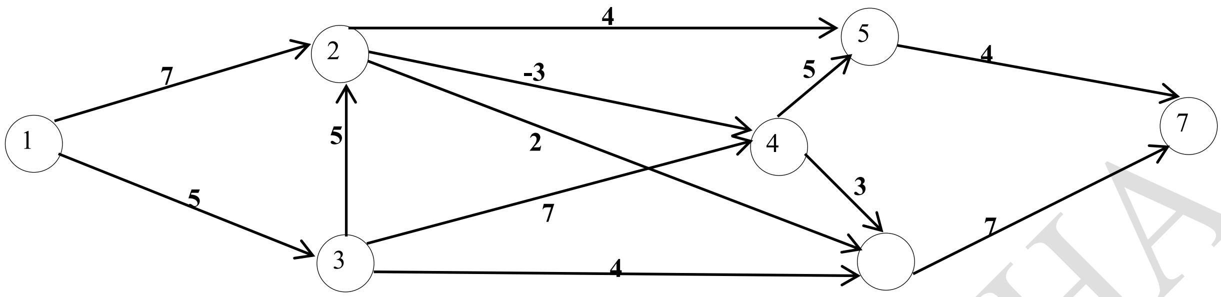
Exercices Supplémentaires

Exercice 1.

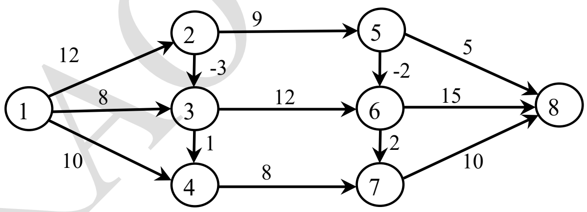
Soit le graphe valué (pondéré) suivant :



1. Décomposer le graphe en niveaux.
2. Trouver tous les chemins optimaux en démarrant du sommet source.

Exercice 2.

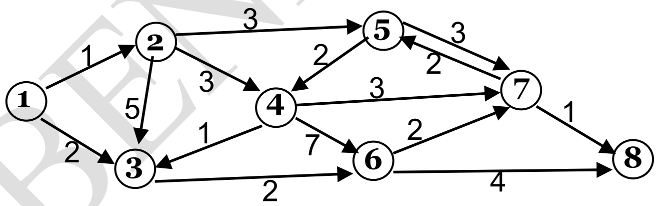
On considère le graphe pondéré ci-contre :



1. Donner les sommets source(s) et puits de ce graphe ? Justifier votre réponse.
2. Partitionner le graphe en niveaux.
3. Appliquer l'algorithme le plus adéquat afin de trouver les chemins de poids minimaux en démarrant du sommet 1 puis du sommet 3.

Exercice 3.

Soit le graphe pondéré suivant :



Trouver tous les chemins optimaux à partir du sommet 1 en appliquant l'algorithme adéquat (justifier votre choix).

Exercice 4.

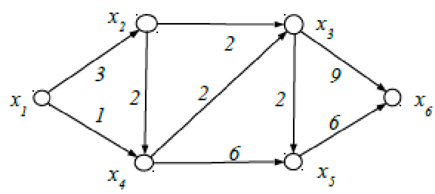
Soit G un graphe connexe et soit μ une chaine de longueur minimale reliant deux sommets x et x'. Montrer que toute sous chaine incluse dans μ reliant les deux sommets y et y', appartenant à μ, est aussi une chaine de longueur minimale.

Exercice 5.

Soit $R = (X, U, p)$ un réseau sur n sommets. On suppose connu un chemin γ de valeur optimale (*min* ou *max*) allant de $i = i_0$ a $j = i_{k+1}$ et passant par les sommets intermédiaires $i_1, i_2, \ldots, i_k$:

$\gamma(i, j) = (i = i_0) \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \ldots \ldots \rightarrow i_k \rightarrow (i_{k+1} = j)$.

1. Montrer que tous les chemins entre les sommets i_l et i_m de la forme : $i_l \rightarrow i_{l+1} \rightarrow \ldots \rightarrow i_m$, pour $l = 0, 1, \ldots, k$ et $m = l+1, \ldots, k+1$, sont aussi de valeur optimale.
2. En déduire deux méthodes pour retrouver les itinéraires des chemins de valeur optimale entre tous couples de sommets (matrices de routage des successeurs et des prédécesseurs).
3. A quoi se réduisent ces matrices de routage lorsqu'on s'intéresse aux problèmes de chemin de valeur optimale issus d'un sommet donné i_0 ou aboutissant a un sommet donne j_0.
4. Appliquer ces méthodes sur le graphe suivant en considérant les chemins de valeur minimale :



a) de tout sommet à tout sommet.
b) du sommet «1» à tout sommet.
c) de tout sommet au sommet «6».

Exercice 6.

Soit l'algorithme de *Dijkstra* qui permet de résoudre le problème des plus courts chemins issus d'un sommet donné s vers tous les autres sommets dans un graphe orienté $G=(X,U)$. Pour tout arc $(i,j) \in U$, on utilise la notation suivante :
$j \in succ(i)$ et c_{ij} est le poids de l'arc (i,j). Les sommets sont numérotés de 1 à n.

```
Algorithme DIJKSTRA
    Début
        S:= ∅;    D[s]:=0;    pred[s] :=0;
        Pour chaque i∈X et i<>s
            Faire
                D[i] :=∞; pred[i] :=0;
            Fait
        Tant que |S|< n
        Faire
            Choisir un sommet i∉S tel que D[i]={min{D[j] et j∉S};
            S:=S∪{i};
            Pour chaque j∈succ(i)
                Faire
                    Si D[j]>D[i]+cij Alors D[j]:= D[i]+cij ;
                                       Pred[j]:=i; fsi;
                Fait
        Fait
    Fin.
```

A la fin de l'exécution de l'algorithme nous obtenons dans $D[i]$ le poids du chemin optimal de s vers le sommet i et dans $pred(i)$ le prédécesseur du sommet i sur le chemin optimal de s à i.

On définit la notion de fiabilité dans un graphe comme une mesure de probabilité sur les arcs. On associe à tout arc (i, j) une valeur r_{ij} comprise entre 0 et 1 et qui représente la probabilité que l'arc soit opérationnel.
On définit la fiabilité d'un chemin γ dans un graphe comme étant le produit des fiabilités des arcs qui forment ce chemin $r(\gamma) = \pi_{(i,j)\in\gamma}\ r_{ij}$

On veut déterminer les chemins de fiabilité maximale dans un graphe orienté $G=(X,U)$ partants d'un sommet racine s.

1. Réécrire l'algorithme de Dijkstra (donné ci-dessous), en apportant les modifications nécessaires, pour qu'il puisse résoudre le problème de fiabilité maximale.
2. Appliquer l'algorithme de Dijkstra modifié sur le graphe donné par le tableau ci-dessous :

Arcs (i,j)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(4,6)	(5,4)	(5,6)
Fiabilité r_{ij}	0.6	0.4	0.2	0.2	0.5	0.8	0.7	0.1	0.3

3. Montrer qu'en employant les logarithmes, on peut ramener le problème de chemin de fiabilité maximale à celui du plus court chemin.

Exercice 7.

On veut construire une autoroute reliant les villes A et J. Des études préalables ont permis de préciser les prix de revient des différents tronçons possibles :

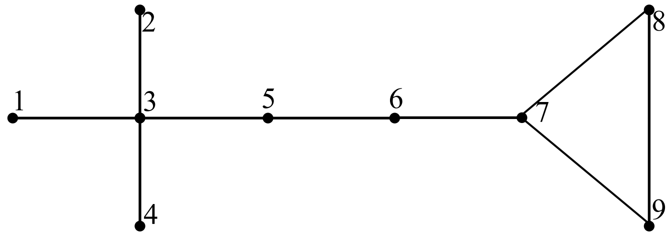
de A à B : 2, de A à I : 5, de B à C : 3, de B à E : 1, de C à H : 2, de D à J : 2, de E à F : 4, de E à H : 5, de E à I : 1, de F à G : 2, de G à D : 1, de H à D : 5, de I à F : 1.

1. Dessiner le graphe valué correspondant.
2. Partitionner ce graphe en niveaux.
3. Déterminer tous les chemins optimaux à partir de A.
4. Quel est le tracé le moins cher et quel est son coût ?

Exercice 8.

Un robot doit déposer une pièce à partir d'un endroit (lieu de stockage) vers huit (08) autres endroits où des machines de fabrication vont utiliser la pièce livrée par le robot.

Le schéma ci-dessous représente l'usine de fabrication où chacun des neuf (09) endroits est représenté par un sommet étiqueté par un nombre de 1 à 9. Ces endroits sont reliés par des couloirs qui sont représentés par des traits.



Nous voulons choisir le lieu de stockage et placer les huit (08) machines de production de façon optimale. Il faut savoir que le robot ne peut transporter qu'une pièce à la fois et qu'il y a suffisamment de pièces en stock.

1/ Calculer la matrice D, tel que un élément D_{ij} est la distance minimale (en nombre d'arêtes) parcourue en partant de i vers j.

2/ Déterminer le meilleur endroit pour stocker les pièces de tel façon à minimiser le parcours total du robot afin de déposer une pièce au niveau de chaque machine.