Université de M'hamed Bouguerra Boumerdès
Faculté des sciences- Département d'Informatique

Module : Théorie des Langages.	**Filière : LI- S4** **Année : 2019-2020**	**Document : Série 01** **(Corrigé)**

Chapitre 1 : Langages

Objectif : Apprendre les opérations sur : alphabet, mots, langages.

Ex 01

L'alphabet pour chacun des langages suivants :

– Les nombres hexadécimaux :
$\sum_1$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

– Les nombres romains :
$\sum_2$ = {I, V, X, L, C, D, M}

– Les nombres réels en Pascal :
$\sum_3$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . , +, -, E }

– Les identificateurs en Pascal :
$\sum_4$ = {a, b, c,…, z, A, B, C,…, Z, _, *, 0, 1, 2,…,9}

Ex 02

1. $\varepsilon Ab\varepsilon c$ = **Abc**
2. $\varepsilon\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon}$
3. $0^2\,1^2$ = **0011**
4. $(01)^2$ = **0101**
5. $((00)^2\,1^3)^2$ = **00001110000111**
6. $1^0 = \boldsymbol{\varepsilon}$
7. $|\varepsilon| =$ **0**
8. $|aa\varepsilon bca\varepsilon|$ = **5**
9. $|(a^2b^3c^4)^2|$ = **18**

10. ε est un langage : vrai ou faux ?
    Faux, ε est le mot vide.
    Un langage est un ensemble de mots.

11. ∅ est un langage : vrai ou faux ?
    Vrai, ∅ = {}.
    {} est un langage qui ne contient aucun mot.

12. {ε} est un langage : vrai ou faux ?
    Vrai.
    {ε} est le langage qui contient le mot vide.

13. $\emptyset \in \{\varepsilon\}$: vrai ou faux ?
    Faux, $\emptyset \subset \{\varepsilon\}$
    On compare deux ensembles par la relation d'inclusion.

14. $\emptyset = \varepsilon$: vrai ou faux ?
    Faux, ∅ = {}.
    On ne peut comparer un mot avec un ensemble

15. L + L = L, vrai ou faux ?
    Vrai, $L+L = L \cup L = L$.

16. $L^0 = \{\}$: vrai ou faux ?
    Faux, $L^0 = \{\varepsilon\}$

17. L.L= L : vrai ou faux ?
    Faux, $L.L = L^2$

18. $L.L \subseteq L^*$: vrai ou faux ?
    Vrai, par définition $L^* = L^0 + L^1 + L^2 + L^3 + \ldots$
    Et $L.L = L^2 \Rightarrow L^2 \subset L^*$

19. L + {ε} = {ε} + L = L, vrai ou faux ?
    Faux, sauf si $\varepsilon \in L$.

Ex 03

Les langages correspondants aux définitions suivantes sont (définition ensembliste):

– Tous les mots sur {a, b, c} de longueur 2 contenant un a ou un b mais pas les deux

L1= { $w \in \{a,b,c\}^*$ tel que $|w|=2$ et $|w|_a=1$ et $|w|_b=0$}
$\cup$ { $w \in \{a,b,c\}$ tel que $|w|=2$ et $|w|_a=0$ et $|w|_b=1$}
L1= { ac, bc, ca, cb}

– Tous les mots sur {a, b} contenant au maximum deux a suivi par un b

L2= { $w \in \{a,b\}^*$ tel que $w=a^nb$ et n < =2}
L2= { aab, ab, b}

– Tous les mots sur {a, b} qui contiennent une suite de a suivie par une suite de b tel que le nombre de a est plus de celui du b

L3= {$w \in \{a,b\}^*$ tel que $w=a^nb^m$ et n >m}
L3= {a, aab, aaab, aaabb, aaaab,aaaabb,aaaab,…..}

– Tous les mots formés à partir de {a, b} et qui contiennent plus de a que de b

L4= {$w \in \{a,b\}^*$ tel que $|w|_a> |w|_b$}
L4= { a, aab, aba, baa, aaab, aaba, abaa, baaa, aaabb, ababa, abaab, abbaa, bbaaa, baaab,babaa,…}

– Tous les mots formés à partir de {a, b} et qui contiennent un nombre pair de a

L5= {$w \in \{a,b\}^*$ tel que $|w|_a= 2n$ et n > = 0}
L5= {b, aab, bb, bbaa, abab, b^5a^4, ba^8, $ba^2bba^2b^5$, ….}

Ex 04

La fermeture de Kleene (L*) pour chacun des langages suivants :

- $L_1 = \{\varepsilon\}$ => $\mathbf{L_1^* = L_1 = \{\varepsilon\}}$

- $L_2 = \{a, aa\}$ => $\mathbf{L_2^* = L_2^0 + L_2^1 + L_2^2 + L_2^3 + \ldots}$
  $\mathbf{= \{\varepsilon\} + \{a, aa\} + \{a^2, a^3, a^4\} + \{a^3, a^4, a^5, a^6\} + \ldots}$
  $\mathbf{= \{ \varepsilon, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots\}}$
  $\mathbf{= \{a\}^*}$ **ou** $\mathbf{\{a^n \mid n >= 0\}}$

- $L_3 = \{a, ab\}$ => $\mathbf{L_3^* = L_3^0 + L_3^1 + L_3^2 + L_3^3 + \ldots}$
  $\mathbf{= \{\varepsilon\} + \{a, ab\} + \{a^2, a^2b, aba, abab\} +}$
  $\mathbf{\{a^3, a^3b, a^2ba, a^2bab, aba^2, aba^2b, ababa, (ab)^3\} + \ldots}$
  $\mathbf{= \{ \varepsilon, a, a^2, a^3, a^4, \ldots, ab, (ab)^5, (ab)^6, \ldots, a^2ba, a^2bab, \ldots\}}$
  $\mathbf{= \{ \{a\}^* \cup \{ab\}^* \}^*}$

Ex05

Sur l'alphabet A = {0, 1}, on considère les langages L1 et L2 :

L1 = { 01^n , n $\in$ N} = { 0, 01, 01^2, 01^3, 01^4,….}
L2 = { 0^n1, n $\in$ N} = { 1, 01, 0^21, 0^31, 0^41,…}

- **L1.L2 = { 01^n0^m1, n,m $\in$ N}**
- **L1 ∩ L2 = { 01 }**
- **L1^2 = { 00, 0^21, 0^21^2, 0^21^3,…, 0^21^n, 010, 01^20, 01^301^2, 0101^2, 0101^3, 01^201^3, …, 01^n01^m, $(01)^2$, $(01^2)^2$, $(01^3)^2$, …, $(01^n)^2$ }**

  = L1.L1= { 01^n01^m, n,m $\in$ N}

.

Ex06

1) Pour montrer L*= (L*)* il faut démonter les double inclusions suivantes :
i) L* inclus dans (L*)* et ii) (L*)* inclus dans L*

i) L* inclus dans (L*)*

$L \subseteq L^*$ car $L^* = L^0+L+L^2+\ldots$..

Par composition de * nous pouvons écrire L* ⊆ (L*)*

ii) (L*)* inclus dans L*

Il faut montrer que ∀ W ∈ (L*)* ⇒ W∈ L*

Soit W ∈ (L*)* ⇒ W s'écrit sous la forme : $W = W_1\, W_2 \ldots W_i \ldots W_n$ tel que $W_i \in L^*$

Soit $W_i \in L^*$ ⇒ Wi s'écrit sous la forme : $W_i = \underbrace{W_{i1}\, W_{i2} \ldots W_{ij} \ldots W_{im}}_{2}$ tel que $w_{ij} \in L$

M1

En réécrivant W en utilisant 2 nous obtenons

$W=W_{11}\ldots W_{1\ m\_1}\ldots.\ W_{i1}\ldots W_{im\_i}\ldots.W_{n1}\ldots.\ W_{\mathbf{n\ m\_n}}$ / $W_{ij} \in L \Rightarrow W \in L^*$

⇒ si W ∈ (L*)* alors W ∈ L*

⇒ (L*)* ⊆ L*

De i et ii nous concluons L* = (L*)*

2 Pour montrer $(L+R)^*= (L^*.R^*)^*$ il suffit de démontrer que $(L+R)^* \subseteq (L^*.R^*)^*$ et que $(L^*.R^*)^* \subseteq (L+R)^*$

i) $(L+R)^* \subseteq (L^*.R^*)^*$

$(L+R)^* = \bigcup_{i\geq 0}(R+L)^i$

Il suffit donc de monter que $(L+R)^i \subseteq (L^* R^*)^*, \forall i \in N$

Démonstration par récurrence

Cas i=0

$(L+R)^0 = \{\mathcal{E}\} \Rightarrow (L+R)^0 \subseteq (L^*R^*)^*$ c'est donc vrai pour i=0

Cas i=n

Supposons que $(L+R)^n \subseteq (L^* R^*)^*$ est vrai et montrons que $(L+R)^{n+1} \subseteq (L^* R^*)^*$ est vrai.

Nous avons :

$(L+R)^{n+1} = (L+R)^n .(L+R)$

$\subseteq (L^* R^*)^* . (L+R)$ (D'après l'hypothèse)

$\subseteq (L^*R^*)^* (L^*R^*)^*$ (car $(L+R)^1 \subseteq (L^* R^*)^*$ d'après l'hypothèse)

$\subseteq (L^*.R^*)^*$ car $L^*.L^*=L^*$

Donc $(L+R)^n \subseteq (L^* R^*)^*$ est vrai, $\forall i \in N$

ii) $(L^*.R^*)^* \subseteq (L+R)^*$

$L \subseteq L+R \Rightarrow L^* \subseteq (L+R)^*$

$R \subseteq L+R \Rightarrow R^* \subseteq (L+R)^*$

Donc $L^*.R^* \subseteq (L+R)^* . (L+R)^*$

$\subseteq (L+R)^*$ car $L^*.L^*=L^*$

Donc $(L^*.R^*)^* \subseteq ((L+R)^*)^* \subseteq (L+R)^*$ car $((L)^*)^*= (L)^*$

De i et ii nous concluons que $(L+R)^*= (L^*.R^*)^*$