Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté d'Informatique

Cours Théorie des langages (THL)

Chapitre 5 : Les Expressions Régulières (ER)

2 ième année ING 2023/2024

Dr H.BELHADI hib.belhadi@gmail.com

Expressions Régulières

Introduction :

Les langages réguliers sont les langages :

- **générés** par des grammaires de type 3 appelées grammaires régulières.
- **reconnus** par des automates d'états finis. On dit aussi que c'est des langages reconnaissables.

Les mots de tels langages possèdent une forme particulière et peuvent être dénotés par des **expressions régulières (ou expressions rationnelles)**.

Une **expression régulière** est une suite de caractères, appelée motif (ou pattern en anglais), qui décrit ou dénote un ensemble de mots.

Expressions Régulières

Définition :

Les expressions régulières sur **un alphabet X** sont définies d'une manière inductive comme suit :

Cas de base :

- **$\emptyset$** est une expression régulière qui **décrit le langage vide**
- **ε** est une expression régulière qui **décrit le langage {ε}**
- **a** est une expression régulière $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{X}$ qui **décrit le langage {a}**

Expressions Régulières

Définition (suite):

Cas d'induction :

Si r et s sont deux expressions régulières sur X décrivant respectivement les langages R et S alors :

- **r+s** est une expression régulière qui **décrit le langage R∪S**
- **r.s** est une expression régulière qui **décrit le langage R.S**
- **r*** est une expression régulière qui **décrit le langage R***
- **(r)** est une expression régulière qui **décrit le langage R**

Expressions Régulières

Exemples:

- $E_1 = a+b$ **dénote le langage $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$**
- $E_2 = a.b$ **dénote le langage $\{a\}.\{b\} = \{ab\}$**
- $E_3 = (a+b).a.b$ **dénote le langage $\{a, b\}.\{ab\} = \{aab, bab\}$**
- $E_4 = a^*$ **dénote le langage $\{a\}^* = \{a^n / n \geq 0\}$**

Remarque Le symbole de concaténation peut être omis. Par exemple, on peut écrire ab au lieu de a.b

Expressions Régulières

Exemples:

- $E_5 = a^*+b^*$ **dénote le langage $\{a\}^* \cup \{b\}^*$**

- $E_6 = (a+b)^*$ **dénote le langage $\{a, b\}^*$ qui correspond à tous les mots sur $\{a, b\}$**

- $E_7 = (a+b)^*aab$ **dénote tous les mots de $\{a, b\}^*$ se terminant par aab**
- $E_8 = (a+b)^*aba(a+b)^*$ **dénote tous les mots de $\{a, b\}^*$ contenant le facteur aba.**

Expressions Régulières

Définition (Equivalence)

Deux expressions régulières E_1 et E_2 sont **équivalentes**, notées $E_1 \equiv E_2$, si et seulement si elles **dénotent le même langage**.

Exemple : On veut décrire le langage $\{a, b\}^+$.

E_1= (a+b)(a+b)* /* une lettre a ou b suivie d'une séquence aléatoire de a et b */

E_2= (a+b)*(a+b) /* Une suite aléatoire de a et b suivie par une lettre a ou b */

Dans les deux cas, le langage dénoté est une suite aléatoire de a et b avec au minimum une lettre : a ou b. Donc, $E_1 \equiv E_2$.

Remarque : Pour simplifier les expressions, nous supposons que l'étoile '*' est plus prioritaire que la concaténation '.' qui est plus prioritaire que l'addition '+' : étoile>concaténation>addition

Expressions Régulières

Propriétés sur les expressions régulières :

1. **Commutativité :** $p+q \equiv q+p$
2. **Associativité :** $p+(q+r) \equiv (p+q)+ r$ $\quad$ $p(qr) \equiv (pq) r$
3. **Distribution :** $(p+q)r \equiv pr + qr$ $\quad$ $p(q+r) \equiv pq + pr$
4. **Elément neutre :** $p.\varepsilon \equiv \varepsilon.p \equiv p$ $\quad$ $p+\varnothing \equiv \varnothing+p \equiv p$
5. **Elément absorbant :** $p.\varnothing \equiv \varnothing.p \equiv \varnothing$
6. $\varnothing^* \equiv \varepsilon$
7. $(p^*)^* \equiv p^*$
8. $(p^*+q^*)^* \equiv (p^*.q^*)^* \equiv (p+q)^*$
9. $p.\ p^* \equiv p^*.p$
10. $p^* \equiv (p+\varepsilon)^*$

Remarque : $pq \neq qp$

Expressions Régulières

Exemple :

Soient les expressions régulières suivantes :

$E_1=(a^*b^*)^*$ $E_2=(a^*+b^*)^*$ et $E_3=(a+b)^*$

Or on a la propriété $(p^*+q^*)^* \equiv (p^*.q^*)^* \equiv (p+q)^*$

Ces trois expressions sont équivalentes. En effet, elles dénotent le même langage $\{a, b\}^*$.

Définition : Un langage L sur un alphabet X est un langage **rationnel** si et seulement s'il existe une expression régulière E sur l'alphabet X qui le dénote.

On note **Rat(X*)** la famille des langages rationnels sur X.

Expressions Régulières et automates d'états finis

Théorème de Kleene :

L'ensemble des langages rationnels (décrits par des expressions régulières) sur un alphabet X est exactement l'ensemble des langages sur X reconnaissables par automate d'états finis.

Nous avons **Rat(X*) = Rec(X*) où**

Rat(X*) est la famille des langages rationnels sur X (tout langage décrit par une expression régulière est un langage rationnel).

Rec(X*) est la famille des langages reconnaissables sur X (tout langage reconnu par un automate d'états finis est un langage reconnaissable).

Expressions Régulières et automates d'états finis

Proposition :

A toute expression régulière E, il existe un automate d’états fini A(E), reconnaissant le langage dénoté par E.

Les méthodes les plus répandues pour la construction d’un automate à partir d’une expression régulière sont :

La méthode de Thompson

La méthode de Glushkov

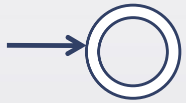
La méthode de Brzozowski (méthode des dérivées).

Expressions Régulières et automates d'états finis

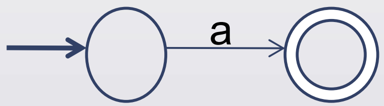
Méthode de Thompson :

L'algorithme consiste à construire l'automate petit à petit, en utilisant des constructions standard pour l'union, la concaténation et l'étoile en se basant sur la structure de l'expression régulière.

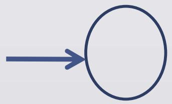
L'expression ε

on lui associe l'automate : 

L'expression a

on lui associe l'automate : 

L'expression ∅

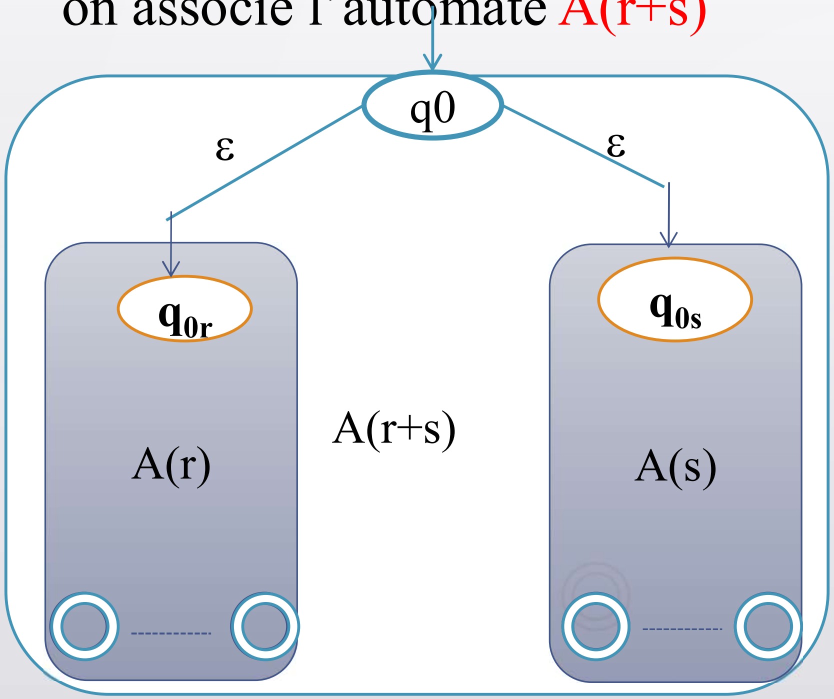
on lui associe l'automate : 

Remarque : Un automate sans état final ne reconnaît aucun mot.

Expressions Régulières et automates d'états finis

Pour l'expression r+s,

on associe l'automate A(r+s)



Données :

$A(r) = (Xr, Qr, q_{0r}, \delta r, Fr)$

$A(s) = (Xs, Qs, q_{0s}, \delta s, Fs)$

Formellement, on a :

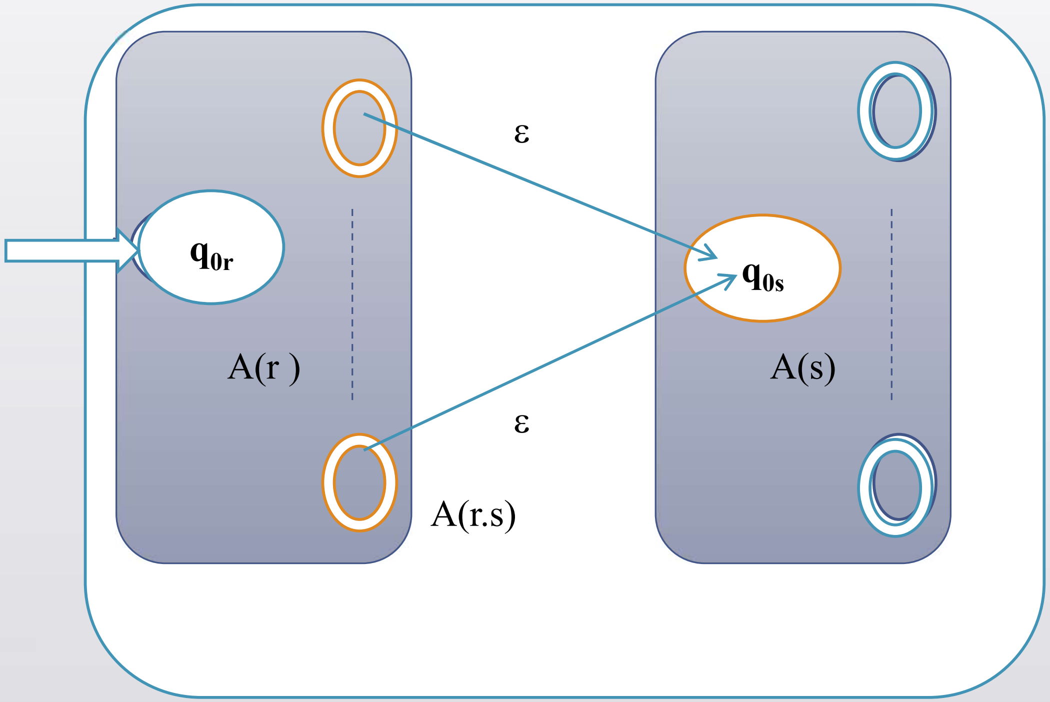
A(r+s)=(X, Q, q_0, δ, F) où :

- $X = Xr \cup Xs$
- $Q = Qr \cup Qs \cup \{q_0\}$
- $q_0 \,/\, q_0 \notin (Qr \cup Qs)$
- $\delta = \delta r + \delta s + \delta(q_0,\varepsilon)=\{q_{0r}, q_{0s}\}$
- $F = Fr \cup Fs$

Expressions Régulières et automates d'états finis

- Pour l'expression r.s,

  on associe l'automate A(r.s)



Données :

$A(r)=(Xr, Qr, q_{0r}, \delta r, Fr)$

$A(s)=(Xs, Qs, q_{0s}, \delta s, Fs)$

Formellement, on a :

$A(r.s)=(X, Q, q_0, \delta, F)$ où

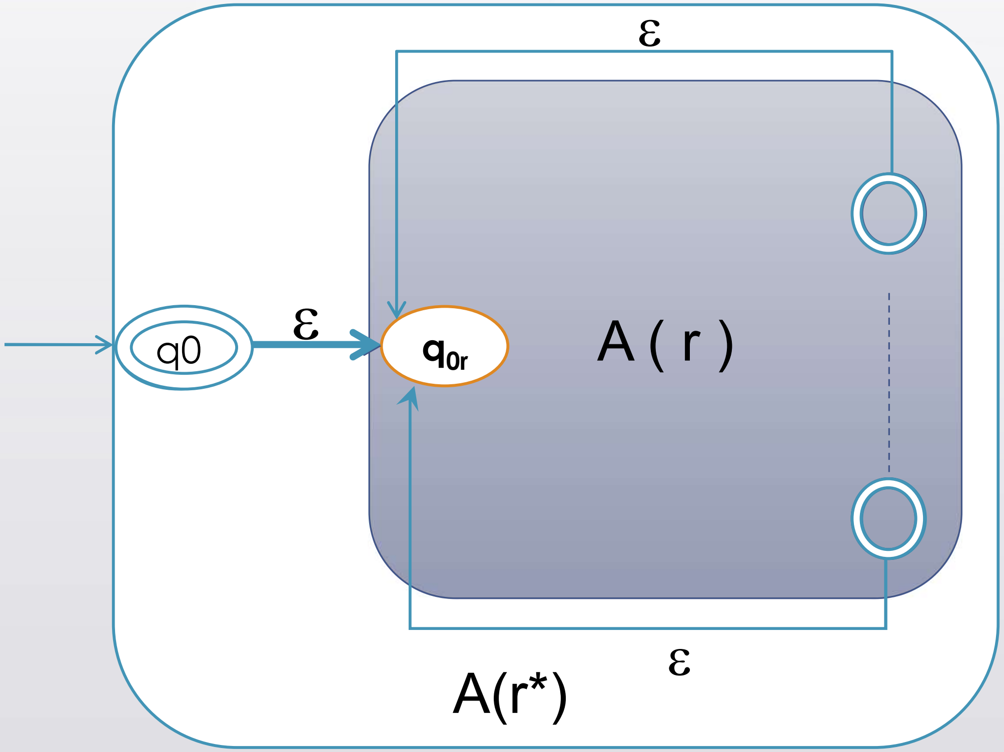
- $X = Xr \cup Xs$
- $Q = Qr \cup Qs$
- $q_0=q_{0r}$
- $\delta = \delta r + \delta s +$

  $\delta(q, \varepsilon)=q_{0s}\ \forall q \in Fr$
- $F = Fs$

Expressions Régulières et automates d'états finis

- Pour l'expression r*,

  on associe l'automate A(r*)



Donnée :

$A(r)=(Xr, Qr, q_{0r}, \delta r, Fr)$

Formellement, on a :

$A(r^*)=(X, Q, q_0, \delta, F)$ où

- $X = Xr$
- $Q = Qr \cup \{q_0\}$
- q_0 / $q_0 \notin Qr$
- $\delta = \delta r + \delta(q_0, \varepsilon)=q_{0r}$ +
  $q_{0r} \in \delta(q, \varepsilon)\ \ \forall q \in Fr$
- $F = Fr \cup \{q_0\}$

Expressions Régulières et automates d'états finis

Proposition :

A tout automate d'états fini **A,** il lui correspond une expression régulière qui le dénote.

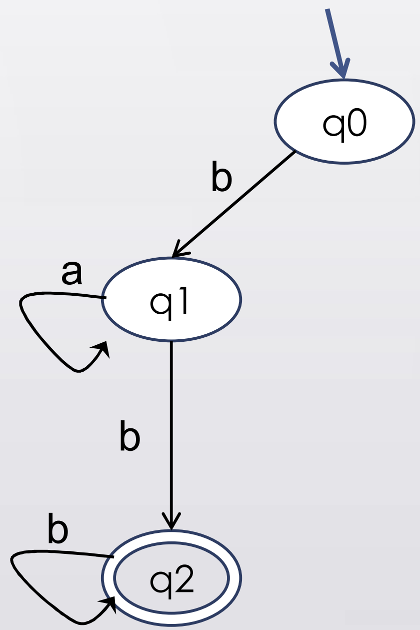
Le langage reconnu par cet automate est dénoté par l'expression régulière : **ba*bb***

Pour l'obtention d'une expression régulière à partir d'un automate d'états finis, on peut citer les méthodes suivantes :

La méthode d'élimination ou méthode de Brzozowski et McCluskey

La méthode par résolution d'équations

Exemple :



Applications des Expressions Régulières

Les expressions régulières ont de nombreuses utilités en informatique, elles servent principalement pour réaliser :

1) des contrôles : vérifier qu'une donnée entrée par un utilisateur a bien le format souhaité.

2) des substitutions : remplacer un motif par une chaine de caractères précise ; par exemple, remplacer les majuscules par des minuscules.

3) des filtres : ne conserver que certaines lignes d'un fichier texte.

4) des découpages : récupérer une partie d'une chaine de caractères par exemple une date placée dans une chaine de caractères.

Caractérisation des langages Réguliers

Les langages réguliers peuvent être **caractérisés** de 3 façons, en utilisant :

1) Les grammaires régulières.
2) Les automates d'états finis.
   (déterministes, non-déterministes ou généralisés).
3) Les expressions régulières.

Remarque :

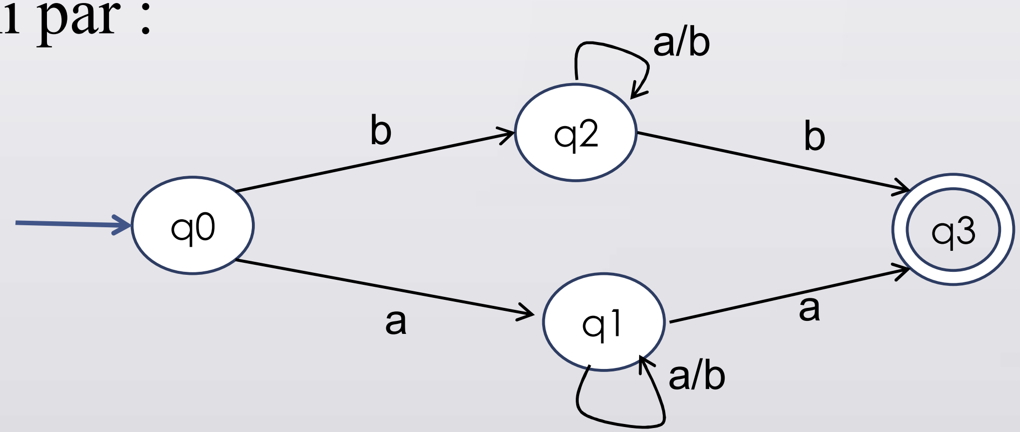
Pour démontrer qu'un langage est régulier il faut lui trouver : une **grammaire régulière** qui le génère, un **automate d'état finis** qui le reconnait ou une **expression régulière** qui le dénote.

Caractérisation des langages Réguliers

Exemple : Montrer que le langage
$L = \{w \in \{a, b\}^* \ / \ w$ commence et se termine par la même lettre$\}$ est régulier en utilisant les 3 méthodes.

1) L est dénoté par l'expression régulière : $a(a+b)^*a+b(a+b)^*b+a+b$

2) L est généré par la grammaire régulière G=(T, N, S, P) avec
   T={a, b}, N={S, A, B}, et P est défini par :
   S→aA/bB/a/b
   A→aA/bA/a
   B→aB/bB/b



3) L est reconnu par l'automate d'états fini :

Lemme de l'étoile (ou lemme de la pompe)

Tout mot **suffisamment long** d'un langage régulier infini peut être pompé :

- une **partie centrale** du mot **peut être répétée** un nombre quelconque de fois,
- et que chacun **des mots produits** appartient au langage

Proposition : Soit L un langage infini sur un alphabet X.
Si L est régulier alors il existe un entier $k>0$ tel que pour tout $w \in L$ et $|w| \geq k$, il existe $x, z \in X^*$ et $y \in X^+$ tels que :

1) $w = xyz$
2) $|xy| \leq k$
3) $xy^iz \in L$ pour tout $i > 0$;

Lemme de l'étoile (ou lemme de la pompe)

- Le lemme de l’étoile énonce une condition nécessaire mais non suffisante de régularité.

- Donc, il est couramment utilisé pour montrer qu'un langage donné n'est pas régulier (en raisonnant par l'absurde).

- En revanche, il ne peut être employé pour démontrer qu'un langage est régulier.

Lemme de l'étoile (ou lemme de la pompe)

Exemple : Montrer que le langage $L=\{a^n b^n / n \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que L est régulier.
Soit $k>0$ la constante du lemme de l'étoile.
Considérons le mot $w= a^k b^k$. On a : $w \in L$ et $|w|=2k > k$.
Le seul découpage de $w = xyz$ avec $|xy|<k$ et $y \neq \varepsilon$ est :

$x = a^{k1}$
$y = a^{k2}$
$z = a^{k3} b^k$

$|xy|<k \Rightarrow k1+k2 \leq k$
$y \neq \varepsilon \Rightarrow k2 \neq 0$
$w=xyz \Rightarrow |w|=|xyz| \Rightarrow k=k1+k2+k3$

Pour le pompage : si $i=0$, on a le mot $xy^0z= a^{k1} a^{k3} b^k \notin L$.
Donc, L n'est pas régulier.