Chapitre 3
Arbre de Couverture Optimal
Série d'exercices de TD

Présenté par :
H. BENKAOUHA
Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB
haroun.benkaouha@usthb.edu.dz
haroun.benkaouha@gmail.com

Exercice 1

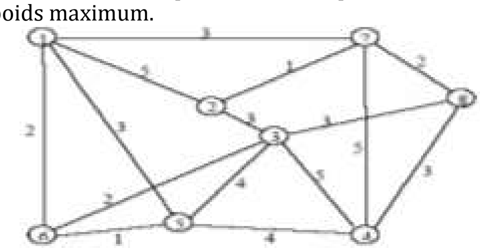
- Montrer que :
  – la moyenne des degrés des sommets d'un arbre
  – est strictement inférieure à 2.

Exercice 1 – Solution

- Par définition, dans un graphe d'ordre n et de taille m qui est un arbre, on a $m=n-1$
- D'un autre coté on a la somme des degrés est $2m$
- Donc la moyenne est $2m/n$
- On remplace m par $n-1$
- Moyenne_degrés $= 2(n-1)/n = 2n/n - 2/n$
  $= 2 - 2/n < 2$

Exercice 2

- Trouver l'arbre de poids minimum puis l'arbre de poids maximum.



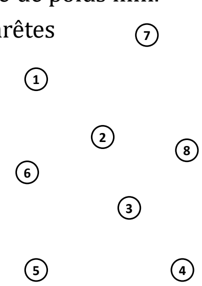
- Donner le codage de Prufer correspondant à l'arbre trouvé

Exercice 2 – Solution (1/4)

- On applique l'algorithme de **Kruksal** pour trouver l'arbre de couverture de poids min.
- Tri par ordre croissant des arêtes

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

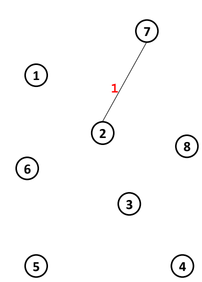


Exercice 2 – Solution (1/4)

- Algo. de Kruksal (1/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

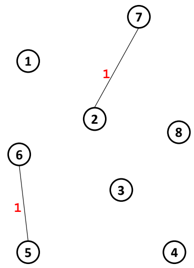


Exercice 2 – Solution (1/4)

- Algo. de Kruksal (2/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



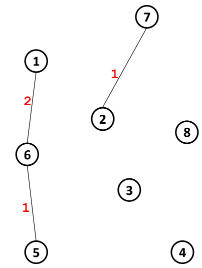
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 7

Exercice 2 – Solution (1/4)

- Algo. de Kruksal (3/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



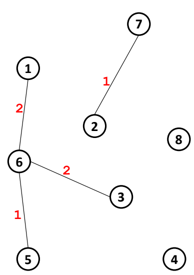
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 8

Exercice 2 – Solution (1/4)

- Algo. de Kruksal (4/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



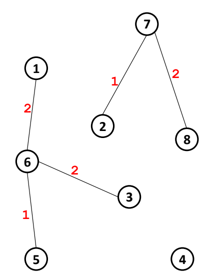
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 9

Exercice 2 – Solution (1/4)

- Algo. de Kruksal (5/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Oui
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



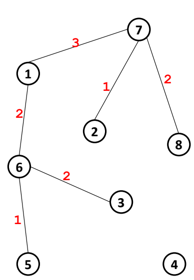
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 10

Exercice 2 – Solution (1/4)

- Algo. de Kruksal (6/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Oui
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Oui
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



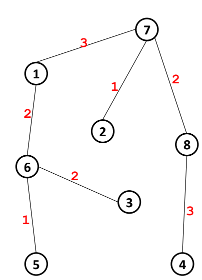
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 11

Exercice 2 – Solution (1/4)

- Algo. de Kruksal (7/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Oui
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Oui
{2,3}	3	Non

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	Non
{4,5}	4	Non
{1,2}	5	Non
{3,4}	5	Non
{4,7}	5	Non

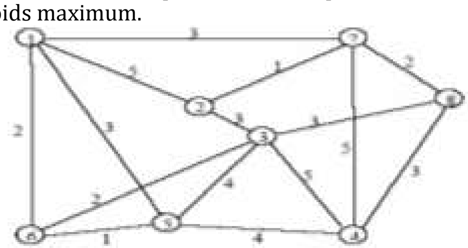


– Poids de l'arbre de couverture de poids minimal : 14

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 12

Exercice 2

- Trouver l'arbre de poids minimum puis l'arbre de poids maximum.



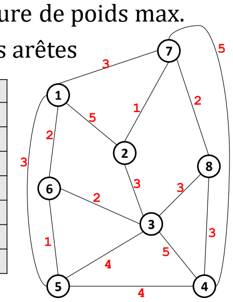
- Donner le codage de Prufer correspondant à l'arbre trouvé

Exercice 2 – Solution (2/4)

- On applique l'algorithme de Kruksal pour trouver l'arbre de couverture de poids max.
- Tri par ordre croissant des arêtes

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

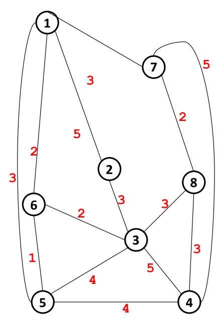


Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 1/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

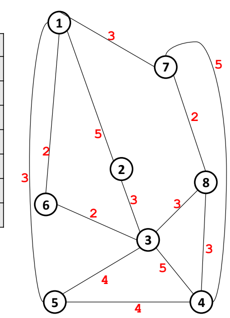


Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 2/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

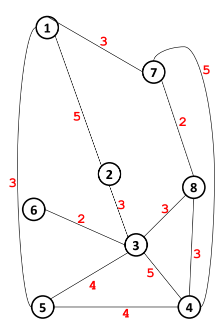


Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 3/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

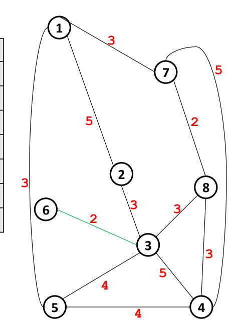


Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 4/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

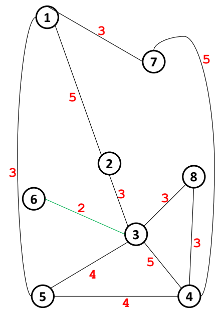


Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 5/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



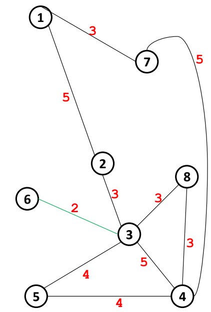
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 19

Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 6/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



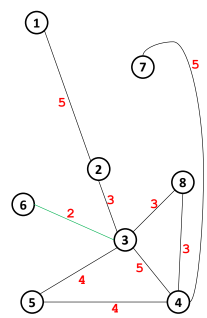
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 20

Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 7/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



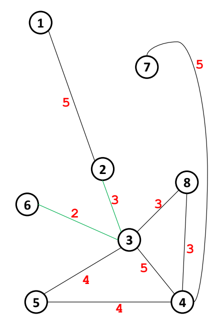
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 21

Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 8/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



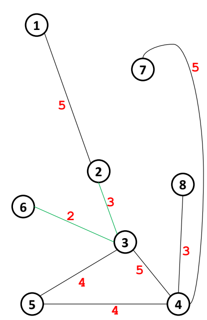
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 22

Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 9/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



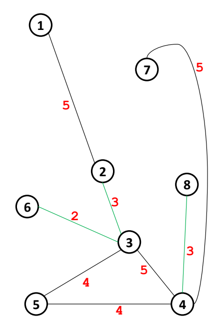
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 23

Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 10/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



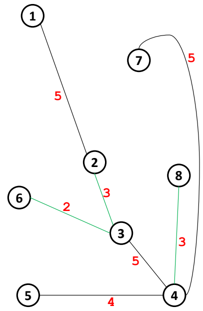
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 24

Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal 11/11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	Non
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



On prend toutes les arêtes restantes

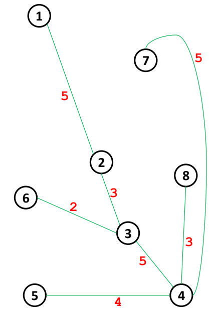
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 25

Exercice 2 – Solution (2/4)

- Algo. de Kruksal (fin)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	Non
{4,5}	4	Oui
{1,2}	5	Oui
{3,4}	5	Oui
{4,7}	5	Oui

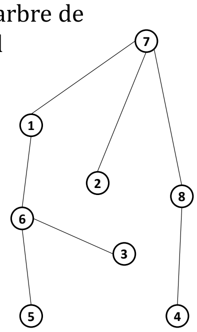


Poids de l'arbre de couverture de poids max : 27

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 26

Exercice 2 – Solution (3/4)

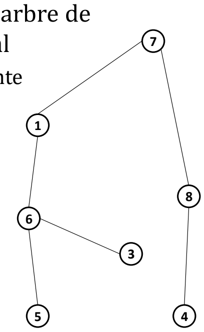
- Codage de Prufer (1/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Sommets de degré 1 :
  - 2, 3, 4, 5
  - Le min : 2
  - 2 est relié à 7
  - P=7



Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 27

Exercice 2 – Solution (3/4)

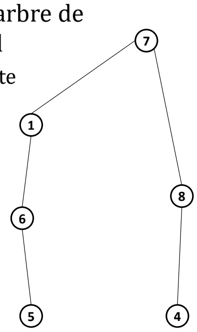
- Codage de Prufer (2/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 2 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 3, 4, 5
  - Le min : 3
  - 3 est relié à 6
  - P=7 6



Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 28

Exercice 2 – Solution (3/4)

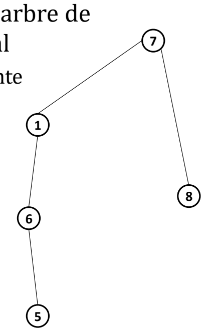
- Codage de Prufer (3/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 3 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 4, 5
  - Le min : 4
  - 4 est relié à 8
  - P=7 6 8



Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 29

Exercice 2 – Solution (3/4)

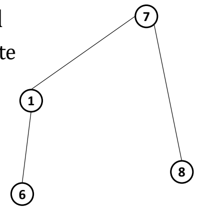
- Codage de Prufer (4/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 4 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 5, 8
  - Le min : 5
  - 5 est relié à 6
  - P=7 6 8 6



Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 30

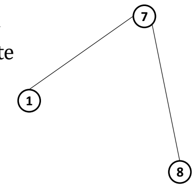
Exercice 2 – Solution (3/4)

- Codage de Prufer (5/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 5 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 6, 8
  - Le min : 6
  - 6 est relié à 1
  - P=7 6 8 6 1



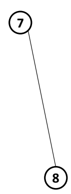
Exercice 2 – Solution (3/4)

- Codage de Prufer (6/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 6 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 1, 8
  - Le min : 1
  - 1 est relié à 7
  - P=7 6 8 6 1 7



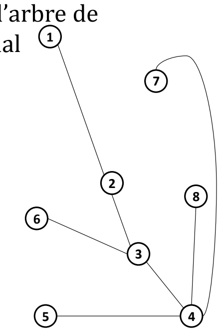
Exercice 2 – Solution (3/4)

- Codage de Prufer (7/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 1 et l'arête incidente
  - Il ne reste que 2 sommet
  - ⇒ **Fin.**
  - **P=7 6 8 6 1 7**



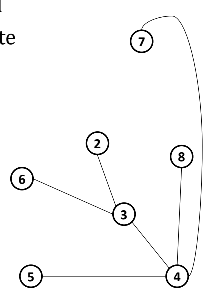
Exercice 2 – Solution (4/4)

- Codage de Prufer (1/7) de l'arbre de couverture de poids maximal
  - Sommets de degré 1 :
  - 1, 5, 6, 7, 8
  - Le min : 1
  - 1 est relié à 2
  - P=2



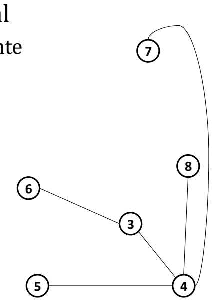
Exercice 2 – Solution (4/4)

- Codage de Prufer (2/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 1 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 2, 5, 6, 7, 8
  - Le min : 2
  - 2 est relié à 3
  - P=2 3



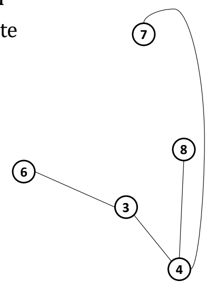
Exercice 2 – Solution (4/4)

- Codage de Prufer (3/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 2 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 5, 6, 7, 8
  - Le min : 5
  - 5 est relié à 4
  - P=2 3 4



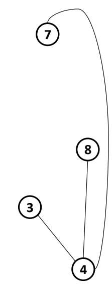
Exercice 2 – Solution (4/4)

- Codage de Prufer (4/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 5 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 6, 7, 8
  - Le min : 6
  - 6 est relié à 3
  - P=2 3 4 3



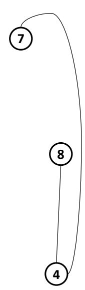
Exercice 2 – Solution (4/4)

- Codage de Prufer (5/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 6 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 3, 7, 8
  - Le min : 3
  - 3 est relié à 4
  - P=2 3 4 3 4



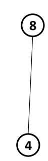
Exercice 2 – Solution (4/4)

- Codage de Prufer (6/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 3 et l'arête incidente
  - Sommets de degré 1 :
  - 7, 8
  - Le min : 7
  - 7 est relié à 4
  - P=2 3 4 3 4 4



Exercice 2 – Solution (4/4)

- Codage de Prufer (7/7) de l'arbre de couverture de poids minimal
  - Supprimer 7 et l'arête incidente
  - Il ne reste que 2 sommet
  - ⇒ **Fin.**
  - **P=2 3 4 3 4 4**



Exercice 3

- On désire installer au moindre coût un réseau de communication entre divers sites.
- Les coûts des connexions intersites sont les suivants (symétriques) :

	B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
A	5	18	9	13	7	38	22
	B	17	11	7	10	38	15
		C	27	23	15	20	25
			D	20	15	40	25
				E	15	40	30
					F	35	10
						G	45

Exercice 3 - Suite

1. Identifier le problème associé.
2. Déterminer la solution optimale.

Exercice 3 – Solution (1/4)

1. Identifier le problème associé.

- Modélisation
  - Chaque sommet x représente un site x, x de A à H.
  - Chaque arête $\{i, j\}$ représente une connexion intersites.
  - Le coût de la connexion intersites est représenté par le poids de l'arête correspondante.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 43

Exercice 3 – Solution (2/4)

1. Identifier le problème associé.

- Identification
  - Tous les sites connectés : graphe connexe
  - Coût minimal : graphe connexe minimal avec somme de poids des arêtes minimal
  - Revient à trouver l'arbre de couverture maximal de poids minimal.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 44

Exercice 3 – Solution (3/4)

2. Déterminer la solution optimale.
   - On applique l'algorithme de Kruksal
   - Tri par ordre croissant des arêtes

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	
{A,F}	7	
{B,E}	7	
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	

Arête	Poids	Décision
{D,F}	15	
{E,F}	15	
{B,C}	17	
{A,C}	18	
{C,G}	20	
{D,E}	20	
{A,H}	22	
{C,E}	23	
{C,H}	25	

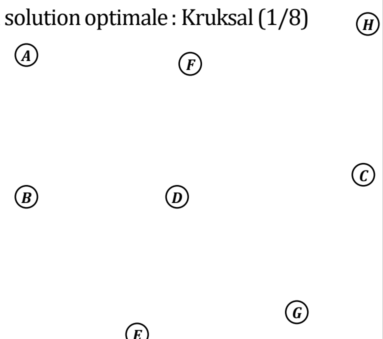
Arête	Poids	Décision
{D,H}	25	
{C,D}	27	
{E,H}	30	
{F,G}	35	
{A,G}	38	
{B,G}	38	
{D,G}	40	
{E,G}	40	
{G,H}	45	

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 45

Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (1/8)

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	
{A,F}	7	
{B,E}	7	
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	

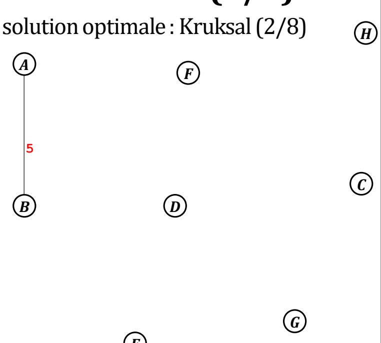


Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 46

Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (2/8)

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	
{B,E}	7	
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	

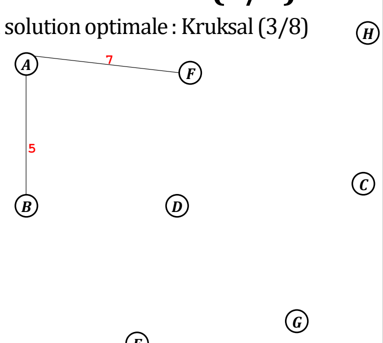


Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 47

Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (3/8)

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	

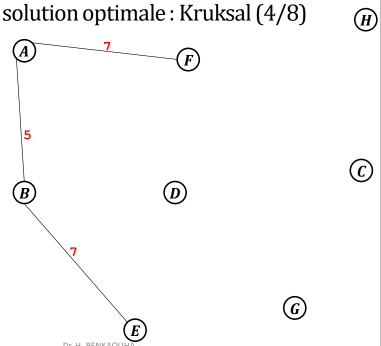


Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 48

Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (4/8)

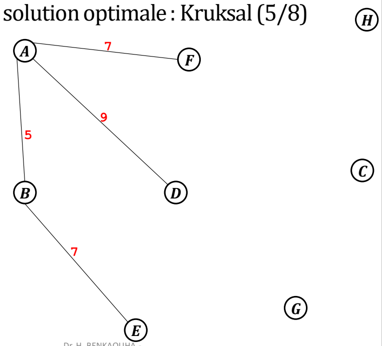
Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	



Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (5/8)

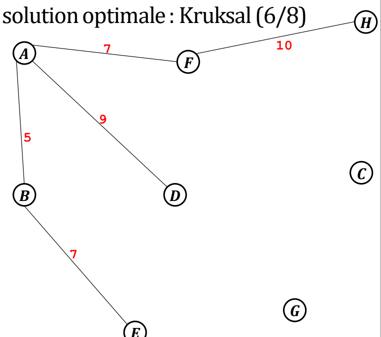
Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	Oui
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	



Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (6/8)

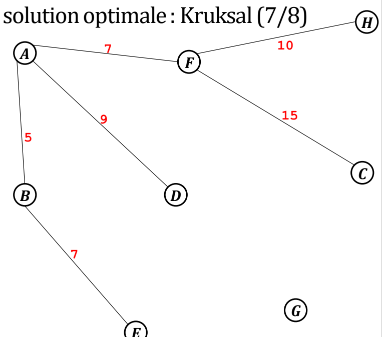
Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	Non
{D,F}	10	Non
{F,H}	10	Oui
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	



Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (7/8)

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	Non
{D,F}	10	Non
{F,H}	10	Oui
{B,D}	11	Non
{A,E}	13	Non
{B,H}	15	Non
{C,F}	15	Oui

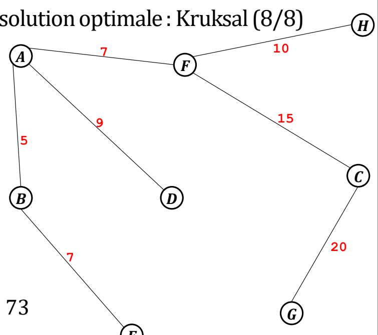


Exercice 3 – Solution (4/4)

2. Déterminer la solution optimale : Kruksal (8/8)

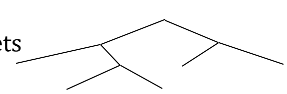
Arête	Poids	Décision
{D,F}	15	Non
{E,F}	15	Non
{B,C}	17	Non
{A,C}	18	Non
{C,G}	20	Oui
{D,E}	20	
{A,H}	22	
{C,E}	23	
{C,H}	25	

Arbre de poids = 73



Exercice 4

- Un arbre est dit binaire, s'il est constitué :
  - d'un unique sommet de degré 2 (appelé racine de l'arbre)
  - et tout autre sommet est soit de degré 3, soit de degré 1.
- Les sommets de degré 1 sont appelés les feuilles de l'arbre.
- Exemple de 9 sommets et 5 feuilles

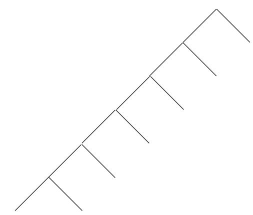


Exercice 4 - Suite

1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.
2. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement 7 feuilles.
3. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement *k* feuilles (avec $k \geq 2$).

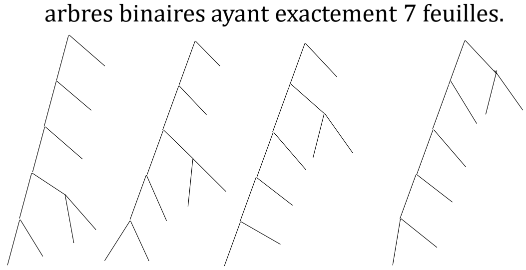
Exercice 4 – Solution (1/7)

1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.



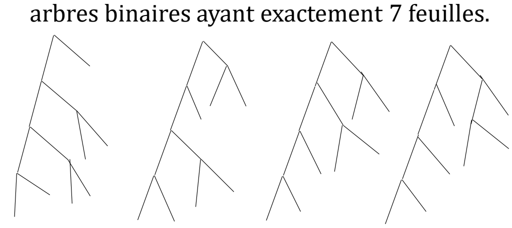
Exercice 4 – Solution (2/7)

1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.



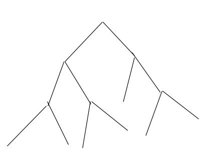
Exercice 4 – Solution (3/7)

1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.



Exercice 4 – Solution (4/7)

1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.



Exercice 4 – Solution (5/7)

2. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement 7 feuilles.

- Il y a 13 sommets selon la question précédente.

Exercice 4 – Solution (6/7)

3. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement k feuilles (avec $k \geq 2$).

- On pose n le nombre de sommets et m le nombre d'arêtes
- On a k feuilles (degré 1), 1 racine (degré 2) et p autres sommets (degré 3)
- $n=k+p+1$
- $2*1 + 1*k + 3*p = 2m$ (formule des degrés)
- $m=n-1$ (propriété d'un arbre)

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 61

Exercice 4 – Solution (7/7)

3. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement k feuilles (avec $k \geq 2$).

- $n=k+p+1$ … (1)
- $k + 3p + 2 = 2m$ … (2)
- $m=n-1$ … (3)
- De (2) et (3) $\Rightarrow k + 3p + 2 = 2(n-1)$ … (4)
- De (1) $\Rightarrow p=n-k-1$
- On remplace dans (4) $\Rightarrow k+3(n-k-1)+2=2(n-1)$
- $\Rightarrow k+3n-3k-3+2=2n-2 \Rightarrow n-2k=-1 \Rightarrow n=2k-1$

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 62