Exercice7

$y=u^2v^2=w^2 \Rightarrow |u^2| + |v^2| = |w^2| \Rightarrow 2|u| + 2|v| = 2|w| \Rightarrow |u| + |v| = |w|$ ….. (1)

Appliquons le lemme de levi

a. si $|u| = |w| \Rightarrow |v|=0$ alors $v= \mathcal{E} \Rightarrow uv = vu \Rightarrow u\,\mathcal{E} = \mathcal{E}\,u \Rightarrow u=u$ donc $uv = vu$

b. si $|u| < |w|$ donc existe $w=uh \Rightarrow |u| + |h| = |w|$ ….. (2)
(1) et (2) $\Rightarrow |h| = |v|$
$u^2v^2=w^2 \Rightarrow uuvv = uhuh \Rightarrow uvv = huh$ comme $|h| = |v|$ donc $h=v$ et $uvv = huh \Rightarrow uvv = vuv$
$\Rightarrow uv=vu$

c. si $|u| > |w|$ impossible car $|u| + |v| = |w|$

Exercice 8.

$uw^R=wv \Rightarrow |u| + |w^R| = |w| + |v| \Rightarrow |u| = |v|$

Appliquons le lemme de levi

a. si $|u| = |w| \Rightarrow u=w \Rightarrow w^R=v \Rightarrow v=u^R$
b. si $|u| < |w| \Rightarrow u(yh)^R=uhv \Rightarrow uh^R y^R = uhv \Rightarrow h^R y^R = hv$ comme $|h^R| = |h|$ on a $h=h^R$ et $v=u^R$
c. si $|u| > |w| \Rightarrow u=wh \Rightarrow whw^R=wv \Rightarrow v=hw^R \Rightarrow$ si $h=h^R$ alors $v=h^Rw^R = (hw)^R= u^R$

Exercice 9

– Évident dans un sens, puisque $f^nf^p= f^{n+p}= f^pf^n$
– Dans l'autre sens, par récurrence sur $N = |x|+ |y|$.
- vrai dans le cas de base, quand $N = 0$, alors $x = y = \mathcal{E}$,
- supposons le résultat acquis pour $N = n$, Montrons pour $n+1$
  - si $|x|= |y|$, la commutation $xy = yx$ entraîne que $x = y$ donc $x,y \in f^*$
  - sinon, comme x et y sont des préfixes de $xy = yx$, l'un est préfixe (strict) de l'autre. On suppose que c'est x, il existe donc w tel que $y = xw$. Alors $xy = yx \Rightarrow x(xw) =(xw)\, x$
  $\Rightarrow xw = wx$
  si $|xw|=n+1$ alors $y= \mathcal{E}$ et $f=x$ donc $x,y \in f^*$
  sinon par hypothèse de récurrence, x et w sont des répétitions d'un même facteur f, et il en est donc de même pour $y = xw$.

Exercice 10

Méthode 1 : Raisonnons par récurrence sur $|w|$.
– pour $n=0$ càd $|w|=0$ donc $w = \mathcal{E}$ et $a=b$
– supposons le résultat acquis pour tout mot $n \geq |w| > 1$, montrons que pour $|w|=n+1$ si $wa=bw$ alors $a=b$ et $w \in \{a^*\}$. appliquons le lemme de Levi :
il existe un mot t tel que $w = at$ et $w = tb$. On a donc $at = tb$ et $|t| < |w| \Rightarrow |t| \leq n$ donc par hypothèse de récurrence $a = b$ et $t \in \{a^*\}$. . Mais alors $w = at \in \{a^*\}$, ce qui prouve le résultat souhaité.

Méthode 2 : $wa=bw \Rightarrow |wa|_a=|bw|_a \Rightarrow |w|_a+|a|_a = |b|_a+|w|_a \Rightarrow |a|_a=|b|_a \Rightarrow a=b$ et donc $w \in \{a^*\}$

Exercice 11

Raisonnons par récurrence
– pour $i=2$ $f_2=ab=uab$ avec $u= \mathcal{E}$
– supposons le résultat acquis pour $i \leq n$ $f_i=uab$ si i pair sinon $f_i=uba$. Montrons pour $n+1$
si $n+1$ est pair $f_{n+1}=f_n\, f_{n-1}= f_{n-1}\, f_{n-2}\, f_{n-1}= u_{n-1}\, ab\, u_{n-2}\, ba\, u_{n-1}\, ab = uab$ avec $u= u_{n-1}\, ab\, u_{n-2}\, ba\, u_{n-1}$. u est palindrome
si $n+1$ est impair $f_{n+1}=f_n\, f_{n-1}= f_{n-1}\, f_{n-2}\, f_{n-1}= u_{n-1}\, ba\, u_{n-2}\, ab\, u_{n-1}\, ba = uba$ avec $u=u_{n-1}\, ba\, u_{n-2}\, ab\, u_{n-1}$. u est palindrome

Exercice 4

$L_1 \cap L_2 = \varnothing$ et $L_1 \neq \overline{L_2}$ *car* $ab \notin L_1$ *et* $ab \notin L_1$

$(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = X^*$ avec $L_3 = \{b^i a^j \ / \ i,j \geq 0\}$

Exercice 5

$L_1 = \{ a^i b^j (ab)^k aaw$ tq $i,k \geq 0$ $j>0$ $w \in X^* \} = \{ a^i b^j b(ab)^k aaw$ tq $i,j,k \geq 0$ $w \in X^* \}$

il faut démontrer que $b(ab)^k a = (ba)^{k+1}$ on peut le faire par construction ou par récurrence.
Donc on a :
$L_1 = \{ a^i b^j (ba)^{k+1} aw$ tq $i,j,k \geq 0$ $w \in X^* \}$

$L_2 = \{ wa(ab)^i ab^j a^k$ tq $i,k \geq 0$ $j>0$ $w \in X^* \} = \{ wa(ab)^i abb^j a^k$ tq $i,k,j \geq 0$ $w \in X^* \}$
$= \{ wa(ab)^{i+1} b^j a^k$ tq $i,k,j \geq 0$ $w \in X^* \}$

il suffit de !démonter que $((ab)^k)^R = (ba)^k$ et que pour tout $w \in X^*$ il existe $w' \in X^*$ tq $w' = w^R$ par récurrence.
Donc $L_1 = L_2^R$