Exercice 3:

$L_1 = \{w_1 ab w_2 \ / \ w_1, w_2 \in X^*\}$
$L_2 = \{b^i a^j bw \ / \ w \in X^*, i \geqslant 0, j > 0\}$
$L_2 = \{b^i a^j \ / \ i \geqslant 0, j \geqslant 0\}$

comparer L_1 à L_2 ($L_1 = L_2$)

1. $L_2 \subseteq L_1$

$w \in L_1$ $w = w_1abw_2$ avec $w_1, w_2 \in X^*$
$w \in L_2$ $w' = b^ia^jbw$ avec $i \geqslant 0$, $j > 0$
$w' = b^ia^kabw$ avec $i \geqslant 0$, $k \geqslant 0$
on $b^ia^k \in X^*$ alors $w' = w_1abw_2$ / $w_1 = b^ia^k$ d'ou $w' \in L_1$ on a $w \in L_2$ alors $w \in L_1$ d'ou $L_2 \subseteq L_1$

2. $L_1 \subseteq L_2$

soit $w \in L_1$ $w = w_1abw_2$ $w1, w2 \in X^*$
a. si w_1 ne contient pas un ab donc $w_1 = b^ja^i$
$w = b^ia^jabw_2$ $i, j \geqslant 0$ dans ce cas $w \in L_2$ est ainsi $L_1 \subseteq L_2$

b. si w_1 contient un ab alors
$\exists w_{11}, w_{12} \in X^*$ / $w_1 = w_{11}abw_{12}$ donc $w = w_{11}abw_{12}abw_2$ posons $w_{11} = w_1$ et $w_{11}abw_2 = w_2$
$w = w_1abw_2$ aller à $\Rightarrow$ a.
D'ou $L_1 \subseteq L_2$

comme $L_1 \subseteq L_2$ et $L_2 \subseteq L_1$ donc $L_2 = L_1$

comparer L_2 à L_3 ($L_2 = \overline{L_3}$)

1. $L_2 \cap L_3 = \emptyset$
$w \in L_2$, w contient (ab) comme facteur $w' \in L_3$, w ne contient pas de (ab) comme facteur donc $L_2 \cap L_3 = \emptyset$

2. $L_2 \cup L_3 = X^*$

a. $L_2 \cup L_3 \subseteq X^*$
$L_2 \subseteq X^*$ et $L_3 \subseteq X^*$ donc $L_2 \cup L_3 \subseteq X^*$

b. $X^* \subseteq L_2 \cup L_3$
démonstration par récurrence sur la longueur des mot $w \in X^*$ $|w| = n$
$|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon \in X^*$ et $\varepsilon \in L_3$ pour $i = j = 0$ d'où $\varepsilon \in L_2 \cup L_3$

la relation $X^* \subseteq L_2 \cup L_3$ est vrai à l'ordre n $\forall w \in X^n$ ($w \in X^n$ et $|w| = n$) $w \in L_2 \cup L_3$

montrons la relation pour l'ordre n+1 $w \in X^{n+1}$ $w \in L_2 \cup L_3$?

A l'ordre n+1 $w' \in X^{n+1}$ $|w'| = n+1$
$w' = wa$ et $w' = wb$ ou $w' = aw$ et $w' = aw$ avec $w \in X^n$ puisque $X^{i-1}X = XX^{i-1} = X^i$ il suffit de montrer $w' = wa$ et $w' = wb$

$w\in X^n$ alors $w\in L_2\cup L_3$ => $w\in L_2$ ou $w\in L_3$

si $w\in L_2$ $w'=aw$ alors $w' \in L_2\cup L_3$ et si $w'=bw$ alors $w' \in L_2\cup L_3$
si $w\in L_3$ $w'=aw$ alors $w' \in L_2\cup L_3$ et si $w'=bw$ alors $w' \in L_2\cup L_3$

nous avons $X^*\subseteq L_2\cup L_3$ et $L_2\cup L_3\subseteq X^*$ donc $L_2\cup L_3=X^*$

$L_2\cup L_3=X^*$ et $L_2\cap L_3=\varnothing$ => $L_2=\overline{L_3}$

Exercice 6 :
1. $L^*=(L^*)^*$
a.$L^*\subseteq(L^*)^*$
on $(L^*)^* = \bigcup(L^*)^i= (L^*)^0 \cup (\mathbf{L^*}) \cup (L^*)^2 \cup ....(L^*)^\infty$ donc $L^*\subseteq(L^*)^*$

b.$(L^*)^*\subseteq L^*$

$\forall$ $w\in (L^*)^*$ => $\exists$ $n\in N$ $w=w_{\underline{1}}....w_n$ avec $w_i\in L^*$
$\exists$ Pi avec $0<i\leq n$ avec $w=w_{11}...w_{1P1}w_{21}...w_{2P2}...w_{n1}...w_{nPn}$ avec $w_{ij}\in L$
$w= w'_1... w'_k$ avec $k=\sum Pi$

2. $(L_1\cup L_2)^*=L_1^*\cup L_2^*$ cette expression n'est vérifiée
contre exemple $L_1=a$ et $L_2=b$ alors $(a \cup b)^*\neq a^*\cup b^*$ on a $(L_1\cup L_2)^*\subseteq L_1^*\cup L_2^*$

3. $(L_1.L_2)^*=L_1^*.L_2^*$ cette expression n'est vérifiée on a $(L_1.L_2)^*\nsubseteq L_1^*.L_2^*$ et $L_1^*.L_2^* \nsubseteq(L_1.L_2)^*$
si $\varepsilon\in L_1$ et $\varepsilon\in L_2$ donc $L_1^*.L_2^* \subseteq(L_1.L_2)^*$

4. $L\varnothing=\varnothing$
$w\in L\varnothing$ donc $w=w_1w_2$ avec $w_1\in L$ et $w_2\in\varnothing$ mais $\varnothing$ par définition ne contient aucun élément donc w_2 est impossible => $L\varnothing=\varnothing$

5. $(L_1L_2)^*L_1=L_1(L_2L_1)^*$

a. $(L_1L_2)^*L_1\subseteq L_1(L_2L_1)^*$
on $w\in(L_1L_2)^*L_1$ donc $w=w_1w_2$ avec $w_2\in L_1$ $w_1\in (L_1L_2)^*$ $w_1=w_{11}....w_{1n}$ avec$w_{1i}\in$ L_1L_2
$w_{1i}=u_iv_i$ on a donc $w_1= u_1v_1...... u_nv_n$
$w= w_1w_2=(w_{11}....w_{1n})w_2 = (u_1v_1...... u_nv_n)w_2= u_1(v_1...... u_nv_nw_2)\in L_1(L_2L_1)^*$ donc $(L_1L_2)^*L_1\subseteq L_1(L_2L_1)^*$

b. $L_1(L_2L_1)^*\subseteq(L_1L_2)^*L_1$ la même chose

6. $(L_1\cup L_2)^*=L_1^*(L_1\cup L_2)^*$

a. $(L_1\cup L_2)^*\subseteq L_1^*(L_1\cup L_2)^*$ car $\varepsilon\in L_1^*$

b. $L_1^*(L_1\cup L_2)^*\subseteq (L_1\cup L_2)^*$
$w\in L_1^*(L_1\cup L_2)^*$ $w=w_{\underline{1}}w_2$ avec $w_1\in L_1^*$, $w_1\in(L_1\cup L_2)^*$
$\exists$ $n,m\in N$ $w_1\in L_1^n$, $w_1\in(L_1\cup L_2)^n$
$w=w_{1\underline{1}}....w_{1n}\, w_{2\underline{1}}....w_{2m}$ avec $w_{1i}\in L_1^n$ donc $w_{1i}\in(L_1\cup L_2)^n$
$w_{2i}\in(L_1\cup L_2)^m$
$w= w'1... w'^k$ avec $k=n+m$ et $w'_i \in L_1\cup L_2$ donc $w \in(L_1\cup L_2)^k$ => $w \in(L_1\cup L_2)^*$

comme $(L_1\cup L_2)^*\subseteq L_1^*(L_1\cup L_2)^*$ et $L_1^*(L_1\cup L_2)^*\subseteq (L_1\cup L_2)^*$ alors $(L_1\cup L_2)^*=L_1^*(L_1\cup L_2)^*$

7. $(L_1^* . L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$

a. $(L_1^* . L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

$w \in (L_1^* . L_2^*)^*$ $w = (u_{11}..u_{1P1}v_{11}..v_{1Q1})(u_{21}..u_{2P1}v_{21}..v_{2Q2}).....(u_{1n}..u_{1Pn}v_{1n}..v_{1Qn})$
$u_{ij} \in L_1 \Rightarrow u_{ij} \in (L_1 \cup L_2)$
$v_{ij} \in L_2 \Rightarrow v_{ij} \in (L_1 \cup L_2)$

$w = w'1... w'k$ avec $k = \sum Pi+Qi$ $w_i \in (L_1 \cup L_2)$ donc $w \in (L_1 \cup L_2)^k$ alors $w \in (L_1 \cup L_2)^*$

$\Rightarrow (L_1^* . L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

b. $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* . L_2^*)^*$
$w \in (L_1 \cup L_2)^*$
$\exists$ $n \in N$ $w = w_1....w_n$ avec $w_i \in (L_1 \cup L_2)$
si $w_i \in L_1 \Rightarrow w_i \in L_1^* \Rightarrow w_i = w_i \mathcal{E} \in L_1^* . L_2^*$
si $w_i \in L_2 \Rightarrow w_i \in L_2^* \Rightarrow w_i = \mathcal{E} w_i \in L_1^* . L_2^*$

$w = w_1....w_n$ avec $w_i \in (L_1^* . L_2^*)$ $w \in (L_1^* . L_2^*)^n$ et donc $w \in (L_1^* . L_2^*)^*$ d'où $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* . L_2^*)^*$

comme $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* . L_2^*)^*$ et $(L_1^* . L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ alors $(L_1^* . L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$