Série 1.

Exercice 1.
Dans un groupe de personnes est tel que chaque personne est membre d'exactement deux (2) associations, chaque association comprend exactement trois (3) membres et deux (2) associations quelconques ont toujours exactement un (1) membre en commun. Combien y a-t-il de personnes ? Combien y a-t-il d'associations ?

Correction.

La premiere affirmation permet de dire que l'on peut modéliser le problème avec graphe dont les ` sommets sont les associations et les aretes les personnes appartenant aux associations. La troisième affirmation permet de dire que le graphe est complet puisque entre deux sommet il y a toujours exactement une arete. La deuxieme affirmation permet de dire que chaque sommet est de degré 3. Seul le graphe complet à 4 sommet noté K4 verifie ces conditions, ce graphe à4 sommets et 6 arêtes, il y a donc 6 personnes qui se répartissent dans 4 associations.

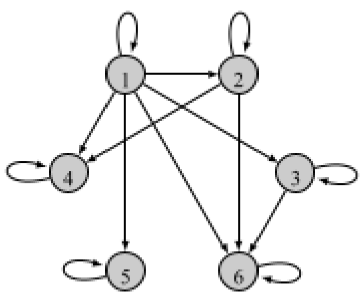
Exercice 2.
Soient n un entier positif non nul et $S = \{1, 2, . . . , n\}$. On definit le graphe orienté G=(X,U) tel que pour tout $s, t \in X$ on a $(s, t) \in U \Longleftrightarrow s$ divise t.

1. Donner explicitement le dictionnaire des predécesseur, la matrice d'adjacence et une représentation de G pour n = 6.
2. Soient s et t deux sommets de G, caracteriser la propriété : " s et t sont premiers entre eux".
3. A l'aide des predécesseur d'un sommet s de G, caracteriser la propriété " s est premier".
4. A chaque arcs $x \rightarrow y$, ont attribue la valuation y/x.Comment retrouver dans ce graphe la decomposition d'un nombre en facteurs premiers ?

Correction.

1. La liste des predécesseurs est ;

Sommets	Predécesseurs
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4
5	1,5
6	1,2,3,6



2. Deux nombres sont premiers entre eux si il n'y a pas d'arcs entre eux.
3. Un nombre premier correspond a un sommet de degré entrant 2 puisqu'il doit être divisible par 1 et lui même. Le sommet 1 est de degré entrant 1 et n'est pas premier.

4. Si l'on considere un chemin allant de 1 à n, le produit des valeurs des arcs qui le composent vaut necessairement n On peut alors, dans le graphe précédent, ne conserver que les arcs dont la valeur est un nombre premier et qui ne sont pas des boucles. Tout sommet n est alors tel qu'il existe un unique chemin de 1 a` n, dont les valeurs d'arcs donnent la decomposition en facteurs premiers.

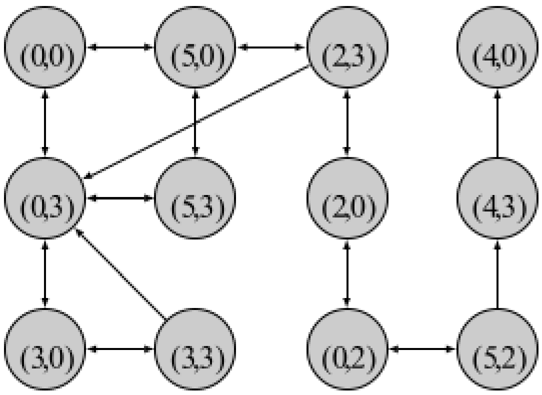
Exercice 3.
Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Correction.
Considerons le graphe dont les sommets sont les enfants et il y a une arête entre deux sommets si les enfants sont amis. Ce graphe a $7 + 9 + 4 = 20$ sommets, pour determiner le nombre d'arêtes, on calcule la somme des degres $7* 3 + 9 * 4 + 4 * 5 = 77$ est impaire. Par la lemme de la poignee de main, ce nombre doit être égal à deux fois le nombres d'arêtes ce qui est donc impossible.

Exercice 4.
On souhaite prelever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux recipients non gradués, l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres. Comment doit-on faire ?

Correction.

Les sommets sont cette fois des couples donnant le contenu du recipient de 5 litres et celui du recipient de 3 litres. On place un arc entre deux sommets lorsqu'on peut passer d'une configuration a l'autre. `On cherche alors un chemin du sommet 0,0 au sommet 4,0. . . La figure suivante montre un tel chemin (le graphe n'est pas representé en entier. . .), la bonne méthode est de construire le graphe progressivement sommet par sommet.



Exercice 5.

Une société est constituée de Quinze (15) sites. Chaque site est relié par une ligne spécialisée à au moins sept (7) autres. Le serveur de bases de données est placé sur l'un des sites. Est-il possible d'accéder au serveur de bases de données à partir de n'importe quel autre site.

Un groupe de 15 fans d'un chanteur célèbre, possède les deux particularités suivantes : Chaque personne connaît au moins 7 autres Toute information détenue par une personne est répercutée dans la minute qui suit à ses connaissances (et uniquement à elles) Quel est le temps maximal entre le moment où une des 15 fans apprend une chose nouvelle sur leur idole, et celui où le groupe entier est au courant ?

Correction.

L'émétteur de l'information est un sommet relié à au moins 7 autres. Notons I l'ensemble de ces sommets. Il reste au plus 7 sommets (15-(7+1)). Notons J cet ensemble. Chacun des sommets de J est nécessairement relié à un des sommets de I, sinon il ne serait relié qu'à 6 sommets. L'information met donc au plus 2 mins.

Exercice 6.

Quel est le nombre maximal d'arêtes dans un graphe non orienté d'ordre n qui ne possède pas d'arêtes parallèles ? Et si l'on suppose qu'il ne possède pas de boucle ?

Correction.

Le cas le pire correspond au graphe complet Kn, et on a déjà calculé son nombre d'arêtes : $(n - 1) + \cdots + (n-1) = n(n - 1)/ 2$. Rajouter des boucles revient, dans le cas le pire, à rajouter une arête sur chaqu'un des n sommets. On ajoute donc n à ce qui précède, pour trouver $n+(n(n - 1)/ 2)$