

Examen Final de Théorie des Graphes

Durée 1h15'

Exercice 1. (08 pts)

Soit le graphe orienté $G=(X, U)$ représenté dans le tableau ci-dessous par le dictionnaire des prédécesseurs :

$x \in X$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prédécesseurs de x	2	6	1, 9	2	1, 3, 8	2, 4	1, 3, 8	4, 6	4, 5, 7

1. Etudier les propriétés de G (simple, complet, régulier). Justifier.
2. G admet-il un parcours *Eulérien* ? Justifier.
3. Trouver un cycle *Hamiltonien* dans G .
4. Calculer la matrice de fermeture transitive \hat{M} .
5. Donner les composantes fortement connexes de G . Tracer le graphe réduit G_R de G .
6. Proposer le nombre minimal d'arcs à rajouter à G pour qu'il soit fortement connexe.

Exercice 2. (08 pts)

Un projet requiert la réalisation de six (06) tâches, le tableau suivant donne pour chaque tâche, le temps (en jours) requis et les contraintes liées au début d'exécution des tâches.

Tâche i	Durée de i	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche i
1	5	-
2	7	Ne peut débuter que 2 jours après le début des travaux et après la fin de 1
3	1	Après la fin de 1 et 2.
4	4	Après la fin de 3 et ne doit pas dépasser k jours après le début de 2.
5	8	Après la fin de 1 et 3.
6	3	Après la fin de 4.

1. Ecrire les contraintes sous forme d'inéquations.
2. Donner la représentation du problème en graphe MPM (Potentiel-tâches).
3. Trouver un circuit dans le graphe obtenu. Pour quelles valeurs de k , le problème admet une solution ?
4. On pose $k=10$. Donner les dates de début au plus tôt de chaque tâche et la durée optimale du projet.
5. Donner les dates au plus tard, et déduire les tâches critiques.

Exercice 3. (05 pts)

Soit G un graphe non orienté tel que $|X|=n$ et $|E|=m$.

1. Montrer que si G est simple complet alors $m=n(n-1)/2$.
2. Montrer que si G est simple avec p composantes connexes, le nombre maximum possible d'arêtes dans G est $m=(n-p)(n-p+1)/2$.

Bon Courage