EXERCICE 1

G6 tel que $L(G6)=\{a^nb^nc^n \mid n > 0\}$

Type 1 G6 = ({a, b, c}, {A,B,C}, P_1, A),	Type 1
P_1 :A → aABC / aBC cB →Bc aB → ab bC → bc bB → bb cC → cc	A → aABc / aBc cB →Bc aB → ab bB → bb

G6.2 tel que $L(G6.2)= \{a^mb^na^m : m \geq n \geq 0\}$

Type 1 $\{a^mb^nc^m : m \geq n \geq 0\}$	Type 0 $\{a^mb^na^m : m \geq n \geq 0\}$	
S → aSBc / aSc / ε cB →Bc aB → ab bB → bb	S"→ S / S' S' → aaS' / ε S → aSBa / aba B → ε aB →Ba bB → bb	S"→ S / S' S' → aaS' / ε S → aSBa / aSa /aba aB →Ba bB → bb

G7 tel que $L(G7) = \{ 0^i1^j2^k, i, j, k \geq 0$ et $k= \max(i,j) \}$

Type 0	Type 0
A → 0AB2 / D / E / ε D → 1D2 / ε E → 0E2 / ε 2B →B2 0B → 01 1B → 11	$L' = \{ 0^i1^j2^j / i \leq j \}$ ou $L'' = \{ 0^i1^j2^i / i \geq j \}$ S → A / C A→ 0AB2 / 1A2 / ε C → 0CB2 / 0C2 / ε 2B → B2 0B → 01

G8 tel que $L(G8) = \{w \in \{a, b, c\}^* / |w|_a \equiv 1[2]$ et $|w|_b \equiv 1[2]\}$

	a pair b pair (A)	a impair b pair (B)	a pair b impair(C)	a impair b impair(D)
A		a	b	
B	a			b
C	b			a
D	a	b		

Type 2	Type 2 sans ε
A → aB / bC / cA B → aA / bD / cB C → bA / aD / cC D → aA / bB / cD / ε	A → aB / bC / cA B → aA / bD / cB / b C → bA / aD / cC / a D → aA / bB / cD / c

Le complément de L= $\{a^n b^n / n \geq 0\}$

$\bar{L}=\{a^n b^n w \text{ avec } w \neq \varepsilon\} \cup \{a^n b^m \text{ avec } n \neq m\} \cup \{bw, w \in X^*\}$
$\bar{L}=$ L_1 $\cup$ L_2 $\cup$ L_3

G_1 : Type 2	G_2 : Type 2	G_3 : Type 3
A → BC B → aBb / ab C → aC / bC / a / b	D → aDb/ E / F E → aE / a F → bF / b	G→ bH H → aH / bH / a / b

G_T
S → A / D / G A → BC B → aBb / ab C → aC / bC / a / b D → aDb/ E / F E → aE / a F → bF / b G→ bH H → aH / bH / a / b

EXERCICE 2

les mots binaires divisibles par 2

Type 3
S → 1A A → 1A / 0A / 0

les mots divisibles par 3

	≡0[3] A	≡1[3] B	≡2[3] C
≡0[3] A	0	1	
≡1[3] B	1		0
≡2[3] C		0	1

Type 3	Type 3 sans ε
S → 1B / 0 A → 0A / 1B / ε B → 1A / 0C C → 0B / 1C	S → 1B / 0 A → 0A / 1B / 0 B → 1A / 0C / 1 C → 0B / 1C

les mots binaires divisibles par 6

Type 3
S → 1B / 0 A → 0A / 1B / 0 B → 1A / 0C C → 0B / 1C

les mots binaires non divisibles par 20

L= non divisibles par 4 ou non divisibles par 5

L= L_1 ∪ L_2

- G_1

	≡0[4] A	≡1[4] B	≡2[4] C	≡3[4] D
≡0[4] A	0	1		
≡1[4] B			0	1
≡2[4] C	0	1		
≡3[4] D			0	1

G_1	G_1 sans ε
$S_1 \rightarrow$ 1B A → 0A / 1B B → 0C / 1D / ε C → 0A / 1B / ε D → 0C / 1D / ε	$S_1 \rightarrow$ 1B / 1 A → 0A / 1B / 1 B → 0C / 1D / 0 / 1 C → 0A / 1B / 1 D → 0C / 1D / 0 / 1

- G_2

	≡0[5] E	≡1[5] F	≡2[5] G	≡3[5] H	≡4[5] I
≡0[5] E	0	1			
≡1[5] F			0	1	
≡2[5] G	1				0
≡3[5] H		0	1		
≡4[5] I				0	1

G_2	G_2 sans ε
$S_2 \rightarrow$ 1F E → 0E /1F F → 0G / 1H / ε G → 0I / 1E / ε H → 0F / 1G / ε I → 0H / 1I / ε	$S_2 \rightarrow$ 1F / 1 E → 0E /1F / 1 F → 0G / 1H / 0 / 1 G → 0I / 1E / 0 H → 0F / 1G / 0 / 1 I → 0H / 1I / 0 / 1

L= non divisibles par 4 ou non divisibles par 5

G_T
S → S_1 / S_2 $S_1 \rightarrow$ 1B / 1 A → 0A / 1B / 1 B → 0C / 1D / 0 / 1 C → 0A / 1B / 1 D → 0C / 1D / 0 / 1 $S_2 \rightarrow$ 1F / 1 E → 0E /1F / 1 F → 0G / 1H / 0 / 1 G → 0I / 1E / 0 H → 0F / 1G / 0 / 1 I → 0H / 1I / 0 / 1

EXERCICE 3

$L = \{|w|_a - 2|w|_b \equiv 1[4]\}$

	≡0[4] A	≡1[4] B	≡2[4] C	≡3[4] D
≡0[4] A		a	b	
≡1[4] B			a	b
≡2[4] C	b			a
≡3[4] D	a	b		

G	G sans ε
$A \to aB / bC$ $B \to aC / bD / \varepsilon$ $C \to aD / bA$ $D \to aA / bB$	$A \to aB / bC / a$ $B \to aC / bD$ $C \to aD / bA$ $D \to aA / bB / b$

EXERCICE 4

$L(G) = \{w \,/\, |w|_a = |w|_b \text{ et } w \in \{a, b\}^*\}$

1. G_1 : $S \to aSb / abS / baS / bSa / Sab / Sba / \varepsilon$ cette grammaire ne permet pas de generer tous les mots.
Contre exemple aabbbbaa $\notin L(G_1)$

G_2 Type 2	G_3 Type 2	G_4 Type 2	G_5 Type 0
$S \to aSbS / bSaS / \varepsilon$	$S \to aSb / bSa / ab / ba / SS$	$S \to aB / bA$ $A \to a / aS / bAA$ $B \to b / bS / aBB$	$S \to aSA / bSB / \varepsilon$ $AB \to BA$ $A \to a$ $B \to b$

2. Dych2= $\{w \in \{a, b\}^* / |w|_a = |w|_b \text{ et } \forall\, w_1 \text{ facteur gauche de } w \text{ alors } |w_1|_a \geq |w_1|_b\}$

G_4: $S \to aSbS / \varepsilon$

EXERCICE 5

G_2 Type 2	G3 Type 2	G_4 Type 1
$S \to ABC$ $A \to aAb / \varepsilon$ $B \to bB / \varepsilon$ $C \to bCc / \varepsilon$	$S \to A / B$ $A \to aAb / aaaC / a / \varepsilon$ $C \to aC / \varepsilon$ $B \to aBb / Bb / \varepsilon$	$S \to aSa / bSb / c$

G_6 Type 0	
$S' \to DSF$ $S \to aAS / bBS / \varepsilon$ $Aa \to aA$ $Ab \to bA$ $Ba \to aB$ $Bb \to bB$	$Da \to aD$ $Db \to bD$ $AF \to Fa$ $BF \to Fb$ $DF \to \varepsilon$

G_7 Type 2	G_8 Type 2
$S \rightarrow A\ /\ B$ $A \rightarrow 0A2\ /\ C$ $C \rightarrow 1C\ /\ C2\ /\ \varepsilon$ $B \rightarrow 0B\ /\ D$ $D \rightarrow 1D2\ /\ E$ $E \rightarrow 2E\ /\ \varepsilon$	X^* $S \rightarrow aS\ /\ bS\ /\ \varepsilon$
G_9 Type 0	G_{10} Type 0
$S' \rightarrow SF$ $S \rightarrow aSa/\ aDAa$ $A \rightarrow AbB/\ bB$ $Ba \rightarrow aB$ $Bb \rightarrow bB$ $Da \rightarrow aD$ $Db \rightarrow bD$ $BF \rightarrow Fb$ $DF \rightarrow \varepsilon$	$S' \rightarrow DSF$ $S \rightarrow aSb/A\ /B$ $A \rightarrow aAC/\varepsilon$ $B \rightarrow bBC/\varepsilon$ $Cb \rightarrow bC$ $Da \rightarrow aD$ $Db \rightarrow bD$ $CF \rightarrow Fab$ $DF \rightarrow \varepsilon$

EXERCICE 6

$L(G)=\{b^ia^j \ \ i+j\neq 0\}$

$S \vdash Sa \vdash bSa \vdash bSaa.....$

$L(G) \subseteq L$

Montrons par récurrence sur $|w|$ que, si $S \rightarrow^n_G w$, alors $w = b^ia^j$ avec $i+j=n$

- pour $|w|=1$:
  $w=a$ on a $a \in L(G)$ car $S \rightarrow a$ et $a \in L$
  $w=b$ on a $b \in L(G)$ car $S \rightarrow b$ et $b \in L$
- $|w|=n$ hypothèse de récurrence est que $w= b^ia^j \in L(G)$ et $b^ia^j \in L$
  $S \vdash^{i} b^iS \vdash^{j-1} b^isa^{j-1} \vdash b^ia^j$

démontrons pour w' d'ordre supérieur

- $|w'|=n+1\ \forall\ w \in L(G) \Rightarrow w \in L$

$w' \in L(G)$

1. $\underbrace{S \vdash^{i} b^iS \vdash^{j-1} b^isa^{j-1}}_{\text{Hypothèse de récurrence}} \vdash b^isaa^{j-1} \vdash^{a} b^ia^{j+1} \in L$

   $\underbrace{S \vdash^{i} b^iS \vdash^{j-1} b^isa^{j-1}}_{\text{Hypothèse de récurrence}} \vdash b^isaa^{j-1} \vdash^{b} b^{i+1}a^j \in L$

2. $\underbrace{S \vdash^{i} b^iS \vdash^{j-1} b^isa^{j-1}}_{\text{Hypothèse de récurrence}} \vdash b^ibsa^{j-1} \vdash^{a} b^{i+1}a^j \in L$

   $\underbrace{S \vdash^{i} b^iS \vdash^{j-1} b^isa^{j-1}}_{\text{Hypothèse de récurrence}} \vdash b^ibsa^{j-1} \vdash^{b} b^{i+2}a^{j-1} \in L$

pour $|w'|=n+1\ \forall\ w' \in L(G) \Rightarrow w' \in L$ donc $L(G) \subseteq L$

----Solution 2--- - pout n=1 $S \rightarrow a$ ou $S \rightarrow b$, $a\in L$ et $b\in L$ - pour n=k+1 $S \rightarrow_G Sa \rightarrow^k_G w$ (respectivement pour bS) appliquons le lemme fondamental avec u_1=S et u_2=b il existe w_1,w_2, k_1,k_2 $u_1 \rightarrow^{k1}_G w_1$, $u_2 \rightarrow^{k2}_G w_2$ $k=k_1+k_2$ avec $w= w_1w_2$. nous avons $u_2=a$, $k_2=0$, $w_2=a$ donc $k=k_1$ et $S \rightarrow^k_G w_1$ Par hypothèse de récurrence on a $w_1=b^ia^j$ avec i+j=k donc $Sa \rightarrow^k_G b^ia^{j+1}$ $w= w_1w_2 = b^ia^j a= b^ia^{j+1} \in L$
$L \subseteq L(G)$: $\forall$ $w \in L$ $w=b^ia^j$ $i+j\neq 0$ - i=0 et $j\neq 0$ $w=a^j$ $S \vdash^{j-1} Sa^{j-1} \vdash a^j$ - j=0 et $i\neq 0$ $w=a^i$ $S \vdash^{i-1} b^{i-1}S \vdash b^i$ - j=0 et $i\neq 0$ $w=b^ia^j$ $S \vdash^i b^iS \vdash^{j-1} b^ia^{j-1}S \vdash b^ia^j$ ou par récurrence sur n=|w| , que pour tout n $b^ia^j\in L(G)$ - pour n=1 donc i=1 ou j=1 $w=a\in L(G)$ ou $w=b\in L(G)$ - démontrons pour n+1 $b^ia^{j+1} \in L$ donc $b^ia^{j+1} \in L(G)$ si la propriété est vraie pour n on a donc $w=b^ia^j\in L(G)$ avec |w|=n $S \rightarrow^n_G b^ia^j$ comme on a $S \rightarrow Sa$ donc $S \rightarrow_G Sa \rightarrow^n_G b^ia^ja$ comme on a $L(G)\subseteq L$ et $L\subseteq L(G)$ alors $L = L(G)$

EXERCICE 7

$L=\{a^nb^p a^q \text{ tq } p = 2n+q \}$

G Type 2
$S \rightarrow S_1S_2$ $S_1 \rightarrow aS_1bb / \varepsilon$ $S_2 \rightarrow bS_2a / \varepsilon$

EXERCICE 8

1. Type 2
2. $L(G) = (a^ib^i)(a^jb^j) \cup (a^ib^i)(b^ka^k)(a^jb^j) \cup (a^k (a^ib^i)(a^jb^j) b^k) = (a^ib^i)(b^ka^k)(a^jb^j) \cup (a^k (a^ib^i)(a^jb^j) b^k)$
$(a^ib^i)(a^jb^j)\subseteq (a^k (a^ib^i)(a^jb^j) b^k)$ et $(a^ib^i)(a^jb^j)\subseteq(a^ib^i)(b^ka^k)(a^jb^j)$

EXERCICE 9

$L(G)=\{0^i1^i2^j \text{ avec } i,j\geq 0\} \cup \{0^i1^j2^j \text{ avec } i,j\geq 0\}$

EXERCICE 10

1. $S \rightarrow 0S0S / S0S0 / 1S / \varepsilon$
2.

	≡0[2] A	≡1[2] B
≡0[2] A	1	0
≡1[2] B	0	1

G type 3	G type 3 sans ε
$A \rightarrow 1A / 0B / \varepsilon$ $B \rightarrow 1B / 0A$	$A \rightarrow 1A/ 0B /1$ $B \rightarrow 1B / 0A / 0$

EXERCICE 11

1. $abab \notin L(G)$
   $aabb \in L(G)$
   $aaaaab \notin L(G)$
   $aabbb \notin L(G)$

2. $L(G)=\{a^ib^j \,/\, i+j=2n\}$

$L(G) \subseteq L$

Montrons par récurrence sur $|w|$ que, si $S \vdash^*_G w$, alors $w = a^ib^j$ avec $i+j=n$ avec n pair

- pour $|w|=0$:
  $w=\varepsilon$ on a $\varepsilon \in L(G)$ car $S \rightarrow \varepsilon$ et $\varepsilon \in L$
- $|w|=n$ hypothèse de récurrence est que $w = a^ib^j$ avec $i+j=n$ et $a^ib^j \in L$
  $S \vdash^* a^iSb^j \vdash a^ib^j$

démontrons pour w' d'ordre supérieur

- $|w|=n+2$ $\forall$ $w \in L(G) \Rightarrow w \in L$

$w \in L(G)$

1. $\underbrace{S \vdash^* a^iSb^j}_{\text{Hypothèse de récurrence}} \vdash a^iaaSb^j \vdash a^{i+2}b^j \in L$ $\quad i+2+j$ est pair

3. $\underbrace{S \vdash^* a^iSb^j}_{\text{Hypothèse de récurrence}} \vdash a^iSbbb^j \vdash a^ib^{j+2} \in L$ $\quad i+j+2$ est pair

4. $\underbrace{S \vdash^* a^iSb^j}_{\text{Hypothèse de récurrence}} \vdash a^iaSbb^j \vdash a^{i+1}b^{j+1} \in L$ $\quad i+1+j+1$ est pair

pour $|w|=n+1$ $\forall$ $w \in L(G) \Rightarrow w \in L$ donc $L(G) \subseteq L$

$L \subseteq L(G)$

$w \in L$ donc $w=a^ib^j$ avec $i+j=n$ avec n est pair

- $i=j$, $w= a^ib^i$ $S \vdash^* a^ib^i$ avec $i+i$ est pair
- $i>j$,$w=a^ib^j$ $S \vdash^* a^jSb^j \vdash^* a^j(aa)^kSb^i \vdash a^{j+2k}b^i$ avec $i= j+2k$ et $i+j+2k$ est pair
- $i<j$,$w=a^ib^j$ $S \vdash^* a^iSb^i \vdash^* a^iS(bb)^kb^i \vdash a^ib^{i+2k}$ avec $j= i+2k$ et avec $j+i+2k$ est pair

on a $L \subseteq L(G)$

---

comme on a $L(G) \subseteq L$ et $L \subseteq L(G)$ alors $L =L(G)$

EXERCICE 12

1.

G type 2
$S \rightarrow AB$ $A \rightarrow 0A1 / 01$ $B \rightarrow 0B / 0$

2. $L_1 = Init(L) = \{w / wx \in L)$

G Type 2
$S \rightarrow A / BC$ $A \rightarrow 0A1 / 0A / \varepsilon$ $B \rightarrow 0B1 / 01$ $C \rightarrow 0C / 0$

2. $L_2 = Fin(L) = \{w / xw \in L)$

G Type 2
$S \rightarrow AB$ $A \rightarrow 0A1 / 1A / \varepsilon$ $B \rightarrow 0B / \varepsilon$

Extra

a^{2^n}	$\{ a^n b^m / n \leq m \leq 2n \}$	$\{ 0^i 1^j / i \geq j \geq 0 \}$	$\{ w \in \{a, b\}^+ /$ $\lvert w \rvert \equiv 0[3] \}$	$\{ 0^i 1^j / i \neq j, i \geq 0, j \geq 0 \}$
S → BCD C → AC / a Aa → aaA AD → D Ba → aB BD → ε	S → aSbB / ε B → b /ε	S → 0S1 / 0S / ε	S → AAAS /AAA A → a / b	$\{ 0^i 1^j / i > j$ ou $i < j \}$ $S \rightarrow S_0 / S_1$ $S_0 \rightarrow 0S_0 1 / 0S_0 / 0$ $S1 \rightarrow 0S_1 1 / S_1 1 / 1$

toutes les suites de abc	$\lvert w \rvert_a > \lvert w \rvert_b$
S → abcA / Aabc A → ε Aa → Sa cA → cS	S → bSa / aSb / abS / baS / Sab / Sba / Sa / aS /a

$\{ a^{2n} b^{3m} / n \geq 1, m \geq 0 \}$	$\{ a^n b^m c^k / 0 \leq n \leq m \leq k \}$	$\{ a.b^{2n}.a / n \geq 0 \}$
S → aaS / Sbbb / aa	S → ACD C → aCB / B / E / ε B → bBE / bE Eb → bE ; E → EE ; ED → cD ; Ec → cc Aa → aA ; Ab → bA ; Ac → cA ; AD → ε	S → aAa ; A → bbA $\mid$ ε

$\{ a^n b^m / 0 \leq m \leq n/2 \}$	$\{ w \in \{a, b, c, d\}^* / w = a^n b^m c^i d^j$ et $n+m = i+j \}$	$\{ a^n b^m c^{n+m} / n, m \geq 0 \}$
S → aS / aaSb / ε	S → ABC B → bBc $\mid$ ε Ab → aA A → ε cC → Cd C → ε	S → aSc $\mid$ A A → bAc $\mid$ ε

a^{n^2}	a^{n^2}	$\lvert w \rvert_a \neq \lvert w \rvert_b$
S' → ISO/ ε S → aSa /A aA → B aB → BC Ca → aCD Da → aD CO → O DO → Oa IB → E Ea → aE EO → ε	S' → ISO S → aSa /A aA → AB Ba → aBC Ca → aC IA → D Da → ε DO → ε	S' → AaA / BbB A → aAbA / bAaA / aA / ε B→ aBbB / bBaB / bB / ε