QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat són els mètodes estàndard de demostració: prova directa i exemples, prova pel contrarecíproc i exemples.

CLASSE D'AVUI 8/10/2020

Reducció a l'absurd (1)

Es basa en: $p \equiv \neg p \to 0$. Volem demostrar A i per això fem $\neg A \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ *contradicció*

EX.: (16) Demostreu que $\sqrt{2}$ és irracional.

Formalitzem: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Sup. per un moment que fos mentida i arribem a una contradicció, és a dir

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

amb $\frac{a}{b}$ fracció irreduïble; llavors:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 = parell \Rightarrow a = parell \Rightarrow a = 2a'$ per cert enter a'

llavors $(2a')^2 = 2b^2 \Rightarrow 4a'^2 = 2b^2 \Rightarrow 2a'^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = parell \Rightarrow b = parell$ cosa contradictòria perquè estàvem suposant que la fracció era irreduïble. Per tant ha de ser que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

EX.: (17) Demostreu que si triem 15 dies diferents d'un calendari, n'hi ha 3 que cauen el mateix dia de
la setmana.

Per raonar per reducció a l'absurd aquesta afirmació suposem que triem els 15 dies i que n'hi ha 2 o menys que cauen en el mateix dia de la setmana. Si triem els dies de forma que no caiguin en el mateix dia de la setmana aconseguirem triar 7 dies però el vuitè coincidirà amb un de la setmana ja triat; amb el novè tenim un problema semblant perquè ens sortiran i tindrem dos dies de la setmana escollits dues vegades; el mateix amb el desè, l'onzè, el dotzè, el tretzè i el catorzè; i quan escollim el quinzè cauran tres dies en el mateix dia de la setmana.

EX.: (18) Demostreu per a, b, c enters que $a + b$ és parell o $b + c$ és parell o $c + a$ és parell.

Formalitzem: $\forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z} \big(2|a + b$ o $2|b + c$ o $2|c + a\big)$ o també podem escriure $\forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z} \big(a + b$ és parell o $b + c$ és parell o $c + a$ és parell$\big)$.

Siguin a, b, c, enters quassevol. Suposo per un moment que és falsa l'afirmació i per tant $a + b$ és senar i $b + c$ és senar i $c + a$ és senar; llavors:

$a + b = 2k_1 + 1$, $b + c = 2k_2 + 1$, $c + a = 2k_3 + 1$, per certs $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 2k_1 + 1 \\ b + c = 2k_2 + 1 \\ c + a = 2k_3 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a + 2b + 2c = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 + 2k_3 + 1 \Rightarrow 2(a + b + c) = 2(k_1 +$$

contradicció perquè un nombre no pot ser parell i senar a la vegada.

EX.: (19bis) Demostreu que no hi ha cap nombre racional r tal que $2r^3 + r + 5 = 0$ (useu que un zero a/b racional, en forma reduïda, del polinomi $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ amb coeficients enters compleix que $b|a_n$ i que $a|a_0$).

Formalitzem: $\forall r \in \mathbb{Q}(2r^3 + r + 5 \neq 0)$. Sigui un r qualsevol racional. Fem una demostració per reducció a l'absurd: suposem por un moment que fos fals, llavors tindríem $r = \frac{a}{b}$ arrel del polinomi $2r^3 + r + 5$, per tant:

$a|5,\ b|2 \Rightarrow a = \pm1, \pm5, b = \pm1, \pm2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm1, \pm5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

Ara només caldrà veure que aquests nombres no són zeros del polinomi:

- $2(1)^3 + (1) + 5 = 8$ (cap nombre positiu pot ser zero del polinomi per tant no mirem cap més)
- $2(-1)^3 + (-1) + 5 = 2$
- $2(-5)^3 + (-5) + 5 = -250$
- $2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{17}{4}$
- $2\left(-\frac{5}{2}\right)^3 + \left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -\frac{115}{4}$

per tant és fals que hi hagi una arrel racional. Aleshores no s'anul.la mai, és a dir, $\forall r \in \mathbb{Q}(2r^3 + r + 5 \neq 0)$.

Reducció a l'absurd (2)

Es basa en: $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to 0$. Volem demostrar $A \Rightarrow B$ i per això fem $A, \neg B \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathit{contradicció}$.

EX.: (30) Demostreu que la suma d'un nombre racional i un irracional és irracional.

Formalitzem: $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}\left(x \in \mathbb{Q} \text{ i } y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}\right)$

Siguin x, y qualssevol fixats i cal que demostrem $x \in \mathbb{Q}$ i $y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$. Farem una demostració per reducció a l'absurd, és a dir, suposarem cert $x \in \mathbb{Q}$ i $y \notin \mathbb{Q}$ i $x + y \in \mathbb{Q}$ i arribarem a una contradicció:

$x = \frac{a}{b}, x + y = \frac{c}{d}, y$ no es una fracció$\Rightarrow y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ =una fracció

en contradicció amb que no ho era. Per tant la suposició $x + y \in \mathbb{Q}$ és falsa, és a dir queda demostrat que $x + y \notin \mathbb{Q}$. I com que era per x, y qualssevol,llavors hem demostrat que $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}\left(x \in \mathbb{Q} \text{ i } y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}\right)$.

EX.: (31) Demostreu que si a, b, c són nombres enters i $a + b + c = 0$, com a mínim un d'ells és parell.

Formalitzem: $\forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z}\left(a + b + c = 0 \Rightarrow 2|a \text{ o } 2|b \text{ o } 2|c\right)$. També podríem haver escrit que $\forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z}\left(a + b + c = 0 \Rightarrow a \text{ és parell o } b \text{ és parell o } c \text{ és parell}\right)$ perquè no hi ha cap restricció a l'enunciat sobre la notació. Siguin $a, b, c \in \mathbb{Z}$ qualssevol i demostrem la implicació per reducció a l'absurd, és a dir, suposem que $a + b + c = 0$ i que a senar i b senar i c senar. Per tant $a = 2k_1 + 1$, $b = 2k_2 + 1$, $c = 2k_3 + 1$ per certs enters k_1, k_2, k_3 llavors $a + b + c = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 + 2k_3 + 1$ per la qual cosa $0 = 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1) + 1$ fet que és contradictori perquè 0 no és senar. Aleshores no és possible que els tres nombres siguin senars, per tant un dels tres nombres ha de ser parell tal com voliem demostrar.

EX.: (32) Demostreu que si p és primer llavors $\sqrt{p}$ és irracional (podeu usar que si a^2 és múltiple de
p llavors a és múltiple de p) .

Aquest exemple segueix el mateix fil conductor que l'exercici 16. Formalitzem: $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Suposem per un moment que fos mentida i arribem a una contradicció, és a dir:

$\sqrt{p} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{p} = \frac{a}{b}$ amb $\frac{a}{b}$ fracció irreduïble

llavors:

$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2 \Rightarrow a^2 =$múltiple de $p \Rightarrow a =$múltiple de $p \Rightarrow$

i per tant $a = pa'$ per cert enter a' i llavors

$(pa')^2 = pb^2 \Rightarrow p^2 a'^2 = pb^2 \Rightarrow pa'^2 = b^2 \Rightarrow b^2 =$múltiple de $p \Rightarrow b =$múltiple de p

cosa contradictòria perquè estàvem suposant que la fracció era irreduïble. Per tant ha de ser falsa la suposició que havíem fet $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, i per tant queda demostrat que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.