Université de M'hamedBouguerraBoumerdès
Faculté des sciences
Département d'Informatique

Module : Théorie des Langages. **Année : 2019-2020**
Filière : LI- S4 **Document : Série 3**

Chapitre 3 : AEF (corrigé)

Objectif : Modéliser par automate à états finis, minimiser, déterminer.

Exercice 01

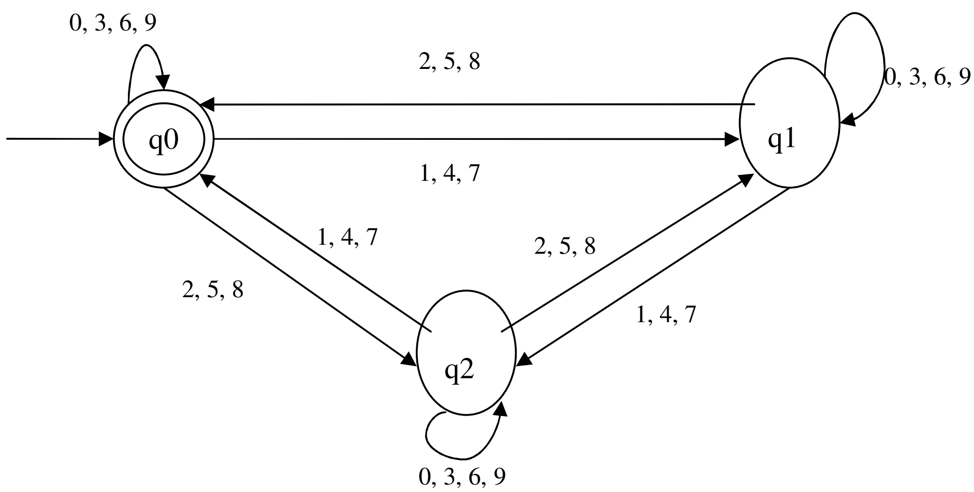
Proposez des automates déterministes permettant de reconnaître sur un alphabet $\Sigma=\{0,1,2,3...9\}$:

1. **Les multiples de 3 :**

Idée : un nombre est multiple de 3 donc il est divisible par 3.
Si on divise un nombre par 3, on a trois (3) cas :

- le reste de la division est 0 => le nombre est multiple de 3
- le reste de la division est 1 => le nombre n'est pas multiple de 3
- le reste de la division est 2 => le nombre n'est pas multiple de 3

donc on a 3 états pour notre automate qui correspondent aux ces 3 cas. Le premier cas est l'état initial et final. Il faut donc pour chaque état lire tous les chiffres de l'alphabets (de 0 à 9) et voir à quel état il correspond.
On obtient l'automate suivant :



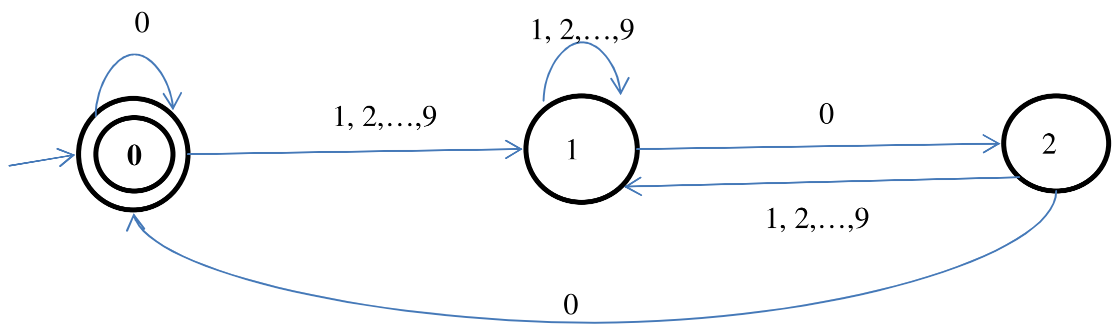
Nous allons vous montrer que ça marche pour quelques nombres par exemple :

- 52671 est multiple de 3 (on commence de l'état initial « 0 » et on arrive après la lecture de tous les chiffres à l'état final « 0 » => le nombre est accepté)
- 113587 n'est pas multiple de 3 (on commence de l'état initial « 0 » et on arrive après la lecture de tous les chiffres à l'état final « 1 » => le nombre n'est pas accepté car l'état « 1 » n'est pas un état final)

2. **Les multiples de 100**

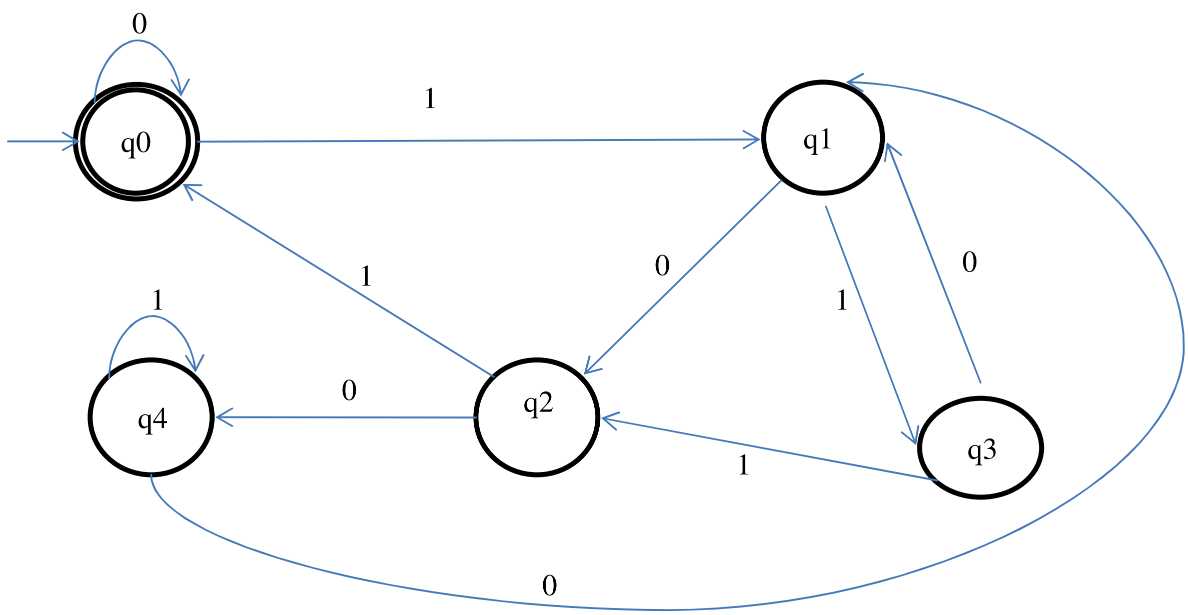
Idée : On sait que les multiples de 100 à part le zéro (0) se terminent au moins par 2 zéros (100, 526000, 36903540000, …), donc il suffit de s'assurer que quelques soit les nombres lus on termine toujours par la lecture de 2 zéros au moins.

On obtient l'automate suivant :



3. **Les multiples de 5 en binaire** ($\Sigma=\{0,1\}$)

Idée : même que pour l'exemple 1 sauf que l'alphabet est {0, 1} => il faut lire les nombres en binaire et les convertir en décimal pour savoir s'ils sont multiple de 5.
Les états qi avec i est le reste de la division (en décimal) du nombre sur 5

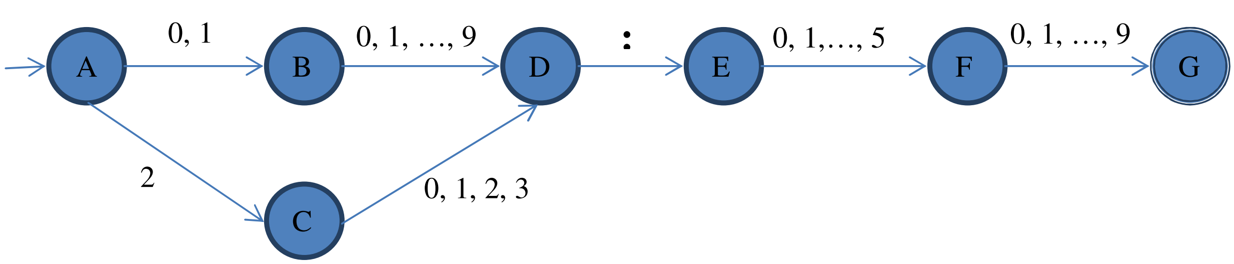


Exercice 02

Un automate déterministe permettant de reconnaître un horaire donné sous la forme 00:00

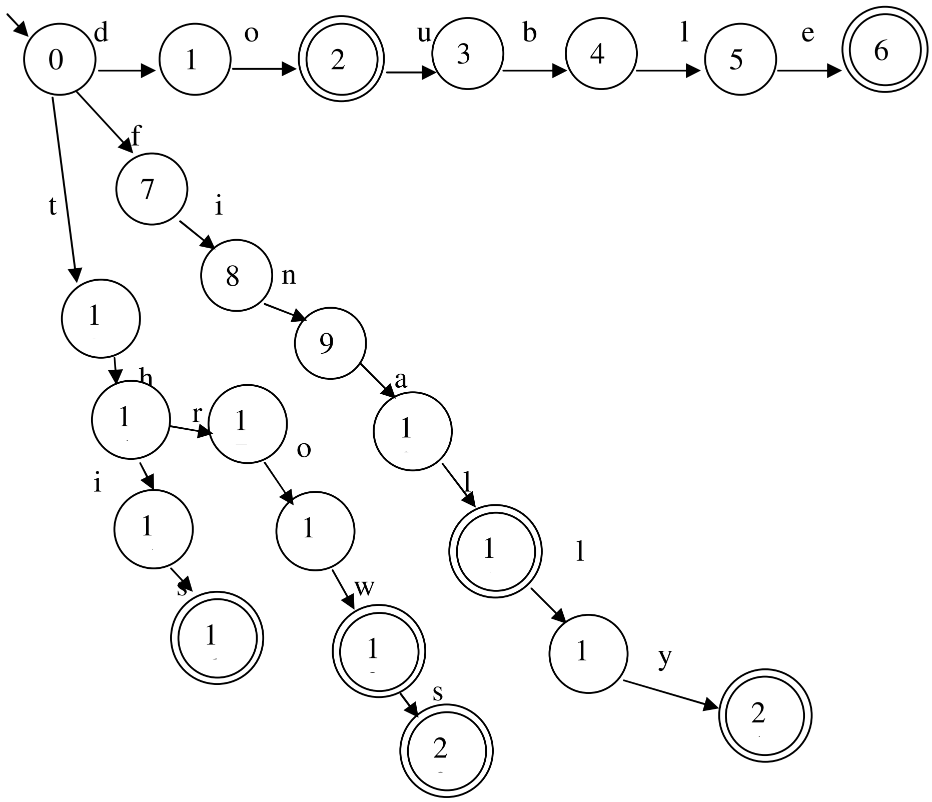
Idée : Σ= {0, 1, 2, …, 9, **:** }

On a les horaires de 00 :00 à 19 :59 et de 20 :00 à 23 :59



Exercice 03

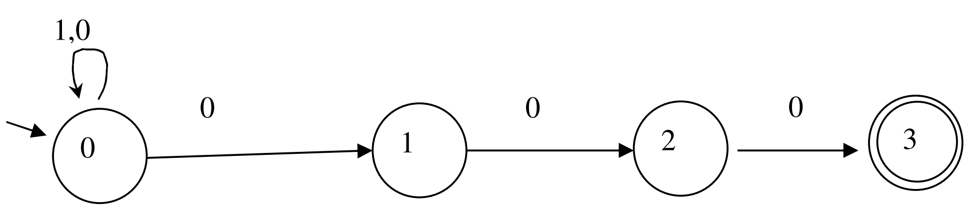
Les automates finis sont utilisés en compilation (programme 3eme Année) pour constituer des analyseurs lexicaux, qui permettent notamment de repérer les mots-clés d'un langage de programmation. Donner l'automate qui permet de reconnaitre l'ensemble de mots-clés suivant :do, double, final, finally, this, throw, throws.



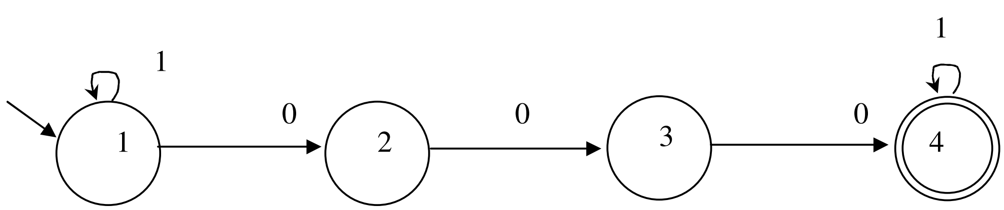
Exercice 04

Construire des AFD qui acceptent les langages suivants sur l'alphabet {0, 1} :

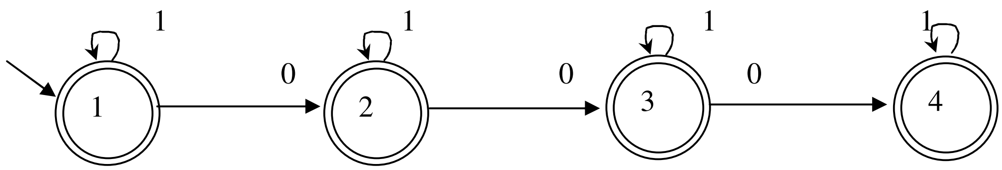
1. **L'ensemble des mots qui se terminent par 000.**



2. **L'ensemble des mots qui contiennent exactement trois zéros consécutifs.**

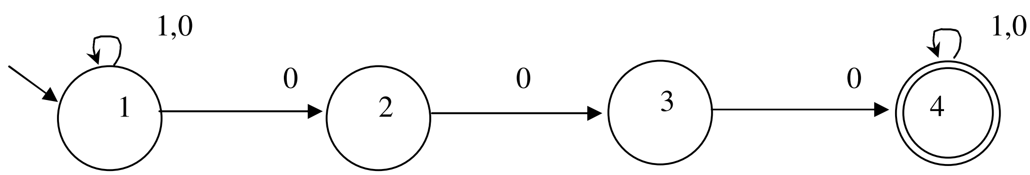


3. L’ensemble des mots qui contiennent au plus trois zéros consécutifs.

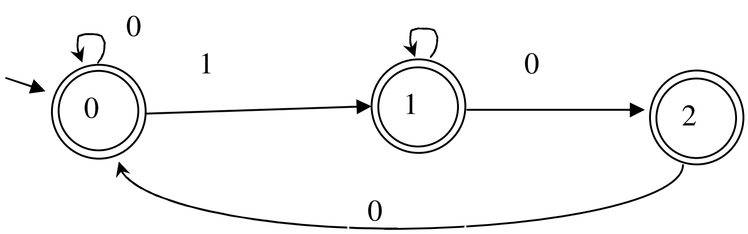


4. L’ensemble des mots comportant un nombre pair de 1 et un nombre pair de 0. (vu dans le cours)

5. L’ensemble des mots qui contiennent au moins la sous séquence 3 zéros consécutifs (000).



6. L’ensemble des mots qui ne contiennent pas le sous mot 101.
(ce langage est le complément de « L’ensemble des mots qui contiennent le sous mot 101 », il faut penser à identifier l’automate complément présenté dans le chapitre 4)



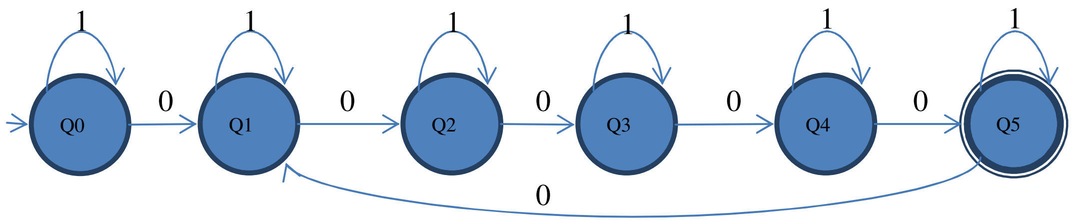
Exercice 05

Les AF minimums équivalents aux automates suivants :

1. ({Q0,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5), {0,1}, Δ1, Q0, {Q5})

Δ1	0	1
Q0	Q1	Q0
Q1	Q2	Q1
Q2	Q3	Q2
Q3	Q4	Q3
Q4	Q5	Q4

Q5	Q1	Q5



- **Etape 1 :** éliminer les états inaccessibles (il faut dessiner l'automate pour voir les états inaccessibles)

On voit qu'à partir de l'état initial Q0, on peut atteindre tous les états de l'automate =>pas d'états inaccessibles.

- **Etape 2** : construction des classes d'équivalence β

La classe β0 : deux ensembles : les états finaux, les états non finaux
Donc β0 ≡ {{Q0, Q1, Q2, Q3, Q4}, {Q5}}

On commence par vérifier Q0 avec les autres états de son ensemble :

Δ1 (Q0, 0) = Q1
Δ1 (Q1, 0) = Q2 } Q1 β0 Q2

Δ1 (Q0, 1) = Q0
Δ1 (Q1, 1) = Q1 } Q0β0 Q1

Donc Q0 et Q1 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q0 β1 Q1

Δ1 (Q0, 0) = Q1
Δ1 (Q2, 0) = Q3

Δ1 (Q0, 1) = Q0
Δ1 (Q2, 1) = Q2

Donc Q0 et Q2 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q0 β1 Q2

Δ1 (Q0, 0) = Q1
Δ1 (Q3, 0) = Q4

Δ1 (Q0, 1) = Q0
Δ1 (Q3, 1) = Q3

Donc Q0 et Q3 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q0 β1 Q3

Δ1 (Q0, 0) = Q1
Δ1 (Q4, 0) = Q5 } Q1 ~~β0~~ Q5

Δ1 (Q0, 1) = Q0
Δ1 (Q4, 1) = Q4

Donc Q0 et Q4 ne resteront pas dans la même classe dans β1. ⇔ Q0 ~~β1~~ Q4

On fait la même chose avec Q1, Q2, Q3, on remarque que :

Q1 β1 Q2 et Q1 β1 Q3 et Q1 ~~β1~~ Q4
Q2 β1 Q3 et Q3 ~~β1~~ Q4
Q3 ~~β1~~ Q4

Donc : β1 ≡ {{Q0, Q1, Q2, Q3}, {Q4}, {Q5}}

PS : On peut aussi avec l'expérience remarquer que puisque Δ1 (Q4, 0) = Q5 et Q5 n'est pas dans le même ensemble que Q0, Q1, Q2, Q3, Q4 et que tous les autres transitions vont vers des états du même groupe que Q4 va sortir de cet ensemble.

On refait la même chose avec le nouvel ensemble {Q0, Q1, Q2, Q3}, on remarque :

$\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q0, 0) = Q1 \\ \Delta 1\ (Q1, 0) = Q2\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q0, 1) = Q0 \\ \Delta 1\ (Q1, 1) = Q1\end{array}\right\}$

Donc Q0 et Q1 resteront dans la même classe dans β2⇔ Q0 β2 Q1

$\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q0, 0) = Q1 \\ \Delta 1\ (Q2, 0) = Q3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q0, 1) = Q0 \\ \Delta 1\ (Q2, 1) = Q2\end{array}\right\}$

Donc Q0 et Q2 resteront dans la même classe dans β2⇔ Q0 β2 Q2

$\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q0, 0) = Q1 \\ \Delta 1\ (Q3, 0) = Q4\end{array}\right\}$ Q1 ~~β1~~ Q4 $\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q0, 1) = Q0 \\ \Delta 1\ (Q3, 1) = Q3\end{array}\right\}$

Donc Q0 et Q3 ne resteront pas dans la même classe dans β2⇔ Q0 ~~β2~~ Q3
Même chose pour Q1, Q2, on remarque que :

Q1 β2 Q2 et Q1~~β2~~ Q3
Q2~~β2~~ Q3

Donc : β2 ≡ {{Q0, Q1, Q2}, {Q3}, {Q4}, {Q5}}

On refait la même chose avec le nouveau ensemble {Q0, Q1, Q2}, on remarque :

Q0 β3 Q1 et Q0~~β3~~ Q2
Q1~~β3~~ Q2

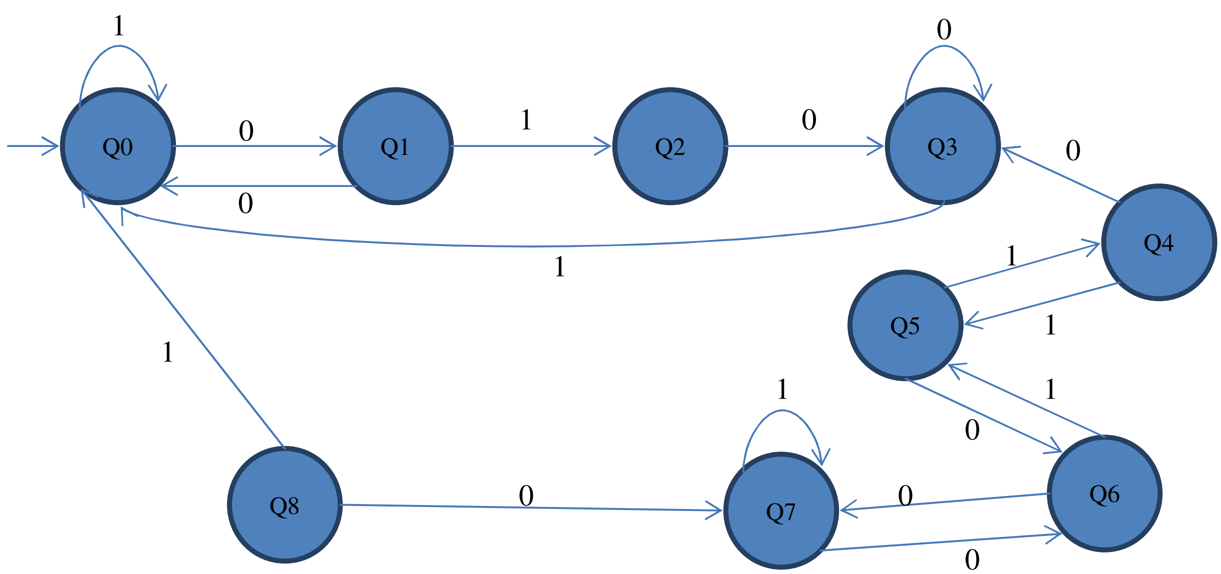
Donc : β3 ≡ {{Q0, Q1}, {Q2}, {Q3}, {Q4}, {Q5}}

On refait la même chose avec le nouvel ensemble {Q0, Q1}, on remarque : Q0~~β4~~ Q1
Donc : β4 ≡ {{Q0}, {Q1}, {Q2}, {Q3}, {Q4}, {Q5}}

On s'arrête. On remarque que les classes sont les états de l'automate initial donc l'automate est déjà minimal, il reste tel qu'il est.

2. ({Q0,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8}, {0,1}, Δ2, Q0, {Q3})

Δ2	0	1
Q0	Q1	Q0
Q1	Q0	Q2
Q2	Q3	/
Q3	Q3	Q0
Q4	Q3	Q5
Q5	Q6	Q4
Q6	Q7	Q5
Q7	Q6	Q7
Q8	Q7	Q0



- **Etape 1 :** éliminer les états inaccessibles

On voit qu'à partir de l'état initial Q0, on peut atteindre les états Q1, Q2 et Q3 =>les états Q4, Q5, Q6, Q7, Q8 sont des états inaccessibles. (à éliminer)

- **Etape 2** : construction des classes d'équivalence β

La classe β0 : deux ensembles : les états finaux, les états non finaux
Donc β0 ≡ {{Q0, Q1, Q2}, {Q3}}

On commence par vérifier Q0 avec les autres états de son ensemble :

Δ1 (Q0, 0) = Q1	Δ1 (Q0, 1) = Q0
Δ1 (Q1, 0) = Q0	Δ1 (Q1, 1) = Q2

Donc Q0 et Q1 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q0 β1 Q1

Δ1 (Q0, 0) = Q1	Q1 ~~β0~~ Q3	Δ1 (Q0, 1) = Q0
Δ1 (Q2, 0) = Q3		Δ1 (Q2, 1) = /

Donc Q0 et Q2 ne resteront pas dans la même classe dans β1⇔ Q0 ~~β1~~ Q2

$\Delta1\ (Q1, 0) = Q0$
$\Delta1\ (Q2, 0) = Q3$ $\quad Q0\cancel{\beta0}\,Q3$

$\Delta1\ (Q1, 1) = Q2$
$\Delta1\ (Q2, 1) = /$

Donc Q1 et Q2 ne resteront pas dans la même classe dans $\beta1 \Leftrightarrow Q1\cancel{\beta1}\,Q2$

=>$\beta1 \equiv \{\{Q0, Q1\}, \{Q2\}, \{Q3\}\}$

On refait la même chose avec le nouveau ensemble {Q0, Q1}, on remarque :

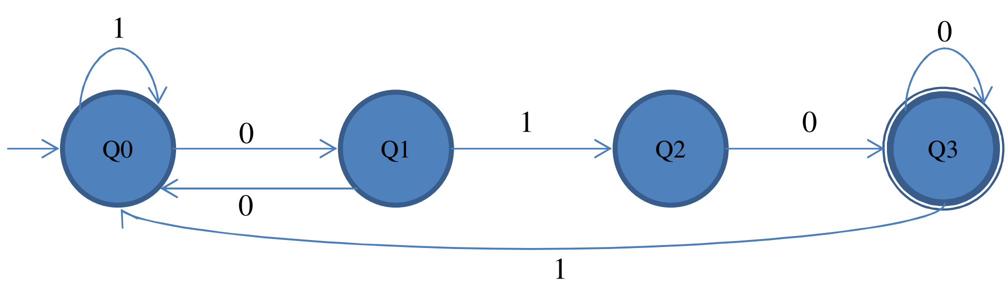
$\Delta1\ (Q0, 0) = Q1$
$\Delta1\ (Q1, 0) = Q0$

$\Delta1\ (Q0, 1) = Q0$
$\Delta1\ (Q1, 1) = Q2$ $\quad Q0\ \cancel{\beta1}\ Q2$

Donc Q0 et Q1 ne resteront pas dans la même classe dans $\beta2 \Leftrightarrow Q0\ \cancel{\beta2}\ Q1$

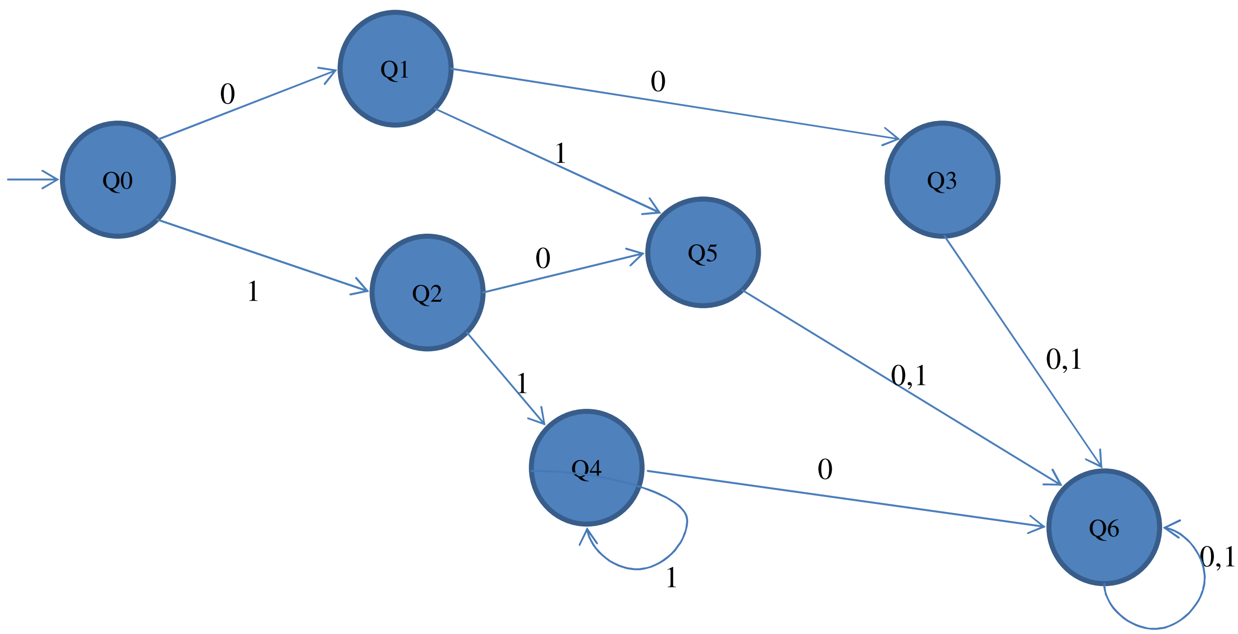
Donc : $\beta2 \equiv \{\{Q0\}, \{Q1\}, \{Q2\}, \{Q3\}\}$

On s'arrête, donc l'automate minimal est :



3. ({Q0,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5, Q6}, {0,1}, Δ3, Q0, {Q1,Q3,Q5,Q6})

Δ3	0	1
Q0	Q1	Q2
Q1	Q3	Q5
Q2	Q5	Q4
Q3	Q6	Q6
Q4	Q6	Q4
Q5	Q6	Q6
Q6	Q6	Q6



- **Etape 1 :** éliminer les états inaccessibles

On voit qu'à partir de l'état initial Q0, on peut atteindre tous les états de l'automate =>pas d'états inaccessibles.

- **Etape 2** : construction des classes d'équivalence β

La classe β0 : deux ensembles : les états finaux, les états non finaux
Donc β0 ≡ {{Q0, Q2, Q4}, {Q1, Q3, Q5, Q6}}

On commence par le premier ensemble{Q0, Q2, Q4} :
Δ1 (Q0, 0) = Q1 Δ1 (Q0, 1) = Q2
Δ1 (Q2, 0) = Q5 Δ1 (Q2, 1) = Q4

Donc Q0 et Q2 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q0 β1 Q2

Δ1 (Q0, 0) = Q1 Δ1 (Q0, 1) = Q2
Δ1 (Q4, 0) = Q6 Δ1 (Q4, 1) = Q4

Donc Q0 et Q4 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q0 β1 Q4

Δ1 (Q2, 0) = Q5 Δ1 (Q2, 1) = Q4
Δ1 (Q4, 0) = Q6 Δ1 (Q4, 1) = Q4

Donc Q2 et Q4 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q2β1 Q4

Puis l'ensemble {Q1, Q3, Q5, Q6} :

$\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q1, 0) = Q3 \\ \Delta 1\ (Q3, 0) = Q6\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q1, 1) = Q5 \\ \Delta 1\ (Q3, 1) = Q6\end{array}\right\}$

Donc Q1 et Q3 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q1β1 Q3

$\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q1, 0) = Q3 \\ \Delta 1\ (Q5, 0) = Q6\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q1, 1) = Q5 \\ \Delta 1\ (Q5, 1) = Q6\end{array}\right\}$

Donc Q1 et Q5 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q1 β1 Q5

$\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q1, 0) = Q3 \\ \Delta 1\ (Q6, 0) = Q6\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\Delta 1\ (Q1, 1) = Q5 \\ \Delta 1\ (Q6, 1) = Q6\end{array}\right\}$

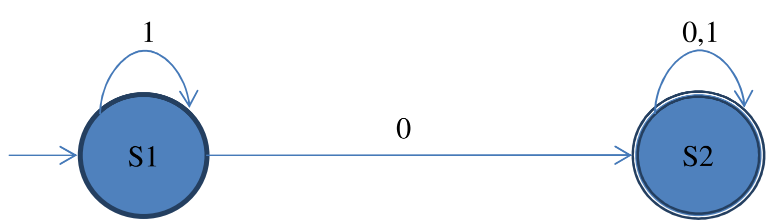
Donc Q1 et Q6 resteront dans la même classe dans β1⇔ Q1 β1 Q6

On a aussi : Q3β1 Q5, Q3 β1 Q6, Q5β1 Q6

Donc β1 ≡ {{Q0, Q2, Q4}, {Q1, Q3, Q5, Q6}}

Puisque β0 =β1 alors on s'arrête, l'automate minimal est construit de 2 états :

S1 ≡ {Q0, Q2, Q4} l'état initial et S2 ≡ {Q1, Q3, Q5, Q6} l'état final.



Exercie 06

Construire les AFD équivalents aux AFN suivants :

a. ({q, p, r, s}, {a,b}, δ1 p, { s})   avec :

δ1	A	b
p	p,q	p
q	r	r
r	s	/
s	s	s

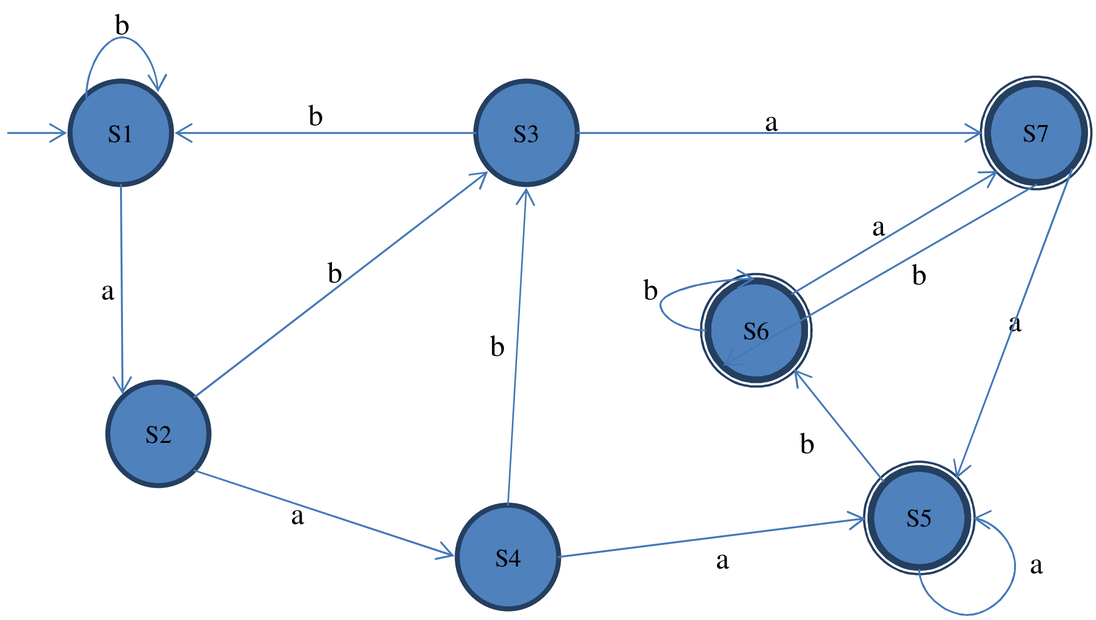
Etape1 : Identifier les états en commençant à partir de l'ensemble {p}

δ1	**a**	**b**
P	**p,q**	**p**
p,q	**p,q,r**	**p,r**
p,r	**p,q,s**	**p**
p,q,r	**p, q,r,s**	**p,r**
p, q,r,s	**p, q,r,s**	**p,r,s**
p,r,s	**p,q,s**	**p,r,s**
p,q,s	**p, q,r,s**	**p,r,s**

Etape2 : Renuméroter les ensembles

δ1	**a**	**b**
p (S1)	**p,q (S2)**	**p (S1)**
p,q (S2)	**p,q,r (S4)**	**p,r (S3)**
p,r (S3)	**p,q,s (S7)**	**p (S1)**
p,q,r (S4)	**p, q,r,s (S5)**	**p,r(S3)**
p, q,r,s (S5)	**p, q,r,s (S5)**	**p,r,s (S6)**
p,r,s (S6)	**p,q,s (S7)**	**p,r,s (S6)**
p,q,s (S7)	**p, q,r,s (S5)**	**p,r,s (S6)**

On obtient l'automate suivant :



b. ({q, p, r, s}, {0,1}, δ2, p, {q, s}) avec :

δ2	0	1
p	q,s	q
q	r	r,q
r	s	P
s	/	P

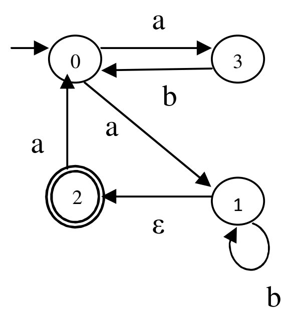
Etape1 et 2 : Identifier les états en commençant à partir de l'ensemble {p} puis Renuméroter les ensembles

δ2	**0**	**1**
p (S1)	**q,s (S3)**	**q (S2)**
q (S2)	**r (S4)**	**r,q (S5)**
q,s (S3)	**r (S4)**	**p,q,r (S6)**
r (S4)	**s (S7)**	**p (S1)**
r,q (S5)	**r,s (S8)**	**p,q,r (S6)**
p,q,r (S6)	**q,r,s (S9)**	**p,q,r (S6)**
s (S7)	**/**	**P (S1)**
r,s (S8)	**s (S7)**	**P (S1)**
q,r,s (S9)	**r,s (S8)**	**p,q,r (S6)**

C’est à vous de le dessiner.

Exercice 07

1. Soit l'automate



Ef(0)={0}

Ef(1)={1,2}

Ef(2)={2}

Ef(3)={3}

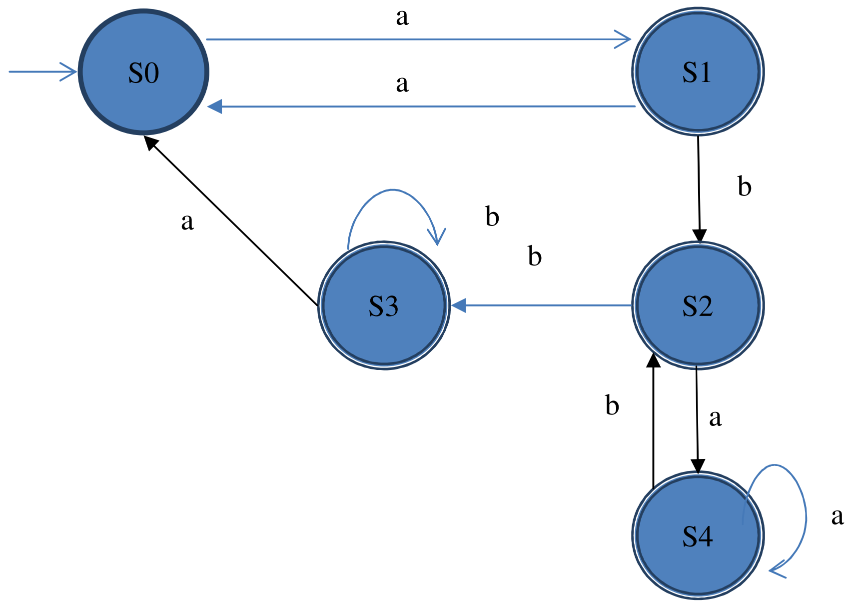
Etape 1 : calculer les ensembles e-fermeture(Ef) en commençant à partir de ef({0})

	A	b
Ef{ 0}= {0}	**Ef{3,1}=** **312**	**-**
123	**Ef{0}=** **0**	**Ef{0,1}=** **012**
012	**Ef{3,1,0}=** **0123**	**Ef{1}=** **12**
12	**Ef{0}=** **0**	**Ef{1}=** **12**
0123	**Ef{0,1,3}=** **0123**	**Ef{1,0}=** **120**

Etape2 : renommer les états

		A		b	
S0	**0**	**312**	**S1**	**-**	
S1	**123**	**0**	**S0**	**120**	**S2**
S2	**012**	**0123**	**S4**	**12**	**S3**
S3	**12**	**0**	**S0**	**12**	**S3**
S4	**0123**	**0123**	**S4**	**120**	**S2**

Etape 3 : dessiner l'automate (fixer l'état initial et les états finaux)



1) Minimisation
   a. Pas d'états inaccessibles
   b. Construction des β_i

$\beta_0 = \{\{S0\}\ \ \{S1,S2,S3,S4\}\}$

$\beta_1 = \{\{S0\}\ \ \{S1, S3\},\{S2,S4\}\}$

$\beta_2 = \{\{0\}\ \ \{1\}\ \{2\}\ \{3\},\{4\}\}$

$\beta_3 = \{\{0\}\ \ \{1\}\ \{2\}\ \{3\}\ \{4\}\}$

L'automate déterministe est également minimal.