Contrôle Final

Durée 2 heures Tout document interdit

Exercice I. (2.5-2.5points)

Donner les grammaires des langages suivants :

$L_1 = \{ a^n b^m w , m - |w| \equiv 1[3] , w \in \{d\}^* \}$.

$L_2 = \{a^{3n} b^k c^m$ avec $n,m,k \geq 0$ et $3n+m = k$, k est impair$\}$

G1 :

S →aS / A	
A→aaaA / B / aC /aaD	
B→dddB / dd	//B : m ≡0[3] dans ce cas on doit avoir |w| ≡2[3]
C→dddC / ε	//C : m ≡1[3] dans ce cas on doit avoir |w| ≡0[3]
D→dddD /d	//C : m ≡2[3] dans ce cas on doit avoir |w| ≡1[3]

G2 :

S → S1 / S2	//S1 : 3n pair et m impair //S2 : 3n impair et m pair
S1 → A_1B	S2 → C_1D
A_1→ aaaA_2bbb	C_1→ aaaC_2bbb / ε
A_2→ aaaA_1bbb / ε	C_2→ aaaC_1bbb
B →bb B cc /bc	B →bb B cc / ε

Ou bien G2 :

S → S1 / S2	//S1 : 3n pair et m impair //S2 : 3n impair et m pair
S1 → AB	S2 → CD
A →aaaaaa A bbbbbb / ε	C →aaaaaa C bbbbbb / aaabbb
B →bb B cc /bc	B →bb B cc / ε

Exercice II. (2-2points)

Donner les automates les plus adéquats des langages suivants :

L_1est le complément du langage $\{a^n b^n c^n, n > 0\}$

$L_2 = \{a^{3n} c^k b^m$ avec $n,m,k \geq 0$, $3n+2m=k$ $\}$

L'automate de L1 :

#S0 b→#SF	bw w∈X*
#S0 c →#SF	Cw
#S0 a →# aS1	
aS1a → aaS1	// empiler les a
aS1b → S2	// Comparer les a et b dépiler les a à la lecture des b) pour vérifier que i≠j
aS2b → S2	
aS2c →aSF	$(a^i b^j c^n$ w i>j)

#S2b →#SF	$(a^ib^jc^n\ w \quad i<j)$
aS1b → aS3	// Comparer les a et c pour vérifier que $i\neq k$/ On lit les b sans les empiler
aS3b→ aS3	// je dépasse les b
aS3c→ S4	
aS4c →S4	
aS4 →aSF	$i>k$
#S4c →#SF	$i<k$
aS4b →aSF	$(a^ib^nc^kb.w \quad i>k)$
aS4a →aSF	$(a^ib^nc^ka.w \quad i>k)$
#S4a→#SF	$(a^nb^jc^na.w)$
#S4b→#SF	$(a^nb^jc^nb.w)$
#SF a→#SF	Lire le mot jusqu'à la fin
#SF b→#SF	Lire le mot jusqu'à la fin
#SF c→#SF	Lire le mot jusqu'à la fin
aSF a→aSF	Lire le mot jusqu'à la fin
aSF b→aSF	Lire le mot jusqu'à la fin
aSF c→aSF	Lire le mot jusqu'à la fin

L'automate de L2 :

#S0a →#aS1	//S1:Nbr de a = 3n+1
aS1a →aaS2	//S2: Nbr de a = 3n+2
aS2a →aaS3	//S3: Nbr de a = 3n
aS3a →aaS1	
aS3c → S4	
aS4c → S4	
#S4c → #cS5	
cS5c → cS6	
cS6c → ccS5	On empile un c sur deux (le premier)
cS6b → S7	
cS7b → S7	
#S7 →#SF	
#S4→#SF	m=0
#S0 c→#cS5	n=0

Exercice IV. (1-2-2-1-2 Pts)

1. Donner l'automate d'états finis simple déterministe qui reconnait le langage défini par l'expression régulière suivante :

$$E= (a\cup b)^*.\ aa\ .\ (a\cup b)^*$$

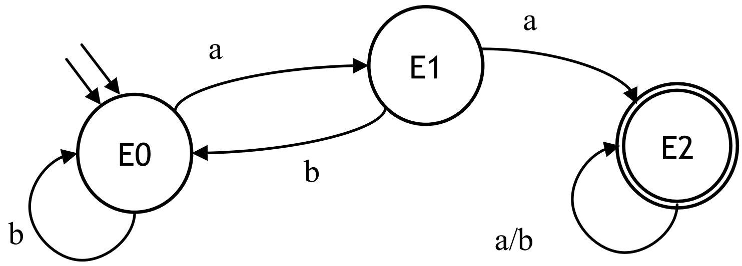
$E//a =(a\cup b)^*\ //a.\ aa\ .\ (a\cup b)^*\cup aa\ .\ (a\cup b)^*\ //a = (a\cup b)^*.\ aa\ .\ (a\cup b)^*\cup a\ .\ (a\cup b)^* =E1$

$E//b=(a\cup b)^*\ //b.\ aa\ .\ (a\cup b)^*\cup aa\ .\ (a\cup b)^*\ //b= (a\cup b)^*.\ aa\ .\ (a\cup b)^* = E$

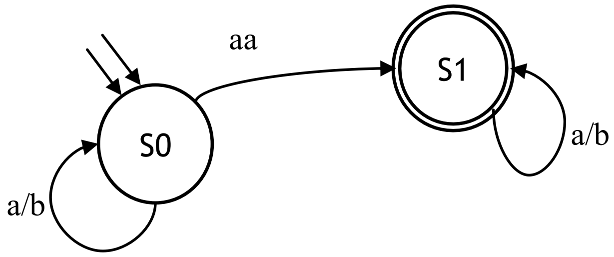
$E1//a= =((a\cup b)^*\ //a).\ aa\ .\ (a\cup b)^*\cup(\ aa\ .\ (a\cup b)^*)\ //a \cup (a\ .\ (a\cup b)^*)//\ a =$
$(a\cup b)^*.\ aa\ .\ (a\cup b)^*\cup a\ .\ (a\cup b)^*\cup(a\cup b)^* = (a\cup b)^* =E2$

$E1//b = ((a\cup b)^*.\ aa\ .\ (a\cup b)^*)\ //b \cup (\ aa\ .\ (a\cup b)^*)\ //b\cup(\ a\ .\ (a\cup b)^*)//b = (a\cup b)^*.\ aa\ .\ (a\cup b)^*=E$

$E2//a=E2//b =E2$

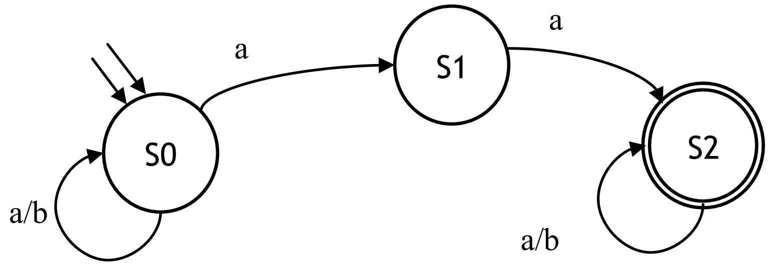


Ou bien on obtient cet automate informellement sans passer par les dérivées



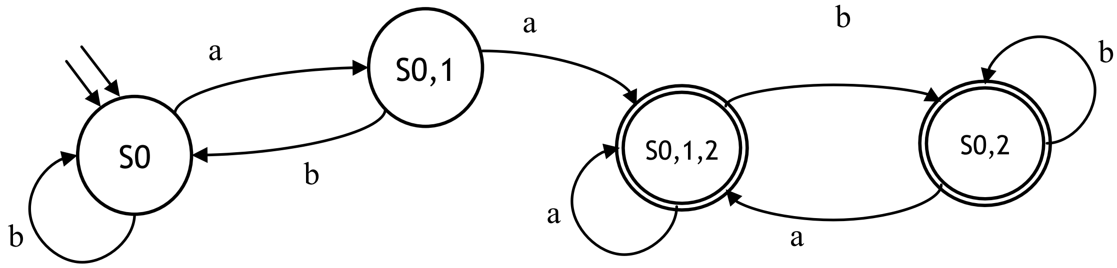
Et on le rend simple déterministe :

Simple :



Déterministe :

	a	b
S0	S1,S0	S0
S1,S0	S2,S0,S1	S0
S0 ,S1,S2	S0,S1,S2	S0,S2
S0,S2	S0,S1,S2	S0,S2

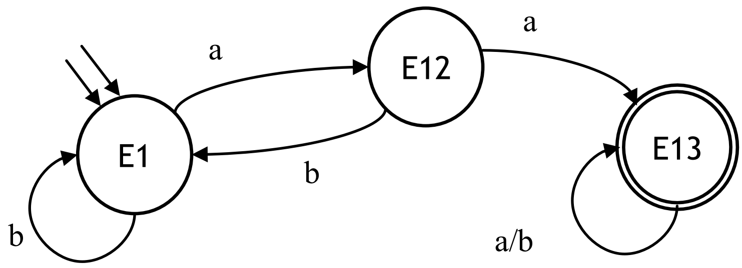


2/ Soit l'expression E_1= (ab∪b)* aa (a∪b)*
Montrer que L(E)=L(E_1)

On construit l'automate A1 à partir de E1:
E1//a = b(ab∪b)* aa (a∪b)* ∪ a (a∪b)*= E12
E1//b = (ab∪b)* aa (a∪b)* = E1

E12//a = (a∪b)* = E13
E12//b=E1
E13//a=E13//b= E13

On obtient le même automate que celui qui reconnait L(E)



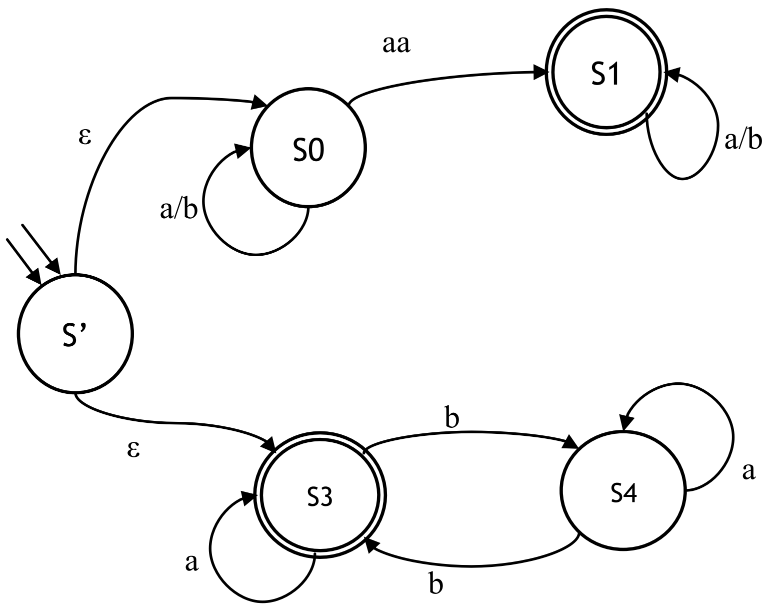
On a L(E) = L(A1)=L(E1)

Nous avons également accepté d'autres solutions. Il y en a plusieurs.

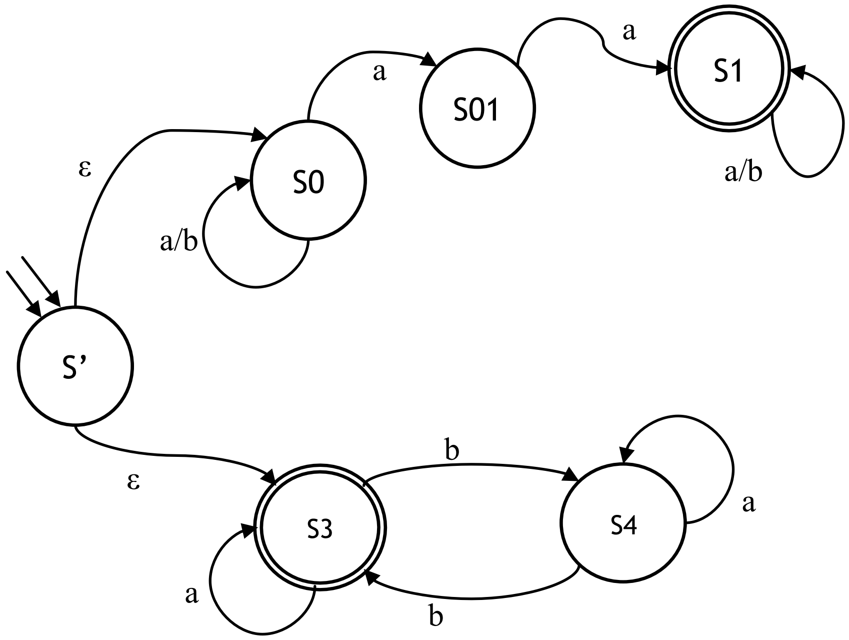
3/ Donner l'AEF simple déterministe reconnaissant le langage L défini comme suit :

L= {w ∈{a, b}* / w = u aa v   avec u, v∈ X* **ou** $|w|_b$ = 2k, k≥ 0}

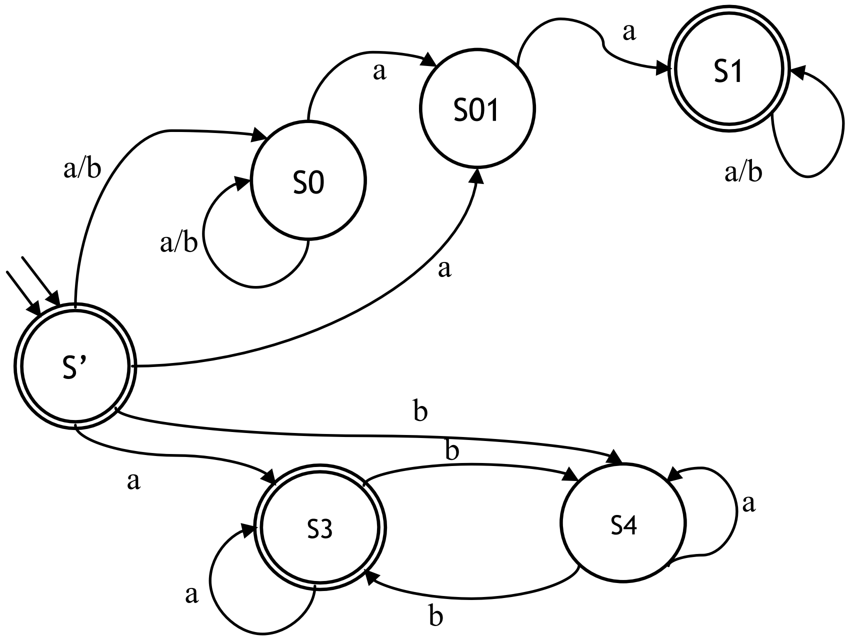
<u>L'automate généralisé</u>



<u>L'automate partiellement généralisé</u>

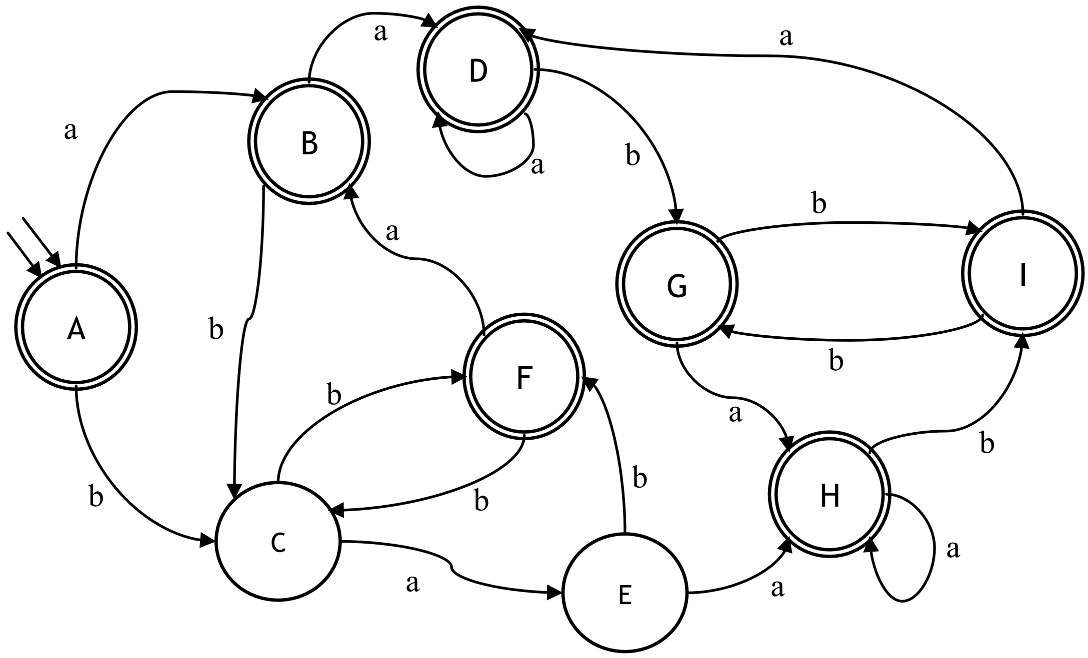


L'automate Simple :



L'automate Déterministe :

		a	b
A	{S'}	{S0,S01,S3}	{S0,S4}
B	{S0,S01,S3}	{S0,S01,S1,S3}	{S0,S4}
C	{S0,S4}	{S0,S01,S4}	{S0,S3}
D	{S0,S01,S1,S3}	{S0,S01,S1,S3}	{S0,S4,S1}
E	{S0,S01,S4}	{S0,S01,S4,S1}	{S0,S3}
F	{S0,S3}	{ S0,S01,S3}	{S0,S4}
G	{S0,S4,S1}	{S0,S01,S4,S1}	{S0,S3,S1}
H	{S0,S01,S4,S1}	{S0,S01,S4,S1}	{S0,S3,S1}
I	{S0,S3,S1}	{ S0,S01,S3,S1}	{S0,S4,S1}



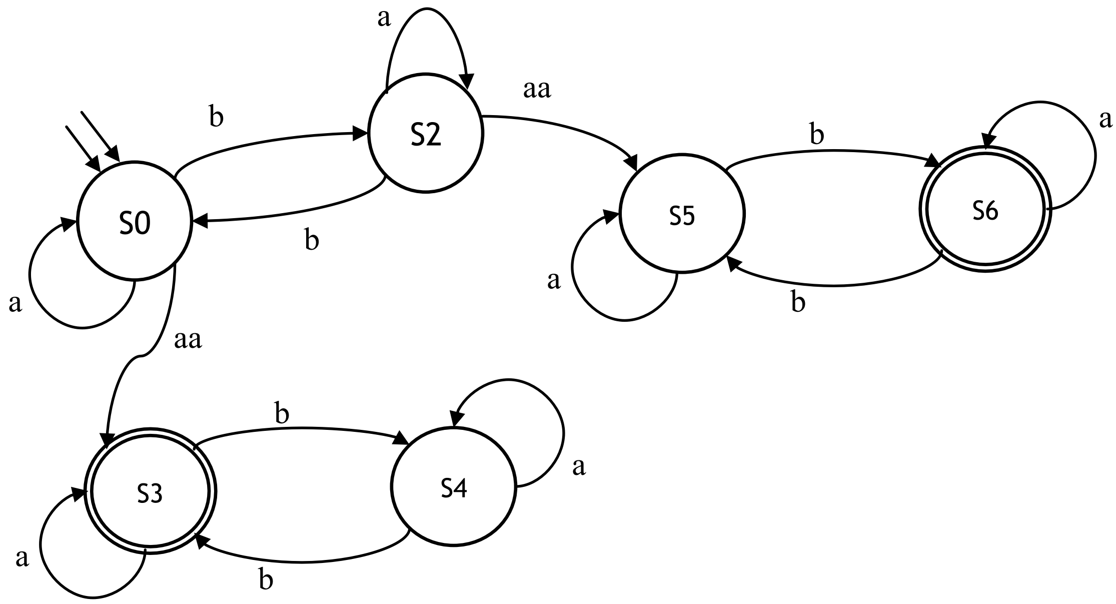
4/ Donner la grammaire régulière droite engendrant le complément de L
L'automate est complet il suffit d'inverser les états finaux-non finaux
G <{a,b}, A, {A..I}, P :

A $\rightarrow$aB /bC
B$\rightarrow$aD /bC
C$\rightarrow$aE /bF /ε
D$\rightarrow$aD /bG
E$\rightarrow$aH /bF /ε
F$\rightarrow$aB /bC
G$\rightarrow$aH /bI
H$\rightarrow$aH /bI
I$\rightarrow$aD /bG

>

5/ Donner l'AEF du langage L défini comme suit :

$L= \{w \in X^* \ / \ w = u\ aa\ v,\ u \in X^* \text{et } v \in X^* \text{ et } |w|_b = 2k,\ k\geq 0\}$



S0
S2
S3
S4
S5
S6
a
b
aa