Complément de cours d'Analyse Numérique destiné à la section Acad B l2 proposé par

Dr Djamila Dahmani

Ordre de convergence

Définition1

Soit une suite $(x_k)_{k\in N}$de réels convergeant vers une limite ζ. On dit que cette suite est convergente vers ζ avec un ordre r,($r > 1$) s'il existe un réel $\mu > 0$ appelé constante asymptotique d'erreur , tel que :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \zeta.|}{|x_k - \zeta.|^r} = \mu$$

Dans le cas particulier où $r = 1$ la convergence est dite linéaire. Si elle est d'ordre 2 elle dite quadratique et d'ordre 3 cubique.

Remarque

Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de ℝ, et soit la suite $(x_k)_{k\in N}$ définie par $x_{k+1} = g(x_k)$ convergeant vers ζ. Si $g(x)$ est une fonction de classe p sur $[a, b]$ ($g \in C^p[a, b]$) et si $g^{(i)}(\zeta) = 0$ pour $i = 1, \dots, p-1$, et $g^{(p)}(\zeta) = 0$ alors la suite $(x_k)_{k\in N}$ est d'ordre de convergence égal à p.

Preuve

$x_{k+1} - \zeta = g(x_k) - g(\zeta) =$
$g'(\zeta)(x_k - \zeta) + g''(\zeta)\frac{(x_k-\zeta)^2}{2!} + \cdots + g^{(p-1)}(\zeta)\frac{(x_k-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!} + g^{(p)}(\varepsilon_k)\frac{(x_k-\zeta)^p}{p!}$. ε_k compris entre x_k et ζ. Donc :

$\mathbf{lim}_{k\to+\infty} \left|\frac{x_{k+1-\zeta}}{(x_k-\zeta)^p}\right| = \frac{|g^{(p)}(\zeta)|}{p!} = \mu >_{\neq} 0.$

Si cette caractérisation est parfaitement adaptée à plusieurs méthodes, dans certains cas la limite de l'énoncé de la définition 1 en supra n'existe pas dans ce cas on étend le concept par une autre définition :

Définition 2

On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in N}$ de réels converge avec un ordre au moins égal à $r \geq 1$ vers une limite ζ, s'il existe une suite de réels positifs $(v_k)_{k\in N}$ telle que :

1) $|x_k - \zeta| \leq v_k$
2) $\lim_{k\to+\infty} \frac{v_{k+1}}{{v_k}^r} = v$ ($v > 0$).

Interprétation de la notion d'ordre

La notion d'ordre ainsi que celle de la constante asymptotique ne sont pas purement théorique et sont en relation avec le nombre de chiffres exactes obtenus pour l'approximation de ζ.

En effet si $\delta^{(k)}$ est le nombre de chiffres exacts obtenus dans l'approximation alors :

$\delta^{(k)} = -\log_{10}(|x_k - \zeta|)$ pour k *assez grand on alors* $\delta^{(k+1)} \approx r\delta^{(k)} - \log_{10}\mu$.

Ainsi par exemple pour $\mu = 0.999$ il faudra 2300 itérations pour gagner une décimale.

Corollaire : la méthode de Newton est au moins d'ordre 2, elle dite d'une convergence au moins quadratique.

Preuve : résultat direct de la remarque en supra.

Comparaison des trois méthodes étudiées :

La méthode de Dichotomie est une méthode d'ordre 1 (appliquer la définition 2 en supra), c'est-à-dire linéaire donc de convergence relativement lente, elle reste intéressante pour localiser la racine, la méthode de Newton étant de convergence quadratique est meilleure cependant elle nécessite une bonne initialisation du x_0 et le calcul des dérivées. La méthode du point fixe étant au moins d'ordre 1 reste celle qui nous offre le plus de possibilités avec un bon choix de la fonction φ.(la méthode de Newton on est un cas particulier).

Théorème de Newton-Raphson (Globale) :

Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et une fonction $f \in C^2[a,b]$ changeant de signe sur $[a,b]$ et telle que $f'(x) \neq 0$ et $f''(x) \neq 0$ $\forall\, x \in [a,b]$. Alors pour toute initialisation $x_0 \in [a,b]$ vérifiant $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ la suite de Newton définie par :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Converge vers l'unique racine de f sur [a, b].

Preuve

Les premières hypothèses entrainent l'existence et l'unicité de la racine qu'on noteraζ.

- Si $f(x_0)f''(x_0) = 0$ alors $x_0 = \zeta$ et donc la suite est constante et converge vers ζ.
- Si $f(x_0)f''(x_0) > 0$ comme f'' garde un signe constant (car ne s'annule pas et elle est continue) donc$f''(x) > 0$ ou $bien$ $f''(x) < 0$.
  - Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x_0) > 0$ $\nearrow \boxed{x_0 \in \,]\zeta, b]\ si\ f' > 0}$ $\searrow \boxed{x_0 \in [a, \zeta[\ si\ f' < 0}$
    - $si\ f' > 0$ $x_0 \in \,]\zeta, b]$ $x_0 \in \,]\zeta, b]$ et si on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $on\ a:$ $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} > 0$ et comme

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$ Alors $g(x_1) < g(x_0) \Rightarrow x_2 < x_1 \ldots . \Rightarrow x_k < x_{k-1} \Rightarrow x_k < \cdots < x_0$
Donc suite décroissante minorée car on peut aisément montrer par récurrence que $\forall\, k\ x_k > \zeta$. Donc convergente et bien sûr vers ζ car $g(\zeta) = \zeta$.

-
    - $si\ f' < 0$ $x_0 \in [a, \zeta[$ (on reprend le même raisonnement pour montrer qu'elle est croissante majorée par ζ)
  - Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x_0) < 0$ (on reprend la même démonstration en remplaçant f par $(-f)$.