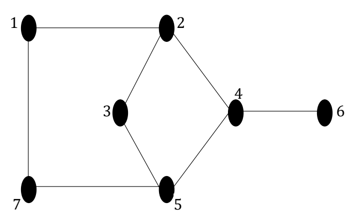
Chapitre 2 : Cheminement dans les Graphes. Série d'exercices de TD.

Présenté par :
H. BENKAOUHA
Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB
haroun.benkaouha@usthb.edu.dz
haroun.benkaouha@gmail.com

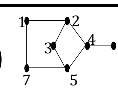
Exercice 1

- Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté, simple et connexe sur n sommets.
  - On note la **longueur** d'une chaîne $\mu(x, y)$ joignant x et y, $|\mu(x, y)|$.
  - L'**écart** entre x et y : $e(x, y)$ est la longueur d'une plus courte chaîne joignant x et y :
    $e(x, y) = \min_{\mu(x,y) \in G} \{|\mu(x,y)|\}$;
    $e(x, x) = 0.$
  - **Ecartement** d'un sommet x, le nombre $E(x) = \max_{y \in X} \{ e(x, y) \}$
  - **Diamètre** de G, le nombre $e(G) = \max_{x,y \in X} \{ e(x, y) \}$
  - **Rayon** de G, le nombre $r(G) = \min_{x \in X} \{E(x)\}$
  - **Centre** de G, un sommet $s \in X$ tel que : $E(s) = r(G)$
- Déterminer le diamètre, le rayon et le ou les centres du graphe suivant.

Exercice 1 - Suite



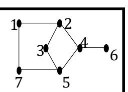
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0						
2		0					
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	
7							0

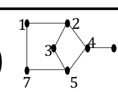
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1					1
2	1	0	1	1			
3		1	0		1		
4		1		0	1	1	
5			1	1	0		1
6				1		0	
7	1				1		0

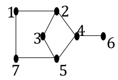
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1			
3	2	1	0		1		
4	2	1		0	1	1	
5	2		1	1	0		1
6				1		0	
7	1				1		0

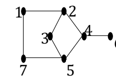
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0		1		
4	2	1		0	1	1	
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2			1		0

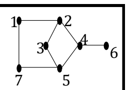
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2	2		1		0

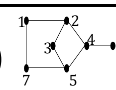
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2	2	2	1		0

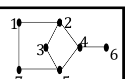
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6		2		1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

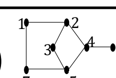
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2		1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

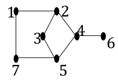
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

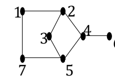
Exercice 1 – Solution (1/3)



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	3
7	1	2	2	2	1	3	0

Exercice 1 – Solution (2/3)

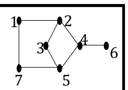


- L'écartement d'un sommet : max ligne ou colonne

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	3
7	1	2	2	2	1	3	0

$E(x)$:	3	2	3	2	2	3	3

Exercice 1 – Solution (3/3)



$E(x)$:	3	2	3	2	2	3	3

- Le diamètre

  $e(G) = 3$
- Le rayon

  $r(G) = 2$
- Les centres

  2, 4 et 5

Exercice 2

- Dans un réseau téléphonique constitué de $2n$ centraux téléphoniques
- Disposés de telle façon que chaque central est relié par une ligne téléphonique directe avec au moins n autres centraux.
- Montrez qu'il est toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.

Exercice 2 – solution (1/7)

- Modélisation : Par un Graphe $G=(X, E)$
  - Chaque central téléphonique i représentée par un sommet i
  - Il y a $2n$ centraux téléphoniques $\Rightarrow$ Il y a $2n$ sommets $\Rightarrow$ Graphe d'ordre $2n$
  - Une arête $\{i,j\}$ « *Les centraux i et j sont reliés par une ligne directe* »
  - Chaque central est relié par une ligne téléphonique directe avec au moins n autres centraux
  - $\Rightarrow \forall x \in X, d_G(x) \geq n$

Exercice 2 - solution (2/7)

- Identification du problème
  - Toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.

  $\Rightarrow$ Il y a une chaîne reliant les sommets correspondants

  $\Rightarrow$ G doit être connexe

Exercice 2 - solution (3/7)

- Identification du problème
  - Revient à montrer que
  - Si un graphe $G=(X, E)$ d'ordre $2n$ tel que $\forall i \in X$, $d_G(x) \geq n$
  - Alors G est connexe

Exercice 2 - solution (4/7)

- On démontre par l'absurde
  - On suppose qu'il existe un graphe $G=(X, E)$ d'ordre $2n$ tel que $\forall i \in X$, $d_G(i) \geq n$ et G n'est pas connexe.

Exercice 2 - solution (5/7)

$\Rightarrow$Il y a au moins 2 *CC* dans G

$\Rightarrow X=C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k\ (k\geq 2)$ et $\forall p\neq q\ C_p \cap C_q=\varnothing$ où chaque C_l ($\forall 1\leq l \leq k$) est une *CC* dans G

$\forall x \in X$, $d_G(x)\geq n$ *et G simple*

$\Rightarrow$ dans une *CC* (C_l $\forall 1\leq l \leq k$), nous avons au moins n+1 sommets, c'est-à-dire le sommet x et tous ses voisins.

Exercice 2 - solution (6/7)

$\Rightarrow \forall\ 1\leq l \leq k,\quad |C_l| \geq n+1$

$\Rightarrow |C_1| +| C_2 | +\ldots +|C_k| \geq k(n+1)$

Sachant que $k\geq 2$ alors $k(n+1) \geq 2(n+1) = 2n+2>2n$

$\Rightarrow |C_1| +| C_2 | +\ldots +|C_k| > 2n = |X|$

Exercice 2 - solution (7/7)

Or, nous avons :

$\Rightarrow \forall\ 1\leq l \leq k,\ |C_l| \leq |X|$

et $|C_1| +| C_2 | +\ldots +|C_k|= |X| =2n$

Car $X=C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k\ (k\geq 2)$ et $\forall p\neq q\ C_p \cap C_q=\varnothing$

- *Contradiction*

Exercice 3

- Soit $G=(X, E)$ un graphe connexe d'ordre $n\geq 2$.
  - Montrons qu'il existe un sommet x
  - tel que :
  - le sous-graphe de G engendré par le sous ensemble de sommets X-{x} est toujours connexe.

Exercice 3 – Solution (1/3)

- On démontre par l'absurde.
- On suppose qu'il existe un graphe $G=(X, E)$ d'ordre $n \geq 2$ mais $\forall x \in X$, G-$\{x\}$ est non connexe.
- En d'autre termes, la suppression de n'importe quel sommet va déconnecter le graphe.
- Soit $\mu = x_0 e_1 x_1 \ldots e_p x_p$
  - La plus longue chaîne dans G.
  - $|\mu| = p$ tel que $p \leq n$.

Exercice 3 – Solution (2/3)

- Selon l'hypothèse de l'absurde, la suppression de n'importe quel sommet va déconnecter le graphe.
- Prenons le sommet x_0.
- $G' = G$-$\{x_0\}$ est non connexe.
- $\mu' = x_1 e_2 x_2 \ldots e_p x_p$ est une chaîne dans G'.

$\Rightarrow C = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ font partie de la même CC.

Exercice 3 – Solution (3/3)

$\Rightarrow \exists y \in X$-$\{x_0\}$ et $y \notin C$ qui n'est pas dans la même CC que les sommets de C.

$\Rightarrow \exists\, e = \{y, x_0\} \in E$ tel que la suppression de x_0 a engendré la suppression de cette arête dans G'.

$\Rightarrow \mu'' = y\, e x_0 e_1 x_1 \ldots e_p x_p$ est une chaîne dans G de longueur $p+1$.

$\Rightarrow |\mu''| > |\mu|$

$\Rightarrow \mu$ n'est pas la plus grande chaîne dans G.

$\Rightarrow$ *Contradiction*

Exercice 3 – 2ème Solution(1/4)

- On démontre par récurrence sur l'ordre du graphe n.
- Cas de base :
  - $n=2$: On a 2 sommets reliés entre eux car G est connexe
  - On supprime l'un d'eux, on obtient un graphe avec un seul sommet
  - Ce genre de graphe est considéré comme connexe
  - C'est vérifié

Exercice 3 - 2ème Solution(2/4)

- On démontre par récurrence sur l'ordre du graphe n.
- Hypothèse de récurrence :
  - On suppose que pour un graphe d'ordre $n \leq p$ connexe, il existe un sommet x que si on le supprime le graphe reste connexe.
- Pas de récurrence
  - Démontrons pour $n=p+1$

Exercice 3 - 2ème Solution(3/4)

- Il s'agit d'un graphe d'ordre p auquel on a rajouté un sommet.
- On a 2 cas, soit le graphe d'ordre p est connexe, soit le graphe d'ordre p n'est pas connexe.
- Si le graphe d'ordre p est connexe, il suffit de supprimer le sommet qu'on a rajouté.

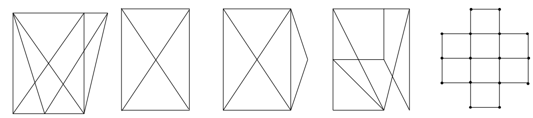
Exercice 3 - 2ème Solution(4/4)

- Si le graphe d'ordre p n'est pas connexe, alors le sommet qui a été rajouté permet de relier les différentes CC
- Dans ce cas, chaque sous graphe engendré par une CC vérifie l'hypothèse de récurrence car il est connexe et d'ordre $<p$
- Donc il existe un sommet qu'on eut supprimer sans déconnecter le graphe.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 31

Exercice 4

- *Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !...) ? Pourquoi ?*



Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 32

Exercice 4 – Solution (1/10)

- Modélisation
  - On représente chacune des 5 figures par un graphe $G_i=(X_i, E_i)$ tel que i=1 à 5
  - Chaque point extrémité d'un trait est représenté par un sommet.
  - Chaque trait ou segment de trait reliant 2 points d'extrémités est représenté par une arête.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 33

Exercice 4 - Solution (2/10)

- Identification du problème
  - Tracer une figure sans lever le crayon : parcourir tout le graphe (toutes les arêtes) en passant d'une arête à une autre qui lui est adjacente.
  - C'est-à-dire tracer une chaîne qui passe par toutes les arêtes du graphe.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 34

Exercice 4 - Solution (3/10)

- Identification du problème
  - Sans passer deux fois sur le même trait $\Rightarrow$ Ne pas passer par la même arête plus d'une fois $\Rightarrow$ Chaîne simple
  - Chaîne simple qui passe par toutes les arêtes $\Rightarrow$ Chaîne Eulérienne
  - Le problème revient à vérifier pour chacun des graphes G_i s'il admet une chaîne Eulérienne.

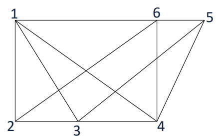
Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 35

Exercice 4 - Solution (4/10)

- Résolution
  - Selon le théorème d'Euler, G_i doit être connexe (à des sommets isolés près) et doit avoir 0 ou 2 sommets de degrés impairs.
  - Tous les graphes sont connexes.
  - La solution revient à vérifier la parité des degrés des sommets de chacun des graphes.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 36

Exercice 4 - Solution (5/10)

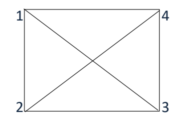


– $d_G(1)$, $d_G(3)$, $d_G(4)$, $d_G(6)$ sont pairs et $d_G(2)$, $d_G(5)$ sont impairs

$\Rightarrow$ 2 sommets de degrés impairs $\Rightarrow$ Possible

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 37

Exercice 4 - Solution (6/10)



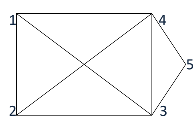
– $d_G(1)$, $d_G(2)$, $d_G(3)$, $d_G(4)$ sont impairs

$\Rightarrow$Plus de 2 sommets de degrés impairs

$\Rightarrow$ Impossible

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 38

Exercice 4 - Solution (7/10)



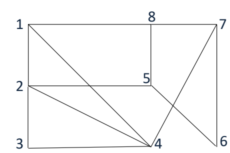
– $d_G(3)$, $d_G(4)$, $d_G(5)$ sont pairs et $d_G(1)$, $d_G(2)$ sont impairs

$\Rightarrow$2 sommets de degrés impairs

$\Rightarrow$ Possible

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 39

Exercice 4 - Solution (8/10)



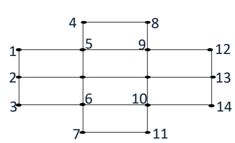
– $d_G(1)$, $d_G(5)$, $d_G(7)$, $d_G(8)$ sont impairs

$\Rightarrow$Plus de 2 sommets de degrés impairs

$\Rightarrow$ Impossible

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 40

Exercice 4 - Solution (9/10)



$\Rightarrow$2 sommets de degrés impairs (2 et 13)

$\Rightarrow$ Possible

– **Remarque 1. :** Au moins un sommet parmi les sommets 5, 6, 9 et 10 doit être pris en considération, sinon le graphe ne sera pas connexe.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 41

Exercice 4 - Solution (10/10)

- **Remarque 2. :**
  – Les points d'intersection entre deux ou plusieurs traits, peut-on les prendre comme sommets? Si oui, qu'est ce qui va changer?
  – Dans le G_5, au moins un est obligatoire. (voir remarque 1)
  – En général c'est facultatif : On peut les prendre comme sommets.
  – Ça ne change rien à ce problème, car leurs degrés seront pairs.

Dr. H. BENKAOUHA - Faculté d'Informatique (USTHB) 42

Exercice 5

- Soit G un graphe non eulérien.
- Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes ?

Exercice 5 – Solution (1/3)

- Oui, il est possible de rendre G eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes comme suit :
  - **Etape 1 :** S'assurer que le graphe est connexe
  - **Etape 2 :** S'assurer que tous les degrés deviennent pairs car un graphe est Eulérien Ssi il admet un cycle Eulérien.

Exercice 5 – Solution (2/3)

- **Etape 1 :**
  - Toutes les composantes connexes (CC) on les relie avec une arête.
  - C'est-à-dire si on a p CC, on va ajouter $p-1$ arêtes.
- **Etape 2 :**
  - Pour toute paire de sommets de degrés impairs on les relie avec une arête.
  - C'est-à-dire si on a k (qui est pair) sommets de degrés impairs, on va ajouter $k/2$ arêtes.

Exercice 5 – Solution (3/3)

```
Pour k de 2 à p
  Faire
    x ← choisir_sommet(CC_{k-1})
    y ← choisir_sommet(CC_k)
    Créer_arête({x,y})
  Fait
i← 1
Répéter
    Tant Que (i<=N) et (d_G(i) pair)
      Faire    i← i+1;    Fait
    Si (i<N) Alors
        x ← i;       i← i+1
        Tant Que (i<=N) et (d_G(i) pair)
          Faire    i← i+1;    Fait
        y ← i;       i← i+1
        Créer_arête({x,y})
    fSi
Jusqu'à (i=N);
```


Exercice 6

- Soit le graphe orienté $G=(X,U)$ représenté dans le tableau ci-dessous par le dictionnaire des prédécesseurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
Prédécesseurs de x	3, 7	4, 6	5	1	1	7, 8	5	2

1. Donner la matrice d'adjacence M du graphe G. Représenter sous forme de listes LS et PS.
2. G est-il connexe. Justifier.
3. G admet-il un parcours Eulerien ? Pourquoi ?
4. Donner la matrice de fermeture transitive du graphe G. G admet-il un circuit ?
5. Trouver les cfc de G. Donner le graphe réduit.

Exercice 6 – Solution (1/11)

- Matrice d'adjacence :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0

Remarque : Attention, liste prédécesseurs et non successeurs

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (haroun.benkaouha@usthb.edu.dz)

Exercice 6 - Solution (2/11)

- Représentation par listes :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PS	1	3	4	5	6	8	9	11	12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
LS	4	5	8	1	2	3	7	2	1	6	6

Exercice 6 - Solution (3/11)

- Connexité :
  - Algorithme de connexité :

  Sommet de départ : 1

  C={1}

  On rajoute les voisins de 1

  *V(1)={*3, 4, 5, 7*}*

  *C={*1, 3, 4, 5, 7*}*. On marque le sommet 1.

Exercice 6 – Solution (4/11)

*C={*1, 3, 4, 5, 7*}*

On choisit un sommet non marqué de *C* : 7

On rajoute les voisins de 7

*V(7)={*1, 5, 6*}*

*C={*1, 3, 4, 5, 6, 7*}*. On marque le sommet 7.

Exercice 6 - Solution (5/11)

*C={*1, 3, 4, 5, 6, 7*}*

On choisit un sommet non marqué de *C* : 6

On rajoute les voisins de 6

*V(6)={*2, 7, 8*}*

*C={*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8*}*. On marque le sommet 6.

C=X $\Rightarrow$ Fin Algo.

G est connexe.

Exercice 6 - Solution (6/11)

- On vérifie si G admet un parcours Eulérien :
  - Calculons les degrés :

	1	2	3	4	5	6	7	8	d_G^+
1	0	0	0	1	1	0	0	0	2
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0	1	0	2
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0	1	0	0	2
8	0	0	0	0	0	1	0	0	1
d_G^-	2	2	1	1	1	2	1	1	

Exercice 6 - Solution (7/11)

- $d_G(2)=1+2=3$
- $d_G(5)=2+1=3$
- $d_G(6)=1+2=3$
- Plus de deux (2) sommets de degrés impairs
- $\Rightarrow$ *G* n'admet pas de chaine Eulérienne
- $\Rightarrow$ *G* n'admet aucun parcours Eulérien

Exercice 6 - Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  – Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1							
4		1						
5			1				1	
6		1						
7	1					1		
8						1		

Exercice 6 – Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  – Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						
5			1				1	
6		1						
7	1			1	1	1		
8						1		

Exercice 6 - Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  – Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						1
5			1				1	
6		1						1
7	1			1	1	1		
8						1		

Exercice 6 – Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  – Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						1
5	1		1	1	1		1	
6		1						1
7	1			1	1	1		
8						1		

Exercice 6 - Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  – Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1		1	1			1
2								1
3	1	1		1	1			1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1						1
7	1	1		1	1	1		1
8						1		

Exercice 6 – Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  – Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1		1	1
2								1
3	1	1	1	1	1		1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8						1		

Exercice 6 – Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1		1	1
2								1
3	1	1	1	1	1		1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

Exercice 6 – Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2								1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

Exercice 6 – Solution (8/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1				1		1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1				1		1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1				1		1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

Exercice 6 – Solution (9/11)

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	1	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	1	0	0	0	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1

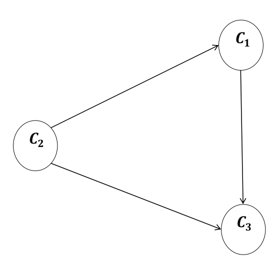
  - Oui, G admet un circuit car il y a des 1 sur la diagonale.

Exercice 6 – Solution (10/11)

- Les CFCs :
  - $C_1=\{4\}$ car 0 sur la diagonale
  - Lignes identiques (sauf 4) :
    $Lg_1=\{1, 3, 5, 7\}$
    $Lg_2=\{2, 6, 8\}$
  - Colonnes identiques (sauf 4) :
    $Cl_1=\{2, 6, 8\}$
    $Cl_2=\{1, 3, 5, 7\}$
    $\Rightarrow$
  - $C_2=\{1, 3, 5, 7\}$ et $C_3=\{2, 6, 8\}$

Exercice 6 – Solution (11/11)

- Le graphe réduit :



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA (haroun.benkaouha@usthb.edu.dz)

Exercice 7

- On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

1. En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
2. Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
3. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
4. Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Exercice 7 - Solution (1/7)

- Modélisation :
  - Graphe non orienté $G=(X, E)$ d'ordre n et de taille m
  - Chaque face (chaque numéro) i par un sommet i
  - Chaque domino (pièce) qui est constitué de deux faces (i et j) par une arête $\{i, j\}$
  - $n=5$

Exercice 7 - Solution (2/7)

1. Nombre de dominos
   - Correspond au nombre d'arêtes dans le graphe
   - Pas de dominos doubles ⇒Pas de boucles
   - Chaque pièce est unique (combinaison unique de deux numéros) ⇒Pas d'arêtes parallèles
   - ⇒ G est <u>simple</u>
   - Dans un jeu de dominos, nous avons toutes les combinaisons de faces possibles
   - Tous les sommets sont reliés entre eux
   - ⇒ G est <u>complet</u>

Exercice 7 - Solution (3/7)

1. Nombre de dominos
   - G simple et complet, $\forall i \in x$, $d_G(x)=n$-1
   - ⇒ $n(n\text{-}1) = 2m$
   - ⇒ $m= n(n\text{-}1)/2$
   - ⇒ $m=5(5\text{-}1)/2$
   - ⇒ $m=10$
   - ⇒ Il y a 10 dominos

Exercice 7 - Solution (4/7)

2. On montre que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée.
   - Règle de contact des dominos : contacter 2 dominos à travers les faces ayant le même numéro.
   - 2 arêtes adjacentes ⇒ former une chaîne
   - Les arranger en boucle fermée ⇒chaîne fermée
   - Vu qu'on utilise chaque domino une seule fois ⇒ Chaque arête est utilisée une seule fois dans la chaîne ⇒ Chaîne fermée et simple ⇒cycle
   - Utiliser tous les dominos ⇒ cycle Eulérien

Exercice 7 - Solution (5/7)

2. On montre que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée.
   - Revient à montrer que G admet un cycle Eulérien
   - Chaque sommet est degré $n–1 = 5–1 = 4$
   - Tous les sommets sont degrés pairs ⇒ Pas de sommets de degrés impairs, de plus le graphe est connexe (car il est complet) ⇒ G admet une chaîne Eulérienne selon le théorème d'Euler et cette chaîne est un cycle (0 sommets de degrés impairs).

Exercice 7 - Solution (6/7)

3. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
   - Les dominos doubles sont représentés par des boucles.
   - Une boucle fait augmenter le degré d'un sommet de 2, ce qui ne change pas la parité de son degré.
   - De ce fait, le nombre de sommets de degrés impairs ne change pas.

Exercice 7 - Solution (7/7)

4. Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?
   - Chaque sommet est de degré $n-1$
   - Il faut que $n-1$ soit pair
   - C'à.d. $n-1=2k$ où k est un entier ≥ 0
   - $\Rightarrow n=2k+1$
   - $\Rightarrow$ n doit être impair
   - $\Rightarrow$ Le plus grand numéro des faces doit être impair

Exercice 8

- Soit un tournoi de volley-ball regroupant n clubs.
  - Chaque club affronte un autre exactement une (1) seule fois.
  - On veut représenter à travers un graphe les résultats de ce tournoi.
  - Sachez qu'en volley-ball il n'y a pas de score d'égalité.

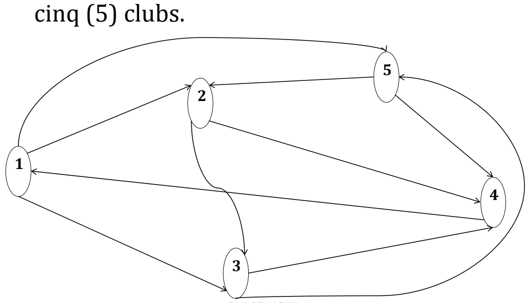
1. Modéliser (sans dessiner) le problème. Puis dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.
2. Est-il possible de trouver une situation où le club C_1 a gagné contre C_2 et C_2 a battu C_3 et ainsi de suite jusqu'à C_{n-1} a gagné contre C_n ? Justifier. (C_i est un club quelconque)
3. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus C_n a gagné contre C_1.

Exercice 8 - Solution (1/5)

1. Modéliser (sans dessiner) le problème.
   - Par un graphe orienté $G=(X, U)$
   - Chaque sommet représente un club
   - Chaque arc (i, j) représente le résultat du match entre les clubs i et j : i « a gagné contre » j.
   - Le graphe est complet car tous les clubs s'affrontent entre eux.
   - Le graphe est simple car tous les clubs s'affrontent une seule fois (pas d'arêtes parallèles) et un club ne peut pas affronter lui-même (pas de boucles).

Exercice 8 - Solution (2/5)

1. Dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.



Exercice 8 - Solution (3/5)

2. Est-il possible de trouver une situation où le club C_1 a gagné contre C_2 et C_2 a battu C_3 et ainsi de suite jusqu'à C_{n-1} a gagné contre C_n ? Justifier. (C_i est un club quelconque)

- Ceci revient à avoir des arcs :
  - (1, 2), (2, 3) … (n-1, n)

Exercice 8 - Solution (4/5)

- En d'autres termes avoir un chemin dans G
  - γ=1 2 3 … n-1 n : élémentaire de longueur n-1 (passant par tous les sommets) $\Rightarrow$ Chemin Hamiltonien
  - On sait que G est un graphe simple et complet d'ordre $n \Rightarrow G$ est un tournoi T_n.
  - On sait que tout tournoi admet un chemin Hamiltonien

  $\Rightarrow$ C'est possible

Exercice 8 - Solution (5/5)

3. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus C_n a gagné contre C_1.

- Cette situation correspond à un circuit Hamiltonien dans G
- On sait qu'un tournoi T_n fortement connexe admet un circuit Hamiltonien.
- Il faut que le graphe associé soit fortement connexe

Exercice 9

- Démontrer que si deux sommets $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y} \in$ à une même composante fortement connexe $\boldsymbol{C}$, alors tout chemin de $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{y}$ est entièrement inclus dans $\boldsymbol{C}$.

Exercice 9 - Solution (1/2)

- On démontre par l'absurde
- On suppose qu'on a un graphe G qui admet au moins 2 CFCs C et C'
- x et $y \in C$ et $z \in C'$
- Tel qu'on a un chemin de x vers y qui passe par z
- $\gamma = x \dots z \dots y$

$\Rightarrow x\alpha z$…(1) et $z\alpha y$…(2)

- x et y dans la même CFC

$\Rightarrow x\alpha y$…(3) et $y\alpha x$…(4)

Exercice 9 - Solution (2/2)

- $x\alpha z$…(1)
- $z\alpha y$…(2)
- $x\alpha y$…(3)
- $y\alpha x$…(4)
- De (2) et (4) et par transitivité $\Rightarrow z\alpha x$…(5)
- De (1) et (5), on a z dans la même CFC que x

$\Rightarrow z \in C$ et sachant que $z \in C'$

$\Rightarrow z \in C \cap C' \Rightarrow C \cap C' \neq \phi$

$\Rightarrow$Contradiction