Propriétés des langages algébriques

Théorème. La classe des langages algébriques est fermée par rapport à :

- union
- concaténation
- itération (*)
- Itération positive (+)

Démonstration. Soient $G_1<X_1, V_1, P_1, S_1>$ et $G_2 <X_2, V_2, P_2, S_2>$ deux grammaires algébriques engendrant respectivement les langages $L_1=L(G_1)$ et $L_2=L(G_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

1. Union

Construisons une grammaire $G<X, V, P, S>$ algébrique telle que $L(G)=L(G_1) \cup L(G_2)$. Pour cela définissons les paramètres de G :

$$X = X_1 \cup X_2,\ V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\},\ P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 / S_2\}$$

Cette grammaire est algébrique puisque ses productions sont composées des productions de G_1 et G_2 auxquelles nous avons rajouté $S \rightarrow S_1 / S_2$

Montrons que $L(G_1) \cup L(G_2) = L(G)$ en montrant la double inclusion $L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L(G)$ et $L(G) \subseteq L(G_1) \cup L(G_2)$

Montrons que $L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L(G)$

$\forall\ w \in L(G_1) \cup L(G_2) \Rightarrow w \in L(G_1)$ ou $w \in L(G_2)$

- $w \in L(G_1) \Rightarrow S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\vdash}} w \underset{P_1 \subseteq P}{\Rightarrow} S_1 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w$

Nous avons rajouté dans P la production $S \rightarrow S_1$ donc nous avons

$$S \underset{G}{\vdash} S_1 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w \quad \Rightarrow w \in L(G)$$

- $w \in L(G_2) \Rightarrow S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\vdash}} w \underset{P_2 \subseteq P}{\Rightarrow} S_2 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w$

Nous avons rajouté dans P la production $S \rightarrow S_2$ donc nous avons

$$S \underset{G}{\vdash} S_2 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w \quad \Rightarrow w \in L(G).$$

Montrons que $L(G) \subseteq L(G_1) \cup L(G_2)$

$\forall\ w \in L(G) \Rightarrow w \in L(G_1) \cup L(G_2) \Rightarrow w \in L(G_1)$ ou $w \in L(G_2)$

En démarrant les dérivations à partir de l'axiome S de la grammaire G, il y a deux dérivations possibles (car à partir de S il n'y a que deux productions $S \rightarrow S_1 / S_2$)

- Soit on a

$S \underset{G}{\vdash} S_1 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w$ On commence à générer le w à partir de S1 qui est l'axiome de

la grammaire $G_1 \Rightarrow S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\vdash}} w \Rightarrow w \in L(G_1)$.

- Soit on a

$S \underset{G}{\vdash} S_2 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w$ On commence à générer le w à partir de S2 qui est l'axiome de

la grammaire $G_2 \Rightarrow S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\vdash}} w \Rightarrow w \in L(G_2)$.

2. Concaténation

Construisons une grammaire G<X, V, P, S> algébrique telle que $L(G)=L(G_1).L(G_2)$. Pour cela définissons les paramètres de G :

$$X = X_1 \cup X_2,\ V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\},\ P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 . S_2\}$$

Cette grammaire est algébrique puisque ses productions sont composées des productions de G_1 et G_2 auxquelles nous avons rajouté $S \to S_1.S_2$

Montrons que $L(G_1).L(G_2) = L(G)$ en montrant la double inclusion $L(G_1).L(G_2) \subseteq L(G)$ et $L(G) \subseteq L(G_1).L(G_2)$

Montrons que $L(G_1).L(G_2) \subseteq L(G)$

$\forall w \in L(G_1).L(G_2) \Rightarrow w=w_1w_2$ avec $w_1 \in L(G_1)$ et $w_2 \in L(G_2)$, montrons que $w=w_1w_2 \in L(G)$

- $w_1 \in L(G_1) \Rightarrow S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\vdash}} w_1 \underset{P_1 \subseteq P}{\Rightarrow} S_1 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w$

S_2

- $w_2 \in L(G_2) \Rightarrow S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\vdash}} w_2 \underset{P_2 \subseteq P}{\Rightarrow} S_2 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w$

Nous avons rajouté dans P la production $S \to S_1. S_2$ donc nous avons

$$S \underset{G}{\vdash} S_1. S_2 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w_1. S_2 \overset{*}{\underset{G}{\vdash}} w_1 w_2 \Rightarrow w_1 w_2 \in L(G)$$

Montrons que $L(G) \subseteq L(G_1).L(G_2)$

$\forall\ w \in L(G) \Rightarrow w=w_1.w_2 \in L(G_1).L(G_2) \Rightarrow w_1 \in L(G_1)$ et $w_2 \in L(G_2)$

En démarrant les dérivations à partir de l'axiome S de la grammaire G, il y a une dérivation possible (car à partir de S il y a une seule production $S \to S_1.S_2$) donc nous avons

$$S \vdash_{G} S_1.\,S_2$$

S_1 est l'axiome de G_1 $\Rightarrow$ $S_1 \overset{*}{\vdash}_{G_1} w_1 \quad \Rightarrow w_1 \in L(G_1)$.

S_2 est l'axiome de G_2 $\Rightarrow$ $S_2 \overset{*}{\vdash}_{G_2} w_2 \quad \Rightarrow w_2 \in L(G_2)$.

3. Itération (*)

Construisons une grammaire G<X, V, P, S> algébrique telle que $L(G)=L(G_1)\cup L(G_2)$. Pour cela définissons les paramètres de G :

$$X = X_1,\ V = V_1 \cup \{S\},\ P = P_1 \cup \{S \to S_1.S \ /\ \varepsilon\}$$

Cette grammaire est algébrique puisque ses productions sont composées des productions de G_1 et G_2 auxquelles nous avons rajouté $S \to S_1.S\ /\ \varepsilon$

Vous pourrez facilement montrer Montrons que $L^*(G_1) = L(G)$.

Théorème. La classe des langages algébriques n'est pas fermée par rapport à l'intersection.

Démonstration. Nous pouvons démontrer cela par un contre-exemple. Soient L_1 et L_2 les deux langages suivants :

$L_1 = \{a^n\, b^n\, c^i,\ n,\ i > 0\}$ et $L_2 = \{a^j\, b^m\, c^m,\ m,\ j > 0\}$

On a $L_1 \cap L_2 = \{a^n\, b^n\, c^n,\ n > 0\}$ qui n'est pas un langage algébrique mais à contexte lié.

Corollaire. La classe des langages algébriques n'est pas fermée par rapport au complément.

Démonstration. La classe des langages algébriques est fermée par rapport à l'union. Supposons que la classe des langages algébriques est fermée par rapport au complément alors la classe des langages algébriques devient fermée par rapport à l'intersection (Loi de Morgan) Contradiction.