

## Problème d'ordonnancement

### 1. Identification du problème d'ordonnancement

L'examen d'un projet (industriel, administratif, informatique, ...) comporte en général deux phases importantes.

#### Phase 1 :

La division du projet en plusieurs tâches (ou étapes) élémentaires, l'étude des liaisons (contraintes logiques, chronologiques, ...) et l'estimation de la durée de chaque tâche. Cette phase d'analyse amène à la construction d'un graphe orienté (où les sommets représentent les tâches élémentaires) dans lequel les arcs seront pondérés.

#### Phase 2 :

Elle consiste à analyser et étudier le graphe obtenu en phase 1. Parmi les résultats de cette phase : la détermination d'un planning (ou ordre chronologique) et la recherche de la durée totale du projet dans le but de la minimiser. L'étude du graphe revient déterminer un chemin de poids optimal...

### 2. Graphe potentiel tâches

Appelée aussi méthode des potentiels métra (MPM) ou méthode du chemin critique. Elle consiste à planifier plusieurs tâches dont certaines sont liées entre elles par des contraintes dites de potentielles, s'exprimant sous la forme  $t_j - t_i \geq a_{ij}$  où  $t_i$  et  $t_j$  représentent les dates de début au plus tôt des tâches  $i$  et  $j$ .

Ce genre de contrainte s'interprète par : « la tâche  $j$ , ne peut commencer qu'après que  $i$  aura consommée  $a_{ij}$  unités de temps depuis son début ».

La méthode modélise le problème sous forme de graphe appelé graphe potentiels tâches où chaque tâche est représentée par un sommet et chaque arc  $(i, j) \in U$  est dessiné si on a une contrainte de potentiel entre  $i$  et  $j$  ( $t_j - t_i \geq a_{ij}$ ) en lui associant un poids égal à  $a_{ij}$ .

On introduit dans le graphe deux tâches fictives « $D$ » et « $F$ » représentant le début et la fin du projet.

Pour chaque tâche  $i$  n'ayant de tâche précédente, on rajoute l'arc  $(D, i)$ . Le poids de l'arc est généralement 0 sauf s'il a été précisé dans l'énoncé un délai entre le début du projet et cette tâche.

Pour chaque tâche  $i$ , on rajoute l'arc  $(i, F)$ . Le poids de cet arc sera égal à la durée de la tâche  $i$ . On peut optimiser le graphe en supprimant certains arcs  $(i, F)$  qui risquent de représenter des contraintes redondantes.

### 3. Etude et Analyse du graphe potentiel tâches

#### 3.1 Dates au plus tôt

La durée minimale de l'ordonnancement est donnée par la date au plus tôt ( $t_F$ ) de la tâche fictive «fin projet». La date au plus tôt d'une tâche  $j$  est obtenue par la formule suivante :

$$t_j = \max_{i \in LP(j)} \{t_i + a_{ij}\}, j \neq 0. LP(j) \text{ est la liste des prédécesseurs du sommet } j.$$

$$t_0 = t_D = 0$$

#### Remarque :

La date au plus tôt d'une tâche  $j$  est égale à la plus longue distance (chemin de poids maximum) du sommet «début projet» au sommet  $j$  dans le graphe «potentiels tâches».

#### 3.2 Marge totale

Le délai de retard pour une tâche  $i$  qui n'affecte pas la durée minimale du projet est noté  $M_i$  et est appelé marge totale de la tâche  $i$ .

$M_i = t_i^* - t_i$  où  $t_i$  : date au plus tôt de la tâche  $i$

$t_i^*$  : date au plus tard de la tâche  $i$  calculée comme suit :

$$t_F^* = t_F$$

$$t_i^* = \min_{j \in LS(i)} \{t_j^* - a_{ij}\} \quad i \neq F = \text{«fin projet»}. LS(i) \text{ est la liste des successeurs du sommet } i.$$

Une tâche  $i$  ayant une marge totale  $M_i = 0$  et est appelé tâche critique.

### 3.3 Marge libre

La **marge libre d'une tâche  $i$** , notée  $m_i$ , est le délai de retard d'une tâche  $i$  sans affecter les dates de début au plus tôt des tâches postérieures.

$$m_i = \min_{j \in LS(i)} \{t_j - t_i - a_{ij}\}$$

### 3.4 Marge certaine

La **marge certaine d'une tâche  $i$** , notée  $\mu_i$ , est le délai de retard d'une tâche  $i$ , quand les tâches antérieures commencent à leurs dates au plus tard et les tâches postérieures à leurs dates plus tôt

$$\mu_i = \max \{ 0, \min_{j \in LS(i)} \{t_j - a_{ij}\} - \max_{k \in LP(i)} \{t_k^* + a_{ki}\} \}$$

## 4. Exemple

Soit un projet dont la liste des tâches est donnée dans le tableau ci-dessous. Il comporte également la durée d'exécution de chaque tâche (en jours) ainsi que les contraintes liées au début d'exécution :

Tâche $i$	Durée de $i$	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche $i$
1	6	-
2	10	Ne peut débuter que 2 jours après le début des travaux.
3	20	Après la fin de 1 et 2.
4	7	Après la fin de 1.
5	8	Peut débuter 2 jours après le début de 2.
6	4	Après la fin de 5 et 10 jours au maximum après le début de 4.
7	10	Peut débuter après la fin de 4 et lorsque 3 est à moitié réalisé.
8	5	Ne doit pas dépasser 5 jours après la fin de 6 et la 5 doit être achevée.
9	12	-
10	20	Peut commencer 5 jours après la fin de 9.

- 1) Les contraintes...
- 2) Le graphe potentiel tâches associé à ce problème...
- 3) Les dates au plus tôt...
- 4) La durée minimale du projet...
- 5) Les dates au plus tard...
- 6) Les tâches critiques...