Exercice10
Comme L1 et L2 sont des langage réguliers et le complément d'un langage régulier est régulier donc $\overline{L3}$ est régulier. Les langages réguliers sont fermés par intersection. Comme on a $L = L1 \cap L2 \cap \overline{L3}$ donc L est un langage régulier.

Exercice11
1. FG(L)={w∈ X^* tq ∃ u∈ X^* wu∈L}

- Reg(L) → Reg(FG(L))

L est régulier donc il existe A tq L(A)=L avec A(X,S,S_0,F,II) un automate d'état finie réduit qui accepte L

pour démontrer que FG(L) est régulier on doit trouver l'automate A' qui l'accepte
soit l'automate A' qui reconnaît FG(L) A'(X,S,S_0, F', II) avec F'=S'.

w'∈ L donc on a $S_0 \vdash^{w'}_{A} S_f$ avec $S_f \in F$ soit w'=wu donc on a $S_0 \vdash^{wu}_{A} S_f \rightarrow S_0 \vdash^{w}_{A} S_i \vdash^{u}_{A} S_f$
on pour A et A' les mêmes S_0, S et II donc on a $S_0 \vdash^{w}_{A} S_i \rightarrow S_0 \vdash^{w}_{A'} S_i$ S_i état final donc w∈ FG(A)
L(A')= FG(L(A))=FG(L), L est régulier alors FG(L) est aussi.

- Reg(FG(L)) → Reg(L)

w∈ FG(L) → $S'_0 \vdash^{w}_{A'} S'_k$ $S'_k \in F'$ avec comme II= II' , $S'_0 \vdash^{w}_{A'} S_k \rightarrow S_0 \vdash^{w}_{A} S_k$ ...(1)
A est réduit ↔ tous les états sont accessibles et coaccessibles
donc S_k est coaccessible → ∃ u∈ X^* tq $S_k \vdash^{u}_{A} S_f$ $S_f \in F$
(1) → $S_0 \vdash^{w}_{A} S_k \vdash^{u}_{A} S_f$ wu ∈L(A) → wu ∈L

2. FD(L)={w∈ X^* tq ∃ u∈ X^* uw∈L}

- Reg(L) → Reg(FD(L))

L est régulier donc il existe A tq L(A)=L avec A(X,S,S_0,F,II) un automate d'état finie réduit qui accepte L

pour démontrer que FD(L) est régulier on doit trouver l'automate A' qui l'accepte
soit l'automate A' qui reconnaît FG(L) A'(X,S,S'_0, F, II) avec S'_0=S .

w'∈ L donc on a $S_0 \vdash^{w'}_{A} S_f$ avec $S_f \in F$ soit w'=uw donc on a $S_0 \vdash^{uw}_{A} S_f \rightarrow S_0 \vdash^{u}_{A} S_i \vdash^{w}_{A} S_f$
on a S=S' et II=II' donc on a $S_i \vdash^{w}_{A} S_f \rightarrow S_i \vdash^{w}_{A'} S_f$ S_i état initial donc w∈ FD(A)
L(A')= FD(L(A))=FD(L), L est régulier alors FD(L) est aussi.

- Reg(FD(L)) → Reg(L)

w∈ FD(L) → $S'_k \vdash^{w}_{A'} S'_f$ $S'_k \in S_0'$ avec comme II= II' et S=S', $S'_k \vdash^{w}_{A'} S'_f \rightarrow S_k \vdash^{w}_{A} S_f$ ...(1)
A est réduit ↔ tous les états sont accessibles et coaccessibles
donc S_k est accessible → ∃ u∈ X^* tq $S_k \vdash^{u}_{A} S_f$ $S_k \in S_0$
(1) → $S_0 \vdash^{u}_{A} S_k \vdash^{w}_{A} S_f$ uw ∈L(A) → uw ∈L

3. FGP(L)={w∈ X^* tq ∃ u∈ X^+ wu∈L}

on a deux cas :
- le premier A(X,S,S_0,F,II) avec $(S_f,x,S_i) = \varnothing$ càd aucun arcs sortant depuis l'état final. l'automate A' qui reconnaît FGP(L) A'(X,S,S_0, F', II) avec F'=S-F.
- le deuxième A(X,S,S_0,F,II) avec $(S_f,x,S_i) \neq \varnothing$ càd des arcs sortant depuis l'état final. l'automate A' qui reconnaît FGP(L) A'(X,S,S_0, F', II) avec F'=S.

4. FDP(L)={$w \in X^*$ tq $\exists$ $u \in X^+$ $uw \in L$}
on a deux cas :

- le premier $A(X,S,S_0,F,II)$ avec $(S_i,x,S_0) = \varnothing$ càd aucun arcs entrant vers l'état initial. l'automate A' qui reconnaît FDP(L) $A'(X,S,S'_0, F, II)$ avec $S'_0=S-S_0$.
- le deuxième $A(X,S,S_0,F,II)$ avec $(S_i,x,S_0) \neq \varnothing$ càd des arcs entrant vers l'état initial. l'automate A' qui reconnaît FDP(L) $A'(X,S,S_0, F, II)$ avec $S'_0=S$

5. $L//u = \{w \in X^* \ / \ uw \in L\}$

L est régulier donc il existe A tq L(A)=L avec $A(X,S,S_0,F,II)$ un automate d'état finie réduit qui accepte L.
pour démontrer que L//u est régulier on doit trouver l'automate A' qui l'accepte
soit l'automate A' qui reconnaît L//u $A'(X,S,S'_0, F, II)$.

$w' \in L$ donc on a $S_0 \vdash^{w'}_A S_f$ avec $S_f \in F$ soit w'=uw donc on a $S_0 \vdash^{uw}_A S_k \rightarrow S_0 \vdash^{u}_A S_i \vdash^{w}_A S_k$
on pour A et A' les mêmes S et II donc on a $S_i \vdash^{w}_A S_f \rightarrow S'_0 \vdash^{w}_{A'} S_f$ $w \in L//u$
L est régulier alors L//u est aussi.

Exercice12
$0\,1\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //0 = 1\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$0\,1\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //1 = \varnothing$

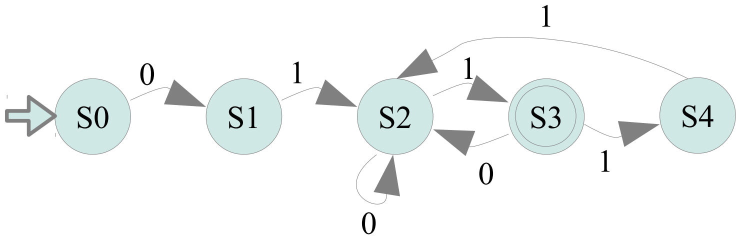
$1\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //1 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$1\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //0 = \varnothing$

$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //0 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //1 = (0(1\,0)^* \cup 11)((1\,0)^* \cup 111)^*[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup \varepsilon$
$= (0(1\,0)^* \cup 11)[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup \varepsilon$
$= (0(1\,0)^*[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup 11[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1) \cup \varepsilon$
$= (0[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup 11[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1) \cup \varepsilon$
$= (0 \cup 11)[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup \varepsilon$

$(0 \cup 11)[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup \varepsilon //0 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$(0 \cup 11)[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup \varepsilon //1 = 1[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$

$1[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //0 = \varnothing$
$1[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //1 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$

on peut voir que $0\,1\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \equiv 0\,1\,(1\,0 \cup 111 \cup 0)^*\,1$



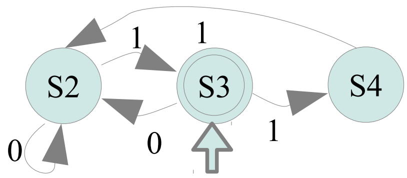
1ère méthode
On parcourt l'automate et on change l'état initial

2ème méthode
$0\,1\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //01 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 // 0 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 // 111 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 // 10 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1$
$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 //1 = 0(1\,0)^*[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*\,1 \cup 11[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*1 \cup \varepsilon$
$= \varepsilon \cup (0 \cup 11)\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*1$

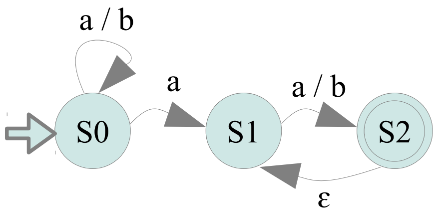
$\varepsilon \cup (0 \cup 11)\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*1 //0 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*1$
$\varepsilon \cup (0 \cup 11)\,[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*1 //1 = 1[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0\,]^*1$

$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1//0 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1$
$[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1//1 = \varepsilon \cup (0 \cup 11)[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1$

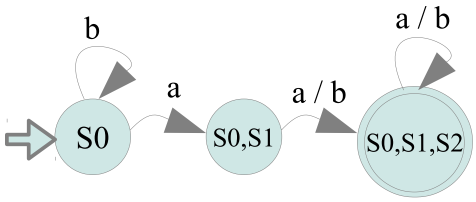
$1[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1//0 =$
$1[((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1 // 1 = [((1\,0)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1$



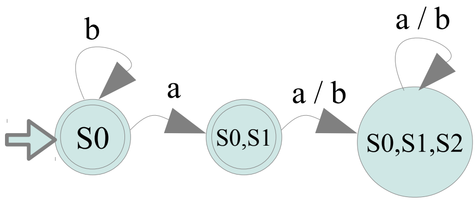
Exercice13

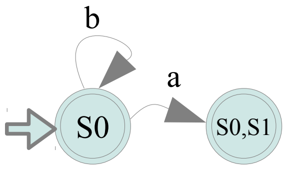


	a	b
S0	{S0,S1}	S0
{S0,S1}	{S0,S1,S2}	{S0,S1,S2}
{S0,S1,S2}	{S0,S1,S2}	{S0,S1,S2}



Le complément

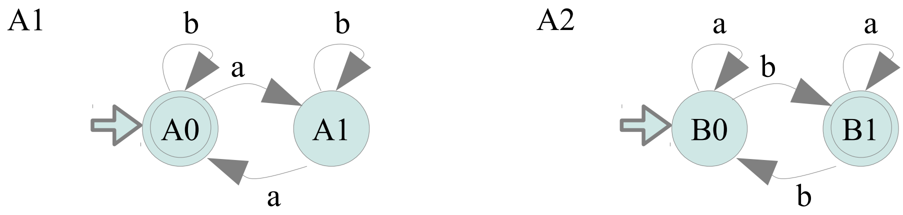




$G<X,V,P>$ P: $\{S \rightarrow bS / a\}$

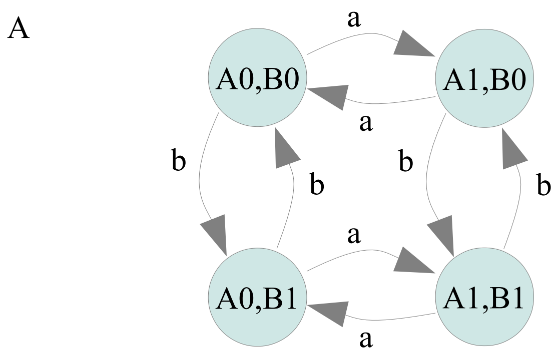
Exercice15

1.



2.

	a	b
{A0,B0}	{A1,B0}	{A0,B1}
{A1,B0}	{A0,B0}	{A1,B1}
{A0,B1}	{A1,B1}	{A0,B0}
{A1,B1}	{A0,B1}	{A1,B0}



3. A est automate à états finis qui reconnaisse le langage L1∩ L2 donc L1∩ L2 est régulier
ou encore en utilisant la fermeture, l'intersection de deux langages réguliers est un langage régulier comme on a L1 et L2 régulier donc L1∩ L2 est régulier.