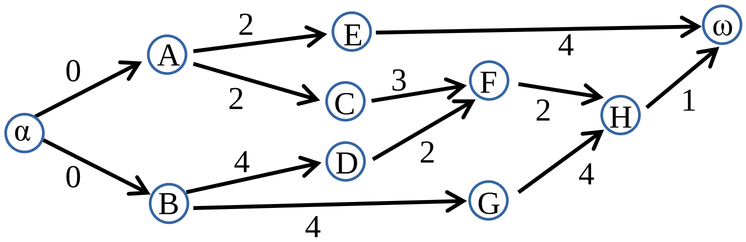
Corrigé de l'examen de Théorie de Graphes 2015-2016

Exercice 1.

1. Le graphe Potentiel-tâches :

$t_A - t_\alpha \geq 0$; $t_B - t_\alpha \geq 0$; $t_C - t_A \geq 2$; $t_D - t_B \geq 4$; $t_E - t_A \geq 2$; $t_F - t_C \geq 3$; $t_F - t_D \geq 2$; $t_G - t_B \geq 4$; $t_H - t_F \geq 2$; $t_H - t_G \geq 4$; $t_\omega - t_E \geq 4$; $t_\omega - t_H \geq 1$



2. Le calendrier optimal (les dates de début des tâches au plus tôt) :

$t_A = 0$, $t_B = 0$, $t_C = 2$, $t_D = 4$, $t_E = 2$, $t_F = 6$, $t_G = 4$, $t_H = 8$, $t\omega = 9$

La durée minimale du projet = tω = 9

3. Les dates de début au plus tard :

$T\omega = 9$, $T_H = 8$, $T_G = 4$, $T_F = 6$, $T_E = 5$, $T_D = 4$, $T_C = 3$, $T_B = 0$, $T_A = 1$

Les marges totales ($m_i = T_i - t_i$) :

$m_B = m_D = m_F = m_G = m_H = 0$

$m_A = 1$, $m_C = 1$, $m_E = 3$

Les taches critiques ($m_i=0$) sont donc : *B, D, F, G* et *H*.

Exercice 2. (Chemin optimal)

1. Le sommet source est 1 car $d_G^-(1)=0$ (aucun arc entrant) et le sommet puits est 8 car $d_G^+(8)=0$ (aucun arc sortant).

2. Mise à niveau / Partitionnement en niveaux / Ordonnancement du graphe :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$v(x)$	0	1	2	3	2	3	4	5

3. L'algorithme le plus adéquat est celui de Bellman-Ford. En effet, le graphe est sans circuits vu qu'on a pu le partitionner en niveaux. L'existence de poids négatifs ne nous permet pas d'utiliser l'algorithme de Dijkstra. Les algorithmes de Bellman-Kalaba et de Floyd peuvent aussi être utilisés mais ils sont plus coûteux (en temps et espace mémoire) que Bellman-Ford.

Sommet de départ 1 (racine = 1)

On affecte à 1 : $\pi[1]=0$ et *Pred*[1]=*Null*. Il n'y a aucun sommet de même niveau que 1 ou de niveau inférieur à 1. On peut commencer l'algorithme :

Le 1 est de niveau 0, alors on commence par les sommets de niveau 1 puis 2 et ainsi de suite jusqu'au puits. A chaque fois on sélectionne un sommet *y* et on regarde tous les arcs (*x*,*y*) entrants vers *y*. On prend celui qui donne $\pi[x]+p(x,y)$ minimal et on pose $\pi[y]=\pi[x]+p(x,y)$ et *Pred*[*y*]=*x*. On obtient les résultats suivants :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi[x]$	0	12	8	9	21	19	17	26
$Pred[x]$	*Null*	1	1	3	2	5	4	5

Sommet de départ 3 (racine = 3)
Le 3 est de niveau 2, on lui affecte $\pi[3]=0$ et $Pred[3]=Null$. Pour chaque sommet i de même niveau (le 5) que 3 ou de niveau inférieur à 3 (1 et 2), on lui affecte $\pi[i]= +\infty$ et $Pred[i]=Null$. On commence les calculs par le niveau 3 puis 4 puis 5. On fait le même traitement décrit plus haut. On obtient les résultats suivants :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi[x]$	$+\infty$	$+\infty$	0	1	$+\infty$	12	9	19
$Pred[x]$	*Null*	*Null*	*Null*	3	*Null*	3	4	7

Exercice 3.

1. Tout cycle dans un graphe biparti est de longueur pair :
On peut faire une démonstration par l'absurde :
Soit $G = (X, E)$ un graphe biparti, $X = X_1 \cup X_2$, X_1 et X_2 disjoints et
$\forall x, y \in X$ si $(x,y) \in E$ alors $x \in X_1$ ssi $y \in X_2$

Supposons qu'on peut trouver dans un graphe biparti un cycle de longueur impair.
Soit $C = x_1\, e_1\, x_2\, e_2, \ \dots\ , x_{2k+1}\, e_{2k+1}\, x_1$ ce cycle.
Supposons que le sommet $x_1 \in X_1$, le sommet x_2 appartient donc à X_2, le sommet x_3 à X_1 , …
Les sommets d'indice impair appartiennent donc à X_1 et les sommets d'indice pair à X_2 .
Le sommet x_{2k+1} et x_1 appartiennent tous les deux à X_1 et sont reliés par une arête.
Contradiction.

On peut aussi montrer en utilisant l'indice chromatique $\gamma(G)$ (nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets d'un graphe, tel que deux sommets adjacents ne doivent pas avoir la même couleur). En effet, l'indice chromatique d'un graphe biparti est égal à 2.
L'indice chromatique d'un cycle de longueur impaire est égal à 3. Contradiction.

2. Si un graphe biparti est régulier, c-à-d que $d_G(x) = d$, pour tout sommet x, alors $|X_1| = |X_2|$
En effet,

$$\sum_{x\in X_1} d_G(x) = \sum_{x\in X_2} d_G(x) = m$$

m étant le nombre d'arêtes
Car chaque arête a exactement une extrémité dans X_1 et une dans X_2,
Supposons que $|X_1| = p$, $|X_2|$ sera donc égale à $q=n-p$.

$$\sum_{x\in X_1} d_G(x) = d.p = \sum_{x\in X_2} d_G(x) = d.q$$

$d.p = d.q \Rightarrow p = q$ ce qu'il fallait montrer.

Exercice 4.

Les sommets représentent l'état des tours (les disques empilés sur chaque tour), les arêtes (on peut aussi utiliser des arcs, mais il y aura un dans chaque sens) représentent le passage (permis) d'un état à un autre.