概要

$\star$ が付いている 5 つの型は完璧に理解しましょう。ここに無いが知っておくべき漸化式の型はあと 3 つ程ありますが、兎に角この 5 つを完璧にしましょう。

1　漸化式で必須の 5 つの形

1. $\star$（等差型）$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$
2. $\star$（等比型）$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$
3. $\star$（階差型）$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 2n + 5$
4. $\star$（階比型）$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3^n$

文字を置いて解く形（等比型に帰着）

1. $\star$　$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3$
2. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3n + 4$
3. $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + n^2 - 2n + 5$

2　応用

共通テストなどでよくある問題です。誘導にのれるようにしましょう。

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 2 \cdot 4^n$ の一般項を求めたい。

1. $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおき、$\{b_n\}$ に関する漸化式を作った後に b_n を求める。
2. a_n はいくらか。
3. （発展）誘導なしで解く（等比型に帰着できる）。

3　解説

合っていると思いますが、計算間違いしていたら教えてください。覚えるのではなく、理解してください。初学者にいちから教えられるくらい理解してください（数学は全てそう）。

3.1　漸化式で必須の 5 つの形

1. 等差数列の一般項です。答え：$a_n = 3n - 1$
2. 等比数列の一般項です。答え：$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
3. 等差数列の和の公式 $\left(\dfrac{1}{2}(\text{初項} + \text{末項}) \cdot \text{項数}\right)$ を使いましょう。答え：$a_n = -n^2 + 6n - 3$
4. 等比数列の和の公式 $\left(\dfrac{\text{初項} - \text{末項} \cdot \text{公比}}{1 - \text{公比}}\right)$ を使いましょう。答え：$a_n = \dfrac{1}{2}(3^n + 1)$

3.2　文字を置いて解く形

1. $a_{n+1} - \alpha = \beta(a_n - \alpha)$ となる α, β を見つければ等比型に帰着されます。答え：$a_n = 3 - 2^n$
2. $a_{n+1} - \alpha(n+1) - \beta = \gamma(a_n - \alpha n - \beta)$ となる α, β, γ を見つければ等比型に帰着されます。答え：$a_n = 3n - 2^{n-1} - 1$
3. 上ふたつと同じです。答え：$a_n = \dfrac{1}{2}(-n^2 + n + 3^{n+1} - 5)$

3.3　応用

1. 答え：$b_{n+1} = b_n + 2^n$ なので $b_n = 2^n - \dfrac{3}{2}$(この解法は覚えるべきです。共通テストでは誘導がつくことが多いですが、二次試験ではつかないと思います。)
2. 答え：$a_n = 4^n - 3 \cdot 2^{n-1}$
3. $a_{n+1} - \alpha 4^{n+1} = \beta(a_n - \alpha 4^n)$ となる α, β が求まれば等比型に帰着されます。この形は経験から見つけるしかないです。