Université de M'hamed Bouguerra Boumerdès
Université de M'hamedBouguerraBoumerdès
Faculté des sciences
Département d'Informatique

Module : Théorie des Langages. **Année : 2019-2020**
Filière : LI- S4 **Document : Série 5 (Corrigé)**

Chapitre 5 : Automate à pile et Langage algébrique

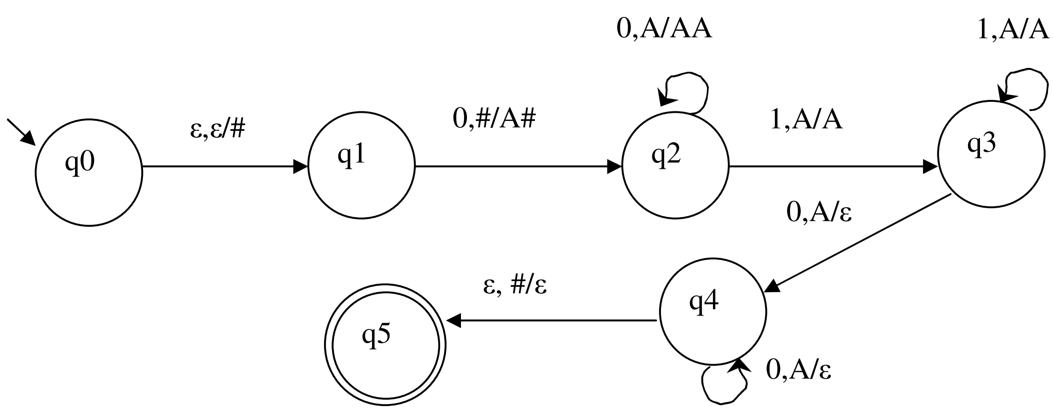
Exercice 01

Trouver un automate à pile qui reconnaît les langages :

1. $L_1 = \{0^n\ 1^m\ 0^n\ /\ n, m \in N\}$
2. $L_2 = \{0^n\ 1^m\ /\ n, m \in N \text{ et } n \le= m\}$
3. $L_3 = \{w \in \{a, b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$
4. $L_4 = \{w \in \{a, b, c\}^*, w=w_1 c\ w_1^R \text{ avec } w_1 \in \{a, b\}^*\}$
5. $L_5 = \{w \in \{a, b, c\}^*, w=w_1\ w_1^R \text{ avec } w_1 \in \{a, b\}^*\}$
6. $L_6 = \{0^n\ 1^m\ 2^{n+m} /\ n, m \in N\}$
7. $L_7 = \{w \in \{a, b\}^*, w=w_1 a^i b^i\ w_1^R \text{ avec } w_1 \in \{a, b\}^*, i \ge 0\}$

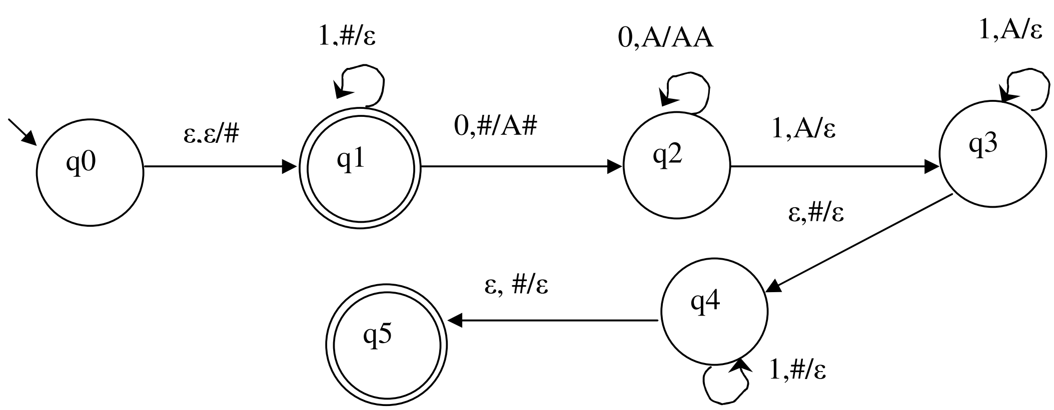
$L1=\{0^n1^m0^n\ \ /\ n>0, m>0\}$

PDA={{0,1}, {#,A},#,{q0,q1,q2,q3,q4,q5}, q0, q5}, δ}



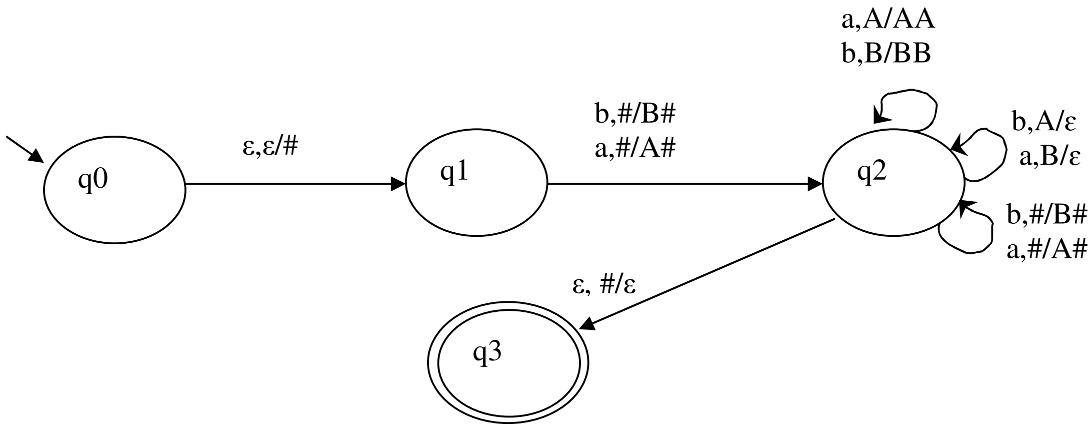
$L2=\{0^n1^m\ \ /\ \text{ et } m>=n, n>=0\}$

PDA={{0,1}, {#,A},#,{q0,q1,q2,q3,q4,q5}, q0, {q5}, δ}



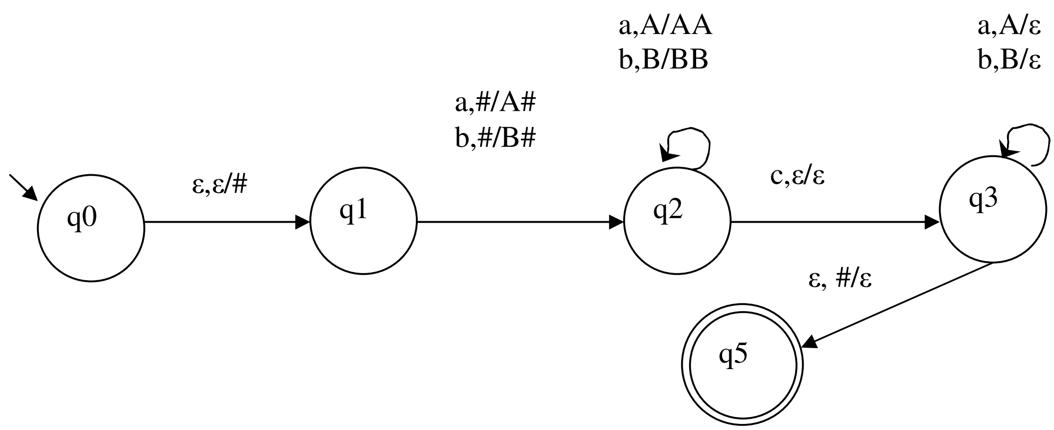
L3={w ∈ {a,b}*, $|w|_a = |w|_b$ }

PDA={{0,1}, {#,A,B,C},#,{q0,q1,q2,q3}, q0, {q3}, δ}



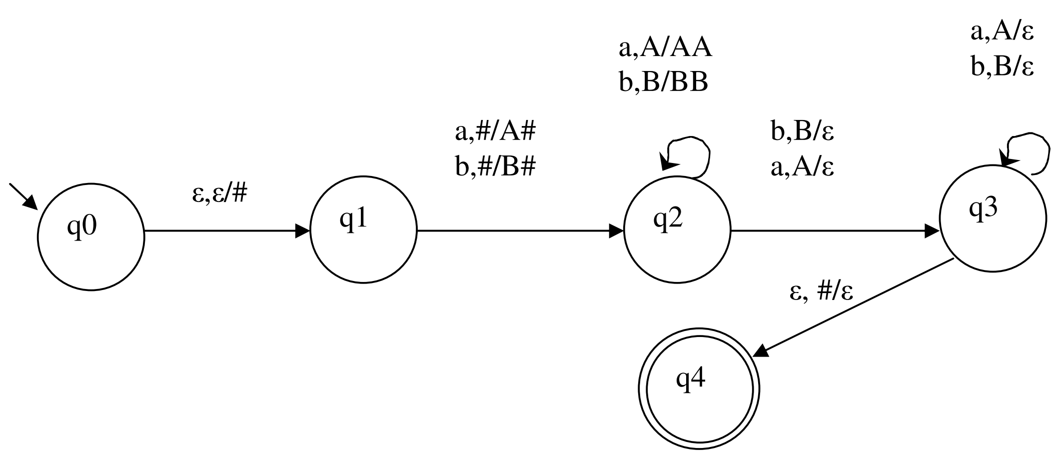
L4={w ∈ {a,b,c}*, w =$w_1cw_1^R$ avec w1 ∈ {a,b}* }

PDA={{a,b,c}, {#,A,B},#,{q0,q1,q2,q3,q5}, q0, {q5}, δ}



L5={w ∈ {a,b}*, w =$w_1w_1^R$ avec w1 ∈ $\{a,b\}^*$}

PDA={{a,b}, {#,A,B},#,{q0,q1,q2,q3,q4}, q0, {q4}, δ}

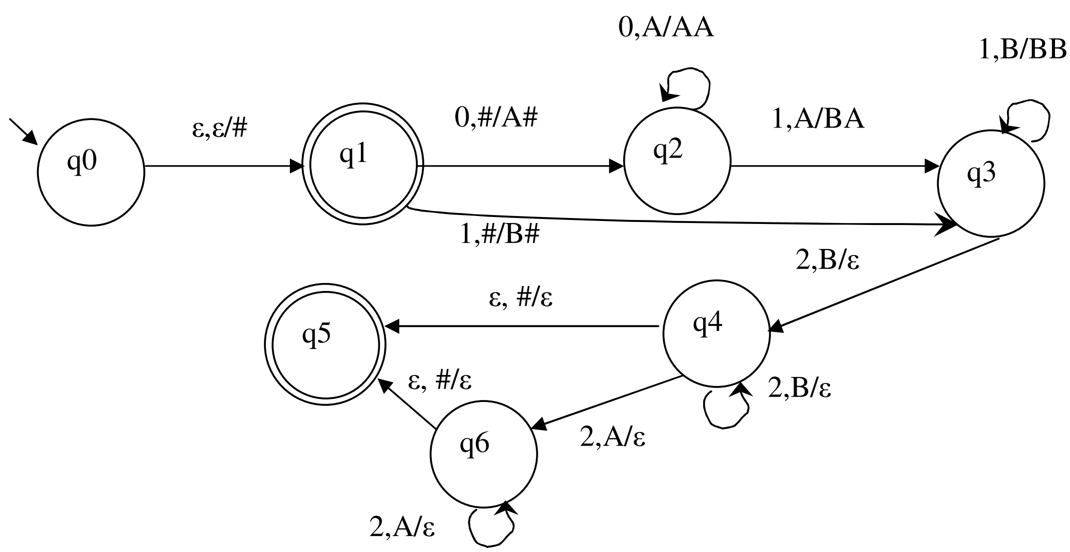


$L6=\{0^n1^m2^{n+m} \ / \ n,m \in N\}$

$0^n1^m2^{n+m} = 0^n1^m2^{m+n} = 0^n1^m2^m2^n$

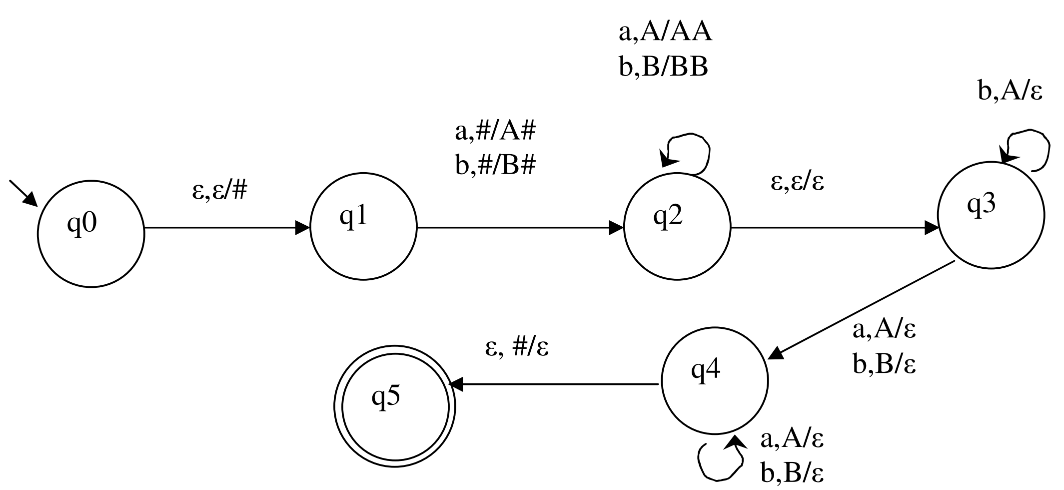
$n,m \in N \Rightarrow n>=0$ et $m>=0$

PDA={{0,1,2}, {#,A,B},#,{q0,q1,q2,q3,q4,q5,q6}, q0, {q1,q5}, δ}



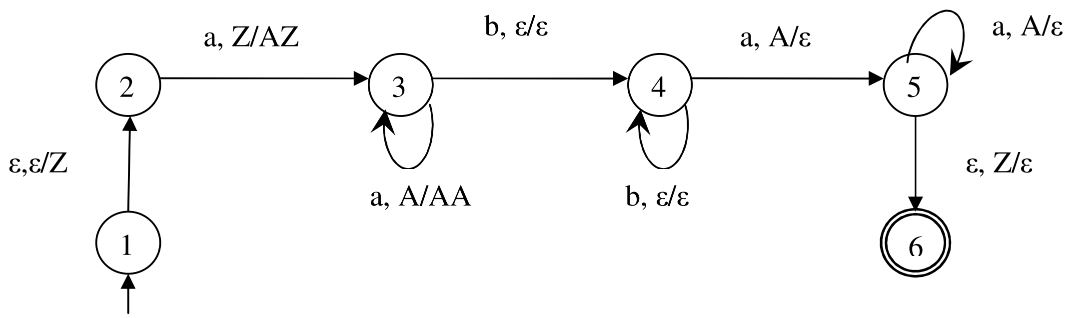
$L7=\{w \in \{a,b\}^*, \ w = w_1a^ib^iw_1^R$ avec $w1 \in \{a,b\}^*, i>=0 \}$

PDA={{0,1}, {#,A,B},#,{q0,q1,q2,q3,q4,q5}, q0, {q5}, δ}

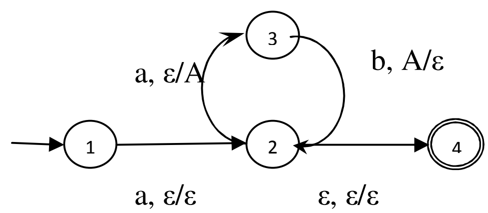


Exercice 02

1. Quel est le langage accepté par ces automates à pile?



$L1=\{w = a^n b^m a^n \ / \ n>0, m>0 \}$



$L2=\{w = a(ab)^n \ / \ n>=0 \}$

Exercice 03
Réduire puis rendre propre les grammaires suivantes :

a) $S \rightarrow aAa \mid bBb \mid dC \mid \varepsilon$
$A \rightarrow B \mid aAa \mid \varepsilon$
$B \rightarrow A \mid bBb \mid \varepsilon$
$C \rightarrow aC \mid Cb$
$D \rightarrow aA \mid Db$

Etape 1 : réduire la grammaire

1. Élimination des symboles inutiles

U0= Φ ; U1= {S, A, B} ; U2= {S, A, B, D} ; U3={S, A, B, D} =U2
Donc le C est un symbole inutile à éliminer
La grammaire devient
$S \rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon$
$A \rightarrow B \mid aAa \mid \varepsilon$
$B \rightarrow A \mid bBb \mid \varepsilon$
$D \rightarrow aA \mid Db$

2. Élimination des symboles inaccessibles

W0= {S} ; W1= {S, A, B} ; W2={S, A, B} = W1 donc D est inaccessible.

La grammaire devient
$S \rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon$
$A \rightarrow B \mid aAa \mid \varepsilon$
$B \rightarrow A \mid bBb \mid \varepsilon$

Etape 2 : rendre la grammaire propre

3. Élimination des ε-règles

La grammaire devient
$S \rightarrow aAa \mid bBb \mid aa \mid bb$
$A \rightarrow B \mid aAa \mid aa$
$B \rightarrow A \mid bBb \mid bb$

4. Élimination des règles unitaire A →B

N_A= {A, B} ; N_B= {A, B} ;

La grammaire devient
$S \rightarrow aAa \mid bBb \mid aa \mid bb$
$A \rightarrow aAa \mid aa \mid bBb \mid bb$
$B \rightarrow bBb \mid bb \mid aAa \mid aa$

b) $S \rightarrow AB \mid EaE$
$A \rightarrow Aa \mid aB$
$B \rightarrow bB \mid aA$
$C \rightarrow AB \mid aS$
$E \rightarrow D$
$D \rightarrow dD \mid \varepsilon$

Etape 1 : réduire la grammaire

1. Élimination des symboles inutiles

U0= Φ ; U1= {D} ; U2= {D, E} ; U3={D, E, S} ; U4 ={D, E, S, C} =U5;
Donc le A, B sont des symboles inutiles à éliminer

La grammaire devient
$S \rightarrow EaE$
$C \rightarrow aS$
$E \rightarrow D$
$D \rightarrow dD \mid \varepsilon$

2. Élimination des symboles inaccessibles

W0= {S} ; W1= {S, E} ; W2={S, E, D} = W3 donc C est inaccessible.

La grammaire devient
$S \rightarrow EaE$
$E \rightarrow D$
$D \rightarrow dD \mid \varepsilon$

Etape 2 : rendre la grammaire propre

3. Élimination des ε-règles

La grammaire devient
$S \rightarrow EaE$
$E \rightarrow D$
$D \rightarrow dD \mid d$

4. Élimination des règles unitaire A →B

La grammaire devient
$S \rightarrow DaD$
$D \rightarrow dD \mid d$

Exercice 04: ***Forme normale de Chomsky***
Transformer les grammaires hors contexte G (T, N, S, P) suivante en FNC :

1. *N = {S, T}, T = {a, b}, P =* { S→SSS/T/ε, T→a/aT/bbT}

Etape 1 : rendre la grammaire réduite et propre

P'= {S→SSS| a| aT| bbT| ε, T→ a| aT| bbT }

Etape 2 : mettre la grammaire sous FNC

G'= ({a,b}, {S, A, B, C, D, T}, S, P'')
P''= { A→ a ; B→ b
S→SD | a | AT | BC | ε
D→ SS
T→ a | AT| BC
C→ BT }

2. *N = {N, M, S}, T = {a, b,0, 1, *}, P =* { S→M*M, M→a/b/ N, N→0N/1N/ε}

Etape 1 : rendre la grammaire réduite et propre

P'= { S→M*M, M→a| b | 0| 1| 0N| 1N, N→0 | 1| 0N| 1N}

Etape 2 : mettre la grammaire sous FNC

G'= ({a, b,0, 1, *}, {S, A, B, C, E, M, N, U, Z }, S, P'')
P''= { A→ a ; B→ b ; Z→0 ; U→1 ; E→* ;
S→MC
M→ a| b | 0| 1| ZN| UN
N→0 | 1| ZN| UN
C→ EM }

Exercice 05: ***Forme normale de Greibach***
Mettre la grammaire suivante sous forme normale de *Greibach* :

G = ({E, T, F, P}, {+, *, id, (,), ;}, E, R) avec
R= { E⟶ E + T/ T
T ⟶ T* F / F
F⟶ P; F / P
P⟶ (E) / id }

Etape 1 : rendre la grammaire réduite et propre

R' = { E⟶ E + T/ T* F/ P; F/ (E) / id
T ⟶ T* F / P; F/ (E) / id
F⟶ P; F / (E) / id
P⟶ (E) / id }

Etape 2 : éliminer la récursivité à gauche

G = ({E, E', T, T', F, P}, {+, *, id, (,), ;}, E, R'') avec
R''= { E⟶ id E'
E' ⟶ + TE'/ T* F/ P; F/ (E) / id/ ε
T ⟶ id T'
T'⟶* FT' / P; F/ (E) / id / ε
F⟶ P; F / (E) / id
P⟶ (E) / id }

Devoir : transformer cette G en FNG …

Exercice 06 : ***Lemme de la double étoile (à suivre…)***

1. Montrer que le langage L1 = $\{a^i b^j c^j b^i \text{ , } i \geq 0, j \geq 1\}$ est algébrique.
2. Montrer que le langage L2 = $\{a^i b^i c^i a^i \text{ , } i \geq 1\}$ n'est pas algébrique.