U.S.T.H.B.,
Faculté d'Informatique
L3 (S5) Informatique

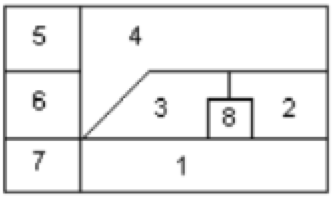
21 Janvier 2024

Corrigé de
l'Examen Final de
Théorie des Graphes

Durée 1h30'

Exercice 1. ***(08 pts.)***

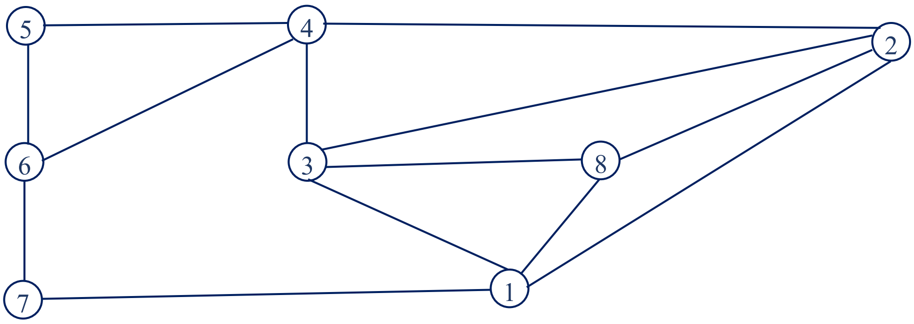
Huit (08) départements sont représentés ci-dessous avec leurs frontières. Deux départements avec une frontière composée d'un nombre fini de points ne sont pas considérés comme voisins (Par exemple, le 2 et 3 sont voisins mais le 3 et 7 ne sont pas voisins).



1. Modéliser les relations de frontières entre les départements par un graphe *G*. ***(1)***

On modélise par un graphe non orienté $G=(X, E)$ comme suit :
- Chaque sommet $x \in X$ représente un département.
- Chaque arête $\{x, y\} \in E$ représente la relation : les départements x et y « sont voisins ». En d'autres termes, ils ont une frontière constituée d'une infinité de points.

Ceci donne le dessin suivant :



2. *G* est-il complet ? *G* est-il connexe ? ***(0.5+0.75)***

G n'est pas complet. Contre-exemple : 3 et 6 ne sont pas adjacents. C'est-à-dire $\{3, 6\} \notin E$.
G est connexe. Il existe une chaîne qui passe par tous les sommets du graphe : μ = 1 2 8 3 4 5 6 7.
On peut aussi appliquer l'algorithme de connexité (utilisant les marquage) ou l'algorithme d'exploration (en profondeur ou en largeur) afin de prouver que G est connexe.

3. Calculer les degrés des sommets de *G*. Déduire le nombre d'arêtes. ***(0.5+0.75)***

A partir du dessin, nous calculons les degrés de chaque sommet de G. Les résultats sont résumés par le tableau ci-dessous :

Sommet $x \in X$	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_G(x)$	4	4	4	4	2	3	2	3

On peut déduire le nombre d'arêtes dans le graphe en utilisant la formule des degrés :
$\Sigma_{\forall x \in X}\, d_G(x)=2|E| \Rightarrow 2|E|=4+4+4+4+2+3+2+3=26 \Rightarrow |E|= 13$.

4. Est-il possible d'aller d'un département donné, de franchir toutes les frontières une seule et unique fois et d'y revenir ? *(1)*

Dans notre graphe, le problème revient à faire un parcours en démarrant d'un sommet, parcourir toutes les arêtes une seule et unique fois et revenir au sommet de départ. Ains, le problème revient à vérifier si G admet un cycle Eulérien.
Pour admettre un cycle Eulérien, le graphe doit être connexe et les degrés de tous les sommets doivent être pairs. On a $d_G(6)=3$ impair $\Rightarrow$ Pas de cycle Eulérien $\Rightarrow$ Impossible.

5. Est-il possible de parcourir tous les départements une seule et unique fois et revenir ? *(1)*

Dans notre graphe, le problème revient à faire un parcours en démarrant d'un sommet, parcourir tous les sommets une seule unique fois (en utilisant les arêtes intermédiaires) et revenir au sommet de départ. Ainsi, le problème revient à vérifier si G admet un cycle Hamiltonien.
Soit μ'=6 5 4 2 8 3 1 7 6 est un cycle Hamiltonien $\Rightarrow$ Possible.

6. Y a-t-il un département qui, s'il ferme ses frontières, d'autres départements ne seront plus reliés ? *(1)*

Un département qui ferme ses frontières correspond à déconnecter un sommet. En d'autres termes, revient à vérifier si le graphe admet ou non un point d'articulation. C'est-à-dire si $\exists x \in X$ tel que G-$\{x\}$ est non connexe.
G admet un cycle Hamiltonien (Question 5), la suppression d'un sommet quelconque x rend ce cycle chaine et donc G-$\{x\}$ reste connexe. Donc, si un département ferme ses frontières, les autres départements restent reliés.

7. Quel est le nombre maximal de départements qui n'ont pas de frontières communes mutuellement ? *(1.5)*

Le problème revient à chercher le plus grand stable possible dans le graphe G. La cardinalité (nombre d'élément) de ce stable correspond au nombre maximal de départements n'ayant pas de frontières communes.
Soit $S=\{2, 5, 7\}$ un stable d'ordre 3 dans G. S est le plus grand stable dans G. Car il n'y a aucun stable d'ordre 4 dans G. En effet, les sommets de degrés ≥4 (1, 2, 3 et 4) ne peuvent pas faire partie d'un stable à 4. Les 4 sommets restant (5, 6, 7 et 8) ne forment pas un stable car au moins deux sont reliés entre eux (par exemple 5 et 6).
$|S|=3 \Rightarrow$ 3 départements au maximum.

Exercice 2. *(05 pts.)*

Un projet requiert la réalisation de six (06) tâches, le tableau suivant donne pour chaque tâche, le temps (en jours) requis et les contraintes liées au début d'exécution des tâches.

Tâche *i*	Durée de *i*	Contraintes liées au début d'exécution de la tâche *i*
1	8	-
2	6	-
3	4	Tâche 1 terminée.
4	3	Tâche 1 terminée.
5	2	Tâches 1, 3 et 4 terminées
6	5	Tâches 1 et 2 terminées.

1. Donner la représentation du problème en graphe MPM (Potentiel-tâches). *(1)*

D'abord, on formule les contraintes du problème sous forme d'inéquations :

$t_3 - t_1 \geq 8$
$t_4 - t_1 \geq 8$
$t_5 - t_1 \geq 8$
$t_5 - t_3 \geq 4$
$t_5 - t_4 \geq 3$

$t_6 - t_1 \geq 8$

$t_6 - t_2 \geq 6$

Où t_i correspond à la date de début de la tâche i.

On introduit deux tâches fictives qu'on note :

0 : début du projet.

7 : Fin du projet.

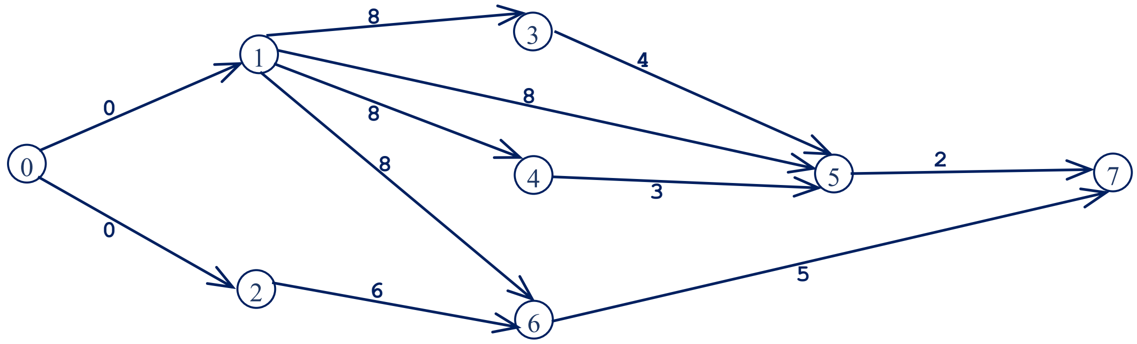
Nous obtenons les contraintes supplémentaires suivantes :

$t_1 - t_0 \geq 0$

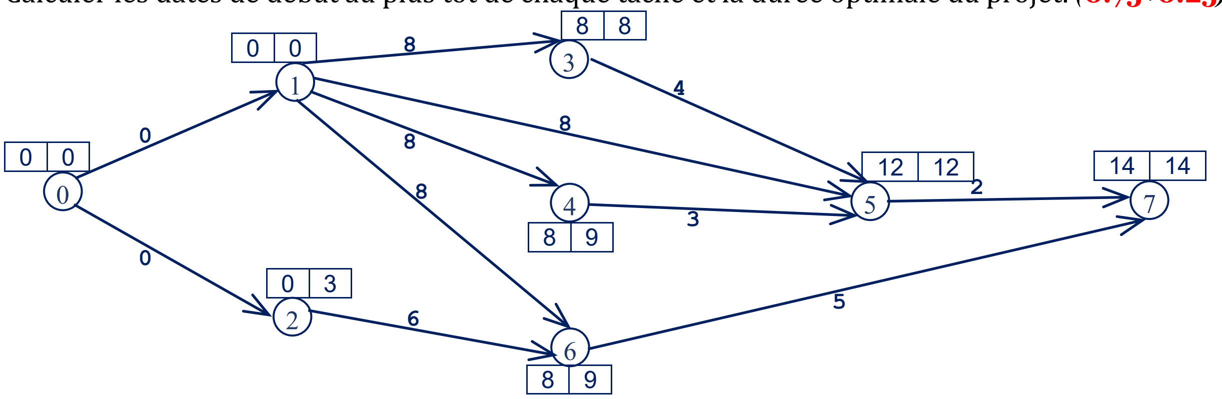
$t_2 - t_0 \geq 0$

$t_7 - t_i \geq durée_i$ $\forall i$ de 1 à 6.

Nous obtenons le graphe potentiel tâches (MPM) suivant :



2. Calculer les dates de début au plus tôt de chaque tâche et la durée optimale du projet. ***(0.75+0.25)***



Les dates au plus tôt sont récapitulées sur le tableau ci-dessous :

Tâche i :	1	2	3	4	5	6
Date au plus tôt de i :	0	0	8	8	12	8

La durée optimale du projet correspond à la date au plus tôt de la tâche fictive de fin de projet (tâche 7) = 14 jours.

3. Calculer les dates au plus tard et déduire les tâches critiques. ***(0.75+0.25)***

Les dates au plus tard sont récapitulées sur le tableau ci-dessous :

Tâche i :	1	2	3	4	5	6
Date au plus tôt de i :	0	3	8	9	12	9

Les tâches critiques sont celles qui ont la date au plus tôt et la date au plus tard identiques. Il s'agit des tâches : 1, 3 et 5.

4. On veut réduire la durée de la tâche 5 d'une (01) journée à un coût C. Quel est l'impact sur la durée optimale du projet ? ***(1)***

La tâche 5 est une tâche critique qui est liée directement à la tâche fictive de fin de projet. Si on la réduit de 1 journée, la durée optimale du projet sera réduite d'une journée. La nouvelle durée du projet est 13 jours.

5. Est-il intéressant de réduire encore la durée de la tâche 5 ? Justifier. *(1)*

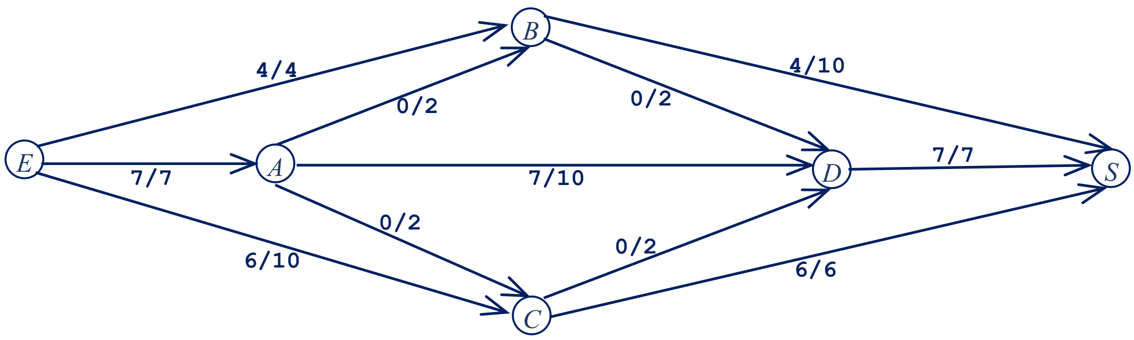
La tâche 5 est une tâche critique qui est liée directement à la tâche fictive de fin de projet. Après avoir réduit sa durée d'une journée, la tâche 6 (qui est liée directement à la tâche fictive de fin de projet) devient une tâche critique. Toute réduction sur la tâche 5, n'aura aucun effet sur la durée du projet car la tâche 6 maintiendra sa durée à 13.

Exercice 3. *(04 pts.)*

Soit le réseau de transport ci-dessous (donné sous forme de tableau) ayant comme entrée (source) le sommet E et comme sortie (puits) le sommet S. Pour chaque arc, le tableau ci-dessous donne sa capacité ainsi que le flux initial.

Sommet de départ	E	E	E	A	A	A	B	B	C	C	D
Sommet d'arrivée	A	B	C	B	C	D	D	S	D	S	S
Capacité de l'arc	7	4	10	2	2	10	2	10	2	6	7
Flux initial de l'arc	7	4	6	0	0	7	0	4	0	6	7

1. Le flot initial est-il réalisable ? *(1)*



Nous pouvons vérifier sur le réseau de transport et le flot donné les trois points suivants :

$\forall u \in U$, $0 \leq \varphi(u) \leq c(u)$ (Le flux d'un arc ne dépasse jamais sa capacité).

$\forall x \in X - \{E, S\}$, Σ flux entrant $= \Sigma$ flux sortant (Loi de Kirchhoff respectée)

Σ flux sortant de $E = \Sigma$ flux entrant à S

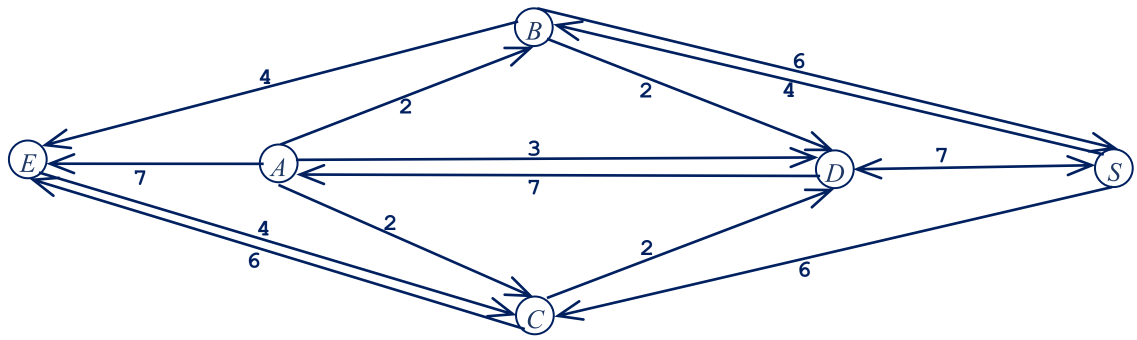
Donc ce flot est réalisable.

2. Le flot initial est-il complet ? *(1)*

Le flot est complet car tout chemin de E vers S possède un arc saturé.

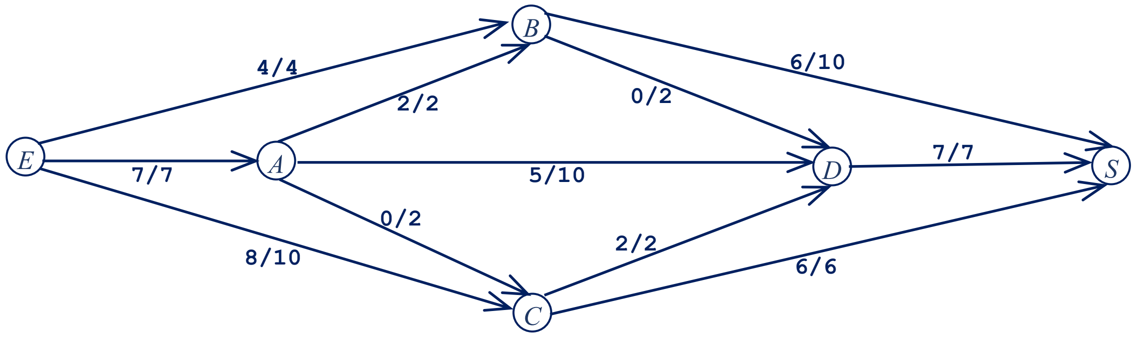
3. Le flot initial est-il optimal ? Si oui, prouver-le, sinon, trouver le flot optimal. *(0.5+1.5)*

Cherchons un chemin d'augmentation dans le graphe des résidus :

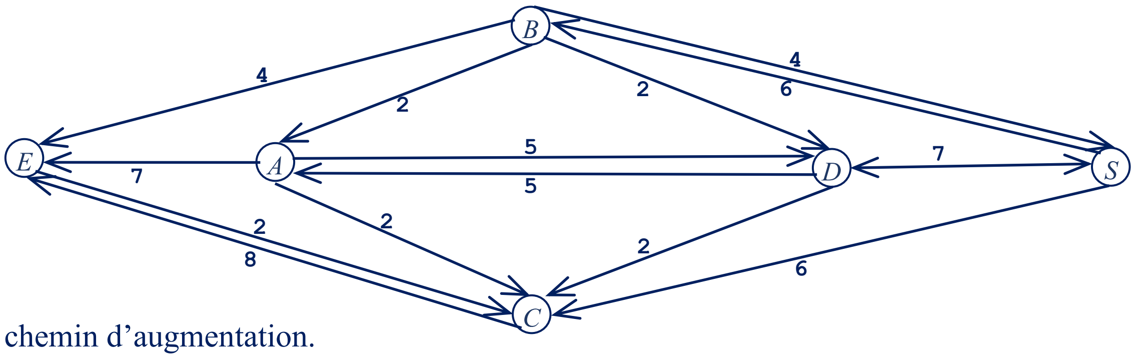


$\gamma = E\ C\ D\ A\ B\ S$ est un chemin d'augmentation de capacité $c(\gamma)=2 \Rightarrow$ Le flot n'est pas optimal (n'est pas maximal)

Calculons le flot maximal en appliquons l'algorithme de Ford-Fulkerson
On augmente le flot de 2 le long du chemin d'augmentation (γ= *E C D A B S*) et on obtient le flot suivant :



Soit le graphe des résidus correspondant suivant :



Aucun chemin d'augmentation.
Donc le flot est maximal. C={(E, B), (A, B), (D, S), (C, S)} est une coupe.
La valeur du flot est 19.

Exercice 4. ***(03 pts.)***

Montrer que tout graphe arbre est un graphe biparti. ***(3)***

On veut montrer : G est un arbre $\Rightarrow$ G est biparti.
On démontre par la contraposée : G n'est pas biparti $\Rightarrow$ G n'est pas un arbre.
Un graphe G qui n'est pas biparti $\Rightarrow$ son nombre chromatique $\chi(G)\neq 2$
$\Rightarrow$ Un des deux cas est possible :

(1) Soit $\chi(G)=1$ $\Rightarrow$ G est un graphe discret (constitué uniquement de sommets isolés)$\Rightarrow$ G n'est pas connexe $\Rightarrow$ G n'est pas un arbre

(2) Soit $\chi(G)>2$ $\Rightarrow$ G admet un cycle de longueur impaire $\Rightarrow$ G n'est pas un arbre

Bon Courage