Suite cours « méthodes directes pour la résolution des systèmes linéaires par Dr Dahmani Djamila.

Exemple 2 :

Calculer les décompositions LU, LDV des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 26 & -10 \\ 6 & 1 & -10 & 12 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 17 & 10 & 0 \\ -4 & 10 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 58 \end{pmatrix}$$, Résoudre les systèmes

$AX = b \; et \; BX = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I-3Méthode de Cholesky

Définition : une matrice $A \in M_n(\mathcal{R})$ est dite symétrique définie positive si et seulement si elle est symétrique et le produit scalaire $\langle Ax|x\rangle > 0 \; pour \; tout \; x \in \mathcal{R}^n - \{0_n\} \Leftrightarrow \det A_k > 0 \; pour \; k = 1, \dots, n$

Théorème(Cholesky).

Soit $A \in M_n(\mathcal{R})$, si A est une matrice symétrique définie positive alors il existe une matrice R triangulaire supérieure telle que $A = R^t R$. De plus on peut imposer aux éléments de la diagonale de R d'être positifs et dans ce cas cette décomposition sera unique.

Preuve.

Comme A est définie positive donc $\det A_k > 0 \; pour \; k = 1, \dots, n \; \; et \; donc \; \det A_k \neq 0$ alors admet une décomposition sous la forme $A = LU$ avec $u_{ii} > 0 \; car \; u_{ii} = \frac{\det A_i}{\det A_{i-1}}$ et donc

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}}^{D} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ 0 & \ddots & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{V}$$

D étant une diagonale et V une triangulaire supérieure qui a des 1 sur la diagonale.

Donc $A = LU = LDV$ comme A est symétrique alors $A = A^t = (LDV)^t = V^t D^t L^t = \underbrace{V^t}_{Triangulaire\ inférieure\ qui\ des\ 1\ sur\ la\ diagonale} \underbrace{DL^t}_{Triangulaire\ supérieure}$ d'où

$$V^t = L \; et \; U = DL^t \; et \; donc \; A = LDL^t$$

Comme les éléments diagonaux de D sont strictement positifs car il s'agit des $u_{ii} > 0 \; car \; u_{ii} = \frac{\det A_i}{\det A_{i-1}}$ alors on peut décomposer D sous la forme $D = D^{1/2}D^{1/2}$ où $D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$ alors on peut écrire $A = \underbrace{LD^{1/2}}_{R^t}\underbrace{D^{1/2}L^t}_{R}$.

Exemple on reprend la matrice B de l'exemple précèdent.

Dans ce qui suit on présente l'algorithme de Cholesky

Algorithme de Cholesky

Pour j allant de 1 à n
- Pour k allant de 1 à $j-1$
  - $a_{jj} = a_{jj} - (a_{jk})^2$
- Fin k
- $a_{jj} = \sqrt{a_{jj}}$
- Pour i allant de $j+1$ à n
  - Pour k allant de 1 à $j-1$
    - $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{jk}$
  - Fin k
  - $a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
- Fin i

Fin j

Remarque : le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer la factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive d'ordre n est $\frac{1}{6}(n^2 - 1)$ additions et soustractions, $\frac{1}{6}(n^2 - 1)n$ multiplications, $\frac{1}{2}n(n-1)$ divisions, et n extractions de racines carrées. Soit plus favorable que la factorisation LU de la même matrice.

Méthodes du pivot partiel et du pivot total.

Exemple (Traité en cours) à Faire en TP.