QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat és la inducció matemática i teoria de conjunts fins a intersecció.

CLASSE D'AVUI 26/10/2020

Continuem amb la teoria de conjunts.

EX.: La Delegació d'Estudiants de la FIB (DEFIB) ha organitzat un concurs per fer la seva nova pàgina web i algunes altres webs que porten ells mateixos. Hi ha dues modalitats de participació: a títol individual i en equip. La quantia del premis és diferent per les dues modalitats i el que es demana a la pàgina web també és diferent. Podeu consultar tots els detalls a les bases del concurs. Finalment ahir va acabar el termini per presentar propostes i s'han presentat: a títol individual els estudiants Jeremy (J), Walter (W), Gemma (G) i Maria (M); en la modalitat d'equips s'han presentat J i W formant un grup, M formant ell sol un altre grup (recordeu que per grups no es demana el mateix ni tampoc el premi és el mateix) i Roger (R) formant ell sol un altre grup.

a)Anomenem A al conjunt format per les propostes (té 7 propostes entre individuals i en equip; les individuals les entendrem com un element d'aquest conjunt A; les d'equip les entendrem com un conjunt format pels membres que formen l'equip). Digues el conjunt A per extensió.

b)Digues si són certes les afirmacions següents: $J \in A$ (*), $W \in A$, $\{W\} \in A$, $M \in A$, $\{M\} \in A$, $\{W\} \subseteq A$ (*), $\{M\} \subseteq A$, $\{J, W\} \in A$ (*), $\{J, W\} \subseteq A$ (*), $\{J, W, G\} \in A$, $\{J, W, G\} \subseteq A$, $J \in J$, $P \subseteq A$, $P \in A$, $R \subseteq A$, $R \in A$. Raona les que tenen asterisc.

a)$A = \{J, W, G, M, \{J, W\}, \{M\}, \{R\}\}$

b)

- $J \in A$ cert ja que J està a la llista d'elements amb la qual queda definit A
- $W \in A$ cert
- $\{W\} \in A$ fals
- $M \in A$ cert
- $\{M\} \in A$ cert
- $\{W\} \subseteq A$ cert perquè l'únic element de $\{W\}$ és W i per justificar la inclusió s'ha de veure que pertany a A i és cert que $W \in A$ perquè està a la llista de definició de A
- $\{M\} \subseteq A$ cert
- $\{J, W\} \in A$ cert ja que $\{J, W\}$ està a la llista d'elements amb la qual queda definit A; per tant en aquest cas podem dir que $\{J, W\}$ és un conjunt i un element a la vegada
- $\{J, W\} \subseteq A$ cert perquè el conjunt $\{J, W\}$ té dos elements, J i W, i per demostrar la inclusió ens hem de preguntar si J pertany a A i que W pertany a A; i això és cert: $J \in A$ i $W \in A$ (estan a la llista de definició de A) per tant queda justificat que $\{J, W\} \subseteq A$
- $\{J, W, G\} \in A$ fals

- $\{J, W, G\} \subseteq A$ cert
- $J \in J$ o no te sentit en el nostre problema o és fals
- $P \subseteq A$ o no te sentit en el nostre problema o és fals
- $P \in A$ fals
- $R \subseteq A$ o no te sentit en el nostre problema o és fals
- $R \in A$ fals

EX.: (10) Expresseu mitjançant quantificadors i $\in$ el fet següent: $A = \varnothing$.

La primera possibilitat és dir per la definició del conjunt buit que és "per a tot x : $x \notin A$" o també "per a tot $x \in A$: $x \neq x$". La manera més formal és aquesta darrera o si es prefereix "per a tot x si $x \in A$ aleshores $x \neq x$" ja que és aplicar directament la definició del conjunt buit $\varnothing = \{x | x \neq x\}$.

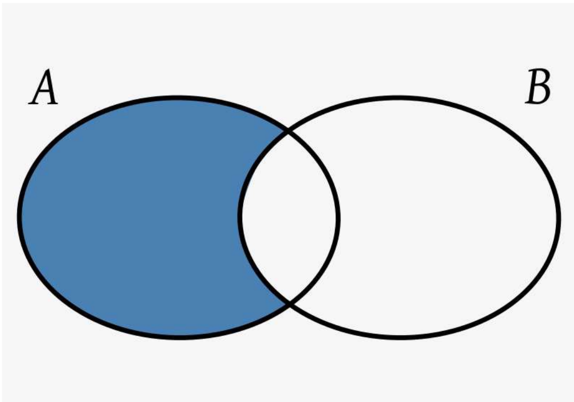
EX.: (11) Idem $\neg(A \subseteq B)$.

$\neg(A \subseteq B)$ és el mateix que dir "$\neg$(per a tot x si $x \in A \Rightarrow x \in B$)" o sigui "existeix un x tal que $x \in A$ i $x \notin B$".

La tercera operació important és la diferència de conjunts:

DEF.: Donats dos conjunts A, B anomenem conjunt diferència de A i B al conjunt

$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ (molt sovint també s'escriu com a $A \backslash B$).



EX.: Siguin $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{\{1\}, 2, 3\}$, $D = \{\{1\}, \{2, 3\}, 5, 6\}$. Calculeu $A - B$, $B - A$, $A - C$, $B - \varnothing$, $\varnothing - B$, $A - D$, $D - B$.

- $A - B = \{3, 4\}$,
- $B - A = \{5, 6\}$,
- $A - C = \{1, 4\}$,
- $B - \varnothing = \{1, 2, 5, 6\}$,
- $\varnothing - B = \varnothing$,
- $A - D = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $D - B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

Les principals propietats que satisfà aquesta operació són:

PROP.: Siguin A, B, C conjunts. Aleshores

1. $A - A = \varnothing$
2. $A - \varnothing = A$
3. $\varnothing - A = \varnothing$
4. $A - B \subseteq A$
5. $(A - B) \cap B = \varnothing$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$
7. $C \subseteq A - B \Leftrightarrow C \subseteq A$ i $C \cap B = \varnothing$

DEM.: Demostrem 1: per demostrar $A - A = \varnothing$ s'ha de demostrar dues inclusions

- $A - A \supseteq \varnothing$ OK (sempre!!)
- $A - A \subseteq \varnothing$ hem de veure que si tenim $x \in A - A$ aleshores tinedrem que $x \in \varnothing$; o sigui hem de demostrar que arribem a una contradicció (perquè el buit no té elements). Sigui un $x \in A - A \Rightarrow x \in A$ i $x \notin A$ cosa impossible.

Demostrem 3: com a l'anterior:

- $\varnothing - A \supseteq \varnothing$ OK
- $\varnothing - A \subseteq \varnothing$ hem de veure que si tenim $x \in \varnothing - A$ hem de veure que $x \in \varnothing$; o sigui hem de demostrar que arribem a una contradicció (perquè el buit no té elements). Sigui un $x \in \varnothing - A \Rightarrow x \in \varnothing$ i $x \notin A \Rightarrow x \neq x$ i $x \notin A \Rightarrow x \neq x$ cosa impossible.

Demostrem 7: cal demostrar una equivalència $C \subseteq A - B \Leftrightarrow C \subseteq A$ i $C \cap B = \varnothing$ per tant dues implicacions,

- $\Rightarrow$: suposem que $C \subseteq A - B$ i volem demostrar que $C \subseteq^{???} A$ i $C \cap B =^{???} \varnothing$
  - $C \subseteq^{???} A$: sigui un $x \in C$ i vull demostrar que $x \in^{???} A$; i això és cert perquè si $x \in C \subseteq A - B \Rightarrow x \in A$ i $x \notin B \Rightarrow x \in A$ com volia demostrar
  - $C \cap B =^{???} \varnothing$: hi ha una inclusió que sempre és certa: $C \cap B \supseteq \varnothing$; per tant només queda demostrar l'altra inclusió $C \cap B \subseteq^{???} \varnothing$ per tant només caldrà suposar que tinc un $x \in C \cap B$ i arribar a una contradicció: $x \in C \cap B \Rightarrow x \in C$ i $x \in B$ i com que sé que $C \subseteq A - B$ tindré que $x \in A$ i $x \notin B$ i $x \in B$ cosa impossible.
- $\Leftarrow$: suposem que $C \subseteq A$ i $C \cap B = \varnothing$ i vull demostrar que $C \subseteq^{???} A - B$, o sigui donat un $x \in C$ cal veure que serà $x \in^{???} A - B$; en efecte si $x \in C \subseteq A$ per tant $x \in A$; ara cal veure que també $x \notin B$; supossem per un moment que $x \in B$, com que $x \in A$ aleshores $x \in C \cap B = \varnothing$ cosa impossible, per tant ha de ser que $x \notin B$.

També tenim les següents propietats importants en les quals intervenen més d'una operació:

PROP.: Siguin A, B, C conjunts. Aleshores

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$
3. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
4. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$ i la unió és disjunta (els tres

subconjunts són disjunts dos a dos)

DEM.: Demostrem 1: surt de la distributiva de la $\wedge$ respecte de la $\vee$ i de la $\vee$ respecte de la $\wedge$

Sigui $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ i $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ i $\left(x \in B \text{ o } x \in C\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x \in A \text{ i } x \in B\right)$ o $\left(x \in A \text{ i } x \in C\right) \Leftrightarrow (x \in A \cap B)$ o $(x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Com que hem fet una justificació utilitzant només $\Leftrightarrow$ llavors tinc demostrades les dues inclusions (és el principi d'extensionalitat).

Demostrem 3: Utilitzarem les lleis de De Morgan. Sigui x :

- $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ i $x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ i no $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ i no $\left(x \in B \text{ o } x \in C\right) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x \in A$ i $\left(x \notin B \text{ i } x \notin C\right)$
- $x \in (A - B) \cap (A - C) \Leftrightarrow x \in (A - B)$ i $x \in (A - C) \Leftrightarrow x \in A$ i $x \notin B$ i $x \in A$ i $x \notin C$

Com que totes dues expressions són equivalents, tenim provada la igualtat.

EX.: Demostreu que $(A - B) \cup (B - A) = A$ sii $B = \emptyset$.

Siguin A, B conjunts:

- $\Leftarrow$: suposem que $B = \emptyset$ llavors veure aquesta igualtat és molt fàcil perquè $(A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$
- $\Rightarrow$: suposem que $(A - B) \cup (B - A) = A$ i a partir d'aquí hauríem de demostrar que $B =^{???} \emptyset$; fem el típic raonament per reducció a l'absurd: suposem per un moment que B tingués un element, o sigui tenim un $x \in B$ fent un dibuix de la situació indueix a pensar que podem distingir dos casos (i en tots dos arribarem a contradicció, per tant serà cert $B = \emptyset$):
  - $x \in A$ llavors per la hipòtesi tindrem que en ser $x \in B$ i $x \in A$ aleshores $x \notin A - B$ i $x \notin B - A$ i per tant $x \notin (A - B) \cup (B - A) = A \Rightarrow x \notin A$ en contradicció amb $x \in A$
  - $x \notin A$ llavors en ser $x \in B$ i $x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow$ $x \in (A - B) \cup (B - A) = A \Rightarrow x \in A$ en contradicció amb $x \notin A$

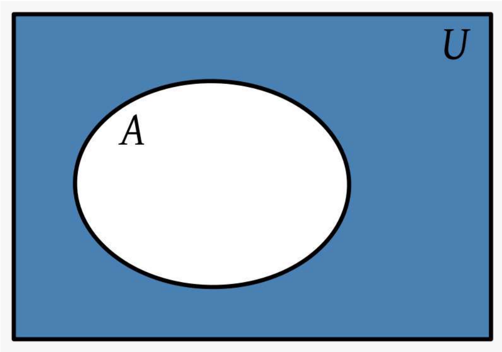
Recordeu que en tots aquests exemples i demostracions val la pena fer-se un dibuix

al costat.

La quarta operació que definirem és el complementari:

DEF.: Considerem un conjunt marc o univers U (de vegades es diu Ω) i un subconjunt A dintre seu. Definirem el conjunt complementari de A de la manera següent

$$A^C = U - A = \{x \in U | x \notin A\}$$



EX.: En el univers $U = \{1,2,3,4,\{1,2\},\{4\},5\}$ considerem $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,\{4\}\}$, $C = \{\{1,2\},1,2\}$. Calculeu A^C, B^C, $(A^C)^C$, $C \cap C^C$, $B \cap B^C$, U^C, $\varnothing^C$.

- $A^C = \{\{1,2\},\{4\},5\}$
- $B^C = \{1,2,3,4,\{1,2\}\}$
- $(A^C)^C = \{1,2,3,4\} = A$
- $C \cap C^C = \varnothing$
- $B \cap B^C = \varnothing$
- $U^C = \varnothing$
- $\varnothing^C = U$

Tenim les propietats següents del complementari:

PROP.: Siguin $A, B, C \subseteq U$ subconjunts d'un univers U. Aleshores

1. $(A^C)^C = A$
2. $\varnothing^C = U$, $U^C = \varnothing$
3. $A \cap A^C = \varnothing$, $A \cup A^C = U$
4. (Lleis de De Morgan) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
5. $A - B = A \cap B^C$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C \Leftrightarrow A \cap B^C = \varnothing \Leftrightarrow A^C \cup B = U$
7. $A \subseteq B^C \Leftrightarrow B \subseteq A^C \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A^C \cup B^C = U$
8. $A^C \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A \Leftrightarrow A^C \cap B^C = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = U$
9. $B = A^C \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing, A \cup B = U$

DEM.: Demostrem 2: per demostrar $U^C \overset{???}{=} \varnothing$ mirem la doble inclusió; una es verifica sempre: $U^C \supseteq \varnothing$; l'altra ($U^C \subseteq \varnothing$) és fàcil de justificar perquè si $x \in U^C$ només caldrà arribar a una contradicció: $x \in U^C \Rightarrow x \in U$ i $x \notin U$ per tant és una contradicció, o sigui $x \in \varnothing$

Demostrem 4: $x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow$no$\big(x \in A$ o $x \in B\big) \Leftrightarrow x \notin A$ i $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C$ i $x \in B^C$

$\Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$. Com que estan connectats amb una equivalència, pel principi d'extensionalitat surt que són iguals els dos conjunts. I l'altre igual.

La família dels subconjunts és un conjunt important. El nom d'aquesta família de subconjunts és: les parts d'un conjunt (o conjunt potència) de A:

DEF.: Per un conjunt A anomenem el conjunt de les parts d'aquest conjunt:

$$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

També podem dir equivalentment que $B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$.

EX.: Calculeu $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\{1,2\})$, $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
- $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\},$ $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

Un concepte definit pels conjunts és el seu cardinal:

DEF.: Per un conjunt finit (no hem definit què vol dir) A anomenem cardinal d'A, i l'escriurem $|A|$, al seu número d'elements.

EX.: Utilitzant l'exemple anterior digueu quant valen $|\varnothing|$, $|\mathcal{P}(\varnothing)|$, $|\{1\}|$, $|\mathcal{P}(\{1\})|$, $|\{1,2\}|$, $|\mathcal{P}(\{1,2\})|$, $|\{1,2,3\}|$,$|\mathcal{P}(\{1,2,3\})|$, $|\{1,2,3,4\}|$, $|\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})|$. Si $|A| = n$, llavors quin és el $|\mathcal{P}(A)|$?

$|\varnothing| = 0$, $|\mathcal{P}(\varnothing)| = 1$, $|\{1\}| = 1$, $|\mathcal{P}(\{1\})| = 2$, $|\{1,2\}| = 2$, $|\mathcal{P}(\{1,2\})| = 4$, $|\{1,2,3\}| = 3$,$|\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 8$, $|\{1,2,3,4\}| = 4$, $|\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})| = 16$. S'observa que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

PROP.: Sigui A un conjunt. Aleshores:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
2. $A \in P(A)$
3. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

DEM.: (41) Demostrem 1: és directa perquè per definició això vol dir que $\varnothing \subseteq A$.
Demostrem 2: també és directa perquè per definició això vol dir que $A \subseteq A$.

EX.: (42) Demostreu que $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow a \in A$.
Sigui un a, A:

- $\Rightarrow$: suposem que $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$, o sigui $\{a\} \subseteq A$ per tant com que $a \in \{a\}$ llavors podem dir que $a \in A$.
- $\Leftarrow$: suposem $a \in A$ i haig de demostrar que $\{a\} \in^{???} \mathcal{P}(A)$ que vol dir que $\{a\} \subseteq A$ i per demostrar això és molt fàcil: els elements de $\{a\}$ pertanyen a A ja que sabem que $a \in A$ (a és l'únic element que té $\{a\}$).