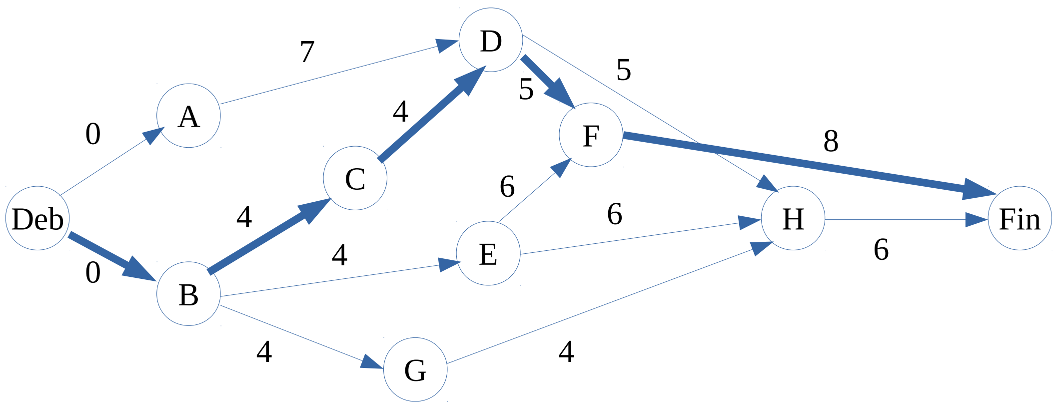
Corrigé de l'examen de Théorie des graphes

Exercice 1

1. Le graphe potentiel-tâches (MPM)



2. Les dates de début au plus tôt

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
ti	0	0	4	8	4	13	4	13

La durée optimale du projet : 21 jours

3. Les dates de début au plus tart

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Ti	1	0	4	8	7	13	11	15
mi	1	0	0	0	3	0	7	2

Les tâches critiques sont B, C, D et F.

4. Le retard de 03 jours et le prolongement de la durée d'exécution de la tâche E d'un (01) jour supplémentaire, implique une (01) journée de plus dans la durée totale du projet, étant donné que la marge de E est égale à 03 jours.

Exercice 2.

1.a. La taille (nombre d'arêtes) d'un graphe complet d'ordre n (Kn) est : $\frac{n(n-1)}{2}$

preuve :

On sait que $\sum_{x \in X} d_G(x) = 2m$

Un graphe complet est un graphe régulier, $d_G(x) = n-1, \forall x \in X$ *et* $|x| = n$

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = n(n-1) = 2m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{n(n-1)}{2}$$

1.b. Il faut supprimer au moins n-1 arêtes pour isoler un sommet et déconnecter le graphe. Il est évident que pour isoler un composante de k sommets, avec k > 1, il faut supprimer k(n-k) arêtes. On peut démontrer que pour 1 < k < n-1 on a k(n-k) > n-1.

2.a. Le graphe biparti complet Kp,q est un graphe dont les sommets peuvent être partitionnés en deux sous ensembles X1 et X2, tels que
|X1| = p et |X2| = q.
- Le nombre de sommets est donc p+q.
- Le nombre d'arêtes est pxq.
- Le degré de chaque sommet de X1 et q, et le degré de chaque sommet de X2 et p.

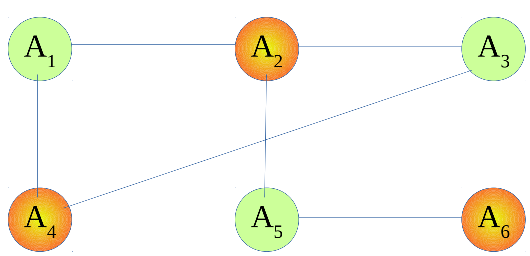
2.b. Kp,q est eulérien ssi p et q sont impaires. Ainsi les degrés des sommets seront donc pairs (voir le dernier point de 2.b.).

2.c. Kp,q est hamiltonien ssi p=q, car tout cycle visitera alternativement des sommets de X1 et de X2, pour revenir au sommet de départ, il faut donc que le nombre de sommets dans X1 soit égal au nombre de sommets dans X2.

2.d. Kp,q ne comporte pas de cycles ssi p=1 ou q=1.
Preuve : si p = 1 alors le nombre d'arêtes est égale à q et le nombre de sommets est égale à q+1, le graphe étant connexe c'est donc un arbre, il ne comporte donc pas de cycle.

2.e. Un graphe biparti ne comporte aucun cycle de longueur impair (vu en TD).

Exercice 3.
On représente chaque animal par un sommet, et si deux animaux ne peuvent pas être transportés ensemble, on relie les deux sommets qui les représentent par une arête. Le problème revient alors à trouver le nombre chromatique du graphe (le nombre min de couleurs à associer à chaque sommet sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur). Le graphe est le suivant :



On peut aussi trouver dire trouver le nombre min de stables dans le graphe S1={A_1, A_3, A_5} et S_2={A_2, A_4, A_6} correspondants aux chargement des deux camions et on ne peut pas avoir moins de deux camion car il existe des cliques de taille 2.