Chapitre IV : Les expressions régulières

Définition :

Les expressions régulières permettent de décrire formellement les langages réguliers et eux seuls.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Grammaire Régulière}} \arrow[r, "\text{Génère}"] & \boxed{\text{Langage régulier}} & \boxed{\text{AEF}} \arrow[l, "\text{reconnaît}"'] \\
& \boxed{\text{Expression Régulière}} \arrow[u, "\text{décrit, dénote}"'] &
\end{tikzcd}
$$

VI.1 Formalisme :

Les expressions régulières sont définies par induction à partir d'un alphabet X. Les règles de construction sont : (ϕ dénote le langage vide $\{\}$ et ε dénote le langage $\{\varepsilon\}$, x dénote le langage $\{x\}$)

Une expression P est une expression régulière sur X ssi :

- $P = \phi$ ou $P = \varepsilon$ ou $P = x$ avec $x \in X$;
- Si P et Q sont des expressions régulières alors :

  $P.Q$

  $(P + Q)$ ou $(P \cup Q)$

  P^*

sont des expressions régulières sachant que si P et Q dénotent respectivement les langages $\mathcal{L}(P)$ et $\mathcal{L}(Q)$ alors :

* $P.Q$ dénote le langage $\mathcal{L}(P) \underset{}{\overset{\text{Concaténation}}{.}} \mathcal{L}(Q)$

* $P + Q$ " " " $\mathcal{L}(P) \cup \mathcal{L}(Q)$

* P^* " " " $(\mathcal{L}(P))^*$

Exemple 1 :

$(a + b)^*$ denote le langage $(\{a\} \cup \{b\})^*$

$(a^* . b^*)$ denote le langage $(\{a\}^* . \{b\}^*)^*$

Exemple 2 : Ecrire l'expression regulière des mots sur l'alphabet $\{0,1\}$ alternant un 0 et un 1.

cas 1) w commence par 0

w se termine par 1 $010101......01 \Leftrightarrow (01)^*$

w se termine par 0 $010101....010 \Leftrightarrow (01)^* . 0$

cas 2) w commence par 1

w se termine par 0 $101010..... 10 \Leftrightarrow (10)^*$

w se termine par 1 $101010....101 \Leftrightarrow (10)^* . 1$

d'où :

Expression Regulière $= (01)^* + (01)^* . 0 + (10)^* + (10)^* . 1$

Remarque :

Un langage peut être denoté par plusieurs expressions regulières. Dans ce cas, on dira que les expressions ~~reglu~~ regulieres denotant un même langage sont equivalentes

IV.2 Propriétés algebriques des expressions regulières :

Soient P, Q, R des expressions regulières et X un alphabet

1) $P + Q = Q + P$ (commutativité)

2) $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ (Associativité)

$(P . Q) . R = P . (Q . R)$

3) $P.(Q+R) = P.Q + P.R$

$(P+Q).R = P.R + Q.R$

4) $(P^*)^* = P^*$

5) $P + \emptyset = \emptyset + P = P$

6) $P.\emptyset = \emptyset.P = \emptyset$

$P.\varepsilon = \varepsilon.P = P$

7) $\emptyset^* = \emptyset$

$\varepsilon^* = \varepsilon$

8) $(P^*.Q^*)^* = (P^* + Q^*)^* = (P+Q)^*$

$(P^*.Q^*)^* = (P \dots P Q \dots Q).(P \dots P Q \dots Q) \dots$

$(P^* + Q^*)^* = ((P \dots P) + (Q \dots Q))((P \dots P) + (Q \dots Q)) \dots$

$(P + Q)^* = (P+Q)(P+Q) \dots (P+Q) \dots$

9) $P + \varepsilon = \varepsilon + P \neq P$

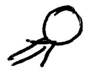
10) $P + X^* = X^*$

11) $P^*.P^* = P^*$

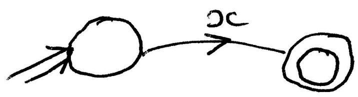
IV.3 Automates et expressions régulières

Théorème : Pour toute expression régulière E, il existe un automate à états finis $A < Q, X, q_0, \delta, F)$ tel que $L(A) = L(E)$

Methode pour obtenir l'AEF :

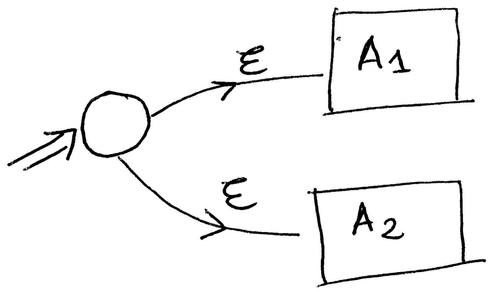
1) $E = \emptyset$ alors A : 

2) $E = \varepsilon$ alors A : 

3) $E = x$ alors A : 

L'automate est aussi obtenu par induction pour les autres expressions régulières E. Soient P et Q deux expressions régulières. ~~Nous supposons~~ Soient A_1 et A_2 deux automates tel que $L(A_1) = L(P)$ et $L(A_2) = L(Q)$.

4) $L(A) = L(P+Q)$ alors A :



5) $L(A) = L(P.Q)$ alors A :