueur $n \geqslant 1$.

Exercice 13 : Soit u un mot non vide défini sur un alphabet donné, donnez un algorithme qui permet de construire un automate des mots qui ne contiennent pas le facteur u. Donnez également un algorithme qui construit un automate des mots qui ne contiennent ni la facteur u ni la facteur v (v étant un autre mot non vide différent de u).

Exercice 14 : Dans un environnement virtuel, un robot se déplace en suivant les ordres donnés sous forme de mots (pour simplifier, on suppose que l'alphabet utilisé est égal à $\{a, b\}$). Par exemple, on peut lui donner l'ordre $abba$ pour lui ordonner d'aller à l'endroit ayant comme nom $abba$. Si le mot contient une séquence non répertoriée, alors l'emplacement du robot est indéterminé.
- Soient les emplacements ab et ba. Construire un automate déterministe permettant d'aller à deux états finaux différents selon la séquences lue (par exemple, si l'automate vient de lire ab alors il se trouve dans l'état 0, s'il lit ba alors il doit aller à l'état 1) ;
- Refaites la même chose avec les emplacements $\{aa, bb\}$ et $\{aba, abb\}$;
- Soit un automate qui accepte un seul emplacement u (vous pouvez considérer les automates précédents), quelle caractéristique peut on donner au langage accepte par cet automate. En déduire une méthode permettant de construire l'automate qui permet d'accepter deux emplacements distincts u et v.

Chapitre 3

Les langages réguliers

Les langages réguliers sont les langages générés par des grammaires de type 3 (ou encore grammaires régulières). Ils sont acceptés par les automates à états finis. Le terme régulier vient du fait que les mots de tels langages possèdent une forme particulière pouvant être décrite par des expressions dites régulières. Ce chapitre introduit ces dernières et établit l'équivalence entre les trois représentation : expression régulière, grammaire régulière et AEF.

3.1 Les expressions régulières E.R

Définition 19 : Soit X un alphabet quelconque ne contenant pas les symboles $\{*, +, |, ., (,)\}$. Une expression régulière est un mot défini sur l'alphabet $X \cup \{*, +, |, ., (,)\}$ permettant de représenter un langage régulier de la façon suivante :

- L'expression régulière ε dénote le langage vide ($L = \{\varepsilon\}$) ;
- L'expression régulière a ($a \in X$) dénote le langage $L = \{a\}$;
- Si r est une expression régulière qui dénote L alors $(r)^*$ (resp. $(r)^+$) est l'expression régulière qui dénote L^* (resp. L^+) ;
- Si r est une expression régulière dénotant L et s une expression régulière dénotant L' alors $(r)|(s)$ est une expression régulière dénotant $L + L'$. L'expression régulière $(r).(s)$ (ou simplement $(r)(s)$) dénote le langage $L.L'$.

Les expressions régulières sont également appelées expressions rationnelles. L'utilisation des parenthèses n'est pas obligatoire si l'on est sûr qu'il n'y ait pas d'ambiguïté quant à l'application des opérateurs $*, +, ., |$. Par exemple, on peut écrire $(a)^*$ ou a^* puisque l'on est sûr que $*$ s'applique juste à a. Par ailleurs, on convient à utiliser les priorités suivantes pour les différents opérateurs : 1)$*, +$, 2). et 3)|.

Exemple 15 :

1. a^* : dénote le langage régulier a^n ($n \geqslant 0$) ;
2. $(a|b)^*$: dénote les mots dans lesquels le symbole a ou b se répètent un nombre quelconque de fois. Elle dénote donc le langage de tous les mots sur $\{a, b\}$;
3. $(a|b)^*ab(a|b)^*$: dénote tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant le facteur ab.

3.1.1 Utilisation des expressions régulières

Les expressions régulières sont largement utilisées en informatique. On les retrouve plus particulièrement dans les shell des systèmes d'exploitation où ils servent à indiquer un ensemble de fichiers sur lesquels on est appliqué un certain traitement. L'utilisation des expressions régulières en DOS, reprise et étendue par WINDOWS, est très limitée et ne concerne que le caractère "*" qui indique zéro ou plusieurs symboles ou le caractère "?" indiquant un symbole quelconque. Ainsi, l'expression régulière "f*" indique un mot commençant par f suivi par un nombre quelconque de symboles, "*f*" indique un mot contenant f et "*f*f*" indique un mot contenant deux f. L'expression "f?" correspond à n'importe quel mot de deux symboles dont le premier et f.

L'utilisation la plus intéressante des expressions régulières est celle faite par UNIX. Les possibilités offertes sont très vastes. Nous les résumons ici :

Expression	**Signification**
$[abc]$	les symboles a, b ou c
$[\hat{}abc]$	aucun des symboles a, b et c
$[a-e]$	les symboles de a jusqu'à e $\{a, b, c, d, e\}$
.	n'importe quel symbole sauf le symbole fin de ligne
$a*$	a se répétant 0 ou plusieurs fois
$a+$	a se répétant 1 ou plusieurs fois
$a?$	a se répétant 0 ou une fois
$a\|bc$	le symbole a ou b suivi de c
$a\{2,\}$	a se répétant au moins deux fois
$a\{,5\}$	a se répétant au plus cinq fois
$a\{2,5\}$	a se répétant entre deux et cinq fois
$\backslash x$	La valeur réelle de x (un caractère spécial)

Nous allons prendre des exemples intéressants :
– $[\hat{}ab]*$: les mots qui ne comportent ni a ni b ;
– $[ab]*$: tous les mots sur a, b ;
– $([\hat{}a] * a[\hat{}a] * a[\hat{}a]*)*$ les mots comportant un nombre pair de a ;
– $(ab\{,4\})*$ les mots commençant par a où chaque a est suivi de quatre b au plus.

A présent, nous allons quitter le merveilleux monde de UNIX et revenir à ce cours. Nous allons, donc, reprendre la définition des expressions régulières données par la section précédentes.

3.1.2 Expressions régulières ambiguës

Définition 20 : Une expression régulière est dite *ambiguë* s'il existe au moins mot pouvant être mis en correspondance avec l'expression régulière de plusieurs façons.

Cette définition fait appel à la correspondance entre un mot et une expression régulière. Il s'agit, en fait, de l'opération qui permet de dire si le mot appartient au langage décrit par l'expression régulière. Par exemple, prenons l'expression régulière a^*b^*. Soit à décider si le mot aab est décrit ou non par cette expression. On peut écrire :

$$\underbrace{aa}_{a^*}\underbrace{b}_{b^*}$$

Ainsi, le mot est décrit par cette E.R. Il n'y a qu'une seule façon qui permet de le faire correspondre. Ceci est valable pour tous les mots de ce langage. L'E.R n'est donc pas ambiguë.

Considérons maintenant l'expression $(a|b)^*a(a|b)^*$ décrivant tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant le facteur a. Soit à faire correspondre le mot aab, on a :

$$\begin{aligned} abaab &= \underbrace{ab}_{(a|b)^*} .a. \underbrace{ab}_{(a|b)^*} \\ abaab &= \underbrace{aba}_{(a|b)^*} .a. \underbrace{b}_{(a|b)^*} \end{aligned}$$

Il existe donc au moins deux façons pour faire correspondre aab à l'expression précédente, elle est donc ambiguë.

L'ambiguïté pose un problème quant à l'interprétation d'un mot. Par exemple, supposons que, dans l'expression $(a|b)^*a(a|b)^*$, l'on veut comparer la partie à gauche du facteur a à la partie droite du mot. Selon la méthode de correspondance, le résultat est soit vrai ou faux ce qui est inacceptable dans un programme cohérent.

3.1.3 Comment lever l'ambiguïté d'une E.R ?

Il n'existe pas une méthode précise pour lever l'ambiguïté d'une E.R. Cependant, on peut dire que cette opération dépend de ce que l'on veut faire avec l'E.R ou plutôt d'une *hypothèse d'acceptation*. Par exemple, on peut décider que le facteur fixe soit le premier a du mot à analyser ce qui donne l'expression régulière : $b^*a(a|b)^*$. On peut également supposer que c'est le dernier a du mot à analyser ce qui donne l'expression régulière $(a|b)^*ab^*$. La série de TD propose quelques exercices dans ce sens.

3.2 Les langages réguliers, les grammaires et les automates à états finis

Le théorème suivant établit l'équivalence entre les AEF, les grammaires régulières et les expressions régulières :

Théorème 2 : (Théorème de Kleene) Soient Λ_{reg} l'ensemble des langages réguliers (générés par des grammaires régulières), Λ_{rat} l'ensemble des langages décrits par toutes les expressions régulières et Λ_{AEF} l'ensemble de tous les langages acceptés par un AEF. Nous avons, alors, l'égalité suivante :

$$\Lambda_{reg} = \Lambda_{rat} = \Lambda_{AEF}$$

Le théorème annonce que l'on peut passer d'une représentation à une autre du fait de l'équivalence entre les trois représentations. Par la suite, on verra comment passer d'une représentation à une autre.

3.2.1 Passage de l'automate vers l'expression régulière

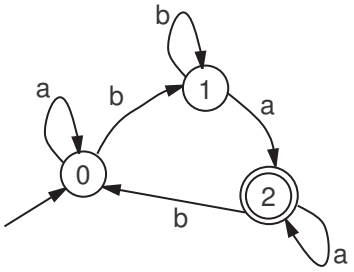
Soit $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ un automate à états fini quelconque. On désigne par L_i le langage accepté par l'automate si son état initial était q_i. Par conséquent, trouver le langage accepté par l'automate revient à trouver L_0 étant donné que l'analyse commence à partir de l'état

initial q_0. L'automate permet d'établir un système d'équations aux langages de la manière suivante :

- si $\delta(q_i, a) = q_j$ alors on écrit : $L_i = aL_j$;
- si $q_i \in F$, alors on écrit : $L_i = \varepsilon$
- si $L_i = \alpha$ et $L_i = \beta$ alors on écrit : $L_i = \alpha|\beta$;

Il suffit ensuite de résoudre le système en précédant à des substitutions et en utilisant la règle suivante : la solution de l'équation $L = \alpha L|\beta$ ($\varepsilon \notin \alpha$) est le langage $L = \alpha^*\beta$ (attention ! si vous obtenez $L = \alpha L$ alors c'est la preuve d'une faute de raisonnement).

Exemple 16 : Soit l'automate donné par la figure suivante :



Trouvons le langage accepté par cet automate. Le système d'équations est le suivant :

1) $L_0 = aL_0|bL_1$

2) $L_1 = bL_1|aL_2$

3) $L_2 = aL_2|bL_0|\varepsilon$

Appliquons la deuxième règle sur les équations, on obtient alors après substitutions :

4) $L_0 = a^*bL_1$

5) $L_1 = b^*aL_2 = b^*a^+bL_0|b^*a^+$

6) $L_2 = a^*bL_0|a^*$

En remplaçant 5) dans 4) on obtient : $L_0 = a^*b^+a^+bL_0|a^*b^+a^+$. En appliquant le schéma de résolution donné plus haut, on trouve $L_0 = (a^*b^+a^+b)^*a^*b^+a^+$.

Remarque 7 : Il est possible d'obtenir plusieurs expressions régulières associées à un AEF, selon l'ordre d'élimination des variables. Ceci est dû au fait que l'on peut trouver plusieurs expressions régulières différentes mais qui représentent, en fait, le même langage.

3.2.2 Passage de l'expression régulière vers l'automate

Il existe deux méthodes permettant de réaliser cette tâche. La première fait appel à la notion de *dérivée* tandis que la deuxième construit un automate comportant des ε-transitions en se basant sur les propriétés des langages réguliers.

Dérivée d'un langage

Définition 21 : Soit w un mot défini sur un alphabet X. On appelle dérivée de w par rapport à $a \in X$ le mot $v \in X^*$ tel que $w = av$. On note cette opération par : $v = w||a$.

On peut étendre cette notion aux langages. Ainsi la dérivée d'un langage par rapport à un mot $a \in X$ est le langage $L||a = \{v \in X^* | \exists w \in L : w = av\}$.

Exemple 17 :
- $L = \{1, 01, 11\}$, $L||1 = \{\varepsilon, 1\}$, $L||0 = \{1\}$.

Propriétés des dérivées

- $(\sum_{i=1}^{n} L_i)||u = \sum_{i=1}^{n}(L_i||u)$;
- $L.L'||u = (L||u).L' + f(L).(L'||u)$ tel que $f(L) = \{\varepsilon\}$ si $\varepsilon \in L$ et $f(L) = \emptyset$ sinon ;
- $(L^*)||u = (L||u)L^*$.

Méthode de construction de l'automate par la méthode des dérivées

Soit r une expression régulière (utilisant l'alphabet X) pour laquelle on veut construire un AEF. L'algorithme suivant donne la construction de l'automate :

1. Dériver r par rapport à chaque symbole de X ;
2. Recommencer 1) pour chaque nouveau langage obtenu jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de nouveaux langages ;
3. Chaque langage obtenu correspond à un état de l'automate. L'état initial correspond à r. Si ε appartient à un langage obtenu alors l'état correspondant est final ;
4. si $L_i||a = L_j$ alors on crée une transition entre l'état associé à L_i et l'état associé à L_j et on la décore par a.

Exemple 18 : Considérons le langage $L_0 = (a|b)^*a(a|b)^*$. On sait que :
- $(a|b)||a = \varepsilon$ donc $(a|b)^*||a = (a|b)^*$

Commençons l'application de l'algorithme :
- $L_0||a = [(a|b)^*a(a|b)^*]||a = ((a|b)^*a(a|b)^*)|(a|b)^* = (a|b)^* = L_1$
- $L_0||b = [(a|b)^*a(a|b)^*]||b = (a|b)^*a(a|b)^* = L_0$
- $L_1||a = [((a|b)^*a(a|b)^*)|(a|b)^*]||a = ((a|b)^*a(a|b)^*)|(a|b)^* = (a|b)^* = L_1$
- $L_1||b = [((a|b)^*a(a|b)^*)|(a|b)^*]||b = ((a|b)^*a(a|b)^*)|(a|b)^* = (a|b)^* = L_1$

Il n'y a plus de nouveaux langages, on s'arrête alors. L'automate comporte deux états q_0 (associé à $(a|b)^*a(a|b)^*$) et q_1 (associé à $((a|b)^*a(a|b)^*)|(a|b)^*$), il est donné par la table suivante (l'état initial est q_0 et l'état q_1 est final) :

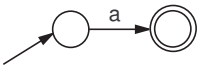
État	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_1

Remarque 8 : Appliquée correctement, la méthode des dérives, bien qu'elle nécessite beaucoup de calcul, permet de construire l'AEF déterministe et minimal du langage. La difficulté de la méthode réside dans le fait qu'il est parfois difficile de décider si deux expressions régulières sont équivalentes.

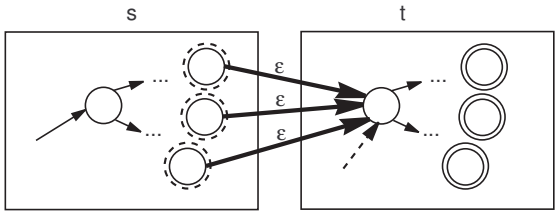
Méthode de Thompson

La méthode de Thompson permet de construire un automate en procédant à la décomposition de l'expression régulière selon les opérations utilisées. Soit r une E.R, alors l'algorithme à utiliser est le suivant :

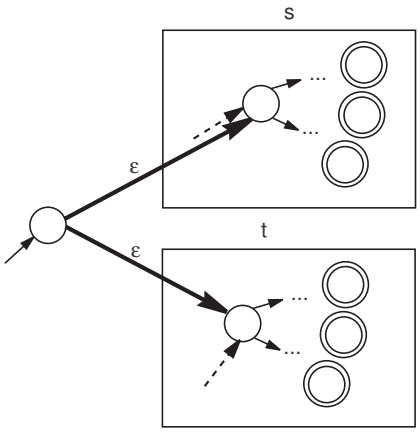
– Si $r = a$ (un seul symbole) alors l'automate est le suivant :



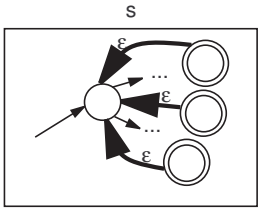
– Si $r = st$ alors il suffit de trouver l'automate A_s qui accepte s et l'automate A_t qui accepte t. Il faudra, ensuite relier chaque état final de A_s à l'état initial de A_t par une ε-transition. Les états finaux de A_s ne le sont plus et l'état initial de A_t ne l'est plus :



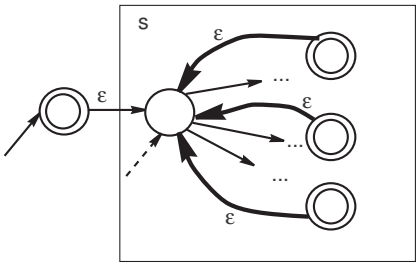
– Si $r = s|t$ alors il suffit de créer un nouvel état initial et le relier avec des ε-transitions aux états initiaux de A_r et A_s qui ne le sont plus :



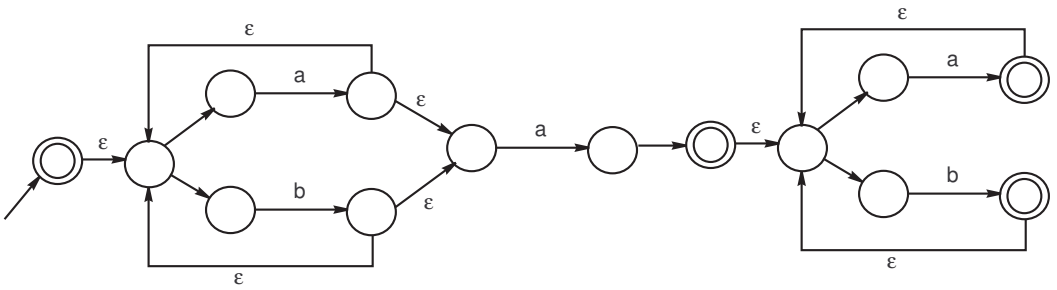
– Si $r = s^+$ alors il suffit de relier les états finaux de A_s par des ε-transitions à son état initial :



– Si $r = s^*$ alors il suffit de relier les états finaux de A_s par des ε-transitions à son état initial, créer un nouvel état initial et le relier à l'ancien état initial par une ε-transition. Enfin, le nouvel état intial est également final (dans certaines conditions, on peut trouver d'autres constructions possibles) :



Exemple 19 : Soit à construire l'automate du langage $(a|b)^*a(a|b)^*$, la méthode de Thompson donne l'automate suivant :

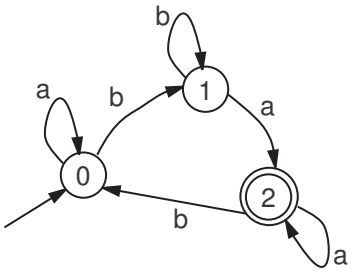


3.2.3 Passage de l'automate vers la grammaire

Du fait de l'équivalence des automates à états finis et les grammaires régulières, il est possible de passer d'une forme à une autre. Le plus facile étant le passage de l'automate vers la grammaire. Le principe de correspondance entre automates et grammaires régulières est très intuitif : il correspond à l'observation que chaque transition dans un automate produit exactement un symbole, de même que chaque dérivation dans une grammaire régulière *normalisée* (un concept qui sera présenté plus bas). Soit $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ un AEF, la grammaire qui génère le langage accepté par A est $g = (V, N, S, R)$:

- $V = X$;
- On associe à chaque état de Q un non-terminal. Ceci permet d'avoir autant de non-terminaux qu'il existe d'états dans A ;
- L'axiome S est le non-terminal associé à l'état initial q_0 ;
- Soit A le non terminal associé à q_i et B le non-terminal associé à q_j, si $\delta(q_i, a) = q_j$ alors la grammaire possède la règle de production : $A \to aB$;
- Si q_i est final et A est le non-terminal associé à q_i alors la grammaire possède la règle de production : $A \to \varepsilon$.

Exemple 20 : Soit l'AEF suivant :



La grammaire générant le langage accepté (en associant S à 0, T à 1 et U à 2) est : $(\{a, b\}, \{S, T, U\}, S, \{S \to aS|bT, T \to bT|aU, U \to aU|bS|\varepsilon\})$.

La forme engendrée par cet algorithme correspond à ce qu'on appelle grammaire régulière à droite (du fait que le non-terminal, dans la partie droite des règles, se trouve le plus à droite). En réalité, il existe une autre forme des grammaires de type 3, dite grammaire régulière à gauche.

Définition 22 : Soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire. G est dite régulière à gauche si toutes les règles de production sont de la forme $A \to B\alpha$ ou $A \to \alpha$ tel que $A, B \in N$ et $\alpha \in V^*$. Une grammaire régulière à gauche génère un langage régulier.

Notons ici qu'une grammaire est soit régulière à droite, soit à gauche, soit elle n'est pas régulières. En d'autres termes, si on trouve des formes régulières à droite et à gauche, alors la grammaire n'est pas du type 3.

Il n'est toutefois pas possible de déduire la grammaire régulière à gauche à partir de l'AEF Pour cela, il faut une petite gymnastique. Commençons d'abord par noter que si l'on prend une grammaire régulière droite à laquelle on applique le miroir sur toutes les parties droites des règle de production, on obtient une grammaire régulière à gauche générant le langage miroir. On peut alors proposer l'algorithme suivant. Soit A un AEF acceptant un langage L :

1. Construire l'AEF A^R acceptant le langage miroir (voir le chapitre 2 pour la méthode de construction).
2. Déduire la grammaire régulière à droite de L^R à partir de A^R.
3. Appliquer le miroir aux parties droites de toutes les règles de la grammaire obtenue. Le résultat représente la grammaire régulière à gauche générant L.

Notons, par le passage, que l'on s'intéresse généralement à une forme normalisée des grammaires régulières. Celle-ci est définie comme suit : soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire régulière à droite, elle est dite normalisée si toutes les règles de production sont de l'une des formes suivantes :

– $A \to a$, $A \in N$, $a \in V$;
– $A \to aB$, $A, B \in N$, $a \in V$;
– $A \to \varepsilon$, $A \in N$

La prochaine section dresse le problème de transformation d'une grammaire régulière droite à la forme normalisée.

3.2.4 Passage de la grammaire vers l'automate

D'après la section précédente, il existe une forme de grammaires régulières pour lesquelles il est facile de construire l'AEF correspondant. En effet, soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire régulière à droite, si toutes les règles de production sont de la forme : $A \to aB$ ou $A \to B$ ($A, B \in N, a \in V \cup \{\varepsilon\}$) alors il suffit d'appliquer l'algorithme suivant :

1. Associer un état à chaque non terminal de N ;
2. L'état initial est associé à l'axiome ;
3. Pour chaque règle de production de la forme $A \to \varepsilon$, l'état q_A est final ;
4. Pour chaque règle $A \to aB$ alors créer une transition partant de q_A vers l'état q_B en utilisant l'entrée a ;
5. Pour chaque règle $A \to B$ alors créer une ε-transition partant de q_A vers l'état q_B ;

Cependant, cet algorithme ne peut pas s'appliquer aux grammaires non normalisées. On peut néanmoins transformer toute grammaire régulière à droite à la forme normalisée. L'algorithme de transformation est le suivant. Soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire régulière :

1. Pour chaque règle de la forme $A \to wB$ ($A, B \in N$ et $w \in V^*$) tel que $|w| > 1$, créer un nouveau non-terminal B' et éclater la règle en deux : $A \to aB'$ et $B' \to uB$ tel que $w = au$ et $a \in V$. Il faut recommencer la transformation jusqu'à obtenir des règles où le non-terminal à droite est précédé d'un seul non terminal.
2. Pour chaque règle de la forme $A \to w$ ($A \in N$ et $w \in V*$) tel que $|w| > 1$, créer un nouveau non-terminal B' et éclater la règle en deux : $A \to aB'$ et $B' \to u$ tel que $w = au$ et $a \in V$. Il faut recommencer la transformation jusqu'à obtenir une règle avec ε dans la partie droite.

Exemple 21 : Soit la grammaire régulière $G = (\{a, b\}, \{S, T\}, S, \{S \to aabS|bT, T \to aS|bb\})$. Le processus de transformation est le suivant :
- Éclater $S \to aabS$ en $S \to aS_1$ et $S_1 \to abS$;
- Éclater $S_1 \to abS$ en $S_1 \to aS_2$ et $S_2 \to bS$;
- Éclater $T \to bb$ en $T \to bT_1$ et $T_1 \to b$;
- Éclater $T_1 \to b$ en $T_1 \to bT_2$ et $T_2 \to \varepsilon$

Remarque 9 : Il est possible de déduire une grammaire (qui ne sera pas forcément de type 3) à partir de l'expression régulière en utilisant un algorithme semblable à celui de Thompson. L'étudiant est invité à revoir le dernier exercice de la première série de TD pour une première idée de l'algorithme de construction.

3.3 Propriétés des langages réguliers

3.3.1 Stabilité par rapport aux opérations sur les langages

Les langages réguliers sont stables par rapport aux opérations de l'union, l'intersection, le complément, la concaténation et la fermeture de Kleene. La démonstration de ce résultat est très simple. Soient L et M deux langages réguliers désignés respectivement par les E.R r et s

et respectivement acceptés par les automates A_r et A_s. Étant donnée l'équivalence entre les langages réguliers et les AEF, nous avons :

- $L + M$ est régulier : l'AEF correspondant s'obtient en utilisant l'algorithme de construction de l'automate d'acceptation de l'E.R $r|s$;
- $L \cap M$ est régulier : l'AEF correspondant s'obtient en calculant le produit de A_r et A_s (voir le chapitre précédent) ;
- $\overline{L}$ est régulier : l'AEF correspondant s'obtient en rendant l'automate A_r déterministe et complet puis en inversant le statut final/non final des états (voir le chapitre précédent) ;
- L^R est régulier : l'AEF correspondant s'obtient en inversant le sens des arcs dans A_r et en inversant le statut initial/final des états (voir le chapitre précédent) ;
- $L.M$ est régulier : l'AEF correspondant s'obtient en utilisant l'algorithme de construction de l'automate de $r.s$;
- L^* (resp. L^+) est régulier : l'AEF correspondant s'obtient en utilisant l'algorithme de construction de l'automate de r^* (resp. r^+) ;

Revenons un peu sur la stabilité des langages réguliers par rapport à l'union. Le résultat donné ci-haut montre que l'union finie de langages réguliers représente forcément un langage réguliers. Ce qui signifie que tout langage régulier est régulier. Cependant, l'union infinie de langages réguliers peut être de n'importe quel type (tout dépend des langages en question).

3.3.2 Les langages réguliers et la méthode des dérivées

Nous avons déjà vu deux méthodes de construction des AEF à partir de l'E.R : méthode des dérivées et méthode de Thompson. La première, nécessitant beaucoup de calculs, a le mérite de produire l'AEF déterministe et minimal du langage. La deuxième, très simple à appliquer et à programmer, a l'inconvénient de produire un AEF non-déterministe et comportant beaucoup d'états.

Si la méthode de Thompson requiert une expression régulière pour fonctionner, celle des dérivées ne le requiert pas car elle peut être appliquée à tout langage. On s'interrogera néanmoins sur le critère d'arrêt de cette méthode, le théorème suivant nous sera d'une grande aide (bien sûr, on suppose que la méthode des dérivées est convenablement appliquée) :

Théorème 3 : La méthode des dérivées produit un nombre fini d'états pour tout langage régulier, et un nombre infini d'état pour tout langage non régulier.

Ainsi, la méthode des dérivées nous offre un premier moyen permettant de différencier les langages réguliers des non réguliers.

Exemple 22 : Soit le langage $L_0 = \{a^n b^n | n \geqslant 0\}$, appliquons-lui la méthode des dérivées. Nous avons alors :

- $L_0 \| a = \{a^{n-1} b^n | n \geqslant 1\} = L_1$
- $L_1 \| a = \{a^{n-2} b^n | n \geqslant 2\} = L_2$
- ...
- $L_i \| a = \{a^{n-(i+1)} b^n | n \geqslant i+1\} = L_{i+1}$

On voit alors que les opérations de dérivations ne s'arrête jamais produisant ainsi une infinité d'états. On en déduit que L_0 n'est pas régulier (il est plutôt algébrique).

3.3.3 Lemme de la pompe

Dans cette section, nous présentons d'autres critères permettant d'affirmer si un langage est régulier ou non. Rappelons d'abord que tout langage fini est un langage régulier. A présent, nous allons annoncer un critère dont la vérification permet de juger si un langage n'est pas régulier. Il s'agit en fait d'une condition suffisante et non nécessaire pour qu'un langage soit régulier. La démonstration de ce résultat sort du cadre du cours.

Proposition 2 : Soit L un langage régulier infini défini sur l'alphabet X. Il existe alors un entier n tel que pour tout mot $w \in L$ et $|w| \geqslant n$, il existe $x, z \in X^*$ et $y \in X^+$ tels que :
- $w = xyz$;
- $|xy| \leqslant n$;
- $xy^iz \in L$ pour tout $i > 0$.

Il est à noter que cette condition est suffisante et non nécessaire. Il existe, en effet, des langages non réguliers vérifiant ce critère. Il existe néanmoins une condition nécessaire et suffisante que l'on va énoncer après avoir présenté un exemple d'utilisation du lemme de la pompe.

Exemple 23 : Soit le langage $L = a^kb^l$ (ou encore a^*b^*, il s'agit donc d'un langage régulier). Prenons $n = 1$ et vérifions le critère de la pompe. Soit un mot $w = a^kb^l$ $(k + l \geqslant 1)$. Si $k > 0$ alors il suffit de prendre $x = a^{k-1}, y = a$ et $z = b^l$, ainsi tout mot de la forme $xy^iz = a^{k+i-1}b^l$ appartient au langage. Si $k = 0$ alors il suffit de prendre $x = \varepsilon, y = b$ et $z = b^{l-1}$ pour vérifier le critère de la pomme.

Exemple 24 : Soit le langage $L = a^kb^k$ (avec $k \geqslant 0$)[2]. Supposons que le langage est régulier et appliquons le lemme de la pompe. Supposons que l'on a trouvé n qui vérifie le critère, ceci implique que pour tout mot $w \in L$, on peut le décomposer en trois sous-mots x, y et z tel que : $|xy| \leqslant n$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^iz \in L$. Considérons le mot $a^{n+1}b^{n+1}$, toute décomposition de ce mot produire les mots $x = a^j$, $y = a^l$ et $z = a^{n+1-j-l}b^{n+1}$, $l > 0$ (si xy contient n symboles alors x et y ne contiennent que des a étant donné qu'il y a $(n + 1)$ a). Maintenant, le lemme de la pompe stipule que $xy^iz \in L$ pour tout $i > 0$ donc tout mot de la forme $a^ja^{il}a^{n+1-j-l}b^{n+1} = a^{(i-1)l+n+1}b^{n+1}$ appartient à L. Pour $i = 2$ la borne inférieure de $(i-1)l$ est 1, ce qui signifie que le nombre de a est différent du nombre de b. Contradiction. Donc, le langage a^kb^k n'est pas régulier.

Exemple 25 : Soit maintenant soit $L \subset b^*$ un langage non régulier arbitraire. Le langage :

$$a^+L|b^*$$

satisfait le lemme de la pompe. Il suffit de prendre avec les notations du lemme, $n = 1$. Cet exemple illustre donc le fait que le lemme précédent ne constitue pas une condition nécessaire pour décider de la régularité d'un langage.

Proposition 3 :

2. Attention, l'expression a^kb^k n'est pas régulière.

Soit L un langage infini défini sur l'alphabet X. L est régulier si et seulement s'il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout mot $w \in X^*$ et $|w| \geqslant n$, il existe $x, z \in X^*$ et $y \in X^+$ tels que :

- $w = xyz$;
- $\forall u \in X^* : wv \in X^* \Leftrightarrow xy^i zu \in L$.

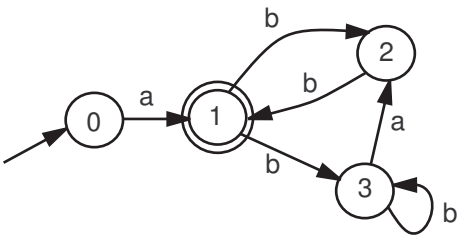
3.4 Exercices de TD

Exercice 1 : Donnez une description de chacune des E.R suivantes, puis donnez leurs équivalentes UNIX :
- $a(a|b)^*(b|\varepsilon)$;
- $(aaa)^*$;
- $(a|ab|abb)^*$
- $a(a|b)^*(aa|bb)^+$
- $(a|ab)^*$

Exercice 2 : Donnez les expressions régulières UNIX suivantes :
- Les identificateurs en C ;
- Les noms de fichiers en DOS ;
- Les nombres entiers multiples de 5 en base 10 ;
- Les mots sur $\{a, b, c\}$ contenant la facteur a^{1000}.

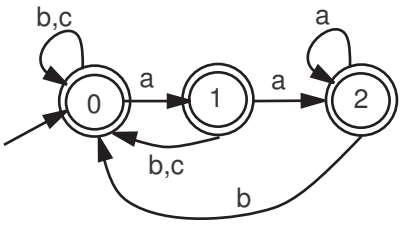
Exercice 3 : Donnez une expression régulière pour chacun des langages suivants. En déduire à chaque fois l'automate correspondant en utilisant la méthode de Thompson ou celle des dérivées. Donnez leurs équivalentes UNIX.
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ commençant par a ;
- Tous les mots sur $\{a, b\}$ commençant par un symbole différent de leur dernier symbole ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement deux a ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ contenant au moins deux a ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ contenant au plus deux a ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas la facteur ab ;
- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas le facteur aac ;
- Tous les entiers (en base dix) multiples de 5.

Exercice 4 : Soit l'automate suivant :



Trouvez le langage accepté par cet automate ainsi qu'une grammaire régulière qui le génère.

Exercice 5 : Soit l'automate suivant :



1. Trouvez le langage régulier accepté par cet automate ;
2. Trouvez l'automate du langage complémentaire et déduire son expression régulière.

Exercice 6 : Soit le grammaire régulière : $G = (\{a, b\}, \{S, T\}, S, \{S \rightarrow abS|aS|bT|\varepsilon, T \rightarrow baT|bT|aS|\varepsilon\})$. Trouver l'automate acceptant le langage généré par cette grammaire puis en déduire son expression régulière.

Exercice 7 : En utilisant le lemme de la pompe, dites si les langages suivants sont réguliers. Si le critère de la pompe est vérifié, donnez un AEF ou une grammaire régulière générant le langage pour être sûr de la régularité :

- $a^n b^m$,$n \geqslant 0, m > 0$;
- a^{2n+1}, $n \geqslant 0$;
- $a^n b^m$, $n, m \geqslant 0$ et $n + m$ est pair ;
- $a^{2n} b^n$, $n \geqslant 0$
- a^{n^2}, $n \geqslant 0$;
- $b^m a^{n^2} + a^k$, $n, k \geqslant 0$, $m > 0$

Exercice 8 : Donnez une expression régulière décrivant les langages suivants :

- tous les mots sur $\{a, b\}$ où chaque a est précédé d'un b ;
- tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant à la fois les facteurs aa et bb ;
- tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant soit aa soit bb mais pas les deux à la fois ;
- tous les mots sur $\{a, b\}$ ne contenant pas deux a consécutifs ;
- tous les mots sur $\{a, b, c\}$ où le nombre de a est multiple de 3 ;
-

Chapitre 4

Les langages algébriques

Malgré la panoplie d'algorithmes existants pour travailler sur les automates à états finis, ceux-là sont limités aux seuls langages réguliers. Par exemple, dans le chapitre précédent, nous avons montré que le langage $\{a^n b^n | n \geqslant 0\}$ n'est pas régulier et, par conséquent, ne peut pas être reconnu par un AEF. Ce chapitre élargit un peu le champ d'étude en s'intéressant aux langages algébriques qui représentent la couche qui suit immédiatement celle des langages réguliers dans la hiérarchie de Chomsky. Remarquons, cependant, que le niveau de complexité est inversement proportionnel au type du langage et, par conséquent, le nombre d'algorithmes existants tend à diminuer en laissant la place à plus d'*intuition*. Il reste à noter que les langages algébriques sont tout de même plus intéressant du fait de leur meilleure expressivité (par rapport aux langages réguliers) et qu'ils représentent (à un certain degré) la base de la plupart des langages de programmation.

4.1 Les automates à piles

Les automates à piles sont une extension des automates à états finis. Ils utilisent une (et une seule) pile pour accepter les mots en entrée.

Définition 23 : Un automate à pile est défini par le sextuple $A = (X, \Pi, Q, q_0, F, \delta)$ tel que :
- X est l'ensemble des symboles formant les mots en entrée (alphabet des mots à reconnaître) ;
- Π est l'ensemble des symboles utilisés pour écrire dans la pile (l'alphabet de la pile). Cet alphabet doit forcément inclure le symbole $\triangleright$ signifiant que la pile est vide ;
- Q est l'ensemble des états possibles ;
- q_0 est l'état initial ;
- F est l'ensemble des états finaux ($F \neq \emptyset$, $F \subseteq Q$) ;
- δ est une fonction de transition permettant de passer d'un état à un autre :

  $\delta : Q \times (X \cup \{\varepsilon\}) \times \Pi \mapsto 2^Q \times (\Pi - \{\triangleright\})^*$
  $\delta(q_i, a, b) = (q_j, c)$ ou $\emptyset$ ($\emptyset$ signifie que la configuration n'est pas prise en charge)
  b est le sommet de la pile et c indique le nouveau contenu de la pile relativement à ce qu'il y avait

Par conséquent, tout automate à états fini est en réalité un automate à pile à la seule différence que la pile du premier reste vide ou au mieux peut être utilisée dans une certaine

limite.

Une configuration d'un automate à pile consiste à définir le triplet (q, a, b) tel que q est l'état actuel, a et le symbole actuellement en lecture et b est le sommet actuel de la pile. Lorsque $b =$ " $\triangleright$ ", alors la pile est vide.

Les exemples suivants illustrent comment peut-on interpréter une transition :

- $\delta(q_0, a, \triangleright) = (q_1, B\triangleright)$ signifie que si l'on est dans l'état q_0, si le symbole actuellement lu est a et si la pile est vide alors passer à l'état q_1 et empiler le symbole B ;
- $\delta(q_0, a, A) = (q_1, BA)$ signifie que si l'on est dans l'état q_0, si le symbole actuellement lu est a et si le sommet de la pile est A alors passer à l'état q_1 et empiler le symbole B ;
- $\delta(q_0, \varepsilon, A) = (q_1, BA)$ signifie que si l'on est dans l'état q_0, s'il ne reste plus rien à lire et que le sommet de la pile est A alors passer à l'état q_1 et empiler le symbole B ;
- $\delta(q_0, a, A) = (q_1, A)$ signifie que si l'on est dans l'état q_0, si le symbole actuellement lu est a et si le sommet de la pile est A alors passer à l'état q_1 et ne rien faire avec la pile ;
- $\delta(q_0, a, A) = (q_1, \varepsilon)$ signifie que si l'on est dans l'état q_0, si le symbole actuellement lu est a et si le sommet de la pile est A alors passer à l'état q_1 et dépiler un symbole de la pile.

Un mot *w* est accepté par un automate à pile si après avoir lu tout le mot *w*, l'automate se trouve dans un état final. Le contenu de la pile importe peu du fait que l'on peut toujours la vider (comment ?). Par conséquent, un mot est rejeté par un automate à pile :

- Si lorsque aucune transition n'est possible, l'automate n'a pas pu lire tout le mot ou bien il se trouve dans un état non final.
- Si une opération incorrecte est menée sur la pile : dépiler alors que la pile est vide.

Exemple 26 : L'automate acceptant les mots $a^n b^n$ (avec $n \geqslant 0$) est le suivant : $A = (\{a, b\}, \{A, \triangleright\}, \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, \{q_2\}, \delta)$ tel que δ est définie par :

- $\delta(q_0, a, \triangleright) = (q_0, A\triangleright)$
- $\delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$
- $\delta(q_0, b, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, b, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, \varepsilon, \triangleright) = (q_2, \triangleright)$
- $\delta(q_0, \varepsilon, \triangleright) = (q_2, \triangleright)$

Détaillons l'analyse de quelques mots :

1. Le mot $aabb$: $(q_0, a, \triangleright) \rightarrow (q_0, a, A\triangleright) \rightarrow (q_0, b, AA\triangleright) \rightarrow (q_1, b, A\triangleright) \rightarrow (q_1, \varepsilon, \triangleright) \rightarrow (q_2, \varepsilon, \triangleright)$. Le mot est accepté ;
2. Le mot aab : $(q_0, a, \triangleright) \rightarrow (q_0, a, A\triangleright) \rightarrow (q_0, b, AA\triangleright) \rightarrow (q_1, \varepsilon, A\triangleright)$. Le mot n'est pas accepté car il n'y a plus de transitions possibles alors que l'état de l'automate n'est pas final
3. Le mot abb : $(q_0, a, \triangleright) \rightarrow (q_0, b, A\triangleright) \rightarrow (q_1, b, \triangleright)$. Le mot n'est pas accepté car on n'arrive pas à lire tout le mot ;
4. Le mot ε : $(q_0, \varepsilon, \triangleright) \rightarrow (q_2, \varepsilon, \triangleright)$. Le mot est accepté.

4.1.1 Les automates à piles et le déterminisme

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre des automates à états finis, la notion du déterminisme n'est pas propre à ceux-là. Elle est également présente dans le paradigme des automates à piles. On peut donc définir un automate à pile déterministe par :

Définition 24 : Soit l'automate à pile défini par $A = (X, \Pi, Q, q_0, F, \delta)$. A est dit déterministe si $\forall q_i \in Q, \forall a \in (X \cup \{\varepsilon\}), \forall A \in \Pi$, il existe au plus une paire $(q_j, B) \in (Q \times \Pi^*)$ tel que $\delta(q_i, a, A) = (q_j, B)$.

En d'autres termes, un automate à pile non déterministe possède plusieurs actions à entreprendre lorsqu'il se trouve dans une situation déterminée. L'analyse se fait donc en testant toutes les possibilités jusqu'à trouver celle permettant d'accepter le mot.

Exemple 27 : Considérons le langage suivant : wcw^R tel que $w \in (a|b)^*$. La construction d'un automate à pile est facile, son idée consiste à empiler tous les symboles avant le c et de les dépiler dans l'ordre après (l'état q_2 est final) :

- $\delta(q_0, a, \triangleright) = (q_0, A\triangleright)$
- $\delta(q_0, b, \triangleright) = (q_0, B\triangleright)$
- $\delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$
- $\delta(q_0, a, B) = (q_0, AB)$
- $\delta(q_0, b, A) = (q_0, BA)$
- $\delta(q_0, b, B) = (q_0, BB)$
-
- $\delta(q_0, c, A) = (q_1, A)$
- $\delta(q_0, c, B) = (q_1, B)$
- $\delta(q_0, c, \triangleright) = (q_1, \triangleright)$
- $\delta(q_1, a, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, b, B) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, \varepsilon, \triangleright) = (q_2, \triangleright\varepsilon)$

Considérons maintenant le langage ww^R tel que $w \in (a|b)^*$, les mots de ce langage sont palindromes mais on ne sait quand est-ce qu'il faut arrêter d'empiler et procéder au dépilement. Il faut donc supposer que chaque symbole lu représente le dernier symbole de w, le dépiler, continuer l'analyse si cela ne marche pas, il faut donc revenir empiler, et ainsi de suite :

- $\delta(q_0, a, \triangleright) = (q_0, A\triangleright)$
- $\delta(q_0, b, \triangleright) = (q_0, B\triangleright)$
- $\delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$
- $\delta(q_0, a, B) = (q_0, AB)$
- $\delta(q_0, b, A) = (q_0, BA)$
- $\delta(q_0, b, B) = (q_0, BB)$
-
- $\delta(q_0, a, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_0, b, B) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_0, a, B) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_0, b, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, a, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, b, B) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, \varepsilon, \triangleright) = (q_2, \triangleright\varepsilon)$

Malheureusement, nous ne pouvons pas transformer tout automate à piles non déterministe en un automate déterministe. En effet, la classe des langages acceptés par des automates à piles non déterministes est beaucoup plus importantes que celle des langages acceptés par des automates déterministes. Si L_{DET} est l'ensemble des langages acceptés par des automates

à piles déterministes et L_{NDET} est l'ensemble des langages acceptés par des automates à piles non déterministes, alors :

$$L_{DET} \subset L_{NDET}$$

En pratique, on s'intéresse pas vraiment aux langages non-déterministes (c'est-à-dire, ne pouvant être accepté qu'avec un automate à pile non déterministe) du fait que le temps d'analyse peut être exponentiel en fonction de la taille du mot à analyser (pour un automate déterministe, le temps d'analyse est linéaire en fonction de la taille du mot à analyser).

Nous allons à présent nous intéresser aux grammaires qui génèrent les langages algébriques puisque c'est la forme de ces grammaires qui nous permettra de construire des automates à pile (notamment grâce à l'analyse descendante ou ascendante en théorie de compilation).

4.2 Les grammaires hors-contextes

Nous avons déjà évoqué ce type de grammaires dans le premier chapitre lorsque nous avons présenté la hiérarchie de Chomsky. Rappelons-le quand même :

Définition 25 : Soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire quelconque. G est dite hors-contexte ou de type de 2 si tous les règles de production sont de la forme : $\alpha \to \beta$ tel que $\alpha \in N$ et $\beta \in (V + N)^*$.

Un langage généré par une grammaire hors-contexte est dit langage algébrique. Notons que nous nous intéressons, en particulier, à ce type de langages (et par conséquence à ce type de grammaires) du fait que la plupart des langages de programmation sont algébriques.

Exemple 28 : Soit la grammaire générant le langage $\{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$: $G = (\{a, b\}, \{S\}, S, R)$ tel que R comporte les règles : $S \to aSb|\varepsilon$. D'après la définition, cette grammaire est hors-contexte et le langage $a^n b^n$ est algébrique.

4.2.1 Arbre de dérivation

Vu la forme particulière des grammaires hors-contextes (présence d'un seul symbole non terminal à gauche), il est possible de construire un arbre de dérivation pour un mot généré.

Définition 26 : (Rappel) Etant donnée une grammaire $G = (V, N, S, R)$, les arbres de syntaxe de G sont des arbres dont les noeuds internes sont étiquetés par des symboles de N, les feuilles étiquetés par des symboles de V, tels que : si le nœud p apparaît dans l'arbre et si la règle $p \to a_1 ... a_n$ (a_i terminal ou non terminal) est utilisée dans la dérivation, alors le nœud p possède n fils correspondant aux symboles a_i.

Si l'arbre de syntaxe a comme racine S, alors il est dit arbre de dérivation du mot u tel que u est le mot obtenu en prenant les feuilles de l'arbre dans le sens gauche→droite et bas→haut.

Exemple 29 : Reprenons l'exemple précédent, le mot aabb est généré par cette grammaire par la chaîne : $S \to aSb \to aaSbb \to aa\varepsilon bb = aabb$. L'arbre de dérivation est donnée par la figure 4.1.

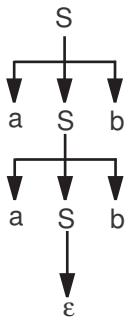


Figure 4.1 – Exemple d'un arbre de dérivation

4.2.2 Notion d'ambiguïté

Nous avons déjà évoqué la notion de l'ambiguïté lorsque nous avons présenté les expressions régulières. Nous avons, alors, défini une expression régulière ambiguë comme étant une expression régulière pouvant *coller* à un mot de plusieurs manière.

Par analogie, nous définissons la notion de l'ambiguïté des grammaires. Une grammaire est dite ambiguë si elle peut générer au moins un mot de plusieurs manières. En d'autres termes, si on peut trouver un mot généré par la grammaire et possédant au moins deux arbres de dérivation, alors on dit que la grammaire est ambiguë. Notons que la notion de l'ambiguïté n'a rien à avoir avec celle du non déterminisme. Par exemple, la grammaire $G = (\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aSb|bSa|\varepsilon\})$ génère les mots ww^R tel que $w \in (a|b)^*$. Bien qu'il n'existe aucun automate à pile déterministe aceptent les mots de ce langage, tout mot ne possède qu'un seul arbre de dérivation. Cependant, certains langages algébriques ne peuvent être générés que par des grammaires ambiguës.

L'ambiguïté de certaines grammaires peut être levée comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 30 : Soit la grammaire $G = (\{0, 1, +, *\}, \{E\}, E, \{E \rightarrow E + E|E * E|(E)|0|1\})$. Cette grammaire est ambiguë car le mot 1+1*0 possède deux arbres de dérivation (figures 4.2 et 4.3). La grammaire est donc ambiguë. Or ceci pose un problème lors de l'évaluation de l'expression (rappelons que l'évaluation se fait toujours de gauche à droite et bas en haut)[3]. Le premier arbre évalue l'expression comme étant 1+(1*0) ce qui donne 1. Selon le deuxième arbre, l'expression est évaluée comme étant (1+1)*0 ce qui donne 0 ! Or, aucune information dans la grammaire ne permet de préférer l'une ou l'autre forme.

D'une manière générale, pour lever l'ambiguïté d'une grammaire, il n'y a pas de méthodes qui fonctionne à tous les coups. Cependant, l'idée consiste généralement à introduire une hypothèse supplémentaire (ce qui va changer la grammaire) en espérant que le langage généré reste le même. Par exemple, la grammaire $G' = (\{+, *, 0, 1\}, \{E, T, F\}, E, \{E \rightarrow E + T|T, T \rightarrow T * F|F, F \rightarrow (E)|0|1\})$ génère le même langage que G mais a l'avantage de ne pas être ambiguë. La transformation introduite consiste à donner une priorité à l'opérateur * par rapport à l'opérateur +.

3. Nous considérons le contexte de l'algèbre de Boole

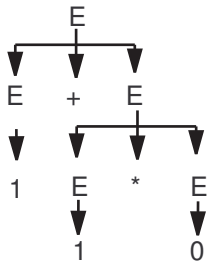


Figure 4.2 – Un premier arbre de dérivation

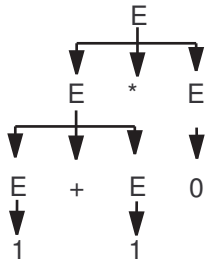


Figure 4.3 – Deuxième arbre de dérivation

4.2.3 Équivalence des grammaires hors-contextes et les automates à piles

Le théorème suivant établit l'équivalence entre les grammaires hors-contextes et les automates à piles. Néanmoins, ni le théorème ni sa preuve ne fournissent des moyens pour le passage d'une forme à une autre.

Théorème 4 : Tout langage hors-contexte est un langage algébrique et vice-versa. En d'autres termes, pour tout langage généré par une grammaire hors-contexte, il existe un automate à pile (déterministe ou non) qui l'accepte. Réciproquement, pour tout langage accepté par un automate à pile, il existe une grammaire hors-contexte qui le génère.

Dans le paradigme des langages algébriques, il est plus intéressant de s'intéresser aux grammaires (rappelons qu'il n'existe pas d'expression régulière ici !). Ceci est dû à l'existence de nombreux algorithmes et outils traitant plutôt des formes particulières de grammaires (Chomsky, Greibach) cherchant ainsi à faciliter la construction des arbres de dérivation.

4.3 Simplification des grammaires hors-contextes

4.3.1 Les grammaires propres

Une grammaire hors-contexte (V, N, S, R) est dite propre si elle vérifie :
– $\forall A \to u \in R : u \neq \varepsilon$ ou $A = S$;
– $\forall A \to u \in R : S$ ne figure pas dans u ;
– $\forall A \to u \in R : u \notin N$;
– Tous les non terminaux sont utiles, c'est-à-dire qu'ils vérifient :

- $\forall A \in N$: A est atteignable depuis S : $\exists \alpha, \beta \in (N + V)^*$: $S \xrightarrow{*} \alpha A \beta$;
- $\forall A \in N$: A est productif : $\exists w \in V^*$: $A \xrightarrow{*} w$.

Il est toujours possible de trouver une grammaire propre pour toute grammaire hors-contexte. En effet, on procède comme suit :

1. Rajouter une nouvelle règle $S' \rightarrow S$ tel que S' est le nouvel axiome (pour éviter que l'axiome ne figure dans la partie droite d'une règle) ;
2. Éliminer les règles $A \rightarrow \varepsilon$:
   - Calculer l'ensemble $E = \{A \in N \cup \{S'\} | A \xrightarrow{*} \varepsilon\}$ (les non-terminaux qui peuvent produire ε) ;
   - Pour tout $A \in E$, pour toute règle $B \rightarrow \alpha A \beta$ de R
     - Rajouter la règle $B \rightarrow \alpha\beta$
   - Enlever les règles $A \rightarrow \varepsilon$
3. Eliminer les règles $A \xrightarrow{*} B$, on applique la procédure suivante sur R privée de $S' \rightarrow \varepsilon$:
   - Calculer toutes les paires (A, B) tel que $A \xrightarrow{*} B$
   - Pour chaque paire (A, B) trouvée
     - Pour chaque règle $B \rightarrow u_1|...|u_n$ rajouter la règle $A \rightarrow u_1|...|u_n$
   - Enlever toutes les règles $A \rightarrow B$
4. Supprimer tous les non-terminaux non-productifs
5. Supprimer tous les non-terminaux non-atteignables.

4.4 Les formes normales

4.4.1 La forme normale de Chomsky

Soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire hors-contexte. On dit que G est sous forme normale de Chomsky si les règles de G sont toutes de l'une des formes suivantes :

- $A \rightarrow BC$, $A \in N$, $B, C \in N - \{S\}$
- $A \rightarrow a$, $A \in N$, $a \in V$
- $S \rightarrow \varepsilon$

L'intérêt de la forme normale de Chomsky est que les arbres de dérivations sont des arbres binaires ce qui facilite l'application de pas mal d'algorithmes.

Il est toujours possible de transformer n'importe quelle grammaire hors-contexte pour qu'elle soit sous la forme normale de Chomsky. Notons d'abord que si la grammaire est propre, alors cela facilitera énormément la procédure de transformation. Par conséquent, on suppose ici que la grammaire a été rendue propre. Donc toutes les règles de S sont sous l'une des formes suivantes :

- $S \rightarrow \varepsilon$
- $A \rightarrow w$, $w \in V^+$
- $A \rightarrow w$, $w \in ((N - \{S\}) + V)^*$

La deuxième forme peut être facilement transformée en $A \rightarrow BC$. En effet, si

$$w = au, u \in V^+$$

alors il suffit de remplacer la règle par les trois règles $A \rightarrow A_1A_2$, $A_1 \rightarrow a$ et $A_2 \rightarrow u$. Ensuite, il faudra transformer la dernière règle de manière récursive tant que $|u| > 1$.

Il reste alors à transformer la troisième forme. Supposons que :

$$w = w_1 A_1 w_2 A_2 ... w_n A_n w_{n+1} \text{ avec } w_i \in V^* \text{ et } A_i \in (N - \{S\})$$

La procédure de transformation est très simple. Si $w_1 \neq \varepsilon$ alors il suffit de transformer cette règle en :

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B_1 B_2 \\ B_1 &\rightarrow w_1 \\ B_2 &\rightarrow A_1 w_2 A_2 ... w_n A_n w_{n+1} \end{aligned}$$

sinon, elle sera transformée en :

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A_1 B \\ B &\rightarrow w_2 A_2 ... w_n A_n w_{n+1} \end{aligned}$$

Cette transformation est appliquée de manière récursive jusqu'à ce que toutes les règles soient des règles normalisées.

Exemple 31 : Soit la grammaire dont les règles de production sont : $S \rightarrow aSbS|bSaS|\varepsilon$, on veut obtenir sa forme normalisée de Chomsky. On commence par la rendre propre, donc on crée un nouvel axiome et on rajoute la règle $S' \rightarrow S$ puis on applique les transformations citées plus haut. On obtient alors la grammaire suivante : $S' \rightarrow S, S \rightarrow aSb|abS|bSa|baS$. En éliminant les formes $A \rightarrow B$, on obtient alors la grammaire propre $S' \rightarrow aSb|abS|bSa|baS, S \rightarrow aSb|abS|bSa|baS$. Nous allons à présent transformer juste les productions de S étant donné qu'elles sont les mêmes que celles de S'.

- Transformation de $S \rightarrow aSb$
  - $S \rightarrow AU$ (finale)
  - $A \rightarrow a$ (finale)
  - $U \rightarrow Sb$ qui sera transformée en :
    - $U \rightarrow SB$ (finale)
    - $B \rightarrow b$ (finale)
- Transformation de $S \rightarrow abS$
  - $S \rightarrow AX$ (finale)
  - $X \rightarrow bS$ qui sera transformée en :
    - $X \rightarrow BS$ (finale)
- Transformation de $S \rightarrow bSa$
  - $S \rightarrow BY$ (finale)
  - $Y \rightarrow Sa$ qui sera transformée en :
    - $Y \rightarrow SA$ (finale)
- Transformation de $S \rightarrow baS$
  - $S \rightarrow BZ$ (finale)
  - $Z \rightarrow aS$ qui sera transformée en :
    - $Z \rightarrow AS$ (finale)

4.4.2 La forme normale de Greibach

Soit $G = (V, N, S, R)$ une grammaire hors-contexte. On dit que G est sous la forme normale de Greibach si toutes ses règles sont de l'une des formes suivantes :

- $A \rightarrow aA_1A_2...A_n$, $a \in V$, $A_i \in N - \{S\}$

- $A \to a$, $a \in V$
- $S \to \varepsilon$

L'intérêt pratique de la mise sous forme normale de Greibach est qu'à chaque dérivation, on détermine un préfixe de plus en plus long formé uniquement de symboles terminaux. Cela permet de construire plus aisément des analyseurs permettant de retrouver l'arbre d'analyse associé à un mot généré. Cependant, la transformation d'une grammaire hors-contexte en une grammaire sous la forme normale de Greibach nécessite plus de travail et de raffinement de la grammaire. Nous choisissons de ne pas l'aborder dans ce cours.

4.5 Exercices de TD

Exercice 1 : Construisez un automate à pile pour les langages suivants. Donnez à chaque fois un mot accepté et un autre qui ne l'est pas en montrant les étapes d'analyse :

1. $\{a^{2n}b^n | n > 0\}$
2. $\{a^p b^q | p, q \geqslant 0, p \neq q\}$
3. $\{a^p b^q | p + q = 2k, k \geqslant 0\}$
4. $\{a^p b^q a^q b^p | p, q \geqslant 0\}$
5. $\{wc^n | w \in (a|b)^*, |w| = n, n \geqslant 0\}$
6. Les mots sur $\{a, b\}$ tel que tout préfixe contient plus de a que de b.

Exercice 2 : Construisez un automate à pile des langages suivants. Dites à chaque fois s'il s'agit d'un langage déterministe ou non, puis donnez une grammaire hors-contexte qui génère le langage :

1. $\{a^p b^q a^p | p, q \geqslant 0\}$
2. $\{a^n b^n | n > 0\} + \{a^{2n} b^n | n > 0\}$
3. Tous les mots sur $\{a, b\}$ ayant autant de a que de b
4. $\{a^n b^n | n > 0\} + \{a^m b^n | n, m > 0\}$

Exercice 3 :

1. Soit la grammaire $G = (\{\neg, f, t, \wedge, (,)\}, \{S\}, S, \{S \to S \wedge S | \neg S | (S) | t | f\})$.
   (a) Montrez que les mots $f \wedge t$, $\neg t \wedge t$ et $t \wedge t \wedge \neg f$ sont générés par G. Montrez que G est ambiguë.
   (b) Quel est le type du langage généré par G ? pourquoi ?
   (c) Si on attache G au contexte des expressions booléennes, dites en quoi l'ambiguïté de G dérange.
   (d) Donnez une forme propre de G, ainsi que sa forme normale de Chomsky.
2. Soit la grammaire $G' = (\{\neg, f, t, \wedge, (,)\}, \{S, T\}, S, \{S \to T \wedge S | \neg S | T, T \to (S) | t | f\})$.
   (a) Montrez que les mots $f \wedge t$, $\neg t \wedge t$ et $t \wedge t \wedge \neg f$ sont générés par G'. G' est-elle ambiguë ?
   (b) Qu'a-t-on fait à G pour obtenir G' ? Est-ce que cette transformation est unique ?