Cours D'Analyse Numérique proposé par Dr Djamila Dahmani USTHB Dept Informatique FEI

Introduction générale

L'Analyse Numérique est une branche des mathématiques appliquées s'intéressant au développement d'outils et méthodes numériques pour le calcul d'approximations de solutions de problèmes qu'il serait difficile, voire impossible d'obtenir par des moyens analytiques. Son objectif est d'introduire des procédures calculatoires détaillées susceptibles d'être mise en œuvre par des calculateurs électroniques mécaniques ou humains. Elle possède des liens étroits avec deux disciplines à la croisée des mathématiques et de l'informatique. L'une est le calcul scientifique qui consiste en l'étude et l'implémentation des méthodes numériques dans les architectures d'ordinateurs et leurs applications à la résolution effective des problèmes issues de la physique, de la biologie des sciences de l'ingénieur, ou encore l'économie et la finance. L'autre c'est la théorie de la complexité algorithmique, qui permet de mesurer l'efficacité théorique d'une méthode en quantifiant le nombre d'opérations élémentaires ou parfois la quantité de ressources informatiques (temps de calcul, besoin de mémoire).

Chapitre 1. Résolution de l'équation f(x)=0

Introduction

Le problème de construire une suite convergente vers la solution d'une équation numérique est certainement l'origine des plus anciens algorithmes mathématiques. L'exemple le plus célèbre est attribué à Héron d'Alexandrie mais qui était connu des mathématiciens babyloniens est celui du calcul de la racine carré $\sqrt{a}\ avec\ a\ un\ réel\ strictement\ postif$; et ce en résolvant l'équation$x^2 - a = 0$. On s'intéressera dans ce chapitre à la résolution de f(x)=0 où f est une fonction réelle à variable réelle.

Exemple1 : Résoudre l'équation$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$. Etudier la variation de f et en déduire le nombre de solutions ainsi que leurs encadrements dans intervalles fermés et bornés.

(Solution en cours)

1. ***Localisation des racines*** :

Nous allons chercher à trouver si les racines réelles de f(x) existent, graphiquement cela revient à chercher les points d'intersection du graphe de f(x) avec l'axe (ox) pour cela nous allons faire intervenir les deux théorèmes suivants :

Théorème1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists \alpha \in]a, b[$ telle que $f(\alpha) = 0$. Si de plus f est monotone sur cette racine est unique.

Théorème2. Si f est continue et monotone sur $[a, b]$, $f(a)f(b) > 0$ alors $f(x)$ n'a pas de solution sur $[a, b]$.

Grace à ces deux théorèmes nous localiserons ensuite nous séparerons les racines d'une équation.

Cours D'Analyse Numérique proposé par Dr Djamila Dahmani USTHB Dept Informatique FEI

2. *Méthodes de résolution*

2.1 méthode de Dichotomie

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, on suppose que f admet une racine unique $\bar{x}$ sur $[a, b]$.

Alors :

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et $I_0 = [a_0, b_0]$ et $x_0 = \frac{(a_0+b_0)}{2}$. Pour $n \geq 1$ selon les cas : on choisit le sous-intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ à partir de l'intervalle $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ de la façon suivante :

- ✓ Soit $x_{n-1} = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$
- ✓ Si $f(x_{n-1}) = 0$ Alors $\bar{x} = x_{n-1}$ et l'algorithme se termine.
- ✓ Sinon :
  - si $f(x_{n-1})f(a_{n-1}) < 0$ Alors $a_n = a_{n-1}$ et $x_{n-1} = b_n$.
  - Sinon $a_n = x_{n-1}$ et $b_n = b_{n-1}$

La suite construite ainsi convergera vers $\bar{x}$.

Proposition 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, on suppose que f admet une racine unique $\bar{x}$ sur $[a, b]$. alors la suite de Dichotomie définie ci-dessus vérifie :

1) $(\boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{a_n}) = \frac{\boldsymbol{b_0 - a_0}}{\boldsymbol{2^n}}$

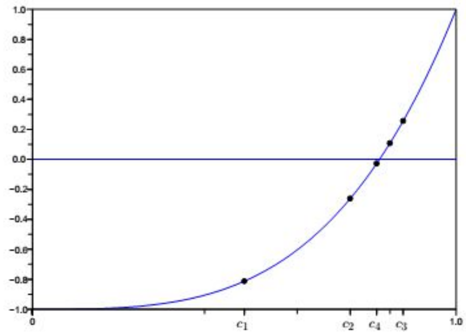
2) $|\boldsymbol{x_n} - \bar{x}| \leq \frac{\boldsymbol{b_0 - a_0}}{\boldsymbol{2^{n+1}}}$

Preuve en cours.

Exemple 2:

Résoudre les équations :

1) $x^4 + x^3 - 1 = 0$ sur [0,1] à 10^{-6} prés (solution :0,8191729) .
2) $x - sinx - 1/4 = 0 \; sur \; [0, \pi/2]$.



Quatre premières valeurs données par l'algorithme de dichotomie pour résoudre l'équation $x^4 + x^3 - 1 = 0$ dans $[0, 1]$.

n	c_n	n	c_n
1.	0.5	1.	0.7853982
2.	0.75	2.	1.1780972
3.	0.875	3.	0.9817477
4.	0.8125	4.	1.0799225
5.	0.84375	5.	1.1290099
6.	0.828125	6.	1.1535536
16.	0.8191681	16.	1.1712183
17.	0.8191757	17.	1.1712303
18.	0.8191719	18.	1.1712243
19.	0.8191738	19.	1.1712273
20.	0.8191729	20.	1.1712288
	$x^4 + x^3 - 1 = 0$ $x \in [0, 1]$		$x - \sin x - 1/4 = 0$ $x \in [0, \pi/2]$

TABLE 1 – Exemple d'applications de la méthode de dichotomie

2.2 Méthode du Point Fixe

Principe : le principe de cette méthode est de transformer le problème de la résolution de l'équation $f(x) = 0 \; sur \; [a, b]$ en le problème de la recherche du point fixe dans l'équation$\varphi(x) = x$, dans le but de construire la suite récurrente $\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases}$ cette suite, si elle converge, elle convergera vers la solution de l'équation$f(x) = 0 \; sur \; [a, b]$.

Il existe plusieurs manières de construire la fonction $\varphi(x)$ à partir de la fonction$f(x)$.

Par exemple :$\mathrm{f(x) = x^3 - 5x + \ln x + e^{3X} = 0}$ peut être équivalente sur un bon domaine de définition à $x = \sqrt[3]{5x - lnx - e^{3x}} = \varphi_1(x)$ ou bien alors

$x = ln\sqrt[3]{(5x - lnx - x^3)} = \varphi_2(x)$ etc. . La question est alors posée quelle est la meilleure fonction φ à choisir ? Pour répondre à cette question nous avons besoin de deux définitions et d'un théorème.

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle$[a, b]$, on dit que φ est contractante si et seulement s'il existe un réel k $0 \leq k < 1$: $\forall \, x, y \in [a, b] |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|x - y|$.

Définition 2. Soit φ une fonction définie sur un intervalle$[a, b]$, on dit que φ est stable sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall \; x \in [a, b] \; \varphi(x) \in [a, b]$ ie $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$.

REMARQUES

1) Toute fonction contractante sur un intervalle $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$.
2) Si une fonction $\varphi \in C^1([a, b])$ alors φ *est contractante ssi* $\max_{[a,b]}|\varphi'| < 1$

Théorème du Point Fixe : Soit φ une fonction définie sur $[a, b]$; φ est stable et contractante sur $[a, b]$, de constante de contraction k . Alors :

1) φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$ *teq* $\varphi(\alpha) = \alpha$.
2) La suite itérative $\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases}$ converge vers α.
3) $|x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$ et $|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$.
(Preuve en cours).

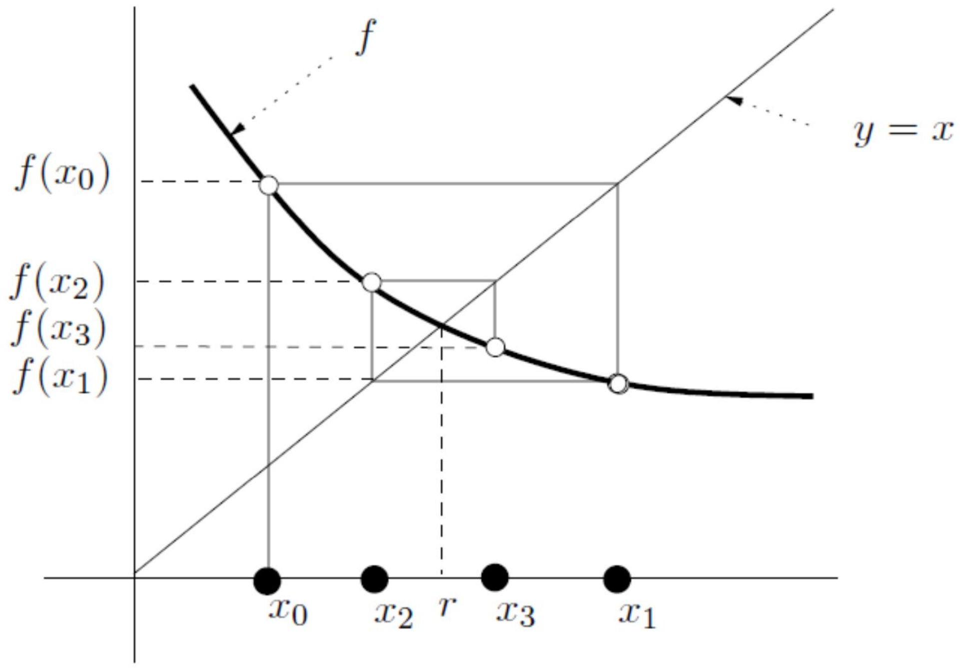


Figure 1. Représentation graphique des premiers itérés de la méthode du point fixe

Exemple 2 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = sinx + \frac{1}{4}$ satisfait aux conditions du théorème du point fixe en prenant comme intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
(*solution en cours).*

2.3 Méthode de Newton

Principe : le principe de cette méthode est le suivant :
Supposons que la fonction $f \in C^1([a, b])$ et que la fonction $f(x) = 0$ admette une seule racine $\alpha \in [a, b]$. L'idée est de remplacer l'équation f(x)=0 par

l'équation $T_1(x) = 0$ où T_1 est le polynôme de Taylor de f de degré 1 en un point x_0 .

$$T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$$

Et donc le premier itéré $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

De manière générale la suite de Newton sera définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

Graphiquement x_{n+1} est l'abscisse d'intersection de la tangente en le point$(x_n, f(x_n))$ avec l'axe (OX). Comme dans la figure :

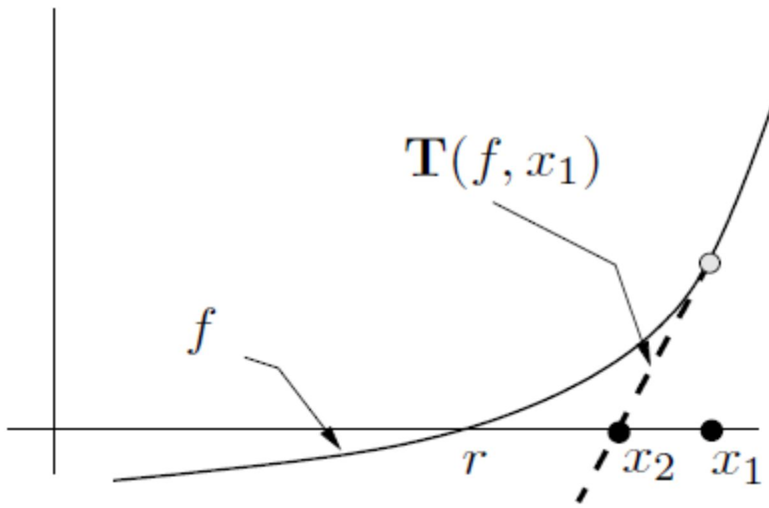


Figure 2 : exemple des itérés de la méthode de Newton

Théorème de Newton

Soit $f \in C^2[a, b]$ **vérifiant** :

1) $f(a)f(b) < 0$
2) $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$.
3) $f' \, et \, f'' \, gardent \, un \, signe \, constant \, sur \, [a, b]$.
4) $si \, on \, note \, c \, l'élement \, où \, |f'| \, est \, minimal \, alors \, on \, suppose \, que \, \left|\frac{f(c)}{f'(c)}\right| \leq b - a$

   Alors

La suite de newton définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ converge vers l'inique racine α de $f \, sur \, [a, b]$.

De plus nous avons $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$ où $M = sup_{[a,b]}|f''|$ et $m = inf_{[a,b]}|f'|$