楕円曲線上、階数 2 の接続のモジュライ空間について

西原寛人

2024 年 2 月 4 日

概要

本修士論文は Fassarella-Loray-Muniz の On the moduli of logarithmic connections on elliptic curves の主張である以下の定理についてまとめた。

定理

$\mathfrak{Con}^{\nu}$ は極を偶数 n 個持つ楕円曲線上階数 2 の対数的接続のモジュライ空間とする。更に下部放物ベクトル束が μ 半安定となるものを $\mathrm{Con}^{\nu}_{I,\epsilon}$ とする。

- $\mathrm{Con}^{\nu}_{I,\epsilon} \simeq S^n$ となる。
- $\mathfrak{Con}^{\nu}$ は、有限個の S^n の複製の貼り合わせで得られる。

設定

設定

- C は楕円曲線とする。
- $D = t_1 + \cdots + t_n$ を C の因子とする。
- $\omega_\infty \in C$ は固定する。
- E は C 上階数 2 のベクトル束で $\det E \simeq \mathscr{O}_C(\omega_\infty)$ を満たすとする。

以下この場合を考える。

定義

楕円曲線 C 上の階数 2 のベクトル束 E_1 を、短完全列

$$0 \to \mathscr{O}_C \to E_1 \to \mathscr{O}_C(\omega_\infty) \to 0$$

が分裂しないようなものと定める。これは同型を除き一意に定まる。

命題

C 上階数 2 のベクトル束 E で $\det E = \mathscr{O}_C(\omega_\infty)$ を満たすものは以下のいずれかになる。

- $E \simeq E_1$
- $E \simeq L \oplus L^{-1}(\omega_\infty)$(ただし L は $\deg L = 1$ を満たす直線束)

定義

$\mu \in (0,1)^n$ とする。モジュライ空間を

$$\mathrm{Bun}^{\mu}_{\omega_\infty} := \left\{ (E,\mathbf{p}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathrm{rank}\, E = 2 \text{ かつ} \\ (E,\mathbf{p}) \text{ は}\mu\text{半安定な放物ベクトル束} \end{array} \right\}$$

と定める。これが射影代数多様体として存在することは Mehta-Seshadri より従う。

命題

$\mu \in \mathfrak{C} := \{\mu \in (0,1)^n | \sum_{k=1}^n \mu_k < 1\}$ なら
$\mathrm{Bun}^{\mu}_{\omega_\infty} = \{(E,\mathbf{p}) | E \simeq E_1\}$ となる。特に $\mathrm{Bun}^{\mu}_{\omega_\infty} \simeq \left(\mathbb{P}^1\right)^n$ となる。

接続のモジュライ空間

$\nu = (\nu_1^+, \nu_1^-, \ldots, \nu_n^+, \nu_n^-) \in \mathbb{C}^{2n}$ は以下ふたつを満たすとする。

- 全ての $a_k \in \{+, -\}$ に対して $\nu_1^{a_1} + \cdots + \nu_n^{a_n} \notin \mathbb{Z}$
- 全ての $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\nu_k^+ - \nu_k^- \notin \{0, 1, -1\}$

$\zeta : \mathscr{O}_C(\omega_\infty) \to \mathscr{O}_C(\omega_\infty) \otimes \Omega_C^1(D)$: 対数的接続 で
$\mathrm{Res}_{t_k}(\zeta) = \nu_k^+ + \nu_k^-$ を満たすものを固定する。

定義

$$\mathfrak{Con}^\nu := \left\{ (E, \nabla) \middle| \begin{array}{l} \nabla \text{ の固有値は} \nu \text{であり、} \\ \det E = \mathscr{O}_C(\omega_\infty), \mathrm{tr}(\nabla) = \zeta \end{array} \right\} / \sim$$

$$\mathfrak{Con}_{st}^\nu := \left\{ (E, \nabla) \in \mathfrak{Con}^\nu \middle| \begin{array}{l} {}^\exists \epsilon \in \{+, -\}^n, {}^\exists I \subset \{1, \ldots, n\} \\ \mu \in \{\mu \in (0,1)^n | \sum_{k=1}^n \mu_k < 1\} \\ s.t. \quad (E, \mathbf{p}^\epsilon(\nabla)) \in \mathrm{Bun}_{\omega_\infty}^{\phi_I(\mu)} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{Con}^\nu := \{(E, \nabla) \in \mathfrak{Con}^\nu | E \simeq E_1\} \subset \mathfrak{Con}_{st}^\nu$$

定理 [1] Fassarella-Loray-Muniz

$\Delta \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を対角成分として、$S := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \Delta$ とすると

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Par}: & \mathrm{Con}^{\nu} & \to & S^n \\ & (E_1, \nabla) & \mapsto & (p_1^+(\nabla), p_1^-(\nabla); \cdots ; p_n^+(\nabla), p_n^-(\nabla)) \end{array}$$

が定まり、これは同型になる。

証明.

- $([z_j, w_j], [u_j, v_j])_{1 \le j \le n} \in S^n$ に対して
  $A_j := \begin{pmatrix} z_j & u_j \\ w_j & v_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_j^+ & 0 \\ 0 & \nu_j^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_j & u_j \\ w_j & v_j \end{pmatrix}^{-1}$ と定める。
- A_j から局所的な接続 $\nabla_j : E_1|_{U_j} \to E_1|_{U_j} \otimes \Omega^1_C(D)$ を構成する。
- $\begin{cases} [(\nabla_i - \nabla_j)] \in \mathrm{H}^1(\mathcal{E}nd(E_1) \otimes \Omega^1_C) = \mathbb{C} \\ \mathrm{tr}(\nabla_i - \nabla_j) = 0 \end{cases}$
  より ∇_j たちは貼り合う。

■

初等変換

$I \subset \{1, \ldots, n\}$ として、$\phi_I : (0,1)^n \to (0,1)^n$ を

$$\phi_I(\mu_i) := \begin{cases} 1 - \mu_i & (i \in I) \\ \mu_i & (i \notin I) \end{cases}$$ と定める。

命題

$\mu \in \mathfrak{C} = \{\mu | \sum_{k=1}^{n} \mu_k < 1\}$ で $|I|$ は偶数とする。
$L_0^{\otimes 2} = \mathscr{O}_C\left(\sum_{i \in I} t_i\right)$ を満たす直線束 L_0 をひとつ固定する。すると写像

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{elm}_I : & \mathrm{Bun}_{\omega_\infty}^{\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{\omega_\infty}^{\phi_I(\mu)} \\ & (E, \mathbf{p}) & \longmapsto & (E' \otimes L_0, \mathbf{p}') \end{array}$$

が定まりこれは同型写像である。ただし
$E' := \mathrm{Ker}\left(E \to \bigoplus_{i \in I} E|_{t_i}/p_i\right)$ と定める。

命題

$I \subset \{1, \ldots, n\}$ で $|I|$ は偶数、$\mu \in \mathfrak{C} = \{\mu | \sum_{k=1}^{n} \mu_k < 1\}$ とする。

$$\Gamma_I := \left\{ (E_1, \mathbf{p}) \in \mathrm{Bun}^{\mu}_{\omega_\infty} \simeq (\mathbb{P}^1)^n \;\middle|\; \begin{array}{l} (E_1, \mathbf{p}) \text{ は} \phi_I(\mu) \text{ 半安定でない} \\ \text{放物ベクトル束} \end{array} \right\}$$

と部分多様体を定める。すると

$$\Gamma_I \simeq V \times (\mathbb{P}^1)^{n-|I|}$$

$$V := \left\{ \mathbf{p} \in \prod_{i=1}^{|I|} \mathbb{P}(E_1|_{t_i}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^{\exists}L : \text{直線束}\,{}^{\exists}\phi \in \mathrm{Hom}(L, E_1) \setminus \{0\} s.t. \\ \deg L = 1 - \frac{|I|}{2}, {}^{\forall}i \in I : \phi(L|_{t_i}) \subset p_i \end{array} \right\}$$

となる。特に V は既約な超平面で次数は $(2, \ldots, 2)$ となる。

定理 [2] Fassarella-Loray-Muniz

$\mathfrak{Con}^{\nu}_{st}$ は有限個の S^n に同型なものの貼り合わせで得られる。

補題

$|I|$ は偶数で $\mu \in \mathfrak{C} = \{\mu | \sum_{k=1}^{n} \mu_k < 1\}$、$\epsilon \in \{+,-\}^n$ とする。
$\mathrm{Con}^{\nu}_{I,\epsilon}$ を

$$\mathrm{Con}^{\nu}_{I,\epsilon} := \left\{ (E,\nabla) \in \mathfrak{Con}^{\nu} \middle| (E, \mathbf{p}^{\epsilon}(\nabla)) \in \mathrm{Bun}^{\phi_I(\mu)}_{\omega_\infty} \right\}$$

と定めると以下の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Con}^{\nu}_{I,\epsilon} \arrow[r, "\Phi^{\epsilon}_{I}", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi_\epsilon"] & \mathrm{Con}^{\phi^{\epsilon}_{I}(\nu)} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Bun}^{\phi_I(\mu)}_{\omega_\infty} \arrow[r, "\mathrm{elm}^{I}", "\simeq"'] & \mathrm{Bun}^{\mu}_{\omega_\infty}
\end{tikzcd}$$

定理 [2] の証明

- $\mathfrak{Con}^{\nu}_{st} = \bigcup_{I,\epsilon} \mathrm{Con}^{\nu}_{I,\epsilon}$ と開被覆をとれる。
- 以下の図式が可換であった。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Con}^{\nu}_{I,\epsilon} \arrow[r, "\Phi^{\epsilon}_{I}", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi_{\epsilon}"] & \mathrm{Con}^{\phi^{\epsilon}_{I}(\nu)} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Bun}^{\phi_I(\mu)}_{\omega_\infty} \arrow[r, "\mathrm{elm}^{I}", "\simeq"'] & \mathrm{Bun}^{\mu}_{\omega_\infty}
\end{tikzcd}$$

- 定理 [1] より $\mathrm{Con}^{\phi^{\epsilon}_{I}(\nu)} \simeq S^n$ であった。

定理 (再掲: Fassarella-Loray-Muniz)

n が偶数のときは $\mathfrak{Con}^{\nu} = \mathfrak{Con}^{\nu}_{st}$ となる。特に $\mathfrak{Con}^{\nu}$ も有限個の S^n に同型なものの貼り合わせで得られる。