QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat són els següents mètodes estàndard de demostració: prova d'una disjunció, disjunció a l'antecedent, prova per casos, demostració d'una equivalència, demostració de la unicitat i exemples de cadascun.

CLASSE D'AVUI 19/10/2020

Tema d'inducció.

2.-INDUCCIÓ

2.1 Inducció simple

Molt sovint ens trobarem que hem de demostrar una propietat per a tots els nombres naturals (o per tots els naturals a partir d'un fixat). Moltes afirmacions en informàtica són dependents d'un n pertanyent a $\mathbb{N}$ i per tant diuen coses de l'estil $\forall n \geq 1\ P(n)$ a on, per exemple, la propietat $P(n)$ es refereix al que triga un cert programa en funció del número d'entrades, o el número de bytes d'emmagatzematge de memòria que requereix l'execució d'un programa en funció de la llargada n de l'entrada, etc. Comencem amb un exemple estrictament matemàtic.

EX.: Demostreu que $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ per a tot natural $n \geq 0$.

Observem que aquesta propietat diu que la suma dels primers nombres senars sempre dona un quadrat i a més diu quin quadraat és. Mirem aquestes sumes:

- per $n = 0$: $1 = 1 = (0 + 1)^2$
- per $n = 1$: $1 + 3 = 4 = (1 + 1)^2$
- per $n = 2$: $1 + 3 + 5 = 9 = (2 + 1)^2$
- per $n = 3$: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = (3 + 1)^2$
- $\ldots$

Serà cert sempre? Com es demostra amb els mètodes estudiats?

Aquests tipus de sumes se sol escriure amb el símbol de sumatori $\sum$ (utilitza la lletra "S" majúscula grega):

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^{n} 2i + 1$$

Per demostrar que aquestes afirmacions són certes es poden intentar els mètodes que hem estudiat fins ara però per aquest tipus de demostracions tenim un mètode específic: el mètode d'inducció. El mètode de demostració per inducció simple es basa en el principi següent:

$$\forall n \geq n_0\ P(n) \equiv P(n_0) \land \forall n > n_0 (P(n-1) \rightarrow P(n))$$

i serveix per demostrar que una propietat $P(n)$ és certa $\forall n \geq n_0$ natural. Usualment el que hem de demostrar és que $P(n)$ és certa $\forall n \in \mathbb{N}$ o sigui $P(n)$ és certa $\forall n \geq 0$ natural. La manera de demostrar és en dos passos:

CAS BASE $P(n_0)$

CAS INDUCTIU Sigui $n > n_0$ i volem demostrar que $P(n-1) \Rightarrow P(n)$.

Per tant es redueix a fer una comprovació en el cas base i en el pas inductiu suposes la hipòtesi d'inducció (HI) $P(n-1)$ i a partir d'aquesta demostres $P(n)$.

Fixem-nos que la idea que hi ha al darrera del mètode d'inducció és (suposeu que $n_0 = 1$):

- tenim provat que $P(1)$ és cert i que $P(n-1) \Rightarrow P(n)$, per tant en particular per $n = 2$ obtenim $P(1) \Rightarrow P(2)$ i com que $P(1)$ és cert obtenim que també ho és $P(2)$
- per ara tenim que $P(1)$, $P(2)$ són certs i del cas inductiu obtenim per $n = 3$ que $P(2) \Rightarrow P(3)$ i com que $P(2)$ és cert obtenim que també ho és $P(3)$
- ara tenim que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ són certs i del cas inductiu obtenim per $n = 4$ que $P(3) \Rightarrow P(4)$ i com que $P(3)$ és cert obtenim que també ho és $P(4)$
- ...

Aleshores obtenim que tots els casos són certs amb un mecanisme com el de les fitxes del dòmino que cauen d'uan en una (https://www.youtube.com/watch?v=bUI295oyeIc). És com un esquema d'implicacions

$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \ldots$$

en el qual partim de que $P(1)$ és cert i fa que per modus ponens la certesa vagi afirmant-se pels següents.

EX.: (continuació) Demostreu que $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$ per a tot natural $n \geq 0$.

CAS BASE: L'afirmació és certa per $n = 0$ ja que per una banda a la igualtat que hem de justificar tenim 1 i per l'altra bana tenim $(0+1)^2$, resultats idèntics, per tant queda justificat el cas base.

CAS INDUCTIU: Sigui $n > 0$ i volem demostrar que $P(n-1) \Rightarrow P(n)$. Per tant hem de suposar que és cert el cas $n-1$:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2(n-1)+1) = (n-1+1)^2$ (hipòtesi d'inducció, HI)

i vull demostrar que es cert el cas n:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) =^{?????} (n+1)^2$

En efecte, calculo els dos costats de la igualtat:

- $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) =$
  $= (n-1+1)^2 + (2n+1) = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 = (n+1)^2$

com que son iguals hem justificat que és cert el cas n a partir de la suposició de que el cas $n-1$ és cert.

EX.: (1) Demostreu que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ per a tot $n \geq 0$.

En primer lloc el significat del sumatori és $\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+3+4+\ldots+n$. La formalització del que ens demanen demostrar és $\forall n \in \mathbb{N}\left(\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\right)$. Per fer la demostració d'aquesta fórmula per inducció seguim l'esquema estàndard:

CAS BASE Cal veure que l'afirmació és certa per $n = 0$: calculo el costat esquerra de la igualtat $\sum_{i=0}^{0} i = 0$ i calculo el costat dret de la igualtat $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ i per tant és cert que dona el mateix.

CAS INDUCTIU Sigui $n > 0$ i volem demostrar que el cas $n-1$ implica el cas n, és a dir, que si sabem que és cert:

$0+1+2+3+4+\ldots+(n-1) = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$ (HI)

llavors serà cert:

$0+1+2+3+4+\ldots+n =^{?????} \frac{n(n+1)}{2}$

En efecte:

- $0+1+2+3+4+\ldots+n = 0+1+2+3+4+\ldots+(n-1) \;+\; n =$
  $= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$
- $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

com que ens ha donat el mateix resultat, tenim demostrat el cas n.

EX.: És cert que $991n^2+1$ no és mai un quadrat? (per a tot $n \geq 1$)
Experimentem una mica a veure si és cert o no en els primers nombres naturals:
$991+1 = 992 = 2^5 31$
$991 \cdot 2^2 + 1 = 3965 = 5 \times 13 \times 61$
$991 \cdot 3^2 + 1 = 8920 = 2^3 5 \times 223$
$991 \cdot 4^2 + 1 = 15\,857 = 101 \times 157$
$991 \cdot 5^2 + 1 = 24\,776 = 2^3 19 \times 163$
$991 \cdot 6^2 + 1 = 35\,677 = 35\,677$

Sembla que és cert que mai dona un quadrat perquè els exponents a la descomposició factorial no són parells. Serà veritat o fals???

És fals: el primer nombre natural pel qual falla és $n = 12055735790331359447442538767$ (29 xifres) ja que
$991 \cdot (12055735790331359447442538767)^2 + 1 =$
$= 144\,032\,698\,557\,259\,999\,607\,886\,110\,560\,755\,362\,973\,171\,476\,419\,973\,199\,366\,400 =$
$= 2^8 5^2 31^2 1093^2 100\,271^2 140\,527^2 1516\,049^2 6554\,059^2$
per tant és un quadrat. Sense calculadora programable ni ordinador mai podríem arribar a veure que és falsa l'afirmació (ni en anys de calculadora, ni res).

EX.: (2) Demostreu que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ per a $n \geq 1$.

En primer lloc la propietat sense utilitzar el sumatori diu

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ per a tot $n \geq 1$.

Per fer la demostració d'aquesta fórmula per inducció seguim l'esquema estàndard:

PAS BASE Per $n = 1$ el canto esquerra de la igualtat és $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ i el cantó dret és $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ llavors és cert que són iguals.

PAS INDUCTIU Sigui $n > 1$ i volem demostrar que si suposem cert

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot(n-1+1)} = \frac{n-1}{n-1+1} \text{ (HI)}$$

aleshores seríem capaços de demostrar que és cert

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =^{?????} \frac{n}{n+1}$$

En efecte:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot(n-1+1)} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$
$$= \frac{n-1}{n-1+1} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{(n+1)(n-1)+1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n^2}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Just el que volíem demostrar (el cas n a partir de suposar cert el cas $n-1$).

EX.: (3) Demostreu que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{n}{4n+1}$ per a tot $n \geq 1$.

En primer lloc la propietat sense utilitzar el sumatori diu

$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 17} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ per a tot $n \geq 1$.

Per fer la demostració d'aquesta fórmula per inducció seguim l'esquema estàndard:

PAS BASE Per $n = 1$ el canto esquerra de la igualtat és $\frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{5}$ i el cantó dret és $\frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$ llavors és cert que són iguals.

PAS INDUCTIU Sigui $n > 1$ i volem demostrar que si suposem cert

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 17} + \ldots + \frac{1}{(4(n-1)-3)(4(n-1)+1)} = \frac{n-1}{4(n-1)+1} \text{ (HI)}$$

aleshores seríem capaços de demostrar que és cert

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 17} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} =^{???} \frac{n}{4n+1}$$

En efecte:

- $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 17} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} =$
  $= \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 17} + \ldots + \frac{1}{(4(n-1)-3)(4(n-1)+1)} +$
  $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n-1}{4(n-1)+1} + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} =$
  $= \frac{n-1}{4n-3} + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{(n-1)(4n+1)+1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{4n^2-3n}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n(4n-3)}{(4n-3)(4n+1)}$
- $\frac{n}{4n+1} = \frac{n(4n-3)}{(4n-3)(4n+1)}$

igual tal com volíem demostrar.

EX.: (4) Demostreu que $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ per a tot $n \geq 2$.

Ens demanen demostrar que:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$

CAS $n = 2$ Calculem el costat esquerra de la igualtat i dona $1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ i el cantó dret dona $\frac{1}{2}$ per tant son iguals i així queda justificat el cas base.

CAS $n-1$ **IMPLICA EL CAS** n Sigui un $n > 2$ i suposant que és cert

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}$ (HI)

volem demostrar que és cert:

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots(1-\frac{1}{n}) =^{???} \frac{1}{n}$

En efecte:

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots(1-\frac{1}{n}) =$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n-1}\right) \quad (1-\frac{1}{n}) =$

$= \frac{1}{n-1}(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-1}(\frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n}$

per tant queda demostrat el cas n a partir del cas $n-1$.

EX.: (5) Demostreu que $3^n < (n+2)!$ per a tot $n \geq 0$.

Aquest exemple ja és diferent perquè involucra demostrar desigualtats.

CAS $n = 0$ Calculem el costat esquerra de la desigualtat i dona $3^0 = 1$ i el cantó dret dona $(0+2)! = 2! = 2$ per tant queda justificat el cas base perquè $1 < 2$.

CAS $n-1$ **IMPLICA EL CAS** n Sigui un $n > 0$ i suposem que és cert $3^{n-1} < (n-1+2)!$ (HI) i vull deduir d'aquí que és cert $3^n <^{???} (n+2)!$. En efecte calculem els dos cantons per separat (i utilitzem la HI):

- $3^n = 3^{n-1}3^1 < (n-1+2)!3^1 = (n+1)!3$
- $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n+1)!(n+2)$

Com que $n > 0$, és a dir, $n \geq 1$ tenim que $3 \leq n+2$ llavors tindrem que $3^n < (n+1)!3 \leq (n+1)!(n+2) = (n+2)!$ i per tant $3^n < (n+2)!$.

EX.: (6) Demostreu que $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2} < \frac{n-1}{n}$ per a tot $n \geq 2$.

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$

CAS $n = 2$ Calculo cantó esquerra de la desigualtat $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ i el cantó dret $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, per tant el cas $n = 2$ és cert perquè $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

CAS $n-1$ **IMPLICA EL CAS** n Sigui $n>2$ i volem demostrar que a partir de

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{n-2}{n-1}$ (HI)

es pot deduir que

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} <^{???} \frac{n-1}{n}$

En efecte: calculem cada cantó de la desigualtat i obtenim utilitzant la hipòtesi d'inducció

- $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2} < \frac{n-2}{n-1}+\frac{1}{n^2} =$
  $= \frac{n^3-2n^2+n-1}{n^2(n-1)}$
- $\frac{n-1}{n}$

Si veig que $\frac{n^3-2n^2+n-1}{n^2(n-1)} \leq \frac{n-1}{n}$ ja estarà demostrat tot. Per demostrar aquesta desigualtat faig la resta:

$\frac{n^3-2n^2+n-1}{n^2(n-1)} - \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n^2(n-1)} \leq 0$

i així queda demostrat que el cas $n-1$ implica el cas n.

EX.: (7) Demostreu que $6^{2n+1}-6$ és múltiple de 210 per a tot $n \geq 0$.

CAS $n=0$ Mirem si per $n=0$ ens dona un múltiple de 210:

$6^{0+1}-6 = 6-6 = 0 = 0 \cdot 210$ per tant és cert.

CAS $n-1$ **IMPLICA EL CAS** n Sigui un $n>0$ i suposem que $6^{2(n-1)+1}-6 = 210k$ i ara volem demostrar que també passa $6^{2n+1}-6$ és múltiple de 210. Per això volem calcular $6^{2n+1}-6 = ???$. Per HI: $6^{2n-1}-6 = 210k$, o sigui $6^{2n-1} = 6+210k$ i llavors:

$$6^{2n+1}-6 = 6^{2n-1+2}-6 = 6^{2n-1}6^2-6 = (6+210k)6^2-6 =$$

$$= 6^2 210k + 6^3 - 6 = 6^2 210k + 210 = 210(6^2k+1)$$

per tant és múltiple de 210 tal com havíem de demostrar.

De vegades en el cas base s'han de veure més d'un cas i cal fer un raonament de l'estil:

PAS BASE $P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), \ldots, P(n_0+r)$,

PAS INDUCTIU   Sigui $n > n_0+r$ i volem demostrar que $P(n-1) \Rightarrow P(n)$.

Veiem en aquest exemple perquè es necessita mirar més d'un cas base:

EX.: Demostreu que $5^n < 27n!$ per a tot $n \geq 0$.