QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat és teoria de conjunts fins a conjunt de les parts.

CLASSE D'AVUI 29/10/2020

Continuem amb la teoria de conjunts.

EX.: (43) Demostreu que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Demostrem les dues inclusions:

- $\subseteq$: si $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow X \subseteq A \cap B \Rightarrow X \subseteq A$ i $\Rightarrow X \subseteq B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ i $X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\supseteq$: si $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ i $X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \subseteq A$ i $X \subseteq B \Rightarrow$ $X \subseteq A \cap B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

A posteriori veiem que en el fons les dues inclusions es poden demostrar a la vegada perquè es poden canviar els $\Rightarrow$ per $\Leftrightarrow$.

EX.: (44) Demostreu que $X \in \mathcal{P}(A), Y \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

Suposem que $X \in \mathcal{P}(A), Y \in \mathcal{P}(B)$ (o sigui $X \subseteq A, Y \subseteq B$) i ara hem de justificar que és cert $X \cap Y \in^{???} \mathcal{P}(A \cap B)$. Però això és trivial perquè sabem que $X \subseteq A, Y \subseteq B$ i llavors $X \cap Y \subseteq A \cap B \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$ com volíem demostrar.

El darrer concepte que tractarem de teoria de conjunts és el de parella ordenada i producte cartesià:

DEF.: Siguin dos conjunts A i B anomenem:

- la parella ordenada formada per $a \in A$ i $b \in B$ és el parell (a,b) caracteritzades $(a,b) = (a',b')$ si i només si $a = a'$ i $b = b'$ (no és una definició molt formal)
- el producte cartesià del conjunt A pel conjunt B és per definició $A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$

EX.: Calculeu $\{1,2,3,4\} \times \{a,b\}$.

$\{1,2,3,4\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b)\}$

Com a propietats importants a destacar del producte cartesià tenim:

PROP.: Sigui A un conjunt. Aleshores:

1. $A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
5. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

DEM.: (56) Demostrem 1: s'ha de veure que $A \times \varnothing \supseteq \varnothing$ però això és cert sempre; i també s'ha de veure $A \times \varnothing \subseteq^{???} \varnothing$ i això és cert perquè si $(x,y) \in A \times \varnothing$ arribarem a una contradicció: $(x,y) \in A \times \varnothing \Rightarrow x \in A$ i $y \in \varnothing$ cosa impossible perquè el conjunt buit no té elements. L'altre igualtat es raona de la mateixa manera.

Demostrem 2:

- $(a,b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ i $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ i $b \in B$ i $b \in C$
- $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Leftrightarrow (a,b) \in A \times B$ i $(a,b) \in A \times C \Leftrightarrow a \in A$ i $b \in B$ i $a \in A$ i $b \in C$

les dues expressions són equivalents i per tant com que ho hem demostrat amb $\Leftrightarrow$ queda justificada la igualtat de conjunts.

EX.: (57) Demostreu que $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$ o $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.

- $\Rightarrow$: suposem que és cert que $A \times B = B \times A$ i demostrem que $A = B$ o $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$; per demostrar això suposem que $A \neq \varnothing$ i $B \neq \varnothing$ i justifiquem que $A =^{???} B$: sigui un $a \in A$ (sabem que n'hi ha perquè no és buit) i vull demostrar que $a \in B$; com que $B \neq \varnothing$ agafo un element qualsevol $b \in B$ i llavors puc afirmar que $(a,b) \in A \times B = B \times A \Rightarrow (a,b) \in B \times A \Rightarrow a \in B$ i $b \in A$, i en particular $a \in B$ just el que volia demostrar; per demostrar l'altre inclusió es procedeix de la mateixa manera.
- $\Leftarrow$: suposem que és cert que $A = B$ o $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$ i hem de deduir que $A \times B =^{???} B \times A$, per tant haurem d'analitzar tres cassos; si $A = \varnothing$ sabem per la propìetat 1 que $A \times B = A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A = B \times A$; si $B = \varnothing$ es raona de la mateixa manera; i si $A = B$ encara és més fàcil perquè $A \times B = B \times B = B \times A$.

EX.: (65) Demostreu que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

S'han de demostrar dues inclusions. En primer lloc $A \cap \varnothing \supseteq \varnothing$ que és cert sempre. En segon lloc demostrem $A \cap \varnothing \subseteq^{???} \varnothing$ per la qual cosa suposo que tinc un $x \in A \cap \varnothing$ i arribem a una contradicció. Molt fàcil: si $x \in A \cap \varnothing$ llavors

$x \in A$ i $x \in \varnothing$,en particular $x \in \varnothing$ cosa impossible.

EX.: (66) Demostreu que $A - A = \varnothing$.

S'han de demostrar dues inclusions. En primer lloc $A - A \supseteq \varnothing$ que és cert sempre. En segon lloc demostrem $A - A \subseteq^{???} \varnothing$ per la qual cosa suposo que tinc un $x \in A - A$ i arribem a una contradicció. Molt fàcil: si $x \in A - A$ llavors

$x \in A$ i $x \notin A$, cosa impossible.

EX.: (67) Demostreu que $\varnothing - A = \varnothing$.

S'han de demostrar dues inclusions. En primer lloc $\varnothing - A \supseteq \varnothing$ que és cert sempre. En segon lloc demostrem $\varnothing - A \subseteq^{???} \varnothing$ per la qual cosa suposo que tinc un $x \in \varnothing - A$ i arribem a una contradicció. Molt fàcil: si $x \in \varnothing - A$ llavors

$x \in \varnothing$ i $x \notin A$, cosa impossible perquè el conjunt no pot tenir cap element.

EX.: (68) Demostreu que $(A - B) \cap B = \varnothing$.

S'han de demostrar dues inclusions. En primer lloc $(A - B) \cap B \supseteq \varnothing$ que és cert sempre. En segon lloc demostrem $(A - B) \cap B \subseteq^{???} \varnothing$ per la qual cosa suposo que tinc un $x \in (A - B) \cap B$ i arribem a una contradicció. Molt fàcil: si $x \in (A - B) \cap B$ llavors $x \in A$ i $x \notin B$ i $x \in B$, per tant, en particular $x \notin B$ i $x \in B$ cosa que és falsa.

EXERCICIS REPÀS INDUCCIÓ

EX.: Siguin els nombres reals $a_i \geq 0$ per a tot i. Demostreu per inducció que per a tot

$n \geq 1$ tenim que $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Aquesta desigualtat diu: $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Demostrem-la per inducció:

CAS $n=1$: haig de demostrar que és cert $1+a_1 \geq 1+a_1$. És cert sempre.

CAS $n-1 \Rightarrow$ CAS n: sigui $n>1$ suposem que

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_{n-1}) \geq 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}$ (HI)

i volem demostrar que es verifica

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n) \geq^{???} 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$.

En efecte:

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_{n-1})(1+a_n) \geq_{\text{per HI}} (1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})(1+a_n) =$

$= 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n+a_na_1+a_na_2+a_na_3+\ldots+a_na_{n-1} \geq 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a$

ja que $a_na_1+a_na_2+a_na_3+\ldots+a_na_{n-1} \geq 0$.

EX.: Demostreu per inducció que per a tot $n>0$ tenim que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Escrit d'una altra manera tenim que aquesta afirmació diu

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

CAS $n=1$: haig de demostrar que $1^3 =^{???} \frac{1^2(1+1)^2}{4}$; això és cert perquè $1^3 = 1$ i d'altra banda $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n>1$; suposem que és cert que

$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3 = \frac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4}$ (HI) i volem demostrar que

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 =^{???} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Per demostrar-ho calculem els dos membres per separat:

- $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3 = \frac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4}+n^3$
  $= \frac{(n-1)^2n^2+4n^3}{4} = \frac{n^2\left((n-1)^2+4n\right)}{4} = \frac{n^2\left(n^2+2n+1\right)}{4}$
- $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^2\left(n^2+2n+1\right)}{4}$

i ja hem vist que són iguals, per tant queda justificat.

EX.: Sigui el nombre real x. Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

EX.: Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $7^{2n+1}+1$ és un múltiple de 8.

EX.: Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ és un múltiple de 11.

EX.: Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $3^{2n+2}-2^{n+1}$ és un múltiple de 7.

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 1$:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \frac{4^2}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 + \sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^4(n+1)^4}{8}.$$

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 3$ i per a tot $x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$: $(1+x)^n > 1 + nx + nx^2$.

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 4$ tenim que $2^n \geq n^2$.