EXERCICE 2 : (6 Pts)

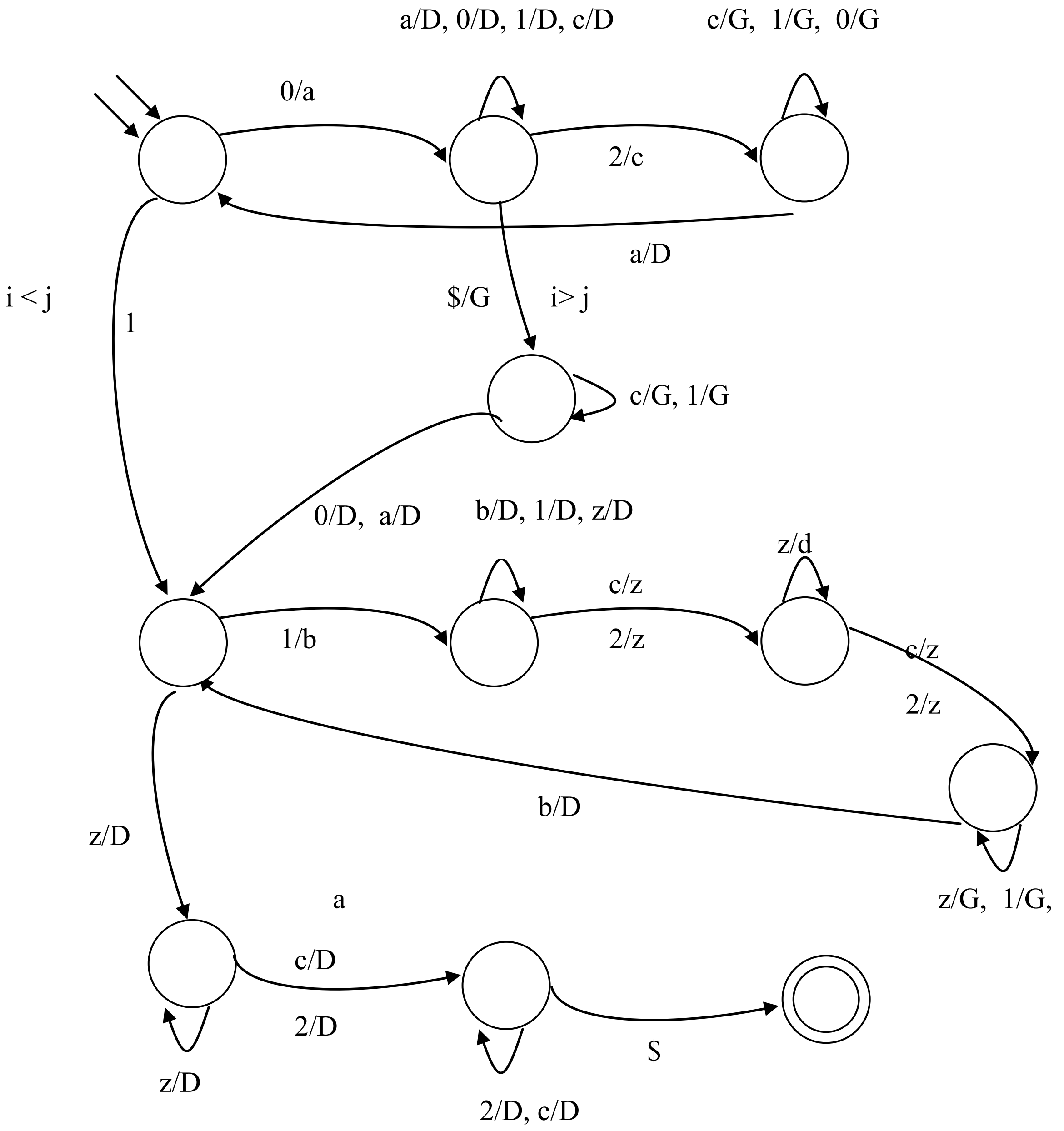
Donner les automates les plus adéquats engendrant les langages suivants (Ne pas justifier):

$L_1 = \{a^i\, b^k\, c^j$ avec $k = (i+j)/2$ et $k \equiv 2\ [3]\ \}$ **3pts**

Réponse

$\#\, S_0\, a \to \mathbf{a}\, S_1$	$\mathbf{a}\, S_{P2}\, b \to S_{P0}$	$\mathbf{b}S_{P1}\, b \to bbS_{P2}$	$\mathbf{a}\, S_{I1}\, b \to S_{I2}$	$\mathbf{b}S_{I0}\, b \to bbS_{I1}$	$\#\, S_5 c \to \#S_6$
$\mathbf{a}\, S_1\, a \to \mathbf{a}\, S_0$	$\mathbf{a}\, S_{P0}\, b \to S_{P1}$	$\mathbf{b}S_{P2}\, b \to bbS_{P0}$	$\mathbf{a}\, S_{I2}\, b \to S_{I0}$	$\mathbf{b}S_{I1}\, b \to bbS_{I2}$	$\#\, S_6 \to \#S_f$
$\mathbf{a}\, S_0\, a \to \mathbf{a}\,\mathbf{a}\, S_1$ *Empiler un a sur 2*	$\#S_{P0} b \to \#b\, S_{P1}$ *Empiler b et vérifier k≡[2]*	$\mathbf{b}S_{P2}\, c \to bS_2$ *k≡[2]*	$\mathbf{a}\, S_{I0}\, b \to S_{I1}$	$\mathbf{b}S_{I2}\, b \to bbS_{I0}$	
$\mathbf{a}\, S_0\, b \to S_{P1}$ i pair	$\#S_{P1}\, b \to \#\mathbf{b}S_{P2}$	$\mathbf{b}S_2\, c \to S_3$ *Dépiler b à la lecture de 2 c*	$\#S_{I0} b \to \#b\, S_{I1}$ *Empiler b et vérifier k≡[2]*	$\mathbf{b}S_{I2}\, c \to bS_4$ *k≡[2]*	
$\mathbf{a}\, S_1\, b \to S_{I1}$ i impair	$\#S_{P2}\, b \to \#\mathbf{b}S_{P0}$	$\mathbf{b}S_3\, c \to bS_2$	$\#S_{I1} b \to \#\mathbf{b}S_{I2}$	$\mathbf{b}S_4\, c \to S_5$ *Dépiler b à la lecture de 2 c*	
$\mathbf{a}\, S_{P1}\, b \to S_{P2}$	$\mathbf{b}S_{P0}\, b \to bbS_{P1}$	$\#\, S_3 \to \#S_f$ J pair	$\#S_{I2}\, b \to \#\mathbf{b}S_{I0}$	$\mathbf{b}S_5\, c \to bS_4$	

$L_2 = \{0^i 1^k 2^j$, et $i \neq j$ et $j > 2k\}$ J'ai pris le cas où i, j, k >0 **3pts**



EXERCICE 3 : (6 pts)

Les propositions suivantes sont-elles valides ? Justifier

1. Si $L_1 \cup L_2$ est régulier et L_1 est régulier alors L_2 est régulier.

Réponse On prend $L_1 = X^*$ et $L_2 = a^n b^n$ on a $L_1 \cup L_2 = X^*$ est régulier et L1 est régulier mais L_2 ne l'est pas.

2. Si L_1 et L_2 sont réguliers alors $L = \{w \,/\, w \in L_1 \text{ et } w^r \in L_2\}$ est régulier

Réponse

L est régulier. (Proposition sur la fermeture des langages réguliers)

$L = L_1 \cap L_2^R$

3. Si L est régulier h(L) est régulier.

Réponse

Si L est régulier $h^*(L)$ est régulier

Cela revient à démonter que $L(h(E)) = h(L(E))$

Démonstration par récurrence :

cas trivial: si E égale ε ou $\emptyset$, alors $h(E) = E$ et $L(h(E)) = L(E) = h(L(E))$.

si E est élément de l'alphabet donc $L(E) = \{a\}$ et $L(h(E)) = L(h(a)) = \{h(a)\} = h(L(E))$

supposons que $L(h(E)) = h(L(E))$ pour tout E d'ordre n.

Démontrons pour E d'ordre supérieure à n. c'est à dire que $E=F \cup G$, $E=F.G$ et $E=F^*$

Case 1: $E = F \cup G$

$h(E) = h(F \cup G) = h(F) \cup h(G)$ et on a $L(E) = L(F) \cup L(G)$

$L(h(E)) = L(h(F \cup G)) = L(h(F) \cup h(G)) = L(h(F)) \cup L(h(G)) = h(L(F)) \cup h(L(G)) = h(L(F) \cup L(G)) = h(L(F \cup G)) = h(L(E))$.

de même pour $E = F.G$ et $E = F^*$

donc la récurrence est vérifié et $L(h(E)) = h(L(E))$

4. Si L est régulier $h^*(L)$ est régulier

Réponse

soit $L=\{ab\}$, $h(a)=aa$ et $h(b)=b \rightarrow h^*(L)=\{a^n b^n \; n \geq 0\}$. Bien que L soit régulier, $h^*(L)$ ne l'est pas.

5. $L = \{a^{n!}, n \geq 0\}$ est régulier.

Réponse

Lemme de l'étoile : Soit L un langage régulier . Il existe un entier p tel que tout mot w de L de longueur $|w| \geq p$ possède une factorisation $w=xyz$ telle que :

•$0<|y|\leq p$ et

•$xy^nz \in L$ pour tout entier ≥ 0.

Donc il suffit de trouver un $w \in L$ tel que $\forall$ x,y,z avec w=xyz, $w'=xy^nz \notin L$

prenons $w=a^{p!}$ tel que p>1

$w'=xy^nz=a^{p!-k+n*k}$ avec $n \geq k>0$

n=2; $w'=a^{p!-k+2*k}=a^{p!+k}$

comme k>0 donc $w'>a^{p!}$. Il suffit de démonter que $w'<a^{p+1!}$

Pour cela on a besoin de démonter que x!+x<x!*x, x>1

démontrons par récurrence que x!+x < x!*x pour tout x>1

cas trivial |x|=2

2!+2<2!*2 est vérifie

donc pour tout $|x| \leq n \rightarrow$ x!+x < x!*x

démontrons pour |x'|=n+1

on a x'=x+1 donc (x+1)!+x+1=(x+1)*x!+x+1=x*x!+x!+x+1

en utilisant l'hypothèse on

x*x!+x!+x+1 < x*x! + x*x! + 1 = 2*x*x! + 1< (x+1)!(x+1)

il nous reste a démonté que 2*x*x! + 1< (x+1)!(x+1)

on a (x+1)!(x+1)=(x*(x+1)!+(x+1)!)

=(x+1)(x*x!+x!)

$=x^2$*x!+x*x!+x*x!+x!

$=x^2$*x!+2x!*x+x!= 2*x!*x+1+(x^2*x!+x!-1)

donc 2*x*x! + 1< (x+1)!(x+1) est vérifie puisque (x^2*x!+x!-1) > 0 pour x>1

pour |x|=n+1 on x!+x < x!*x donc on peut conclure que pour tout x>1 x!+x < x!*x

$w'=a^{p!+k} \leq a^{p!+p} < a^{p!*p} < a^{p!*p+1} =a^{p+1!}$ Donc on $a^{p!}<w'<a^{p+1!}$ Donc $w' \notin L$

donc L n'est pas régulier.