Calculabilité
Interrogation Ecrite – Corrigé

Exercice 1 (2.5, 2.5)

Q1. Mettez des flèches dans le sens que vous jugez juste. +0.5 par réponse correcte – 0 pour si non indiqué – 0.5 par réponse fausse.	**Q2.** Devant chaque proposition, écrivez **V** si vous la jugez valide et **F** sinon
$\begin{tikzcd} \text{Effectivement Décidable} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{Récursif} \arrow[d] \arrow[dl] \\ \text{Effectivement Enumérable} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Récursivement Enumérable} \end{tikzcd}$	**F -** Fonction Calculable $\Rightarrow$ Primitive Récursive **F -** La fonction d'Ackerman n'est pas Turing-Calculable. **V -** Il existe des fonctions non calculables. **F -** Certaines fonctions primitives récursives ne sont pas calculables. **V -** Il existe des fonctions non récursives

Exercice 2 (1.5, 1.5, 1)

Q1. Montrer en utilisant la règle de composition que les fonctions f et g définies ci-dessous sont primitives récursives :

$f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$ **(1.5 point)**	$g(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **(1.5 point)**
$f(x,y) = \sqrt{q(x,y)}$ (il est important que soit maintenu l'ordre des arguments) $\boldsymbol{f(x,y) = r(q(x,y))}$ *r* représente la racine carrée. ***h*** = *racine carrée* ***g*** = *q*	$g(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = q(r(x), r(y))$ **(1 point)** avec $r(x) = \sqrt{x}$ Appliquer la règle de composition : **0.5 point** $\boldsymbol{g(x,y) = q(r(P_1^2)(x,y), r(P_2^2)(x,y))}$ ***h*** =*q* $g_1 = r(P_1^2)(x,y)$, $g_2 = r(P_2^2)(x,y)$

Q2. A-t-on $f(x,y) = g(x,y)$? **(1 point)** **(0** si la réponse n'est pas motivée**)**

Non. Contre-exemple :

$$\sqrt{\frac{221}{6}} = \sqrt{36} = 6 \qquad \frac{\sqrt{221}}{\sqrt{6}} = \frac{14}{2} = 7$$

Exercice 3 (2, 2)

On se donne deux relations R_1 et R_2 telles que :

$$R_1(x,y,z) = \begin{cases} \mathbf{V} \text{ si } \frac{x}{y} = z \\ \mathbf{F}\ sinon \end{cases} \qquad R_2(u,v,w) = \begin{cases} \mathbf{V} \text{ si } w = \sqrt{u}\ et\ w = \sqrt{v}\ et\ u \neq v \\ \mathbf{F}\ sinon \end{cases}$$

Q1. Montrer que R_1 est primitive récursive. **(2 points)**

Une relation est PR ssi sa fonction caractéristique est PR.

$$CarR_1(x,y,z) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ si } \frac{x}{y} = z \Rightarrow |\frac{x}{y} - z| = 0 \\ \mathbf{1}\ sinon \end{cases}$$

$$CarR_1(x,y,z) = sg(|\frac{x}{y} - z|)$$

Car$_{\mathbf{R1}}$(*x, y, z*) est une composition de fonction primitives récursives. Elle est donc PR.

Q2. Montrer que R_2 est primitive récursive. **(2 points)**

$$R_2(u,v,w) = \begin{cases} \mathbf{V} \text{ si } w = \sqrt{u}\ et\ w = \sqrt{v}\ et\ u \neq v \\ \mathbf{F}\ sinon \end{cases}$$

$$CarR_2(u,v,w) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ si } |w - \sqrt{u}| = 0\ et\ |w - \sqrt{v}\ | = 0\ et\ |u - v| \neq 0 \\ \mathbf{1}\ sinon \end{cases}$$

$$CarR_2(u,v,w) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ si } (|w - \sqrt{u}| + |w - \sqrt{v}\ |) = 0\ et\ |u - v| \neq 0 \\ \mathbf{1}\ sinon \end{cases}$$

$$CarR_2(u,v,w) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ si } sg(|w - \sqrt{u}| + |w - \sqrt{v}\ |) = 0\ et\ \overline{sg}|u - v| = 0 \\ \mathbf{1}\ sinon \end{cases}$$

$$CarR_2(u,v,w) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ si } sg(|w - \sqrt{u}| + |w - \sqrt{v}\ | + \overline{sg}|u - v|) = 0 \\ \mathbf{1}\ sinon \end{cases}$$

$$\boldsymbol{CarR_2(u,v,w) = sg(|w - \sqrt{u}| + |w - \sqrt{v}\ | + \overline{sg}|u - v|)}$$

Exercice 4 (2, 3, 2)

Q1. Montrer que l'ensemble D = {y| ∃x tel que $x^2 = y$ } est primitif récursif.

D est PR ssi sa fonction caractéristique est PR

$$Car_D(y) = \begin{cases} 0\ si\ \exists x\ |x^2 = y \\ 1\ sinon \end{cases}$$ **0.5 point**

x^2 est une fonction croissante. Par conséquent :

$$Car_D(y) = \begin{cases} 0\ si\ 0^2 = y\ ou\ 1^2 = y\ ou\ 2^2 = y\ ou \ldots\ldots ou\ y^2 = y \\ 1\ sinon \end{cases}$$ **0.5 point**

$$Car_D(y) = sg\prod_{x=0}^{y}|x^2 - y|$$

Q2. Montrer que D est récursif en utilisant la règle de minimisation.

Barème : 1 point si la règle de minimisation est comprise.

Etape 1. On recherche la plus petite valeur de x telle $x^2 \geq y$. Soit x_0 cette valeur.

$\mu_x(x^2 \geq y)$

$\mu_x(y \dot{-} x^2 = 0) = x_0$

Etape 2. On compare $(x_0)^2$ à y.

$y \in$D ssi $x_0^2 = y$

$y \in$D **ssi** $((\mu_x(y \dot{-} \boldsymbol{x^2} = 0))^2 \dot{-} y) = 0$

Car$_D$(y) = $\boldsymbol{sg((\mu_x(y \dot{-} x^2 = 0))^2 \dot{-} y)}$

Q3. Montrer, sans utiliser les résultats de **Q1** et de **Q2** que D est récursivement énumérable.

Barème : 0.5 point si l'étudiant sait ce qu'est un ensemble récursivement énumérable.

D = $\{y | \exists x$ tel que $x^2 = y\}$ $\Rightarrow$ D coïncide avec l'ensemble des carrés parfaits $\Rightarrow$ D coïncide avec l'ensemble des valeurs de la fonction PR $f(x) = x^2 \Rightarrow$ D est récursivement énumérable