Série d'Exercices N° 2

Exercice 1.

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté, simple et connexe sur $\boldsymbol{n}$ sommets.

On appelle **longueur** d'une chaîne $\boldsymbol{\mu(x, y)}$ joignant les deux sommets x et y **,** $|\boldsymbol{\mu(x, y)}|$, le nombre d'arêtes de cette chaîne. Désigné par $\boldsymbol{e(x, y)}$**,** **l'écart** entre x et y, la longueur d'une plus courte chaîne joignant x et y :

$$e(x, y) = \min_{\mu(x,y) \in G} \{ |\mu(x,y)| \} ;$$

$$e(x, x) = 0.$$

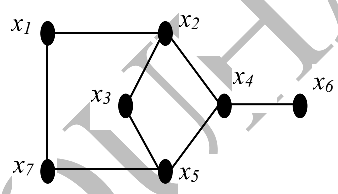
On appelle :

. **Ecartement** d'un sommet x, le nombre $E(x) = \max_{y \in X} \{ e(x, y) \}$

. **Diamètre** de G, le nombre $e(G) = \max_{x, y \in X} \{ e(x, y) \}$

. **Rayon** de G, le nombre $r(G) = \min_{x \in X} \{E(x)\}$

. **Centre** de G, un sommet $s \in X$ tel que : $E(s) = r(G)$



Déterminer le diamètre, le rayon et le ou les centres du graphe ci-contre.

Exercice 2.

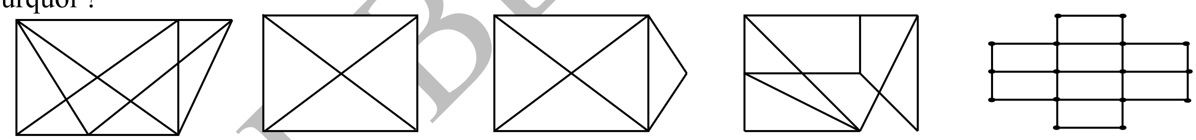
Dans un réseau téléphonique constitué de $2n$ centraux téléphoniques disposés de telle façon que chaque central est relié par une ligne téléphonique directe avec au moins n autres centraux. Montrez qu'il est toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.

Exercice 3.

Soit $G=(X, E)$ un graphe connexe. Montrons qu'il existe un sommet x tel que le sous-graphe de G engendré par le sous ensemble de sommets $X-\{x\}$ est toujours connexe.

Exercice 4.

Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ? Pourquoi ?



Exercice 5.

Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes ?

Exercice 6.

Soit le graphe orienté $G=(X,U)$ représenté dans le tableau ci-dessous par le dictionnaire des prédécesseurs :

x .	1	2	3	4	5	6	7	8
Prédécesseurs de x .:	3, 7	4, 6	5	1	1	7, 8	5	2

1. Donner la matrice d'adjacence M du graphe G. Représenter sous forme de listes LS et PS.
2. G est-il connexe. Justifier.
3. G admet-il un parcours Eulerien ? Pourquoi ?
4. Donner la matrice de fermeture transitive $\hat{M}$ du graphe G. G admet-il un circuit ?
5. Trouver les composantes fortement connexes de G. Donner le graphe réduit.

Exercice 7.

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

1. En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
2. Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
3. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
4. Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Exercice 8.

Soit un tournoi de volley-ball regroupant n clubs. Chaque club affronte un autre exactement une (1) seule fois. On veut représenter à travers un graphe les résultats de ce tournoi. Sachez qu'en volley-ball il n'y a pas de score d'égalité.

1. Modéliser (sans dessiner) le problème. Puis dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.
2. Est-il possible de trouver une situation où le club C_1 a gagné contre C_2 et C_2 a battu C_3 et ainsi de suite jusqu'à C_{n-1} a gagné contre C_n ? Justifier. (C_i est un club quelconque)
3. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus C_n a gagné contre C_1.

Exercice 9.

Démontrer que si deux sommets $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y} \in$ à une même composante fortement connexe $\boldsymbol{C}$, alors tout chemin de $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{y}$ est entièrement inclus dans $\boldsymbol{C}$.