1.1

1. $L^*=(L^*)^*$

a. $L^*\subseteq(L^*)^*$

on $(L^*)^* = U(L^*)^i= (L^*)^0 \cup$ **(**$L^*) \cup (L^*)^2 \cup ....(L^*)^\infty$ donc $L^*\subseteq(L^*)^*$

b. $(L^*)^*\subseteq L^*$

$\forall$ $w\in (L^*)^*$ => $\exists$ $n\in N$ $w=w_{\underline{1}}....w_n$ avec $w_i\in L^*$

$\exists$ Pi avec $0<i\leq n$ avec $w=w_{11}...w_{1P1}w_{21}...w_{2P2}...wn_1...w_{nPn}$ avec $w_{ij}\in L$

$w= w'_1... w'_k$ avec $k=\sum$ Pi

2. $(L_1\cup L_2)^*=L_1^*\cup L_2^*$ cette expression n'est pas vérifiée

contre exemple $L_1=\{a\}$ et $L_2=\{b\}$ alors $(a \cup b)^*\neq a^*\cup b^*$ on a $L_1^*\cup L_2^*\subseteq(L_1\cup L_2)^*$

3. $(L_1.L_2)^*=L_1^*.L_2^*$ cette expression n'est vérifiée on a $(L_1.L_2)^*\not\subseteq L_1^*.L_2^*$ et $L_1^*.L_2^* \not\subseteq(L_1.L_2)^*$

si $\varepsilon\in L_1$ et $\varepsilon\in L_2$ donc $L_1^*.L_2^* \subseteq(L_1.L_2)^*$

4. $L\emptyset=\emptyset$

$w\in L\emptyset$ donc $w=w_1w_2$ avec $w_1\in L$ et $w_2\in\emptyset$ mais $\emptyset$ par définition ne contient aucun élément donc w_2 est impossible => $L\emptyset=\emptyset$

5. $(L_1L_2)^*L_1=L_1(L_2L_1)^*$

a. $(L_1L_2)^*L_1\subseteq L_1(L_2L_1)^*$

on $w\in(L_1L_2)^*L_1$ donc $w=w_1w_2$ avec $w_2\in L_1$ $w_1\in (L_1L_2)^*$ $w_1=w_{11}....w_{1n}$ avec$w_{1i}\in$ L_1L_2

$w_{1i}=u_iv_i$ on a donc $w_1= u_1v_1...... u_nv_n$

$w= w_1w_2=(w_{11}....w_{1n})w_2 = (u_1v_1...... u_nv_n)w_2= u_1(v_1...... u_nv_nw_2)\in L_1(L_2L_1)^*$ donc $(L_1L_2)^*L_1\subseteq L_1(L_2L_1)^*$

b. $L_1(L_2L_1)^*\subseteq(L_1L_2)^*L_1$ la même chose

6. $(L_1\cup L_2)^*=L_1^*(L_1\cup L_2)^*$

a. $(L_1\cup L_2)^*\subseteq L_1^*(L_1\cup L_2)^*$ car $\varepsilon\in L_1^*$

b. $L_1^*(L_1\cup L_2)^*\subseteq (L_1\cup L_2)^*$

$w\in L_1^*(L_1\cup L_2)^*$ $w=w_{\underline{1}}w_2$ avec $w_1\in L_1^*$, $w_1\in(L_1\cup L_2)^*$

$\exists$ $n,m\in N$ $w_1\in L_1^n$, $w_1\in(L_1\cup L_2)^n$

$w=w_{1\underline{1}}....w_{1n}w_{2\underline{1}}....w_{2m}$ avec $w_{1i}\in L_1^n$ donc $w_{1i}\in(L_1\cup L_2)^n$

$w_{2i}\in(L_1\cup L_2)^m$

$w= w'1... w'^k$ avec $k=n+m$ et $w'_i \in L_1\cup L_2$ donc $w \in(L_1\cup L_2)^k$ => $w \in(L_1\cup L_2)^*$

comme $(L_1\cup L_2)^*\subseteq L_1^*(L_1\cup L_2)^*$ et $L_1^*(L_1\cup L_2)^*\subseteq (L_1\cup L_2)^*$ alors $(L_1\cup L_2)^*=L_1^*(L_1\cup L_2)^*$

7. $(L_1^*.L_2^*)^*=(L_1\cup L_2)^*$

a. $(L_1^*.L_2^*)^*\subseteq (L_1\cup L_2)^*$

$w\in(L_1^*.L_2^*)^*$ $w= (u_{11}..u_{1P1}v_{11}..v_{1Q1})(u_{21}..u_{2P1}v_{21}..v_{2Q2}).....(u_{1n}..u_{1Pn}v_{1n}..v_{1Qn})$

$u_{ij}\in$ L_1 => $u_{ij}\in (L_1\cup L_2)$

$v_{ij}\in L_2$ => $v_{ij}\in (L_1\cup L_2)$

$w= w'1... w'k$ avec $k=\sum$ Pi+Qi $w_i\in(L_1\cup L_2)$ donc $w\in(L_1\cup L_2)^k$ alors $w\in(L_1\cup L_2)^*$

=>$(L_1^*.L_2^*)^*\subseteq (L_1\cup L_2)^*$

b. $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* . L_2^*)^*$
$w \in (L_1 \cup L_2)^*$
$\exists\ n \in N\ w = w_1 \dots w_n$ avec $w_i \in (L_1 \cup L_2)$
si $w_i \in L_1 \Rightarrow w_i \in L_1^* \Rightarrow w_i = w_i \mathcal{E} \in L_1^* . L_2^*$
si $w_i \in L_2 \Rightarrow w_i \in L_2^* \Rightarrow w_i = \mathcal{E} w_i \in L_1^* . L_2^*$

$w = w_1 \dots w_n$ avec $w_i \in (L_1^* . L_2^*)$ $w \in (L_1^* . L_2^*)^n$ et donc $w \in (L_1^* . L_2^*)^*$ d'où $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* . L_2^*)^*$
comme $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* . L_2^*)^*$ et $(L_1^* . L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ alors $(L_1^* . L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$

1.4
$y = u^2 v^2 = w^2 \Rightarrow |u^2| + |v^2| = |w^2| \Rightarrow 2|u| + 2|v| = 2|w| \Rightarrow |u| + |v| = |w|$ ….. (1)
Appliquons le lemme de levi

a. si $|u| = |w| \Rightarrow |v| = 0$ alors $v = \mathcal{E} \Rightarrow uv = vu \Rightarrow u\mathcal{E} = \mathcal{E}u \Rightarrow u = u$ donc $uv = vu$

b. si $|u| < |w|$ donc existe $w = uh \Rightarrow |u| + |h| = |w|$ ….. (2)
(1) et (2) $\Rightarrow |h| = |v|$
$u^2 v^2 = w^2 \Rightarrow uuvv = uhuh \Rightarrow uvv = huh$ comme $|h| = |v|$ donc $h = v$ et $uvv = huh \Rightarrow uvv = vuv$
$\Rightarrow uv = vu$

c. si $|u| > |w|$ impossible car $|u| + |v| = |w|$

1.5
$uw^R = wv \Rightarrow |u| + |w^R| = |w| + |v| \Rightarrow |u| = |v|$
Appliquons le lemme de levi

a. si $|u| = |w| \Rightarrow u = w \Rightarrow w^R = v \Rightarrow v = u^R$
b. si $|u| < |w| \Rightarrow u(uh)^R = uhv \Rightarrow uh^R y^R = uhv \Rightarrow h^R u^R = hv$ comme $|h^R| = |h|$ on a $h = h^R$ et $v = u^R$
c. si $|u| > |w| \Rightarrow u = wh \Rightarrow whw^R = wv \Rightarrow v = hw^R \Rightarrow$ si $h = h^R$ alors $v = h^R w^R = (hw)^R = u^R$

1.6

$L_1 = \{w_1 ab w_2\ \ /\ w_1, w_2 \in X^*\}$
$L_2 = \{b^i a^j bw\ \ /\ w \in X^*, i \geqslant 0, j > 0\}$
$L_2 = \{b^i a^j\ \ /\ i \geqslant 0, j \geqslant 0\}$

comparer L_1 à L_2 ($L_1 = L_2$)

1. $L_2 \subseteq L_1$

$w \in L_1$ $w = w_1 ab w_2$ avec $w_1, w_2 \in X^*$
$w \in L_2$ $w' = b^i a^j bw$ avec $i \geqslant 0$, $j > 0$
$w' = b^i a^k abw$ avec $i \geqslant 0$, $k \geqslant 0$
on $b^i a^k \in X^*$ alors $w' = w_1 ab w_2$ / $w_1 = b^i a^k$ d'ou $w' \in L_1$ on a $w \in L_2$ alors $w \in L_1$ d'ou $L_2 \subseteq L_1$

2. $L_1 \subseteq L_2$

soit $w \in L_1$ $w = w_1 ab w_2$ $w1, w2 \in X^*$
a. si w_1 ne contient pas un ab donc $w_1 = b^j a^i$
$w = b^i a^j ab w_2$ $i, j \geqslant 0$ dans ce cas $w \in L_2$ est ainsi $L_1 \subseteq L_2$

b. si w_1 contient un ab alors

$\exists w_{11}, w_{12} \in X^*$ / $w_1 = w_{11}abw_{12}$ donc $w = w_{11}abw_{12}abw_2$ posons $w_{11}=w_1$ et $w_{11}abw_2=w_2$

$w = w_1abw_2$ aller à $\Rightarrow$ a.

D'ou $L_1 \subseteq L_2$

comme $L_1 \subseteq L_2$ et $L_2 \subseteq L_1$ donc $L_2 = L_1$

comparer L_2 à L_3 ($L_2 = \overline{L_3}$)

1. $L_2 \cap L_3 = \emptyset$

$w \in L_2$, w contient (ab) comme facteur $w' \in L_3$, w ne contient pas de (ab) comme facteur donc $L_2 \cap L_3 = \emptyset$

2. $L_2 \cup L_3 = X^*$

a. $L_2 \cup L_3 \subseteq X^*$

$L_2 \subseteq X^*$ et $L_3 \subseteq X^*$ donc $L_2 \cup L_3 \subseteq X^*$

b. $X^* \subseteq L_2 \cup L_3$

démonstration par récurrence sur la longueur des mot $w \in X^*$ $|w|=n$

$|w|=0 \Rightarrow w=\varepsilon \in X^*$ et $\varepsilon \in L_3$ pour $i=j=0$ d'où $\varepsilon \in L_2 \cup L_3$

la relation $X^* \subseteq L_2 \cup L_3$ est vrai à l'ordre n $\forall\, w \in X^n$ ($w \in X^n$ et $|w|=n$) $w \in L_2 \cup L_3$

montrons la relation pour l'ordre n+1 $w \in X^{n+1}$ $w \in L_2 \cup L_3$?

A l'ordre n+1 $w' \in X^{n+1}$ $|w'|=n+1$

$w'=wa$ et $w'=wb$ ou $w'=aw$ et $w'=aw$ avec $w \in X^n$ puisque $X^{i-1}X = XX^{i-1} = X^i$ il suffit de montrer $w'=wa$ et $w'=wb$

$w \in X^n$ alors $w \in L_2 \cup L_3 \Rightarrow w \in L_2$ ou $w \in L_3$

si $w \in L_2$ $w'=aw$ alors $w' \in L_2 \cup L_3$ et si $w'=bw$ alors $w' \in L_2 \cup L_3$

si $w \in L_3$ $w'=aw$ alors $w' \in L_2 \cup L_3$ et si $w'=bw$ alors $w' \in L_2 \cup L_3$

nous avons $X^* \subseteq L_2 \cup L_3$ et $L_2 \cup L_3 \subseteq X^*$ donc $L_2 \cup L_3 = X^*$

$L_2 \cup L_3 = X^*$ et $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ => $L_2 = \overline{L_3}$

1.7

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$ et $L_1 \neq \overline{L_2}$ *car* $ba \notin L_1$ *et* $ba \notin L_1$

$L_1 \cup \{X^*baX^*\} = X^*$

1.8

$L_1 = \{ a^ib^j(ab)^kaaw \text{ tq } i,k \geq 0\ j>0\ w \in X^* \} = \{ a^ib^jb(ab)^kaaw \text{ tq } i,j,k \geq 0\ w \in X^* \}$

il faut démontrer que $b(ab)^ka = (ba)^{k+1}$ on peut le faire par construction ou par récurrence.

Donc on a :

$L_1 = \{ a^ib^j(ba)^{k+1}aw \text{ tq } i,j,k \geq 0\ w \in X^* \}$

$L_2 = \{ wa(ab)^iab^ja^k \text{ tq } i,k \geq 0\ j>0\ w \in X^* \} = \{ wa(ab)^iabb^ja^k \text{ tq } i,k,j \geq 0\ w \in X^* \}$

$= \{ wa(ab)^{i+1}b^ja^k \text{ tq } i,k,j \geq 0\ w \in X^* \}$

il suffit de !démonter que $((ab)^k)^R=(ba)^k$ et que pour tout $w \in X^*$ il existe $w' \in X^*$ tq $w'=w^R$ par récurrence.
Donc $L_1=L_2^R$

1.9

$L_2=\{(01)^i(10)^j(01)^k(10)^m$ i,j,k,m≥0$\}=\{(01)^i(10)^j(((10)^m)^R((01)^k)^R)^R$ i,j,k,m≥0$\}$
$= \{((01)^i(10)^j)((01)^m(10)^k)^R$ i,j,k,m≥0$\}$
$= \{((01)^i(10)^j)((01)^m(10)^k)^R$ i,j,k,m≥0 avec i=m et j=k$\} \cup \{((01)^i(10)^j)$ i=j, k=m=0$\} \cup$
$\{((01)^m(10)^k)$ k=m, i=j=0$\} \cup \{((01)^{i+k}(10)^k)$ i+k=m , j=0$\} \cup \{((01)^{i+k}(10)^k)$ j+m=i , k=0$\}$
$\cup\{((01)^i(10)^j)((01)^m(10)^k)^R$ i,j,k,m≥0 avec (i≠ m ou j≠ k) et (i≠j ou (i=j et (k≠0 ou m≠0)) ou k≠m ou (k=m et (i≠0 ou j≠0)) et (i+k≠m ou j≠0) et (j+m≠i ou k≠0)$\}$(pas un palindrome)

on a $\{(01)^i(10)^j(01)^k(10)^m$ i=j, k=m=0$\} \cup \{(01)^i(10)^j(01)^k(10)^m$ k=m, i=j=0$\} \cup \{((01)^{i+k}(10)^k)$ i+k=m , j=0$\} \cup \{((01)^{i+k}(10)^k)$ j+m=i , k=0$\} \subseteq L_3$
on a $L_4=\{(01)^i(10)^j(01)^k(10)^m$ i,j,k,m≥0 avec (i≠ m ou j≠ k) et (i≠j ou (i=j et (k≠0 ou m≠0)) ou k≠m ou (k=m et (i≠0 ou j≠0)) et (i+k≠m ou j≠0) et (j+m≠i ou k≠0)$\}$(pas un palindrome)
$L_2 = L_3 \cup L_4$ ….(3)

$L_3= \{((01)^i(10)^j)((01)^i(10)^j)^R$ i,j,k,m≥0$\}$

$L_3 \subseteq L_1$ ….(1)
$L_3 \subseteq L_2$ ….(2)
$L_1 \cap L_2=L_3$ ($L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$ d'après (1) et (2) et $L_1 \cap L_2 \subseteq L_3$ par récurrence) ou encore d'après la définition de L_1 et (3)

1.10

– Évident dans un sens, puisque $f^nf^p= f^{n+p}= f^pf^n$
– Dans l'autre sens, par récurrence sur N = |x|+ |y|.

- vrai dans le cas de base, quand N = 0, alors x = y = Ɛ,
- supposons le résultat acquis pour N =n , Montrons pour n+1
  - si |x|= |y|, la commutation xy = yx entraîne que x = y donc $x,y \in f^*$
  - sinon, comme x et y sont des préfixes de xy = yx, l'un est préfixe (strict) de l'autre. On suppose que c'est x, il existe donc w tel que y = xw. Alors xy = yx => x(xw) =(xw)x => xw = wx

    si |xw|=n+1 alors y= Ɛ et f=x donc $x,y \in f^*$
    sinon par hypothèse de récurrence, x et w sont des répétitions d'un même facteur f, et il en est donc de même pour y = xw.

1.11

Méthode 1 : Raisonnons par récurrence sur |w|.
– pour n=0 càd |w|=0 donc w = Ɛ et a=b
– supposons le résultat acquis pour tout mot n≥ |w|>1, montrons que pour |w|=n+1 si wa=bw alors a=b et $w \in \{a^*\}$. appliquons le lemme de Levi :
il existe un mot t tel que w = at ou w = tb. On a donc at = tb et |t|< |w| => |t|≤n donc par hypothèse de récurrence a = b et $t \in \{a^*\}$. . Mais alors $w = at \in \{a^*\}$, ce qui prouve le résultat souhaité.

Méthode 2 : wa=bw => $|wa|_a=|bw|_a$ => $|w|_a+|a|_a = |b|_a+|w|_a$ => $|a|_a=|b|_a$ => a=b et donc $w \in \{a^*\}$

1.12

Raisonnons par récurrence

– pour i=2 f_2=ab=uab avec u= ε

– supposons le résultat acquis pour $i \leq n$ f_i=uab si i pair sinon f_i=uba . Montrons pour n+1

si n+1 est pair $f_{n+1}=f_n f_{n-1}= f_{n-1} f_{n-2} f_{n-1}= u_{n-1}$ ab u_{n-2} ba u_{n-1} ab = uab avec u= u_{n-1} ab u_{n-2} ba u_{n-1}. u est palindrome

si n+1 est impair $f_{n+1}=f_n f_{n-1}= f_{n-1} f_{n-2} f_{n-1}= u_{n-1}$ ba u_{n-2} ab u_{n-1} ba = uba avec u=u_{n-1} ba u_{n-2} ab u_{n-1} . u est palindrome.