QUÈ HEM FET FINS ARA?

Ja sabeu que entre la presentació de l'assignatura i el control de situació a l'aula pel COVID vam utilitzar molt temps. Vam treballar principalment:

-concepte d'enunciat o proposició

-exemples

-farem servir una lògica bivaluada: valors de veritat

-operacions unàries i binàries en el conjunt dels valors de veritat: connectives $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

-definició intuïtiva de lletres proposicionals (àtoms o fórmules atòmiques), i composició d'aquestes amb les connectives lògiques per així fabricar les *fórmules de la lògica proposicional*

CLASSE D'AVUI 17/09/2020

Ara ens dedicarem a fer una definició més formal d'una *fórmula de la lògica proposicional:*

DEF.: Tenim lletres proposicionals $p, q, r, \dots$ i farem una definició recursiva del que s'entén per una fórmula proposicional. Una fórmula proposicional és aquella que està construida d'una de les maneres següents:

1. tota lletra proposicional és una fórmula proposicional

2. si φ és una fórmula proposicional llavors $\neg\varphi$ també és una fórmula proposicional

3. si φ, ψ són unes fórmules proposicionals i $*$ és una de les connectives binàries llavors $\varphi * \psi$ també és una fórmula proposicional

EX.: Per què és una fórmula proposicional $(\neg p \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow q$?

En primer lloc supossem que p, q són lletres proposicionals, per tant podem dir:

- p és una fórmula proposicional i també q és una fórmula proposicional (aplico 1.)
- $q \rightarrow p$ és una fórmula proposicional (aplico 3. al resultat anterior)
- $\neg p$ és una fórmula proposicional (aplico 2. als resultats anteriors)
- $\neg p \wedge (q \rightarrow p)$ és una fórmula proposicional (aplico 3. als resultats anteriors)

- $(\neg p \land (q \to p)) \leftrightarrow q$ és una fórmula proposicional (aplico 3. als resultats anteriors)

Els parèntesis ajuden a construir correctament i sense ambigüitats les fórmules proposicionals. Però tampoc n'hem de posar de més, per exemple no li posem a la negació, és a dir, escrivim $\neg p \to q$ en lloc de $(\neg p) \to q$; i si el que es vol escriure és la negació del condicional, el parèntesi serà obligatori $\neg(p \to q)$.

EX.: Digues si les fórmules següents estan mal escrites o ben escrites: $(p \to (q \to p))$, $p \to (q \to p)$, $p \to q \to p$, $(p \to q) \to p$. Són iguals?

Tenim que:

- $(p \to (q \to p))$ li sobren els parèntesis
- $p \to (q \to p)$ està ben escrita
- $p \to q \to p$ està mal escrita perquè necesita parèntesis
- $(p \to q) \to p$ està ben escrita

Són iguals aquestes fórmules (ben escrites)? Què vol dir "igual"? Per exemple si $p = V$ i $q = F$ donen el mateix?

- $p \to (q \to p) = V \to (F \to V) = V \to V = V$
- $(p \to q) \to p = (V \to F) \to V = F \to V = V$

Seguim amb el dubte de si són "iguals"...

Tot això ens ha portat a definir formalment:

DEF.: Dues fórmules són equivalents quan prenen els mateixos valors de veritat en totes les assignacions de les lletres proposicionals; escriurem el símbol $\equiv$ (un "igual" amb tres ratlles) entre les dues fórmules.

Tothom ho resumeix dient: per veure si dues fórmules són equivalents mirem les taules de veritat a veure si donen els mateixos resultats.

EX.: És cert que $p \to (q \to p) \equiv (p \to q) \to p$?

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$	$p \to q$	$(p \to q) \to p$
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Per tant les dues fórmules proposicionals no són equivalents .

DEF.: Quan els valors de veritat d'una fórmula sempre són 1 es diu que és una tautologia. Es diu una contradicció quan els valors de veritat d'una fórmula sempre són 0. Es diu que una fórmula és satisfactible quan almenys per alguns valor de veritat de les variables pren el valor final igual a 1.

En llenguatge informàtic: tautologia$=$tots els outputs són sempre 1, contradicció$=$tots els outputs són sempre 0 i satisfactible$=$almenys un output és 1 per un input.

EX.: Són equivalents $p \wedge q$ i $q \wedge p$? A què és equivalent $p \wedge \neg p$? I $p \vee \neg p$?

Fem les taules de veritat corresponents (malgrat que per la definició de la connectiva és molt clar):

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

per tant són iguals.

Pel cas de $p \wedge \neg p$:

p	$p \wedge \neg p$
0	0
1	0

llavors $p \wedge \neg p$ es una contradicció.

Pel cas de $p \vee \neg p$:

p	$p \vee \neg p$
0	1
1	1

aleshores $p \vee \neg p$ és una tautologia.

EX.: És cert que $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee r$?