Ecole nationale Supérieure d'Informatique Octobre 2014.

T.D. Sur les grammaires.
3ème année Cycle commun

EXERCICE 1

Trouver les grammaires engendrant les langages suivants:

- G_1 tel que $L(G_1) = \{a^i\, b,\ i \geq 0\}$
- G_2 tel que $L(G_2) = \{a^n\, b^p \,/\, n > p\}$
- G_3 tel que $L(G_3) = \{\, a^n\, b^p \,/\, n \neq p\}$
- G_4 tel que $L(G_4) = \{\, a^i\ (ab)^j\ c^k,\ \ i, k \geq 0 \text{ et } j > 0\ \}$
- G_5 tel que $L(G_5) = \{\, a^i\ (ab)^i\ c^k,\ i, k > 0\}$
- G_6 tel que $L(G_6) = \{\, a^n\, b^n\, c^n \,/\, n > 0\ \}$
- G_7 tel que $L(G_7) = \{\ 0^i\, 1^j\, 2^k,\ i, j, k \geq 0 \text{ et } k = \max(i,j)\ \}$
- G_8 tel que $L(G_8) = \{w \in \{a, b, c\}^* \,/\, |w|_a \equiv 1[2] \text{ et } |w|_b \equiv 1[2]\}$
- Le complément de $L = \{a^n\, b^n \,/\, n \geq 0\ \}$

EXERCICE 2

Soit $X = \{0, 1\}$, trouver les grammaires G_1, G_2, G_3 et G_4 qui génèrent respectivement:

- les mots binaires divisibles par 2
- les mots divisibles par 3
- les mots binaires divisibles par 6
- les mots binaires non divisibles par 20

EXERCICE 3

Soit $X = \{a, b\}$, donner la grammaire du langage suivant :

$L = \{|w|_a - 2|w|_b \equiv 1[4]\}$

EXERCICE 4

1. Trouver la grammaire G tel que
   $L(G) = \{w \,/\, |w|_a = |w|_b \text{ et } w \in \{a, b\}^*\ \}$

2. Soit Dych2 le langage suivant :
   $\{w \in \{a, b\}^* /|\ w|_a = |w|_b \text{ et } \forall w_1 \text{ facteur gauche de } w \text{ alors } |w_1|_a \geq |w_1|_b\}$
   Trouver la grammaire engendrant ce langage.

EXERCICE 5

Trouver les grammaires qui engendrent les langages suivants:

- $L_1 = \{ a^n b^i c^n d^j / n, i, j \geq 0\} \cup \{ a^i b^n c^j d^n / n, i, j \geq 0\}$
- $L_2 = \{ a^n b^p c^q / n, q \geq 0, p \geq n+q \}$
- $L_3 = \{ a^n b^p / n \neq p+2 \}$
- $L_4 = \{ wcw^R / w \in \{a, b\}^* \}$
- $L_5 = \{ w w^R / w \in \{a, b\}^* \}$
- $L_6 = \{ w w / w \in \{a, b\}^* \}$
- $L_7 = \{0^i 1^j 2^k / i \leq k \text{ ou } j \leq k \}$
- $L_8 = L^*$ tq $L = \{w \in \{a, b\}^* / |w|_a \neq |w|_b \}$
- $L_9 = \{a^i b^j a^i b^j, i, j \geq 1\}$
- $L_{10} = \{a^i b^j (ab)^{|i-j|}, i, j \geq 0\}$

EXERCICE 6

Soit G une grammaire dont les productions sont les suivantes :

- $S \rightarrow Sa / bS / a / b$

Déterminer le langage L(G).

EXERCICE 7

Soit L le langage suivant $L=\{a^n b^p a^q \text{ tq } p = 2n+q \}$

Donnez le type de la grammaire. Justifier

EXERCICE 8

Soit G $<\{a, b\}, \{S, S1, S2, S3, A, B\}, P, S>$ la grammaire telle que :

$P = \{S \rightarrow S1 / S2 / S3$
$S1 \rightarrow A\ A$
$S2 \rightarrow A\ B\ A$
$S3 \rightarrow a\ S3\ b / AA$
$A \rightarrow a\ A\ b / \varepsilon$
$B \rightarrow b\ B\ a / \varepsilon\}$

1. De quel type est cette grammaire ?
2. Donner le langage généré par cette grammaire (Justifier).

EXERCICE 9

Soit G $<X, \{S, A, B, C, D\}, P, S>$ la grammaire algébrique suivante :

$P = \{ S \rightarrow A\ B / C\ D$
$A \rightarrow 0\ A\ 1 / \varepsilon$
$B \rightarrow 2\ B / \varepsilon$
$C \rightarrow 0\ C / \varepsilon$
$D \rightarrow 1\ D\ 2 / \varepsilon$

Trouver le langage engendré par G. (Justifier)

EXERCICE 10

Soit le langage suivant $L = \{w \,/\, w \in \{0, 1\}^* \text{ et } |w|_0 \text{ est pair}\}$

- Donner une grammaire G_1 de type 2 qui engendre L.
- Donner une grammaire G_2 régulière droite telle que $L(G_2)=L$

EXERCICE11

Soit G< X, V, S, P> où $X = \{a, b\}$, $V = \{S, A, B\}$ et

$P= \{S \rightarrow aSb \,/\, aa\,S / S\,bb / aa\,A / \varepsilon\}$

- Les mots suivants appartiennent-ils au langage L(G) ?
  abab, aabb, aaaaab, aabbb
- Donner L le langage généré par la grammaire.
- Démontrer que L(G) = L.

EXERCICE 12

Soit $L = \{0^n\, 1^n\, 0^m \; n, m \; \geq 1 \}$

- Donner la grammaire engendrant L
- Donner les grammaires engendrant les langages suivants :
  - $L_1 = Init(L) = \{w \,/\, wx \in L)$
  - $L_2 = Fin(L) = \{w \,/\, xw \in L)$

EMD 2013-2014

EXERCICE 1 : (4 pts)

Comparer les trois langages suivants :

- $L_1 = \{ww^R / \, w \in \{0, 1\}^*\}$
- $L_2 = \{(01)^i\, (10)^j\, (01)^k\, (10)^m \,/\, i, j, k, m \geq 0 \}$
- $L_3 = \{(01)^i\, (10)^j\, (01)^j\, (10)^i \,/\, i, j \geq 0 \}$

EXERCICE 2 : (6 pts)

Soit G la grammaire suivante :

$S \rightarrow S_1 / S_2$	$S_2 \rightarrow B\; b\, B_2$
$S_1 \rightarrow A_1\, A_3$	$B \rightarrow B_1B_3/\varepsilon$
$A_1 \rightarrow aA_1a/ A_2/\varepsilon$	$B_1 \rightarrow bB_1b/ B_2/\varepsilon$
$A_2 \rightarrow bA_2 /\varepsilon$	$B_2 \rightarrow aB_2 /\varepsilon$
$A_3 \rightarrow bA_3 / S_1/\varepsilon$	$B_3 \rightarrow aB_3 / B /\varepsilon$

1. A quelle classe appartient cette grammaire?
2. Donner le langage engendré par cette grammaire.
3. Montrer que L(G) = L
4. A quelle classe appartient ce langage ? Donner sa grammaire G'.

EXERCICE 3 : (6 pts)

Soient les langages suivants :

$L_1 = \{d^n w \ / \ w \in \{a,b\}^*, \ n \geq 1 \text{ et } n+|w| \equiv 0[3]\}$

$L_2 = \{d^{2n} \ a^i \ b^{n+2} \ / \ n \geq 1 \text{ et } i \geq 0\}$

1. Donner une grammaire régulière qui génère L_1.
2. Donner une grammaire qui génère L_2.

Soit le langage $L_3 = L_1 \cap L_2$

3. Trouver le langage L_3.
4. Donner une grammaire qui le génère.

EXERCICE 4 : (4 pts)

Donnez la grammaire du langage L = $\{a^{i^2} > 0 \}$