QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat és teoria de conjunts fins a conjunt de les parts.

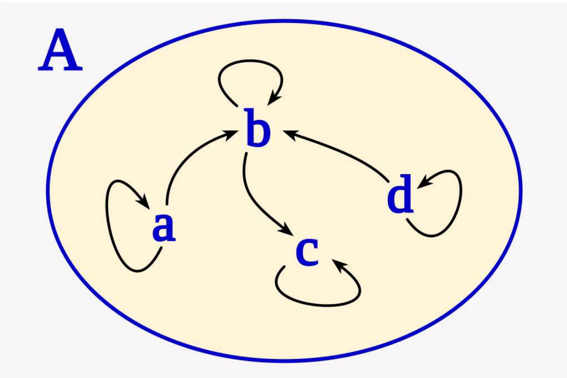
CLASSE D'AVUI 2/11/2020

Primer definirem què és una relació i quan es diu que una relació és d'equivalència que són les que ens dedicarm a estudiar.

DEF.: Una relació R en un conjunt A és un subconjunt del producte cartesià de A per A, o sigui $R \subseteq A \times A$. Si $(x,y) \in R$ direm que x està relacionat amb y per la relació R, i escriurem xRy. Quan no estiguin relacionats dos elements, ho escriurem amb el símbol R ratllat.

Es poden representar amb un diagrama com a l'exemple següent:

EX.: En $A = \{a,b,c,d\}$ considerem la relació definida per les fletxes ($xRy \Leftrightarrow$en el diagrama surt una fletxa de x a y) del diagrama següent:



Escriviu la relació R com a conjunt de parelles ordenades.

Aquesta relació es pot escriure com a conjunt definit per extensió: $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d),(d,b)\}$.

EX.: En $A = \{a,1,b,c\}$ considerem la relació $R = \{(a,1),(a,a),(1,c),(c,1),(c,b),(c,c)\}$. Dieu si són certes les afirmacions següents: $(b,c) \in R$, bRc, $(a,1) \notin R$, per a tot $x \in A : xRa \Rightarrow x = a$, per a tot $x \in A : (x,x) \in R$, $(\{c\},\{c\}) \in R$.

Mirem una a una les afirmacions:

- $(b,c) \in R$, fals
- bRc, fals
- $(a,1) \notin R$, fals
- per a tot $x \in A : xRa \Rightarrow x = a$, cert
- per a tot $x \in A : (x,x) \in R$, fals i contraexemple $x = 1$
- $(\{c\},\{c\}) \in R$ fals o no té sentit perquè $\{c\} \notin A$

Tenim tres relacions amb nom propi:

DEF.: Sigui un conjunt A. En aquest conjunt anomenem:

- La relació identitat en A, definida per: $xI_Ay \Leftrightarrow x = y$ o el que és el mateix

$I_A = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$

- La relació buida (ningú està relacionat amb ningú): $R = \emptyset$
- La relació total (tothom està relacionat amb tothom): $R = A \times A$

Les principals propietats que es consideren de forma natural en les relacions són les següents:

DEF.: Sigui R una relació definida en un conjunt A. Es defineixen les propietats següents per una relació:

Reflexiva Direm que R és una relació reflexiva si i només si per a tot $x \in A,\ \ xRx$.

Simètrica Direm que R és una relació simètrica si i només si per a tot $x,y \in A,\ xRy \Rightarrow yRx$.

Transitiva Direm que R és una relació transitiva si i només si per a tot $x,y,z \in A,\ xRy$ i $yRz \Rightarrow xRz$.

Antisimètrica Direm que R és una relació antisimètrica si i només si per a tot $x,y \in A,\ xRy$ i $yRx \Rightarrow x = y$.

Per nosaltres les tres primeres propietats són les més importants perquè són les que defineixen una relació d'equivalència (que són les que estudiarem). Les quatre propietats sense la segona són les propietats que defineixen una relació d'ordre per exemple $\leq$ en el conjunt dels nombres reals (però no les estudiarem).

DEF.: Una relació R definida en un conjunt A es diu una relació d'equivalència si i només si R és reflexiva, simètrica i transitiva.

Les relacions d'equivalència són molt útils per classificar els elements d'un conjunt com es pot veure en els exemples.

EX.: Sigui en el conjunt $A = \mathbb{Z}$ la relació $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Demostreu que és una relació d'equivalència i determineu els nombres enters que estan relacionats amb 0, els que estan relacionats amb 5 i els que estan relacionats amb -7.

En primer lloc veiem que és una relació d'equivalència:

Reflexiva: haig de demostrar que donat $x \in \mathbb{Z}$ qualsevol, es verifica $xR^{???}x$; això és cert perquè: $xRx \Leftrightarrow x^2 = x^2$.

Simètrica: haig de demostrar que donats $x,y \in \mathbb{Z}$ qualssevol es verifica $xRy \Rightarrow yRx$; això és cert perquè: $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$ i d'aquí puc deduir que $y^2 = x^2 \Leftrightarrow yRx$.

Transitiva: haig de demostrar que donats $x,y,z \in \mathbb{Z}$ qualssevol es verifica xRy i $yRz \Rightarrow xRz$; això és cert perquè suposant que xRy i yRz puc demostrar que $xR^{???}z$ de la manera següent:

$$\left.\begin{array}{l} xRy \\ yRz \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ y^2 = z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 \Leftrightarrow xRz$$

per tant és una relació d'equivalència.

Amb qui està relacionat $x = 0$? $0Ry \Leftrightarrow 0^2 = y^2 \Leftrightarrow y = 0$

Amb qui està relacionat $x = 5$? $5Ry \Leftrightarrow 5^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm 5$ per tant el 5 està relacionat amb 5 i -5.

Amb qui està relacionat $x = -7$? $-7Ry \Leftrightarrow (-7)^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm 7$ per tant el -7 està relacionat amb 7 i -7.

EX.: (74) Demostreu que R és reflexiva $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$.

Haig de demostrar dues implicacions:

- $\Rightarrow$: sigui R una relació reflexiva, és a dir, que xRx per a tot $x \in A$ i volem demostrar que $I_A \subseteq R$; és molt fàcil ja que si $(x,y) \in I_A \Rightarrow x = y$ i ara volem demostrar que $(x,y) \in R$ cosa certa perquè sabem que R és reflexiva, per tant $(x,x) \in R \Leftrightarrow (x,y) \in R$ tal com volíem demostrar.
- $\Leftarrow$: sigui R una relació tal que $I_A \subseteq R$ i volem demostrar que R és una relació reflexiva; és molt fàcil perquè cal mirar si és cert que per a tot $x \in A$ si tenim que $xR^{???}x$; però com que $(x,x) \in I_A \subseteq R \Rightarrow (x,x) \in R$ o sigui xRx.

EX.: (75) Suposem que R és simètrica i transitiva en A. Considerem el conjunt $B = \{x \in A \mid xRy \text{ per a algun } y \in A\}$. Demostreu que:

a. $B = \{x \in A \mid xRx\}$.

b. R és una relació d'equivalència a B.

a. $B = \{x \in A \mid xRx\}$. Això és justifica demostrant les dues inclusions:

a.1 $\supseteq$: sigui un $x \in A$ tal que xRx i volem demostrar que $x \in^{???} B$; és cert que $x \in B$ perquè hi ha un $y \in A$ tal que xRy i això és trivialment cert perquè $y = x$ ho verifica.

a.2 $\subseteq$: sigui un $x \in B$ i volem demostrar que $xR^{???}x$; en efecte: com que $x \in B$ sabem que existeix un $y \in A$ tal que xRy, per la simètrica tenim que yRx i ara per la transitiva de xRy, yRx tenim que xRx.

b. R és una relació d'equivalència a B. Hem de veure que la relació R definida en el conjunt B és d'equivalència. Veiem les tres condicions:

b.Reflexiva: cal veure que si $x \in B$ llavors $xR^{???}x$; en efecte per l'apartat a. si $x \in B \Rightarrow xRx$.

b.Simètrica: cal veure que si $x,y \in B$ llavors $xRy \Rightarrow yR^{???}x$; és fàcil perquè si xRy com que $x,y \in B \subseteq A \Rightarrow x,y \in A$ llavors en ser simètrica en A, tenim que yRx.

b.Transitiva: cal veure que si $x,y,z \in B$ llavors $xRy, yRz \Rightarrow xR^{???}z$; és fàcil raonar igual que abans: perquè si xRy, yRz com que $x,y,z \in B \subseteq A \Rightarrow x,y,z \in A$ llavors en ser transitiva en A, tenim que xRz.

EX.: (76) Demostreu que la intersecció de relacions d'equivalència és relació d'equivalència. Més precisament: si R,S són relacions d'equivalència en A llavors la relació T definida per $xTy \Leftrightarrow xRy$ i xSy és d'equivalència.

Per veure que és d'equivalència la relació T cal veure si és reflexiva, simètrica i transitiva:

Reflexiva: cal veure que si $x \in A$ llavors $xT^{???}x$; i això és cert perquè: $xTx \Leftrightarrow xRx$ i xSx i totes dues afirmacions són certes perquè R i S són relacions reflexives.

Simètrica: cal veure que si $x,y \in A$ llavors si $xTy \Rightarrow yTx$; però això és cert simplement perquè: $xTy \Leftrightarrow xRy$ i $xSy \Rightarrow yRx$ i $ySx \Leftrightarrow yTx$

Transitiva: cal veure que si $x,y,z \in A$ llavors si xTy i $yTz \Rightarrow xTz$; però això és cert simplement perquè:

$$\left.\begin{matrix} xTy \\ yTz \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} xRy \text{ i } xSy \\ yRz \text{ i } ySz \end{matrix}\right\} \Rightarrow xRz \text{ i } xSz \Leftrightarrow xTz$$

EXERCICIS DE REPÀS D'INDUCCIÓ

EX.: (17) Demostreu $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} \leq \frac{n}{3} + 1$ per a tot $n \geq 0$.

CAS $n = 0$: hem de demostrar que $\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2i+1} \leq^{???} \frac{0}{3} + 1$; és cert perquè:

$\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{0+1} = 1$ i de l'altre costat tenim $\frac{0}{3} + 1 = 1$, i sabem que $1 \leq 1$.

CAS $n - 1 \Rightarrow$ CAS n: sigui $n > 0$ i suposant que $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1} \leq \frac{n-1}{3} + 1$ (HI) volem demostrar que és cert $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} \leq^{???} \frac{n}{3} + 1$; en efecte:

- $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1} \right) + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{n-1}{3} + 1 + \frac{1}{2n+1}$
- $\frac{n}{3} + 1$

Per veure que el primer és menor que el segon ($\frac{n-1}{3} + 1 + \frac{1}{2n+1} \leq^{???} \frac{n}{3} + 1$) mirem si la resta és positiva:

$$\frac{n}{3} + 1 - \left(\frac{n-1}{3} + 1 + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{3} + 1 - \frac{n-1}{3} - 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{n}{3} - \frac{n-1}{3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{n(2n+1)-(n-1)(2n+1)-3}{3(2n+1)} =. \frac{2n-2}{6n+3}$$

per tant és positiu per ser positiu entre positiu (la $n \geq 1$), és a dir, ja està demostrat.

Si haguéssim optat per demostrar el pas d'inducció fent l'esquema del cas n implica el cas $n + 1$, els raonaments haurien estat gairebé idèntics:

CAS $n \Rightarrow$ CAS $n + 1$: sigui $n \geq 0$ i suposant que $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} \leq \frac{n}{3} + 1$ (HI) volem demostrar que és cert $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2i+1} \leq^{???} \frac{n+1}{3} + 1$; en efecte:

- $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2i+1} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1}\right) + \frac{1}{2(n+1)+1} \leq \frac{n}{3} + 1 + \frac{1}{2n+3}$

- $\frac{n+1}{3} + 1$

Per veure que el primer és menor que el segon ($\frac{n}{3} + 1 + \frac{1}{2n+3} \leq^{???} \frac{n+1}{3} + 1$) mirem si la resta és positiva

$\frac{n+1}{3} + 1 - \left(\frac{n}{3} + 1 + \frac{1}{2n+3}\right) = \ldots = \frac{2n}{6n+9} \geq 0.$

per tant és positiu per ser positiu entre positiu (la $n \geq 0$), és a dir, ja està demostrat.

EX.: Sigui el nombre real x. Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

CAS $n = 0$: haig de demostrar que $x^0 =^{???} \frac{x^1-1}{x-1}$; això és cert perquè $x^0 = 1$ i d'altra banda $\frac{x^1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$.

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 0$; suposem que és cert que $x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^{n-1+1}-1}{x-1}$ (HI) i volem demostrar que $x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n =^{???} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Per demostrar-ho calculem el cantó esquerre utilitzant la HI:

$x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n-1+1}-1}{x-1} + x^n = \frac{x^n-1+x^n(x-1)}{x-1} = \frac{x^n-1+x^{n+1}-x^n}{x-1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

per tant queda justificat.

EX.: Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $7^{2n+1} + 1$ és un múltiple de 8.

CAS $n = 0$: haig de demostrar que $7^{2\cdot 0+1} + 1$ és un múltiple de 8; això és cert perquè $7^{2\cdot 0+1} + 1 = 7 + 1 = 8 = 8 \cdot 1$ que és un múltiple de 8.

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 0$; suposem que és cert que $7^{2(n-1)+1} + 1 = 8k$ (HI) i volem demostrar que $7^{2n+1} + 1$ és un múltiple de 8. Per demostrar-ho calculem $7^{2n+1} + 1$ utilitzant el que sabem, $7^{2n-1} + 1 = 8k$, o sigui $7^{2n-1} = 8k - 1$ (HI):

$7^{2n+1} + 1 = 7^{2n-1}7^2 + 1 = (8k-1)7^2 + 1 = 49 \cdot 8k - 49 + 1 = 49 \cdot 8k - 48 = 8(49k - 6)$

és a dir, és un múltiple de 8 per tant queda justificat.

EX.: Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ és un múltiple de 11.

CAS $n = 0$: haig de demostrar que $3^{2\cdot 0+2} + 2^{6\cdot 0+1}$ és un múltiple de 11; això és cert perquè $3^{2\cdot 0+2} + 2^{6\cdot 0+1} = 9 + 2 = 11 = 11 \cdot 1$ (múltiple de 11).

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 0$; suposem que és cert que $3^{2(n-1)+2} + 2^{6(n-1)+1} = 11k$ (HI) i volem demostrar que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ és un múltiple de 11. Per demostrar-ho calculem $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ utilitzant el que sabem, $3^{2n} + 2^{6n-5} = 11k$, o sigui $3^{2n} = 11k - 2^{6n-5}$ (HI):

$3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 3^{2n}3^2 + 2^{6n+1} = (11k - 2^{6n-5})3^2 + 2^{6n+1} = 9 \cdot 11k - 2^{6n-5}3^2 + 2^{6n+1}$

per fer la resta $-2^{6n-5}3^2 + 2^{6n+1}$ fem unes quantes manipulacions:

$-2^{6n-5}3^2 + 2^{6n+1} = -2^{6n-5}3^2 + 2^{6n-5}2^6 = 2^{6n-5}(-3^2 + 2^6) = 2^{6n-5}(64-9) = 2^{6n-5} \cdot 5 \cdot 11$

així podem dir:

$3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 9 \cdot 11k + 2^{6n-5} \cdot 5 \cdot 11 = 11(9k + 2^{6n-5} \cdot 5)$

és a dir, és un múltiple d'11 per tant queda justificat. Si a la HI haguéssiu aïllat $2^{6n-5} = 11k - 3^{2n}$ el procés hauria estat molt semblant i arribaríeu a la mateixa conclusió.

EX.: Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 0$ tenim que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ és un múltiple de 7.

CAS $n = 0$: haig de demostrar que $3^{2\cdot 0+2} - 2^{0+1}$ és un múltiple de 7; això és cert perquè $3^{2\cdot 0+2} - 2^{0+1} = 9 - 2 = 7 = 7 \cdot 1$ (múltiple de 7).

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 0$; suposem que és cert que $3^{2(n-1)+2} - 2^{n-1+1} = 7k$ (HI) i volem demostrar que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ és un múltiple de 7. Per demostrar-ho calculem $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ utilitzant el que sabem, $3^{2n} - 2^n = 7k$, o sigui $2^n = 3^{2n} - 7k$ (HI):

$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n+2} - 2^n \cdot 2 = 3^{2n+2} - 2(3^{2n} - 7k) = 3^{2n+2} - 2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 7k$

per fer la resta $3^{2n+2} - 2 \cdot 3^{2n}$ fem unes quantes manipulacions:

$3^{2n+2} - 2 \cdot 3^{2n} = 3^{2n}3^2 - 2 \cdot 3^{2n} = 9 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 3^{2n} = 7 \cdot 3^{2n}$

així podem dir:

$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 7k = 7(3^{2n} - 2k)$

és a dir, és un múltiple de 7, per tant queda justificat. Si a la HI haguéssiu aïllat $3^{2n} = 2^n + 7k$ el procés hauria estat molt semblant i arribaríeu a la mateixa conclusió.

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 1$:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \frac{4^2}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

CAS $n = 1$: haig de demostrar que $\frac{1^2}{1\cdot 3} = \frac{1(1+1)}{2(2\cdot 1+1)}$; això és cert perquè $\frac{1^2}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$ i d'altra banda $\frac{1(1+1)}{2(2\cdot 1+1)} = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$.

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 1$; suposem que és cert que $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \frac{4^2}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{(2(n-1)-1)(2(n-1)+1)} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2(2(n-1)+1)}$ (HI) i volem demostrar que $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \frac{4^2}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} \overset{???}{=} \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$. Per demostrar-ho calculem el cantó esquerre i el cantó dret utilitzant la HI:

- $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \frac{4^2}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{(2(n-1)-1)(2(n-1)+1)} + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} =$
  $= \frac{(n-1)n}{2(2n-1)} + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n+1)(n-1)n+2n^2}{2(2n-1)(2n+1)} = \frac{n((2n+1)(n-1)+2n)}{2(2n-1)(2n+1)} =$
  $= \frac{n\left(2n^2+n-1\right)}{2(2n-1)(2n+1)}$
- $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{n(n+1)(2n-1)}{2(2n+1)(2n-1)} = \frac{n\left(2n^2+n-1\right)}{2(2n-1)(2n+1)}$

per tant queda justificat perquè són iguals. Per veure la igualtat final es pot fer la descomposició factorial del polinomi $2n^2 + n - 1$ o bé, com hem fet aquí, multiplicar per

$2n-1$ en el numerador i denominador a la fracció $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 + \sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^4(n+1)^4}{8}.$$

CAS $n = 1$: haig de demostrar que $\sum_{i=1}^{1} i^5 + \sum_{i=1}^{1} i^7 =^{???} \frac{1^4(1+1)^4}{8}$; això és cert perquè $\sum_{i=1}^{1} i^5 + \sum_{i=1}^{1} i^7 = 1^5 + 1^7 = 2$ i d'altra banda $\frac{1^4(1+1)^4}{8} = \frac{16}{8} = 2$.

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 1$; suposem que és cert que $\sum_{i=1}^{n-1} i^5 + \sum_{i=1}^{n-1} i^7 = \frac{(n-1)^4(n-1+1)^4}{8}$ (HI) i volem demostrar que $\sum_{i=1}^{n} i^5 + \sum_{i=1}^{n} i^7 =^{???} \frac{n^4(n+1)^4}{8}$. Per demostrar-ho calculem el cantó esquerre i el cantó dret per separat utilitzant la HI:

- $\sum_{i=1}^{n} i^5 + \sum_{i=1}^{n} i^7 = \sum_{i=1}^{n-1} i^5 + \sum_{i=1}^{n-1} i^7 + n^5 + n^7 = \frac{(n-1)^4 n^4}{8} + n^5 + n^7 = \frac{(n-1)^4 n^4 + 8n^5 + 8n^7}{8} =$
$= \frac{n^4\left((n-1)^4 + 8n + 8n^3\right)}{8} = \frac{n^4\left(n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1 + 8n + 8n^3\right)}{8} = \frac{n^4\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\right)}{8}$
- $\frac{n^4(n+1)^4}{8} = \frac{n^4\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\right)}{8}$

per tant queda justificat que són iguals. S'observa que per veure que són iguals he fet el desenvolupament de $(n+1)^4$ però també podria haver fet la descomposició factorial de $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

CAS $n = 1$: haig de demostrar que $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} =^{???} \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$; això és cert perquè $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{6}$ i d'altra banda $\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4\cdot2\cdot3} = \frac{1}{6}$

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 1$; suposem que és cert que
$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n-1+1)(n-1+2)} = \frac{(n-1)(n-1+3)}{4(n-1+1)(n-1+2)}$ (HI)

i volem demostrar que
$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =^{???} \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Per demostrar-ho calculem el cantó esquerre i el cantó dret utilitzant la HI:
$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$
$= \frac{(n-1)(n+2)^2+4}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{(n-1)(n+2)^2+4}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{n^3+3n^2-4+4}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{n^3+3n^2}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{n^2(n+3)}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

per tant queda justificat que són iguals.

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 3$ i per a tot $x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tenim que $(1+x)^n > 1 + nx + nx^2$.

CAS $n = 3$: haig de demostrar que $(1+x)^3 >^{???} 1 + 3x + 3x^2$; això és cert perquè $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ i a l'altra banda tenim $1 + 3x + 3x^2$ però com que $x^3 > 0$ podem deduir que $(1+x)^3 > 1+3x+3x^2$.

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 3$; suposem que és cert que
$(1+x)^{n-1} > 1+(n-1)x+(n-1)x^2$ (HI)

i volem demostrar que $(1+x)^n >^{???} 1+nx+nx^2$. I això ho podem justificar calculant cada cantó de la desigualtat per separat i utilitzant la HI:

- $(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x) > (1+(n-1)x+(n-1)x^2)(1+x) =$
  $= 1+(n-1)x+(n-1)x^2+x+(n-1)x^2+(n-1)x^3 = 1+nx+(2n-2)x^2+(n-1)x$
- $1+nx+nx^2$

Per veure si un és més gran que l'altre miro la resta si és positiva:
$1+nx+(2n-2)x^2+(n-1)x^3-(1+nx+nx^2) = (n-2)x^2+(n-1)x^3 > 0$

ja que $n > 3$ i $x > 0$.

EX.: Demostreu per inducció per a tot $n \geq 4$ tenim que $2^n \geq n^2$.

CAS $n = 4$: haig de demostrar que $2^4 \geq^{???} 4^2$; això és cert perquè $2^4 = 16$ i a l'altra banda tenim 4^2.

CAS $n-1$ IMPLICA n: sigui $n > 4$; suposem que és cert que $2^{n-1} \geq (n-1)^2$ (HI) i volem demostrar que $2^n \geq^{???} n^2$. Això ho podem justificar calculant cada cantó de la desigualtat per separat i utilitzant la HI:

- $2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \geq (n-1)^2 \cdot 2 = 2n^2-4n+2$
- n^2

Per veure si un és més gran que l'altre miro si la resta és positiva:
$2n^2-4n+2-n^2 = n^2-4n+2 \geq^{???} 0$

per veure que aquesta expressió és positiva per $n > 4$ es pot fer de diverses maneres:

1. La primera és fent una completació de quadrat: $n^2-4n+2 = (n-2)^2-2$ i es veu que serà positiu perquè $n > 4$ i llavors $(n-2)^2 > (4-2)^2 = 4$ i per tant $(n-2)^2-2 \geq 0$.

2. La segona és fent una descomposició del polinomi $n^2-4n+2 = \left(n-2-\sqrt{2}\right)\left(n-2+\sqrt{2}\right)$, i adonant-se que tots dos factors seran positius.