

Chapitre 5

Problème d'ordonnancement

Présenté par :

H. BENKAOUHA

Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB

haroun.benkaouha@usthb.edu.dz

haroun.benkaouha@gmail.com

Identification du problème

- L'examen d'un projet (industriel, administratif, informatique, ...) comporte en général deux phases importantes:
 - Phase 1 : modélisation
 - Phase 2 : analyse et étude

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

2

Phase 1

- La division du projet en plusieurs tâches (ou étapes) élémentaires,
- L'étude des liaisons (contraintes logiques, chronologiques,...) et l'estimation de la durée de chaque tâche.
- Permet de construire d'un graphe orienté où :
 - les sommets représentent les tâches élémentaires
 - les arcs sont pondérés.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

3

Phase 2

- Elle consiste à analyser et étudier le graphe obtenu en phase 1.
- Parmi les résultats de cette phase :
 - la détermination d'un planning (ou ordre chronologique)
 - la recherche de la durée totale du projet dans le but de la minimiser.
- L'étude du graphe revient à déterminer un chemin de poids optimal.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

4

Contraintes potentielles

- Certaines tâches sont liées entre elles par des contraintes dites de potentielles,
- Sont exprimées sous la forme $t_j - t_i \geq a_{ij}$
 - où t_i et t_j représentent les dates de début au plus tôt des tâches i et j .
 - Correspond à : «la tâche j , ne peut commencer qu'après que i aura consommée a_{ij} unités de temps depuis son début».

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

5

Graphe potentiel tâches

- Appelé aussi Méthode Potentiels Métra (MPM)
- Chaque tâche est représentée par un sommet
- chaque arc $(i,j) \in U$ est créé si on a une contrainte de potentiel entre i et j ($t_j - t_i \geq a_{ij}$) tel que son poids $p(i,j)=a_{ij}$.
- On introduit 2 **tâches fictives** «D» et «F» représentant le début et la fin du projet.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

6

Graphe potentiel tâches

- Pour chaque tâche i n'ayant de tâche précédente, on rajoute l'arc (D, i) . Le poids de l'arc est généralement 0 sauf s'il a été précisé dans l'énoncé un délai entre le début du projet et cette tâche.
- Pour chaque tâche i , on rajoute l'arc (i, F) . $p(i, F)$ = la durée de i .
- On peut optimiser le graphe en supprimant certains arcs (i, F) qui risquent de représenter des contraintes redondantes.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

7

Dates au plus tôt

- La durée minimale de l'ordonnancement est donnée par la date au plus tôt (t_F) de la tâche fictive «fin projet».
- La date au plus tôt d'une tâche j est obtenue par la formule suivante :
- $t_j = \max_{i \in LP(j)} \{t_i + a_{ij}\}, j \neq 0$.
- $LP(j)$ est la liste des prédécesseurs du sommet j .
- $t_0 = t_D = 0$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

8

Dates au plus tard

- t_i^* : date au plus tard de la tâche i calculée comme suit :
- $t_F^* = t_F$
- $t_i^* = \min_{j \in LS(i)} \{t_j^* - a_{ij}\} \quad i \neq F \text{ «fin projet»}.$
- $LS(i)$ est la liste des successeurs du sommet i .

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

9

Marge totale

- Le délai de retard pour une tâche i qui n'affecte pas la durée minimale du projet est noté M_i et est appelé marge totale de la tâche i .
- $M_i = t_i^* - t_i$ où :
 - t_i : date au plus tôt de la tâche i
 - t_i^* : date au plus tard de la tâche i
- Une tâche i ayant une marge totale $M_i = 0$ et est appelé tâche critique.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

10

Marge libre

- La marge libre d'une tâche i ,
 - notée m_i ,
 - est le délai de retard d'une tâche i
 - sans affecter les dates de début au plus tôt des tâches postérieures.
- $m_i = \{t_j - t_i - a_{ij}\}$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

11

Marge certaine

- La marge certaine d'une tâche i ,
 - notée μ_i ,
 - est le délai de retard d'une tâche i ,
 - quand les tâches antérieures commencent à leurs dates au plus tard
 - et les tâches postérieures à leurs dates plus tôt
- $\mu_i = \max \{ 0, \{t_j - a_{ij}\} - \{t_k^* + a_{ki}\} \}$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

12

Exemple — Enoncé

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
1	6	-
2	10	Ne peut débuter que 2 jours après le début des travaux.
3	20	Après la fin de 1 et 2.
4	7	Après la fin de 1.
5	8	Peut débuter 2 jours après le début de 2.
6	4	Après la fin de 5 et 10 jours au maximum après le début de 4.
7	10	Peut débuter après la fin de 4 et lorsque 3 est à moitié réalisé.
8	5	Ne doit pas dépasser 5 jours après la fin de 6 et la 5 doit être achevée.
9	12	-
10	20	Peut commencer 5 jours après la fin de 9.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

13

Exemple — Modélisation (1/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
1	6	-

- 1 n'a pas de contraintes
⇒ On lui rajoute une avec la tâche fictive de début des travaux qu'on note 0.
- 1 doit commencer après 0.

$$t_1 \geq t_0$$
$$\Rightarrow$$
$$t_1 - t_0 \geq 0$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

14

Exemple — Modélisation (2/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
2	10	Ne peut débuter que 2 jours après le début des travaux.

- On a noté par 0 la tâche fictive de début des travaux.

$$t_2 \geq t_0 + 2$$
$$\Rightarrow$$
$$t_2 - t_0 \geq 2$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

15

Exemple — Modélisation (3/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
1	6	-
2	10	Ne peut débuter que 2 jours après le début des travaux.
3	20	Après la fin de 1 et 2.

$$t_3 \geq t_1 + \text{durée}(1)$$
$$\Rightarrow t_3 \geq t_1 + 6$$
$$\Rightarrow t_3 - t_1 \geq 6$$

$$t_3 \geq t_2 + \text{durée}(2)$$
$$\Rightarrow t_3 \geq t_2 + 10$$
$$\Rightarrow t_3 - t_2 \geq 10$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

16

Exemple — Modélisation (4/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
1	6	-
4	7	Après la fin de 1.

$$t_4 \geq t_1 + \text{durée}(1)$$
$$\Rightarrow$$
$$t_4 \geq t_1 + 6$$
$$\Rightarrow$$
$$t_4 - t_1 \geq 6$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

17

Exemple — Modélisation (5/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
2	10	Ne peut débuter que 2 jours après le début des travaux.
5	8	Peut débuter 2 jours après le début de 2.

$$t_5 \geq t_2 + 2$$
$$\Rightarrow$$
$$t_5 - t_2 \geq 2$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

18

Exemple — Modélisation (6/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
4	7	Après la fin de 1.
5	8	Peut débiter 2 jours après le début de 2.
6	4	Après la fin de 5 et 10 jours au maximum après le début de 4.

$$t_6 \geq t_5 + \text{durée}(5)$$
$$\Rightarrow t_6 \geq t_5 + 8$$
$$\Rightarrow t_6 - t_5 \geq 8$$
$$t_6 \leq t_4 + 10$$
$$\Rightarrow t_6 - t_4 \leq 10$$
$$\Rightarrow t_4 - t_6 \geq -10$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

19

Exemple — Modélisation (7/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
3	20	Après la fin de 1 et 2.
4	7	Après la fin de 1.
7	10	Peut débiter après la fin de 4 et lorsque 3 est à moitié réalisé.

$$t_7 \geq t_4 + \text{durée}(4)$$
$$\Rightarrow t_7 \geq t_4 + 7$$
$$\Rightarrow t_7 - t_4 \geq 7$$
$$t_7 \geq t_3 + (\text{durée}(3)/2)$$
$$\Rightarrow t_7 \geq t_3 + (20/2)$$
$$\Rightarrow t_7 - t_3 \geq 10$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

20

Exemple — Modélisation (8/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
5	8	Peut débiter 2 jrs après le début de 2.
6	4	Après la fin de 5 et 10 jrs au maximum après le début de 4.
8	5	Ne doit pas dépasser 5 jrs après la fin de 6 et la 5 doit être achevée.

$$t_8 \leq t_6 + \text{durée}(6) + 5$$
$$\Rightarrow t_8 \leq t_6 + 4 + 5$$
$$\Rightarrow t_6 - t_8 \geq -9$$
$$t_8 \geq t_5 + \text{durée}(5)$$
$$\Rightarrow t_8 \geq t_5 + 8$$
$$\Rightarrow t_8 - t_5 \geq 8$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

21

Exemple — Modélisation (9/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
9	12	-

- 9 n'a pas de contraintes
 \Rightarrow On lui rajoute une avec la tâche fictive de début des travaux qu'on a noté 0.
- 9 doit commencer après 0.
$$t_9 \geq t_0$$
$$\Rightarrow t_9 - t_0 \geq 0$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

22

Exemple — Modélisation (10/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
9	12	-
10	20	Peut commencer 5 jours après la fin de 9.

$$t_{10} \geq t_9 + \text{durée}(9) + 5$$
$$\Rightarrow t_{10} \geq t_9 + 12 + 5$$
$$\Rightarrow t_{10} - t_9 \geq 17$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

23

Exemple — Modélisation (11/14)

Tâche <i>i</i>	Durée de <i>i</i>	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche <i>i</i>
----------------	-------------------	---

- De chaque tâche *i* (*i* de 1 à 10, i.e. toutes les tâches sauf les tâches fictives)
- La contrainte *i* doit se terminer avant la fin du projet ou fin de projet après la fin de toutes les tâches
- On note par 11 la tâche fictive de fin du projet.
$$t_{11} \geq t_i + \text{durée}(i), \forall i \text{ de } 1 \text{ à } 10$$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

24

Exemple — Modélisation (12/14)

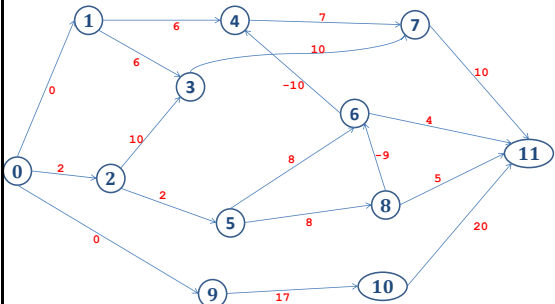
- Le système de contraintes :
- $t_1 - t_0 \geq 0$
 $t_2 - t_0 \geq 2$
 $t_3 - t_1 \geq 6$
 $t_3 - t_2 \geq 10$
 $t_4 - t_1 \geq 6$
 $t_5 - t_2 \geq 2$
 $t_6 - t_5 \geq 8$
 $t_4 - t_6 \geq -10$

$t_7 - t_4 \geq 7$
 $t_7 - t_3 \geq 10$
 $t_6 - t_8 \geq -9$
 $t_8 - t_5 \geq 8$
 $t_9 - t_0 \geq 0$
 $t_{10} - t_9 \geq 17$
 $t_{11} \geq t_i + \text{durée}(i), i \text{ de } 1 \text{ à } 10$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

25

Exemple — Modélisation (13/14)



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

26

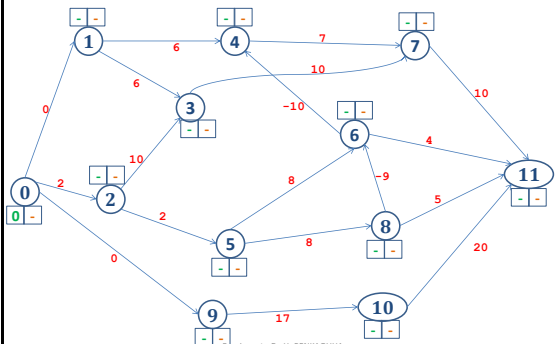
Exemple — Modélisation (14/14)

- Pour optimiser, nous avons évité certains arcs vers la tâche fictive de fin de projet (11)
- Si $\exists \gamma$ chemin de i vers 11 et $p(\gamma) \geq \text{durée}(i)$ Alors
- Pas la peine de rajouter l'arc $(i, 11)$
- Cette étape n'est pas obligatoire

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

27

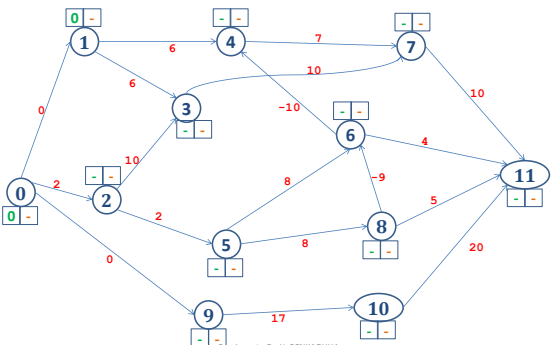
Exemple — Dates au plus tôt (1/13)



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

28

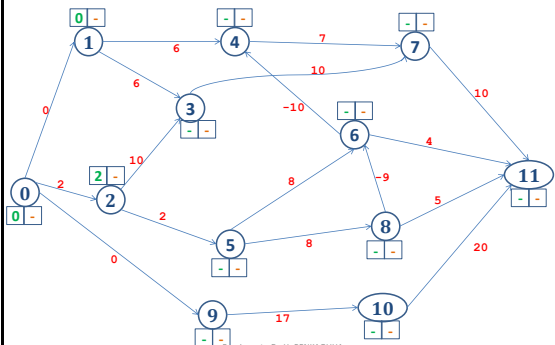
Exemple — Dates au plus tôt (2/13)



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

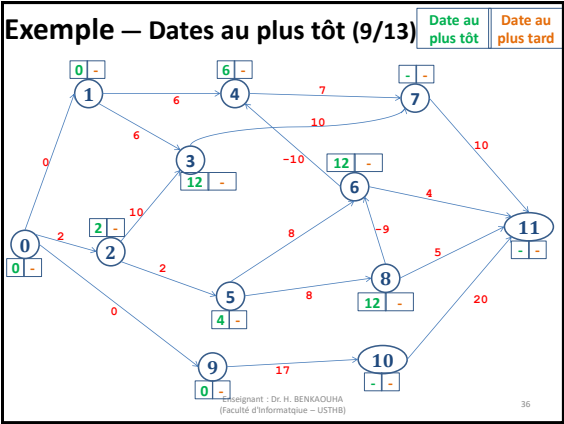
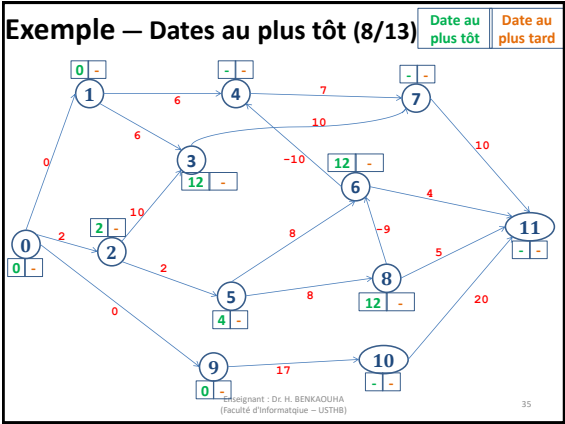
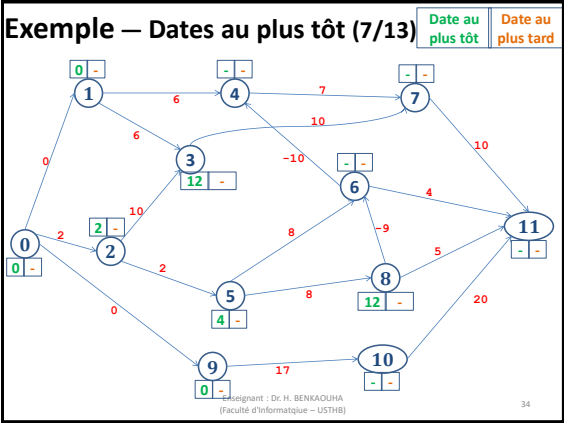
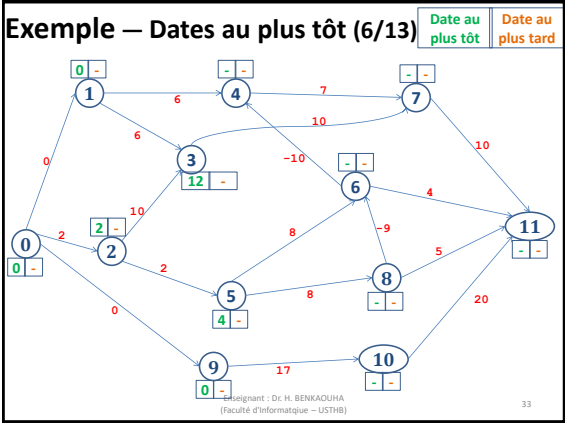
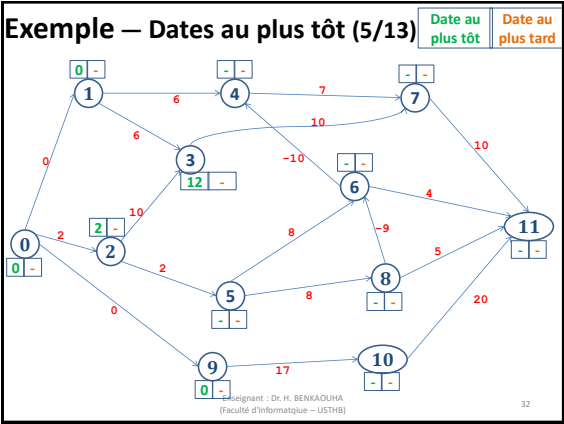
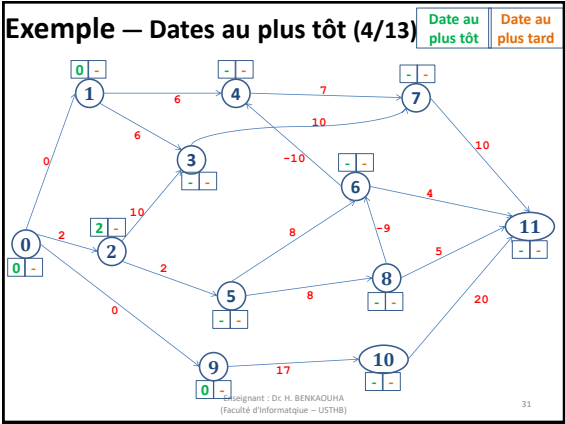
29

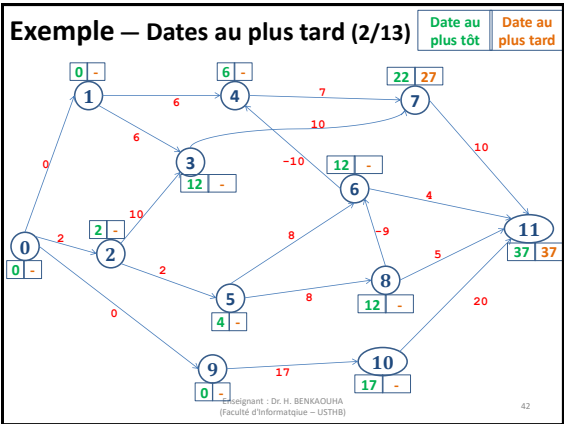
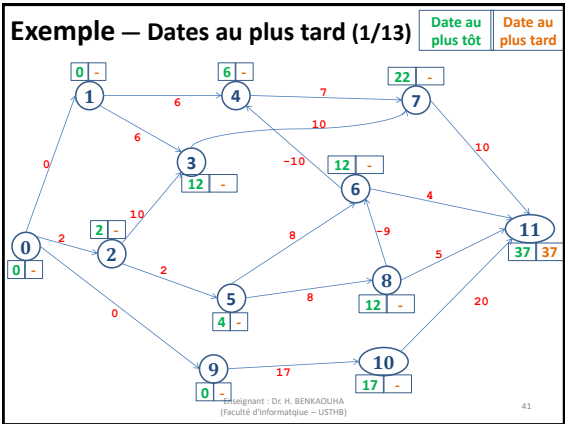
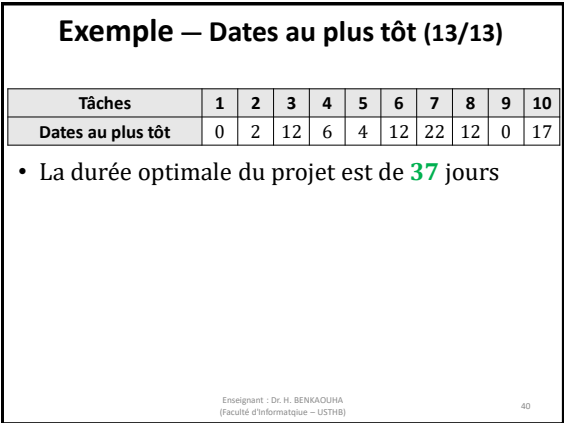
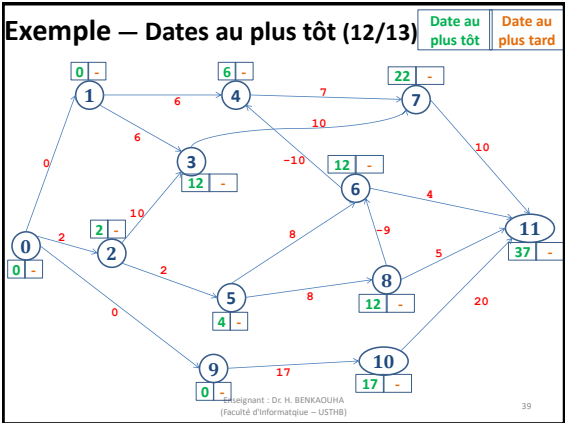
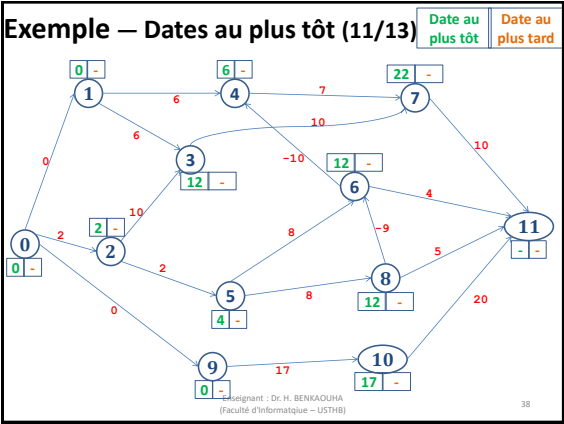
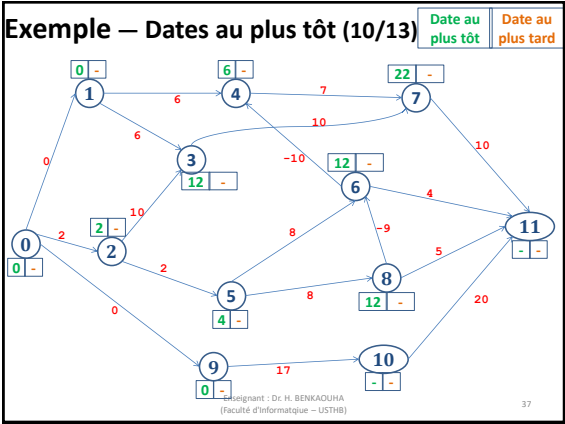
Exemple — Dates au plus tôt (3/13)

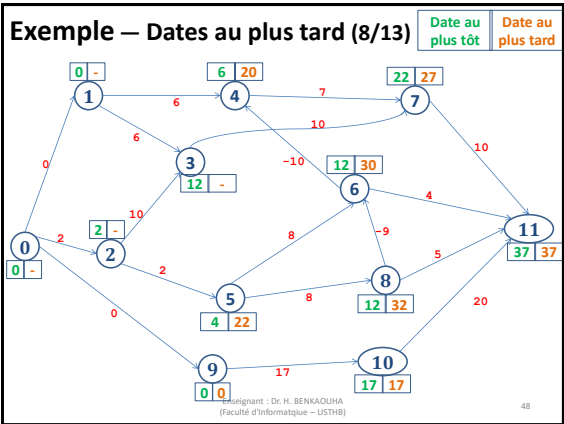
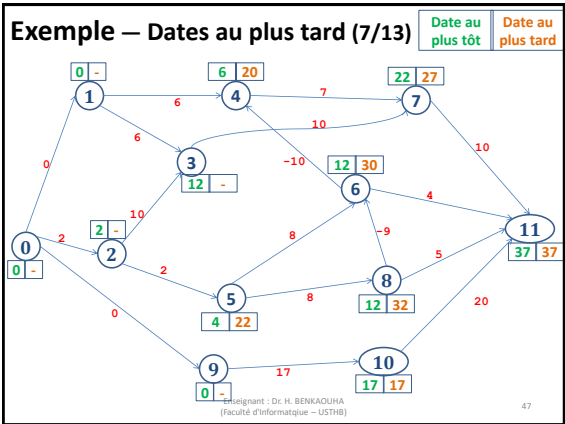
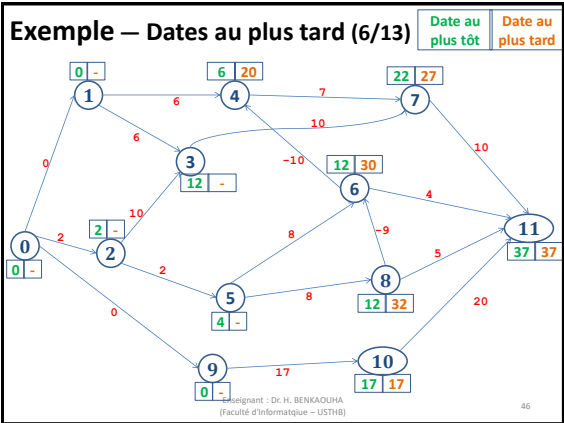
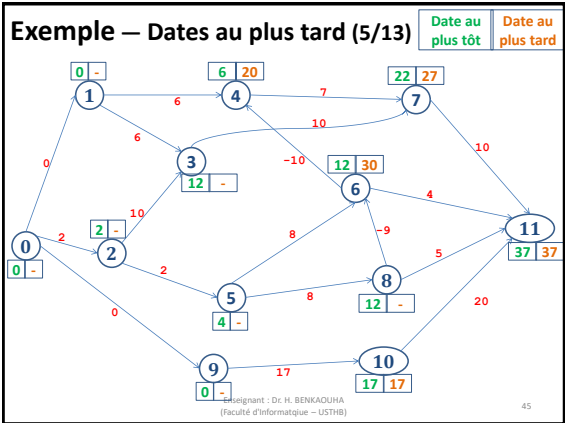
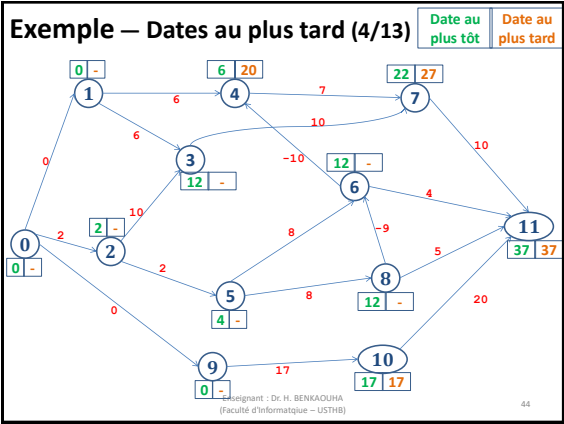
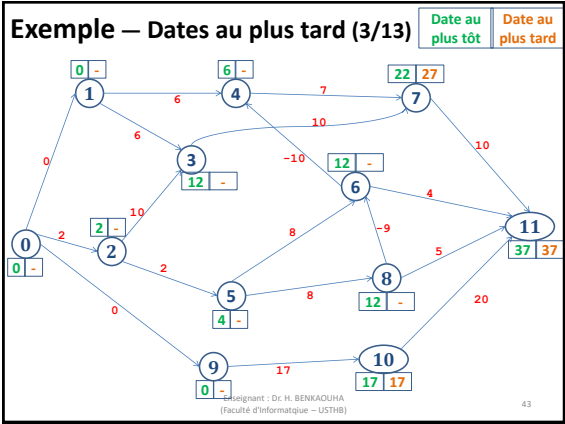


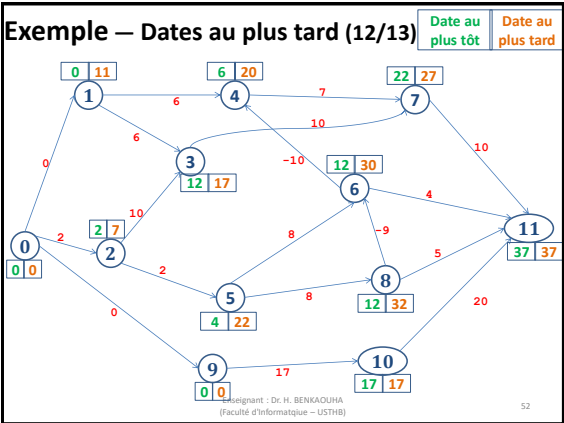
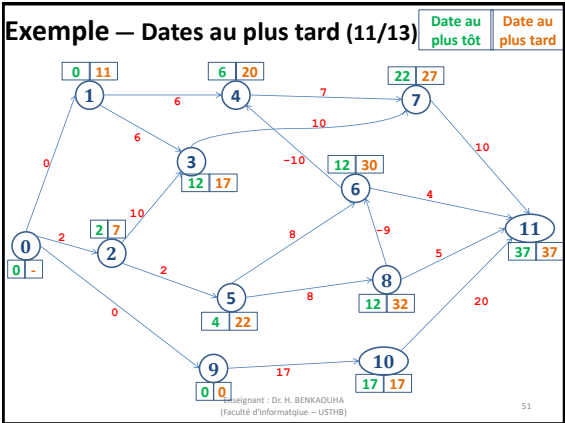
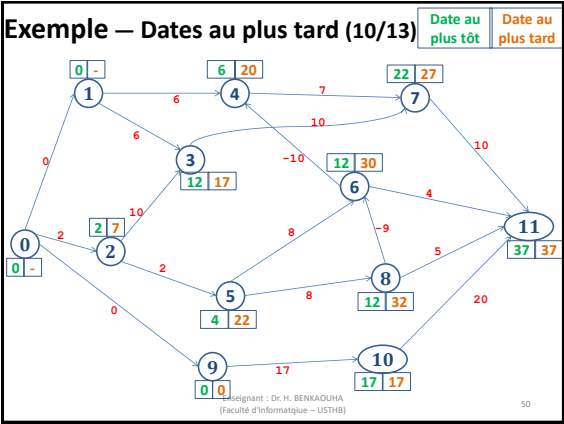
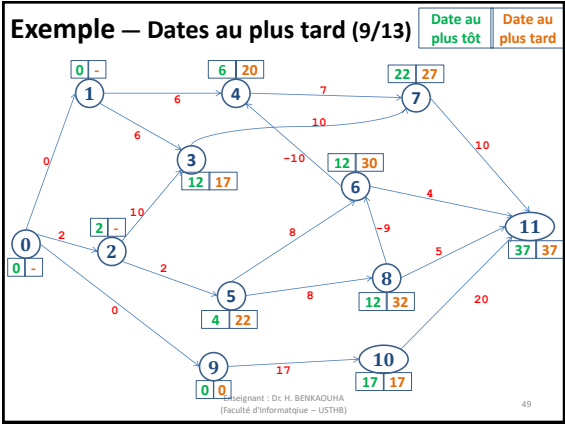
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

30









Exemple — Dates au plus tard (13/13)

Tâches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dates au plus tôt	0	2	12	6	4	12	22	12	0	17
Dates au plus tard	11	7	17	20	22	30	27	32	0	17

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)

Exemple — Marge/Tâches critiques/Chemin critique

Tâches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dates au plus tôt	0	2	12	6	4	12	22	12	0	17
Dates au plus tard	11	7	17	20	22	30	27	32	0	17
Marge totale	11	5	5	14	18	18	5	10	0	0

• Les tâches critiques : 9 et 10

• Le chemin critique : 0 9 10 11

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique – USTHB)