Exercice 1 / **6 points**

1. Modélisation sous forme de graphe potentiel tâches :

Les contraintes sous forme d'inéquations **(0.5)**

t_3-t_1≥7
t_4-t_1≥7
t_4-t_3≥2
t_5-t_3≥2
t_5-t_4≥4
t_6-t_3≥2
t_6-t_4≥4

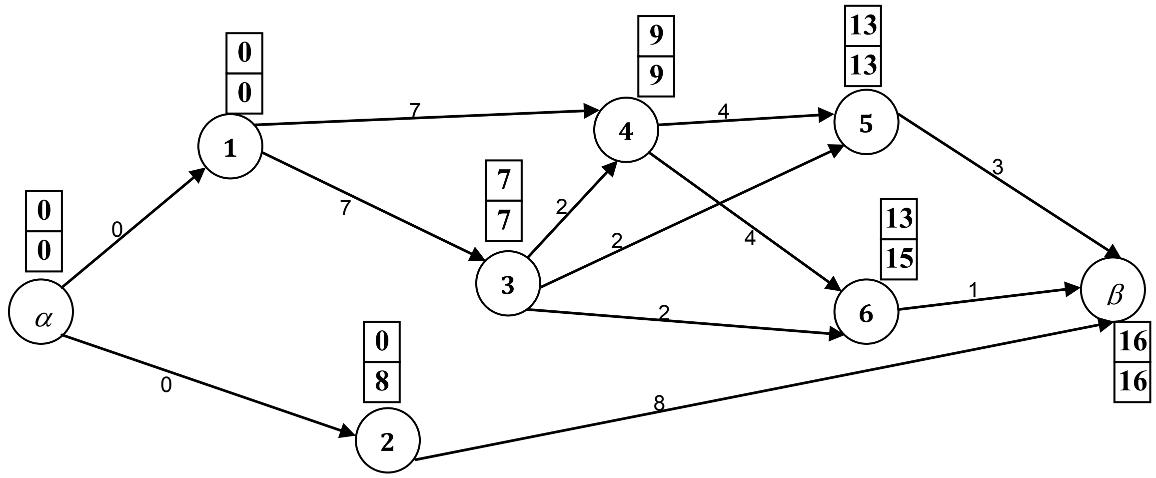
On rajoute deux tâches fictives de début de projet (α) et de fin de projet (β)

$t_1 - t_\alpha \geq 0$
$t_2 - t_\alpha \geq 0$
$\forall i \in \{1, ..., 6\}\ t_\beta - t_i \geq$ durée$_i$

Afin d'optimiser le graphe, on ne prend que celles qui ne sont pas redondantes :

$t_\beta - t_2 \geq 8$
$t_\beta - t_5 \geq 3$
$t_\beta - t_6 \geq 1$

Le graphe : **(1.5)**



2. Dates au plus tôt (voir le tableau ci-dessous) : **(1.5)**

Tâche	1	2	3	4	5	6
Date au plus tôt	0	0	7	9	13	13

La durée optimale du projet est de **16 jours** **(0.5)**

3. Dates au plus tard (voir le tableau ci-dessous) : **(1.5)**

Tâche	1	2	3	4	5	6
Date au plus tard	0	8	7	9	13	15

Les tâches critiques sont : **1**, **3**, **4** et **5** **(0.5)**

Exercice 2. / **6 points**

1. a. $\overline{G}$ est le graphe complémentaire du graphe *G*. **(1)**

L'ordre de $\bar{G}$ est ***n***

Sa taille est $\frac{n(n-1)}{2} - m$

1. b. ***G - x*** est le sous graphe de G engendré par X-{*x*} **(0.75)**

L'ordre de ***G-x*** est ***n-1***

Sa taille est ***m – d_G(x)***

1. c. ***G – e*** est le graphe partiel de G **(0.75)**

L'ordre de ***G-e*** est ***n***

Sa taille est ***m – 1***

2. Pour que $\overline{G}$ soit eulérien, il faut que l'ordre de G soit impair et que $\overline{G}$ soit connexe à des sommets isolés prés. En effet, si G est eulérien cela veut dire que chaque sommet est de degré pair, pour que les degrés soient pairs dans le graphe complémentaire aussi il faut que le nombre total de sommets soit impair. **(1.5)**

3. On considère deux sommets quelconques *x* et *y* de *G=(X,E)*, deux cas sont possibles : **(2)**

i. Soit les deux sommets appartiennent à une même composante connexe *C*, dans ce cas, étant donné que le graphe *G* n'est pas connexe, il existe alors une autre composante connexe *C'* comportant au moins un sommet. Considérons un sommet quelconque *z de C'*, dans le graphe *G* les sommets *x* et *y* ne sont pas reliés à *z*, c-à-d que les arêtes {*xz*} et {*yz*} n'appartiennent pas à *E*, elles sont donc dans $\overline{E}$. Ainsi, *x* et *y* sont reliés à *z* dans $\overline{G}$ par une chaîne passant par le sommet *z*.

ii. Soit les deux sommets appartiennent à deux composantes connexes différentes, *x* et *y* ne sont pas relié dans *G*, ils le sont donc dans $\overline{G}$.

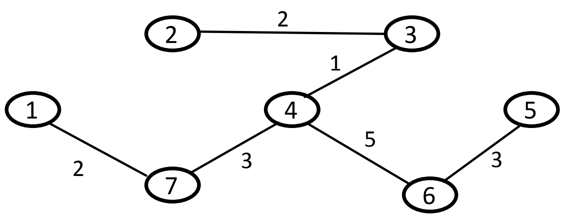
Dans les deux cas on remarque que quelque soit le couple de sommets *x* et *y* du graphe non connexe *G* ils sont toujours reliés dans $\overline{G}$. $\overline{G}$ est donc un graphe connexe.

Exercice 3. / **8 points**

1. Le tracé optimal qui permet de relier l'ensemble des villages est l'arbre couvrant de poids minimal. En effet, l'arbre un graphe connexe et minimal pour cette propriété, on peut donc rejoindre, à partir d'un village quelconque n'importe quel autre village. **(1)**

Après application de l'algorithme (Prim ou Kruksal) **(2.5)**

L'arbre couvrant de poids minimal est : **(1.5)**



2. Pour désigner le village devant accueillir l'école et qui engendre un coût de transport minimal on détermine pour chacun le coût total de transport vers ce village.

Le coût de transport vers le village *i* correspond à la somme des coûts de transport de chacun des autres villages vers le village *i*. On note le coût de transport du village *i* vers le village *j* par c_{ij}.

Si on veut déterminer le coût de transport du village 2 au village 1 par exemple, on doit considérer le nombre de bus nécessaires, ici un seul bus, et le trajet qui consiste à passer successivement par les village 3, 4 puis 7 avant d'arriver au village 1. La distance parcourue est donc 2 + 1 + 3 + 2, le coût de transport est donc 1 x (2 + 1 + 3 + 2) = 9 **(1)**

Ainsi :

Le coût de transport du village 2 au village 1 est égal à 1 x (2 + 1 + 3 + 2) = 8
Le coût de transport du village 3 au village 1 est égal à 3 x (1 + 3 + 2) = 18
Le coût de transport du village 4 au village 1 est égal à 2 x (3 + 2) = 10
Le coût de transport du village 5 au village 1 est égal à 1 x (3 + 5 + 3 + 2) = 13
Le coût de transport du village 6 au village 1 est égal à 2 x (5 + 3 + 2) = 20
Le coût de transport du village 7 au village 1 est égal à 1 x (2) = 2
Le coût total de transport si on choisit le village 1 pour accueillir l'école est 9+18+10+13+20+2=**71**.

Le coût de transport du village 1 au village 2 est égal à 2 x (2 + 1 + 3 + 2) = 16
Le coût de transport du village 3 au village 2 est égal à 3 x (2) = 6
Le coût de transport du village 4 au village 2 est égal à 2 x (1 + 2) = 6
Le coût de transport du village 5 au village 2 est égal à 1 x (3 + 5 + 1 + 2) = 11
Le coût de transport du village 6 au village 2 est égal à 2 x (5 + 1 + 2) = 16
Le coût de transport du village 7 au village 2 est égal à 1 x (3 + 1 + 2) = 6
Le coût total de transport si on choisit le village 2 pour accueillir l'école est **61**.

Déjà là on remarque que les coûts sont différents si on devait choisir ici, il est clair qu'on optera pour le village 2, mais ce n'est pas fini, déterminons les coûts pour les autres villages.

Le coût de transport du village 1 au village 3 est égal à 2 x (2 + 3 + 1) = 12
Le coût de transport du village 2 au village 3 est égal à 1 x (2) = 2
Le coût de transport du village 4 au village 3 est égal à 2 x (1) = 2
Le coût de transport du village 5 au village 3 est égal à 1 x (3 + 5 + 1) = 9
Le coût de transport du village 6 au village 3 est égal à 2 x (5 + 1) = 12
Le coût de transport du village 7 au village 3 est égal à 1 x (3 + 1) = 4
Le coût total de transport si on choisit le village 3 pour accueillir l'école est **41**.

Le coût de transport du village 1 au village 4 est égal à 2 x (2 + 3) = 10
Le coût de transport du village 2 au village 4 est égal à 1 x (2 + 1) = 3
Le coût de transport du village 3 au village 4 est égal à 3 x (1) = 3
Le coût de transport du village 5 au village 4 est égal à 1 x (3 + 5) = 8
Le coût de transport du village 6 au village 4 est égal à 2 x (5) = 10
Le coût de transport du village 7 au village 4 est égal à 1 x (3) = 3
Le coût total de transport si on choisit le village 4 pour accueillir l'école est **37**.

Le coût de transport du village 1 au village 5 est égal à 2 x (2 + 3 + 5 + 3) = 26
Le coût de transport du village 2 au village 5 est égal à 1 x (2 + 1 + 5 + 3) = 11
Le coût de transport du village 3 au village 5 est égal à 3 x (1 + 5 + 3) = 27
Le coût de transport du village 4 au village 5 est égal à 2 x (5 + 3) = 16
Le coût de transport du village 6 au village 5 est égal à 2 x (3) = 6
Le coût de transport du village 7 au village 5 est égal à 1 x (3 + 5 + 3) = 11
Le coût total de transport si on choisit le village 3 pour accueillir l'école est **97**.

Le coût de transport du village 1 au village 6 est égal à 2 x (2 + 3 + 5) = 20
Le coût de transport du village 2 au village 6 est égal à 1 x (2 + 1 + 5) = 8
Le coût de transport du village 3 au village 6 est égal à 3 x (1 + 5) = 18
Le coût de transport du village 4 au village 6 est égal à 2 x (5) = 10
Le coût de transport du village 5 au village 6 est égal à 1 x (3) = 3
Le coût de transport du village 7 au village 6 est égal à 1 x (3 + 5) = 8
Le coût total de transport si on choisit le village 3 pour accueillir l'école est **67**.

Le coût de transport du village 1 au village 7 est égal à 2 x (2) = 4
Le coût de transport du village 2 au village 7 est égal à 1 x (2 + 1 + 3) = 6
Le coût de transport du village 3 au village 7 est égal à 3 x (1 + 3) = 12
Le coût de transport du village 4 au village 7 est égal à 2 x (3) = 6
Le coût de transport du village 5 au village 7 est égal à 1 x (3 + 5 + 3) = 11
Le coût de transport du village 6 au village 7 est égal à 2 x (2 + 1 + 3) = 12
Le coût total de transport si on choisit le village 3 pour accueillir l'école est **51**. **(1)**

Le village engendrant le coût de transport minimal est le village 4. (1)