Les Flots

1. Réseau de transport

Un réseau de transport est un graphe orienté pondéré $G=(X, U, c)$ constitué d'un ensemble de sommets X, un ensemble d'arcs U et on associe à chaque arc $u \in U$ un poids $c(u) \geq 0$ appelé capacité de l'arc u.
Un réseau de transport possède deux (02) sommets particuliers :

- e : entrée du graphe, c'est une source (n'ayant pas de prédécesseurs)
- s : sortie du graphe, c'est un puits (n'ayant pas de successeurs)

2. Flot dans un réseau de transport

Soit $G=(X, U, c)$ un réseau de transport avec $|X|=n$ et $|U|=m$. On appelle flot compatible dans G un vecteur f de m composantes réelles (une par arc) vérifiant :

$\forall u \in U,\ 0 \leq f(u) \leq c(u)$

$\forall x \in X - \{e, s\}$, $\sum_{u \in \omega^+(\{x\})} f(u) - \sum_{u \in \omega^-(\{x\})} f(u) = 0$ (loi de Kirchhoff)

Tel que : $\omega^+(\{x\})$ est l'ensemble des arcs sortants de x.
$\omega^-(\{x\})$ est l'ensemble des arcs entrants vers x.

De ce fait, nous aurons : $\sum_{u \in \omega^+(\{e\})} f(u) = \sum_{u \in \omega^-(\{s\})} f(u)$

On dit aussi que le flot f est réalisable.

3. Arc saturé par un flot

Soit $G=(X, U, c)$ un réseau de transport. Un arc $u \in U$ est dit saturé par un flot compatible f si et seulement si $f(u)=c(u)$.
Un flot est dit complet si tout chemin de l'entrée du réseau vers la sortie du réseau passe nécessairement par un arc saturé.

4. Réseau résiduel

A partir d'un réseau de transport $G=(X, U, c)$. et d'un flot compatible f, on peut construire un réseau résiduel $G_f=(X, U_f, c_f)$ comme suit (voir algorithme ci-dessous) :

```
Début
 Uf←∅ ;
 Pour tout arc u=(x,y)∈U
  Faire
   Si (f(u)≠0)
    Alors Uf ← Uf ∪ {(y,x)} ;
          cf(y,x) ← f(u) ;
   fSi
   Si (c(u) - f(u)≠0)
    Alors Uf ← Uf ∪ {(x,y)} ;
          cf(x,y) ← c(u) - f(u) ;
   fSi
  Fait
Fin.
```

5. Chemin d'augmentation

Soit un réseau de transport $G=(X, U, c)$. avec $e \in X$ l'entrée de G et $s \in X$ la sortie de G, f un flot compatible, et $G_f=(X, U_f, c_f)$ le réseau résiduel de G associé à f. Un chemin γ dans G_f de e vers s est appelé chemin d'augmentation de capacité $c(\gamma)$ où $c(\gamma)=\underset{u\in\gamma}{Min}(c_f(u))$.

6. Flot maximal

Soit $G=(X, U, c)$ un réseau de transport. Les sommets e et $s \in X$ sont respectivement les entrée et sortie de G.

1. Un flot compatible f est dit maximal dans le réseau de transport G si et seulement si $\sum_{x\in X} f(e,x) = \sum_{x\in X} f(x,s)$ est de valeur maximale.
2. Un flot compatible f est maximal, s'il n'existe aucun chemin d'augmentation dans le réseau résiduel G_f.

7. Algorithme de Ford-Fulkerson

Donnée

En Entrée : Le réseau de transport $G=(X,U,c)$
$e \in X$ et $s \in X$

En Sortie : f vecteur de $m=|U|$ éléments $\in \Re$.

L'algorithme

```
Début
    /*Initialisation*/
   Pour tout (u∈U)
    Faire
      f(u) ← 0 ; /*On peut l'initialiser à n'importe quel flot réalisable ≠ 0*/
    Fait
   Gf ← G ;
    /*Processus itératif*/
   Tant Que (∃γ chemin d'augmentation dans Gf)
    Faire
      Pour tout (u=(x,y)∈γ)
       Faire
        Si (u∈U)
          Alors f(u) ← f(u)+c(γ) ;
          Sinon f(y,x) ← f(y,x)-c(γ) ;
        fSi
       Fait
      Construire Gf à partir du nouveau flot f ;
    Fait
Fin.
```

8. Coupe minimale

On appelle coupe minimale du réseau de transport pour un flot donné f, une partition de l'ensemble des sommets X en deux sous-ensembles X_1 et X_2 ($X= X_1 \cup X_2$ et $X_1 \cap X_2=\varnothing$) tel que tout arc allant X_1 de vers X_2 est saturé.

Si un flot admet une coupe minimale alors ce flot est maximal.