

# Généralités sur les graphes – Concepts Fondamentaux

*arête →  
arcs →*

## 1. Introduction

Un **graphe** est défini par deux ensembles : Un ensemble de sommets noté  $X$  et un ensemble de relations entre les sommets noté  $U$  ou  $E$ . Selon le type de cette relation. On distingue deux grandes classes de graphes : les **graphes orientés** si la relation est orientée et les **graphes non orientés** dans le cas contraire.

### 1.1 Graphe orienté

Un graphe **orienté**  $G=(X, U)$  est défini par les deux ensembles :

- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  avec  $n$  entier fini et  $n \geq 1$ , où chaque  $x_i \in X$  est un **sommet** du graphe.
- $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  avec  $m$  entier positif ou nul et fini, est appelé ensemble des **arcs**. Chaque  $u_j \in U$  est une **paire ordonnée** de sommets,  $u_j = (x, y)$ .  $x$  est appelé **extrémité initiale** de  $u_j$  et  $y$  est appelé **extrémité terminale** de  $u_j$ .  $U$  peut être vide.

*$U \{ \text{arcs} \}$   $E \{ \text{arêtes} \}$   $G(x, u)$  est graph orienté  
 $G(x, E)$  " " non "*

### 1.2 Graphe non orienté

Un graphe **non orienté**  $G=(X, E)$  est défini par les deux ensembles :

- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  avec  $n$  entier fini et  $n \geq 1$ , où chaque  $x_i \in X$  est un **sommet** du graphe.
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  avec  $m$  entier positif ou nul et fini, est appelé ensemble des **arêtes**. Chaque  $e_j \in E$  est une **paire non ordonnée** de sommets,  $e_j = \{x, y\} = \{y, x\}$ .  $x$  et  $y$  sont appelés **extrémités** de  $e_j$ .  $E$  peut être vide.

### 1.3 Représentation

On représente généralement un sommet par un point ou un cercle. Un arc est représenté par une flèche et une arête par un trait qui peuvent être courbés.

## 2. Définitions

- Le nombre de sommets dans un graphe est appelé **l'ordre du graphe**. Le nombre d'arcs (resp. arêtes) dans un graphe est appelé **taille du graphe**.
- Si les deux extrémités d'un arc (resp. une arête) sont confondus alors cet arc (resp. cette arête) est appelé(e) **boucle**.
- Si deux arcs (resp. deux arêtes) possèdent les mêmes extrémités, on dit alors qu'ils sont **parallèles**.
- Un **graphe** est dit **simple** s'il ne contient ni boucles ni arêtes parallèles.

- Soit un arc  $u=(x, y)$  (resp. une arête  $e=\{x, y\}$ ) :

- $x$  et  $y$  sont dits deux **sommets adjacents**.
- Pour le cas de l'arc  $u$  :  $x$  est dit **prédécesseur** de  $y$ .  $y$  est dit **successeur** de  $x$ .
- $x$  et  $y$  sont **incidents** à l'arc  $u$  (resp. à l'arête  $e$ ).
- L'arc  $u$  (resp. à l'arête  $e$ ) est **incident aux** sommets  $x$  et  $y$ .
- $u$  est **incident vers l'extérieur** de  $x$  et  $u$  est **incident vers l'intérieur** de  $y$ .



- Soit  $x \in X$ , un sommet du graphe orienté  $G=(X, U)$ . On définit :

- $I^+(x) = \text{Succ}(x) = \{y \in X / (x, y) \in U\}$  appelé **ensemble des successeurs** du sommet  $x$ .
- $I^-(x) = \text{Pred}(x) = \{y \in X / (y, x) \in U\}$  appelé **ensemble des prédécesseurs** du sommet  $x$ .

- Soit  $x \in X$ , un sommet du graphe  $G$ , on appelle **voisin** de  $x$  tout sommet  $y \in X$  différent de  $x$  et qui est **adjacent** à  $x$ . Ainsi, on définit l'ensemble  $V$  comme suit :

- $V(x) = \{y \in X - \{x\} / \{x, y\} \in E\}$  pour les graphes non orientés.
- $V(x) = V^+(x) \cup V^-(x)$  où  $V^+(x) = \{y \in X - \{x\} / (x, y) \in U\}$  et  $V^-(x) = \{y \in X - \{x\} / (y, x) \in U\}$ .
- $V^+(x)$  (resp.  $V^-(x)$ ) est appelé **ensemble des voisins externes** (resp. **internes**) de  $x$ .

- Deux arcs (resp. arêtes) sont dits **adjacents** s'ils ont une extrémité en commun.

- Pour tout **graphe orienté**, on définit deux applications donnant l'**extrémité initiale** et **terminale** d'un arc donné :

$$\begin{array}{ll} I: U & \rightarrow X \\ u=(x, y) & \rightarrow x \end{array} \quad \begin{array}{ll} T: U & \rightarrow X \\ u=(x, y) & \rightarrow y \end{array}$$

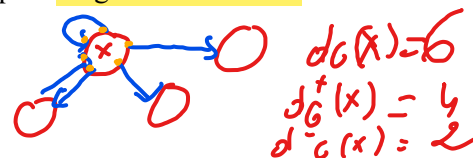
- On appelle **multiplicité d'un arc**  $(x_i, x_j)$ , la valeur  $m_{ij}$  correspondant au nombre d'arcs qui relient  $x_i$  à  $x_j$ . La **multiplicité d'un graphe**  $G$  est le nombre  $m(G)$  correspondant au maximum des  $m_{ij}$ .
- Un **graphe orienté** est dit **p-graphe** si  $m(G) = p$ .

### 3. Notion de degré

#### 3.1 Définition 1

Soit  $G = (X, E)$  un graphe non orienté (resp.  $G = (X, U)$  un graphe orienté). A tout sommet  $x \in X$ , on peut associer une valeur entière positive ou nulle, notée  $d_G(x)$ , qu'on appelle **degré du sommet  $x$** . Cette valeur est définie comme suit :

$d_G(x)$  = nombre de fois où  $x$  est extrémité d'un arc (resp. d'une arête).



#### 3.2 Définition 2

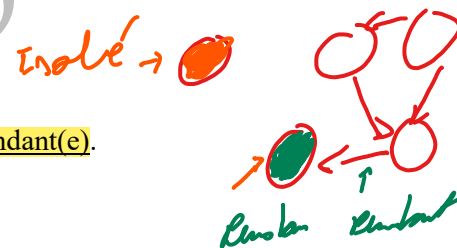
Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté.

On appelle **demi-degré extérieur** d'un sommet  $x \in X$ , la valeur suivante :  $d_G^+(x) = |\{u \in U / I(u)=x\}|$ .

On appelle **demi-degré intérieur** d'un sommet  $x \in X$ , la valeur suivante :  $d_G^-(x) = |\{u \in U / T(u)=x\}|$ .

#### 3.3 Remarques

- Pour tout graphe orienté, nous avons :  $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$
- Pour tout graphe, nous avons :  $d_G(x) \geq |V(x)|$ . Si  $G$  est simple Alors On a  $d_G(x) = |V(x)|$ .
- Pour tout graphe orienté, nous avons :  $d_G^+(x) \geq |V^+(x)|$  et  $d_G^-(x) \geq |V^-(x)|$ . Si  $G$  est 1-graphe sans boucles Alors On a  $d_G^+(x) = |V^+(x)|$  et  $d_G^-(x) = |V^-(x)|$ .
- On appelle **degré minimal** d'un graphe  $G$  qu'on note par  $\delta(G)$ , le plus petit degré dans le graphe  $G$ .  
 $\delta(G) = \min_{x \in X} \{d_G(x)\}$
- On appelle **degré maximal** d'un graphe  $G$  qu'on note par  $\Delta(G)$ , le plus grand degré dans le graphe  $G$ .  
 $\Delta(G) = \max_{x \in X} \{d_G(x)\}$
- Si  $d_G(x) = 0$  Alors  $x$  est dit **sommet isolé**.
- Si  $d_G(x) = 1$  Alors  $x$  est dit **sommet pendent**.
- Un arc (resp. Une arête) incident(e) à un **sommet pendent** est appelé(e) **pendant(e)**.



#### 3.4 Formule des degrés

Cas non orienté :

Pour tout graphe :  $G = (X, E)$ , On a :  $\sum_{x \in X} d_G(x) = 2|E|$ .



Preuve :

Chaque arête a exactement deux extrémité  $\Rightarrow$  Elle est comptée deux fois dans le degré de chaque sommet  $\Rightarrow$  La somme totale des degrés est égale à deux fois le nombre total d'arêtes.

Cas orienté :

Pour tout graphe :  $G = (X, U)$ , On a :  $\sum_{x \in X} d_G(x) = 2|U|$  et  $\sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x) = |U|$ .

Preuve :

Chaque arc a exactement une extrémité initiale et une extrémité terminale  $\Rightarrow$  Chaque arc est comptabilisé une fois dans  $d^+$  pour son extrémité initiale et une autre fois dans  $d^-$  pour son extrémité finale. Le nombre total d'arcs ayant une extrémité initiale (resp. terminale) est exactement la somme des demi-degrés extérieurs (resp. intérieurs).

**Conséquence :** De là, on peut déduire que le nombre de sommets de degrés impairs dans un graphe est toujours pair.

### 4. Représentation machine

#### 4.1 Matrice d'adjacence

A tout graphe d'ordre  $n$  on associe une matrice  $M$  de  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont les éléments sont notés  $M_{ij}$ .

Pour un graphe non orienté  $G=(X, E)$ ,  $M_{ij}=M_{ji}$  représente le nombre d'arêtes ayant les sommets  $i$  et  $j$  comme extrémités. Ainsi, la matrice d'adjacence  $M$  d'un graphe non orienté est toujours **symétrique**. Pour la boucle, on la compte deux fois.

- La somme d'une ligne  $k$  = la somme d'une colonne  $k$  =  $d_G(k)$

Pour un graphe orienté  $G=(X, U)$ ,  $M_{ij}$  représente le nombre d'arcs ayant  $i$  comme extrémité initiale et  $j$  comme extrémité terminale.

- Les coefficients de  $M$  pour un graphe simple est binaire avec la diagonale complètement à 0.
- La somme d'une ligne  $i$  =  $d_G^+(i)$ . La somme d'une colonne  $j$  =  $d_G^-(j)$ .

## 4.2 Matrice d'incidence

A tout **graphe non orienté**  $G=(X, E)$ , on peut associer une matrice  $M$  de  $n$  lignes et  $m$  colonnes. Où  $n$  est le **nombre de sommets** dans  $G$  et  $m$  est le **nombre d'arêtes** dans  $G$ .

$M_{ij}$  représente le **nombre de fois où le sommet  $i$  est incident à l'arête  $j$** . Les **éléments de  $M$**  sont dans  $\{0, 1, 2\}$

- Si **deux colonnes  $j_1$  et  $j_2$  sont identiques** alors les arêtes  $j_1$  et  $j_2$  sont **parallèles**.
- Si un élément  $M_{ij}=2$  alors l'arête  $j$  est **une boucle**.

A tout **graphe orienté**  $G=(X, U)$ , on peut associer une matrice  $M$  de  $n$  lignes et  $m$  colonnes. Où  $n$  est le **nombre de sommets** dans  $G$  et  $m$  est le **nombre d'arcs** dans  $G$ .

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } I(j) = i \\ -1 & \text{si } T(j) = i \\ 0 & \text{si } j \text{ est une boucle ou autre} \end{cases}$$

- Une **colonne nulle** représente une **boucle**.
- Dans ce cas, **toute boucle dans le graphe est détectée** mais **son emplacement ne peut pas être précisé** à partir de cette matrice.

## 4.3 Listes

<https://www.youtube.com/watch?v=Z8TOI7dkfww>

(Exemple)

A tout **graphe orienté**  $G=(X, U)$  avec  $|X|=n$  et  $|U|=m$ , on peut associer deux tableaux (vecteurs) **PS** et **LS** :

**PS** : **tableau de pointeurs** à  $n+1$  éléments, où :

- **PS[i]** : **pointe sur la case contenant le premier successeur du sommet  $i$  dans LS**.
- On pose **PS[1] = 1**.
- On pose pour tout  $n \geq i \geq 2$  : **PS[i] = k**, où **k = PS[i-1] + nombre de successeurs de i-1**
- On pose **PS[n+1] = m+1**
- Si **un sommet  $i$  n'a pas de successeur**, on aura **PS[i] = PS[i+1]**

**LS** : **tableau de  $m$  éléments**, où :

- Les **successeurs d'un sommet  $i$**  se trouvent **entre la case numéro PS[i] et la case PS[i+1]-1** du tableau **LS**.

## 5. Graphes particuliers

Soit  $G = (X, U)$  un **graphe orienté** (resp.  $G = (X, E)$  un **graphe non orienté**). Soit  $A \subset X$  un **sous ensemble de sommets** et  $V \subset U$  (resp.  $V \subset E$ ).

### 5.1 Sous graphe

Un **sous graphe** de  $G$  engendré par l'ensemble de sommets  $A$  est le graphe :

$G_A = (A, U_A)$  où  $U_A = \{u \in U / I(u) \in A \text{ et } T(u) \in A\}$  dans le cas orienté.

$G_A = (A, E_A)$  où  $E_A = \{e = \{x, y\} \in E / x \in A \text{ et } y \in A\}$  dans le cas non orienté.

### 5.2 Graphe partiel

Un **graphe partiel** de  $G$  engendré par l'ensemble d'arcs (resp. d'arêtes)  $V$  est le graphe  $G_V = (X, V)$ .

### 5.3 Sous graphe partiel

Un **sous graphe partiel** de  $G$  engendré par l'ensemble de sommets  $A$  et l'ensemble d'arcs (resp. d'arêtes)  $V$  est le graphe  $G_{A,V} = (A, V_A)$ .

$V_A$  est l'ensemble d'arcs (resp. arêtes) qui ont leurs deux extrémités dans le sous ensemble  $V$ .

### 5.4 Complément d'un graphe

Le **graphe complémentaire** de  $G$  est noté  $\bar{G} = (X, \bar{U})$  (resp.  $\bar{G} = (X, \bar{E})$ ) où :

$\bar{U} = \{(x, y) \in X^2 / x \neq y \text{ et } (x, y) \notin U\}$  (resp.  $\bar{E} = \{\{x, y\} \in X^2 / x \neq y \text{ et } \{x, y\} \notin E\}$ )

### 5.5 Line-graph

On appelle **graphe représentatif des arêtes** d'un **graphe non orienté**  $G$  (ou **Line-graph**), le **graphe  $L(G)$**  dont les sommets représentent les arêtes de  $G$  et deux sommets sont adjacents dans  $L(G)$  si et seulement si les arêtes correspondantes de  $G$  sont incidentes à un même sommet de  $G$ .

## 6. Propriétés des graphes

### 6.1 Graphe Simple

Un graphe est dit simple s'il ne contient ni boucles ni arcs parallèles. Si  $G$  est simple, on a  $d_G(x) = |V(x)|$ .

### 6.2 Graphe Complet

Dans le cas orienté :  $G$  est complet ssi  $\forall x \neq y \in X, (x, y) \notin U \Rightarrow (y, x) \in U$

Dans le cas non orienté :  $G$  est complet ssi  $\forall x \neq y \in X, \{x, y\} \in E$ .

Un graphe simple complet d'ordre  $n$  est noté  $K_n$ .

### 6.3 Graphe Régulier

Un graphe  $G$  est dit  $k$ -régulier si  $\forall x$  sommet de  $G$ , on a  $d_G(x) = k$ . En d'autres termes,  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ .

Si  $k = 0$ ,  $G$  est un graphe sans arêtes (sans arcs) appelé stable.  $G$  est constitué seulement de sommets isolés.

Si  $k = 1$ ,  $G$  est constitué d'arcs (arêtes) dispersé(e)s dans l'espace.

### 6.4 Graphe Symétrique

Cette notion est spécifique aux graphes orientés.

$G$  est symétrique ssi  $\forall x \neq y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$

### 6.5 Graphe Antisymétrique

Cette notion est spécifique aux graphes orientés.

$G$  est antisymétrique ssi  $\forall x \neq y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$

### 6.6 Graphe Transitif

Cette notion est spécifique aux graphes orientés.

$G$  est transitif ssi  $\forall x, y, z \in X, (x, y) \in U$  et  $(y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U$

### 6.7 Graphe Biparti

$G$  est dit biparti ssi l'ensemble de ses sommets  $X$  admet une partition en 2 sous ensembles  $X_1$  et  $X_2$  avec  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  et  $X_1 \cup X_2 = X$ .

Dans le cas orienté :  $\forall (x, y) \in U \Rightarrow x \in X_1$  et  $y \in X_2$

Dans le cas non orienté :  $\forall \{x, y\} \in E (x \in X_1$  et  $y \in X_2)$  ou  $(x \in X_2$  et  $y \in X_1)$

$G$  est dit biparti complet ssi  $G$  est dit biparti et  $\forall x \in X_1$  et  $\forall y \in X_2 \Rightarrow (x, y) \in U$ .

Un graphe biparti complet et simple  $G=(X_1 \cup X_2, U)$  (resp.  $G=(X_1 \cup X_2, E)$ ) avec  $|X_1|=p$  et  $|X_2|=q$  est noté  $K_{p,q}$ .

### 6.8 Graphe Multiparti

$G$  est dit multiparti ssi l'ensemble de ses sommets  $X$  admet une partition en  $p$  sous ensembles  $X_1 \dots X_p$  ( $p \geq 3$ ). Avec  $X_i \cap X_j = \emptyset (i \neq j)$  et  $X_1 \cup \dots \cup X_p = X$ .

Dans le cas orienté :  $\forall (x, y) \in U \Rightarrow x \in X_k$  et  $y \in X_{k+1}$  (avec  $1 \leq k \leq p-1$ )

Dans le cas non orienté :  $\forall \{x, y\} \in E (x \in X_k$  et  $y \in X_{k+1})$  ou  $(y \in X_k$  et  $x \in X_{k+1})$  avec  $1 \leq k \leq p-1$

## 7. Stable / Clique

On appelle stable dans un graphe  $G$  un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq X$  et le sous graphe engendré par  $S$  est formé de sommets isolés (ne contient aucun arc ou arête).

Chaque partition d'un graphe biparti forme un stable.

On appelle clique dans un graphe  $G$  un sous-ensemble de sommets  $C \subseteq X$  où le sous graphe engendré par  $C$  est un graphe complet.

## 8. Coloration des sommets d'un graphe

### 8.1 Définition 1

On appelle  $k$ -coloration d'un graphe non orienté  $G=(X, E)$ , une application  $\varphi$  qui associe à chaque sommet  $x \in X$  de  $G$  une couleur représentée par un entier entre 1 et  $k$  de telle façon que les sommets ont des couleurs distinctes, comme suit :

$$\begin{array}{lll} \varphi : X & \rightarrow & \{1, 2, \dots, k\} \\ x & \rightarrow & \varphi(x) \end{array} \quad \text{tel que } \forall x \neq y \in X \text{ si } \{x, y\} \in E \text{ Alors } \varphi(x) \neq \varphi(y).$$

En d'autres termes, deux sommets adjacents ne peuvent pas être coloriés de la même couleur et tous les sommets doivent être coloriés. De ce fait, une  $k$ -coloration partitionne l'ensemble des sommets  $X$  en  $k$  stables où tous les sommets du même stable ont la même couleur.

## 8.2 Nombre chromatique

On appelle nombre chromatique d'un graphe  $G=(X, E)$ , le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de ce graphe. Ce nombre est noté  $\chi(G)$ .

Ainsi, le nombre chromatique est toujours compris entre 1 et le nombre de sommets  $n=|X|$ .

## 8.3 Problème de coloration

Il s'agit de réaliser une  $k$ -coloration d'un graphe  $G$ .  $k$  doit être le plus proche possible du nombre chromatique  $\chi(G)$ . L'algorithme de Welsh & Powell est l'un des plus connus pour résoudre ce problème :

Ordonner les sommets par de degrés (ordre décroissant : du plus grand au plus petit).  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tel que  $d_G(x_i) \geq d_G(x_{i+1})$

Pour  $i$  de 1 à  $n$  : Affecter à  $x_i$  la plus petite couleur possible distincte des couleurs de  $V(x_i)$  colorés.

## 8.4 Proposition 1

Pour tout graphe  $G=(X, E)$  tel que  $\Delta(G)$  est le degré maximal dans  $G$  et  $\chi(G)$  est le nombre chromatique de  $G$ , nous avons :  $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ .

## 8.5 Proposition 2

Pour tout graphe  $G=(X, E)$  complet  $K_n$  où  $n \geq 2$  est l'ordre de  $G$  et  $\chi(G)$  est le nombre chromatique de  $G$ , nous avons :  $\chi(G) = \Delta(G)+1$ .

## 8.6 Proposition 3

Pour tout graphe  $G=(X, E)$  où  $\chi(G)$  est le nombre chromatique de  $G$  et  $C \subseteq X$  est la plus grande clique dans  $G$ , nous avons :  $\chi(G) \geq |C|$ .

## 9. Isomorphisme

### 9.1 Définition 1

Soient deux graphes orientés  $G_1=(X_1, U_1)$  et  $G_2=(X_2, U_2)$ . On dit que  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes (on note  $G_1 \equiv G_2$ ) ssi  $\exists f: X_1 \rightarrow X_2$  et  $\exists g: U_1 \rightarrow U_2$  deux bijections avec  $\forall u \in U_1, u=(x, y) \Leftrightarrow g(u)=(f(x), f(y))$ .

### 9.2 Définition 2

Soient deux graphes non orientés  $G_1=(X_1, E_1)$  et  $G_2=(X_2, E_2)$ . On dit que  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes (on note  $G_1 \equiv G_2$ ) ssi  $\exists \varphi: X_1 \rightarrow X_2$  une bijection avec  $\forall x, y \in X_1, e=\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$ .

### 9.3 Proposition

Soient deux graphes isomorphes  $G_1=(X_1, U_1) \equiv G_2=(X_2, U_2)$  (resp. non  $G_1=(X_1, E_1) \equiv G_2=(X_2, E_2)$ ) alors  $|X_1| = |X_2|$  et  $|U_1| = |U_2|$  (resp.  $|E_1| = |E_2|$ ) et  $\forall x \in X_1$  de degré  $d_G(x)$ ,  $\exists y \in X_2$  de degré  $d_G(y) = d_G(x)$ .

**Remarque :** La réciproque n'est pas toujours vraie. On peut trouver deux graphes non isomorphes ayant le même nombre de sommets et le même nombre d'arc (ou arêtes).