QUÈ HEM FET FINS ARA?El darrer que hem treballat són els primers

conceptes de la lògica de primer ordre: el concepte d'equivalència de fórmules de primer ordre, les principals equivalències (negació dels quantificadors) així com les que no són equivalents (que provoquen molts errors). També vam estar treballant amb exemples la formalització d'afirmacions del llenguatge natural.

CLASSE D'AVUI 1/10/2020

EX.: (27)En aquest exercici considerem el domini dels nombres enters, $\mathbb{Z}$. A més de les variables, connectives i quantificadors, podeu utilitzar només les relacions i símbols següents:

$<, \leq, >, \geq, \cdot,$

$P(x) =$ "x és primer"

$Q(x) =$ "x és un quadrat"

$x|y =$ "x divideix a y" $=$ "y és un múltiple de x"

Formalitzeu els enunciats següents:

a)1 no és primer. Es pot formalitzar com a $\neg P(1)$.

b)Tot enter múltiple de 6 és també múltiple de 3 i de 2. Es pot formalitzar com a $\forall x(6|x \rightarrow (3|x \wedge 2|x))$ però no com a $\forall x(6|x \wedge 3|x \wedge 2|x)$.

c)Cap nombre primer és un quadrat. Admet les formalitzacions següents:

$\neg\exists x(Q(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x(\neg Q(x) \vee \neg P(x)) \equiv \forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x)) \equiv \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

VERACITAT I QUANTIFICADORS A LA LÒGICA DE PRIMER ORDRE

Ens hem de plantejar com justificar que una fórmula de primer ordre és certa en un domini i amb unes relacions donades. Tenim dos casos típics: $\exists xP(x)$ i $\forall xP(x)$, veiem cadascun com tractar-los.

- Cas existencial $\exists xP(x)$
  En aquest cas cal trobar un valor de x de forma que sigui cert $P(x)$.

  EX.: Raoneu que és certa l'afirmació $\exists x \in \mathbb{R}(x > 0 \wedge x^2 - 1 < 0)$. És cert ja que per $x = 1/2$ ens quedaria $\frac{1}{2} > 0 \wedge \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$ que és 1$\wedge 1 = 1$.

  Quan s'ha de demostrar que un $\forall xP(x)$ és fals només caldrà mostrar un exemple pel qual l'afirmació $P(x)$ és falsa. Això es basa en que: $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x(\neg P(x))$

  I a un exemple d'aquest tipus se l'anomena **contraexemple** (és un exemple *que va contra* de $P(x)$).

  EX.: Demostreu que és fals $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \rightarrow x \geq 1)$. És fals perquè $x = 1/2$ és un contraexemple ja que $1/2 > 0 \rightarrow 1/2 \geq 1$ seria $V \rightarrow F$ i per tant F.

EX.: Demostreu que és fals $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 < 0)$. És fals ja que $x = 112$ és un contraexemple perquè $112^2 = 12\,544 > 0$ i per tant falsa l'afirmació.

És molt important només donar NOMÉS UN contraexemple.

- Cas universal $\forall x P(x)$

Per veure que tot element del domini satisfà $P(x)$ serà molt fàcil si el domini només són uns quants elements perquè es mira per a cadascun si és certa l'afirmació. En el cas que no sigui finit el domini caldrà fer un raonament "amb lletres" (ho treballarem més endavant). També per demostrar que un existeix és fals caldrà fer el mateix, o sigui, demostrar la negació és a dir:

$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x(\neg P(x))$

EX.: (35) Pel domini $A = \{0, 1, 2, 3\}$ justifiqueu que són falses b i c) i que a) és certa:

a) $\forall x \in A(x^2 - 3 \neq 0)$ cal veure per a cada element del conjunt A es verifica el que diu:

$0^2 - 3 = -3 \neq 0, 1^2 - 3 = -1 \neq 0, 2^2 - 3 = 1 \neq 0, 3^2 - 3 = 6 \neq 0$

b) $\exists x \in A(|x+4| = 2)$ en primer lloc per veure que és falsa:

$\neg\exists x \in A(|x+4| = 2) \equiv \forall x \in A(|x+4| \neq 2)$; cal veure per a cada element del conjunt A es verifica el que diu la segona afirmació: $|0+4| = 4 \neq 2$, $|1+4| = 5 \neq 2, |2+4| = 6 \neq 2$, $|3+4| = 7 \neq 2$,

c)$\exists x \in A(x^3 + 2x^2 - x = 4)$ també és molt fàcil demostrar que és fals perquè la negació és $\neg\exists x \in A(x^3 + 2x^2 - x = 4) \equiv \forall x \in (x^3 + 2x^2 - x \neq 4)$ i només caldrà mirar:

$0^3 + 2 \cdot 0^2 - 0 = 0 \neq 4$, $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 2 \neq 4$, $2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 = 14 \neq 4$, $3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 = 42 \neq 4$.

- Cas quantificadors barrejats

Pel cas $\exists x \forall y P(x,y)$ caldrà donar un $x = a$ i veure que és cert $\forall y P(a,y)$.

EX.: $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}(x \leq y)$ per exemple $x = 0$ fa que sigui cert: $\forall y \in \mathbb{N}(0 \leq y)$. Això no cal demostrar-ho perquè se suposa que ho sabem des de petits.

Pel cas $\forall x \exists y P(x,y)$ per a cada x fixat caldrà donar un $y = E(x)$ (en general dependrà de x) i veure que és cert $P(x, E(x))$.

EX.: $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}(x < y)$ fixem un x qualsevol i busquem un y que verifiqui l'afirmació. Per exemple $y = x + 1$ va bé ja que $x < x + 1$. és sempre cert (una altra vegada això no ho justifiquem perquè ho sabem).

Per veure que una d'aquestes barreges és falsa caldrà veure que la negació és certa.