Département Informatique — Année 2021-2022
FEI - USTHB
L2-ACAD (Section A & C)

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

Exercice 1 :

Construire les automates à pile qui acceptent par état final les langages suivants :

1. $L_1 = \{a^n b^m c^n \,/\, n,m \geq 0\}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b, c\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $F=\{q_3, q_4\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow aq_1$

$aq_1b \rightarrow aq_1$ $\quad$ $aq_1c \rightarrow q_2$

$aq_2c \rightarrow q_2$

$Z_0q_2 \rightarrow Z_0q_3$

Cas particuliers

/*n=0 et m≠ 0 : il n'y a pas de a */

$Z_0q_0b \rightarrow Z_0q_4$

$Z_0q_4b \rightarrow Z_0q_4$

/* n≠0 et m=0 : il n'y a pas de b */

$aq_0c \rightarrow q_2$

/* n=0 et m= 0 : cas du mot vide */

$Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_3$

2. $L_2 = \{a^n b^m \,/\, n>m \geq 0\}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$, $F=\{q_2\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow q_1$

$aq_1b \rightarrow q_1$ $\quad$ $aq_1 \rightarrow q_2$

$aq_0 \rightarrow q_2$ $\quad$ **/* m=0 : il n'y a pas de b avec au minimum un a*/**

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

3. $L_3 = \{a^{2n}b^n \,/\, n \geq 0\}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F=\{q_3\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow q_1$

$aq_1 \rightarrow q_2$ $\quad$ $aq_2b \rightarrow q_1$

$Z_0q_2 \rightarrow Z_0q_3$

$Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_3$ /* n=0 : cas du mot vide */

4. $L_4 = \{a^nb^{2m} \,/\, n \geq m\}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$, $F=\{q_0, q_2\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow aq_1$

$aq_1b \rightarrow q_2$

$aq_2b \rightarrow aq_1$

5. $L_5=\{wcw^R \,/\, w \in \{a, b\}^*\}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$, $F=\{q_2\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$ $\quad$ $Z_0q_0b \rightarrow Z_0bq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow abq_0$

$bq_0a \rightarrow baq_0$ $\quad$ $bq_0b \rightarrow bbq_0$

$aq_0c \rightarrow aq_1$ $\quad$ $bq_0c \rightarrow bq_1$

$aq_1a \rightarrow q_1$ $\quad$ $bq_1b \rightarrow q_1$

$Z_0q_1 \rightarrow Z_0q_2$.

/* w= ε*/

$Z_0q_0\,c \rightarrow Z_0q_2$

6. $L_6 = \{a^nb^mc^p \,/\, n=m+p \text{ et } n, m, p \geq 0\}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b, c\}$, $\Gamma=\{Z0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F=\{q_3\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow q_1$

$aq_1b \rightarrow q_1$ $\quad$ $aq_1c \rightarrow q_2$

$aq_2c \rightarrow q_2$

$Z_0q_2 \rightarrow Z_0q_3$

$aq_0c \rightarrow q_2$ $\quad$ /* m=0 : il n'y a pas de b. Lire le 1er c, dépiler un a et passer à q_2 pour lire la suite du mot*/

$Z_0q_1 \rightarrow Z_0q_3$ $\quad$ /* p=0 : il n y a pas de c et il ne reste aucun a dans la pile et passer à q_3 final. Le mot lu est de la forme a^nb^n */

$Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_3$ $\quad$ /* n=0 : mot vide */

7. $L_7 = \{a^kb^jc^m \,/\, m \geq k+j, k \geq 0 \text{ et } j \geq 2\}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b, c\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $F=\{\cancel{q_3}\ \mathbf{q_4}\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow abq_1$

$bq_1b \rightarrow bbq_2$

$bq_2b \rightarrow bbq_2$

$bq_2c \rightarrow q_3$

$bq_3c \rightarrow q_3$ $\quad$ $aq_3c \rightarrow q_3$

$Z_0q_3c \rightarrow Z_0q_3$

$Z_0q_3 \rightarrow Z_0q_4$

$Z_0q_0b \rightarrow Z_0bq_1$ $\quad$ /* n=0 (il n y a pas de a) : lire le 1er b et passer à q_1 */

Département Informatique — Année 2021-2022

FEI - USTHB

L2-ACAD (Section A & C)

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

Une deuxième solution consiste à utiliser un symbole auxiliaire X. En effet, il n'est pas nécessaire de connaître le nombre exact de a et le nombre exact de b, il suffit de connaître la somme des deux. Le nombre de X dans la pile correspond au nombre de a plus le nombre de b lus **et passer vers un état final.**.

Un second automate à pile $P'=(\Sigma', \Gamma', Z_0, Q', q_0', F', \delta')$ où $\Sigma'=\{a, b, c\}$, $\Gamma'=\{Z_0, X_0\}$, $Q'=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $F'=\{\cancel{q_3}\ q_4\}$et l'ensemble des transitions δ' est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0Xq_0$

$Xq_0a \rightarrow XXq_0$ $\quad$ $Xq_0b \rightarrow XXq_1$

$Xq_1b \rightarrow XXq_2$

$Xq_2b \rightarrow XXq_2$ $\quad$ $Xq_2c \rightarrow q_3$

$Xq_3c \rightarrow q_3$

$Z_0q_3c \rightarrow Z_0q_3$

$\mathbf{Z_0q_3 \rightarrow Z_0q_4}$

$Z_0q_0b \rightarrow Z_0Xq_1$ $\quad$ /* n=0 (il n y a pas de a) : lire le 1er b et passer à q_1 */

8. $L_8 = \{w^Rcu$ / w, u $\in\{a, b\}^*$ et u est un facteur gauche de w}

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1\}$, $F=\{q_1\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$ $\quad$ $Z_0q_0b \rightarrow Z_0bq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\quad$ $aq_0b \rightarrow abq_0$

$bq_0a \rightarrow baq_0$ $\quad$ $bq_0b \rightarrow bbq_0$

$aq_0c \rightarrow aq_1$ $\quad$ $bq_0c \rightarrow bq_1$

$aq_1a \rightarrow q_1$ $\quad$ $bq_1b \rightarrow q_1$

/* w = ε */

$Z_0q_0c \rightarrow Z_0q_1$

Département Informatique Année 2021-2022
FEI - USTHB
L2-ACAD (Section A & C)

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

9. **$L_9 = \{a^{2n}wb^m$ / n, m≥0, w {0,1}* et |w|=n+2m}**

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b, 0, 1\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ $F=\{q_5\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$

$aq_00 \rightarrow q_1$ $\qquad$ $aq_01 \rightarrow q_1$

$aq_1 \rightarrow q_2$

$aq_2\,0 \rightarrow q_1$ $\qquad$ $aq_2\,1 \rightarrow q_1$

$Z_0q_20 \rightarrow Z_00q_2$ $\qquad$ $Z_0q_21 \rightarrow Z_01q2$

$0q_20 \rightarrow 00q2$ $\qquad$ $1q_20 \rightarrow 10q2$

$0q_21 \rightarrow 01q2$ $\qquad$ $1q_21 \rightarrow 11q2$

$0q_2b \rightarrow q_3$ $\qquad$ $1q_2b \rightarrow q_3$

$0q_3 \rightarrow q_4$ $\qquad$ $1q_3 \rightarrow q_4$

$0q_4b \rightarrow q_3$ $\qquad$ $1q_4b \rightarrow q_3$

$Z_0q_4 \rightarrow Z_0q_5$

/*n=0, il n'y a pas de a ; lire le 1er symbole de w et passer à q_2 pour traiter la suite */

$Z_0q_00 \rightarrow Z_00q_2$ $\qquad$ $Z_0q_01 \rightarrow Z_01q_2$

/* m=0, il n'y a pas de b ; passer à q_5 qui est final */

$Z_0q_2 \rightarrow Z_0q_5$

/* n=0, m=0 : mot vide */

$Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_5$

10. **$L_{10} = \{a^nb^{2n}$ / n≥0}.**

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F=\{q_3\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$

$aq_0a \rightarrow aaq_0$ $\qquad$ $aq_0b \rightarrow aq_1$

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

$aq_1b \rightarrow q_2$

$aq_2b \rightarrow aq_1$

$Z_0q_2 \rightarrow Z_0q_3$

$Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_3$ /* n=0 : cas du mot vide */

11. $L_{11} = \{ ww^R / w \in \{a, b\}^* \}$

L'automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$, $F=\{q_2\}$ et l'ensemble des transitions δ est :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$	$Z_0q_0b \rightarrow Z_0bq_0$
$bq_0a \rightarrow baq_0$	$aq_0b \rightarrow abq_0$
$aq_0a \rightarrow aaq_0$	$bq_0b \rightarrow bbq_0$
$aq_0a \rightarrow q_1$	$bq_0b \rightarrow q_1$
$aq_1a \rightarrow q_1$	$bq_1b \rightarrow q_1$
$Z_0q_1 \rightarrow Z_0q_2$	.

/* w= ε*/

$Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_2$ /* passer vers l'état final q_2 */

Exercice 2

Soit la grammaire G=({if, then, else, e, i}, {I}, I, P) où P est donné par :

I → if e then I else I / if e then I / i

1. Montrer que le mot « if e then if e then i else i » possède deux :
   a. Dérivations gauche
   b. Dérivations droite
   c. Arbres de dérivations

Rappelons que dans une dérivation gauche (resp droite), le non-terminal le plus à gauche (resp le plus à droite) est toujours dérivé en premier.

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

Première dérivation gauche :

I ⇒ if e the I else I /*règle 1 */

⇒ if e then if e then I else I /*règle 2 : dérivation du non-terminal I le plus à gauche ie le premier */

⇒ if e then if e then i then I /*règle 3 : dérivation du non-terminal I le plus à gauche ie le premier */

⇒ if e then if e the i then i /*règle 3*/

Deuxième dérivation gauche

I ⇒ if e then I /*règle 2 */

⇒ if e then if e then I else I /*règle 1 /

⇒ if e then if e then i then I /*règle 3 : dérivation du non-terminal **I** le plus à gauche ie le premier */

⇒ if e then if e the i then i /*règle 3*/

Notons que les deux dérivations gauches sont différentes.

Première dérivation droite

I ⇒ if e the I else I /*règle 1*/

⇒ if e then I else i /*règle 3 : dérivation du non-terminal I le plus à droite ie le second*/

⇒ if e then if e then I then i /*règle 2*/

⇒ if e then if e the i then i /*règle 3*/

Deuxième dérivation droite

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

I ⇒ if e then I /*règle 2*/

⇒ if e then if e then I else I /*règle 1*/

⇒ if e then if e then I then i /*règle 3 : dérivation du non-terminal I le plus à droite ie le second */

⇒ if e then if e the i then i /*règle 3*/

Notons aussi que les deux dérivations droites sont différentes.

Département Informatique
FEI - USTHB
L2-ACAD (Section A & C)

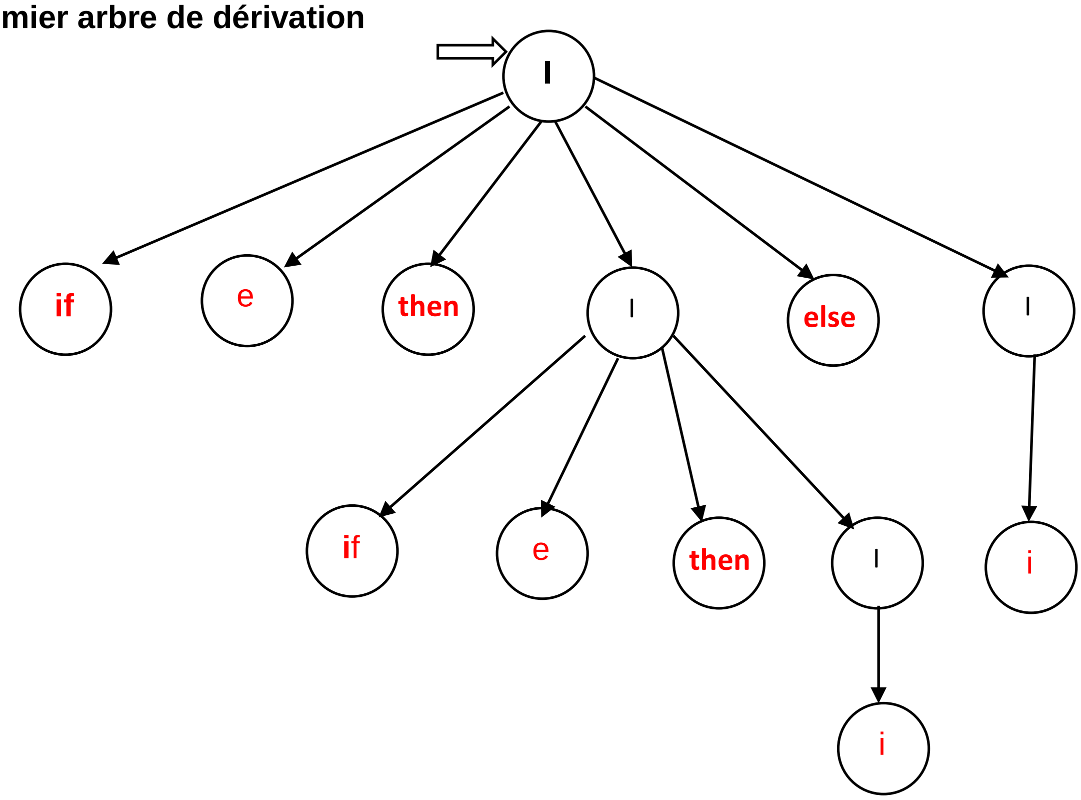
Année 2021-2022

Théorie des Langages

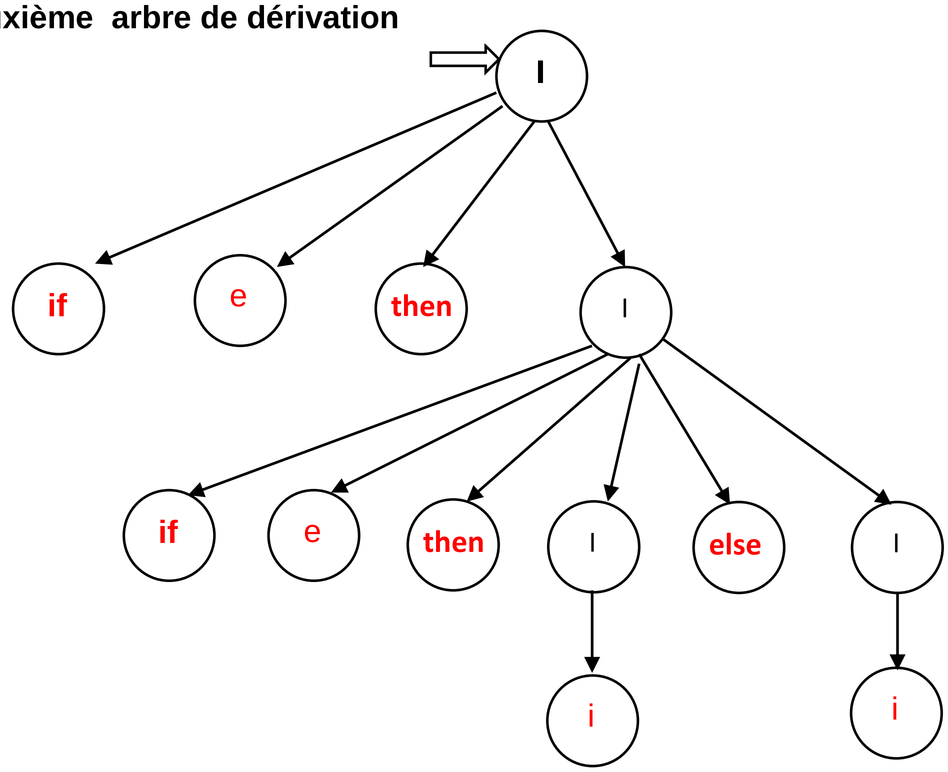
Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

Premier arbre de dérivation



Deuxième arbre de dérivation



Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

Notons que la lecture de la gauche vers la droite des feuilles de l'arbre de dérivation (voir étiquette en rouge) correspond au mot « *if e then if e then i else i* ».

Les deux arbres de dérivation sont différents.

2. Cette grammaire est-elle ambiguë ?

Rappelons qu'une grammaire est ambiguë si et seulement si elle génère un mot ambigu.

Donc, la grammaire G est ambiguë car le mot « if e then if e then i else i » généré par cette grammaire est ambigu (il possède deux arbres de dérivations différents).

Département Informatique
FEI - USTHB
L2-ACAD (Section A & C)

Année 2021-2022

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

Exercice 3

Soit la grammaire G=({(,) }, {S}, S, P) où P est donné par :

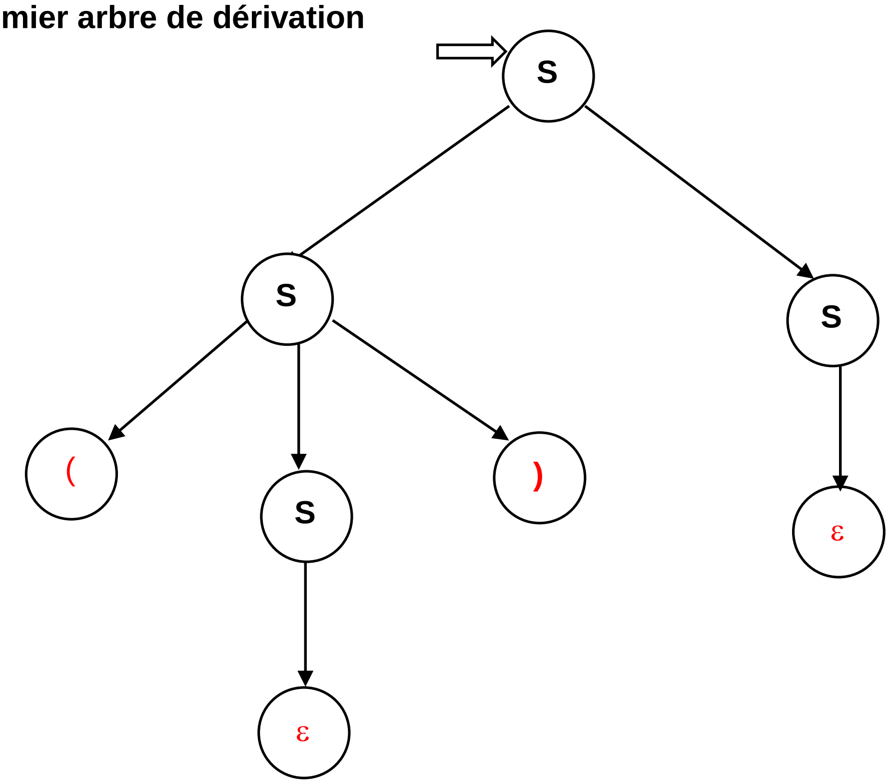
S → (S) / SS / ε

Montrer que cette grammaire est ambiguë.

Rappelons qu'une grammaire est ambiguë dès lors qu'elle possède un mot ambigu. Un mot est ambigu s'il possède plusieurs arbres de dérivations différents.

Considérons le mot w =() et montrons qu'il est ambigu. En effet, il possède deux arbres de dérivation différents.

Premier arbre de dérivation



Département Informatique
FEI - USTHB
L2-ACAD (Section A & C)

Année 2021-2022

Théorie des Langages

Série 3

LES LANGAGES ALGEBRIQUES

Deuxième arbre de dérivation