Examen FINAL M2 FIB-UPC 22 de gener de 2021

Totes les respostes han de ser raonades

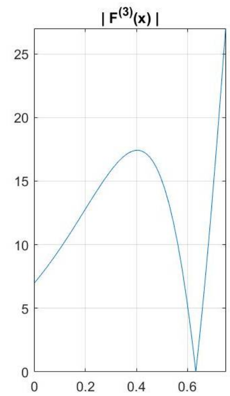
1. Sigui la funció $f(x) = \sin(2x) - x$.

a) Comproveu que $x = 0$ és solució de l'equació $f(x) = 0$. Proveu que, a més, l'equació $f(x) = 0$ té una solució positiva i una negativa en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. i que aquesta equació té només 3 solucions reals en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Utilitzant el mètode de la bisecció, trobeu el valor aproximat de la solució positiva de $f(x) = 0$ en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ amb un decimal correcte (error més petit que 0.05).

c) Amb el valor trobat a l'apartat anterior calculeu un valor aproximat de l'àrea del recinte tancat limitat per la corba $y = f(x)$ i l'eix d'abscisses en el primer quadrant.

2. a) Obteniu el polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+x} e^{\sin t}\, dt,\ x \geq 0$. Escriviu l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.



b) Fent ús del polinomi de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de $F(0.1)$.

c) Fent ús del gràfic adjunt, que representa la funció $y = |F^{(3)}(x))|$ a l'interval $[0, 0.75]$ i de l'expressió del residu de l'apartat a), doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b). Quants decimals correctes s'obtenen?

3. Considereu la funció $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 3}$

a) Trobeu el domini de la funció f.

b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x, y) = 1/k$ per a $k = -3, -2, 1$.

c) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f en el seu domini.

d) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1, 1)$?. Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ i sigui K el recinte $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte K.

b) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f en el recinte K i els punts on s'assoleixen.

Durada de l'examen: 2,5 hores

1. Sigui la funció $f(x) = \sin(2x) - x$.

a) Comproveu que $x = 0$ és solució de l'equació $f(x) = 0$. Proveu que, a més, l'equació $f(x) = 0$ té una solució positiva i una negativa en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. i que aquesta equació té només 3 solucions reals en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Utilitzant el mètode de la bisecció, trobeu el valor aproximat de la solució positiva de $f(x) = 0$ en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ amb un decimal correcte (error més petit que 0.05).

c) Amb el valor trobat a l'apartat anterior calculeu un valor aproximat de l'àrea del recinte tancat limitat per la corba $y = f(x)$ i l'eix d'abscisses en el primer quadrant.

SOLUCIÓ:

a) Donat que $\sin(0) = 0$, $x = 0$ és solució de l'equació $f(x) = 0$. La funció f és la resta d'una funció sinus i una funció polinòmica, per tant és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.
Tenim que $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0, f(-0.1) \simeq -0.099 < 0$ i f contínua en $[-\frac{\pi}{2}, -0.1]$, per tant, pel Teorema de Bolzano $\exists c_1 \in (-\frac{\pi}{2}, -0.1)$ tal que $f(c_1) = 0$.
A més, tenim que $f(0.1) \simeq 0.099 > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$ i f contínua en $[0.1, \frac{\pi}{2}]$, per tant, pel Teorema de Bolzano $\exists c_2 \in (0.1, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c_2) = 0$.
Per tant, l'equació $f(x) = 0$ té una solució positiva i una negativa en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
A continuació farem la demostració de que aquesta equació té només 3 solucions en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per reducció al absurd utilitzant el Teorema de Rolle.
Suposem que l'equació té 4 solucions reals i arribarem a una contradicció:
Suposem que $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tals que $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ i $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta) = 0$.
Tindríem que $f(\alpha) = f(\beta)$, f és contínua en $[\alpha, \beta]$ i f és derivable en (α, β), per tant, pel Teorema de Rolle $\exists c_1 \in (\alpha, \beta), f'(c_1) = 0$.
A més, tindríem que $f(\beta) = f(\gamma)$, f és contínua en $[\beta, \gamma]$ i f és derivable en (β, γ), per tant, pel Teorema de Rolle $\exists c_2 \in (\beta, \gamma), f'(c_2) = 0$.
A més, tindríem que $f(\gamma) = f(\delta)$, f és contínua en $[\gamma, \delta]$ i f és derivable en (γ, δ), per tant, pel Teorema de Rolle $\exists c_3 \in (\gamma, \delta), f'(c_3) = 0$.
En resum, l'equació $f'(x) = 0$ tindria tres solucions diferents en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Però $f'(x) = 2\cos(2x) - 1$ i $\left(2\cos(2x) - 1 = 0 \wedge x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) \Leftrightarrow$

$(x = -\dfrac{\pi}{6} \vee x = \dfrac{\pi}{6})$, és a dir l'equació $f'(x) = 0$ té només dues solucions diferents en l'interval $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. Així hem arribat a una contradicció i aquesta equació té només 3 solucions en l'interval $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

b) Quan s'utilitza el mètode de la bisecció, primer es poden calcular el número d'iteracions necessaries. Si l'utilitzem en l'interval $\left[0.1, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donat que l'error comés en l'i-èsima iteració és menor que $\dfrac{b-a}{2^i} = \dfrac{\frac{\pi}{2} - 0.1}{2^i} \simeq \dfrac{1.4708}{2^i}$, es té $\dfrac{1.4708}{2^i} < 0.05 \Leftrightarrow 2^i > 29.42 \Leftrightarrow i \geq 5$ i per tant calen 5 iteracions.

$f(0.1) \simeq 0.099 > 0, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} < 0;$

$x_1 = \dfrac{0.1 + \frac{\pi}{2}}{2}, \quad f(x_1) \simeq f(0.8353981635) \simeq 0.1596060018 > 0;$

$x_2 = \dfrac{x_1 + \frac{\pi}{2}}{2}, \quad f(x_2) \simeq f(1.203097245) \simeq -0.5322147725 < 0;$

$x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad f(x_3) \simeq f(1.019247704) \simeq -0.1266397222 < 0;$

$x_4 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}, \quad f(x_1) \simeq f(0.9273229338) \simeq 0.0326615438 > 0;$

$x_5 = \dfrac{x_3 + x_4}{2} \simeq 0.973.$

Per tant el valor aproximat de la solució positiva de $f(x) = 0$ utilitzant el mètode de la bisecció amb un error més petit que 0.05 és $x_5 \simeq 0.97$.

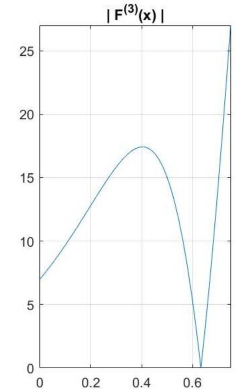
c) El valor aproximat de l'àrea del recinte tancat limitat per $y = f(x)$ i l'eix d'abscisses en el primer quadrant que s'obté amb el valor trobat a l'apartat anterior és:

$$A = \int_0^{0.973} (\sin(2x) - x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{0.973} \simeq 0.2098665205.$$

2. a) Obteniu el polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+x} e^{\sin t}\, dt,\ x \geq 0$. Escriviu l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Fent ús del polinomi de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de $F(0.1)$.

c) Fent ús del gràfic adjunt, que representa la funció $y = |F^{(3)}(x))|$ a l'interval $[0, 0.75]$ i de l'expressió del residu de l'apartat a), doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b). Quants decimals correctes s'obtenen?



SOLUCIÓ:

a) El polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x)$ és:

$$P_2(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2.$$

Calculem els coeficients:
$F(0) = \displaystyle\int_0^0 e^{\sin t}\, dt.$
Donat que la funció $e^{\sin t}$ és contínua per a tot $t \in \mathbb{R}$ per ser la composició d'una funció sinus i una exponencial, i que la funció $x^2 + x$ és derivable per ser polinòmica, pel Teorema Fonamental del Càlcul i la Regla de la Cadena tenim que la funció F és derivable i la seva derivada és: $F'(x) = (2x+1)e^{\sin(x^2+x)}$, per tant:
$F'(0) = 1.$
La segona derivada de F és $F''(x) = 2e^{\sin(x^2+x)} + (2x+1)^2\cos(x^2+x)e^{\sin(x^2+x)}$, i per tant:
$F''(0) = 3.$
D'aquesta manera, el polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x)$ és:

$$P_2(x) = x + \frac{3}{2}x^2.$$

L'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_2(x) = \frac{F'''(c)}{3!}x^3$$

per a cert c entre 0 i x.

b) Fent ús del polinomi de l'apartat anterior, s'obté el valor aproximat de $F(0.1) = 0.1 + \frac{3}{2}(0.1)^2 = 0.1150.$

c) Fent ús del gràfic que representa la funció $y = |F^3(x)|$ a l'interval $[0, 0.75]$, en el que veiem que el valor absolut de la derivada tercera és menor que 10 entre 0 i 0.1, i de l'expressió del residu de l'apartat a), tenim la següent fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b):

$error = |R_2(x)| = \dfrac{|F'''(c)|}{6}x^3 \leq \dfrac{10}{6}(0.1)^3 \simeq 0.0017 < 0.005.$
I per tant s'obtenen dos decimals correctes

3. Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-3}$

a) Trobeu el domini de la funció f.

b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x,y) = 1/k$ per a $k = -3, -2, 1$.

c) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f en el seu domini.

d) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$?. Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

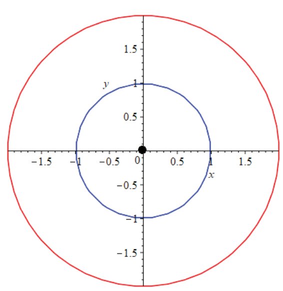
SOLUCIÓ:

a) La funció f és una funció racional, per tant el seu domini són tots els punts (x,y) del pla en els que no s'anul·la el denominador, que són tots els punts del pla excepte els de la circumfèrencia de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{3}$:
$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 3)\}$

b) Donat que:

$$f(x,y) = 1/k \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2-3} = 1/k \Leftrightarrow x^2+y^2-3 = k \Leftrightarrow x^2+y^2 = k+3$$

Per a qualsevol $k > -3$ les corbes de nivell $1/k$ són circumferències de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{k+3}$, per a $k=-3$ és el punt $(0,0)$ i per a qualsevol $k < -3$ són el conjunt buit. Per tant les corbes de nivell $f(x,y) = 1/k$ per a $k = -3, -2$ i 1 són respectivament el punt $(0,0)$ i les circumferències de centre $(0,0)$ i radis 1 i 2 respectivament:



c) Per ser f una funció racional, és de classe C^2 en el seu domini. Per trobar els punts crítics en el seu domini:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2+y^2-3)^2} = 0 \\ \\ \dfrac{-2y}{(x^2+y^2-3)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

És a dir, la funció té un únic punt crític que és el punt $(0,0)$. Per classificar-lo es pot fer aplicant el criteri del Hessià (dóna el determinat diferent de zero) o simplement un estudi local:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-3 \geq -3 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2-3} \leq \frac{1}{-3} \Rightarrow f(x,y) \leq f(0,0),$$

per tant, el punt $(0,0)$ és un màxim relatiu (i absolut).

d) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector gradient de f en aquest punt i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient en aquest punt. És a dir, per una banda, la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector:

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \right) = (-2,-2),$$

o, equivalentment, la direcció del vector $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

I per l'altra banda, el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és:

$$|\nabla f(1,1)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

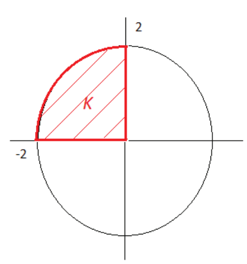
4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = x^2+y^2-xy+x+y$ i sigui K el recinte $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 0, \ y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq 4\}$.

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte K.

b) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f en el recinte K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és polinòmica i per tant contínua en tot $\mathbb{R}^2$, el dibuix del conjunt K és:



K és un conjunt compacte per ser tancat (donat que conté tots els seus punts frontera, que són els punts dels segments $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0, -2 \leq x \leq 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0, 0 \leq y \leq 2\}$ i els punts de l'arc de circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 4, -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\}$) i K és fitat (donat que $K \subset B_3\big((0,0)\big)$).

Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el recinte K és un compacte, pel teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en K.

b) Primer buscarem els punts candidats:

(i) La funció f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$ (per ser polinòmica), per tant els punts crítics de f són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \\ x = -1 \end{cases}$$

Per tant la funció f té un únic punt crític, que és el punt $(-1,-1) \notin K \Leftrightarrow (-1,-1)$ no és un candidat.

(ii) Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera del compacte K:

(ii.1) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, -2 \leq x \leq 0\}$: fent $y = 0$ tenim $f(x,0) = x^2 + x$, que és una funció d'una variable $\varphi_1(x) = x^2 + x$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi_1'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \in (-2,0)$. Així s'obté el punt crític $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

(ii.2) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 2\}$: fent $x = 0$ tenim $f(x,0) = y^2 + y$, que és una funció d'una variable $\varphi_2(y) = y^2 + y$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi_2'(y) = 2y + 1 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} \notin (0,2) \Longrightarrow$ no és un candidat.

(ii.3) Punts crítics de f condicionats a ser sobre l'arc de circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 4 = 0, -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\}$, es fa pel mètode de Lagrange. La funció de Lagrange és:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Igualant les seves derivades a 0 s'obté:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2y - x + 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Restant les dues primeres equacions obtenim: $2(x-y) + (x-y) + 2\lambda(x-y) = 0$, és a dir $(x-y)(3+2\lambda) = 0$, d'on $y = x$ o $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

Si $y = x$, de la tercera equació s'obté $x = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{2}$ i de la primera equació s'obté $\lambda = -\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow$ los punts crítics de la funció de Lagrange son $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{2}}{4})$, i cap de les dues solucions satisfà $-2 \leq x \leq 0, \ 0 \leq y \leq 2$.

Si $\lambda = -\dfrac{3}{2}$, de la primera equació s'obté $y = 1 - x$, i aleshores de la tercera equació: $2x^2 - 2x - 3 = 0$, d'on $x = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{2} \Longrightarrow y =$

$1-\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{7}}{2}\Longrightarrow$ los punts crítics de la funció de Lagrange son $\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{7}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, i per tant tenim el punt crític $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\approx$ $(-0.82, 1.82)$ condicionats a ser sobre l'arc de circumferència .

(ii.4) Els vèrtexs del compacte K són els punts: $(0,0), (-2,0)$ i $(0,2)$.

(iii) Les imatges per f dels punts crítics trobats són:

$f\left(-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}$,

$f\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\frac{13}{2}=6.5.$

$f(0,0)=0$,
$f(-2,0)=2$,
$f(0,2)=6$.

Per tant, el valor màxim absolut de f en K és $\frac{13}{2}$ i l'assoleix al punt $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, el valor mínim absolut de f en K és $-\frac{1}{4}$ i l'assoleix al punt $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.