# Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
## Faculté d'Informatique


USTHB
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene

## Cours Théorie des langages (THL)

# Chapitre 7 et 8 : Les Grammaires Algébriques et Automates à Pile

**2 ième année ING 2023/2024**


Dr H.BELHADI hib.belhadi@gmail.com

# Introduction

Les langages réguliers :

- sont simples
- possèdent les bonnes propriétés requises théoriques et pratiques
- …mais pouvoir d'expression faible

En effet, il n'existe pas une grammaire régulière pour générer les mots du langage $\{a^nb^n / n \geq 0\}$.

Besoin de langages plus expressifs :

**LANGAGES ALGEBRIQUES**

# Grammaires Algébriques

- Proposées par Chomsky en 1956 pour la description des langages naturels
- Exploitées pour la description des langages de programmation

**Définition** (Grammaire algébrique) **:**

Une grammaire G=(T, N, S, P) est une grammaire **algébrique** (on dit aussi à contexte libre) si et seulement si toutes ses règles sont de la forme :

$$\mathbf{A} \rightarrow \alpha \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} \in \mathbf{N} \text{ et } \alpha \in (T \cup N)^*.$$

**Exemple :** La grammaire $G=(\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aSb / \varepsilon\})$ est algébrique. Elle génère le langage $\{a^n b^n / n \geq 0\}$.

# Grammaires Algébriques

**Définition** (Langage algébrique) **:** Soit X un alphabet et L un langage sur X*. Le langage L est dit algébrique s'il existe une grammaire algébrique **G** telle que **L(G)=L**.

**Exemple** : Le langage $L=\{w\in\{a, b\}^*/\ w^R=w\}$ (l'ensemble des mots palindromes sur l'alphabet {a, b}) est algébrique car il est engendré par la grammaire algébrique :

$G=(\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aSa / bSb / a / b / \varepsilon\})$

**Remarque :**

- Tout langage régulier est algébrique.
- La réciproque est fausse. En effet, le langage $\{a^nb^n/n \geq 0\}$ est algébrique mais non régulier.

# Grammaires Algébriques

## Dérivation

**Exemple :** Soit $G=(\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, P)$ avec P :

$S \rightarrow bA \;/\; aB \;/\; \varepsilon \qquad A \rightarrow aS \;/\; bAA \qquad B \rightarrow bS \;/\; aBB$

**Dérivation** du mot aababb

$\mathbf{S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBB}$

**Plusieurs non-terminaux** : lequel dériver en premier?

- Dériver le plus à gauche => dérivation gauche
- Dériver le plus à droite => dérivation droite

## Grammaires Algébriques

**Définition** (Dérivation gauche/droite) : On dit qu'un mot s'obtient par **dérivation gauche** (respectivement par dérivation droite) s'il est obtenu à partir de l'axiome en **dérivant toujours le non-terminal <u>le plus à gauche</u>** (respectivement le plus à droite).

**Exemple :** Soit G=({a, b}, {S, A, B}, S, P) avec P :

$S \rightarrow bA \,/\, aB \,/\, \varepsilon$ $\qquad A \rightarrow aS \,/\, bAA$ $\qquad B \rightarrow bS \,/\, aBB$

**Dérivation gauche** du mot aababb :

S ⇒ a**B** ⇒ aa**BB** ⇒ aab**SB** ⇒ aaba**BB** ⇒ aabab**SB** ⇒ aabab**B** ⇒ aa**babbS** ⇒ **aababb**

S ⇒ a**B** ⇒ aa**BB** ⇒ aab**SB** ⇒ aab**B** ⇒ aaba**BB** ⇒ aabab**SB** ⇒ aa**babB** ⇒ aa**babbS** ⇒ **aababb**

# Grammaires Algébriques

**Exemple :** Soit $G=(\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, P)$ avec P :

$S \rightarrow bA \,/\, aB \,/\, \varepsilon$ $\qquad A \rightarrow aS \,/\, bAA$ $\qquad B \rightarrow bS \,/\, aBB$

**Dérivation droite** du mot aababb :

$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aaBbS \Rightarrow aaBb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaBb \Rightarrow aababSb \Rightarrow aababb$

$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aaBaBB \Rightarrow aaBaBbS \Rightarrow aaBaBb \Rightarrow aaBabSb \Rightarrow aaBabb \Rightarrow aabSabb \Rightarrow aababb$

**Définition** (Arbre de dérivation) :

Soit une grammaire G=(T, N, S, P). Un **arbre de dérivation** d'un **mot w** appartenant à L(G) est un arbre dont :

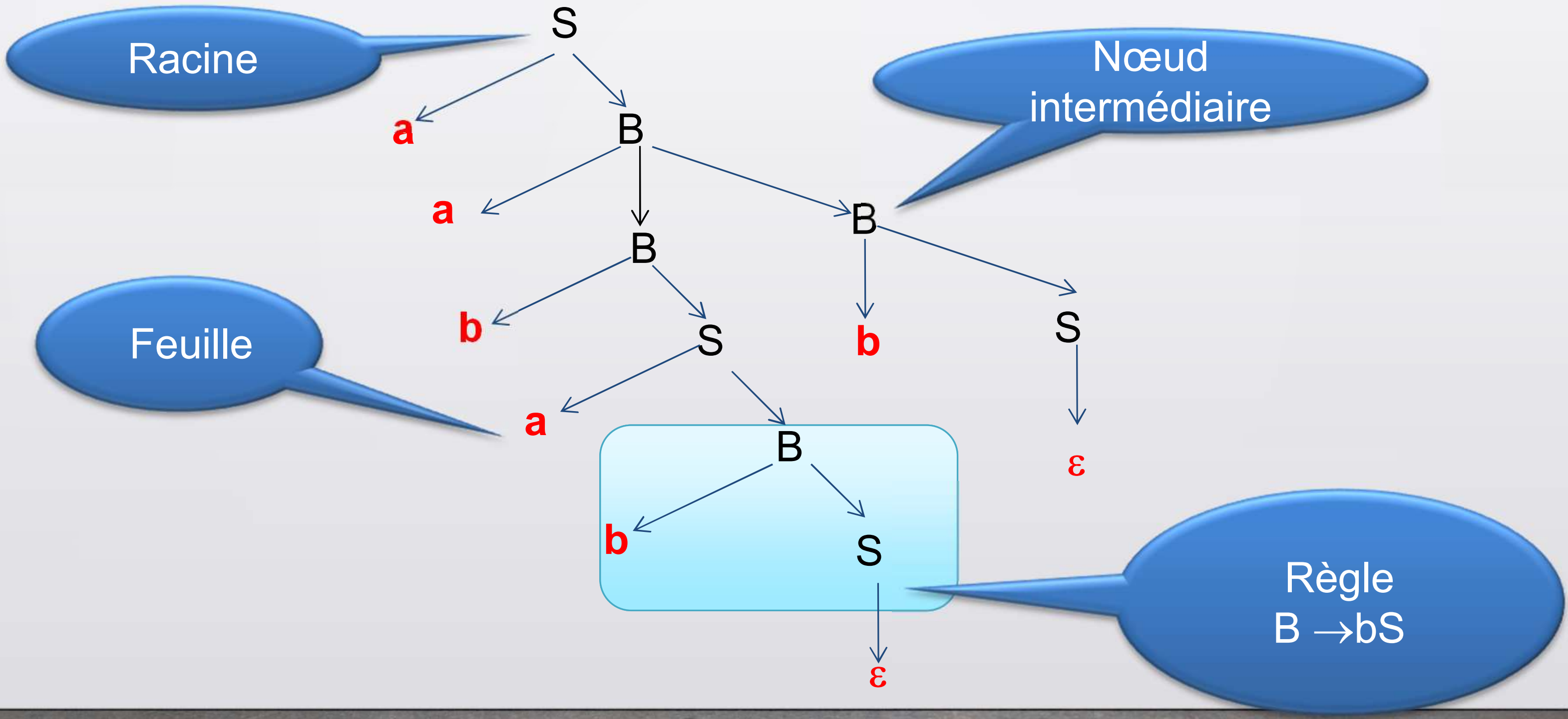
- La racine est étiquetée par l'axiome.
- Les feuilles sont étiquetées par des terminaux ou le mot vide.
- Les nœuds intermédiaires sont étiquetés par des non-terminaux.
- Le passage d'un nœud interne à ses fils correspond à une règle : si le nœud interne est étiqueté par A et ses fils sont étiquetés par X1, …, Xn (de gauche vers la droite) alors $A \rightarrow X1\ldots.Xn$ est une règle de P.
- La lecture des étiquettes des feuilles de gauche à droite donne le mot w.

## Grammaires Algébriques

**Exemple :** Soit G=({a, b}, {S, A, B}, S, P) avec P :

$S \rightarrow bA \,/\, aB \,/\, \varepsilon \qquad A \rightarrow aS \,/\, bAA \qquad B \rightarrow bS \,/\, aBB$

Arbre de dérivation du mot **w=aababb**

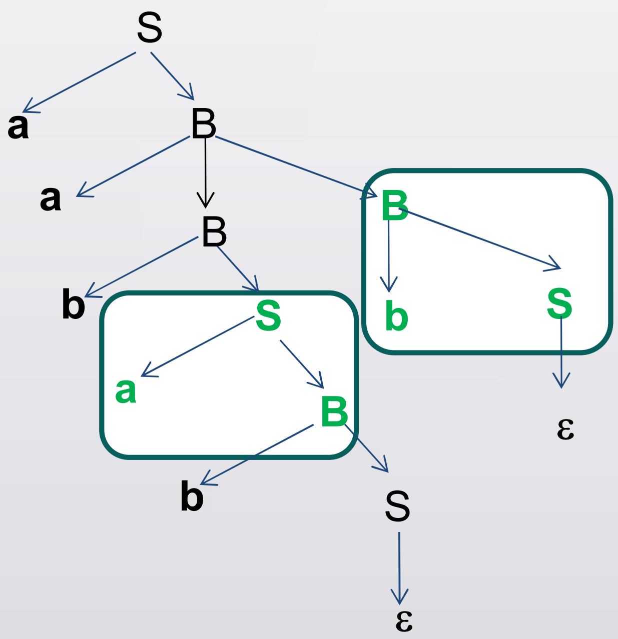


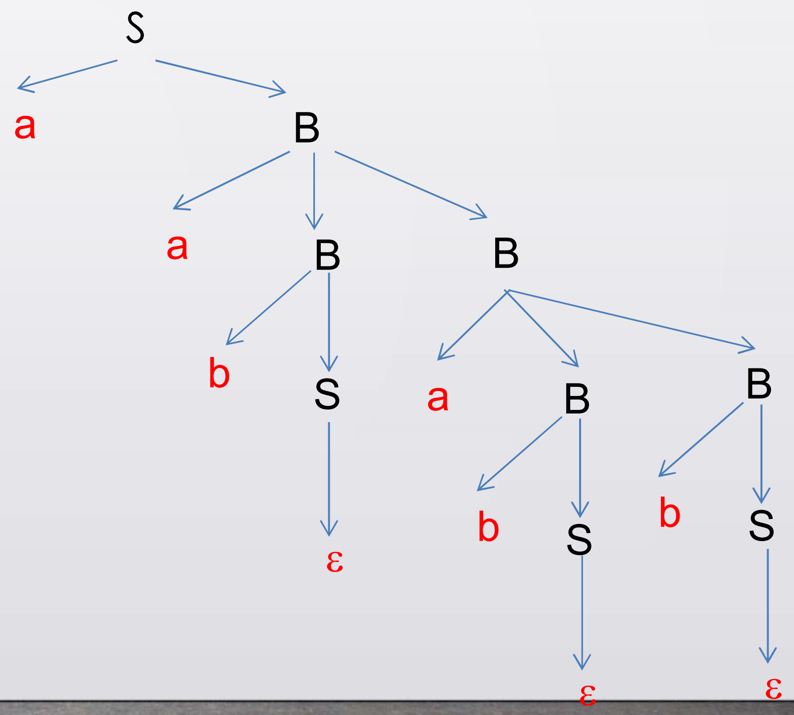
# Grammaires Algébriques

**Exemple :** Soit G=({a, b}, {S, A, B}, S, P) avec P :

$S \rightarrow bA \,/\, aB \,/\, \varepsilon \qquad A \rightarrow aS \,/\, bAA \qquad B \rightarrow bS \,/\, aBB$

Arbre de dérivation du mot **w=aababb**



## Grammaires Algébriques

**Définition** (mot ambiguë) : Un mot est ambiguë s'il possède plusieurs arbres de dérivations différents.

Remarque : L'ambiguité d'un mot implique l'existence de deux ou plusieurs dérivations gauche (droites) pour ce mot.

**Définition** (Grammaire ambiguë) **:** Une grammaire est ambiguë si elle génère au moins un mot ambiguë.

**Exemple:** La grammaire donnée précédemment est ambiguë car le mot aababb est ambiguë. Il possède deux arbres de dérivations différents.

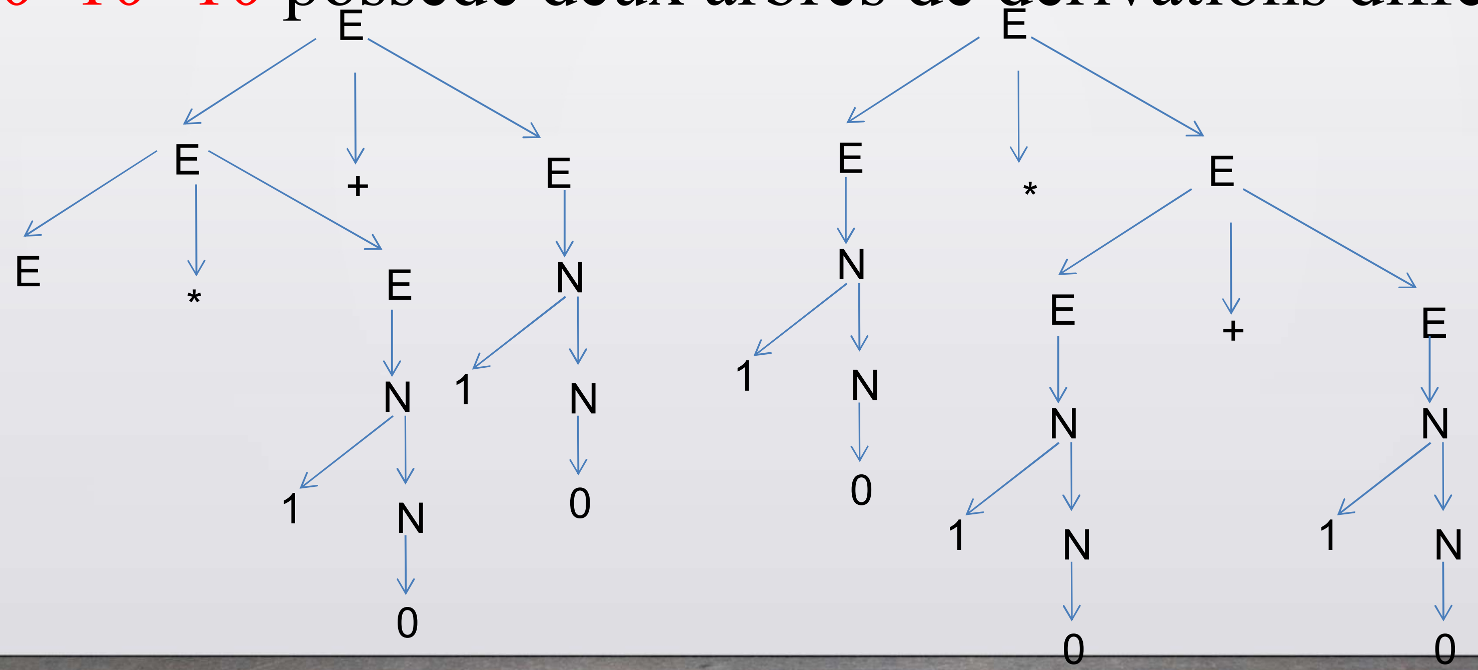
## Grammaires Algébriques

Exemple : Soit la grammaire G=({+, *, (, ) 0, ..,9}, {E, N}, E, P) où P :

$E \rightarrow E + E \ / \ E * E \ / \ (E) \ / \ N$

$N \rightarrow 0N \ /\ldots./ \ 9N \ / \ 0 \ /\ldots. / \ 9$

Le mot 10*10+10 possède deux arbres de dérivations différents



La valeur calculée est 110

La valeur calculée est 200

## Grammaires Algébriques

**Remarque :** Pour un même langage, certaines grammaires sont ambiguës, d'autres non.

Un langage de programmation doit avoir une grammaire non ambiguë car l'existence d'arbres de dérivations différents pour un même programme signifie qu'il y a plusieurs façons d'analyser ce programme, avec en général des résultats très différents.

**Définition** (Ambiguïté inhérente) **:** On dit qu'un langage algébrique a une **ambiguïté inhérente** si toute grammaire qui l'engendre est ambiguë.

**Remarque :** Il n'existe pas d'algorithme qui permet de répondre à la question : est-ce que G est ambiguë?

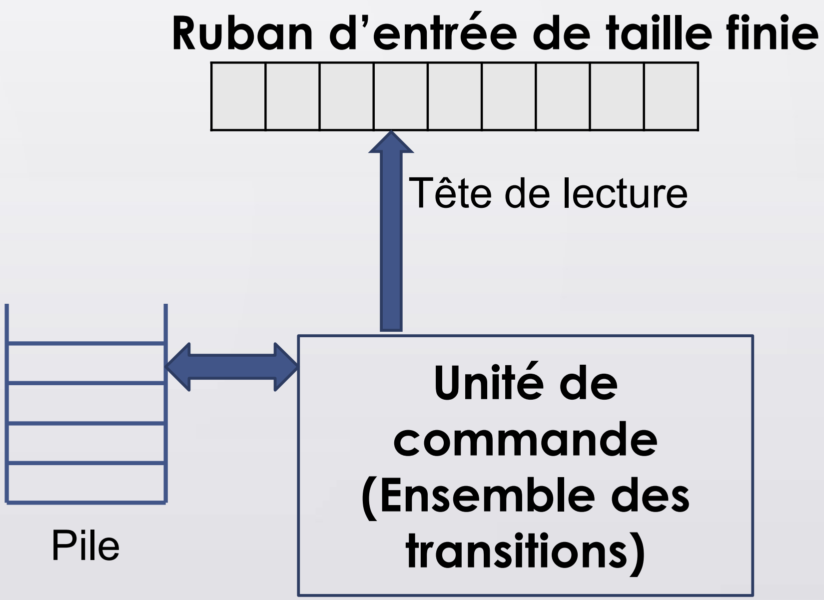
Néanmoins, il est possible de répondre à cette question pour certaines grammaires.

# Automates à Pile

Les automates à pile sont les reconnaisseurs des langages algébriques.

Un automate à pile est un automate fini :

- autorisant les ε-transitions,
- avec la particularité de disposer d'une mémoire auxiliaire comme unité de stockage, à savoir une pile.



# Automates à Pile

**Définition** (Automate à Pile) : Un automate à pile est un septuplet $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ où :

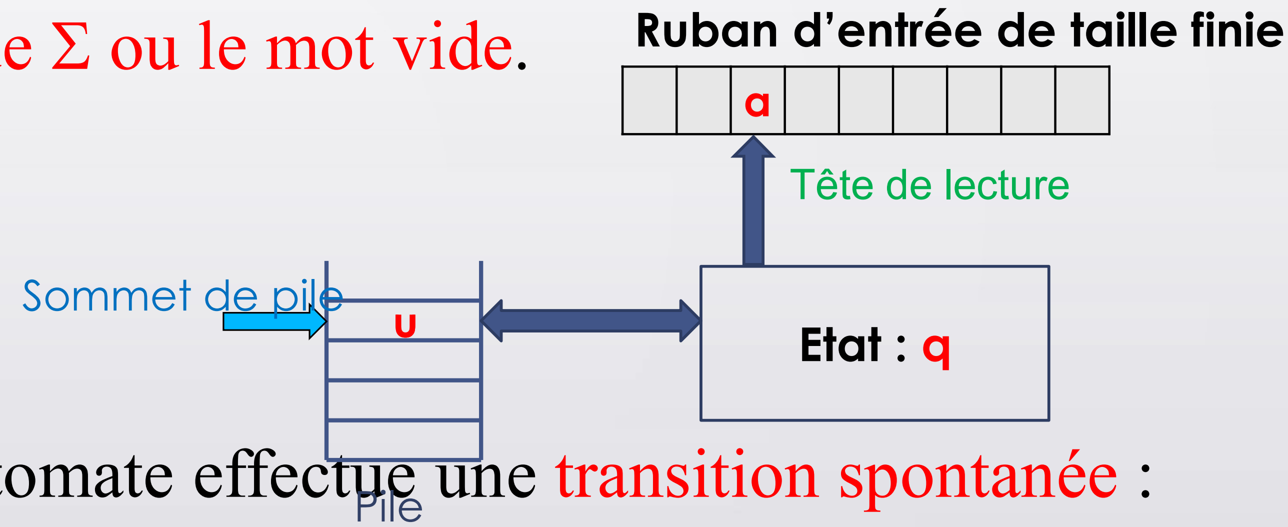
- $\Sigma$ est un ensemble fini de l'alphabet d'entrée.
- $\Gamma$ est un ensemble fini de l'alphabet auxiliaire.
- $Z_0 \in \Gamma$ est le symbole initial de la pile. $\Sigma \cup \Gamma$ constitue l'alphabet du langage de la pile.
- $Q$ est un ensemble fini d'états et $q_0 \in Q$ est l'état initial
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux.

## Automates à Pile

- δ est une fonction de transition

qui prend comme argument un triplet (u, q, a) où :

- u est le sommet de la pile
- q est un état de Q
- a est un symbole d'entrée de Σ ou le mot vide.




**Remarque** Si **a= ε** alors l'automate effectue une transition spontanée : c'est une transition sans lecture.

## Automates à Pile

- $\delta$ est une fonction de transition

qui prend comme argument un triplet (u, q, a) où :

- u est le sommet de la pile
- q est un état de Q
- a est un symbole d'entrée de $\Sigma$ ou le mot vide.

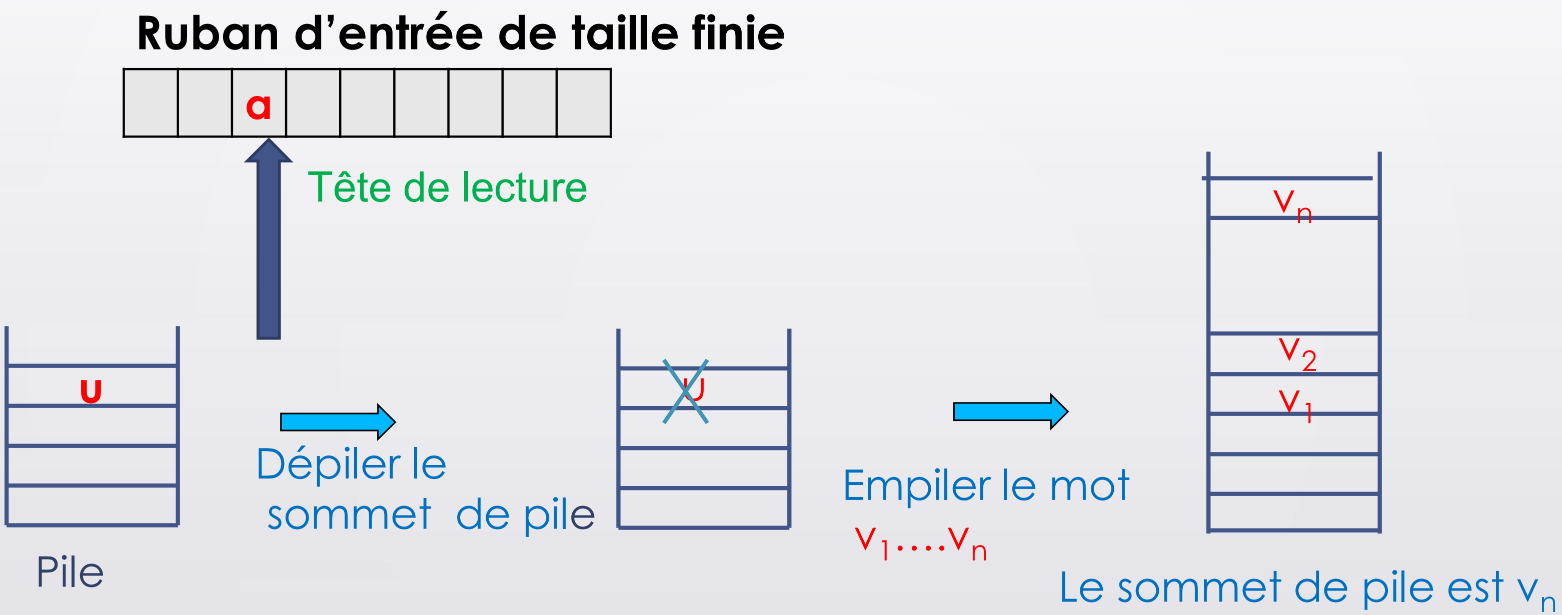
qui retourne une paire ($\alpha$, p) où

- $\alpha$ est un mot sur $(\Sigma \cup \Gamma)^*$
- et p le nouvel état

L'exécution d'une transition $\delta(u, q, a) = (\alpha, p)$ modifie le contenu de la pile selon le mot $\alpha$ comme suit :

# Automates à Pile

1) Si $\alpha = v_1 \dots v_n$ ie $\delta(u, q, a) = (v_1 \dots v_n, p)$ où $v_i \in \Sigma \cup \Gamma$

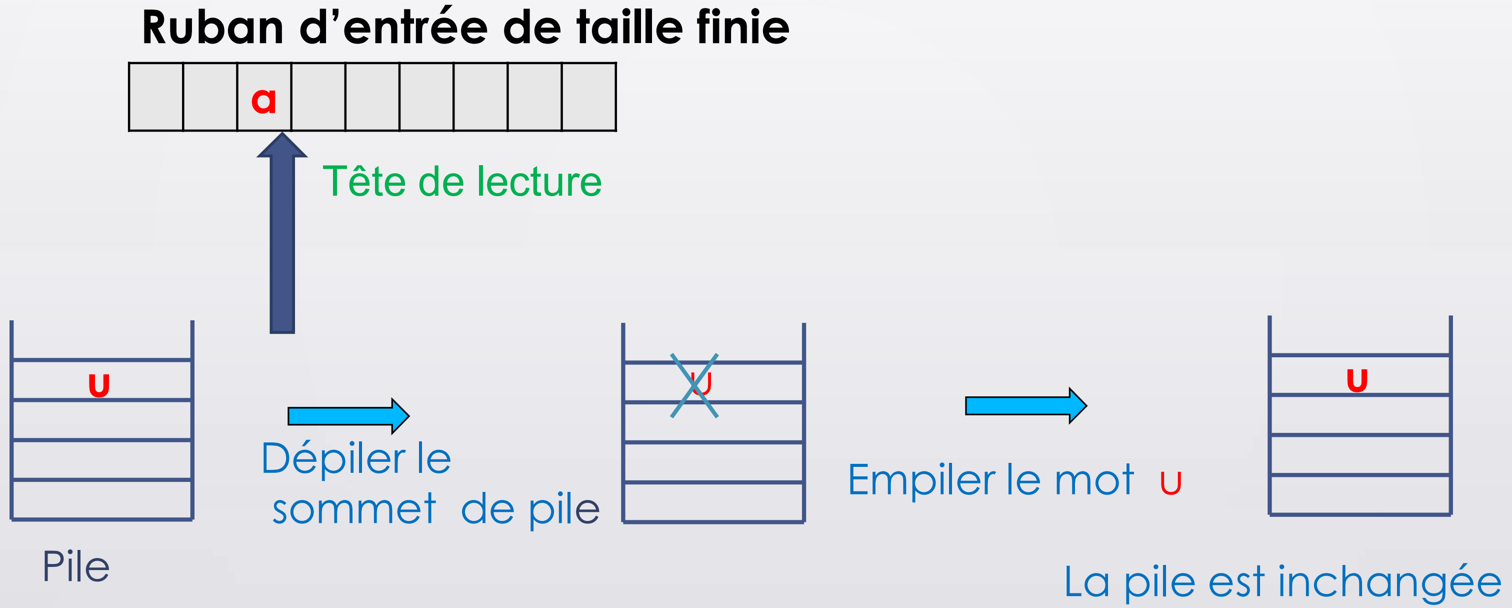



Si $\alpha = v_1 \dots v_n$ où $v_i \in \Sigma \cup \Gamma$ alors le sommet de pile est dépilé ensuite on empile $v_1$, …. et $v_n$ dans cet ordre.

Le sommet de pile contiendra $v_n$.

# Automates à Pile

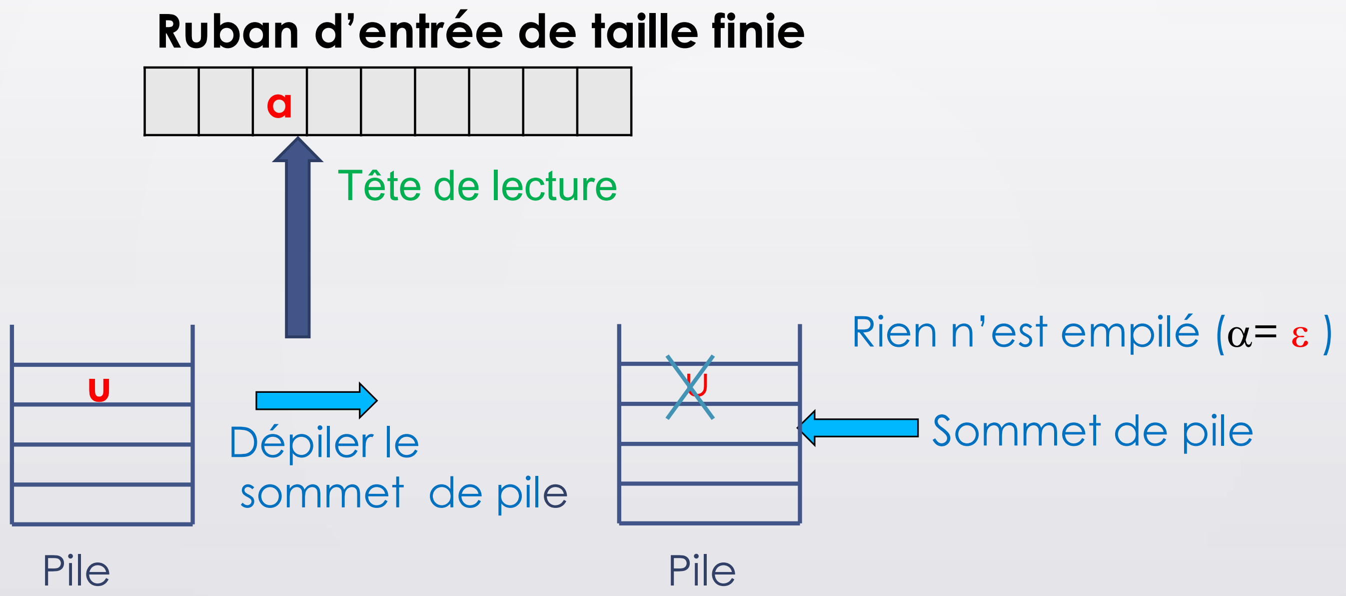
2) Si $\alpha = \upsilon$ ie $\delta(\upsilon, q, a) = (\upsilon, p)$




Si $\alpha = \upsilon$ alors la pile est inchangée

# Automates à Pile

3) Si $\alpha = \varepsilon$ ie $\delta(u, q, a) = (\varepsilon , p)$




Si $\alpha = \varepsilon$ alors on dépile seulement le sommet de pile

Notation : La transition $\delta(u, q, a) = (\alpha, p)$ sera notée $uqa \rightarrow \alpha p$

## Automates à Pile

# Exemple :

Trouver un automate à pile reconnaissant le langage $\{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n / n \geq 0\}$.

**Principe général :**

- Stocker les a dans la pile au fur et à mesure de la lecture.
- Dès qu'il trouve un b, une correspondance doit être faite avec les a stockés dans la pile : chaque b lu est associé à un a dans la pile autrement à chaque lecture d'un b, on dépile un a.
- S'il ne reste aucun a dans la pile ie que le sommet de pile est $Z_0$ alors le nombre de a empilé est égal au nombre de b lu et transiter vers un état final.

## Automates à Pile

**Exemple :**

Un automate à pile $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ reconnaissant $\{a^n b^n / n \geq 0\}$ est tel que :

$\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{Z_0\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$, $F=\{q_2\}$ et $\delta$ est définie par :

| N° | Instruction | Commentaire |
|---|---|---|
| 1 | $Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$ | Lire et empiler le 1er a |
| 2 | $aq_0a \rightarrow aaq_0$ | Lire et empiler tous les **a** suivants |
| 3 | $aq_0b \rightarrow q_1$ | dépiler le dernier **a** empilé à la rencontre du 1er **b** et on change d'état |
| 4 | $aq_1b \rightarrow q_1$ | dépiler un **a** à chaque lecture d'un **b** |
| 5 | $Z_0q_1 \rightarrow Z_0q_2$ | le nombre de **a** qui a été empilé dans l'état $q_0$ est égal au nombre de **b** lu dans l'état $q_1$ et on change d'état |
| 6 | $Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_2$ | la reconnaissance du mot vide |

# Automates à Pile

Les étapes de la reconnaissance du mot **aaabbb** sont données dans la tableau suivant :

| Pile | État | Sous-mot d'entrée | N° Transition |
|---|---|---|---|
| $Z_0$ | $q_0$ | aaabbb | 1 |
| $Z_0a$ | $q_0$ | aabbb | 2 |
| $Z_0aa$ | $q_0$ | abbb | 2 |
| $Z_0aaa$ | $q_0$ | bbb | 3 |
| $Z_0aa$ | $q_1$ | bb | 4 |
| $Z_0a$ | $q_1$ | b | 4 |
| $Z_0$ | $q_1$ | | 5 |
| $Z_0$ | $q_2$ | | |

Automate à pile P :

$Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$ (1)
$aq_0a \rightarrow aaq_0$ (2)
$aq_0b \rightarrow q_1$ (3)
$aq_1b \rightarrow q_1$ (4)
$Z_0q_1 \rightarrow Z_0q_2$ (5)
$Z_0q_0 \rightarrow Z_0q_2$ (6)

**Définition** (Configuration d'une pile) :

- si un automate à pile P est dans l'état q,
- le contenu de sa pile est $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$
- et il lui reste à lire le sous-mot w ($w \in \Sigma^*$),

on dira que cet automate se trouve dans la configuration **($\alpha$, q, w).**

Si le mot à reconnaître est **v** alors la **configuration initiale** est :

**($Z_0$, $q_0$, v)**

**Définition** (Dérivation) **:**

Une configuration ($\alpha$**u**, **q**, **a**w) ($u \in \Sigma \cup \Gamma$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$) dérive directement ($\alpha\beta$, **p**, w), notée :

$$(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{q}, \mathbf{a}w) \Rightarrow (\alpha\beta, \mathbf{p}, w)$$

si $\mathbf{uqa} \rightarrow \beta\mathbf{p}$ est une transition de l'automate.

La fermeture réflexive et transitive de la relation $\Rightarrow$ est notée $\Rightarrow^*$.

On parle de dérivation indirecte, qui correspond à zéro, une ou plusieurs dérivations directes consécutives.

# Automates à Pile

**Deux modes de reconnaissances :**

- par état final
- par pile vide

**Nous verrons dans la suite le mode de reconnaissance par état final.**

**Définition** (Langage reconnu par état final) :

Soit $P=(\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta)$ un automate à pile. Le langage accepté par **P** par état final, noté **L(P),** est :

$$\mathbf{L(P) = \{ w \,/\, \exists \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^* \ \exists\, q_F \in F,\ (Z_0, q_0, w) \Rightarrow^* (\alpha, q_F, \varepsilon) \}.}$$

**Dans la configuration finale :**

- **Le contenu de la pile n'a pas d'importance.**
- **Le mot d'entrée a été entièrement lu.**
- **L'automate se trouve dans un état final.**

# Automates à Pile

Exemple : Soit l'automate à pile

$$P=(\{a, b\}, \{Z_0\}, Z_0, \{q_0, q_1\}, q_0, \{q_1\}, \delta) :$$

| N° | Instruction | Commentaire |
|---|---|---|
| 1 | $Z_0q_0a \rightarrow Z_0aq_0$ | empiler le 1er **a** |
| 2 | $aq_0a \rightarrow aaq_0$ | empiler tous les **a** suivants |
| 3 | $aq_0b \rightarrow q_1$ | dépiler le dernier **a** empilé à la rencontre du 1er **b** et on change d'état pour ne plus autoriser la lecture de **a** |
| 4 | $aq_1b \rightarrow q_1$ | dépiler un **a** à chaque lecture d'un **b** |

A l'état $\mathbf{q_1}$, la pile peut contenir encore des **a** et donc le nombre de **a** empilé est supérieur ou égale au nombre de **b** lu.

Cet automate reconnaît par état final le langage $\{a^nb^m / n \geq m \geq 1\}$

## Grammaire algébrique et automate à pile

Les langages reconnus par les automates à pile correspondent à la classe des langages algébriques.

**Théorème** Pour toute **grammaire algébrique** $G=(T, N, S, P)$ il existe un automate à pile $P = (\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta)$ qui reconnaît $L(G)$ par pile vide.

**Théorème**

Pour tout **automate à Pile** $P = (\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta)$ il existe une grammaire algébrique $G=(T, N, S, P)$ qui génère $L_\varepsilon(P)$.

## Propriétés des langages algébriques

**Théorème :**

La classe des langages algébriques est fermée par rapport aux opérations régulières :

union, concaténation et l'étoile.

Si $L_1$ et $L_2$ sont des langages algébriques

Alors $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$ et $(L_1)^*$ sont algébriques

# Propriétés des langages algébriques

Union de deux langages algébriques :

$L_1$ algébrique $\Rightarrow$ il existe un automate à pile

$\mathbf{P_1 = (\Sigma_1, \Gamma_1, Z_{01}, Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1)}$ reconnaissant $L_1$ par état final

$L_2$ algébrique $\Rightarrow$ il existe un automate à pile

$\mathbf{P_2 = (\Sigma_2, \Gamma_2, Z_{02}, Q_2, q_{02}, \delta_2, F_2)}$ reconnaissant $L_2$ par état final

(avec $Q1 \cap Q2 = \varnothing$)

**$L_1 \cup L_2$ est reconnu par l'automate à pile $P = (\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta, F)$**

- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{Z_0\}$ $\quad Z_0 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$ $\quad q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$
- $F = F_1 \cup F_2$
- $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \{ \delta(Z_0, q_0, \varepsilon) = \{(Z_{01}, q_{01}), (Z_{02}, q_{02})\} \}$
- 

## Propriétés des langages algébriques

La classe des langages algébriques n'est pas fermée par rapport à l'intersection et par rapport au complément :

- L'intersection de deux langages algébriques n'est pas forcément algébrique.
- Le complément d'un langage algébrique n'est pas forcément algébrique.

## Propriétés des langages algébriques

Intersection de deux langages algébriques :

- $L_1 = \{a^n b^n c^m \,/\, n, m \geq 0\}$ est algébrique
- $L_2 = \{a^m b^n c^n \,/\, n, m \geq 0\}$ est aussi algébrique

Mais

$L_1 \cap L_2 = \{\, a^n b^n c^n \,/\, n, m \geq 0\}$ n'est pas algébrique

Conclusion :

La classe des langages algébriques n'est pas fermée par rapport à l'intersection.

# Propriétés des langages algébriques

**Théorème :** si L est algébrique et R est **régulier**
alors $L \cap R$ est algébrique.

**Théorème :** si L est algébrique
alors $L^R$ est aussi algébrique.