5. **Fermeture de dépendances fonctionnelles/ Fermeture d'attributs** :

a) Fermeture de dépendances fonctionnelles :

Soit R une relation et F un ensemble de dépendances fonctionnelles satisfaites par R.
On appelle **fermeture** de F (noté F+), l'ensemble de toutes les dépendances fonctionnelles qui sont impliquées (dérivées) par les DFs de F.

Remarques :
-Les règles d'inférences sont un moyen de calculer la fermeture F+.
-Le calcul de *F*+ peut être coûteux en temps, car le cardinal de *F*+ peut être très grand même si *F* est restreint.
-Par contre il y a un moyen efficace pour déterminer si une DF donnée appartient à F+. Pour cela, nous avons besoin d'introduire la notion de **fermeture d'attributs**.

b) Fermeture d'attributs :
Soit R une relation, F un ensemble de dépendances fonctionnelles satisfaites par R.
Soit A un attribut (ou groupes d'attributs) de R. On appelle **fermeture** de A (noté A+), l'ensemble de tous les attributs de R qui sont en dépendance fonctionnelle avec A.

L'algorithme général suivant permet de calculer cette fermeture :

```
Début
    A+ = {A}
    Tant que Vrai
    faire
        pour chaque DF  X → Y  de F
            faire :
                Si X est un sous-ensemble de A+
                alors A+ = A+ ∪ {Y}
                Fsi ;
            fin ;
        Si A+ n'est pas modifié pendant cette itération
        alors   quitter  la boucle ; /* calcul terminé */
    Fait;
Fin ;
```

Exemple :

Soit **R(A,B ,C,D,E,F)** et **G = { B → E, A → BC, CD → EF }**

Calculons $\mathbf{B}^+$
B+ = {B}

<u>1ère itération :</u>
B → E : B appartient à B+, alors B+ = {B, E}
A → BC : A n'appartient pas à B+
CD → EF : CD n'appartient pas à B+
B+ = {B, E}, B+ a changé

<u>2ème itération :</u>
B → E   B appartient à B+, alors B+ = {B, E}
A → BC   A n'appartient pas à B+
CD → EF   CD n'appartient pas à B+
B+ = {B, E}, B+ n'a pas changé donc Arrêt

On obtient : $B^+ = \{B, E\}$

Calculons **AD**$^{+}$

AD+ = {A, D}
1ère itération :
B → E : B n'appartient pas à AD+
A → BC : A appartient à AD+, alors AD+ = {A, D, B, C}
CD → EF : CD appartient à AD+, alors AD+ = {A, D, B, C, E, F}
AD+ a changé

2ème itération : AD+ = {A, D, B, C, E, F}
B → E B appartient à AD+ alors AD+ = {A, D, B, C, E, F}
A → BC A appartient à AD+, alors AD+ = {A, D, B, C, E, F}
CD → EF CD appartient à AD+, alors AD+ = {A, D, B, C, E, F}
AD+ n'a pas changé donc Arrêt
AD+ = {A, D, B, C, E, F}

Ainsi, nous avons un moyen simple de déterminer si une dépendance fonctionnelle X → Y est dérivable d'un ensemble F de DFs (ie appartient à sa fermeture F+).

Corollaire :
Etant donné un ensemble F de dépendances fonctionnelles, X → Y est dérivable de F
si et seulement si Y est un sous-ensemble de la fermeture de X pour F(X+).

Remarque :
Si X est une clé candidate ou une superclé de la relation R alors X+ = l'ensemble des attributs de R.

6. Notions de couverture d'un enemble de DFs : Couverture & Couverture minimale

a)Couverture :
Soit R une relation et F1, F2 deux ensembles de DFs définies dans R,
F1 est une couverture de F2 ssi F2+ est inclut dans F1+

Remarque : pour montrer que F1 est une couverture de F2, il suffit de montrer que toute DF de F2 appartient à F1+ (est dérivable à partir des DFS de F1)

Exemple :

R(A,B ,C,D,E,F)
F1 = { (1) A → BC, (2) B → D }
F2 = { (3) A → BD, (4) AB →C, (5) B → D }
Montrons que F2 est couverture de F1 :
(1) A → BC?
(3) donne par décomposition (6) A → B et (7) A → D
(6) et (4) donnent par pseudo-transitivité (8) A → C
(6) et (8) donnent par union A → BC donc la df (1) est dérivable par F2 (appartient à F2+)
(2) B → D est la même que (5) donc la df (2) est dérivable par F2 (appartient à F2+)
Donc **F2 couverture de F1**

b)Ensembles de DFs équivalents :

Soit R une relation, F1 et F2 ensembles de DFs définies dans R,
F1 et F2 sont équivalents ssi F1+ = F2+

Ou encore, ssi F1 est une couverture de F2 et F2 est une couverture de F1.

c)Couverture minimale : (Ensemble irréductible de DFs)

Un ensemble de dépendances fonctionnelles est irréductible ssi il satisfait les trois propriétés suivantes :

1. Le membre droit (le dépendant) de chaque dépendance fonctionnelle de F contient un seul attribut (Un ensemble singleton).
2. Le membre gauche (le déterminant) de chaque dépendance fonctionnelle de F est irréductible, (c'est à dire, aucun attribut ne peut être enlevé du déterminant sans changer la fermeture F+). Nous dirons qu'une telle dépendance fonctionnelle est **irréductible à gauche** ou élementaire.
3. Aucune dépendance fonctionnelle n'est redondante (aucune Df ne peut être supprimée de F sans changer la fermeture de F+)

Exemple : Soit la relation Etudiant (Matricule, Nom, Prénom, Adresse)

{Matricule $\rightarrow$ Nom, Matricule $\rightarrow$ Prénom, Matricule $\rightarrow$Adressse}

Cet ensemble de dépendances fonctionnelles est irréductible :
-Chaque Df a le membre droit constitué d'un seul attribut
- Chaque Df a le membre gauche irréductible.
- Aucune Df ne peut être supprimée sans changer la fermeture.

Les ensembles suivants ne sont pas irréductibles :

1. Matricule $\rightarrow$ {Nom, Prénom} : le membre droit n'est pas un singleton
   Matricule $\rightarrow$Adressse

2. {Matricule, Adresse} $\rightarrow$ Nom : Cette DF peut être simplifiée en enlevant Adresse du membre gauche sans changer la fermeture.
   Matricule $\rightarrow$ Prénom
   Matricule $\rightarrow$Adressse

3. Matricule $\rightarrow$ Nom, Prénom : Cette Df peut être supprimée sans changer la fermeture.
   Matricule $\rightarrow$ Nom
   Matricule $\rightarrow$ Prénom
   Matricule $\rightarrow$Adressse

Remarque :
Pour chaque ensemble de Dfs, il existe au moins un ensemble équivalent qui est irréductible.

Détermination de couverture minimale pour un ensemble de DFs :

Soit F, l'ensemble des Dfs.
Grâce à la règle de décomposition, chaque Df de F peut être transformée en un ensemble de Dfs ayant un membre droit singleton => Propriété 1
Pour chaque Df f de F ayant un membre gauche composé de plus d'un attribut, on examine chaque attribut A du membre gauche de f; si F et l'ensemble des Dfs obtenus en éliminant A du membre gauche de f sont équivalents, on supprime A du membre gauche de f. => Propriété 2
Pour toute Df f restante dans F, si F et F-{f} sont équivalents, alors on supprime f de F =>Propriété 3
L'ensemble des Dfs final est irréductible et est équivalent à l'ensemble F initial.

Exemple1 :

Soit R (A, B, C, D) et soient l'ensemble de dépendances fonctionnelles satisfaites par R :

$$F = \{ A \rightarrow BC, \ B \rightarrow C, \ A \rightarrow B, \ AB \rightarrow C, \ AC \rightarrow D \}$$

Propriété 1 est non vérifiée dans la 1ère DF => F n'est pas irréductible.

Déterminons un ensemble de Dfs irréductible (couverture minimale) équivalent à F.

Après décomposition de la 1ère DF,
On obtient $\{ A \rightarrow B, \ A \rightarrow C, \ B \rightarrow C, \ A \rightarrow B, \ AB \rightarrow C, \ AC \rightarrow D \}$
On a 2 fois $A \rightarrow B$, une des deux occurrences de $A \rightarrow B$ doit disparaître.
On obtient $\{ A \rightarrow B, \ A \rightarrow C, \ B \rightarrow C, \ AB \rightarrow C, \ AC \rightarrow D \}$
$(A \rightarrow C \ , \ AC \rightarrow D)$ => $A \rightarrow D$ (par pseudo-transitivité).
On obtient $\{ A \rightarrow B, \ A \rightarrow C, \ B \rightarrow C, \ AB \rightarrow C, \ A \rightarrow D \}$
$A \rightarrow C$ => $AB \rightarrow CB$ (par augmentation)
$AB \rightarrow CB$ => $AB \rightarrow C$ (par décomposition)
=> $AB \rightarrow C$ est une DF redondante à enlever.
On obtient $\{ A \rightarrow B, \ A \rightarrow C, \ B \rightarrow C, \ A \rightarrow D \}$
$\{A \rightarrow B \ , B \rightarrow C)$ => $A \rightarrow C$ (par union) DF redondante à enlever.
On obtient un ensemble de DFs **irréductible** équivalent à F et vérifiant les 3 propriétés

$$\{ \mathbf{A \rightarrow B}, \ \mathbf{B \rightarrow C}, \ \mathbf{A \rightarrow D} \}$$

Exemple 2 :

Considérons l'ensemble suivant : $\{A \rightarrow B, \ BC \rightarrow D, \ AC \rightarrow BDE, \ D \rightarrow E\}$

Cet ensemble s'écrit après décomposition :
$\{A \rightarrow B, \ BC \rightarrow D, \ AC \rightarrow B, \ AC \rightarrow D, \ AC \rightarrow E, \ D \rightarrow E \}$

$AC \rightarrow B$ n'est pas élémentaire car on a $A \rightarrow B$ donc on peut l'enlever.
$AC \rightarrow D$ est redondante car dérivable par pseudo-transitivité de $A \rightarrow B$ et $B C \rightarrow D$
$A C \rightarrow E$ est redondante car elle se déduit de $A \rightarrow B$, $BC \rightarrow D$ et $D \rightarrow E$

On obtient l'ensemble minimal suivant : $\{\mathbf{A \rightarrow B}, \ \mathbf{BC \rightarrow D}, \ \mathbf{D \rightarrow E}\}$