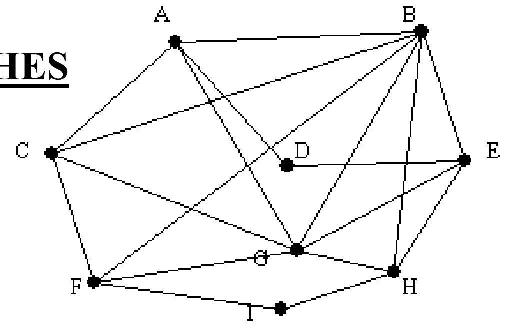
GRAPHES

Exercice n°1.
Déterminer le degré de chacun des sommets du graphe suivant :



Exercice n°2.
Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue!).

1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que i espionne j que et j espionne i.
2) Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?
3) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

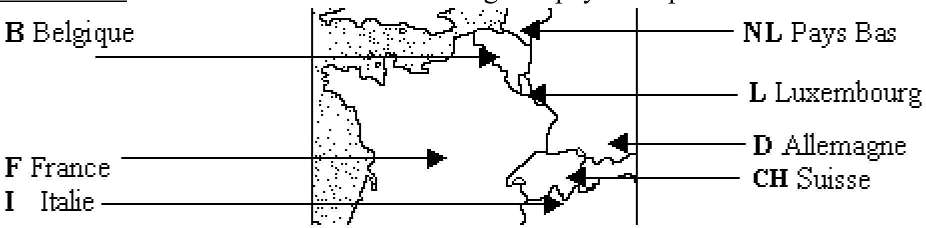
Exercice n°3. Peut-on construire un graphe simple (aucune arête n'est une boucle et il y a au plus une arête entre deux sommets) ayant :
a) 4 sommets et 7 arêtes b) 5 sommets et 11 arêtes c) 10 sommets et 46 arêtes

Exercice n°4. Etant donné un groupe de dix personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

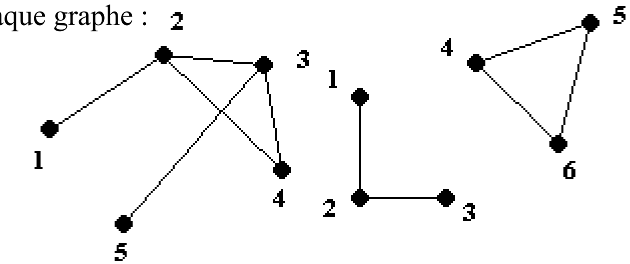
1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets i et j signifie qu'il y a une relation d'amitié entre i et j.
2) Ce graphe est-il complet ? connexe ?
3) Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

Exercice n°5. Sur la carte suivante sont désigné 7 pays européens :



1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 7 dans lequel l'existence d'une frontière entre deux pays se traduira par une arête.
2) Combien de couleurs faut-il, au minimum, pour colorier cette graphe, de sorte que deux pays frontaliers ne soient pas affectés de la même couleur.

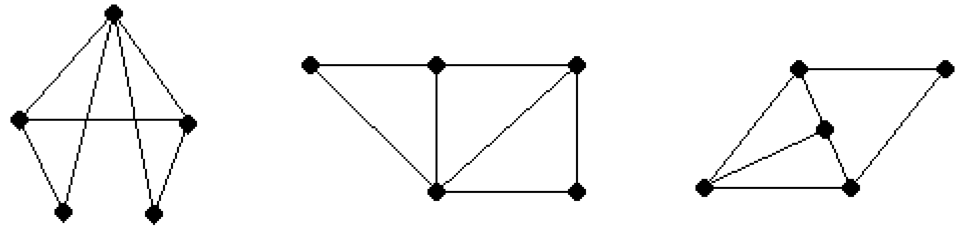
Exercice n°6.
Ecrivez la matrice associé à chaque graphe :



Exercice n°7.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

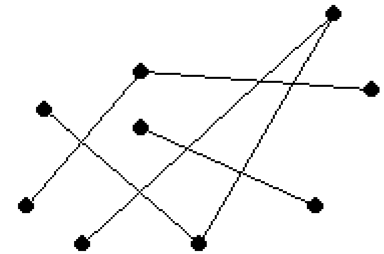
Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à A ?



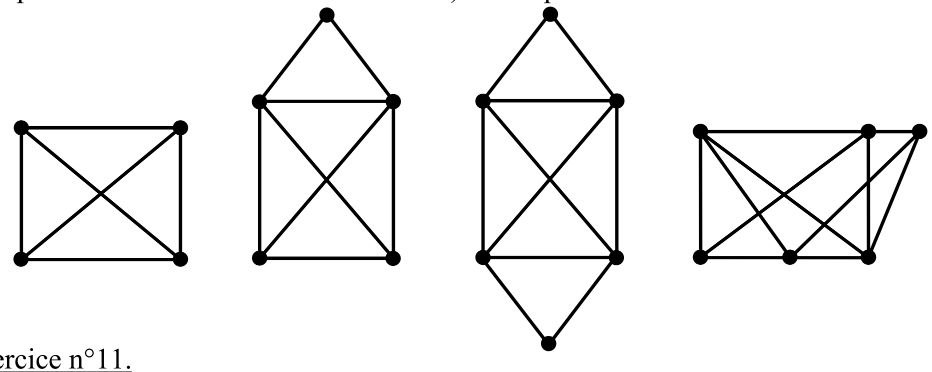
Exercice n°8. Dessiner un graphe dont une matrice serait : (plusieurs solutions sont évidement possibles)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

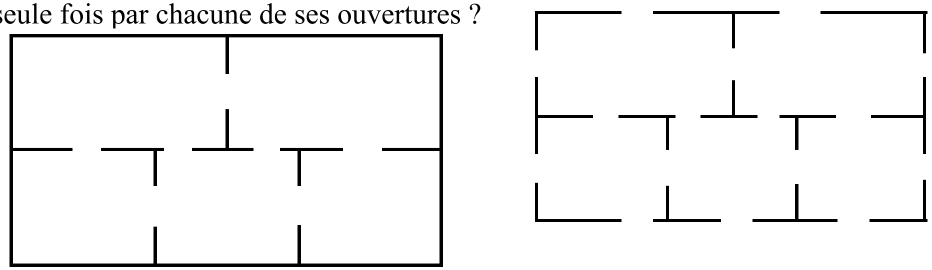
Exercice n°9.
Transformer ce graphe en lui rajoutant un nombre minimal d'arêtes pour qu'il soit connexe.



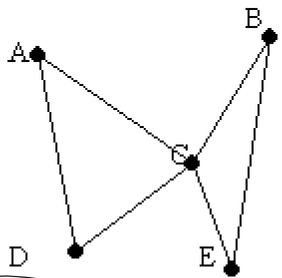
Exercice n°10. Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait!…)? Pourquoi ?



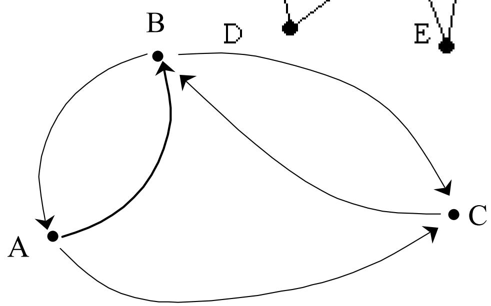
Exercice n°11.
Est-il possible de se promener dans chacune de ces maisons en passant une et une seule fois par chacune de ses ouvertures ?



Exercice n°12.
Le chasse neige doit déblayer les 6 routes qui relient 5 villages A, B, C, D et E
Peut on trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une et une seule fois chaque route ?
a) en partant de E et en terminant par E
b) en partant de C et en terminant à D
c) en partant de A et en terminant à A

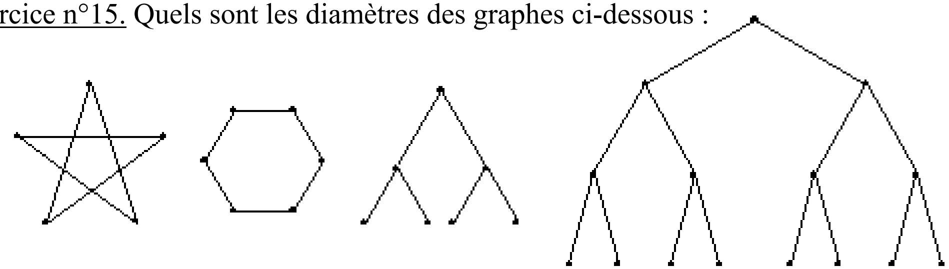


Exercice n°13.
Considérons le graphe G ci-contre :
Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 4 entre A et B ? B et A ? B et B ?

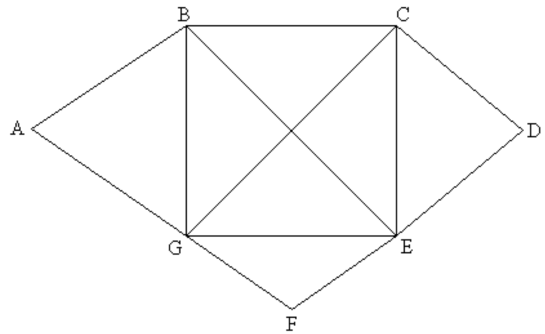


Exercice n°14.
On considère quatre villes V_1 , V_2 , V_3 , V_4 dans un pays où le traffic aérien est encore très réduit : il existe seulement un vol direct de V_1 vers V_2 et vers V_4, de V_2 vers V_3, de V_3 vers V_1 et vers V_4, de V_4 vers V_2
1) Représenter les données par un graphe convenable.
2) Vérifier qu'il existe au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j, $i \neq j$, comportant au plus deux escales.
3) a) Ecrivez la matrice M associée à ce graphe.
b) Calculez M^2 et M^3
c) Retrouvez alors le résultat de la question 2)

Exercice n°15. Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous :



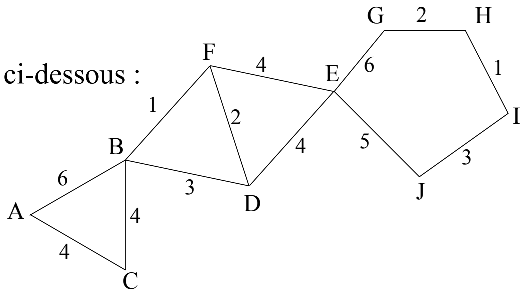
Exercice n°16. Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :
AB : 16 minutes ; AG = 12 minutes ; BC = 8 minutes ; BE : 12 minutes;
BG : 8 minutes ; CD : 7 minutes; CE = 4 minutes ; CG : 10 minutes ;
DE : 2 minutes ; EF : 8 minutes ; EG : 15 minutes ; FG : 8 minutes.
Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens du parcours.
1) Montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.

2) L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.
3) Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D. En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

Exercice n°17. On considère le graphe ci-dessous :

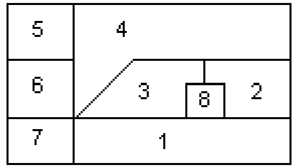


1) Existe-t-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ? Si oui indiquez-en un(e)
2) Donner une plus courte chaîne allant de A à I.

Exercice n°18.
Au 1er janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10% des propriétaires deviennent locataires tandis que 20% des locataires deviennent propriétaires.
1) On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1er janvier de l'année 2000+n (n entier supérieur ou égal à 0), et par l_n, la probabilité qu'il soit locataire. La matrice P_0 = (0,5 0,5) traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après n années.
a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste , puis donner sa matrice de transition M
b) Calculer l'état probabiliste P_1.
c) Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?
2) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n,
$p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$
3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$
a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7.
b) Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times (0,7)^n + \dfrac{2}{3}$
c) Calculer la limite de la suite (p_n) et retrouver le résultat de la question 1) c)

Exercice n°19.
Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.
1) Dessiner un graphe décrivant cette situation.
2) écrire la matrice de transition associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.
3) En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classés dans la catégorie A. Calculer l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004.
4) L'état (0,5 ; 0,5) est-il stable ? Justifier cette réponse.

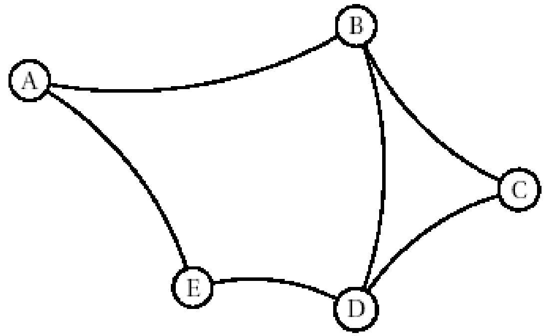
Exercices et problèmes de synthèse
Exercice n°20.
Huit pays sont représentés ci-dessous avec leur frontière (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points ne sont pas considérés comme voisins)



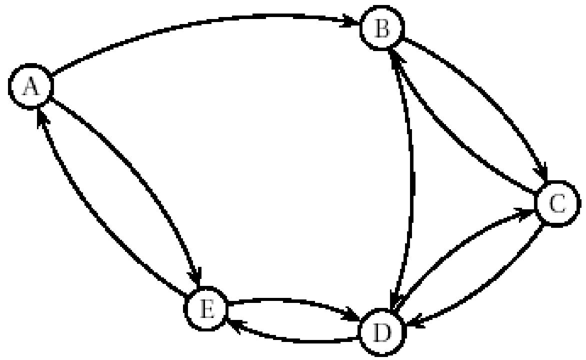
1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 8 dont les sommets sont les pays et les arêtes les frontières.
2) a) Ce graphe est-il complet ? connexe ?
b) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes ?
3) a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ?
b) Quel est le diamèter du graphe ?
4) a) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ?
b) est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays ?
5) Quel est le nombre maximum de pays sans frontière commune ? Précisez de quels pays il s'agit
6) Colorez les huit pays avec un nombre minimum de couleurs de telle façon que deux pays adjacents portent deux couleurs différentes

Exercice n°21.

1) Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.
On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :



a) On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes. Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier. Déterminer ce nombre.
b) Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?
2) Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B. Le graphe G' ci-dessous modélise cette nouvelle situation :



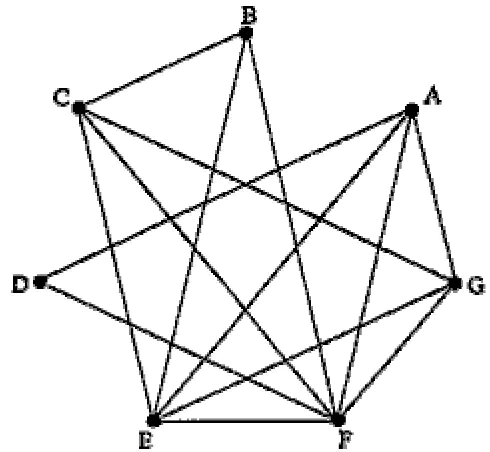
a) Donner la matrice M associée au graphe G'. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).

b) On donne $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B? Les donner tous.
c) Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A. Quel est ce cycle ? En est-il de même pour le sommet B?

Exercice n°22.

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle.
A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle.
Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1) Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).
2) Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ?
Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?
3) Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?
En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.
4) Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe G figurant en annexe.
5.)Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

Exercice n°23.

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0,3 \quad 0,7)$.
4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
b. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.
5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
a. Déterminer a et b.
b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

GRAPHES - CORRECTION

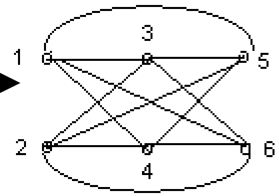
Exercice n°1

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	6	4	2	4	4	6	4	2

Exercice n°2

Les espions d'un même pays sont notés 1 et 2 , 3 et 4, 5 et 6

1) Graphe



2) Ce graphe n'est pas complet car deux espions d'un même pays ne s'espionnent pas, donc les sommets correspondants ne sont pas adjacents.

En revanche ce graphe est connexe car entre tout couple de points, il existe au moins une chaîne

3) Les sommets sont tous de degré 4 car chaque espion en espionne quatre autres

Autrement dit :

Sommet	1	2	3	4	5	6
Degré	4	4	4	4	4	4

La somme des degrés étant égale au double du nombre d'arêtes, celui-ci vaut 12

Exercice n°3

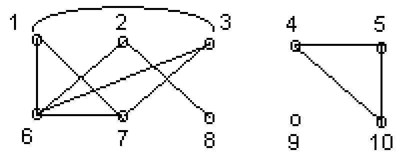
a) Si le graphe simple contient 4 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 3, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 12. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 6, donc ne peut pas être égal à 7.

b) Si le graphe simple contient 5 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 4, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 20. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 10, donc ne peut pas être égal à 11.

b) Si le graphe simple contient 10 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 9, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 90. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 45, donc ne peut pas être égal à 46.

Exercice n°4

1)

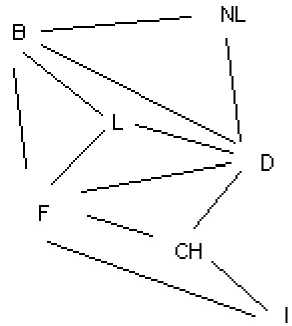


2) Ce graphe n'est pas complet car, par exemple, 1 et 2 ne sont pas adjacents. Il n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant 3 et 4. En revanche, il admet deux sous graphes connexes (1,2,3,6,7,8) (4,5,10) et un point isolé 9

3) Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié la composante connexe (1,2,3,6,7,8) serait complète

Exercice n°5

1)



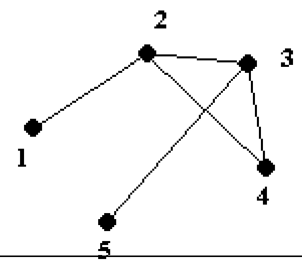
2) Il faut procéder à une coloration du graphe

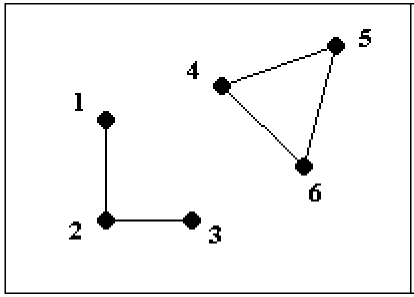
Le sommet de plus fort degré est F ou D, de degré 5. Le sous-graphe complet d'ordre maximal est d'ordre 3, par exemple B,L,F,D. Le nombre chromatique χ vérifie donc $4 \leq \chi \leq 5+1$, c'est-à-dire $4 \leq \chi \leq 6$

Classons les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré et appliquons l'algorithme de coloration de Welch et Powell

Degré	Sommet	Couleur
5	D	Couleur 1
5	F	Couleur 2
4	B	Couleur 3
3	CH	Couleur 4
3	L	Couleur 3
2	I	Couleur 1
2	NL	Couleur 2

Exercice n°6

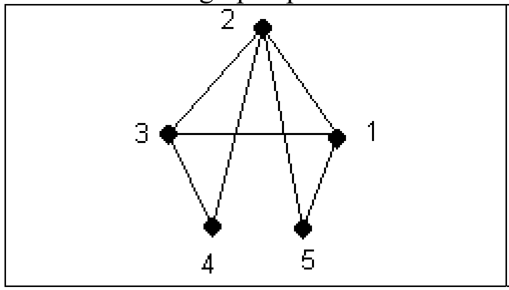
Graphe	Matrice
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

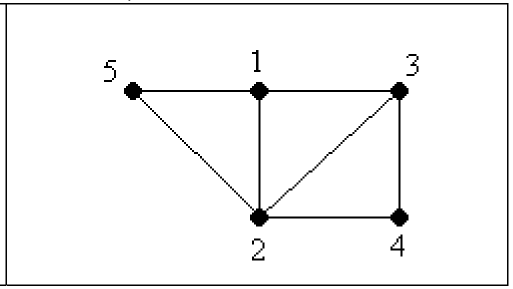


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n°7

Le 1er et le 3ème graphe peuvent associés à la matrice, avec les numérotations :

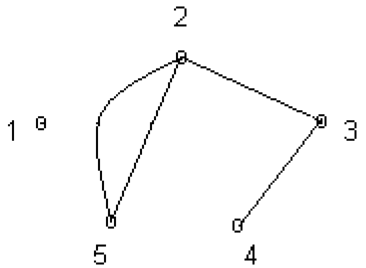




Le deuxième ne possède pas de sommet de degré égal à 4 (« 2 »)

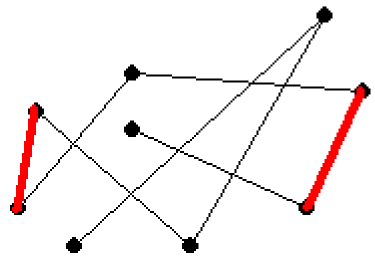
Exercice n°8

Un graphe possible est :



Exercice n°9

En rajoutant deux arêtes (en rouge), on peut rendre ce graphe connexe



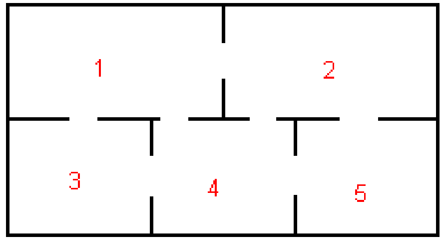
Exercice n°10

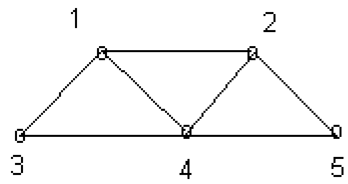
Tracer les figures « sans lever » le crayon revient à exhiber une chaine eulérienne. Or ceci n'est possible que si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 (on aura affaire à un cycle eulérien, donc le retour se fera sur le sommet de départ) ou à 2. Pour le premier graphe, c'est impossible, tous les sommets étant de degré impairs. Pour les trois autres graphes, c'est possible.

En ce qui concerne le 3ème graphe, tous les sommets étant de degré pair, on a même l'existence d'un cycle eulérien.

Exercice n°11

En numérotant les pièces et en matérialisant les portes par des arêtes, on traduit la situation par le graphe ci-dessous :

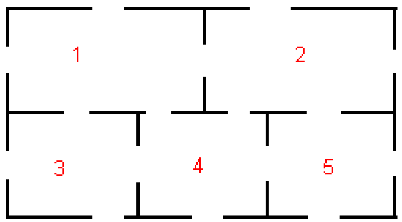


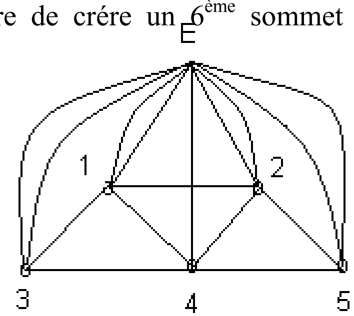


Se promener dans la maison en passant par chacune des ouvertures revient à chercher l'existence d'une chaîne eulérienne

Seuls deux sommets étant de degré impairs (1 et 2) , les autres étant de degré pair, il est possible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

Pour la deuxième situation, il est nécessaire de crére un 6ème sommet nommé « extérieur » (E)





Il existe maintenant quatre sommets de degré impairs (1,2,4 et E) , les autres étant de degré pair, il est impossible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

Exercice n°12

Trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une seule fois chaque route revient à trouver une chaîne eulérienne (voire un cycle) associée à ce graphe.

Tous les sommets étant de degré pair, le théorème d'Euler assurer l'existence d'un cycle eulérien (donc d'une chaîne eulérienne)

a) E-C-D-A-C-B-E est un exemple.

b) il n'existe pas de chaîne eulérienne partant de C et en terminant à D

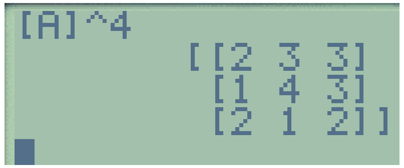
c) A-D-C-E-B-C-A est un exemple.

Exercice n°13

En numérotant 1,2,3 les sommets A,B,C, La matrice associée à ce graphe est

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$ (attention, le graphe n'étant pas orienté, la matrice n'est pas symétrique)

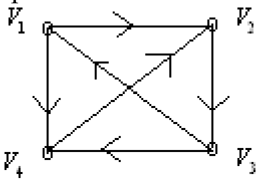
On calcule $A^4=\begin{pmatrix}2&3&3\\1&4&3\\2&1&2\end{pmatrix}$



La matrice A^4 nous permet d'affirmer qu'il existe :
- 3 chaînes de longueur 4 entre A et B
- 1 chaînes de longueur 4 entre B et A
- 4 chaînes de longueur 4 entre B et B

Exercice n°14

1) Les sommets du graphes étant les villes, et les arêtes étant les liaisons, un graphe représentant la situation est :



Il existe au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j, $i\neq j$, comportant au plus deux escales, car le diamètre du graphe est égal à 3

3) a) La matrice M associée à ce graphe est $M=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

b) On calcule $M^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&2&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ et $M^3=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&1\\0&1&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$

c) On calcule :

$$M+M^2+M^3=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&2&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&1\\0&1&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\1&2&1&2\\1&3&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice ne comportant pas de 0, et ne comportant que des entiers inférieurs ou égaux à 3, il existe toujours une chaine de longueur au plus égale à 3 entre deux aéroports, c'est-à-dire un voyage comportant au plus deux escales. On retrouve le résultat précédent.

Exercice n°15

Le premier graphe a pour diamètre 2
Le deuxième graphe a pour diamètre 3
Le troisième graphe a pour diamètre 4
Le quatrième graphe a pour diamètre 6

Exercice n°16

1) Puisque seuls les sommets E et G sont de degré impairs, ce graphe admet une chaîne eulérienne. Il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Un exemple de trajet est EGCBECDEFGBAG

2) L'agent de sécurité ne peut pas revenir à son point de départ car le théorème d'Euler interdit l'existence d'un cycle eulérien, en raison des deux sommets E et G de degré impair.

3) On détermine le temps minimum de parcours grâce à l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	Sommet choisi
0	0+16 =16 (A)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0+12 =12 (A)	**G (12)**
$+\infty$	12+8 =20 (G)	12+10 =22 (G)	$+\infty$	12+15 =27 (G)	12+8 =20 (G)	$+\infty$	~~F (20)~~ **C(22)**
$+\infty$			22+7 =29 (C)	~~20+8=28 (F)~~ 22+4=26 (C)			~~D(29)~~ **E(26)**
$+\infty$			26+2 =28 (E)				**D(28)**

On trouve pour chemin minimum le chemin AGCED, de poids 28

Exercice n°17

1) Les sommets D et F sont de degré impair, et tous les autres de degré pair. On conclut, grâce au théorème d'Euler, à l'existence d'une chaîne eulérienne, mais pas à celle d'un cycle eulérien.

Une chaîne eulérienne est, par exemple, DBCABFDEGHIJEF

2) On détermine le temps minimum de parcours grâce à l'algorithme de Dijkstra

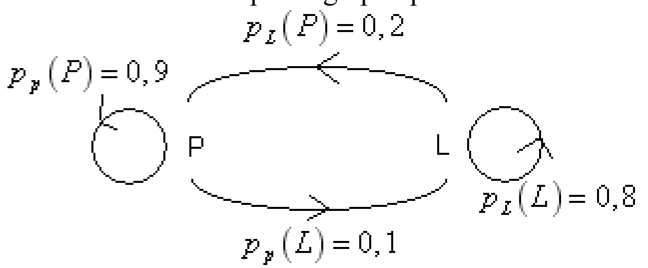
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sommet choisi
0	0+6 =6(A)	0+4 =4(A)								~~C(4)~~ B(6)
	~~4+4 =8(B)~~									
					6+1 =7(B)					F(7)
			7+2 =9(F)	7+4 =11(F)						~~D(9)~~ E(11)
				~~9+4 =13(D)~~						
						11+6 =17(E)			11+5 =16(E)	J(16)
								16+3 =19(J)		I(19)

On trouve pour chemin minimum le chemin ABFEJI, de poids 19

Exercice n°18

1) a) Si on note P la probabilité d'être propriétaire, et L celle d'être locataire, l'énoncé fournit les indications $p_p(P)=0,9$, $p_p(L)=0,1$, $p_L(P)=0,2$ et $p_L(L)=0,8$

la situation se traduit par le graphe probabiliste :



La matrice de transition de ce graphe est $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$

b) On calcule

$$P_1=P_0M=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5\times0,9+0,5\times0,2 & 0,5\times0,1+0,5\times0,8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0,55 & 0,45\end{pmatrix}$$

c) L'état stable $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ de ce graphe vérifie $x+y=1$ et

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,9x+0,2y\\ y=0,1x+0,8y\end{cases}$$

En utilisant la relation $x+y=1$, le système devient donc

$$\begin{cases}-0,1x+0,2y\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-0,1x+0,2(1-x)=0\\ y=1-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,3x=0,2\\ y=1-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{0,2}{0,3}=\dfrac{2}{3}\\ y=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

L'état stable du graphe est donc $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On peut ainsi conclure qu'au bout d'un grand nombre de mois, le nombre de propriétaires tend vers une proportion de $\frac{2}{3}$, tandis que celui des locataires tend vers une proportion de $\frac{1}{3}$.

2) À l'aide de la relation $P_{n+1}=P_n\times M$, on écrit :

$$\begin{pmatrix}p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}p_{n+1}=0,9p_n+0,2q_n\\ q_{n+1}=0,1p_n+0,8q_n\end{cases}$$

En utilisant la relation $p_n+q_n=1$, on déduit que $p_{n+1}=0,9p_n+0,2(1-p_n)$

$\boxed{\Leftrightarrow p_{n+1}=0,7p_n+0,2}$

3) Pour tout entier n, on a $u_{n+1}=0,7p_n+0,2-\frac{2}{3}=0,7p_n-\frac{7}{15}=0,7\left(p_n-\frac{7/15}{7/10}\right)$

C'est-à-dire $u_{n+1}=0,7u_n$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,7, et de premier terme $u_0=p_0-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$

b) Ainsi, pour tout entier n, $u_n = \left(-\frac{1}{6}\right)\times 0,7^n$, et puisque $u_n = p_n - \frac{2}{3} \Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{2}{3}$, on en déduit que $p_n = -\frac{1}{6}\times(0,7)^n + \frac{2}{3}$

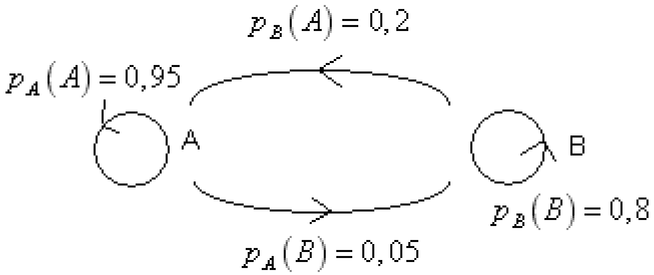
c) Puisque $0 < 0,7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,7)^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$

On retrouve le résultat de la question 1) c)

<u>Exercice n°19</u>

1) Si on note A la probabilité pour un hôtel d'être classé dans la catégorie A, et B celle d'être classée dans la catégorie B, l'énoncé fournit les indications $p_A(A) = 0,95$, $p_A(B) = 0,05$, $p_B(A) = 0,2$ et $p_B(B) = 0,8$

la situation se traduit par le graphe probabiliste :



2) La matrice de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3) L'état de l'année 2003 sera égal à :

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25\times 0,95 + 0,2\times 0,75 & 0,25\times 0,05 + 0,75\times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3875 & 0,6125 \end{pmatrix}$$

L'état de l'année 2004 sera égal à :

$$\begin{pmatrix} 0,3875 & 0,6125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3875\times 0,95 + 0,6125\times 0,2 & 0,3875\times 0,05 + 0,6125\times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,490625 & 0,509375 \end{pmatrix}$$

4) L'état $= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ n'est pas stable car

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

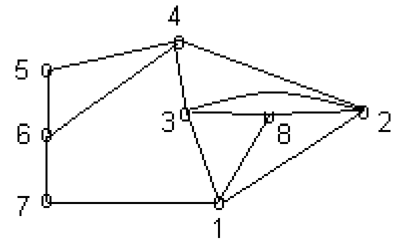
$$= \begin{pmatrix} 0,5\times 0,95 + 0,5\times 0,2 & 0,5\times 0,05 + 0,5\times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,575 & 0,425 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

<u>Exercices et problèmes de synthèse</u>

<u>Exercice n°20</u>

1) Une représentation possible peut être :



2) a) Ce graphe n'est pas complet (2 et 6 ne sont pas adjacents) mais est connexe.

b)

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

La somme des degrés vaut 4+4+4+4+2+3+2+3=26. Il y a donc 13 arêtes

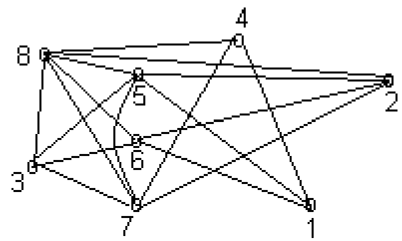
3) a) La distance entre les sommets 1 et 5 vaut 3

b) Ce graphe a pour diamètre 3

4) a) Puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, ce graphe n'admet pas de cyvle eulérien, donc il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule.

b) Puisque deux sommets exactement sont de degré impair, ce graphe admet une chaîne eulérienne, donc il est possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays.

5) On doit construire un nouveau graphe ou deux pays seront adjacents s'ils n'ont pas de frontière commune



Le plus grand sous-graphe complet de ce graphe a pour ordre 4

Le nombre maximum de pays sans frontière commune est donc égal à 4

6) Le degré maximum étant égal à 4, et le plus grand sous graphe complet étant d'ordre 4 (1,2,3,8), le nombre chromatique χ du graphe vérifie $4 \leq \chi \leq 5$

On applique l'algorithme de coloration de Welch et Powell

Sommet	Degré	Couleur
1	4	Couleur 1
2	4	Couleur 2
3	4	Couleur 3
4	4	Couleur 4
6	3	Couleur 1
8	3	Couleur 4
5	2	Couleur 2
7	2	Couleur 2

On déduit de cette coloration que $\chi = 4$

Exercice n°21

1) a) Notons χ le nombre chromatique de ce graphe, c'est-à-dire le nombre minimal de couleurs à utiliser pour que deux bancs adjacents ne soient pas de la même couleur.

Puisque le sous-graphe BCD est complet, on aura $\chi \geq 3$ et puisque le degré maximum est égal à 3 (sommets B et D), on aura $\chi \leq 3+1$, c'est-à-dire, au final, $3 \leq \chi \leq 4$.

On procède à une coloration grâce à l'algorithme de Welch et Powell :

Sommet	Degré	Couleur
B	3	Couleur 1
D	3	Couleur 2
A	2	Couleur 2
C	2	Couleur 3
E	2	Couleur 1

Ainsi $\chi = 3$

b) Le nombre de sommets de degré impair étant exactement égal à deux, il existe une chaîne eulérienne, donc il est possible de se promener une seule fois dans toutes allées du parc

2) a) La matrice M associée au graphe G' est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) A partir de la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

on en déduit qu'il existe 5 chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B (terme à l'intersection de la $4^{ème}$ ligne et de la $2^{ème}$ colonne)

Ces chemins sont DEDEAB , DEAEAB, DEABCB, DCBDCB, DEABCB

c) D'après la matrice, il existe un seul chemin de longueur 5 reliant A à A. Ce chemin est donc l'unique cycle contenant le sommet A, car tout cycle peut être considéré dans n'importe quel ordre. Ce cycle est ABCDEA.

En revanche, il existe 5 cycles de longueur 5 contenant le sommet B.

Exercice n°22

1) La matrice associée au graphe Γ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Le sous graphe AEFG est complet. Comme il est d'ordre 4, on déduit que $\chi(\Gamma) \geq 4$

3) Le sommet de plus haut degré de Γ est F, de degré 6. Ainsi $\chi(\Gamma) \leq 6+1$, et on déduit que $4 \leq \chi(\Gamma) \leq 7$

4) On procède à une coloration grâce à l'algorithme de Welch et Powell :

Sommet	Degré	Couleur
F	6	Couleur 1
E	5	Couleur 2
G	4	Couleur 3
A	4	Couleur 4
C	4	Couleur 4
B	3	Couleur 3
D	2	Couleur 2

5) L'organisateur doit prévoir 4 parties :

Partie 1 : F

Partie 2 : E,D

Partie 3 : G,B

Partie 4 : A,C

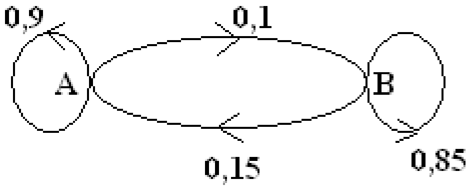
Exercice n°23

1. Puisqu'au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore, on aura $a_0 = 0,2$ donc $b_0 = 0,8$.

La matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2. Le graphe probabiliste sera constitué de deux sommets A et B origines et extrémités de deux arêtes orientées et pondérées. L'arête reliant A à B dans le sens A->B sera pondérée par la probabilité qu'une personne préférant Aurore une semaine donnée, ait changé pour Boréale la semaine suivante, soit 0,1.

On obtient ainsi :



3. a. La matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets est égale à : $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}}$

b. On a :

$$P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 & 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}}$$

4. a. Pour tout entier naturel *n*, $\boxed{P_n = P_0 M^n}$

b. Ainsi, $P_3 = P_0 M^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^3$

A l'aide d'une calculatrice, après avoir défini dans le menu MATRICE, une matrice [A], de dimension 1×2 correspondant à P_0 et une matrice [B], de dimension 2×2 correspondant à M, on calcule :

Ainsi, $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 0,43125 & 0,56875 \end{pmatrix}}$

On peut estimer qu'au bout de la 3ème semaine de campagne, plus de 43% de la population sera favorable au parfum Aurore.

5. a. L'état stable $P = (a \quad b)$ est solution de l'équation matricielle

$$P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

De surcroît, on a $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$

Les nombres *a* et *b* sont donc solutions du système $\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases}$ que l'on résout :

$$\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15(1-a) \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15 - 0,15a \\ b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,25a = 0,15 \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{0,15}{0,25} \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \\ b = 1 - 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 0,6 \\ b = 0,4 \end{cases}}$$

L'état stable est donc $\boxed{P = (0,6 \quad 0,4)}$

b. On peut donc estimer qu'à terme, 60% de la population sera favorable au parfum Aurore, qui sera donc préféré au parfum Boréale