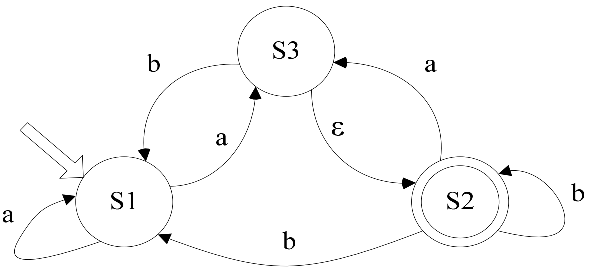
Exercice 01 : **EMD 2 -2011-**

Soit L le langage accepté par l'automate A ci-dessous :



1. Trouver l'expression régulière dénotant L.
2. Trouver l'automate A' reconnaissant le complément de L(A).
3. Trouver la grammaire régulière gauche qui génère L(A').

Correction :

1. Trouverons l'expression régulière dénotant L :

- Etablissons le système d'équation associé à A :

On a :

$$\begin{cases} E_1 = a E_1 \cup aE_3 & \dots (1) \\ E_2 = b E_2 \cup a E_3 \cup b E_1 \cup \varepsilon & \dots (2) \\ E_3 = E_2 \cup b E_1 & \dots (3) \end{cases}$$

- Résolution du système d'équation établi :

On applique la règle d'Arden, l'équation (2) devient :

$$E_2 = b^* (a E_3 \cup b E_1 \cup \varepsilon) \quad \dots (4)$$

On remplace (4) dans (3) :

$$\begin{aligned} E_3 &= b^* (a E_3 \cup b E_1 \cup \varepsilon) \cup b E_1 \\ &= b^* a E_3 \cup b^* b E_1 \cup b^* \cup b E_1 \\ &= b^* a E_3 \cup b^+ E_1 \cup b^* \end{aligned}$$

$$E_3 = (b^* a)^* (b^+ E_1 \cup b^*) \quad \dots (5)$$

On remplace (5) dans (1) :

$$\begin{aligned} E_1 &= a E_1 \cup a ((b^* a)^* (b^+ E_1 \cup b^*)) \\ &= a E_1 \cup a (b^* a)^* b^+ E_1 \cup a (b^* a)^* b^* \\ &= (a \cup a (b^* a)^* b^+) E_1 \cup a (b^* a)^* b^* \\ &= (a \cup a (b^* a)^* b^+)^* a (b^* a)^* b^* \end{aligned}$$

$E_1 = (a \cup a (b^* a)^* b^+)^* a (b^* a)^* b^*$ Est l'ER dénotant L.

2. Trouverons l'AEF A' reconnaissant le complément de L(A) :

Pour pouvoir trouver l'AEF A', on doit d'abord vérifier si A est simple, déterministe et complet.

- A n'est pas simple, $\exists$ une ε- transition
- A est indéterministe, $\exists$ deux transitions $\neq$ pour lire une même lettre.
- A est incomplet.

- Rendre A SIMPLE :

On a :

$S_3 \xrightarrow{\varepsilon} S_2 \xrightarrow{b} S_2$

$S2 \xrightarrow{b} S_1$

$S2 \xrightarrow{a} S_3$

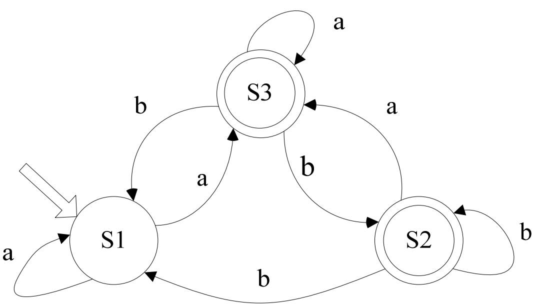
Donc, on élimine :

$S_3 \xrightarrow{\varepsilon} S_2$, et on ajoute les transitions suivantes :

$S_3 \xrightarrow{b} S_2$, $S_3 \xrightarrow{b} S_1$ et $S_3 \xrightarrow{a} S_3$

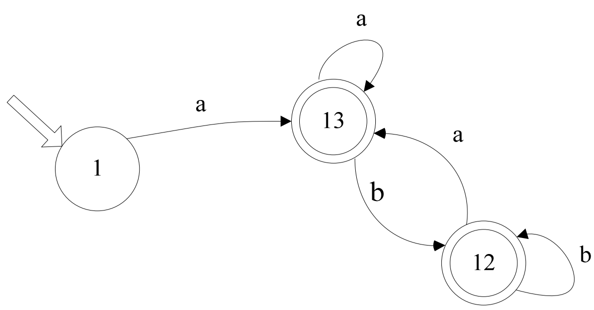
Et , $S2 \in F \Rightarrow S3 \in F$

L'AEF simple est comme suit :



- Rendre A DETERMINISTE :

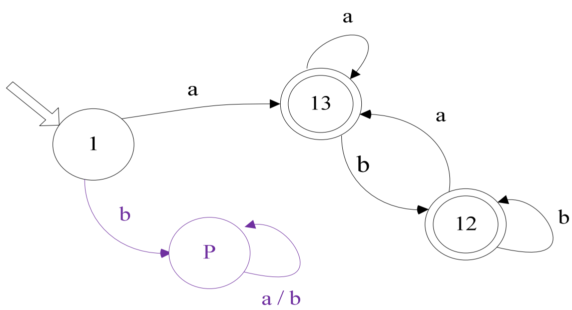
		a	b
EI	S_1	$S_1 S_3$	-
EF	S_2	S_3	$S_1 S_2$
EF	S_3	S_3	$S_1 S_2$
EI	S_1	$S_1 S_3$	-
EF	$S_1 S_3$	$S_1 S_3$	$S_1 S_2$
EF	$S_1 S_2$	$S_1 S_3$	$S_1 S_2$



L'AEF est déterministe

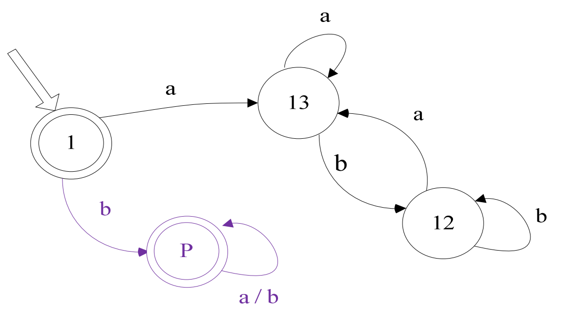
- Rendre A COMPLET :

On ajoute un état puits (non co-accessible),

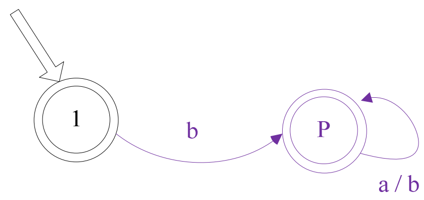


Pour trouver l’AEF A’, il suffit d’inverser les états finaux et non finaux.
Tout état final devient non final
Tout état non final devient final

L’AEF A’ est comme suit :



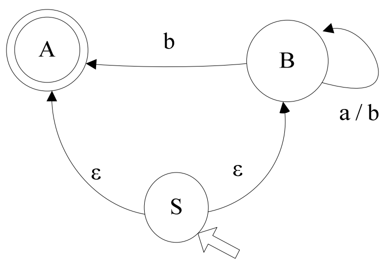
≡



L’AEF A’ réduit.

3. <u>Trouverons la grammaire régulière gauche qui génère L(A’)</u> :

On cherche l’AEF miroir de A’
Soit A’’ l’AEF miroir :



La grammaire GRD équivalente est :

S → A/ B
A→ ε
B→ aB/ bB/ bA

D’où la grammaire régulière gauche qui génère L(A’) est :

La grammaire GRG équivalente est :
S → A/ B
A→ ε
B→ Ba/ Bb/ Ab

<u>Exercice 02</u> : Rattrapage -2011-

Soit l'expression régulière suivante :

$E= (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^*$

Donner l'automate simple déterministe reconnaissant le langage engendré par E.

<u>Correction</u> :

1. <u>Trouvons l'automate simple déterministe reconnaissant le langage défini par E</u> :

(En utilisant la méthode des dérivées)

<u>On a</u> : $E= (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^*$ <u>avec</u> : $X=\{a, b\}$

$E //a = (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* //a$

$= (a \cup b)^* //a \, . \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* \cup b \, a^* a \, (a \cup b)^* //a$

$= (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* \cup \varnothing$

$= E$

$E //b = (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* //b$

$= (a \cup b)^* //b \, . \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* \cup b \, a^* a \, (a \cup b)^* //b$

$= (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* \cup a^* a \, (a \cup b)^*$

$= E_1$

$E_1 //a = [\, (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* \cup a^* a \, (a \cup b)^* \,]//a$

$= (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* //a \cup a^* a \, (a \cup b)^* //a$

$= E//a \cup a \, a^* \, (a \cup b)^* //a$

$= E \cup a^* \, (a \cup b)^*$

$= E_2$

$E_1 //b = [\, (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* \cup a^* a \, (a \cup b)^* \,]//b$

$= (a \cup b)^* \, b \, a^* a \, (a \cup b)^* //b \cup a^* a \, (a \cup b)^* //b$

$= E//b \cup \varnothing$

$= E_1$

$E_2 //a = [E \cup a^* \, (a \cup b)^* \,]//a$

$= E//a \cup a^* (a \cup b)^* //a$

$= E \cup a^* //a (a \cup b)^* \cup (a \cup b)^* //a$

$= E \cup a^*(a \cup b)^* \cup (a \cup b)^*$

$= (a \cup b)^*$

$= E_3$

$E_2 //b = [E \cup a^* (a \cup b)^*]//b$

$= E//b \cup a^* (a \cup b)^* //b$

$= E \cup a^* //b (a \cup b)^* \cup (a \cup b)^* //b$

$= E \cup \varnothing \cup (a \cup b)^*$

$= (a \cup b)^*$

$= E_3$

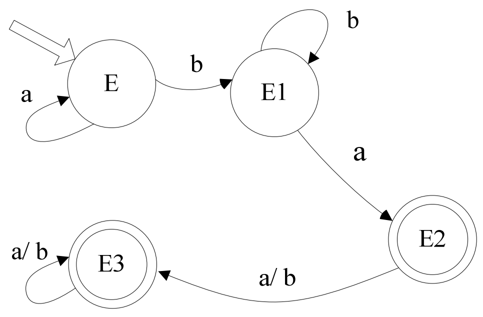
$E_3//a = E_3//b = E_3$

$\varepsilon \in L(E_2)$ et $\varepsilon \in L(E_3) \Rightarrow E_2$ et E_3 sont des états finaux.

- L'automate d'états finis simple déterministe A est défini comme suit :

$A< X=\{a, b\}, S=\{ E, E_1, E_2, E_3\}, F=\{ E_2, E_3\}, II=\{(E, a, E), (E, b, E_1), (E_1, a, E_2), (E_1,b, E_1), (E_2, a, E_3), (E_2, b, E_3), (E_3, a, E_3), (E_3, b, E_3) \}>$

La représentation graphique de l'automate A :



2. La grammaire régulière droite engendrant le langage défini par E :

La grammaire régulière droite équivalente est :

$G <X=\{a, b\}, V=\{S, A, B, C\}, P, S>$ avec :

$P = \{ \quad S \to aS / bA$

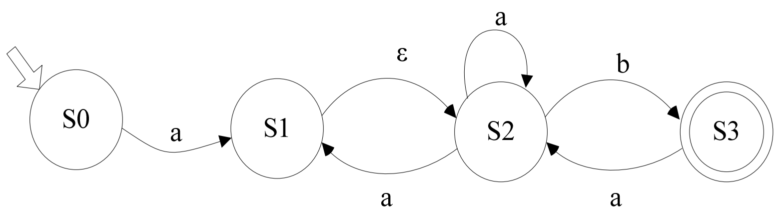
$A \to bA / aB$

$B \to aC / bC / \varepsilon$

$C \to aC / bC / \varepsilon \quad \}$

<u>Exercice 03</u> : Rattrapage -2011-

Soit A l'automate suivant :



1. Donner l'expression régulière du langage L reconnu par A.
2. Donner l'automate simple déterministe reconnaissant L(A).
3. Donner l'automate complément de A.
4. Donner la grammaire régulière gauche engendrant le langage L(A).

<u>Correction</u> :

1. <u>Trouverons l'expression régulière dénotant L</u> :

- Etablissons le système d'équation associé à A :
  On a :

$$\begin{cases} S_0 = a\, S_1 & \ldots.\ (1) \\ S_1 = S_2 & \ldots.\ (2) \\ S_2 = a\, S_2 \cup a\, S_1 \cup b\, S_3 & \ldots.\ (3) \end{cases}$$

$$S_3 = a\, S_2 \cup \varepsilon \qquad \ldots.\ (4)$$

- Résolution du système d'équation établi :

On remplace (4) dans (3) :

$S_2 = a\, S_2 \cup a\, S_1 \cup b\, a\, S_2 \cup b$

$S_2 = (a \cup ba)\, S_2 \cup a\, S_1 \cup b \quad \ldots.\ (5)$

On applique la règle d'Arden, l'équation (5) devient :

$$S_2 = (a \cup ba)^* (a\, S_1 \cup b)$$

$$S_2 = (a \cup ba)^*\, a\, S_1 \cup (a \cup ba)^*\, b \quad \ldots.\ (6)$$

On remplace (6) dans (2) :

$$S_1 = (a \cup ba)^*\, a\, S_1 \cup (a \cup ba)^*\, b$$

$$S_1 = [(a \cup ba)^*\, a]^*\, (a \cup ba)^*\, b \quad \ldots.\ (7)$$

On remplace (7) dans (1) :

$$S_0 = a((a \cup ba)^*\, a)^*\, (a \cup ba)^*\, b$$

$S_0 = a((a \cup ba)^*\, a)^*\, (a \cup ba)^*\, b$ Est l'ER dénotant L.

2. **Trouverons l'automate simple déterministe reconnaissant L(A):**

- Rendre A SIMPLE :

On a :

$S_1 \xrightarrow{\varepsilon} S_2 \xrightarrow{a} S_2$

$S_2 \xrightarrow{b} S_3$

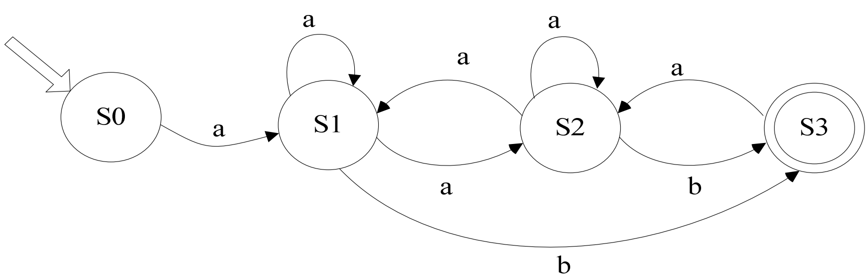
$S_2 \xrightarrow{a} S_1$

Donc, on élimine :

$S_1 \xrightarrow{\varepsilon} S_2$, et on ajoute les transitions suivantes :

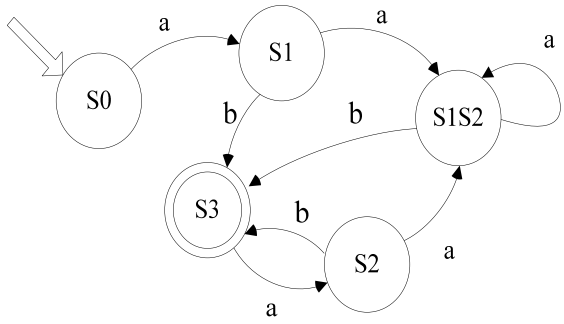
$S_1 \xrightarrow{a} S_2$, $S_1 \xrightarrow{b} S_3$ et $S_1 \xrightarrow{a} S_1$

L'AEF simple est comme suit :



- Rendre A DETERMINISTE :

/		a	b
EI	S_0	S_1	-
	S_1	S_1 S_2	S_3
	S_2	S_1 S_2	S_3
EF	S_3	S_2	-
EI	S_0	S_1	-
	S_1	S_1 S_2	S_3
	S_1 S_2	S_1 S_2	S_3
EF	S_3	S_2	-
	S_2	S_1 S_2	S_3



L'AEF est déterministe

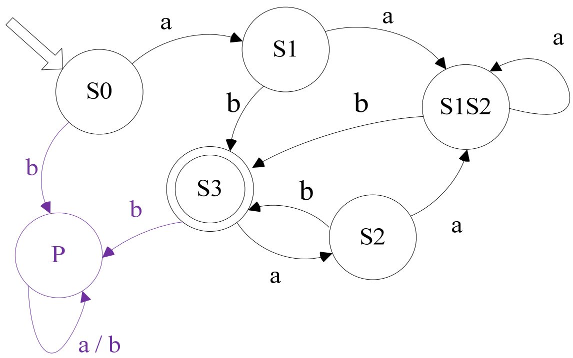
3. Trouverons l'automate A' : l'automate complément de A

Pour trouver l'AEF A', il suffit de :

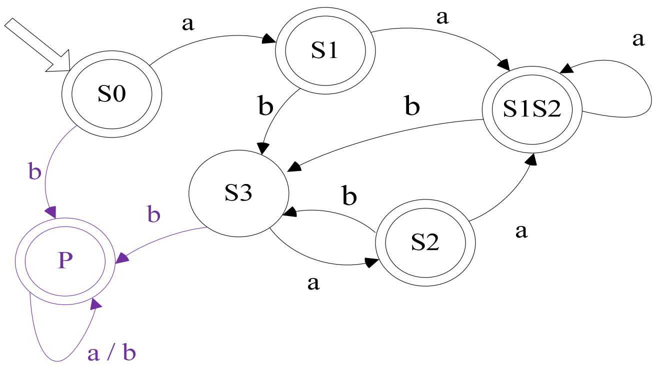
- Rendre A complet.
- Inverser les états finaux et non finaux :
  - Tout état final devient non final
  - Tout état non final devient final

Rendre A COMPLET :

On ajoute un état puits (non co-accessible),



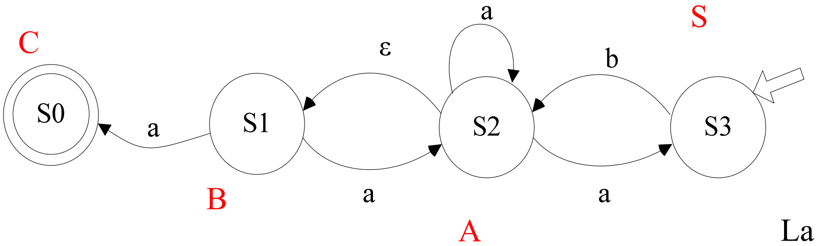
L'AEF A' est comme suit :



4. Trouverons la grammaire régulière gauche qui génère L(A) :

On cherche l'AEF miroir de A

Soit A^R l'AEF miroir :



La grammaire GRD équivalente est :

S $\rightarrow$ bA

A $\rightarrow$ aA/ aS/ B

B$\rightarrow$ aA/ Ac

C$\rightarrow$ ε

D’où la grammaire régulière gauche qui génère L(A) est :

La grammaire GRG équivalente est :

S→ Ab
A→ Aa/ Sa/ B
B→ Aa/ cA
C→ ε