U.S.T.H.B., F.E.I.
Département Informatique **05 Avril 2021**
L3 (S5) Informatique Générale (Section A et B)

Examen Final de Théorie des Graphes

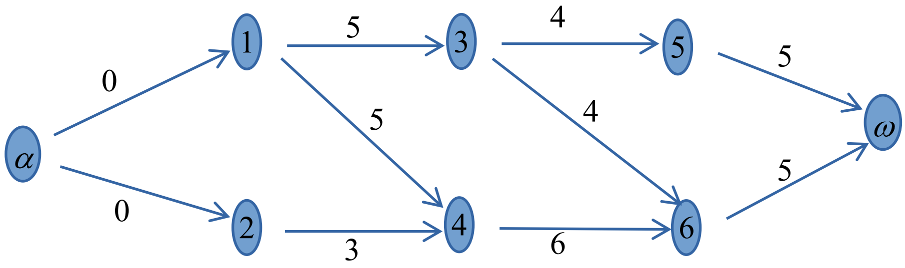
Durée 1h00'

Exercice 1. (9 pts)

1. Les équations représentant les contraintes de précédence. (2)

$t_3 - t_1 \geq 5$
$t_4 - t_1 \geq 5$ et $t_4 - t_2 \geq 3$
$t_5 - t_3 \geq 4$
$t_6 - t_3 \geq 4$ et $t_6 - t_4 \geq 6$

Le graphe potentiel-tâches (1)



2. Les dates au plus tôt : (2)
$t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 5$, $t_4 = 5$, $t_5 = 9$, $t_6 = 11$

La durée minimale du projet est : **16** jours (1)

3. Le chemin 1,4,6 est critique, la tâche 5 n'est pas critique la diminution de sa durée n'implique pas de diminution de la durée du projet. Le chef de projet doit donc affecté des travailleurs à la tâche 6 (c'est une tâche critique) afin de diminuer sa durée et diminuer ainsi la durée du projet.
- S'il affecte 01 seul employé la durée du projet devient = 15 jours
- S'il en affecte 02, la durée du projet devient = 14 jours, le chemin 1, 3, 5 devient aussi critique
- S'il affecte 03 employés la durée du projet reste = 14 jours, même durée qu'avec 02 employés, il n'est donc pas nécessaire d'affecter 03 employés. (3)

Exercice2. (7 pts)

2. Aucun des graphes n'admet de parcours Eulérien. En effet, ils ont tous plus de 02 sommets de degrés impairs. **(1.5)**

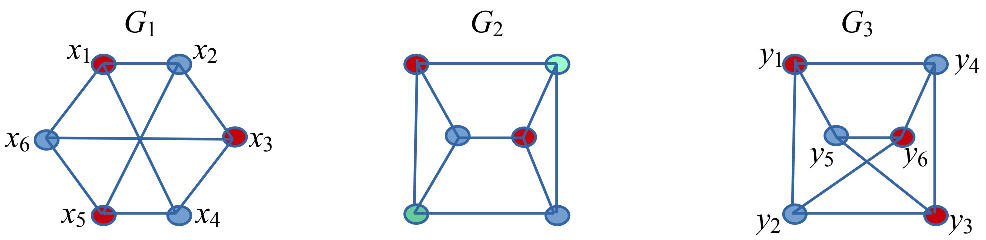
3. L'indice chromatique : **(3)**
On peut commencer par déterminer les bornes de l'indice chromatique γ(G).

$\gamma(G) \geq$ cardinal de la plus grande clique dans G.
Pour les deux graphes G_1 et G_3 la plus grade clique est d'ordre 2. $\gamma(G) \geq 2$.
Pour le graphe G_2 la plus grade clique est d'ordre 3, $\gamma(G_2) \geq 3$.

Pour les trois graphes G_1, G_2 et G_3
$\gamma(G) \leq \Delta(G) + 1 = 3+1 = 4$

$2 \leq \gamma(G_1) \leq 4$
$3 \leq \gamma(G_2) \leq 4$
$2 \leq \gamma(G_3) \leq 4$

L'application de l'algorithme de Welsh-Powell donne les colorations suivantes :



$\gamma(G_1) = \gamma(G_3) = 2$
$\gamma(G_2) = 3$
Ce qui correspond à la borne inférieure.

4. Les deux graphes G_1 et G_3 sont des graphes bipartis leur indices chromatiques sont égaux à 2. Le graphe G_2 n'est pas un graphe biparti. **(1.5)**

1. Les graphes G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes, de même G_2 et G_3 ne sont pas isomorphes
G_1 et G_3 sont isomorphes. Il suffit de d'associer par exemple les sommets comme suit :
$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_4, \quad x_3 - y_3, \quad x_4 - y_5, \quad x_5 - y_6, \quad x_6 - y_2$
On peut constater que s'il y a une arête entre un couple de sommets dans le graphe G_1, il y a aussi une arête entre les sommets auxquels ils sont associés.
Exp : (x_1, x_2) est dans G_1, (y_1, y_4) est dans G_3. **(1)**

Exercice 3. (4 pts)

Démontrons d'abord que si un graphe G est une union de cliques alors si $\{x,y\}$ et $\{y,z\}$ sont dans E alors $\{x,z\}$ est aussi dans E.

$\{x,y\}$ et $\{y,z\}$ sont dans E alors les 3 sommets x, y et z appartiennent à la même composante connexe et comme chaque composante connexe est une clique alors forcément les trois sommets sont reliés deux à deux $\Rightarrow \{x,z\}$ est aussi dans E. **(2)**

Pour démontrer la réciproque, on montre la contraposée, c-à-d que s'il existe une composante connexe C qui n'est pas une clique.
- C est d'ordre ≥ 3,
- C n'étant pas une clique, elle alors comporte au moins un couple de sommets qui ne sont pas reliés par une arête, soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ ces deux sommets. Ces deux sommets sont reliés par une chaîne.

Considérons la plus courte chaîne reliant ces deux sommets.
Si cette chaîne est de longueur 2, soit $x\,x'y$ cette chaîne, alors on a bien $x\,x'$ qui est dans E et $x'y$ qui est aussi dans E alors que $x\,y$ n'est pas dans E. CQFD
Si elle est de longueur supérieure à 2 alors soit $x\,x_1\,x_2\,\ldots\,x_k\,y$ cette chaîne, on peut constater que $x\,x_1$ est dans E et $x_1\,x_2$ est aussi dans E mais $x\,x_2$ n'est pas dans E, car sinon $x\,x_2\,\ldots\,x_k\,y$ serait une chaîne plus courte. CQFD **(2)**