Logique Mathématique
Epreuve de moyenne durée
Durée 1h 30
Tout document interdit

<u>Exercice 1</u> (3,3)

La proposition suivante est-elle valide ?

1. *Si* $\alpha \equiv \beta$ *alors* $\alpha_S \equiv \beta_S$ (α_S et β_S désignent respectivement la forme de Skolem de α et β)

La proposition 1 n'est pas valide. Contre-exemple : $\forall x\exists y\,(P(x) \rightarrow Q(y)) \equiv \exists y\forall x(P(x) \rightarrow Q(y))$. Les deux formules sont des formes prénexe de $\delta : \exists xP(x) \rightarrow \exists yQ(y))$. La forme de Skolem de $\forall x\exists y\,(P(x) \rightarrow Q(y))$ est la formule $\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x)))$ et la forme de Skolem de la formule $\exists y\forall x(P(x) \rightarrow Q(y))$ est la formule $\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x)))$ n'est pas logiquement équivalente à $\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$. Il suffit pour le montrer de donner un modèle qui satisfait l'une mais pas l'autre des deux formules. En voici un exemple :

I de domaine D_I=N telle que : I(P) : pair, I(Q) : impair, I(f) = la fonction successeur et I(a) = 2

***Si* $\alpha_P \equiv \beta_P$ *alors* $\alpha_S \equiv \beta_S$ (α_P et β_P désignent respectivement la forme prenexe de α et β)**

La proposition 2 n'est pas valide non plus. $\alpha_p \equiv \alpha$ (quelle que soit α). Par conséquent, si $\alpha_p \equiv \beta_p$ alors $\alpha \equiv \beta$. Ce qui nous ramène à la proposition 1.

Barême proposition 1

0 si la réponse = valide

1.5 si la réponse = non valide et l'étudiant donne un bon contre-exemple.

[0 -1.5] en fonction de la qualité de la justification.

Barême proposition 2

0 si la réponse = valide

1 si la réponse = non valide et l'étudiant donne un bon contre-exemple.

[0 -2] en fonction de la qualité de la justification.

<u>Exercice 2</u> (6)

Montrer, sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que :

$$\exists x\exists yP(x,y) \rightarrow \forall xQ(x),\ \forall x\exists u\forall y(P(x,y) \rightarrow \neg Q(u)),\ \forall x\exists u\forall y(Q(u) \rightarrow P(x,y)) \vdash \exists x\exists y(\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x))$$

Si et seulement si l'ensemble Γ tel que : **(0.5)**

$\Gamma : \{\exists x\exists yP(x,y) \rightarrow \forall xQ(x),\ \forall x\exists u\forall y(P(x,y) \rightarrow \neg Q(u)),\ \forall x\exists u\forall y(Q(u) \rightarrow P(x,y)),\ \forall x\forall y(P(x,y) \vee Q(x))\}$ est inconsistant.

Ssi l'ensemble S des clauses issu de Γ est inconsistant, ssi il existe une déduction de la clause vide à partir de S.

Mise sous forme clausale des formules de Γ.

Etape 1. On renomme les variables **(0.5)**

$\Gamma' : \{\exists x_1\exists_1 yP(x_1,y_1) \rightarrow \forall z_1Q(z_1),\ \forall x_2\exists u_2\forall y_2(P(x_2,y_2) \rightarrow \neg Q(u_2)),\ \forall x_3\exists u_3\forall y_3(Q(u_3) \rightarrow P(x_3,y_3)),$
$\forall x_4\forall y_4(P(x_4,y_4) \vee Q(x_4))\}$

Etape 2. Mise sous forme prenexe des formules de Γ' : **(0.5)**

Γ_P :{ $\forall x_1 \forall_1 y \forall z_1 (P(x_1,y_1) \rightarrow Q(z_1))$, $\forall x_2 \exists u_2 \forall y_2 (P(x_2,y_2) \rightarrow \neg Q(u_2)))$, $\forall x_3 \exists u_3 \forall y_3 (Q(u_3) \rightarrow P(x_3,y_3))$, $\forall x_4 \forall y_4 (P(x_4,y_4) \vee Q(x_4))$ }

Etape 3. Mise sous forme de Skolem **(0.5)**

Γ_S :{ $\forall x_1 \forall_1 y \forall z_1 (P(x_1,y_1) \rightarrow Q(z_1))$, $\forall x_2 \exists u_2 \forall y_2 (P(x_2,y_2) \rightarrow \neg Q(f(x_2)))$, $\forall x_3 \exists u_3 \forall y_3 (Q(g(x_3)) \rightarrow P(x_3,y_3))$, $\forall x_4 \forall y_4 (P(x_4,y_4) \vee Q(x_4))$ }

Etape 4. Mise sous forme clausale **(0.5)**

S :{ $\neg P(x_1,y_1) \vee Q(z_1)$, $\neg P(x_2,y_2) \vee \neg Q(f(x_2))$, $\neg Q(g(x_3)) \vee P(x_3,y_3))$, $P(x_4,y_4) \vee Q(x_4)$ }

Etape 5. La résolution **(3.5)**

+0.25 pout toute résolution correcte sans aller au-delà de 6.

$C_1 : \neg P(x_1,y_1) \vee Q(z_1)$	
$C_2 : \neg P(x_2,y_2) \vee \neg Q(f(x_2))$	
$C_3 : \neg Q(g(x_3)) \vee P(x_3,y_3))$	
$C_4 : P(x_4,y_4) \vee Q(x_4)$	
$C_5 : \neg P(x_2,y_2) \vee Q(f(x_2))$	$C_1[x_2/x_1, y_2/y_1, f(x_2)/z_1]$
$C_6 : \neg P(x_2,y_2)$	$res(C_5,C_2)$
$C_7 : \neg P(x_4,y_4)$	$C_6[x_4/x_2, y_4/y_2]$
$C_8 : Q(x_4)$	$res(C_4,C_7)$
$C_9 : Q(g(x_3))$	$C_8[g(x_3)/x_4]$
$C_{10} : P(x_3,y_3)$	res (C_9, C_{10})
$C_{11} : P(x_4,y_4)$	$C_{10}[x_4/x_3, y_4/y_3]$
$C_{14} : \square$	res (C_7,C_{11})

<u>Exercice 3</u> (8)

Montrer que l'ensemble des énoncés 1, 2, 3, 4 ci-dessous est inconsistant.

1. Il existe exactement un seul élément vérifiant la propriété P
2. Il existe exactement deux éléments vérifiant la propriété P
3. Si $x = y$ et si $y = z$ alors $x = z$
4. Si $x = y$ alors $y = x$

<u>Ecriture dans le langage des prédicats du 1^er^ ordre</u> :

Nous utiliserons les symboles de prédicats suivants :

$P(x)$: x a la propriété P

$E(x,y)$: x est égal à y

1. **Il existe exactement un seul élément vérifiant la propriété P** **(0,5 point)**

   $\alpha : \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow E(x,y))$
2. **Il existe exactement deux éléments vérifiant la propriété P** **(1 point)**

   $\beta : \exists x \exists y\big(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y) \wedge \forall z(P(z) \rightarrow E(z, x) \vee E(z,y))\big)$
3. **Si $x = y$ et si $y = z$ alors $x = z$** **(0.5 point)**

   $\gamma : \forall x \forall y \forall z(E(x,y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z))$
4. **Si x = y alors y = x** **(0.5 point)**

   $\delta : \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow E(y, x))$

L'ensemble des énoncés est inconsistant ssi l'ensemble Γ : { α, β, γ, δ } est inconsistant.

Etape 1. Mise sous forme prenexe des formules de Γ. **(0.5 point)**

$\alpha_P : \exists x \forall y(P(x) \wedge (P(y) \rightarrow E(x,y))$

$\beta_P : \exists x \exists y \forall z\big(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y) \wedge (P(z) \rightarrow E(z, x) \vee E(z,y))\big)$

$\gamma_P : \forall x \forall y \forall z(E(x,y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z))$

$\delta_P : \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow E(y, x))$

Etape 2. Mise sous forme de Skolem. **(1.5 point)**

$\alpha_P : \forall y(P(a) \wedge (P(y) \rightarrow E(a,y))$

$\beta_P : \forall z\big(P(b) \wedge P(c) \wedge \neg E(b,c) \wedge (P(z) \rightarrow E(z, b) \vee E(z,c))\big)$

$\gamma_P : \forall x \forall y \forall z(E(x,y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z))$

$\delta_P : \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow E(y, x))$

Etape 3. Mise sous forme clausale **(0.5 point)**

S : { $P(a)$, $\neg P(y) \vee E(a,y)$, $P(b)$, $P(c)$, $\neg E(b,c)$, $\neg P(z) \vee E(z, b) \vee E(z,c)$, $\neg E(x,y) \vee \neg E(y, z) \vee E(x, z)$, $\neg E(x,y) \vee E(y, x)$ }

Etape 4. Mise sous forme clausale **(0.5 point)**

S : **{** $P(a)$, $\neg P(y) \vee E(a,y)$, $P(b)$, $P(c)$, $\neg E(b,c)$, $\neg P(z) \vee E(z, b) \vee E(z,c)$, $\neg E(x,y) \vee \neg E(y, w) \vee E(x, w)$, $\neg E(u,v) \vee E(v, u)$ **}**

Etape 5. La résolution **(2 points)**
Noter sur 1 point la résolution si l'ensemble de clauses contient des erreurs

$C_1 : P(a)$

$C_2 : \neg P(y) \vee E(a,y)$

$C_3 : P(b)$

$C_4 : P(c)$

$C_5 : \neg E(b,c)$

$C_6 : \neg P(z) \vee E(z, b) \vee E(z,c)$

$C_7 : \neg E(x,y) \vee \neg E(y, w) \vee E(x, w)$

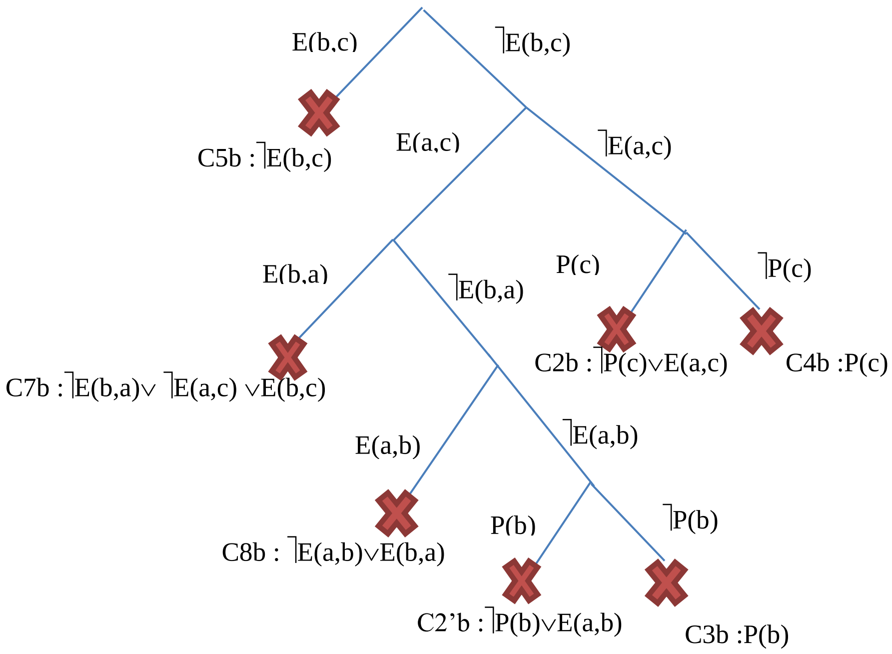
$C_8 : \neg E(u,v) \vee E(v, u)$

$C_9 : \neg P(c) \vee E(a, c)$	$C_2[c/y]$
$C_{10} : E(a, c)$	$Res(C_4, C_9)$
$C_{11} : \neg E(b,y) \vee \neg E(y, c) \vee E(b, c)$	$C_7[b/x, c/w]$
$C_{12} : \neg E(b,y) \vee \neg E(y, c)$	$Res(C_5, C_{11})$
$C_{13} : \neg E(b,a) \vee \neg E(a, c)$	$C_{12}[a/y]$
$C_{14} : \neg E(b,a)$	$Res(C_{10}, C_{13})$
$C_{15} : \neg E(a,b) \vee E(b, a)$	$C_8[a/u, b/v]$
$C_{16} : \neg E(a,b)$	$Res(C_{14}, C_{15})$
$C_{17} : \neg P(b) \vee E(a,b)$	$C_2[b/y]$
$C_{18} : E(a,b)$	$Res(C_3, C_{17})$
$C_{19} : \square$	$Res(C_{16}, C_{18})$

$S \vdash \square \Rightarrow$ S inconsistent $\Rightarrow \Gamma$ inconsistent $\Rightarrow$ l'ensemble des énoncés est inconsistant

<u>Solution Alternative</u> : 2 points

Montrer que S est non satisfiable puis en déduire, en utilisant la propriété de complétude de la résolution que S est inconsistant.



L'arbre sémantique clos de la figure montre l'existence d'un sous-ensemble non satisfiable d'instances de base des clauses de S : {C5b,C7b,C8b,C'2b,C3b,C2b,C4b}. On en déduit (théorème de Herbrand) que S est non satisfiable donc inconsistant (propriété de la complétude de la résolution).