Chapitre 2 : résolution numérique des équations linéaires (partie 1) méthodes directes.

Introduction : beaucoup de problèmes se réduisent à la résolution numérique d'un système d'équations linéaires. Il existe deux grandes classes de méthodes pour résoudre ce type de systèmes :

Les méthodes directes qui déterminent la solution après un nombre fini d'opérations arithmétiques.

Les méthodes itératives qui consistent à approcher la solution du système avec une précision donnée après un nombre d'itérations donné.

I-Méthodes directes

Etant donné un système linéaire : $\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}^{b}$

La méthode de Cramer pour résoudre ce système si on suppose que $\det A \neq 0$ est

$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ Où $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1(i-1)} b_1 a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \dots a_{n(i-1)} b_n a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre ce système avec la méthode de Cramer est de : $(n+1)(nn!-1)$ opérations à virgule flottante alors pour un système $n = 100$ si on utilise la formule de Stirling $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ cela reviendrait à effectuer $9.4.10^{161}$ c'est-à-dire pour un ordinateur fonctionnant à $(1.7.10^{15})$ par seconde(la vitesse des ordinateurs actuels). il faudrait environ $1.76.10^{139}$ années pour résoudre ce système !!!

D'où la nécessité de développer d'autres méthodes pour :

- ✓ Minimiser les calculs.
- ✓ Economie du temps machine.
- ✓ Simplicité d'implémentation.
- ✓ Economie de place mémoire.

I.1 Méthode de Gauss

La resolution des systèmes triangulaires est peu couteuse numériquement. L'idée est alors de triangulariser le système c'est-à-dire transformer de manière équivalente le système $AX = b$ avec A une matrice quelconque en le système$\tilde{A}X = b$ avec T une matrice triangulaire.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Formalisme de la méthode de Gauss :

Soit le système linéaire: $\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}^{b}$.

La méthode de Gauss comporte n étapes si on compte l'étape de l'initialisation de l'algorithme. On note $A^{(k)}$ l'état de la matrice transformée à la k^{ieme} étape. On initialise l'algorithme en posant $A^{(1)} = A$ puis on calcule les étapes k=2,…,n à l'aide de la relation de récurrence définie pour $i = k+1, \dots, n$ par

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} \end{cases}$$

D'où l'Algorithme1 :

Algorithme 1 : Algorithme d'élimination de Gauss

Entrées : $\mathbf{A}, \mathbf{b}$
pour $k = 1, \dots, n-1$ **faire**
    `// On teste si le pivot est nul`
    si $|a_{kk}| < \varepsilon$ **alors**
        Afficher un message d'erreur
    fin
    sinon
        `//Calcul de` $\mathbf{A}^{(k)}$
        pour $i = k+1, \dots, n$ **faire**
            $c \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
            $b_i \leftarrow b_i - c \times b_k$
            $a_{ik} \leftarrow 0$
            pour $j = k+1, \dots, n$ **faire**
                $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - c \times a_{kj}$
            fin
        fin
    fin
fin
$\widetilde{\mathbf{A}} \leftarrow \mathbf{A}$
$\widetilde{\mathbf{b}} \leftarrow \mathbf{b}$

Sorties : $\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{b}}$

Remarques

1) Les $a_{kk}^{(k)}$ sont appelés les pivots de la méthode de Gauss.

2) La caractérisation des $a_{kk}^{(k)} = \frac{\det A_{[k]}}{\det A_{[k-1]}}$ nous permet de donner la condition pour que la méthode de Gauss soit applicable sans changement de lignes ou de colonnes à savoir $\det A_{[k]} \neq 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

3) La résolution par la méthode de Gauss nécessite de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ additions, $\frac{n^3}{3}$ additions et $\frac{n^2}{2}$ divisions. A titre d'exemple pour un système à dix équations on obtient 700 opérations pour la méthode de Gauss contre près de 479×10^6 pour celle de Cramer.

I.2 méthode LU (Interprétation matricielle de la méthode de Gauss).

Les étapes suivis dans la méthode de Gauss peuvent être interprétées comme des multiplications à gauche par des matrices appropriées selon le schéma suivant :

La première étape de la méthode de Gauss peut être formalisée comme étant la multiplication à gauche de la matrice $A = A^{(1)}$ par la matrice :

$$L'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{-a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{-a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Pour obtenir la matrice $A^{(2)} = L'_1 A^{(1)}$.

Ainsi de suite chaque étape de la méthode de Gauss se résumera par une série de multiplications comme suit : $L'_{n-1} \ldots L'_2 L'_1 A^{(1)}$ où

$$L_k' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \overbrace{\cdots}^{k} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{-a_{k+1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_{nk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} .pour\ 1 \leq k \leq n-1$$

Chacune des matrices L_k' est inversible de déterminant égal à 1 on peut vérifier aisément que l'inverse de la matrice L_k' est la matrice

$$L_k = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & & \overbrace{\quad}^{k} & & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dfrac{a_{k+1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{a_{nk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

D'où le théorème

Théorème de l'existence de la factorisation $\boldsymbol{LU}$. Soit A une matrice d'ordre n. La factorisation LU de A avec L une matrice triangulaire inférieure qui des 1 sur la diagonale et U une triangulaire supérieure existe et elle est unique si et seulement si toutes les matrices principales extraites de A $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ $pour\ 1 \leq k \leq n$ sont inversibles $\Leftrightarrow$ $detA_k \neq 0$.

Preuve l'existence vient de l'interprétation matricielle de la méthode de Gauss. L'unicité par l'absurde supposons l'existence de deux décomposition LU de A $A = LU = L'U'$ comme L et L' sont des triangulaires inférieures et ont des 1 sur la diagonale donc elles sont inversibles alors par la multiplication à gauche de L'^{-1} les deux équations on obtient alors $L'^{-1}LU = U'$ de même $U\ et\ U'$ sont inversible car (det A $= \det A_n = \det L \times \det U \neq 0$ donc $\det U \neq 0$) on multiplie par U^{-1} à droite on obtient alors : $L'^{-1}L = U'U^{-1} = P$ P est une matrice triangulaire inférieure car produit de triangulaires inférieures et triangulaires supérieures car produit de triangualires supérieures et qui a des 1 sur la diagonale car produit de $L'^{-1}L$ donc $P = I\ la\ matrice\ identit$é. D'où l'égalité $L = L' et\ U = U'$.

Remarques

1) Pour calculer les matrices L et U on ne suit pas le cheminement du théorème il y'a un algorithme s'intitulant l'algorithme de Doolittle qui nous permettra de les déterminer. D'abord la k-ième ligne de U ensuite la k-ième colonne de L.
2) On peut choisir les 1 sur la diagonale de la triangulaire supérieure U , mais dans ce cas l'algorithme est appelé l'algorithme de Crout.

Algorithme 2 : Algorithme de Doolittle

Entrées : **A**

$L \leftarrow I_{nn}$

$U \leftarrow 0_{nn}$

pour $i = 1, \dots, n-1$ **faire**

  pour $j = i, \dots, n$ **faire**

$$u_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

  fin

  pour $j = i+1, \dots, n$ **faire**

$$l_{ji} \leftarrow \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right)$$

  fin

fin

$u_{nn} \leftarrow a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$

Sorties : L, U

Exemple

Déterminer la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ de deux manières différentes.et puis résoudre le système$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.