Estatística Computacional - Lista 1

Gabriel Lima Novais

October 16, 2019

Exercise 1 (Inversion and Rejection)

(Q1) $F_X(x)$ para $x > a$ será tal que:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}(Y \leq x | Y \geq a) = \frac{\mathrm{P}(a \leq Y \leq x)}{\mathrm{P}(Y \geq a)} = \frac{\int_a^x \lambda e^{-\lambda y} dy}{\int_a^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy} = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda a}} = 1 - e^{-\lambda(x-a)}$$

O algoritmo para simular X pode ser descrito da seguinte maneira:

(1) Faça $U = F_X(X)$ o que nos fornecerá $X = a - \lambda^{-1}\log(1-U)$

(2) Como $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ então $1 - U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Logo simule U

(3) Obtenha $X = a - \lambda^{-1}\log(U)$ com $X \sim Exp(\lambda)$

(Q2) Para o caso em que $a \leq x \leq b$, temos que $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$ não será zero e então:

$$\mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}\left(F_Y^{-1}\left(F_Y(a)(1-U) + F_Y(b)U\right) \leq x\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(F_Y(a)(1-U) + F_Y(b)U \leq F_Y(x)\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(U \leq \frac{F_Y(x) - F_Y(a)}{F_Y(b) - F_Y(a)}\right)$$

$$= \frac{F_Y(x) - F_Y(a)}{F_Y(b) - F_Y(a)}$$

Agora dadas as condições do problema anterior teremos que $F_Y(y) = 1 - \exp(-\lambda y)$ e $b = \infty$ logo $F_Y(b) = 1$.

Dessa maneira chamando de $c = F_Y(a)(1-U) + F_Y(b)U$, fica fácil de ver que $c = F_Y(a)(1 - U) + F_Y(b)U = (1 - \exp(-\lambda a))(1-U) + U$. Por outro lado temos que a inversa de F_Y é tal que $F_Y^{-1}(c) = -\lambda^{-1}\log(1-c)$. Fazendo a substituição em X tal como descrito anteriormente temos que:

$$X = -\lambda^{-1}\log(1 - (1 - \exp(-\lambda a))(1-U) + U)$$

$$= -\lambda^{-1}\log(\exp(-\lambda a)(1-U))$$

$$= a - \lambda^{-1}\log(1-U)$$

Desta maneira chegamos em uma resposta idêntica ao resultado do item anterior.

(Q3) As densidades pedidas são:

- proposal: $q(y) = \lambda\exp(-\lambda y), y \geq 0$
- target: $\pi(x) = \lambda\exp(-\lambda(x-a))1_{x\geq a}$

Para calcular o M, basta fazermos o seguinte:

$$M = \max_x \pi(x)/q(x) = max_x \frac{\lambda e^{(-\lambda(x-a))}1_{x\geq a}}{\lambda e^{(-\lambda x)}, x \geq 0} = e^{\lambda a}$$

Portanto teremos que:

$$\pi(y)/Mq(y) = \begin{cases} 1 & se \quad y \geq a \\ 0 & se \quad y < a \end{cases}$$

Veja que a probabilidade de aceitar uma tentaiva será tal que $\Pr(Y \geq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda y}) = e^{-\lambda y}$. Como queremos o valor esperado do número de tentativas para a primeira aceitação, e esta é aceita com a probabilidade de sucesso acima, então teremos que pelo fato de $Tentativas \sim Geometrica(e^{-\lambda y})$, então $E[Tentativas] = \frac{1}{e^{-\lambda y}} = e^{\lambda y}$. Se $a \gg 1/\lambda$ então $E[Tentativas]$ poderá ser enorme. Logo como a inversão é algo que nos fornece uma função direta, ela é preferida nesses casos.

Exercise 2 (Rejection)

(Q1) Veja que x pode ser aceito tanto no caso da letra b quanto no caso da letra a (casos esses disjuntos). Então, vamos calcular a probabilidade de cada um deles e depois somar para obter a probabilidade total. No primeiro caso temos que:

$$\mathrm{P}(x\ ser\ aceito) = \int_0^1 \mathrm{I}\left(u \leq \frac{h(x)}{M\widetilde{q}(x)}\right)du = \frac{h(x)}{M\widetilde{q}(x)}$$

Já para o segundo caso temos que:

$$\mathrm{P}(x\ ser\ aceito) = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{I}\left(v \leq \frac{\widetilde{\pi}(x)-h(x)}{M\widetilde{q}(x)-h(x)}\right)\mathrm{I}\left(u > \frac{h(x)}{M\widetilde{q}(x)}\right)dudv$$

$$= \left(1 - \frac{h(x)}{M\widetilde{q}(x)}\right)\left(\frac{\widetilde{\pi}(x)-h(x)}{M\widetilde{q}(x)-h(x)}\right)$$

$$= \frac{\tilde{\pi}(x)-h(x)}{M\tilde{q}(x)}$$

Então somando temos:
$$\frac{h(x)}{M\tilde{q}(x)} + \frac{\tilde{\pi}(x) - h(x)}{M\tilde{q}(x)} = \frac{\tilde{\pi}(x)}{M\tilde{q}(x)}$$

Encontrando, portanto, o valor destacado.

(Q2) Veja que:
$$\mathrm{P}(X \in A | X\ aceito) = \frac{\mathrm{P}(X \in A, X\ aceito)}{\mathrm{P}(X\ aceito)}$$

Mas observe que
$$\mathrm{P}(X \in A, X\ aceito) = \int_A \int_0^1 \mathrm{I}\left(v \leq \frac{\widetilde{\pi}(x)}{M\widetilde{q}(x)}\right) q(x)dvdx = \int_A \frac{\widetilde{\pi}(x)}{M\widetilde{q}(x)} q(x)dx$$

Como $\pi(x) = \widetilde{\pi}(x)/Z_\pi$ e $q(x) = \widetilde{q}(x)/Z_q$ então temos que:

$$\mathrm{P}(X \in A, X\ aceito) = \frac{Z_\pi}{MZ_q} \int_A \pi(x)dx$$

De maneira similar obtemos que:
$$\mathrm{P}(X\ aceito) = \frac{Z_\pi}{MZ_q} \int_X \pi(x)dx = \frac{Z_\pi}{MZ_q}$$

Logo temos que $\mathrm{P}(X \in A | X\ aceito) = \int_A \pi(x)dx$, justamente o que queríamos.

(Q3) A probabilidade de X ser aceito apenas na letra c é a mesma dele não ter sido aceito em b. Logo, fazendo pelo complementar:
$$\mathrm{P}(X\ rejeitado\ em\ b) = \int_X \int_0^1 \mathrm{I}\left(u > \frac{h(x)}{M\widetilde{q}(x)}\right) q(x)dudx = \int_X (1 - \frac{h(x)}{M\widetilde{q}(x)})q(x)dx = 1 - \frac{\int_X h(x)dx}{MZ_q}$$

Obtemos então a expressão destacada.

(Q4) Observando o limitante inferior de $\widetilde{\pi}(x)$ podemos entender que $h(x)$ será tal que:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2/2 \quad se \quad |x| \leq \sqrt{2} \\ 0 \quad se \quad c.c. \end{cases}$$

Veja que $M = max_x \frac{\widetilde{\pi}(x)}{\widetilde{q}(x)} = max_x e^{-x^2/2+|x|}$, logo resolvendo o máximo encontramos $x = 1$ e com isso $M = \sqrt{e}$. Com a questão anteirior sabemos a probabilidade de ter que calcular o $\widetilde{\pi}(x)$, pois é apenas na letra c que isso ocorre. Logo a probabilidade será o complementar, ou seja:
$$\frac{\int_X h(x)dx}{MZ_q}$$

Logo, fazendo as contas para $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, temos que $\int_X h(x)dx = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}/6$ e $MZ_q = 2\sqrt{e}$, logo fazendo as contas obtemos aproximadamente 0.57. Esse método será interessante desde que o cálculo de $h(x)$ em termos computacionais seja menor do que $e^{-x^2/2}$.

Exercise 3 (Transformation)

(Q1) Para responder essa questão deveremos calcular o Jacobiano de uma transformação inversa tal que $(y,\theta) = T(u_1,u_2)$ onde $(y,\theta) = (u_1^2 + u_2^2, arctan(\frac{u_2}{u_1}))$. Dessa forma, observando que T é bijetiva uma vez que leva pares de valores pertencentes à esfera de raio 1 ($u_1^2 + u_2^2 \geq 1$) para $(0,1) \times (0,2\pi)$, então temos que: $T^{-1}(y,\theta) = (\sqrt{y}cos\theta, \sqrt{y}sen\theta)$. Portanto o Jacobiano de T^{-1} será o determinante em módulo de:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{cos\theta}{2\sqrt{y}} & -\sqrt{y}sen\theta \\ \frac{sen\theta}{2\sqrt{y}} & \sqrt{y}cos\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Logo, teremos que:

$$f_{Y,\nu}(y,\theta) = f_{U_1,U_2}(T^{-1}(y,\theta)) \times \frac{1}{2} = f_{U_1,U_2}(\sqrt{y}cos\theta, \sqrt{y}sen\theta) \times \frac{1}{2}$$

Como $U_1 e U_2$ são independentes e estão distriubuídas conforme uma Uniforme sabemos que a marginal de cada uma só dependerá de seus limitantes, ou seja:

$f_{U_1,U_2}(\sqrt{y}cos\theta, \sqrt{y}sen\theta) = \frac{I_{[0,1]}(y)}{1-0} \times \frac{I_{[0,2\pi]}(\theta)}{\pi/2-(-\pi/2)} = I_{[0,1]}(y)\frac{I_{[0,2\pi]}(\theta)}{\pi}$

Multiplicando pelo $\frac{1}{2}$ obtemos a expressão pedida.

(Q2) Veja que:

$$P(Y \leq t) = P(U_1^2 + U_2^2 \leq t) = \frac{\pi(\sqrt{t})^2}{\pi(1)^2} = t$$

Isso significa que $Y \sim U(0,1)$. Por outro lado, pelo Box-Muller temos que $\nu \sim U(0,2\pi)$. Logo, tal como nos exemplos de inversão da Exponencial (similar a questão 1 dessa lista), podemos calcular a distribuição de $Z^2 = -2log(Y) \sim Exp(1/2)$. Então, a densidade conjunta é dada por $q(z^2,\theta) = \frac{1}{2}exp(\frac{-z^2}{2})\frac{1}{2\pi}$. Dessa forma temos que, para os x_1 e x_2 a densidade é dada por:

$$\pi(x_1,x_2) = q(z^2,\theta)\left|det\frac{\partial(z^2,\theta)}{\partial(x_1,x_2)}\right|$$

Mas podemos escrever $x_1 = Zcos\theta$ e $x_2 = Zsen\theta$ e dessa forma o determinante pedido na equação acima pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\left|\det\left(\frac{\partial\left(Z^2,\vartheta\right)}{\partial(X_1,X_2)}\right)\right|^{-1} = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Z^2} & \frac{\partial X_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Z^2} & \frac{\partial X_2}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}\right|^{-1} = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\cos\vartheta}{2Z} & -Z\sin\vartheta \\ \frac{\sin\vartheta}{2Z} & Z\cos\vartheta \end{pmatrix}\right|^{-1} =$$

$$= \left|\frac{\cos\vartheta Z\cos\vartheta}{2Z} + \frac{\sin\vartheta Z\sin\vartheta}{2Z}\right|^{-1} = \left|\frac{1}{2}\right|^{-1} = 2$$

Então, temos que $\pi(x_1,x_2) = exp(\frac{-z^2}{2})\frac{1}{2\pi} = exp(\frac{-(x_1^2+x_2^2)}{2})\frac{1}{2\pi}$ que implica que x_1 e x_2 possuem uma distribuição Normal Padrão, uma vez que x_1 e x_2 são duas variáveis independentes.

(Q3) O fato de evitar contas adicionais com funções trigonométricas já é uma grande vantagem desse método sobre o Box-Muller, uma vez que em termos computacionais isso é muito custoso.

Exercise 4 (Transformation)

(Q1) Seja o a área do conjunto G dada por k. Então, temos que $k = \int\int_D dudx$. Mas modificando a variável de (u, v) para $(u, v/u)$ temos que

$$k = \int\int_D dudx = \int\int_0^{\sqrt{\pi(x)Z_\pi}} ududx = \int \frac{\pi(x)Z_\pi}{2}dx < \infty$$

Como (U, V) possuem densidade conjunta de $1/k$, a densidade conjunta de $(U, \frac{V}{U})$ é $\frac{u}{k}$, então $\frac{V}{U}$ possui densidade marginal dada por:

$$\frac{1}{k}\int_0^{\sqrt{\pi(x)Z_\pi}} udu = \frac{\pi(x)Z_\pi}{2k} = \frac{\pi(x)Z_\pi}{\int \pi(x)Z_\pi dx} = \frac{\pi(x)}{\int \pi(x)dx}$$

.

Portanto admite $\pi(x)$ como função de densidade de probabilidade conforme o enunciado.

(Q2) É de fácil entendimento que $0 \leq u \leq \sqrt{\pi(\frac{v}{u})Z_\pi} \leq sup_x\sqrt{Z_\pi\pi(x)}$. Para $v \leq 0$ ser possível, deve existir algum $u \leq 0$ com $0 \leq u^2 \leq Z_\pi\pi(\frac{v}{u})$. Escrevendo $t = \frac{v}{u}$, isso implica que existe $t > 0$ com $v^2 \leq t^2\pi(t)Z_\pi$. Então $(u, v) \in G$ implica que $v \leq \sqrt{sup_x x^2\pi(x)Z_\pi}$. O caso $v < 0$ é análogo ao apresentado. Portanto temos que $G \subseteq R$

(Q3) Fazendo as devidas contas temos que o nosso conjunto R do item anterior será descrito por $R = a \times b = [0, 1] \times [-\sqrt{2/e}, \sqrt{2/e}]$.

Além disso, veja que:

$$u \leq \sqrt{exp(-\frac{(\frac{v^2}{u})}{2})} \Rightarrow v^2 \leq -4u^2 logu$$

Assim um exemplo de algortimo poderia ser o que se segue:

- Gerar variáveis independentes U e V onde $U \sim U_a$ $V \sim U_b$ até que tenhamos o resultado $V^2 \leq -4U^2 logU$
- Obter $\frac{V}{U}$

Exercise 5 (Rejection and Importance Sampling)

(Q1) Utilizando o teorema de Bayes encontramos que:

$$P(X \in A|Xaceito) = \frac{P(X \in A, Xaceito)}{P(Xaceito)}$$

Mas temos que:

$$P(Xaceito) = \int_X \int_0^1 I_{(0,min1,w(x)/c)}(u)q(x)dx = \int_X min(1, w(x)/c)q(x)dx = Z_c$$

Por outro lado temos que:

$$P(X \in A, Xaceito) = \int_A \int_0^1 I_{(0,min1,w(x)/c)}(u)q(x)dudx = \int_A min(1, w(x)/c)q(x)dx$$

Logo, juntando os dois resultados encontramos que:

$$P(X \in A|X aceito) = \frac{\int_A min(1, w(x)/c)q(x)dx}{Z_c} = \int_A \frac{min(1, w(x)/c)q(x)}{Z_c}dx$$

Portanto a densidade procurado será tal que:

$$q^*(x) = \frac{min(1, w(x)/c)q(x)}{Z_c}$$

(Q2) Pelo exercício anterior encontramos que $q^*(x) = \frac{min(1,w(x)/c)q(x)}{Z_c}$. Logo temos que:

$$\frac{\pi(x)}{q^*(x)} = \frac{Z_c}{min(1, w(x)/c)q(x)}\pi(x)$$

Mas sabemos que $w(x) = \frac{\pi(x)}{q(x)}$, portanto encontramos que:

$$\frac{\pi(x)}{q^*(x)} = \frac{Z_c w(x)}{min(1, w(x)/c)}$$

Atentando para o minímo, obtemos que $\frac{1}{min(1,w(x)/c)} = max(1, c/w(x))$. Dessa maneira substituindo na equação acima e observando a multiplicação do $w(x)$ obtemos que:

$$\frac{\pi(x)}{q^*(x)} = Z_c max(w(x), c)$$

Agora vamos calcular os valores esperados:

$$E_{q^*}([w^*(X)]^2) = \int_X \frac{\pi(x)}{q^*(x)}\pi(x)dx$$

$$= Z_c \int_X max(w(x), c)\pi(x)dx = Z_c \int_X max(w(x), c)w(x)q(x)dx =$$

$$= Z_c E_q(max(w(x), c)w(x))$$

E obtemos o resultado pedido.

(Q3) Dúvida!

(Q4) Veja que:

$$E_{q^*}([w^*(X)]^2) = Z_c E_q(max(w(X), c)w(X)) =$$

$$= \frac{1}{c}E_q(min(w(X), c)w(X))E_q(max(w(X), c)w(X)) \leq \frac{1}{c}E_q(min(w(X), c)max(w(X), c)w(X))$$

$$= \frac{1}{c}E_q(cw(x)^2) = E_q([w(x)]^2)$$

Mas mostrar o que a questão pede é o mesmo que provar que $E_{q^*}([w^*(X)]^2) \leq E_q([w(x)]^2)$, pois sabemos que $E_{q^*}([w^*(X)]^2) = E_q([w(X)]^2) = 1$.

Exercise 6 (Rejection and Importance Sampling)

(Q1) Sabemos que:

$$\overline{\pi} = \int_0^1 \overline{\pi}_{X,U}(x,u)du = \int_0^{\frac{w(x)}{M}} Mq(x)du = Mq(x)\frac{w(x)}{M} = \pi(x)$$

Como queríamos demonstrar.

(Q2) Oberve que para $x \in X$ e $u \in [0, \frac{w(x)}{M}]$ temos que $\overline{w}(x,u) = \frac{\overline{\pi}_{X,U}(x,u)}{\overline{q}_{X,U}(x,u)} = \frac{Mq(x)}{q(x)I_{[0,1]}(0,1)}$

Mas sabemos que $u \in [0, \frac{w(x)}{M}]$ então $u \in [0,1]$ e assim $\overline{w}_{X,U}(x,u) = \frac{Mq(x)}{q(x)} = M$. E temos que para quaisquer outros casos $\overline{w}_{X,U}(x,u) = 0$

Agora fazendo para n amostras $(X_i, U_i) \sim \overline{q}_{X,U}$ obtemos:

$$\hat{I}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \phi(X_i)\overline{w}(X_i,U_i)}{\sum_{i=1}^n \overline{w}(X_i,U_i)}$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \phi(X_j)_i$$

Veja que seria o mesmo que ter a proposal $\overline{q}_{X,U}(x,u)$ e ter a target $\overline{\pi}_{X,U}(x,u)$ e aplicar um algoritmo de rejeição de forma a calcular o valor de I. Então esta estimativa será equivalente aquela obtida pelo algoritmo de rejeição até conseguirmos n candidatos de q. Obs: k será a quantidade de pontos com pesos não nulos.

(Q3) Dúvida!

(Q4) Dúvida!

Simulation question (Rejection)

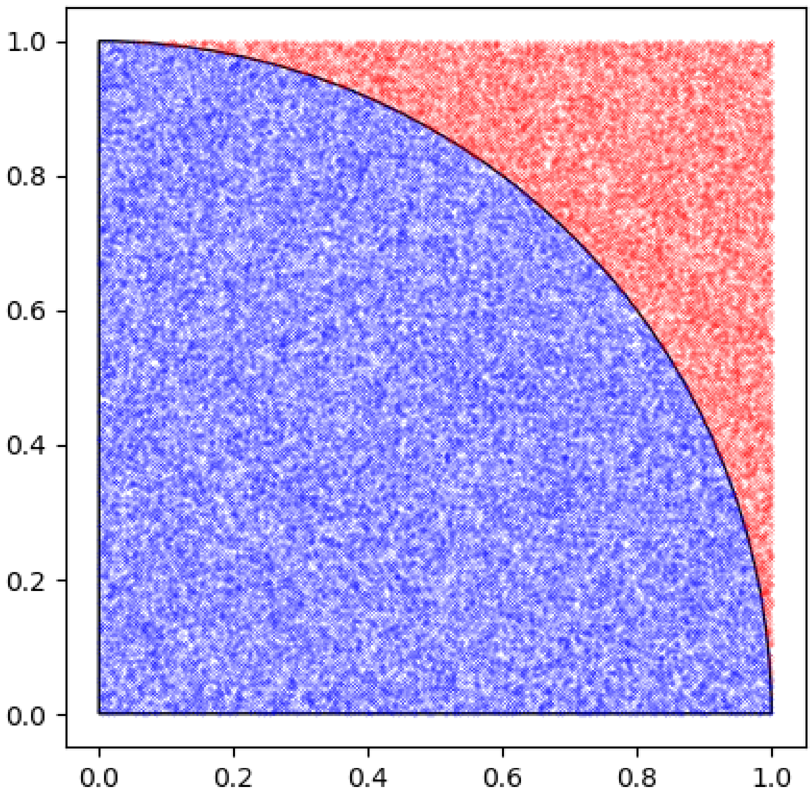
Todas as questões de Simulação foram feitas na linguagem Julia. Os códigos e resultados obtidos em cada questão são os que se seguem abaixo.

(Q1)

```
using Random, LinearAlgebra, PyPlot, PyCall
using LaTeXStrings
patch = pyimport("matplotlib.patches")
Random.seed!(42)

N = 10^5
data    = [[rand(),rand()] for _ in 1:N]
indata  = filter((x)-> (norm(x) <= 1), data)
outdata = filter((x)-> (norm(x) > 1), data)
piApprox = 4*length(indata)/N
pi_estimate = piApprox

print("pi Estimate: ",pi_estimate)


fig,ax = subplots(1,1,figsize=(5,5))
```

```
ax.plot(first.(indata),last.(indata),"b.",ms=0.2)
ax.plot(first.(outdata),last.(outdata),"r.",ms=0.2)
ax.set_aspect("equal")
r1 = patch.Wedge([0,0],1,0, 90,fc="none",ec="black")
ax.add_artist(r1)
```

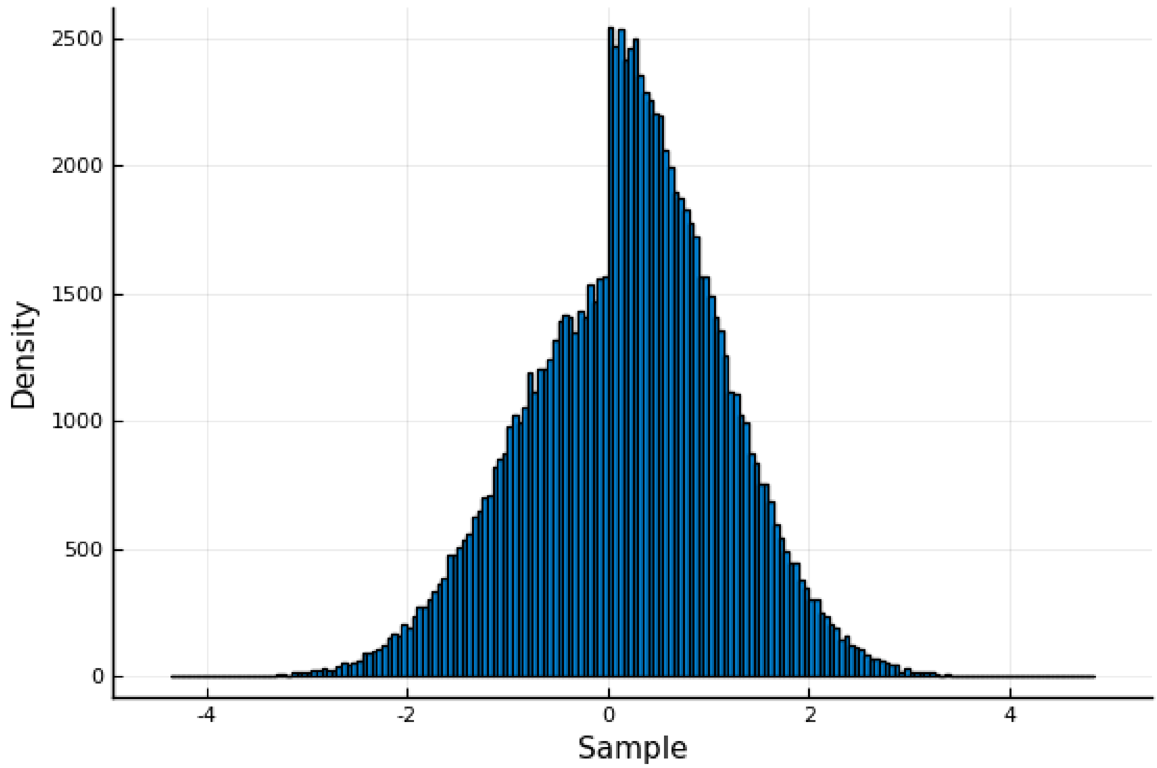
Output:



(Q2)

```
using StatsKit
using Random, LinearAlgebra, PyPlot, PyCall
using Plots; pyplot()
Random.seed!(42)

function boxmuller(n)
   m = floor(n/2)
   a = sqrt.(-2 .* log.(rand(Uniform(0, 1), n)))
   b = -2 * pi .* log.(rand(Uniform(0, 1), n))
   x = a .* cos.(b)
   y = a .*sin.(b)

   return x,y
end

amostra = boxmuller(100000)
histogram(amostra,xlabel = "Sample",ylabel="Density",legend=:none)
```

Output:

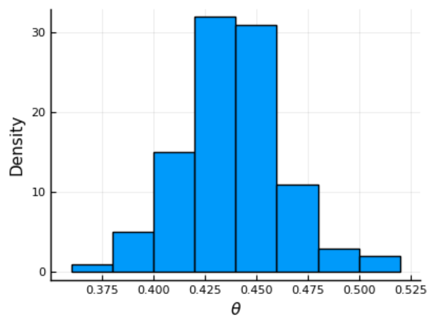


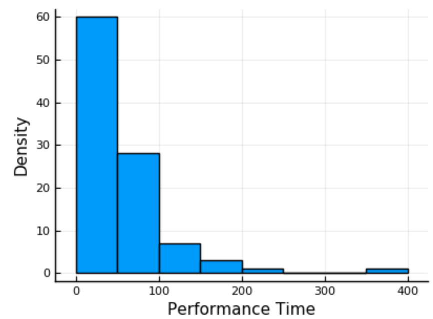
(Q3)

```
using StatsKit
using LaTeXStrings
using Random
using LinearAlgebra
using PyPlot
using PyCall
using Plots; pyplot()

Random.seed!(42)
theta = 0.45

p = [1/2 + theta/4, (1/4) * (1 - theta), (1/4) * (1 - theta), theta/4]
sample = rand(Multinomial(100,p),10)

results_mle = fit_mle(Multinomial,sample).p
mle = results_mle[4]*4
llh = loglikelihood(Multinomial(100,results_mle),sample)
println("Maximum Likelihood Estimator: $mle")
println("Maximum Log Likelihood: $llh")

nsam = 100
nacpt = 0
ncand = 0

ns = zeros(nsam)
t = zeros(nsam)

while nacpt < nsam
    ncand = ncand + 1
    t[nacpt + 1] = t[nacpt + 1] + 1
```

```
    x = rand(Uniform(0, 1), 1)
    p_x = [1/2 + x[1]/4, (1/4) * (1 - x[1]), (1/4) * (1 - x[1]), x[1]/4]
    loga =
        loglikelihood(Multinomial(nsam,p_x),sample)-loglikelihood(Multinomial(nsam,results_mle),sample)
    if log(rand(Uniform(0, 1), 1)[1]) < loga
        nacpt = nacpt + 1
        ns[nacpt] = x[1]
    end
end

println("number of accepted points: $nacpt out of $ncand candidates")

g1 = histogram(ns,xlabel = L"$\theta$",ylabel="Density",legend=:none,size=(400,300))
g2 = histogram(t,xlabel = "Performance Time",ylabel="Density",legend=:none,size=(400,300))
```

Output:

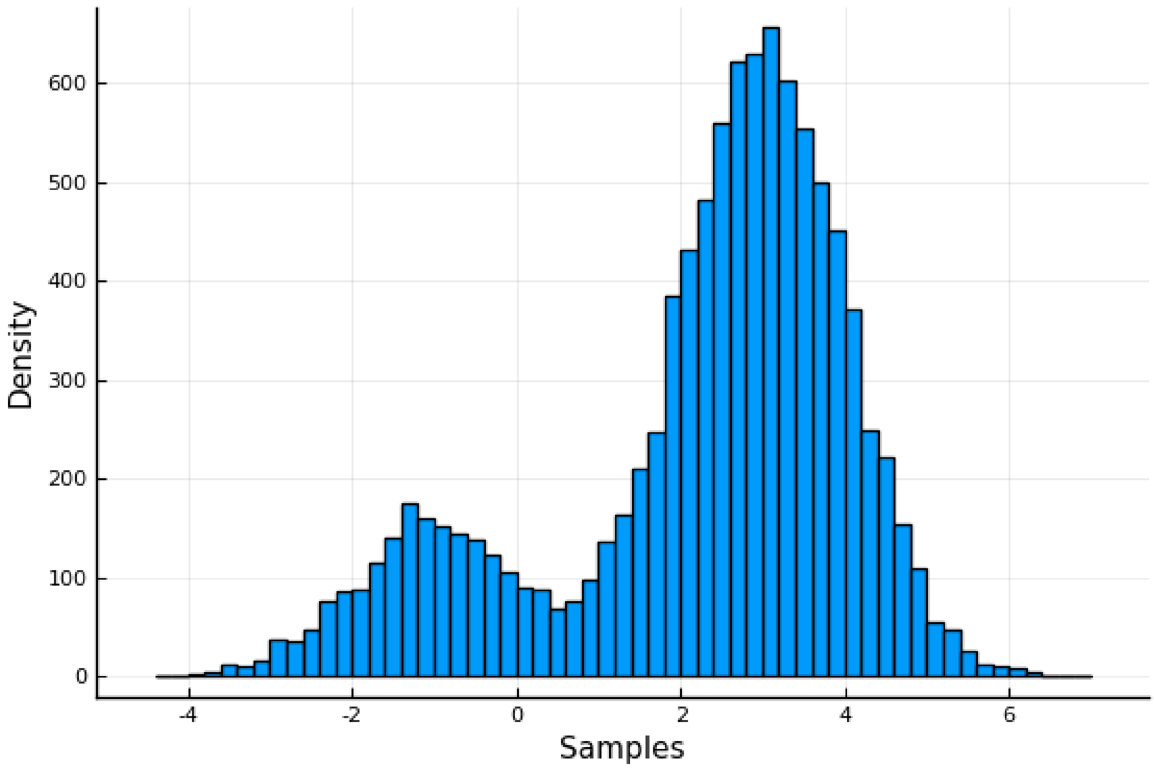




(Q4)

```
using StatsKit
using LaTeXStrings
using Random
using LinearAlgebra
using PyPlot
using PyCall
using Plots; pyplot()

nsam = 10000
prop = [0.2,0.8]
means = [-1,3]
sd = [1,1]

a = zeros(trunc(Int,prop[1]*nsam)).+1
b = zeros(trunc(Int,prop[2]*nsam)).+2
rd_weights = append!(b,a)
aux = []
for i=1:nsam
    rd_index = trunc(Int,floor(rand(Uniform(1,nsam))))
    id = trunc(Int,rd_weights[rd_index])
    result = rand(Normal(means[id],sd[id]))
    append!(aux,result)
    end

histogram(aux,xlabel = "Samples",ylabel="Density",legend=:none)
```

Output:




```
using StatsKit
using LaTeXStrings
using Random
using LinearAlgebra
using PyPlot
using PyCall
using Plots; pyplot()

function aga(x)
    xa = zeros(length(x))
    for i=1:length(x)
        xa[i] = cos(50*x[i])+sin(20*x[i])
        end
    return xa
    end

#Integral from 0 to 1
exact_answer = (sin(50*1)/50-cos(20*1)/20)-(sin(50*0)/50-cos(20*0)/20)
ea4 = round(exact_answer,digits=5)

n1 = 1000
n2 = 1000
mce = zeros(n1)

for i=1:n1
    u = rand(Uniform(0,1),n2)
    w = aga(u)
    mce[i] = abs(mean(w) - ea4)/ea4
    end
histogram(mce,xlabel = "Relative Errors",ylabel="Density",legend=:none)
```

```
n3 = 100
n4 = 100
mce1 = zeros(n3)

for i=1:n3
    beta = rand(Beta(1.3,1.3),n4)
    w = aga(beta)/pdf(Beta(1.3,1.3),beta)
    mce1[i] = abs(mean(w) - ea4)/ea4
    end
histogram(mce1,xlabel = "Relative Errors",ylabel="Density",legend=:none)
```

Output: