QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat és la inducció matemática i molts exercicis per practicar les tècniques de demostració en aquest mètode.

CLASSE D'AVUI 22/10/2020

Fem un exemple de demostració per inducció i treballem el tema de teoria de conjunts.

Veiem en aquest exemple perquè es necessita mirar més d'un cas base:

EX.: Demostreu que $5^n < 27n!$ per a tot $n \geq 0$.

Primer hem fet el cas base per $n = 0$ però al fer el pas inductiu hem vist que necessitàvem mirar també els cassos $n = 1,2,3,4$ i ho hem corregit.

CAS $n = 0,1,2,3,4$ Cal que justifiquem que $5^0 <^{???} 27 \cdot 0!$, $5^1 <^{???} 27 \cdot 1!$, $5^2 <^{???} 27 \cdot 2!$, $5^3 <^{???} 27 \cdot 3!$, $5^4 <^{???} 27 \cdot 4!$,

- El primer cas és cert perquè $5^0 = 1$ i $27 \cdot 0! = 27 \cdot 1 = 27$ i $1 < 27$.
- El segon cas és cert perquè $5^1 = 5$ i $27 \cdot 1! = 27 \cdot 1 = 27$ i $5 < 27$.
- El tercer cas és cert perquè $5^2 = 25$ i $27 \cdot 2! = 27 \cdot 2 = 54$ i $25 < 54$.
- El quart cas és cert perquè $5^3 = 125$ i $27 \cdot 3! = 27 \cdot 6 = 162$ i $125 < 162$.
- El cinquè cas és cert perquè $5^4 = 625$ i $27 \cdot 4! = 27 \cdot 24 = 648$ i $625 < 648$.

CAS $n-1$ **IMPLICA CAS** n Sigui un $n > 4$, suposem que $5^{n-1} < 27(n-1)!$ i hem de demostrar que $5^n <^{???} 27n!$. Calculem els dos membres de la desigualtat per separat:

- $5^n = 5^{n-1}5 < 27(n-1)! \cdot 5 = (n-1)! \cdot 27 \cdot 5$
- $27n! = (n-1)! \cdot 27 \cdot n$

Com que $n > 4$ llavors $5 \leq n$ i d'aquí surt que $5^n < (n-1)! \cdot 27 \cdot 5 \leq (n-1)! \cdot 27 \cdot n = 27n!$, o sigui que $5^n < 27n!$.

3.-CONJUNTS I RELACIONS

3.1 Conjunts

Tenim conjunts i elements entre els quals podem dir si un element pertany a un conjunt o si no hi pertany. Per A un conjunt i x un element escriurem $x \in A$ per dir que x pertany al conjunt A i escriurem $x \notin A$ per dir que x no pertany al conjunt A. Els conjunts els pensem com un sac en el qual estan dins els elements (no tenen un ordre determinat ni poden estar repetits).

Els conjunts els podem donar:

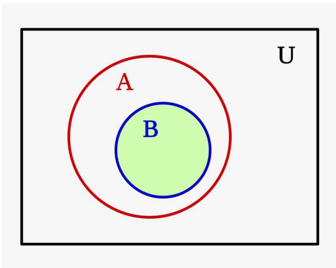
- per una llista dels seus elements entre claus (es diu que donem el conjunt *per extensió*): $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ (conjunt format pels elements $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; es poden posar en l'ordre que es vulgui i no n'hi poden haver repetits). Tindrem que $x \in A \Leftrightarrow x = a_1$ o $x = a_2$ o $x = a_3$ o $\ldots$ o $x = a_n$. Per exemple $A = \{0,2,4,6\}$ és el conjunt format pels elements $0,2,4,6$.

- també els podem donar dient una propietat que els defineixin (es diu que donem el conjunt *per comprensió*): $A = \{x|P(x)\}$ (conjunt format pels elements x que tenen la propietat $P(x)$ i es llegeix que és el conjut dels x tals que satisfan la propietat $P(x)$; la barra vertical de vegades se substitueix per ":" o per "$t.q.$"). Tindrem que $x \in A \Leftrightarrow P(x)$. Per exemple $A = \left\{x|x \text{ natural parell menor o igual que } 6\right\}$ que també se sol escriure com a $A = \left\{x \in \mathbb{N}|x \text{ parell menor o igual que } 6\right\}$. En general escriurem $A = \{x \in B|P(x)\}$ per designar el conjunt format pels elements de B que verifiquen la propietat $P(x)$.

Direm que dos conjunts són iguals quan tenen els mateixos elements (*principi d'extensionalitat*): $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. Tenim un conjunt molt especial que està definit per no tenir cap element: el conjunt buit $\varnothing = \{\} = \{x|x \neq x\}$. Tenim una relació entre conjunts que és la següent:

DEF.: Direm per dos conjunts A, B que B està inclòs dins A (i ho escriurem així: $B \subseteq A$) quan:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$$



Es diu que B és un subconjunt d'A o de vegades es diu que és B és una part de A.

EX.: Siguin $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{a\}$. Raoneu si són certes les afirmacions següents:

$a \in A$ cert perquè a està a la llista que defineix A.

1. $c \in A$
2. $A \subseteq B$
3. $B \subseteq A$
4. $A \subseteq C$
5. $A \subseteq \{a, b, \{a\}\}$
6. $\{a\} \in \{a, b, \{a\}\}$
7. $\{b\} \in \{a, b, \{a\}\}$

1. $a \in A$ cert perquè a està a la llista que defineix A.

2. $c \in A$ falsa perquè c no està a la llista que defineix A.

3. $A \subseteq B$ cert perquè cada element del conjunt A (l'a i el b) pertanyen al conjunt B.

4. $B \subseteq A$ fals ja que $c \in B$ però $c \notin A$ (és un contraexemple del per a tot que defineix la inclusió).

5. $A \subseteq C$ fals ja que $b \in A$ però $b \notin C$ (és un contraexemple).

6. $A \subseteq \{a,b,\{a\}\}$ cert perquè tots els elements de A (l'a i el b) pertanyen al conjunt $\{a,b,\{a\}\}$.

7. $\{a\} \in \{a,b,\{a\}\}$ cert perquè $\{a\}$ és un element del conjunt $\{a,b,\{a\}\}$.

8. $\{b\} \in \{a,b,\{a\}\}$ fals ja que $\{b\}$ no és un element del conjunt $\{a,b,\{a\}\}$; cal tenir clar que no és el mateix $\{b\}$ que b.

S'observa que pel principi d'extensionalitat podem afirmar que:
PROP.: Siguin A,B conjunts. Aleshores $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$.
DEM.: OK.

Tenim també aquestes propietats bàsiques:
PROP.: Siguin A,B,C conjunts. Aleshores

1. $\varnothing \subseteq A$

2. $A \subseteq A$

3. $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$

DEM.:Demostrem la propietat 3: suposant que és cert $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ volem demostrar que és cert $A \subseteq C$; per justificar la inclusió sigui un $x \in A$ i volem veure que $x \in C$; però això és molt fàcil utilitzant les hipòtesis: $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$ com es volia demostrar.

EX.: (1) Siguin $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $Z = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$. Dieu quines afirmacions són certes i quines són falses:

a) $1 \in X$, $1 \in Y$, $1 \in Z$.

b) $\{1\} \in X$, $\{1\} \in Y$, $\{1\} \in Z$, $\{1\} \subseteq X$, $\{1\} \subseteq Y$, $\{1\} \subseteq Z$, $\{3,4\} \in X$

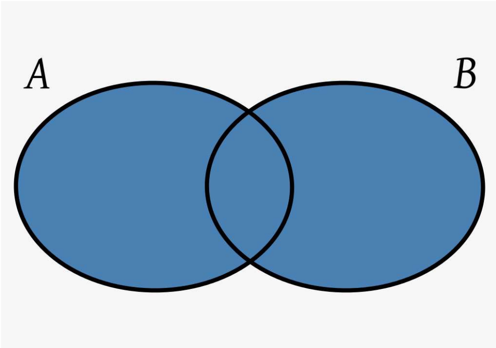
a) $1 \in X$ és certa, $1 \in Y$ és falsa, $1 \in Z$ és falsa; seria cert el següent: $\{1\} \in Z$.

b) $\{1\} \in X$ és falsa, $\{1\} \in Y$ és falsa, $\{1\} \in Z$ és certa, $\{1\} \subseteq X$ és certa, $\{1\} \subseteq Y$ és falsa, $\{1\} \subseteq Z$ és falsa perquè s'ha de mirar si tot element de $\{1\}$ és element de Z; mirem el primer (i únic) element de $\{1\}$ que és 1 i ens preguntem si pertany a Z, és a dir, si $1 \in Z$ però això no és cert,per tant no és certa la inclusió; sí que és cert el següent: $\{\{1\}\} \subseteq Z$; $\{3,4\} \in X$ és falsa.

Entre conjunts podem definir tres primeres operacions importants: reunió, intersecció i diferència. La primera és la reunió (o unió) de dos conjunts (que correspon intuïtivament a ficar en un mateix sac els elements dels dos conjunts):

DEF.: Donats dos conjunts A,B anomenem reunió (o unió) al conjunt

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



EX.: Siguin $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5,6\}$, $C = \{\{1\},2,3\}$, $D = \{\{1\},\{2,3\},5,6\}$. Calculeu $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$, $B \cup D$, $B \cup \varnothing$.

Tenim molt fàcilment: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,\{1\}\}$, $A \cup D = \{1,2,3,4,\{1\},\{2,3\},5,6\}$, $B \cup D = B = \{1,2,5,6,\{1\},\{2,3\}\}$, $B \cup \varnothing = B = \{1,2,5,6\}$.

Les principals propietats que satisfà aquesta operació són:

PROP.: Siguin A,B,C conjunts. Aleshores

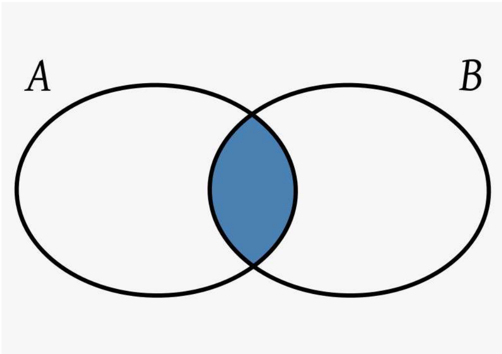
1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \varnothing = A$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
5. $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
7. $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ i $B \subseteq C$

DEM.: La propietat 1 és certa per la propietat que diu que $p \vee p \equiv p$, perquè simplement cal demostrar que $a \in A \vee a \in A \Leftrightarrow a \in A$. La propietat 3 es dedueix de la mateixa manera de l'associativitat de la $\vee$. La propietat 5 surt de la tautologia $p \to p \vee q$ simplement fixant-se que si agafem un $a \in A$ llavors podem afirmar que $a \in A$ o $a \in B$, o sigui $a \in A \cup B$.

La segona operació és la interesecció:

DEF.: Donats dos conjunts A,B anomenem intersecció al conjunt

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



EX.: Siguin $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5,6\}$, $C = \{\{1\},2,3\}$, $D = \{\{1\},\{2,3\},5,6\}$. Calculeu $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap D$, $B \cap D$, $B \cap \varnothing$.

Els càlculs donen: $A \cap B = \{1,2\}$, $A \cap C = \{2,3\}$, $C \cap D = \{\{1\}\}$, $B \cap D = \{5,6\}$, $B \cap \varnothing = \varnothing$.

Les principals propietats que satisfà aquesta operació són:

PROP.: Siguin A,B,C conjunts. Aleshores

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
7. $C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A$ i $C \subseteq B$

DEM.: La propietat 4 es dedueix de l'associativitat de la $\wedge$. La propietat 5 es dedueix del fet que és una tautologia $p \wedge q \rightarrow p$ simplement fixant-se que si agafem un $a \in A \cap B$ llavors podem afirmar que $a \in A$ i $a \in B$, o sigui que podem deduir $a \in A$.

Quan la intersecció de dos conjunts és buida es diu que són disjunts:

DEF.: Dos conjunts A,B són disjunts si i només si $A \cap B = \varnothing$.