Chapitre 1
Généralités sur les graphes / Notions fondamentales de la théorie des graphes

Présenté par :
Dr. H. BENKAOUHA
Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB
haroun.benkaouha@usthb.edu.dz
haroun.benkaouha@gmail.com

Introduction

- Un graphe est défini par 2 ensembles :
  - Un ensemble de sommets noté X
  - Un ensemble de relations entre les sommets noté U ou E. Selon le type de cette relation.
- On distingue 2 grandes classes de graphes :
  - Graphes orientés si la relation est orientée
  - Graphes non orientés dans le cas contraire

Introduction – Graphe orienté

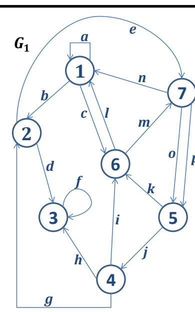
- $G=(X, U)$ est défini par 2 ensembles :
- $X = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$: Ensemble de sommets
  - n entier fini
  - $n \geq 1$,
  - chaque $x_i \in X$ est un sommet du graphe.
- $U = \{ u_1, u_2, ..., u_m \}$: Ensemble des arcs
  - $m \geq 0$ et fini,
  - Chaque $u_j \in U$ est une paire ordonnée de sommets
  - $u_j = (x, y)$.
  - x : extrémité initiale de u_j
  - y : extrémité terminale de u_j.
  - U peut être vide.

Introduction – Graphe non orienté

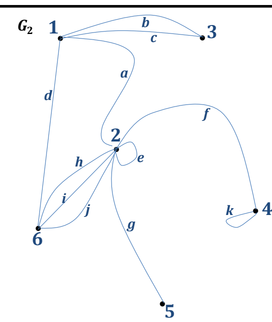
- $G=(X, E)$ est défini par 2 ensembles :
- $X = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$: Ensemble de sommets
  - n entier fini
  - $n \geq 1$,
  - chaque $x_i \in X$ est un sommet du graphe.
- $E = \{ e_1, e_2, ..., e_m \}$: Ensemble des arêtes
  - $m \geq 0$ et fini,
  - Chaque $e_j \in E$ est une paire non ordonnée de sommets
  - $e_j = \{x, y\} = \{y, x\}$.
  - x et y : extrémités de e_j
  - E peut être vide.

Introduction – Représentation

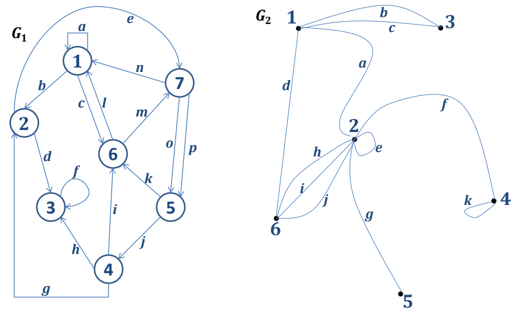
- Il n'y a pas vraiment de standard
- Généralement
  - sommet par un point ou un cercle
  - Un arc par une flèche
  - Une arête par un trait
  - La flèche et le trait peuvent être courbés
  - On peut rajouter des étiquettes



Graphe orienté :
$G_1=(X_1, U_1)$
$X_1=\{1, 2, ..., 7\}$
$U_1=\{a, b, ..., p\}$



Graphe non orienté :
$G_2=(X_2, E_2)$
$X_2=\{1, 2, ..., 6\}$
$E_2=\{a, b, ..., k\}$

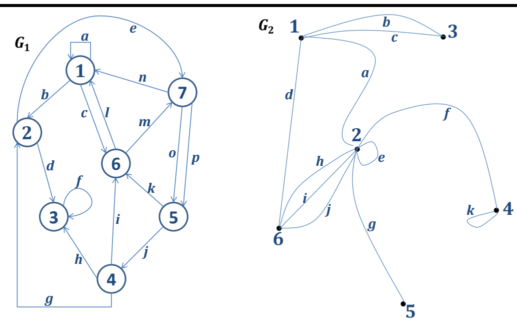


$a=(1,1)$, $b=(1,2)$
$d=(2,3)$, $e=(2,7)$
$g=(4,2)$, $i=(4,6)$
$k=(5,6)$, $p=(7,5)$

$a=\{1,2\}$, $b=\{1,3\}$
$d=\{1,6\}$, $e=\{2,2\}$
$f=\{2,4\}$, $g=\{2,5\}$
$i=\{2,6\}$, $k=\{4,4\}$

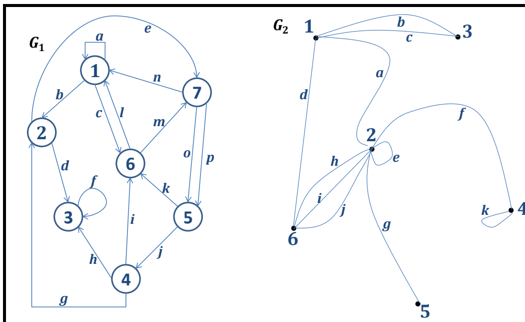
Définitions (1/5)

- Ordre du graphe = $|X|$ nombre de sommets
- Taille du graphe = $|U|$ ou $=|E|$ nombre d'arcs ou arêtes
- Extrémités confondues : boucle
- Mêmes extrémités : parallèles
- Graphe simple : pas de boucles, pas d'arcs (arêtes) parallèles



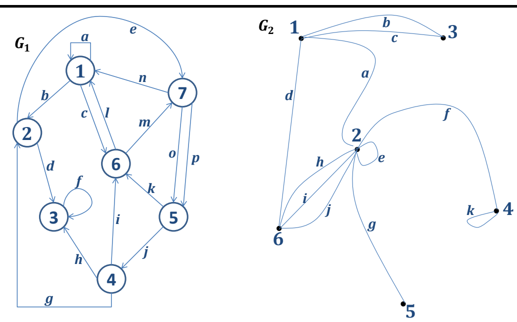
Graphe orienté : d'ordre 7 et de taille 16.

Graphe non orienté : d'ordre 6 et de taille 11.



$a=(1,1)$ et $f=(3,3)$ sont des boucles

$e=\{2,2\}$ et $k=\{4,4\}$ sont des boucles

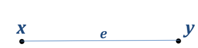


$o \,//\, p$
$c \,//\, l$

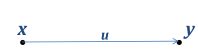
$h \,//\, i \,//\, j$
$b \,//\, c$

Définitions (2/5)

- Arc $u=(x, y)$ (Arête $e=\{x, y\}$)



  - x et y sont adjacents.
  - x et y incidents à u (resp. à e).
  - u (resp. e) est incident à x et y.
  - Uniquement l'arc u :

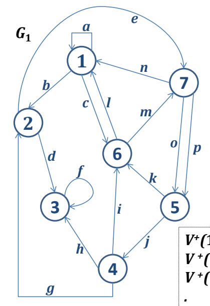


  - x prédécesseur de y.
  - y successeur de x
  - u est incident vers l'extérieur de x
  - u est incident vers intérieur de y

Enseignant : H. BENKAOUHA
(haroun.benkaouha@usthb.edu.dz)

Définitions (3/5)

- G=(X, U), x ∈X, On a :
  - $\Gamma^+(x) = Succ(x) = \{ y \in X \,/\, (x, y) \in U\}$
  - Ensemble des successeurs du sommet *x*.
  - $\Gamma^-(x) = Pred(x) = \{ y \in X \,/\, (y, x) \in U\}$
  - Ensemble des prédécesseurs du sommet *x*.
- *G=(X, U)* (resp. *G=(X, E)*), Ens. voisins de $x \in X$:
  - $V(x) = \{y \in X\text{-}\{x\} \,/\, \{x, y\} \in E\}$ Cas non orienté
  - $V(x) = V^+(x) \cup V^-(x)$ Cas orienté
  - $V^+(x) = \{y \in X\text{-}\{x\} \,/\, (x, y) \in U\}$
  - $V^-(x) = \{y \in X\text{-}\{x\} \,/\, (y, x) \in U\}$.
  - $V^+(x)$ (resp. $V^-(x)$) est appelé ensemble des voisins externes (resp. internes) de *x*.



$\Gamma^+(1) = \{1, 2, 6\}$
$\Gamma^+(2) = \{3, 7\}$
$\Gamma^+(3) = \{3\}$
.
.
.
$\Gamma^+(7) = \{1, 5\}$

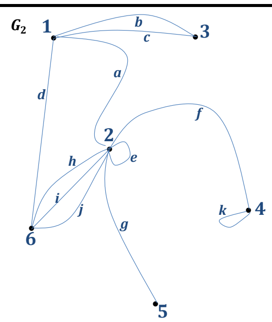
$\Gamma^-(1) = \{1, 6, 7\}$
$\Gamma^-(2) = \{1, 4\}$
$\Gamma^-(3) = \{2, 3, 4\}$
.
.
.
$\Gamma^-(7) = \{2, 6\}$

$V^+(1) = \{2, 6\}$
$V^+(2) = \{3, 7\}$
$V^+(3) = \{\} = \phi$
.
.
$V^+(7) = \{1, 5\}$

$V^-(1) = \{6, 7\}$
$V^-(2) = \{1, 4\}$
$V^-(3) = \{2, 4\}$
.
.
$V^-(7) = \{2, 6\}$

$V(1) = \{2, 6, 7\}$
$V(2) = \{1, 3, 4, 7\}$
$V(3) = \{2, 4\}$
.
.
$V(7) = \{1, 2, 5, 6\}$

$V(1) = \{2, 3, 6\}$
$V(2) = \{1, 4, 5, 6\}$
$V(3) = \{1\}$
$V(4) = \{2\}$
$V(5) = \{2\}$
$V(6) = \{1, 2\}$



h // i // j
b // c

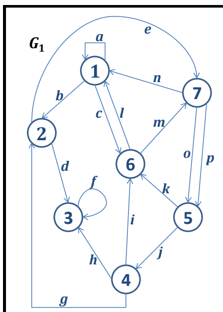
Définitions (4/5)

- Arcs (arêtes) adjacent(e)s : extrémité communes.
- Graphe orienté : 2 applications donnant l'extrémité initiale et terminale d'un arc donné:

$$I : U \to X \qquad\qquad T : U \to X$$
$$u=(x, y) \to x \qquad\qquad u=(x, y) \to y$$

Définitions (5/5)

- Multiplicité d'un arc (x_i, x_j)
  = la valeur m_{ij}
  = au nombre d'arcs qui relient x_i à x_j.
- Multiplicité d'un graphe *G*
  = $m(G)$ = maximum des m_{ij}.
- Si $m(G) = k$ on dit que *G* est un *k*-graphe



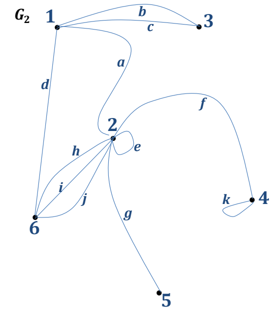
n* et *e* sont adjacents *(voir sommet 7)
h* et *j* sont adjacents *(voir sommet 4)

$I(b) = I(1, 2) = 1$
$T(b) = T(1, 2) = 2$
$I(p) = I(7, 5) = 7$
$T(p) = T(7, 5) = 5$

$m(1, 2) = 1$
$m(2, 1) = 0$
$m(1, 6) = 1$
$m(6, 1) = 1$
$m(7, 5) = 2$
...
$m(G_1) = 2$
➔ G_1 est un 2-graphe

Notion de degré – Général

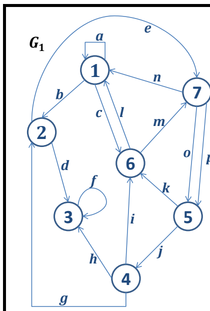
- $G = (X, E)$ ou $G = (X, U)$
- $x \in X$, on peut lui associer une valeur entière positive ou nulle : $d_G(x)$,
- degré du sommet x.
- $d_G(x)$ = nombre de fois où x est extrémité d'un arc (resp. d'une arête).



Sommet i	$d_{G_2}(i)$
1	4
2	8
3	2
4	3
5	1
6	4

Notion de degré – Graphe orienté

- Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.
  - demi-degré extérieur d'un sommet $x \in X$:
  - $d_G^+(x) = |\{ u \in U \,/\, I(u)=x \}|$.
  - demi-degré intérieur d'un sommet $x \in X$:
  - $d_G^-(x) = |\{ u \in U \,/\, T(u)=x \}|$.
  - $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$



Sommet i	$d^+_{G_1}(i)$	$d^-_{G_1}(i)$	$d_{G_1}(i)$
1	3	3	6
2	2	2	4
3	1	3	4
4	3	1	4
5	2	2	4
6	2	3	5
7	3	2	5

Notion de degré – Remarques (1/3)

- Pour tout graphe, nous avons :
  - $d_G(x) \geq |V(x)|$.
  - Si G est simple Alors On a $d_G(x) = |V(x)|$.
- Pour tout graphe orienté, nous avons :
  - $d_G^+(x) \geq |V^+(x)|$ et $d_G^-(x) \geq |V^-(x)|$.
  - Si G est 1-graphe sans boucles Alors On a $d_G^+(x) = |V^+(x)|$ et $d_G^-(x) = |V^-(x)|$.

Notion de degré – Remarques (2/3)

- On appelle degré minimal d'un graphe G, le plus petit degré dans le graphe G.

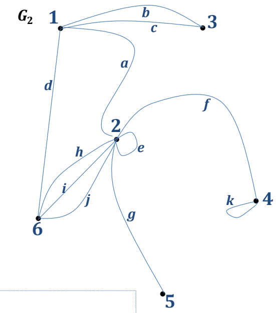
  $\delta(G) = \mathrm{Min} \{d_G(x)\}$
- On appelle degré maximal d'un graphe G, le plus grand degré dans le graphe G.

  $\Delta(G) = \mathrm{Max} \{d_G(x)\}$

Enseignant : H. BENKAOUHA
(haroun.benkaouha@usthb.edu.dz)

Notion de degré – Remarques (3/3)

- Si $d_G(x) = 0$ Alors
  x est dit <u>sommet isolé</u>.
- Si $d_G(x) = 1$ Alors
  x est dit <u>sommet pendant</u>.
- Un arc (resp. Une arête) incident(e) à un sommet pendant est appelé(e) pendant(e).



Sommet i	$d_{G_2}(i)$
1	4
2	8
3	2
4	3
5	1
6	4

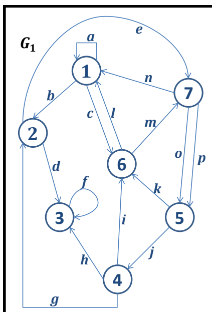
$\delta(G_2) = 1$
$\Delta(G_2) = 8$
5 sommet pendant
Ici, il n'y a pas de sommet isolé

Notion de degré – Formule des degrés

- **Cas non orienté :**
  Pour tout graphe : $G = (X, E)$, On a :
  $\sum_{x \in X} d_G(x) = 2\,|E|$.
- **Cas orienté :**
  Pour tout graphe : $G = (X, U)$, On a :
  $\sum_{x \in X} d_G(x) = 2\,|U|$ et $\sum_{x \in X} d^+_G(x) = \sum_{x \in X} d^-_G(x) = |U|$.
- **Conséquence :**
- Déduction ➔ nombre sommets degrés impairs toujours pair.

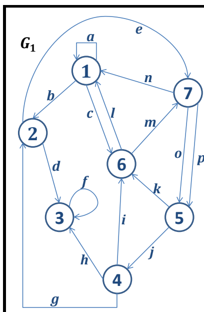
Représentation machine - Matrice d'adjacence (1/2)

- Tout graphe d'ordre n.
- Matrice M de n x n.
- Ligne i ➔ sommet i
- Colonne j ➔ sommet j
- M_{ij} : nombre d'arcs de i vers j.



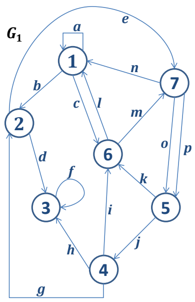
M

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1	0
6	1	0	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	2	0	0



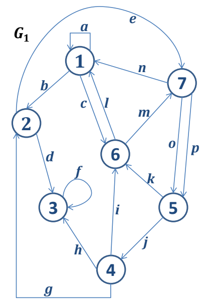
M

	1	2	3	4	5	6	7	$d^+_{G_1}(i)$
1	1	1	0	0	0	1	0	3
2	0	0	1	0	0	0	1	2
3	0	0	1	0	0	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1	0	3
5	0	0	0	1	0	1	0	2
6	1	0	0	0	0	0	1	2
7	1	0	0	0	2	0	0	3



M

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1	0
6	1	0	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	2	0	0
$d^-_{G_1}(i)$	3	2	3	1	2	3	2



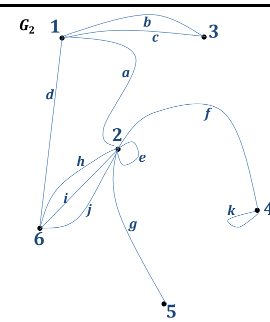
M

	1	2	3	4	5	6	7	$d^+_{G_1}(i)$
1	1	1	0	0	0	1	0	3
2	0	0	1	0	0	0	1	2
3	0	0	1	0	0	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1	0	3
5	0	0	0	1	0	1	0	2
6	1	0	0	0	0	0	1	2
7	1	0	0	0	2	0	0	3
$d^-_{G_1}(i)$	3	2	3	1	2	3	2	

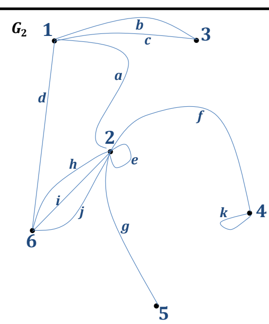
Représentation machine - Matrice d'adjacence (2/2)

- La somme d'une ligne $i = d_G^+(i)$
- La somme d'une colonne $j = d_G^-(j)$
- Si le graphe n'est pas orienté :
  - matrice symétrique,
  - boucle compte double.
  - Somme d'une ligne i = somme colonne $i = d_G(i)$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	0	1
2	1	2	0	1	1	3
3	2	0	0	0	0	0
4	0	1	0	2	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	1	3	0	0	0	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	0	1
2	1	2	0	1	1	3
3	2	0	0	0	0	0
4	0	1	0	2	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	1	3	0	0	0	0
$d_{G_2}(i)$	4	8	2	3	1	4



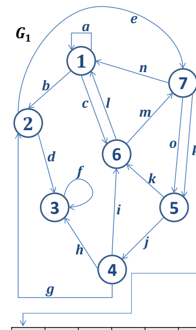
Représentation machine - Représentation par listes (1/2)

- Tout graphe d'ordre n et de taille m.
- 2 tableaux (vecteurs) PS et LS.
- PS : n+1 éléments
- LS : m éléments
- $PS[i]$: case contenant le 1er successeur de i dans LS.

Représentation machine - Représentation par listes (2/2)

- $PS[1]=1$ et $PS[n+1]=m+1$
- $PS[i]=PS[i\text{-}1]+d_G^+(i\text{-}1)$. Si i n'a pas de successeur : $PS[i]=PS[i+1]$
- Les successeurs d'un sommet i se trouvent entre la case n° $PS[i]$ et la case n° $PS[i+1]$-1 du tableau LS.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 37



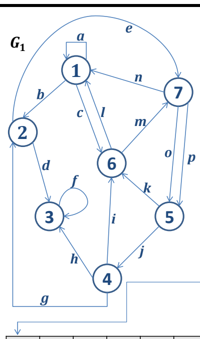
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1							

LS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 38



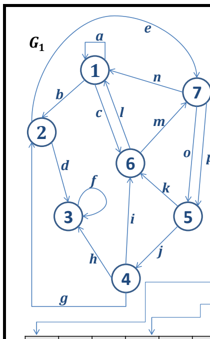
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1							

LS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	6													

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 39



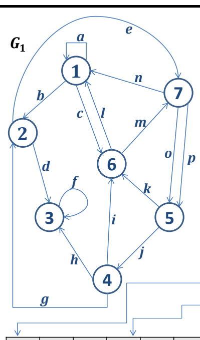
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4						

LS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	6													

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 40



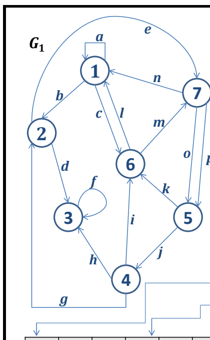
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4						

LS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	6	3	7											

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 41



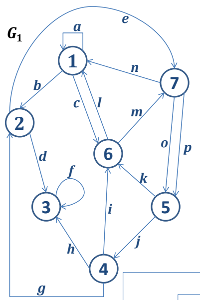
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6					

LS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	6	3	7											

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 42



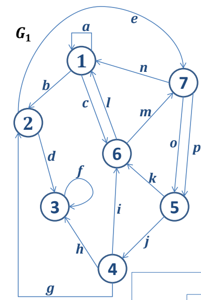
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6					

1	2	6	3	7	3										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 43



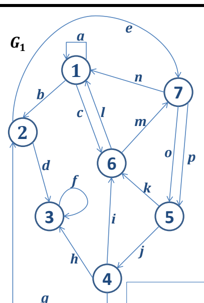
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7				

1	2	6	3	7	3										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 44



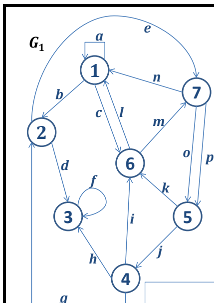
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7				

1	2	6	3	7	3	2	3	6							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 45



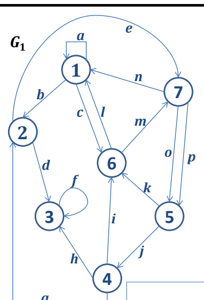
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7	10			

1	2	6	3	7	3	2	3	6							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 46



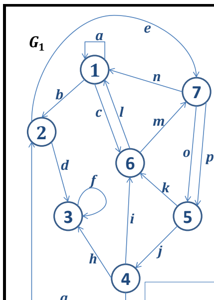
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7	10			

1	2	6	3	7	3	2	3	6	4	6					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 47



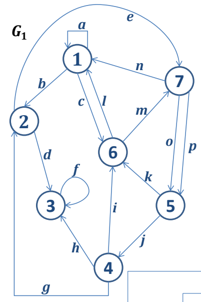
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7	10	12		

1	2	6	3	7	3	2	3	6	4	6					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 48



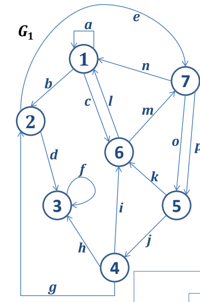
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7	10	12		

1	2	6	3	7	3	2	3	6	4	6	1	7			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 49



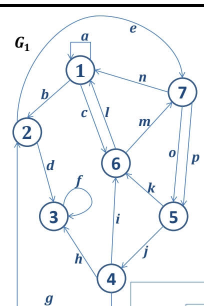
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7	10	12	14	

1	2	6	3	7	3	2	3	6	4	6	1	7			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 50



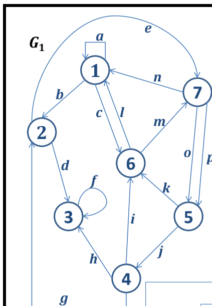
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7	10	12	14	

1	2	6	3	7	3	2	3	6	4	6	1	7	1	5	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 51



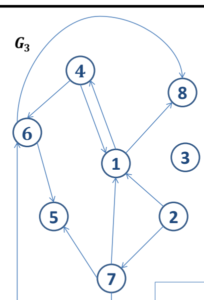
PS

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	6	7	10	12	14	17

1	2	6	3	7	3	2	3	6	4	6	1	7	1	5	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 52



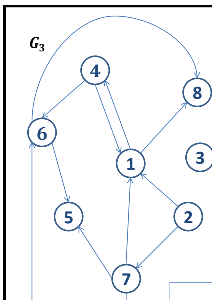
PS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1								

4	8									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

LS

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 53



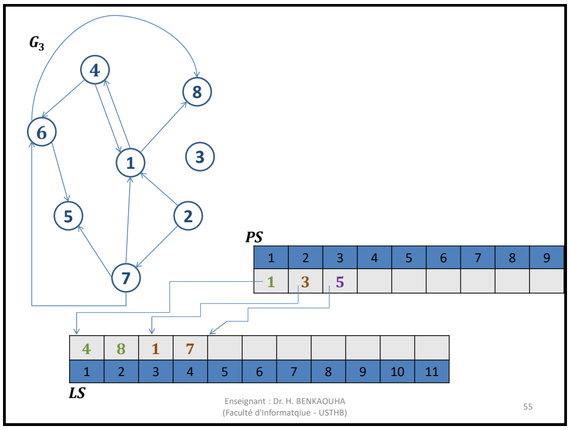
PS

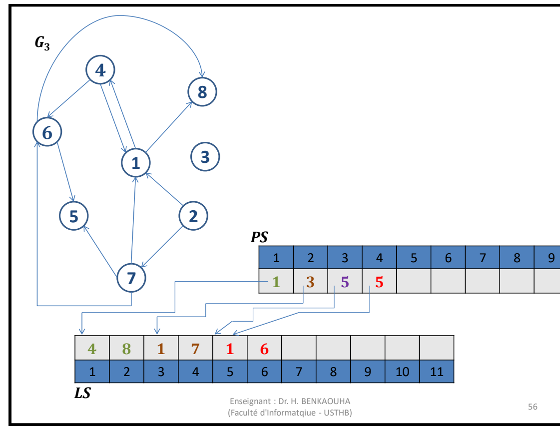
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3							

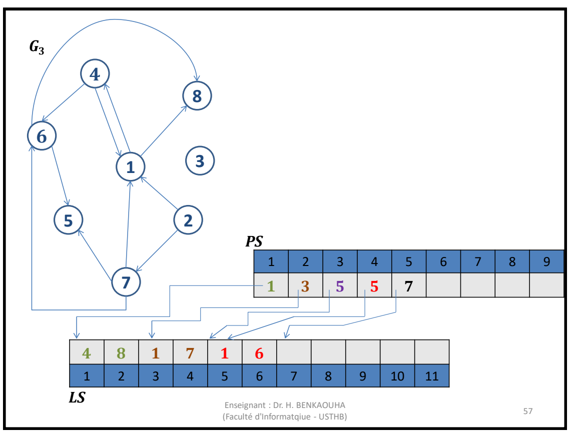
4	8	1	7							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

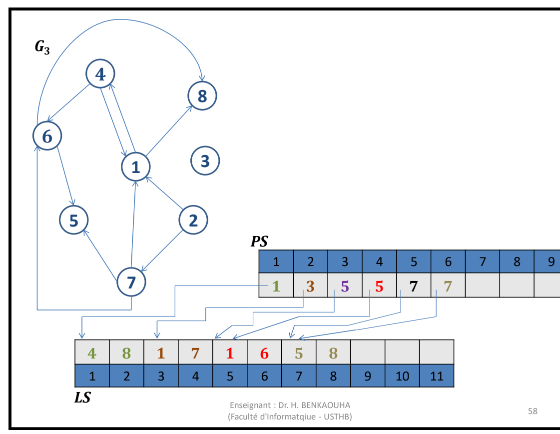
LS

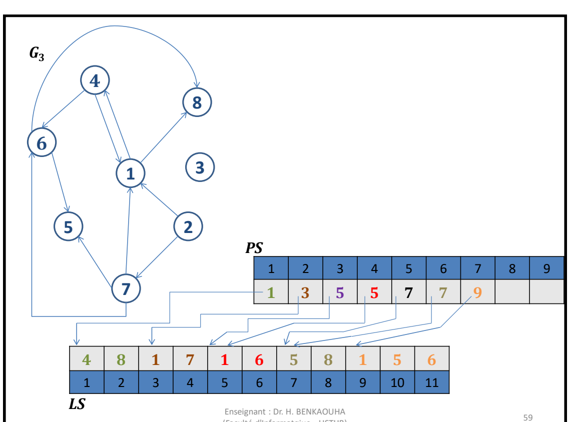
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB) 54

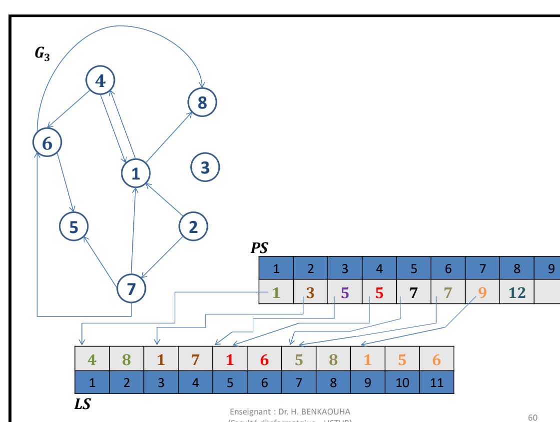

G_3
4 8 6 1 3 5 2 7
PS
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 3 5
4 8 1 7
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
LS
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
55

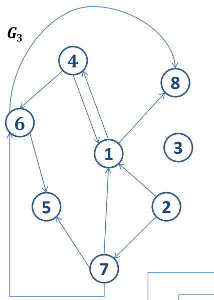

G_3
4 8 6 1 3 5 2 7
PS
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 3 5 5
4 8 1 7 1 6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
LS
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
56


G_3
4 8 6 1 3 5 2 7
PS
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 3 5 5 7
4 8 1 7 1 6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
LS
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
57


G_3
4 8 6 1 3 5 2 7
PS
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 3 5 5 7 7
4 8 1 7 1 6 5 8
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
LS
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
58


G_3
4 8 6 1 3 5 2 7
PS
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 3 5 5 7 7 9
4 8 1 7 1 6 5 8 1 5 6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
LS
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
59


G_3
4 8 6 1 3 5 2 7
PS
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 3 5 5 7 7 9 12
4 8 1 7 1 6 5 8 1 5 6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
LS
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
60



PS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	5	5	7	7	9	12	12

4	8	1	7	1	6	5	8	1	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

LS

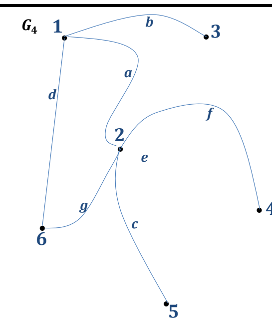
Algo : Dessiner le Graphe à partir des Listes PS et LS

```
Pour i de 1 à n
    dessiner_sommet(i)
Pour i de 1 à n
    j=PS[i]
    k=PS[i+1]-1
    Pour p de j  à k
        dessiner_arc(i,LS[p])
```


Propriétés des Graphes – Graphe simple

- Ni boucles,
- Ni arcs parallèles,
- Si G est simple, on a $d_G(x) = |V(x)|$.

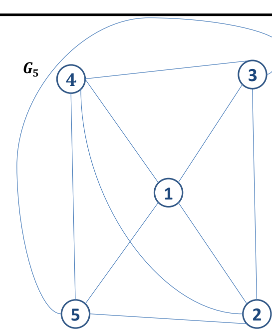
Exemple de graphe simple



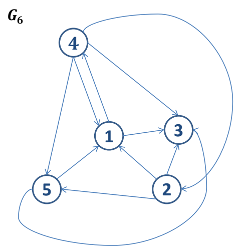
Propriétés des Graphes – Graphe complet

- Cas orienté :
  - G est complet **ssi** $\forall x \neq y \in X, (x, y) \notin U \Rightarrow (y, x) \in U$
- Cas non orienté :
  - G est complet **ssi** $\forall x \neq y \in X, \{ x, y \} \in E.$
- Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n.

Graphe non-orienté complet. Il est aussi simple $\Rightarrow K_5$



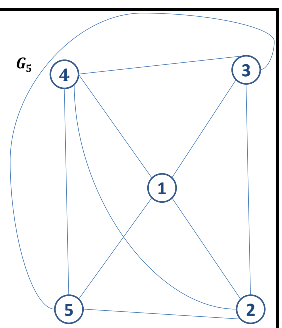
Graphe orienté complet :
Le sens des arcs n'est pas important.



Propriétés des Graphes – Graphe régulier

- G est k-régulier : $\forall x$ sommet de G, on a $d_G(x) = k$.
- En d'autres termes, $\delta(G) = \Delta(G) = k.$
- Si $k = 0$, G est un graphe sans arêtes (sans arcs) appelé stable. G est constitué seulement de sommets isolés.
- Si $k = 1$, G est constitué d'arcs (arêtes) dispersé(e)s dans l'espace.

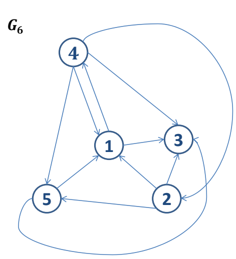
Graphe 4-régulier



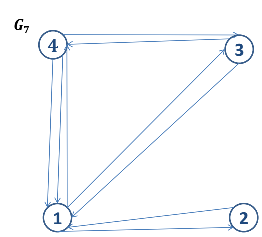
Propriétés des Graphes – Graphe symétrique

- Uniquement graphes orientés.
- G est symétrique **ssi**
  - $\forall x, y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$

Graphe orienté : Ce graphe n'est pas symétrique malgré qu'il y a deux arcs symétriques.



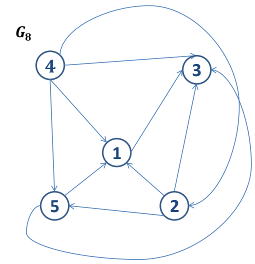
Graphe orienté : Ce graphe est symétrique.



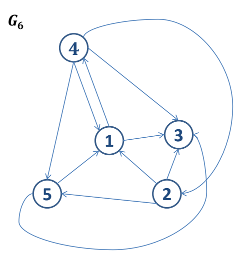
Propriétés des Graphes – Graphe antisymétrique

- Uniquement graphes orientés.
- G est antisymétrique **ssi**
  - $\forall x, y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$

Graphe orienté : Ce graphe est anti-symétrique.



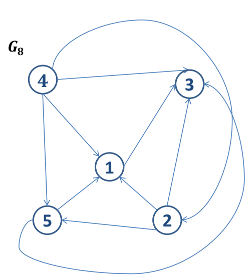
Graphe orienté : Ce graphe n'est pas anti-symétrique et il n'est pas symétrique.



Propriétés des Graphes – Graphe transitif

- Uniquement graphes orientés.
- G est transitif **ssi**
  - $\forall x, y, z \in X, (x, y) \in U$ et $(y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U$

Graphe orienté : Ce graphe est transitif.

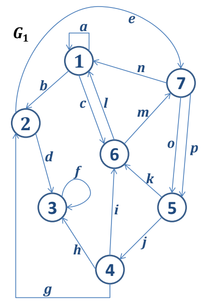


Propriétés des Graphes – Graphe biparti

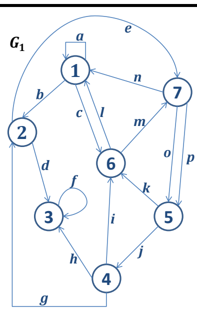
- G <u>biparti</u> ssi X admet une partition en 2 sous ensembles X_1 et X_2 avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ et $X_1 \cup X_2 = X$.
- Cas orienté : $\forall (x, y) \in U \Rightarrow x \in X_1$ et $y \in X_2$
- Cas non orienté : $\forall \{x, y\} \in E$ $(x \in X_1$ et $y \in X_2)$ ou $(x \in X_2$ et $y \in X_1)$
- G <u>biparti complet</u> **ssi** G biparti et $\forall x \in X_1$ et $\forall y \in X_2 \Rightarrow (x, y) \in U$.
- Un graphe biparti complet et simple $G=(X_1 \cup X_2, U)$ (resp. $G=(X_1 \cup X_2, E)$)avec $|X_1|=p$ et $|X_2|=q$ est noté $\boldsymbol{K_{p,q}}$.

Graphes particuliers – Sous-graphe

- Un sous graphe de G engendré par l'ensemble de sommets A est le graphe :
- $G_A = (A, U_A)$ où $U_A = \{u \in U \,/\, I(u) \in A$ et $T(u) \in A\}$ dans le cas orienté.
- $G_A = (A, E_A)$ où $E_A = \{e = \{x, y\} \in E \,/\, x \in A$ et $y \in A\}$ dans le cas non orienté.
- Si on pose $B=X-A$, on note G_A aussi $G-B$

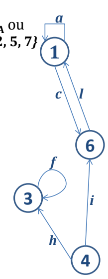


Le sous graphe de G_1 engendré par l'ensemble de sommets $A=\{1, 3, 4, 6\}$
G_{1A} ou $G_1 - \{2, 5, 7\}$



Le sous graphe de G_1 engendré par l'ensemble de sommets $A=\{1, 3, 4, 6\}$

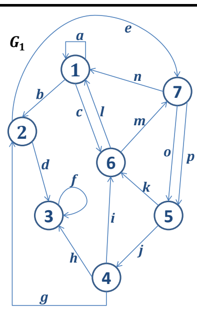
G_{1A} ou **$G_1 - \{2, 5, 7\}$**



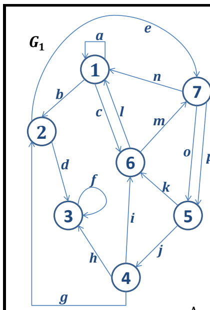
On supprime les arcs $b, d, e, g, j, k, l, m, n, o, p$ car ils ont au moins une extrémité qui n'existe pas.

Graphes particuliers – Graphe partiel

- Un graphe partiel de G engendré par l'ensemble d'arcs (resp. d'arêtes) V est :
- Le graphe $G_V = (X, V)$.
- Si on pose $W=U-V$, on note G_V aussi $G-W$

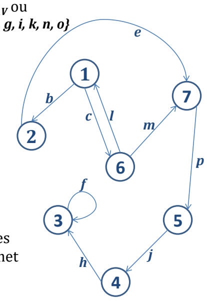


Le graphe partiel de G_1 engendré par l'ensemble des arcs $V=\{b, c, e, f, h, j, l, m, p\}$
G_{1V} ou $G_1 - \{a, d, g, i, k, n, o\}$



Le graphe partiel de G_1 engendré par l'ensemble des arcs $V=\{b, c, e, f, h, j, l, m, p\}$

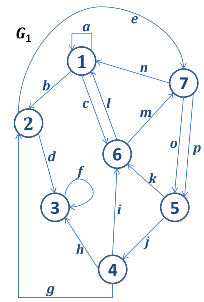
G_{1V} ou **$G_1 - \{a, d, g, i, k, n, o\}$**



Aucun sommet n'est supprimé dans les graphes partiels, même si le sommet est isolé.

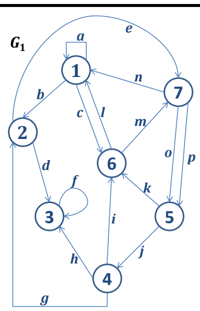
Graphes particuliers – Sous-graphe partiel

- Un sous graphe partiel de G engendré par l'ensemble de sommets A et l'ensemble d'arcs (resp. d'arêtes) V est le graphe $G_{A,V} = (A, V_A)$.
- V_A est l'ensemble d'arcs (resp. arêtes) qui ont leurs deux extrémités dans le sous ensemble V.

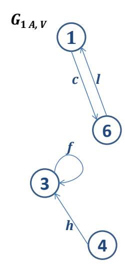


Le sous graphe partiel de G_1 engendré par l'ensemble de sommets A={1, 3, 4, 6} et l'ensemble des arcs V={b, c, e, f, h, j, l, m, p}

$G_{1\ A,V}$

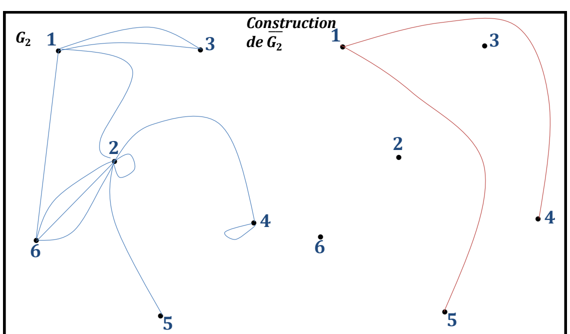


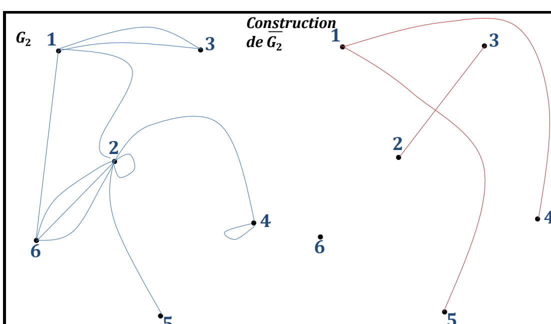
Le sous graphe partiel de G_1 engendré par l'ensemble de sommets A={1, 3, 4, 6} et l'ensemble des arcs V={b, c, e, f, h, j, l, m, p}

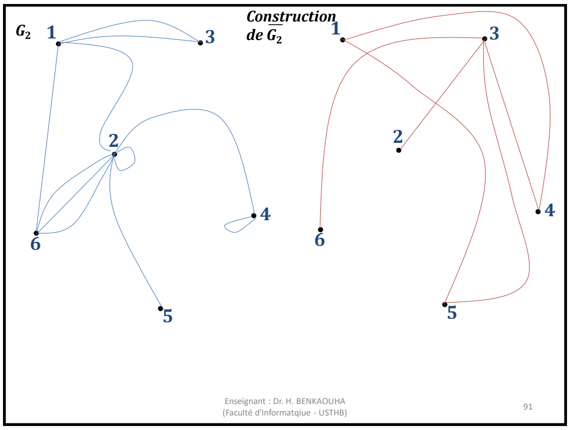


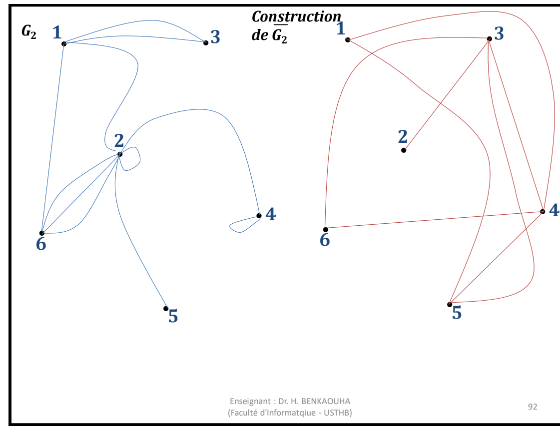
Graphes particuliers – Complément d'un graphe

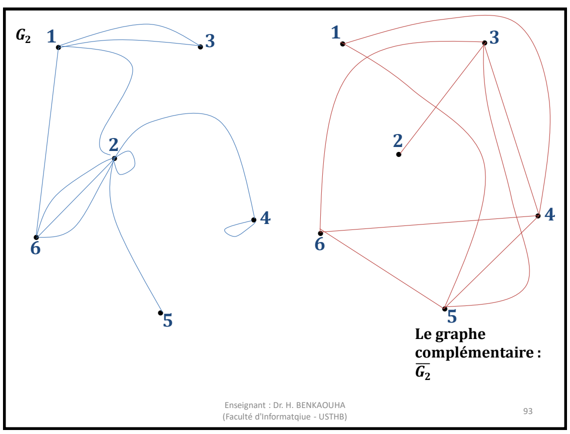
- Le graphe complémentaire de G est noté
  - $\overline{G} = (X, \overline{U})$ (resp. $\overline{G} = (X, \overline{E})$) où :
  - $\overline{U} = \{(x, y) \in X^2 \ / \ x \neq y$ et $(x, y) \notin U\}$
  - resp. $\overline{E} = \{ \{x, y\} \in X^2 \ / \ x \neq y$ et $\{x, y\} \notin E\}$

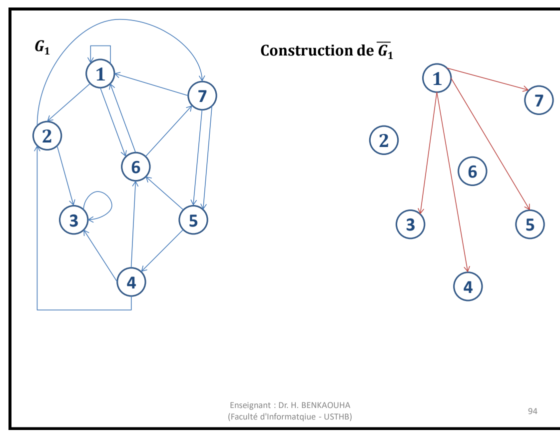


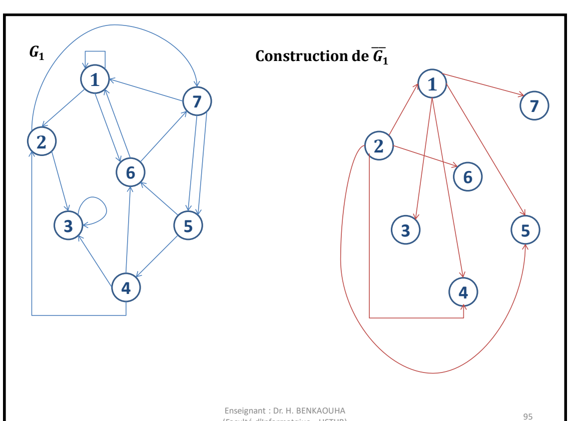


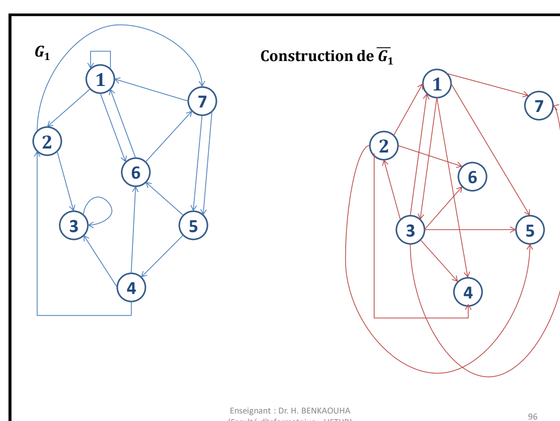

G_2
Construction de $\overline{G_2}$
1
2
3
4
5
6
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
91


G_2
Construction de $\overline{G_2}$
1
2
3
4
5
6
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
92

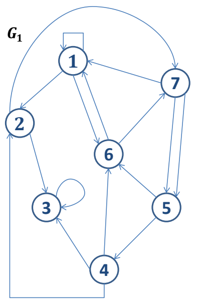

G_2
1
2
3
4
5
6
Le graphe complémentaire : $\overline{G_2}$
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
93


G_1
Construction de $\overline{G_1}$
1
2
3
4
5
6
7
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
94

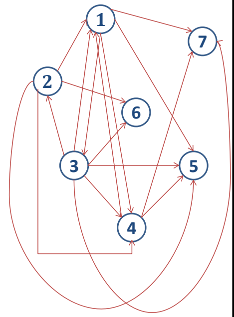

G_1
Construction de $\overline{G_1}$
1
2
3
4
5
6
7
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
95


G_1
Construction de $\overline{G_1}$
1
2
3
4
5
6
7
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatqiue - USTHB)
96

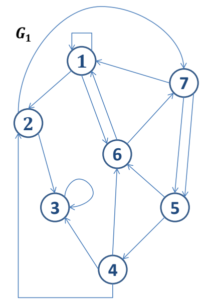
G_1



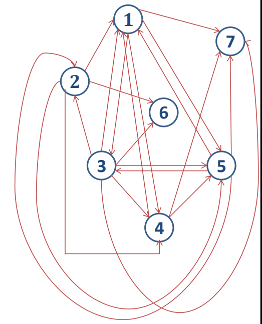
Construction de $\overline{G_1}$



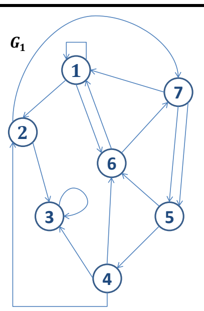
G_1



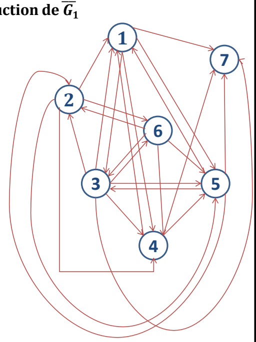
Construction de $\overline{G_1}$



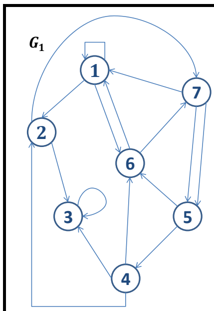
G_1



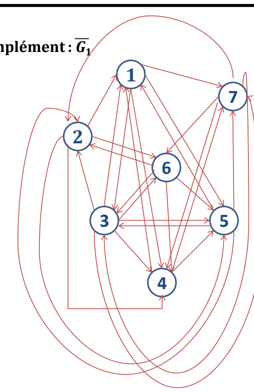
Construction de $\overline{G_1}$



G_1



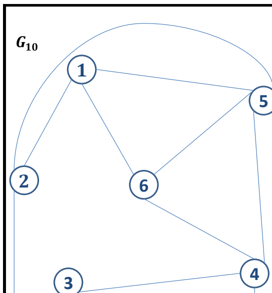
Le complément : $\overline{G_1}$



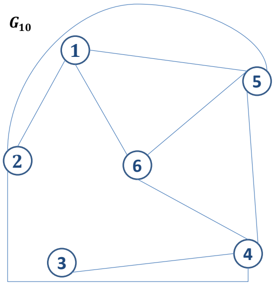
Stable / Clique

- <u>Stable</u> dans G :
  - Sous-ensemble de sommets $S \subseteq X$
  - Sous graphe engendré par S est formé de sommets isolés.
  - Chaque partition d'un graphe biparti forme un stable.
- <u>Clique</u> dans G :
  - Sous-ensemble de sommets $C \subseteq X$
  - Sous graphe engendré par C est complet.

G_{10}



$S_1=\{1, 4\}$ ➔ Stable de 2 éléments.
$S_2=\{2, 6\}$ ➔ Stable de 2 éléments.
$S_3=\{2, 3, 6\}$ ➔ Stable de 3 éléments.



$C_1=\{3, 4\}$ ➔ Clique de 2 éléments.
$C_2=\{4, 5, 6\}$ ➔ Clique de 3 éléments.
$C_3=\{1, 2, 5\}$ ➔ Clique de 3 éléments.

Coloration des sommets d'un graphe

- k-coloration de $G=(X, E)$: une application φ

$$\varphi : X \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$$
$$x \rightarrow \varphi(x)$$

  - Tel que $\forall y \neq x \in X$ si $\{x, y\} \in E$ Alors $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.
  - 2 sommets adjacents : 2 couleurs différentes.
  - Tous les sommets doivent être coloriés.
- Une k-coloration partitionne X en k stables où tous les sommets du même stable ont la même couleur.

Coloration des sommets d'un graphe – Nombre chromatique

- Nombre chromatique de $G=(X, E)$:
  - Nombre **min.** de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G.
  - Ce nombre est noté $\chi(G)$.
  - $\Rightarrow \; 1 \leq \chi(G) \leq n=|X|$.

Coloration des sommets d'un graphe – Problème de coloration

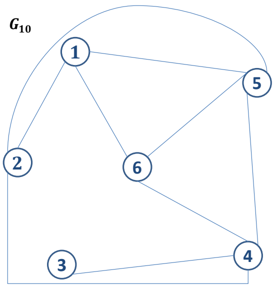
- Réaliser k-coloration d'1 graphe G.
- k doit être le plus proche possible de $\chi(G)$.
- L'algorithme de ***Welsh & Powell*** est l'un des plus connus pour résoudre ce problème.

Coloration des sommets d'un graphe – Algorithme de Welsh et Powell

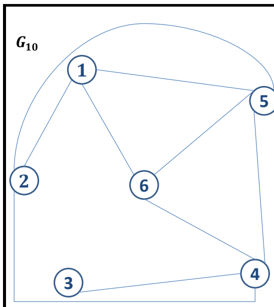
- Ordonner les sommets par de degrés
- Ordre décroissant : du plus grand au plus petit.
- $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tel que $d_G(x_i) \geq d_G(x_{i+1})$
- Pour i de 1 à n :
  - Affecter à x_i la plus petite couleur possible distincte des couleurs de $V(x_i)$ colorés.

Coloration des sommets d'un graphe – Propositions

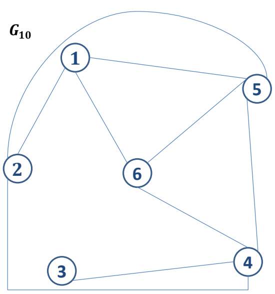
- $\forall$ $G=(X, E$: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.
- $\forall$ $G=(X, E)$ complet K_n où $n \geq 2$ est l'ordre de G : $\chi(G) = \Delta(G)+1=n$.
- $\forall$ $G=(X, E)$ où $C \subseteq X$ est la plus grande clique dans G : $\chi(G) \geq |C|$.



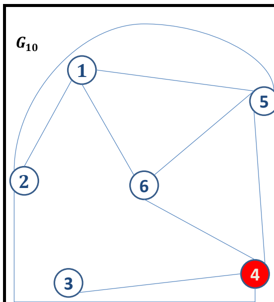
$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	Ordre	φ(i)
1			
2			
3			
4			
5			
6			



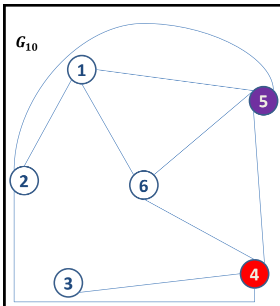
$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	Ordre	φ(i)
1	3		
2	3		
3	1		
4	4		
5	4		
6	3		



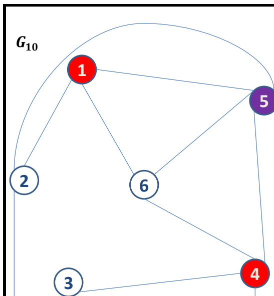
$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	Ordre	φ(i)
1	3	3	
2	3	4	
3	1	6	
4	4	1	
5	4	2	
6	3	5	



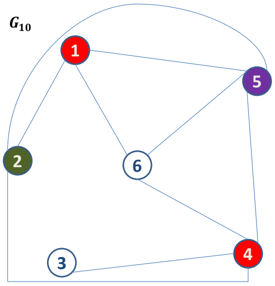
$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	Ordre	φ(i)
1	3	3	
2	3	4	
3	1	6	
4	4	1	1
5	4	2	
6	3	5	



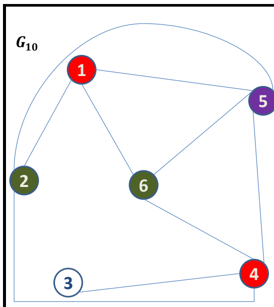
$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	Ordre	φ(i)
1	3	3	
2	3	4	
3	1	6	
4	4	1	1
5	4	2	2
6	3	5	



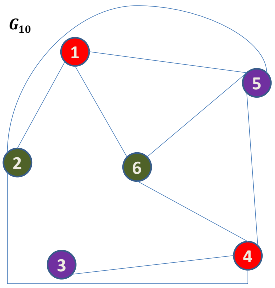
$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	Ordre	φ(i)
1	3	3	1
2	3	4	
3	1	6	
4	4	1	1
5	4	2	2
6	3	5	



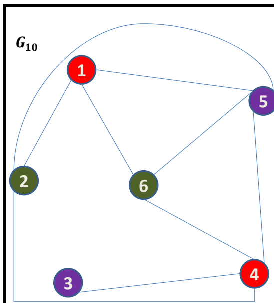
$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	*Ordre*	φ(i)
1	3	3	1
2	3	4	3
3	1	6	
4	4	1	1
5	4	2	2
6	3	5	



$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	*Ordre*	φ(i)
1	3	3	1
2	3	4	3
3	1	6	
4	4	1	1
5	4	2	2
6	3	5	3



$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	*Ordre*	φ(i)
1	3	3	1
2	3	4	3
3	1	6	2
4	4	1	1
5	4	2	2
6	3	5	3



$i \in X$	$d_{G_{10}}(i)$	*Ordre*	φ(i)
1	3	3	1
2	3	4	3
3	1	6	2
4	4	1	1
5	4	2	2
6	3	5	3

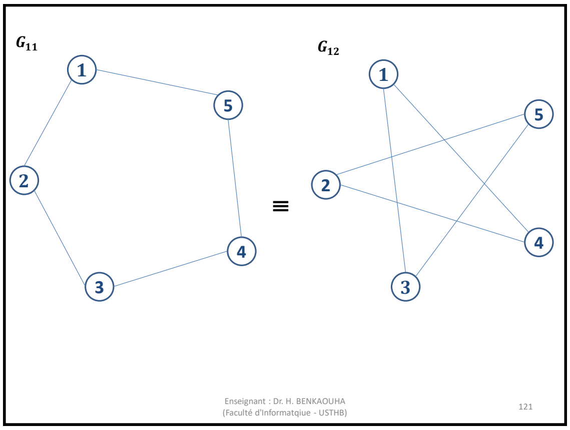
Nous avons obtenu une **3-*coloration***

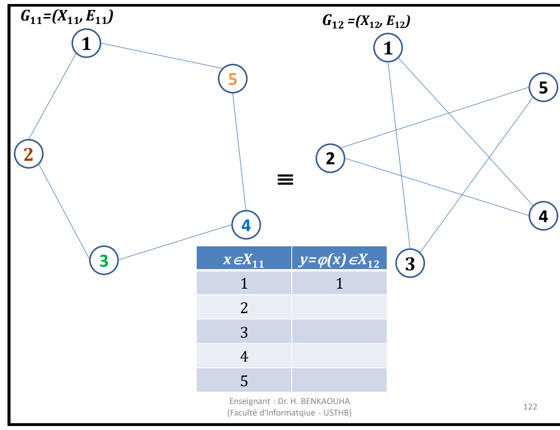
Isomorphisme (≡)

- 2 graphes orientés $G_1= (X_1, U_1)$ et $G_2= (X_2, U_2)$.
  - $G_1 \equiv G_2$ **ssi** $\exists f : X_1 \rightarrow X_2$ et $\exists g : U_1 \rightarrow U_2$ 2 bijections avec $\forall\ u \in U_1$, $u=(x, y) \Leftrightarrow g(u)=(f(x), f(y))$.
- 2 graphes non orientés $G_1= (X_1, E_1)$ et $G_2= (X_2, E_2)$.
  - $G_1 \equiv G_2$ **ssi** $\exists\ \varphi : X_1 \rightarrow X_2$ bijection avec $\forall\ x, y \in X_1$, $e=\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$.

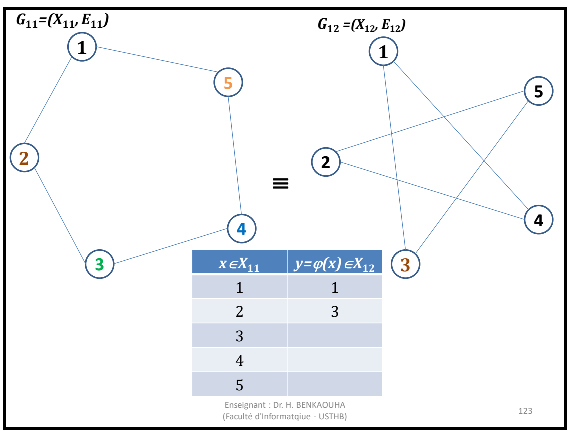
Isomorphisme (≡)

- $G_1= (X_1, U_1) \equiv G_2= (X_2, U_2)$ (resp. $G_1= (X_1, E_1) \equiv G_2= (X_2, E_2)$)
- Alors $|X_1| = |X_2|$ et $|U_1| = |U_2|$ (resp. $|E_1| = |E_2|$) et $\forall x \in X_1$ de degré $d_G(x)$, $\exists y \in X_2$ de degré $d_G(y) = d_G(x)$.
- La réciproque n'est pas toujours vraie. On peut trouver deux graphes non isomorphes ayant le même nombre de sommets et le même nombre d'arc (ou arêtes).

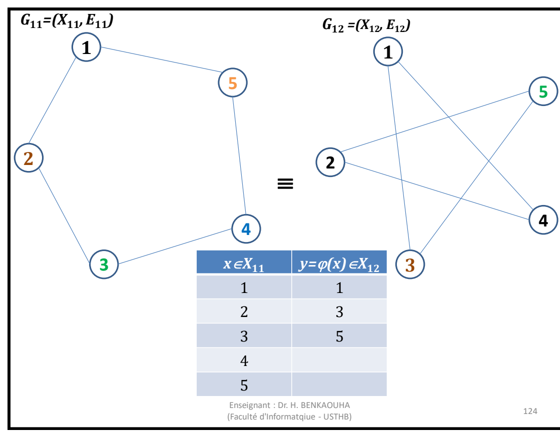




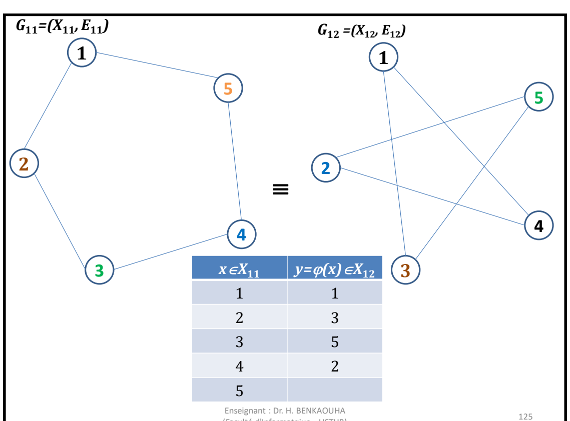
$x \in X_{11}$	$y=\varphi(x) \in X_{12}$
1	1
2	
3	
4	
5	



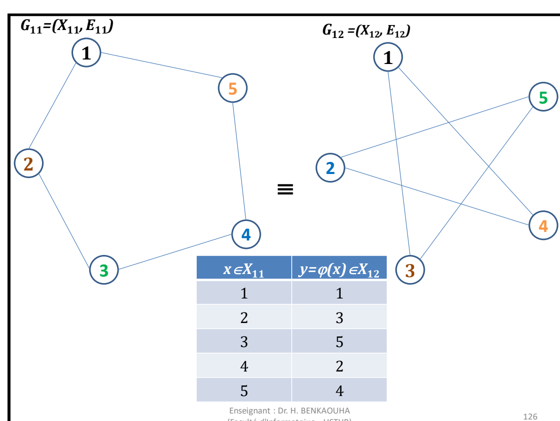
$x \in X_{11}$	$y=\varphi(x) \in X_{12}$
1	1
2	3
3	
4	
5	



$x \in X_{11}$	$y=\varphi(x) \in X_{12}$
1	1
2	3
3	5
4	
5	



$x \in X_{11}$	$y=\varphi(x) \in X_{12}$
1	1
2	3
3	5
4	2
5	



$x \in X_{11}$	$y=\varphi(x) \in X_{12}$
1	1
2	3
3	5
4	2
5	4