Série 2

03.10.2007

Exercice 1

a) Un graphe biparti peut-il contenir un cycle de longueur impaire (c'est-à-dire avec un nombre impair d'arêtes) ? Donner un exemple ou justifier.

b) Donner un algorithme de reconnaissance d'un graphe biparti.

Exercice 2

a) Montrer que tout cycle simple est une union disjointe de cycles élémentaires. Donner un algorithme pour le justifier.

b) Montrer que tout cocycle est une union disjointe de cocycles élémentaires (graphe supposé connexe). Donner un algorithme pour le justifier.

Exercice 3

a) Montrer que G est un graphe fortement connexe si et seulement si G est connexe et tout arc est dans un circuit.

b) Le théorème est-il vrai si on remplace la condition par : G est connexe et tout sommet est dans un circuit.

c) Est-il vrai que si dans un graphe G on a x $\rightsquigarrow$ y et y $\rightsquigarrow$ x, alors $\exists$ un circuit élémentaire passant par x et y ?

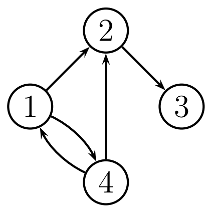
Exercice 4

Etant donné un graphe $G = (V, U)$ avec $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, on considère la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un arc entre } i \text{ et } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On considère l'algorithme suivant :

- pour $i = 1$ à n faire
  - $a_{ii} = 1$
  - pour $j = 1$ à n faire
    - pour $k = 1$ à n faire
      - $a_{jk} = \max\{a_{jk}, a_{ji}a_{ik}\}$

a) Appliquer l'algorithme au graphe suivant :



b) Vérifier qu'on aura $a_{ij} = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists$ un chemin de i à j dans G.

c) Comment trouver les composantes fortement connexes de G avec cet algorithme ?

Question subsidiaire

Rosalie est très jolie. Elle est surtout très élégante. Jamais elle ne porte son chapeau noir sans ses petites bottes de daim noir. Mais quand elle ne porte pas son corset en satin rose, elle ne porte pas non plus sa redingote en velours vert. Lorsqu'elle n'a pas ses bottines de veau blanc, elle met sa redingote en velours vert. Aujourd'hui, Rosalie n'a pas mis son corset en satin rose. Porte-t-elle néanmoins son chapeau noir ?

Corrigé 2

03.10.2007

Exercice 1

a) Non,

- tout graphe biparti G peut être colorer en 2 couleurs. En effet, on sait qu'on peut partitionner G en V_1 et V_2 tel que tout arc de G à une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. On peut donc colorer les sommets de V_1 avec la couleur 1 et les sommets de V_2 avec la couleur 2.
- un cycle impair nécessite 3 couleurs pour être colorer.

$\Rightarrow$ contradiction.

b) *Algorithme*
$W = V$;
choisir un sommet $x \in V$ et le marquer+;
tant que $W \neq \emptyset$, faire
– choisir un sommet marqué v dans W;
– marquer tous ses voisins avec le signe opposé;
– si un sommet reçoit 2 signes opposés : STOP, le graphe n'est pas biparti;
– $W = W - \{v\}$.

Si chaque sommet a reçu un seul signe alors on a $G = (V_1, V_2, E)$ avec $V_1 = \{v \in V | v \text{ marqué } +\}$ et $V_2 = \{v \in V | v \text{ marqué } -\}$.

Exercice 2

a) *Algorithme*
Donnée : cycle $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n = v_1)$
Résultat : union disjointe de cycles élémentaires $C_1, C_2, \ldots, C_p$

(i) poser $k = 1$;
(ii) pour $i = 1$ à n, faire

(1) si v est marqué $\Rightarrow \exists\ j < i$ tel que $v_i = v_j$ et tel que $\nexists\ k$ avec $v_k = v_i$ et $j < k < i$;
poser $C_k = (v_j, v_{j+1}, \ldots, v_i = v_j)$;
enlever les arêtes de C_k ;
$k = k + 1$;

(2) sinon marquer v_i ;

Fin.

Clairement les C_k sont des cycles élémentaires, car on s'arête dès qu'un sommet est rencontré pour la deuxième fois. Ils sont forcément disjoints car on enlève les arêtes d'un C_k trouvé. Comme on parcourt tous les sommets du cycle C, la réunion des C_k donne bien C.

b) *Algorithme*
Donnée : cocycle $\omega(V')$
Résultat : union disjointe de cocycles élémentaires ω_j^i

(i) si $G(V')$ et $G(V-V')$ sont connexes, STOP : $\omega(V')$ est élémentaire ;
(ii) sinon, déterminer les composantes connexes $G(V_1{}'), \ldots, G(V_m^{'})$ de $G(V')$ ainsi que les cocycles $\omega(V_1^{'}), \ldots, \omega(V_m^{'})$;
(iii) pour $j = 1$ à m, faire

(1) soit $C_j^1, \ldots, C_j^{p_j}$ les composantes connexes de $G - V_j^{'}$;
poser $\omega_j^i = \omega(C_j^i)$ pour $i = 1, \ldots, p_j$;

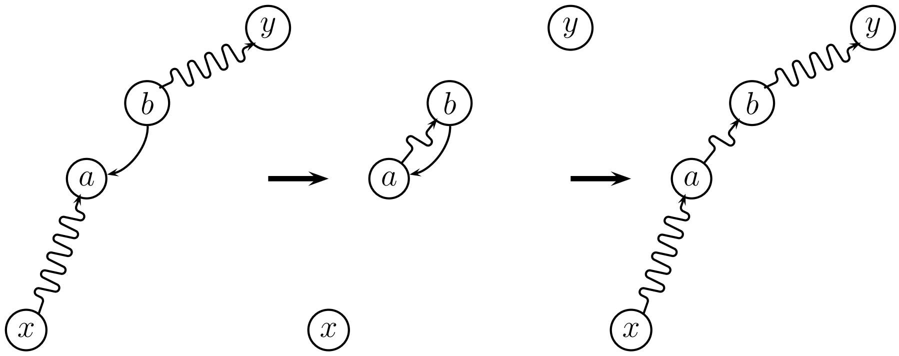
Fin.

Remarquons que $\omega(V') = \omega(V_1^{'}) \cup \omega(V_2^{'}) \cup \ldots \cup \omega(V_m^{'})$ et que les cocycles $\omega(V_1^{'}), \omega(V_2^{'}), \ldots, \omega(V_m^{'})$ sont deux à deux disjoints. Il suffit donc de décomposer chaque $\omega(V_j^{'})$ en cocycles élémentaires disjoints. On constate que $\omega(V_j^{'}) = \bigcup_{i=1}^{p_j} \omega(C_j^i)$ et que chaque $\omega(C_j^i)$ est un cocycle élémentaire qui joint C_j^i et $V_j^{'} \cup (\bigcup_{k \neq i} C_j^k)$, deux sous-graphes connexes. De plus les $\omega(C_j^i)$ sont disjoints pour $i = 1, \ldots, p_j$.

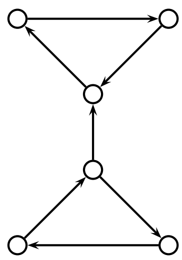
Exercice 3

a) $\Rightarrow$ Soit un arc (x, y). Puisque G est fortement connexe, $\exists$ un chemin de y à x. Si l'on ajoute à la fin de ce chemin l'arc (x, y), on obtient un circuit qui contient (x, y).
$\Leftarrow$ Soit deux sommets x et y. On veut montrer qu'il existe un chemin de x à y.
On sait qu'il existe une chaîne de x à y car G est connexe. Dans cette

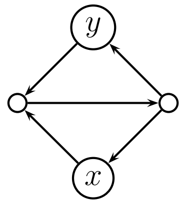
chaîne, s'il existe un arc (b, a) dans le "mauvais" sens alors on applique la transformation suivante :
On sait qu'il existe un circuit contenant (b, a), donc un chemin $a \rightsquigarrow b$. On peut donc remplacer (b, a) par $a \rightsquigarrow b$.
Grâce à cette transformation, on a supprimé un arc "inverse" dans la chaîne de x à y. On peut continuer cette modification jusqu'à obtenir un chemin $x \rightsquigarrow y$.



b) Non, contre-exemple :



c) Non, contre-exemple :



Exercice 4

a) Initialisation : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$i = 1 : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad i = 2 : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$i = 3 : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad i = 4 : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\Rightarrow$ L'algorithme peut être vu de la façon suivante : on parcourt tous les sommets du graphe l'un après l'autre et à chaque fois, on modifie le graphe en reliant tous les prédécesseurs du sommet courant à tous ses successeurs, puis on passe au sommet suivant jusqu'à ce qu'on ait parcouru tous les sommets. On voit donc clairement que si $a_{ij} = 1$ (c'est-à-dire qu'il y a un arc entre i et j dans le graphe résultant à la fin de l'algorithme), alors il existe un chemin entre i et j dans le graphe de départ.

$\Leftarrow$ Par récurrence sur la longueur l du chemin. On remarque au préalable que le seul changement que l'algorithme peut faire sur un a_{ij} est de le faire passer de 0 à 1.

- $l = 1$: si il existe un chemin de longueur 1 (c'est-à-dire un arc) entre i et j, alors $a_{ij} = 1$ par initialisation.
- Supposons que pour tout chemin de longueur $l < n$ l'élément correspondant dans la matrice vaille 1.

  Soit x_1 et x_{n+1} tels que il existe un chemin de longueur n entre x_1 et x_{n+1}, mais sans chemin de longueur $l < n$ (sinon, ça serait prouvé). Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ la suite des sommets parcourut par ce chemin. Soit $x_m \in \{x_j\}_{1<j<n+1}$ le dernier sommet du chemin parcourut par la première boucle de l'algorithme.

  On aura alors $a_{x_1 x_{n+1}} = \max\{a_{x_1 x_{n+1}}, a_{x_1 x_m} a_{x_m x_{n+1}}\}$.

  Or, il exite un chemin de longueur $m - 1 < n$ entre x_1 et x_m et un chemin de longueur $n - m + 1 < n$ entre x_m et x_{n+1} donc $a_{x_1 x_m} = a_{x_m x_{n+1}} = 1$. On aura donc $a_{x_1 x_{n+1}} = 1$.

c) Il suffit de regarde la structure de la matrice. Si on a $a_{ij} = 1 = a_{ji}$ alors les sommets i et j sont dans la même composante connexe.