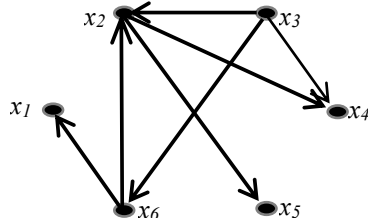


## Série d'Exercices N° 1

### Exercice 1

Donner la représentation matricielle (matrice d'adjacence) du graphe suivant :



Trouvez les demi-degrés extérieurs et intérieurs de chacun des sommets.

### Exercice 2.

Un  $n$ -cube (hypercube de dimension  $n$ ) est un graphe dont les sommets représentent les éléments de  $\{0,1\}^n$  et deux sommets sont adjacents ssi les  $n$ -uples correspondants diffèrent d'exactly une composante.

Donner le nombre de sommets.

Donner le nombre d'arêtes.

### Exercice 3.

Soit  $G = (X, E)$  un graphe non-orienté tel que  $|X| = n$ .

1. Montrez que le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.

On suppose que  $G$  est simple. Sachant que  $\forall x \in X, d_G(x) \leq n-1$ ,

2. Montrer qu'il ne peut y avoir dans  $G$  à la fois un sommet de degré 0 et un sommet de degré  $n-1$ ,
3. Montrer qu'il existe deux (2) sommets ayant le même degré dans  $G$ .

### Exercice 4.

Soit  $G=(X, U)$  un graphe d'ordre  $n$ , le nombre d'arcs est désigné par  $m$ . Soient  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$  respectivement les degrés minimum et maximum du graphe  $G$  montrer que :

$$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$$

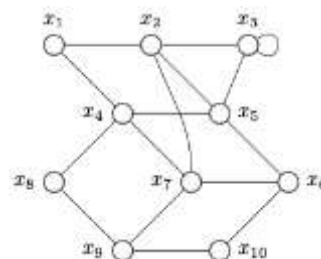
### Exercice 5.

On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le.

### Exercice 6.

Etant donné le graphe suivant :

1. Donner l'ordre de  $G$ .
2. Donner la matrice d'adjacence de  $G$ .
3. Donner les degrés des sommets  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .
4.  $G$  est-il un graphe complet, régulier, simple ? Justifier.
5. Donner le sous graphe engendré par l'ensemble des sommets  $A = \{x_i / i \text{ est premier}\}$ . Remarque : le 1 n'est pas un nombre premier.
6. Donner le graphe partiel engendré par l'ensemble des arêtes  $V = \{e=\{i, j\} / i + j \text{ est premier}\}$ .
7. Peut-on trouver une clique d'ordre 3, une clique d'ordre 4 ? Donner l'ensemble des sommets qui engendrent ces cliques, si elles existent.



On construit un nouveau graphe  $G' = (X, U)$ , en remplaçant dans  $G$  chaque arête  $e$  par un arc  $u=(x_i, x_j)$  qui relie le sommet  $x_i$  vers le sommet  $x_j$  ssi  $0 \leq j-i \leq 2$  ou  $i-j > 2$ .

8. Dessiner le graphe  $G'$ , et donner sa matrice d'adjacence.
9. Donner la représentation basée sur les listes d'adjacence (successeurs :  $PS$  et  $LS$ )

### Exercice 7.

Soit le graphe simple  $G=(X,E)$  d'ordre  $|X|=n$  et de taille  $|E|=m$ . Soient  $x$  un sommet de  $X$  et  $e$  une arête de  $E$ . Que représente chacun des graphes suivants et quel est l'ordre et quelle est la taille de chacun :

$G$                        $G - \{x\}$                        $G - \{e\}$                        $\bar{G}$

### Exercice 11.

Dans un groupe de personnes est tel que :

- Chaque personne est membre d'exactement deux (2) associations,
- Chaque association comprend exactement trois (3) membres
- Deux (2) associations quelconques ont toujours exactement un (1) membre en commun.

Combien y a-t-il de personnes ? Combien y a-t-il d'associations ?

### Exercice 8.

Soit  $G$  un graphe simple biparti d'ordre  $n$ ,

10. Montrer que le nombre d'arêtes  $m \leq n^2/4$ .

11. En déduire qu'il existe un sommet  $x$  tel que  $d_G(x) \leq n/2$

12. Montrer qu'un graphe régulier d'ordre impair ne peut être biparti.

### Exercice 9.

Une société doit transporter par camions les animaux :  $A_1, \dots, A_6$ , depuis un entrepôt vers un zoo. Pour des raisons de sécurité, certains animaux ne peuvent pas être transportés ensemble :  $A_1$  et  $A_2$ ,  $A_1$  et  $A_4$ ,  $A_2$  et  $A_3$ ,  $A_2$  et  $A_5$ ,  $A_3$  et  $A_4$ ,  $A_5$  et  $A_6$ .

Modéliser le problème, en définissant les sommets et les arêtes du graphe et déterminer le nombre minimum de camions nécessaires.

### Exercice 10.

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, 7 matières d'options : Langue ( $L$ ), Electronique ( $E$ ), Mécanique ( $M$ ), Dessin industriel ( $D$ ), Informatique ( $I$ ), Génie Civil ( $G$ ), Sport ( $S$ ). Les profils des candidats à options multiples sont :  $L,E,M$  -  $M,D,S$  -  $L,S$  -  $I,L,E$  -  $D,G$

1. Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?
2. Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

### Exercice 12.

Montrez que dans un groupe de six (6) personnes, il y en a nécessairement trois (3) qui se connaissent mutuellement ou trois (3) qui ne se connaissent pas. On suppose que si  $A$  connaît  $B$ ,  $B$  connaît également  $A$ . Cela est-il nécessairement vrai dans un groupe de cinq (5) personnes.

### Exercice 13.

Soit  $G = (X, E)$  un graphe non orienté simple, d'ordre  $n$ ,  $k$ -régulier. Dans quelles conditions  $G$  est isomorphe à son complémentaire  $\bar{G}$ .