QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat són les relacions d'equivalència.

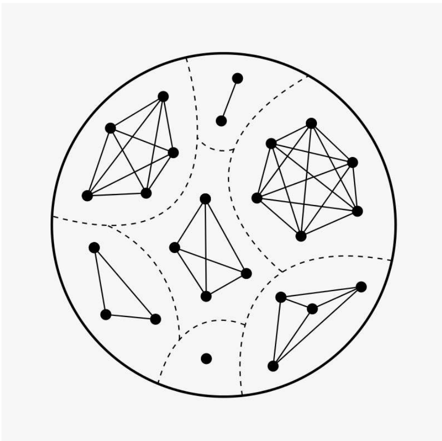
CLASSE D'AVUI 12/11/2020

Avui treballarem el que ens queda de les relacions d'equivalència: classes d'equivalència i conjunt quocient.

Ja ens havíem plantejat en els exemples anteriors de relacions d'equivalència quins eren els elements que estaven relacionats amb un de fixat. Doncs aquest subconjunt d'elements es diu la classe d'equivalència d'aquest element fixat i a tota la llista de subconjunts se l'anomena el conjunt quocient.

DEF.: Per una relació d'equivalència R en un conjunt A i un element $a \in A$ anomenarem:

- $\bar{a} = \{x \in A \mid xRa\}$ (la classe d'equivalència de l'element a)
- $A/R = \{\bar{x} \mid x \in A\}$ (el conjunt quocient)



EX.: (87) Demostreu que la relació "tenir el mateix residu mòdul 4 " a $\mathbb{Z}$ definida per $x \equiv y \Leftrightarrow 4|x - y$ és una relació d'equivalència. Determineu totes les classes d'equivalència i el conjunt quocient.

Per veure que la relació $\equiv$ és d'equivalència cal veure si és reflexiva, simètrica i transitiva:

Reflexiva: cal justificar que per a tot $x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv^{???} x$; i això és cert perquè:
$x - x = 0 = 4 \cdot 0$.

Simètrica: cal veure que per a tot $x,y \in \mathbb{Z}$ si $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$; però això és cert simplement perquè: si $x \equiv y$ llavors hi ha un k tal que
$x - y = 4k \Rightarrow y - x = -4k = 4(-k)$ per tant $y \equiv x$.

Transitiva: cal demostrar que per a tot $x,y,z \in \mathbb{Z}$ si $x \equiv y$ i $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$; però això és cert ja que:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y \\ y \equiv z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = 4k \\ y - z = 4k' \end{array}\right\} \Rightarrow x - z = 4k + 4k' = 4(k + k')$$

és a dir que $x \equiv z$, tal com volíem demostrar.

Per tant és una relació d'equivalència. Les classes d'equivalència són:

- $\bar{0} = \{x \in A \mid x \equiv 0\} = \{x \in A \mid x - 0 = \text{múltiple de } 4\} =$
  $= \{x \in A \mid x = \text{múltiple de } 4\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$
- $\bar{1} = \{x \in A \mid x \equiv 1\} = \{x \in A \mid x - 1 = \text{múltiple de } 4\} =$
  $= \{x \in A \mid x = 1 + \text{múltiple de } 4\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$
- $\bar{2} = \{x \in A \mid x \equiv 2\} = \{x \in A \mid x - 2 = \text{múltiple de } 4\} =$
  $= \{x \in A \mid x = 2 + \text{múltiple de } 4\} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, \ldots\}$
- $\bar{3} = \{x \in A \mid x \equiv 3\} = \{x \in A \mid x - 3 = \text{múltiple de } 4\} =$
  $= \{x \in A \mid x = 3 + \text{múltiple de } 4\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$
- $\bar{4} = \{x \in A \mid x \equiv 4\} = \{x \in A \mid x - 4 = \text{múltiple de } 4\} =$
  $= \{x \in A \mid x = 4 + \text{múltiple de } 4\} = \bar{0}$ i a partir d'aquí es repeteixen, a més de que tots els elements els tenim classificats en una de les quatre classes d'equivalència anteriors.

Aleshores el conjunt quocient serà: $\mathbb{Z}/\equiv\ = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Les classes d'equivalència i el conjunt quocient verifiquen una sèrie de propietats importants que hem observat a l'exemple anterior:

PROP.: Sigui una relació d'equivalència R en un conjunt A i siguin elements $x, y \in A$ qualssevol. Aleshores:

1. $x \in \bar{x}$.

2. Si $x \in \bar{y}$ llavors $\bar{x} = \bar{y}$.

3. Si $x \notin \bar{y}$ llavors $\bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing$.

4. Les classes formen una "partició" del conjunt A. És a dir:

a. Cada classe és no buida.

b. Dues classes diferents són disjuntes: $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing$.

c. La reunió de totes les classes és A .

DEM.: (86)

L'afirmació 1: sí que és veritat perquè és reflexiva una relació d'equivalència, o sigui $x \in \bar{x} \Leftrightarrow xRx$.

Per demostrar 2 fem: hem de suposar que $x \in \bar{y} \Leftrightarrow xRy$ i vull demostrar que són iguals $\bar{x} =^{???} \bar{y}$; justifiquem les dues inclusions:

- $\subseteq$: cal veure que si $a \in \bar{x}$ llavors $a \in^{???} \bar{y}$; en efecte: $a \in \bar{x} \Rightarrow aRx$ ara utilitzant la transitiva amb la hipòtesi xRy obtenim que $aRy \Rightarrow a \in \bar{y}$.
- $\supseteq$: cal veure que si $a \in \bar{y}$ llavors $a \in^{???} \bar{x}$; en efecte: $a \in \bar{y} \Rightarrow aRy$ utilitzant la simètrica amb la hipòtesi tenim yRx i ara per la transitiva obtenim que $aRx \Rightarrow a \in \bar{x}$.

Per demostrar 3: ara suposem que $x \notin \bar{y}$ i volem demostrar que llavors $\bar{x} \cap \bar{y} =^{???} \varnothing$; en efecte suposo que $x \notin \bar{y} \Leftrightarrow no(xRy)$ i per demostrar la igualtat de conjunts només cal demostrar que $\bar{x} \cap \bar{y} \subseteq^{???} \varnothing$ perquè $\bar{x} \cap \bar{y} \supseteq \varnothing$ sempre és certa; per tant suposarem que tenim $a \in \bar{x} \cap \bar{y}$ i hem d'arribar a una contradicció: $a \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow a \in \bar{x}$ i $a \in \bar{y} \Rightarrow aRx$ i $aRy \Rightarrow xRa$ i $aRy \Rightarrow xRy$ en contradicció amb la suposició de que no estaven relacionats, això és $no(xRy)$.

Per demostrar 4 observem que són les propietats demostrades anteriorment:

a.-La classe $\bar{x}$ no és buida perquè almenys té un element: $x \in \bar{x}$.

b.-A partir de $\bar{x} \neq \bar{y}$ pel contrarecíproc de 2 s'obté que $x \notin \bar{y}$ i ara per 3 deduïm que $\bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing$.

c.-S'han de demostrar dues inclusions. En primer lloc tota classe $\bar{x}$ és un subconjunt de A per tant la reunió de totes les classes també serà un subconjunt de A. I l'altra inclusió també és certa: tot element de $x \in A$ està a una classe d'equivalència, cosa certa per 1.- $x \in \bar{x}$ (la classe d'equivalència del mateix element).