Contrôle Intermédiaire

Durée 2 heures   Tout document interdit

Exercice I. (3 – 2)

Etant données f: N $\rightarrow$N une fonction récursive et g: N $\rightarrow$N une fonction primitive récursive, montrer que la fonction h: N $\rightarrow$N définie comme suit est récursive.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ est pair} \\ g(x) & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

1. $h(x)$ est-elle primitive récursive ?

$h(x) = f(x) * (1 - r(2,x)) + g(x) * r(2,x)$ (2.5 points)

$= +\big(*(f(P_1), -(1, r(2, P_1)))(x),\ *(g(P_1), r(2, P_1))(x)\big)$ (0.5 point)

$h(x)$ est obtenue par compostion à partir de fonction primitives récursives. Elle est donc primitive récursive.

2. Soit H = { $h(x)$ | $x \in$ N }. Des propositions ci-dessous, quelle est celle ou quelles sont celles dont vous pouvez dire qu'elle est vraie ou qu'elles sont vraies ? Justifiez en une seule ligne. (0.5 point) par réponse correcte.
   a. H est primitif récursif. **On n'en sait rien. Il faut que la fct caractéristique de H soit PR**
   b. H est récursivement énumérable. **Oui, car H coïncide avec l'ensemble des valeurs d'une FPR.**
   c. H est effectivement énumérable. **Oui : RE $\Rightarrow$ EE**
   d. H est récursif. **On n'en sait rien. Il faut que la fct caractéristique de H soit récursive**
   e. H est effectivement décidable. **On n'en sait rien. H décidable ssi H récursif.**

Exercice II. (3, 1)

Etant donnée f: $N^2 \rightarrow$ N une fonction récursive, montrer que la relation R ci-dessous est primitive récursive.

$$R = \{ (x,y,z) \mid z = f(x,y) \}$$

$Car_R(x,y,z) = sg|z - f(x,y)|$ La fct caractéristique de R est une composition de fonctions PR. Elle est donc PR $\Rightarrow$ R est PR.

Donner un exemple de fonction f qui vérifie R.

$f(x,y) = x + y$

Exercice III. (3 points)

Ecrire la machine de Turing T qui calcule la fonction f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \text{ est pair} \\ x-1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

Ne pas dépasser 10 instructions.

$q_0 \mid Dq_1$
$q_1 \mid Dq_0$
$q_1\ 0Gq_2$ (x est pair)
$q_0 0Gq_3$ (x est impair)
$q_2 \mid G\ q_2$
$q_2 0 \mid q_P$
$q_3 \mid 0\ q_3$
$q_3 \mathbf{0} G\ q_5$
$q_5 \mid G\ q_5$
$q_5 \mathbf{0} D\ q_I$

<u>Exercice IV</u>. (2 -2)
Soient u et v deux mots non vides. Montrer que :

1. S'il existe deux entiers n, m ≥ 1 tels que $u^n = v^m$ alors uv = vu ;
2. s'il existe deux entiers n, m ≥ 1 tels que $u^{2n} = v^{2m}$ alors uv = vu.

<u>Correction exercice IV</u>

1. Soient u et v deux mots non vides. Il existe deux entiers $n, m \geq 1$ tels que $u^n = v^m \Rightarrow uv = vu$;

- si $|u| = |v|$ alors $n = m$ donc $u=v \Rightarrow uv = vu$ (0,5pts)

- si $|u| > |v|$ (la démonstration est la même pour le cas $|u| < |v|$) (1,5pts)

soit h tel que u = vh.

$\Rightarrow u^n v = (vh)^n v = v(hv)^n = v^{m+1}$ et en simplifiant la dernière égalité, $(hv)^n = v^m$.

Comme $v^m = u^n = (vh)^n$, on a $(hv)^n = (vh)^n$, donc hv = vh, uv = vhv = vvh = vu.

Ou encore supposons donc $|u| > |v|$, et soit h,h' tels que u = vh. u = h'v Alors

$u = vh \Rightarrow (vh)^n = v^m \Rightarrow h(vh)^{n-1} = v^{m-1}$

$u = h'v \Rightarrow (h'v)^n = v^m \Rightarrow (h'v)^{n-1}h' = v^{m-1} \Rightarrow h'(vh')^{n-1} = v^{m-1}$

$|u| = |v|+|h|$ et $|u| = |h'|+|v| \Rightarrow |h'| = |h|$

$h(vh)^{n-1} = h'(vh')^{n-1}$ et $|h'| = |h| \Rightarrow h' = h \Rightarrow uv = vhv = vu$

2. Soit l'équation $L_1 = L_2 L_1 \cup L_3$ où L_2 et B sont deux langages formels et L est une inconnue.

- $L_1 = L_2^* L_3$ (0,5pts)
- $L_2^* L_3 \subseteq L_1$ (0,5pts)

$L_1 = L_2 (L_2 L_1 \cup L_3) \cup L_3 = L_2^{\ 2} L_1 \cup L_2 L_3 = L_2^{\ 2}(L_2 L_1 \cup L_3) \cup L_2 L_3 \cup L_3 = L_2^{\ 3} L_1 \cup L_2^{\ 2} L_3 \cup L_2 L_3 \cup L_3 = L_2^{\ 3}(L_2 L_1 \cup L_3) \cup L_2^{\ 2} L_3 \cup L_2 L_3 \cup L_3 = L_2^{\ 4} L_1 \cup L_2^{\ 3} L_3 \cup L_2^{\ 2} L_3 \cup L_2 L_3 \cup L_3 = L_2^{\ n} L_1 \cup L_2^{\ n-1} L_3 \cup \ldots \cup L_2 L_3 \cup L_3 = L_2^{\ n+1} L_1 \cup (L_2^{\ n} \cup \ldots \cup L_2 \cup \varepsilon) L_3$

$L_2^{\ n} \cup \ldots \cup L_2 \cup \varepsilon = L_2^*$ donc $L_2^* L_3 \subseteq L_1^{\ n+1} L_2 \cup (L_2^{\ n} \cup \ldots \cup L_2 \cup \varepsilon) L_3$ donc $L_2^* L_3 \subseteq L_1$

- $L_1 \subseteq L_2^* L_3$ (1pts)

Première solution
pour tout n on a $L_1 = L_2^{\ n+1} L_1 \cup (L_2^{\ n} \cup \ldots \cup L_2 \cup \varepsilon) L_3$
soit $w \in L$ tel que $|w| = n$ donc soit $w \in A^{n+1} L$, soit $w \in (L_2^{\ n} \cup \ldots \cup L_2 \cup \varepsilon) L_3$
et comme $\varepsilon \notin A$ donc $w \notin A^{n+1} L$ (les mots de $L_2^{n+1} L_1$ ont une longueur supérieure à n) donc $w \in (L_2^{\ n} \cup \ldots \cup L_2 \cup \varepsilon) L_3$ donc $L_1 \subseteq L_2^* L_3$

comme $L_1 \subseteq L_2{}^* L_3$ et $L_2{}^*L_3 \subseteq L_1$ donc $L_2{}^*L_3 = L_1$

Deuxième solution

On suppose que la solution $L_2{}^*L_3$ n'est pas unique. Soit L_1 une autre solution et soit un mot w le plus petit mot tel que $w \in L_1 \setminus L_2{}^*L_3$. $w \in L_1 = L_2 L_1 \cup L_3$ et $w \notin L_3$ donc $w \in L_2 L_1 \Rightarrow w = uv$ avec $u \in L_2$ et $v \in L_1$. Or $v \notin L_2{}^*L_3$ (sinon w aussi) donc $v \in L_1 \setminus L_2{}^*L_3$. Contradiction : la longueur de w était supposée minimale dans $L \setminus L_2{}^*L_3$ puisque $\varepsilon \notin L_2$ donc $L_1 \subseteq L_2{}^*L_3$

comme $L_1 \subseteq L_2{}^* L_3$ et $L_2{}^*L_3 \subseteq L_1$ donc $L_2{}^*L_3 = L_1$

Exercice V. (1 – 1 - 2)

Soit G<{a, b}, {S, A, B, C, D}, P, S> la grammaire où P est défini comme suit

P= { $S \to CF$
$C \to aCA / bCB / M$
$AF \to aF$
$BF \to bF$
$Ba \to aB$
$Aa \to aA$
$Ab \to bA$
$Bb \to bB$
$Mb \to bM$
$Ma \to aM$
$MF \to \varepsilon$ }

Questions.

1. De quel type est cette grammaire ?**Type 0 (1Pt)**
2. Donnez un mot de longueur supérieure ou égale à 6 généré par G. Justifiez.**(1Pt)**

S $\vdash$ CF $\vdash$ aCAF $\vdash$ abCBAF $\vdash$ abbCBBAF $\vdash$ abbMBBAF $\vdash$ abbMBBaF $\vdash$ abbMBaBF
$\vdash$ abbMaBBF $\vdash$ abbaMBBF $\vdash$ abbaMBbF $\vdash$ abbaMbB $\vdash$ abbabMBF $\vdash$ abbabMbF
$\vdash$ abbabbMF $\vdash$ abbabb

3. Définissez le langage engendré par G. $L(G) = \{w.w \text{ tq } w \in \{a, b\}^*\}$ (2Pts)