

Chapitre 6 : Les flots

Série d'exercices de TD

avec Corrigé

Présenté par :

H. BENKAOUHA

Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB

haroun.benkaouha@usthb.edu.dz

haroun.benkaouha@gmail.com

Exercice 1

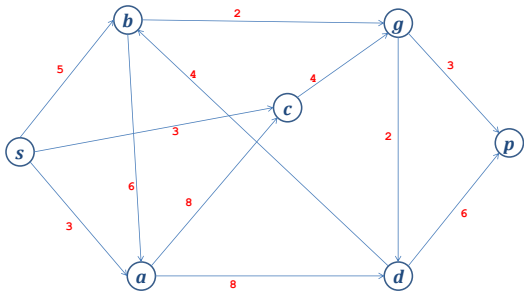
- Soit le réseau de transport ci-dessous (entre parenthèses les capacités des arcs). Trouver le flot maximal. :

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

2

Exercice 1 – Suite



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

3

Exercice 1 – Solution (1/11)

- Le réseau donné est un réseau de transport car :
 - Il s'agit d'un graphe orienté valué
 - Tous les poids (capacités) sont ≥ 0
 - Il y a une seule source s (entrée du réseau)
 - Il y a un seul puits p (sortie du réseau)
- Pour appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson afin de trouver le flot maximal, il nous faut un flot initial compatible.
- Prenons le flot 0 partout.

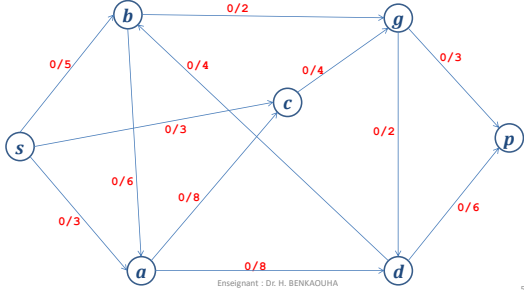
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

4

Exercice 1 – Solution (2/11)

- Initialisation



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

5

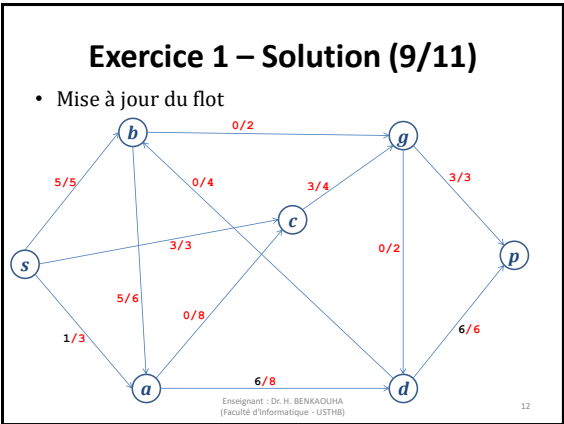
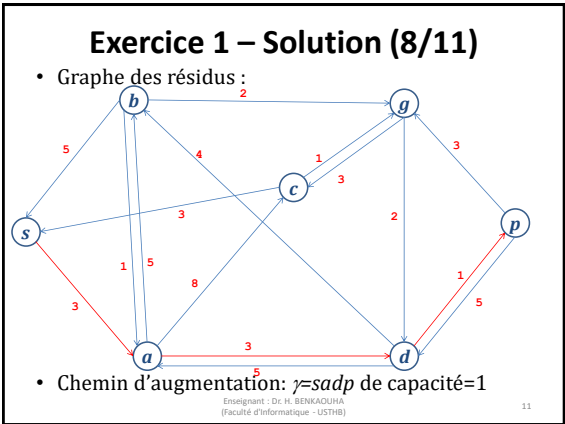
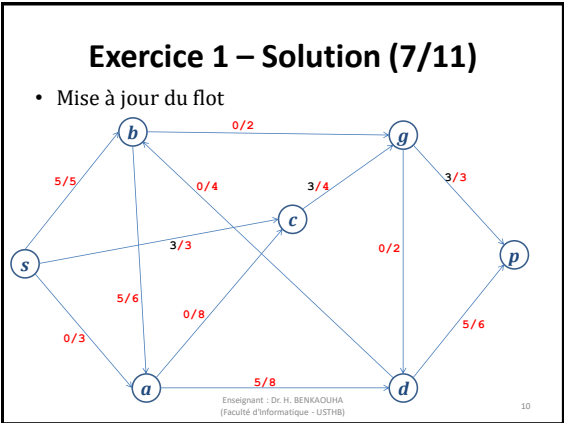
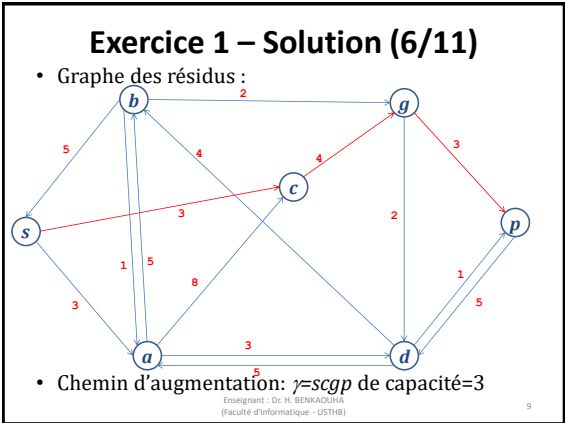
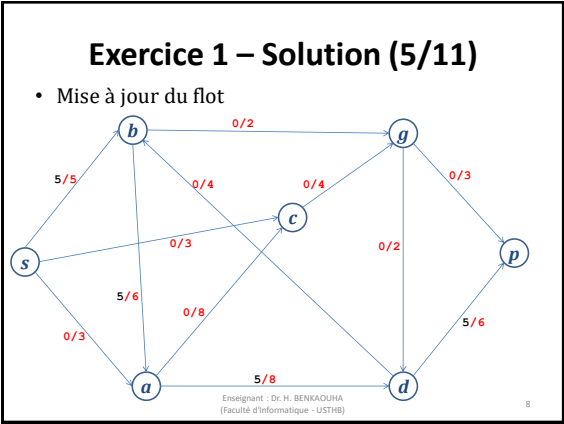
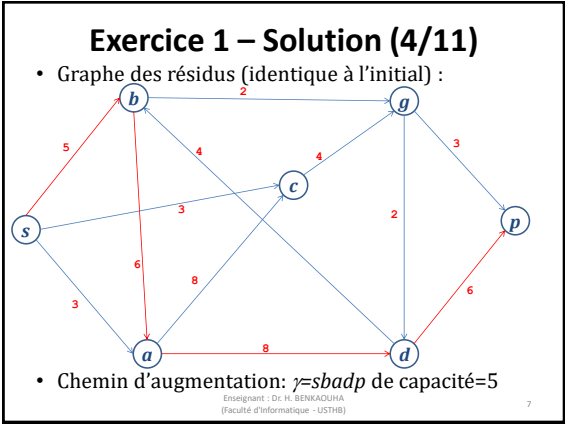
Exercice 1 – Solution (3/11)

- On aurait pu initialiser à un flot compatible différent de 0.
- Ça se fait par affectation avec tâtonnement.
- Il faut vérifier que :
 - La somme des flux sortant de l'entrée = la somme des flux entrant à la sortie.
 - Pour chaque autre sommet : la somme des flux entrants = la somme des flux sortants.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

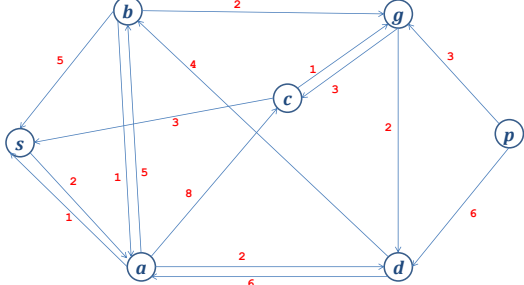
(Faculté d'Informatique - USTHB)

6



Exercice 1 – Solution (10/11)

- Graphe des résidus :



- Chemin d'augmentation: Aucun chemin de s vers p

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

13

Exercice 1 – Solution (11/11)

- Le flot obtenu est maximal (sortant de l'entrée s = entrant à la sortie $p = 9$)
- Remarques :
 - La solution obtenue n'est pas nécessairement la seule et unique.
 - Il est possible de trouver d'autres solutions avec un flot de 9.
 - Ce qui fait varier la solution optimale est : le flot initial et le choix du chemin d'augmentation à chaque itération.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

14

Exercice 2

- Une ville F est alimentée en eau grâce à des réservoirs situés dans 3 villes (A , B et C).
- Chaque réservoir est alimenté à partir de différentes sources (nappes souterraines, châteaux d'eau, ...) comme suit :
 - $10000\text{ m}^3/\text{jour}$ pour A et C
 - $1\,000\text{ m}^3/\text{jour}$ pour B .

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

15

Exercice 2 – Suite

- Le réseau de distribution reliant la ville F aux réservoirs passe par plusieurs points qui sont reliés entre eux à travers des canalisations de différentes capacités selon le tableau suivant :

Point de départ	A	A	B	C	C	D	E	E
Point d'arrivée	C	D	D	B	E	F	A	F
Capacité du canal (en milliers de m^3)	2	4	5	4	11	7	3	13

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

16

Exercice 2

- Modélisation :
 - Par un réseau de transport
 - Chaque ville représenté par un sommet A à F .
 - On rajoute un sommet e représentant les différentes sources. C'est l'entrée du réseau.
 - F est la sortie du réseau.
 - Chaque canalisation est représentée par un arc.
 - La capacité de la canalisation représente la capacité (poids) de l'arc correspondant. L'unité est 1000m^3 .

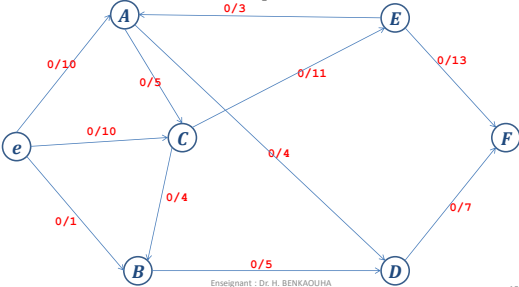
Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

17

Exercice 2 – Solution (1/13)

- Initialisation du flot à 0 partout



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA

(Faculté d'Informatique - USTHB)

18

Exercice 2 – Solution (2/13)

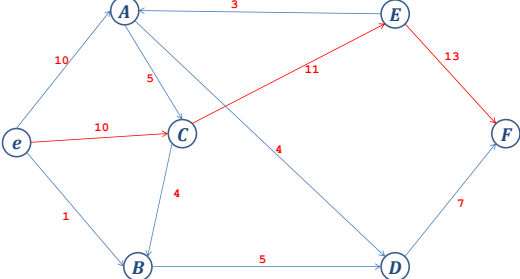
- On aurait pu initialiser à un flot compatible différent de 0.
- Ça se fait par affectation avec tâtonnement.
- Il faut vérifier que :
 - La somme des flux sortant de l'entrée = la somme des flux entrant à la sortie.
 - Pour chaque autre sommet : la somme des flux entrants = la somme des flux sortants.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

19

Exercice 2 – Solution (3/13)

- Graphe des résidus (identique à l'initial) :



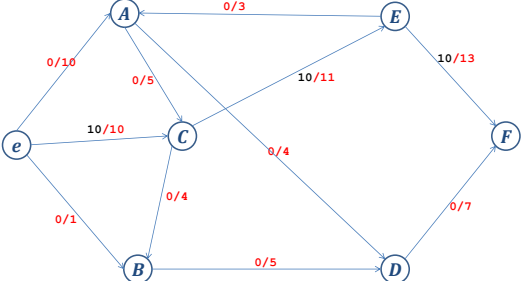
- Chemin d'augmentation: $\gamma = eCEF$ de capacité=10

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

20

Exercice 2 – Solution (4/13)

- Mise à jour du flot

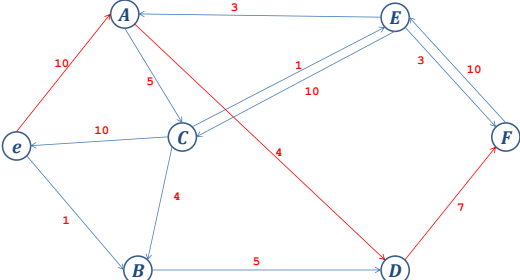


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

21

Exercice 2 – Solution (5/13)

- Graphe des résidus :



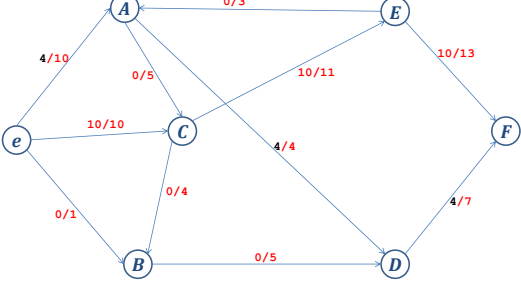
- Chemin d'augmentation: $\gamma = eADF$ de capacité=4

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

22

Exercice 2 – Solution (6/13)

- Mise à jour du flot

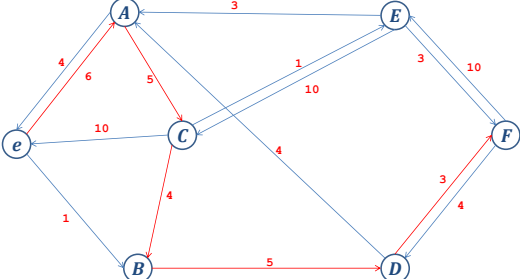


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

23

Exercice 2 – Solution (7/13)

- Graphe des résidus :



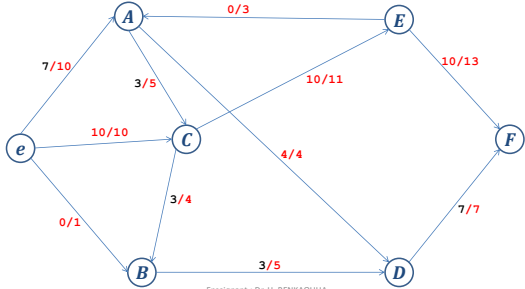
- Chemin d'augmentation: $\gamma = eACBDF$ de capacité=3

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

24

Exercice 2 – Solution (8/13)

- Mise à jour du flot

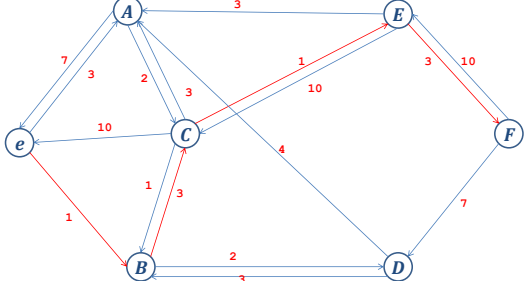


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

25

Exercice 2 – Solution (9/13)

- Graph des résidus :



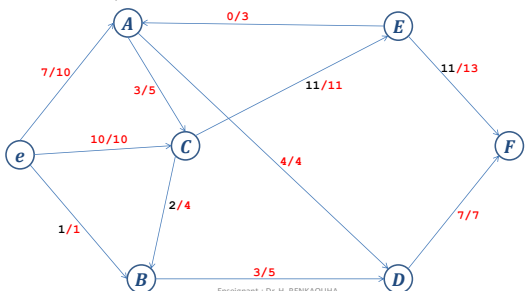
- Chemin d'augmentation: $\gamma = eBCE F$ de capacité=1

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

26

Exercice 2 – Solution (10/13)

- Mise à jour du flot



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

27

Exercice 2 – Solution (11/13)

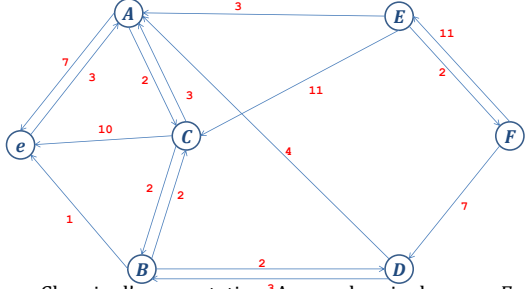
- Pour l'arc (C, B)
 - On décrémente le flux de 1
 - Car il est pris dans le sens inverse sur le chemin d'augmentation.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

28

Exercice 2 – Solution (12/13)

- Graph des résidus :



- Chemin d'augmentation: Aucun chemin de e vers F

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

29

Exercice 2 – Solution (13/13)

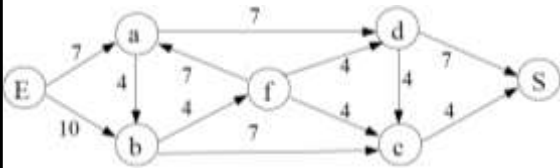
- Le flot obtenu est maximal (sortant de l'entrée e = entrant à la sortie F = 18)
- La quantité journalière acheminée vers la ville F est de 18 000 m^3 .

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

30

Exercice 3

- Soit le réseau de transport ci-dessous ayant comme entrée (source) le sommet *E* et comme sortie (puits) le sommet *S*.

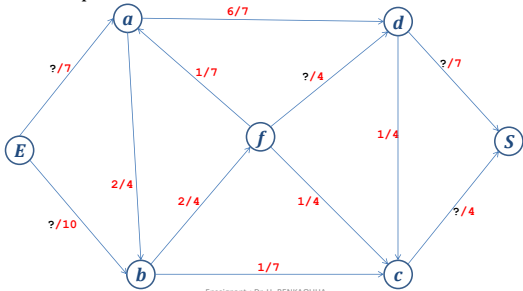


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

31

Exercice 3 – Suite

- Compléter le flot



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

32

Exercice 3 – Solution (1/13)

- Nous devons résoudre le système d'équations suivant (loi de Kirchhoff au niveau des sommets) :

$c_{Ea} + 1 = c_{ab} + c_{ad}$

$c_{Eb} + 2 = 2 + 1$

$1 + 1 + 1 = c_{cS}$

$6 + c_{fd} = 1 + c_{dS}$

$2 = 1 + 1 + c_{fd}$

- De plus, il faut vérifier entre l'entrée et la sortie :

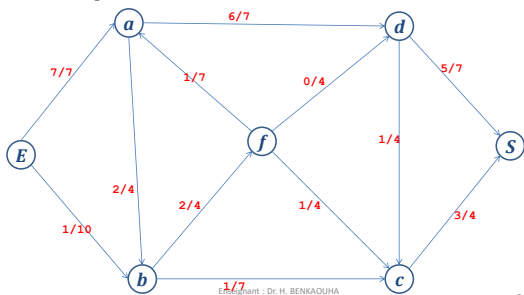
$c_{Ea} + c_{Eb} = c_{dS} + c_{cS}$

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

33

Exercice 3 – Solution (2/13)

- Compléter le flot



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

34

Exercice 3 – Solution (3/13)

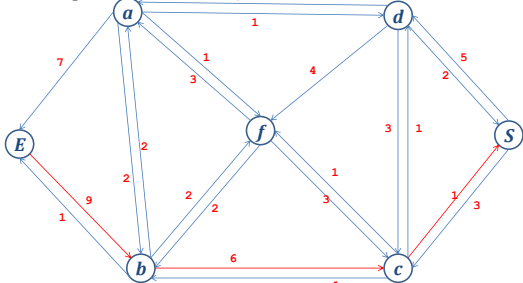
- Pour vérifier si le flot est maximal ou non,
 - Nous devons tracer le graphe des résidus
 - Vérifier s'il y a ou non chemin d'augmentation de l'entrée du réseau (*E*) vers la sortie du réseau (*S*)

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

35

Exercice 3 – Solution (4/13)

- Graphe des résidus



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

36

Exercice 3 – Solution (5/13)

- Il y a au moins un chemin d’augmentation.
- Par exemple :
 - $\gamma=EbcS$ de capacité=1
- Donc : Le flot n’est pas maximal.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

37

Exercice 3 – Solution (6/13)

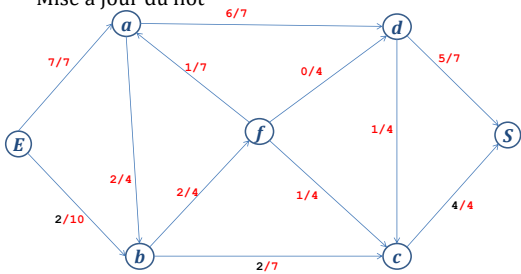
- Application de l’algorithme de Ford-Fulkerson
- A partir :
 - Du flot obtenu en $Q1$
 - et
 - Du graphe de résidus et le chemin d’augmentation obtenu en $Q2$
- Continuons l’algorithme.

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

38

Exercice 3 – Solution (7/13)

- Mise à jour du flot

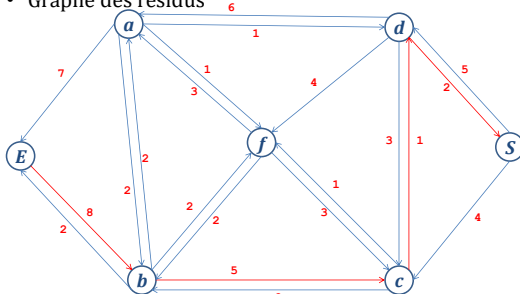


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

39

Exercice 3 – Solution (8/13)

- Graphe des résidus



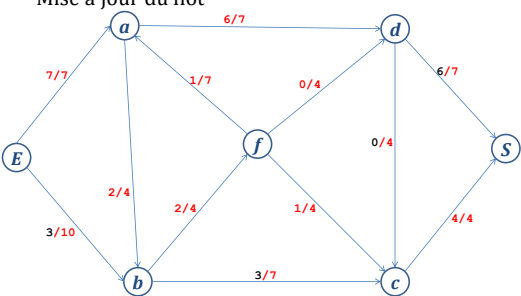
- Chemin d’augmentation : $\gamma=EbcdS$ de capacité=1

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

40

Exercice 3 – Solution (9/13)

- Mise à jour du flot

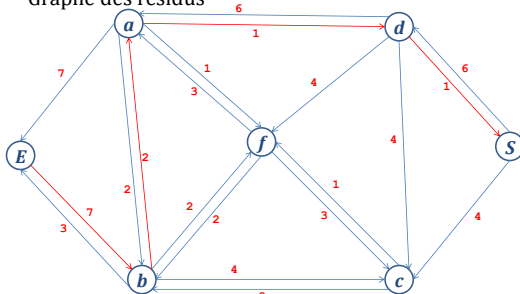


Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

41

Exercice 3 – Solution (10/13)

- Graphe des résidus

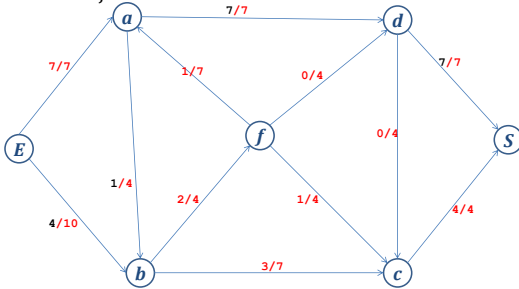


- Chemin d’augmentation : $\gamma=EbadS$ de capacité=1

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

42

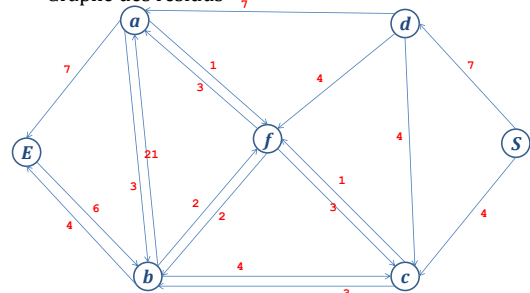
- Mise à jour du flot



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

43

- Graphe des résidus



Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

44

Exercise 3 – Solution (13/13)

- Le flot obtenu est maximal.

\Rightarrow Sortant de l'entrée E

= entrant à la sortie F

= 11

Enseignant : Dr. H. BENKAOUHA
(Faculté d'Informatique - USTHB)

45