

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»

---

В. Д. ГОНЧАРОВ   Д. С. САМСОНОВ   М. С. ПОРТНОЙ

**СБОРНИК ЗАДАЧ  
ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2013

УДК 537.86

ББК В 336

Г 35

**Гончаров В. Д., Самсонов Д. С., Портной М. С.**

Г 35 Сборник задач по теории электромагнитного поля: учеб. пособие. СПб.:  
Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 30 с.

ISBN 978-5-7629-1567-0

Приведены задачи для самостоятельного решения по темам: электростатическое поле, магнитное поле постоянного тока.

Предназначено для студентов всех специальностей при изучении теории электромагнитного поля.

УДК 537.86

ББК В 336

Рецензенты: кафедра электротехники, электроэнергетики и электромеханики НМСУ «Горный»; д-р техн. наук, проф. А. А. Лисенков (СПбГПУ).

Утверждено

редакционно-издательским советом университета

в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-1567-0

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013

# 1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

## 1.1. Задача об электростатическом поле отрезка цилиндрического проводника

Отрезок цилиндрического проводника длиной 1 м и диаметром  $d_{\text{пр}}$  помещен в среду с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

В различных вариантах задачи могут быть также заданы: линейная плотность заряда проводника  $\tau$ , электрический потенциал проводника  $U_1$  относительно точки, удаленной на расстояние  $R$  от его оси, а также расстояние от оси  $l_1$ , на котором известно значение удельной плотности энергии электрического поля  $\omega_1$ .

Известно, что  $U_2$  – электрический потенциал в точке, расположенной на расстоянии  $l_2$  от оси проводника,  $E_{\text{пов}}$  – напряженность электрического поля на его поверхности, а  $W_E$  – полная энергия электрического поля, запасенная вокруг проводника.

В тех вариантах, где это необходимо,  $d_{\text{пр}}$  определяется таким, чтобы  $E_{\text{пов}}$  не превышала пробивную напряженность электрического поля окружающего диэлектрика  $E_{\text{проб}} = 3 \cdot 10^6$  В/м. В вариантах, где  $d_{\text{пр}}$  задан, необходимо проверить условие  $E_{\text{пов}} \leq E_{\text{проб}}$ . В случае, если оно не выполняется, нужно увеличить диаметр проводника так, чтобы обеспечить его выполнение, и продолжать решение, используя полученное значение  $d_{\text{пр}}$ . Исходные данные для каждого варианта задачи приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вариант	$\tau$ , Кл/м	$\epsilon$	$U_1$ , кВ	$R$ , м	$d_{\text{пр}}$ , см	$E_{\text{пов}}$ , В/м	$\omega_1$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , м	$U_2$ , кВ	$l_2$ , м	$W_E$ , Дж
1	–	1	75	2	–	–	–	1	–	1	–
2	$10^{-5}$	1	–	2	–	–	–	2	–	3	–
3	$10^{-5}$	10	–	1	–	–	–	2	–	2	–
4	–	10	75	3	–	–	–	3	–	5	–
5	–	1	20	1	1	–	$10^{-5}$	–	–	0,5	–
6	–	10	20	2	1	–	$2 \cdot 10^{-5}$	–	–	1	–
7	–	20	75	1	1	–	–	2	–	1,4	–
8	–	10	75	5	2	–	–	3	–	1,5	–
9	–	1	75	10	1	–	–	3	–	5	–
10	–	1	75	1	0,5	–	–	2	–	1,5	–
11	$10^{-7}$	1	–	2	1	–	–	2	–	3	–
12	$10^{-7}$	10	–	1	0,5	–	–	1	–	2	–

Вариант	$\tau$ , Кл/м	$\varepsilon$	$U_1$ , кВ	$R$ , м	$d_{\text{пр}}$ , см	$E_{\text{пов}}$ , В/м	$\omega_1$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , м	$U_2$ , кВ	$l_2$ , м	$W_E$ , Дж
13	$10^{-6}$	10	–	2	0,5	–	–	2	–	1	–
14	$10^{-6}$	1	–	1	0,5	–	–	1	–	2	–
15	–	1	–	1	1	–	$10^{-5}$	1	–	0,5	–
16	–	1	–	1	1	–	$10^{-5}$	0,5	–	0,2	–
17	–	1	–	1	2	–	$10^{-4}$	2	–	1	–
18	–	1	10	2	1	–	$5 \cdot 10^{-5}$		–	1	–
19	$10^{-6}$	–	10	1	0,5	–	–	1	–	2	–
20	$10^{-6}$	–	10	2	1	–	$5 \cdot 10^{-5}$	1	–	1	–

В результате решения задачи требуется:

1. Определив соответствующие величины, заполнить пустые ячейки таблицы для своего варианта.

2. Определить и построить следующие зависимости: распределение поверхностной плотности заряда проводника  $\sigma(r)$ , напряженность электрического поля  $E(r)$ , электрический потенциал  $U(r)$  и удельная плотность энергии  $\omega(r)$ , где  $r$  – расстояние от оси проводника.

*Условие повышенной сложности:* определить изменение потенциала  $\Delta U$  и полной энергии электрического поля  $\Delta W_E$ , а также максимальной напряженности электрического поля на его поверхности  $E_{\text{пов}}$  при погружении проводника на половину диаметра в воду ( $\varepsilon_{\text{в}} = 81$ ).

## 1.2. Задача об электростатическом поле отрезка коаксиального кабеля

Отрезок коаксиального кабеля длиной 1 м состоит из центральной жилы, оплетки и диэлектрика, заполняющего область между ними. Центральная жила представляет собой цилиндрический проводник диаметром  $d_{\text{пр}}$ , а оплетка – полый проводящий цилиндр с внутренним диаметром  $d_{\text{вн}}$ , расположенный соосно с центральной жилой. Диэлектрик состоит из двух цилиндрических слоев, имеющих относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно. Граница между слоями находится на расстоянии  $R_1$  от оси кабеля.

В различных вариантах задачи могут быть также заданы: линейная плотность заряда центральной жилы  $\tau_1$  и оплетки  $\tau_2$ ; разность потенциалов  $U_1$  между центральной жилой и оплеткой; расстояние от оси  $l_1$ , на котором известно значение удельной плотности энергии электрического поля  $\omega_1$ .

Известно, что  $E_{\text{пов}}$  – напряженность электрического поля на поверхности центральной жилы, а  $W_E$  – полная энергия электрического поля, запасенная внутри отрезка кабеля.

В тех вариантах, где это необходимо,  $d_{\text{пр}}$  определяется таким, чтобы  $E_{\text{пов}}$  не превышала пробивную напряженность электрического поля  $E_{\text{проб}} = 3 \cdot 10^6$  В/м. В вариантах, где  $d_{\text{пр}}$  задан, необходимо проверить условие  $E_{\text{пов}} \leq E_{\text{проб}}$ . В случае, если оно не выполняется, нужно увеличить диаметр проводника так, чтобы обеспечить его выполнение, и продолжать решение, используя полученное значение  $d_{\text{пр}}$ . Исходные данные для каждого варианта задачи приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вариант	$\tau_1$ , Кл/м	$\tau_2$ , Кл/м	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$U_1$ , кВ	$R_1$ , см	$d_{\text{пр}}$ , см	$d_{\text{вн}}$ , см	$E_{\text{пов}}$ , В/м	$\omega_1$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , см	$W_E$ , Дж
1	–	–	1	1	10	2	–	5	–	–	3	–
2	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	1	1	–	2	–	5	–	–	2	–
3	–	–	1	5	20	2	–	5	–	–	3	–
4	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	1	5	–	2	–	5	–	–	2	–
5	–	–	5	1	20	2	–	5	–	–	3	–
6	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	5	1	–	2	–	5	–	–	2	–
7	–	–	1	1	20	2	1	5	–	–	3	–
8	$10^{-6}$	$-10^{-6}$	1	1	–	2	2	5	–	–	2	–
9	–	–	1	5	10	2	1	5	–	–	3	–
10	$10^{-6}$	$-10^{-6}$	1	5	–	2	2	5	–	–	2	–
11	–	–	5	1	10	1,5	1	5	–	–	3	–
12	$10^{-6}$	$-10^{-6}$	5	1	–	2	2	5	–	–	2	–
13	$2 \cdot 10^{-6}$	$-10^{-6}$	1	1	–	2	2	5	–	–	7	–
14	$2 \cdot 10^{-6}$	$-10^{-6}$	5	1	–	2	2	5	–	–	7	–
15	$2 \cdot 10^{-6}$	$-10^{-6}$	1	5	–	2	2	5	–	–	7	–
16	–	–	1	1	–	1	1	5	–	$10^{-5}$	3	–
17	–	–	2	1	–	1,5	1	5	–	$10^{-5}$	3	–
18	–	–	1	2	–	2	1	5	–	$10^{-5}$	3	–
19	–	–	1	5	10	2	–	5	–	–	3	–
20	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	1	5	–	2	–	5	–	–	2	–

В результате решения задачи требуется:

1. Определив соответствующие величины, заполнить пустые ячейки таблицы для своего варианта.

2. Определить и построить следующие зависимости: распределение поверхностной плотности заряда для обоих проводников  $\sigma(r)$ , напряженность электрического поля  $E(r)$ , электрический потенциал  $U(r)$  и удельная плотность энергии  $\omega(r)$ , где  $r$  – расстояние от оси кабеля.

### 1.3. Задача об электростатическом поле отрезка двухпроводной линии или провода, расположенного над плоской полубесконечной средой

Для вариантов 1–10. Отрезок двухпроводной линии длиной 1 м помещен в среду с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ .

Известно, что  $d_{\text{пр}}$  – диаметр проводов линии,  $D$  – расстояние между их осями,  $U_1$  – разность потенциалов между проводами.

В различных вариантах задачи могут быть также заданы:  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – линейные плотности заряда проводов,  $l_1$  – расстояние от середины отрезка, соединяющего оси проводов, на котором известно значение удельной плотности энергии электрического поля  $\omega_1$ .

*Для вариантов 11–20.* Отрезок проводника длиной 1 м и диаметром  $d_{\text{пр}}$  расположен над границей раздела двух плоских полубесконечных сред с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно.

Известно, что проводник находится в первой среде, а  $U_1$  – его потенциал относительно точки, лежащей на границе раздела сред на кратчайшем расстоянии  $D$  от его оси. В случае, если по условию  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , вторая среда является проводящей. Если  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , то вторая среда – непроводящая.

В различных вариантах задачи могут быть также заданы:  $\tau_1$  – линейная плотность заряда проводника,  $l_1$  – расстояние до точки, лежащей на кратчайшем отрезке, соединяющем ось проводника и плоскость, разделяющую среды, на котором известно значение удельной плотности энергии электрического поля  $\omega_1$ .

В тех вариантах, где это необходимо,  $d_{\text{пр}}$  определяется таким, чтобы наибольшая напряженность электрического поля на поверхности любого из проводников  $E_{\text{пов}}$  не превышала пробивную напряженность электрического поля окружающего диэлектрика  $E_{\text{проб}} = 3 \cdot 10^6$  В/м. В вариантах, где  $d_{\text{пр}}$  задан, необходимо проверить условие  $E_{\text{пов}} \leq E_{\text{проб}}$ . Если оно не выполняется, нужно увеличить диаметр проводников так, чтобы обеспечить его выполнение, и продолжать решение, используя полученное значение  $d_{\text{пр}}$ . Исходные данные для каждого варианта задачи приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Вариант	$\tau_1$ , Кл/м	$\tau_2$ , Кл/м	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$U_1$ , кВ	$D$ , см	$d_{\text{пр}}$ , см	$E_{\text{пов}}$ , В/м	$\omega_1$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , см
1	–	–	1	–	10	2	–	–	–	3
2	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	1	–	–	2	–	–	–	2
3	–	–	1	–	10	2	–	–	–	1
4	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	1	–	–	3	1	–	–	2
5	–	–	1	–	20	4	–	–	–	3
6	–	–	1	–	10	2	1	–	$10^{-5}$	–

Вариант	$\tau_1$ , Кл/м	$\tau_2$ , Кл/м	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$U_1$ , кВ	$D$ , см	$d_{\text{пр}}$ , см	$E_{\text{пов}}$ , В/м	$\omega_1$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , см
7	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	1	–	–	2	1	–	$10^{-5}$	–
8	$10^{-5}$	$-10^{-5}$	1	–	–	2	–	–	–	2
9	–	–	1	–	10	2	–	–	–	3
10	–	–	1	–	–	3	2	–	$10^{-5}$	2
11	–	–	1	1	75	3	–	–	–	3
12	$10^{-6}$	–	1	1	–	3	–	–	–	2
13	–	–	1	10	75	3	–	–	–	3
14	$2 \cdot 10^{-6}$	–	1	10	–	3	–	–	–	7
15	–	–	1	10	10	4	2	–	$10^{-5}$	–
16	$10^{-6}$	–	1	1	–	4	2	–	$10^{-5}$	–
17	–	–	1	1	–	4	1	–	$10^{-5}$	3
18	–	–	1	10	–	3	1	–	$10^{-5}$	3
19	–	–	10	1	10	3	–	–	–	3
20	$10^{-5}$	–	10	1	–	3	–	–	–	2

В результате решения задачи требуется:

1. Заполнить пустые ячейки таблицы для своего варианта, определив соответствующие величины.

2. Построить на кратчайшем отрезке, соединяющем оси проводов (в вариантах 11–20 – ось проводника и плоскость раздела сред), следующие зависимости: распределение поверхностной плотности заряда для проводников  $\sigma(r)$ , напряженность электрического поля  $E(r)$ , электрический потенциал  $U(r)$  и удельная плотность энергии  $\omega(r)$ , где  $r$  – расстояние вдоль отрезка.

#### 1.4. Задача о магнитном поле постоянного тока, протекающего в отрезке коаксиального кабеля, и о распределении энергии электромагнитного поля в такой системе

Отрезок коаксиального кабеля длиной 1 м, состоящий из центральной жилы и оплетки, помещен в диэлектрическую среду с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Центральная жила представляет собой цилиндрический проводник диаметром  $d_{\text{пр}}$ , а оплетка – полый проводящий цилиндр с внутренним диаметром  $d_i$  и внешним диаметром  $d_e$ , расположенный соосно с центральной жилой.

Известно, что  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость обоих проводников,  $W_E$  и  $W_H$  – полная энергия электрического и магнитного полей соответственно, запасенная внутри отрезка кабеля.

В различных вариантах задачи могут быть также заданы:  $U_1$  – разность потенциалов между центральной жилой и оплеткой,  $I_1$  и  $I_2$  – токи, протекающие по центральной жиле и оплетке, суммарная мощность  $P$ , передаваемая по кабелю, и  $l_1$  – расстояние от оси кабеля, на котором известна напряженность магнитного поля  $H_1$ , значение удельной плотности энергии магнитного поля  $\omega_H$  или модуля вектора Пойнтинга  $\Pi_1$ .

В тех вариантах, где это необходимо,  $d_{\text{пр}}$  определяется таким, чтобы наибольшая напряженность электрического поля на поверхности любого из них  $E_{\text{пов}}$  не превышала пробивную напряженность электрического поля окружающего диэлектрика  $E_{\text{проб}} = 3 \cdot 10^6$  В/м. В вариантах, где  $d_{\text{пр}}$  задан, необходимо проверить условие  $E_{\text{пов}} \leq E_{\text{проб}}$ . Плотность тока в проводниках  $J_{\text{пр}}$  также не должна превышать максимально допустимую для их материала (для меди  $J_{\text{доп}} = 5$  А/мм<sup>2</sup>). В случае невыполнения какого-либо из этих условий нужно увеличить диаметр проводников так, чтобы обеспечить его выполнение, и продолжать решение, используя полученное значение  $d_{\text{пр}}$ . Исходные данные для каждого варианта задачи приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Вариант	$I_1$ , А	$I_2$ , А	$\varepsilon$	$\mu$	$U_1$ , кВ	$d_{\text{пр}}$ , см	$d_i$ , см	$d_e$ , см	$P$ , кВт	$H_1$ , А/м	$\Pi_1$ , Дж/м <sup>3</sup>	$\omega_H$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , см	$W_E$ , Дж	$W_H$ , Дж
1	–	–	1	1	25	–	4	–	7,5	–	–	–	3	–	–
2	$10^2$	$-10^2$	1	1	–	–	4	–	7,5	–	–	–	2	–	–
3	$10^2$	$-10^2$	1	1	50	–	4	–	–	–	–	–	2	–	–
4	–	–	1	1	25	–	4	–	–	–	$10^6$	–	3	–	–
5	–	–	1	1	–	1	4	–	7,5	–	$10^6$	–	2	–	–
6	$10^2$	$-10^2$	1	1	–	–	4	–	–	–	$10^6$	–	2	–	–
7	–	–	1	1	20	1	3	–	–	–	–	$10^2$	3	–	–
8	–	–	1	1	–	1	2	–	1	–	–	$10^2$	2	–	–
9	$10^2$	$-10^2$	1	1	10	1	3	–	–	–	–	$10^2$	3	–	–
10	–	–	1	1	–	1	3	–	–	–	$10^6$	$10^2$	3	–	–
11	–	–	1	1	–	1	2	–	1	–	$10^6$	–	2	–	–
12	–	–	1	1	–	1	3	–	1	–	–	$10^2$	3	–	–
13	–	–	1	1	–	1	3	–	–	$10^4$	$10^6$	–	3	–	–
14	–	–	1	1	–	1	2	–	1	$10^4$	–	–	2	–	–
15	–	–	1	1	–	1	3	–	1	–	–	$10^2$	3	–	–
16	–	–	1	1	5	1	3	–	–	$10^4$	–	–	3	–	–
17	–	–	10	1	25	–	4	–	7,5	–	–	–	3	–	–
18	$10^2$	$-10^2$	10	1	–	–	4	–	7,5	–	–	–	2	–	–
19	$10^2$	$-10^2$	10	1	50	–	4	–	–	–	–	–	2	–	–



20	–	–	–	1	10	1	3	–	1	–	–	10 <sup>2</sup>	3	–	–
----	---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---	-----------------	---	---	---

В результате решения задачи требуется:

1. Заполнить пустые ячейки таблицы для своего варианта, определив соответствующие величины.

2. Определить и построить следующие зависимости: распределение поверхностной плотности заряда для обоих проводников  $\sigma(r)$ , напряженность электрического поля  $E(r)$ , напряженность магнитного поля  $H(r)$ , электрический потенциал  $U(r)$ , удельная плотность энергии электрического поля  $\omega_E(r)$ , удельная плотность энергии магнитного поля  $\omega_H(r)$ , проекции вектора Пойнтинга  $\Pi_z$  и  $\Pi_r$  на оси  $z$  и  $r$  соответственно, где  $r$  – расстояние от оси кабеля.

### 1.5. Задача о взаимодействии незаряженной частицы и внешнего электростатического поля

В однородное электростатическое поле напряженностью  $E_0$ , созданное в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_e$ , помещается диэлектрический шар диаметром  $d_1$  с проводимостью материала  $\gamma$  и относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_i$ .

В различных вариантах задачи могут быть также заданы:  $E_i$  – напряженность электрического поля внутри шара,  $E_{\text{пов}}$  – максимальное значение напряженности электрического поля на его поверхности. Исходные данные для каждого варианта задачи приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Вариант	$E_0$ , В/м	$\gamma$ , (Ом · м) <sup>–1</sup>	$\epsilon_i$	$E_i$ , В/м	$E_{\text{пов}}$ , В/м	$d_1$ , см
1	–	10 <sup>–3</sup>	10	–	2 · 10 <sup>6</sup>	0,1
2	10 <sup>6</sup>	10 <sup>–3</sup>	10	–	–	0,1
3	–	10 <sup>–3</sup>	10	2 · 10 <sup>6</sup>	–	0,1
4	–	10 <sup>–3</sup>	10	–	2 · 10 <sup>6</sup>	0,02
5	10 <sup>6</sup>	10 <sup>–3</sup>	10	–	–	0,02
6	–	10 <sup>–3</sup>	10	2 · 10 <sup>6</sup>	–	0,02
7	–	0	10	2 · 10 <sup>6</sup>	–	0,2
8	10 <sup>6</sup>	0	10	–	–	0,2
9	–	0	10	–	2 · 10 <sup>6</sup>	0,2
10	–	0	1	2 · 10 <sup>6</sup>	–	0,2
11	10 <sup>6</sup>	0	1	–	–	0,2
12	–	0	1	–	2 · 10 <sup>6</sup>	0,2
13	–	10 <sup>–3</sup>	10	–	5 · 10 <sup>6</sup>	0,1
14	10 <sup>5</sup>	10 <sup>–3</sup>	10	–	–	0,1
15	–	10 <sup>–3</sup>	10	2 · 10 <sup>6</sup>	–	0,1
16	–	10 <sup>–3</sup>	10	–	5 · 10 <sup>6</sup>	0,02

17	$10^5$	$10^{-3}$	10	–	–	0,02
----	--------	-----------	----	---	---	------

Окончание табл. 1.5

Вариант	$E_0$ , В/м	$\gamma$ , (Ом · м) $^{-1}$	$\varepsilon_i$	$E_i$ , В/м	$E_{\text{пов}}$ , В/м	$d_1$ , см
18	–	$10^{-3}$	10	$3 \cdot 10^6$	–	0,02
19	–	0	10	$5 \cdot 10^6$	–	0,2
20	$10^5$	0	10	–	–	0,2

В результате решения задачи требуется:

1. Заполнить пустые ячейки таблицы для своего варианта, определив соответствующие величины.

2. Определить распределение силы, действующей на поверхность частицы со стороны зарядов, скопившихся на ее поверхности.

3. Определить и построить следующие зависимости: распределение поверхностной плотности заряда для обоих проводников  $\sigma(r)$ , напряженность электрического поля  $E(r)$ , электрический потенциал  $U(r)$ , удельная плотность энергии электрического поля  $\omega_E(r)$ , где  $r$  – координата на линии, проходящей через центр частицы параллельно внешней напряженности электрического поля.

4. Построить качественную картину распределения электрического поля  $E(r)$  и потенциала  $U(r)$  вблизи частицы.

### 1.6. Задача об искажении электростатического поля отрезка коаксиального кабеля при помещении его в диэлектрик

Отрезок коаксиального кабеля длиной 1 м, состоящий из центральной жилы и оплетки, помещен в диэлектрическую среду с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Центральная жила представляет собой цилиндрический проводник диаметром  $d_{\text{пр}}$ , а оплетка – полый проводящий цилиндр с внутренним диаметром  $d_i$ , расположенный соосно с центральной жилой. На расстоянии  $R_1$  от оси кабеля находится шарообразная частица.

Известно, что  $d_1$  – диаметр частицы,  $\gamma$  – проводимость материала частицы,  $\varepsilon_i$  – относительная диэлектрическая проницаемость материала частицы,  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость материала центральной жилы и оплетки, а область между ними заполнена диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_e$ .

В различных вариантах задачи могут быть также заданы:  $\tau_1$  – линейная плотность заряда центральной жилы (линейная плотность заряда оплетки  $\tau_2 = -\tau_1$ ),  $U_1$  – разность потенциалов между центральной жилой и оплеткой,  $l_1$  – расстояние от оси кабеля, на котором известно значение удельной плот-

ности энергии электрического поля  $\omega_1$ , либо модуль вектора силы  $F$ , действующей на частицу.

В тех вариантах, где это необходимо,  $d_{\text{пр}}$  определяется таким, чтобы наибольшая напряженность электрического поля на поверхности центральной жилы  $E_{\text{пов}}$  не превышала пробивную напряженность электрического поля окружающего диэлектрика  $E_{\text{проб}} = 3 \cdot 10^6$  В/м. В вариантах, где  $d_{\text{пр}}$  задан, необходимо проверить условие  $E_{\text{пов}} \leq E_{\text{проб}}$ . В случае, если оно не выполняется, нужно увеличить диаметр центральной жилы так, чтобы обеспечить его выполнение, и продолжать решение, используя полученное значение  $d_{\text{пр}}$ . Исходные данные для каждого варианта задачи приведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Вариант	$\tau_1$ , Кл/м	$\gamma$ , (Ом · м) <sup>-1</sup>	$\varepsilon_i$	$\varepsilon$	$U_1$ , кВ	$d_1$ , см	$d_{\text{пр}}$ , см	$d_i$ , см	$R_1$ , м	$F$ , Н	$\omega_1$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , см
1	—	$10^{-3}$	1	10	10	0,1	1	2	7,5	—	—	0,7
2	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	10	—	0,1	1	2	7,5	—	—	0,6
3	—	0	1	10	10	0,1	1	2	7,5	—	—	0,7
4	$10^{-6}$	0	1	10	—	0,1	1	2	7,5	—	—	0,6
5	—	$10^{-3}$	1	10	10	0,2	1	2	6,5	—	—	0,7
6	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	10	—	0,2	1	2	6,5	—	—	0,6
7	—	0	1	10	10	0,2	1	2	6,5	—	—	0,7
8	$10^{-6}$	0	1	10	—	0,2	1	2	6,5	—	—	0,6
9	—	$10^{-3}$	10	1	10	0,1	1	2	7,5	—	—	0,7
10	$10^{-6}$	$10^{-3}$	10	1	—	0,1	1	2	7,5	—	—	0,6
11	—	0	10	1	10	0,1	1	2	7,5	—	—	0,7
12	$10^{-6}$	0	10	1	—	0,1	1	2	7,5	—	—	0,6
13	—	$10^{-3}$	1	10	—	0,2	1	2	6,5	—	$10^{-5}$	0,7
14	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	10	—	0,2	1	2	6,5	—	$10^{-5}$	0,6
15	—	0	1	10	—	0,2	1	2	6,5	—	$10^{-5}$	0,7
16	$10^{-6}$	0	1	10	—	0,2	1	2	6,5	—	$10^{-5}$	0,6
17	—	$10^{-3}$	1	1	10	0,1	1	2	7,5	—	—	0,7
18	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	1	—	0,1	1	2	7,5	—	—	0,6
19	—	$10^{-3}$	1	5	10	4	1	5	6,5	2	—	3
20	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	5	—	3	2	5	7,5	2	—	2

В результате решения задачи требуется:

1. Заполнить пустые ячейки таблицы для своего варианта, определив соответствующие величины.
2. Определить направление силы, действующей на частицу.

3. Определить и построить следующие зависимости: распределение поверхностной плотности заряда для обоих проводников  $\sigma(r)$ , напряженность электрического поля  $E(r)$ , электрический потенциал  $U(r)$ , удельную плотность энергии электрического поля  $\omega_E(r)$ , где  $r$  – расстояние от оси кабеля на прямой, проходящей через ось кабеля и центр частицы.

4. Построить качественную картину распределения электрического поля  $E(r)$  и потенциала  $U(r)$  вблизи частицы.

### **1.7. Задача о силах, действующих на сферическую незаряженную частицу со стороны электростатического поля отрезка цилиндрического проводника**

В электрическое поле, созданное отрезком проводника длиной 1 м и диаметром  $d_{\text{пр}}$ , расположенным на расстоянии  $D$  над границей раздела двух плоских полубесконечных сред с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  соответственно, помещена частица.

Известно, что частица находится в первой среде на расстоянии  $d_2$  от границы раздела и на расстоянии  $d_2$  от проводника;  $d_1$  – ее диаметр;  $\gamma$  – проводимость материала частицы;  $\epsilon_i$  – относительная диэлектрическая проницаемость материала частицы;  $U_1$  – потенциал проводника относительно точки, расположенной на поверхности среды на минимальном расстоянии от оси проводника. В случае, если  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ , вторая среда является проводящей. Если  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ , то вторая среда – непроводящая.

В различных вариантах задачи могут быть также заданы:  $\tau$  – линейная плотность заряда проводника;  $U_1$  – его потенциал относительно точки, лежащей на границе раздела сред на кратчайшем расстоянии  $D$  от оси проводника;  $l_1$  – расстояние от оси проводника на линии, проходящей через эту ось и перпендикулярной поверхности среды, на котором известно значение удельной плотности энергии электрического поля  $\omega_1$  либо модуль вектора силы  $F$ , действующей на частицу.

В тех вариантах, где это необходимо,  $d_{\text{пр}}$  определяется таким, чтобы  $E_{\text{пов}}$  не превышала пробивную напряженность электрического поля окружающего диэлектрика  $E_{\text{проб}} = 3 \cdot 10^6$  В/м. В вариантах, где  $d_{\text{пр}}$  задан, необходимо проверить условие  $E_{\text{пов}} \leq E_{\text{проб}}$ . Если оно не выполняется, нужно уве-

личить диаметр проводника так, чтобы обеспечить его выполнение, и продолжать решение, используя полученное значение  $d_{\text{пр}}$ . Исходные данные для каждого варианта задачи приведены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Вариант	$\tau$ , Кл/м	$\gamma$ , (Ом · м) <sup>-1</sup>	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_i$	$U_1$ , кВ	$d_1$ , см	$d_{\text{пр}}$ , см	$d_2$ , см	$D$ , см	$F$ , Н	$\omega_1$ , Вт/м <sup>3</sup>	$l_1$ , см
1	—	$10^{-3}$	1	1	10	10	1	1	8	8	—	—	0,7
2	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	1	10	—	0,1	1	6	8	—	—	0,6
3	—	0	1	1	10	10	0,1	1	8	8	—	—	0,7
4	$10^{-6}$	0	1	1	10	—	0,1	1	6	8	—	—	0,6
5	—	$10^{-3}$	1	1	10	10	0,2	1	8	6	—	—	0,7
6	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	1	10	—	0,2	1	6	6	—	—	0,6
7	—	0	1	1	10	10	0,2	1	8	8	—	—	0,7
8	$10^{-6}$	0	1	1	10	—	0,2	1	6	8	—	—	0,6
9	—	$10^{-3}$	10	10	1	10	0,1	1	8	8	—	—	0,7
10	$10^{-6}$	$10^{-3}$	10	10	1	—	0,1	1	6	8	—	—	0,6
11	—	0	10	10	1	10	0,1	1	8	8	—	—	0,7
12	$10^{-6}$	0	10	10	1	—	0,1	1	6	8	—	—	0,6
13	—	$10^{-3}$	1	1	10	—	0,2	1	6	6	—	$10^{-5}$	0,7
14	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	1	10	—	0,2	1	8	6	—	$10^{-5}$	0,6
15	—	0	1	1	10	—	0,2	1	6	6	—	$10^{-5}$	0,7
16	$10^{-6}$	0	1	1	10	—	0,2	1	8	6	—	$10^{-5}$	0,6
17	—	$10^{-3}$	1	1	1	10	0,1	1	8	8	—	—	0,7
18	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	1	1	—	0,1	1	6	8	—	—	0,6
19	—	$10^{-3}$	1	1	5	10	0,4	1	6	6	2	—	3
20	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	1	5	—	0,3	2	8	8	2	—	2

В результате решения задачи требуется:

1. Заполнить пустые ячейки таблицы для своего варианта, определив соответствующие величины.

2. Определить и построить следующие зависимости: распределение поверхностной плотности заряда проводника  $\sigma(r)$ ; напряженность электрического поля  $E(r)$ ; электрический потенциал  $U(r)$ ; удельная плотность энергии электрического поля  $\omega_E(r)$ , где  $r$  – расстояние от оси кабеля на прямой, проходящей через ось проводника и центр частицы.

3. Построить качественную картину распределения электрического поля  $E(r)$  и потенциала  $U(r)$  вблизи частицы.

## **2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**

Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых частных решений уравнений Максвелла, необходимо обозначить несколько принципов инженерного подхода к решению электромагнитных задач:

1. Определение допущений, облегчающих решение задачи, не приводя к существенной ошибке:

- определение, какими из электромагнитных процессов в предложенной задаче можно пренебречь. В результате станет ясно, какие из уравнений Максвелла в данной задаче необходимо решать, а какие – нет, какие выбрать переменные, относительно которых удобно решать поставленную задачу;

- анализ погрешностей, к которым приводит пренебрежение некоторыми процессами;

- выбор системы координат, позволяющей свести к минимуму количество используемых пространственных переменных.

2. Уравнения Максвелла – уравнения относительно векторных величин. Решать такие уравнения достаточно сложно, поскольку вместо одного уравнения приходится решать систему, записанную относительно проекций векторов на координатные оси. Точно такие же сложности возникают и при анализе полученных результатов, когда приходится складывать векторы. Поэтому когда это возможно, от решений векторных уравнений лучше отказаться. Один из таких случаев – расчет потенциальных полей, т. е. полей, в описании которых отсутствует вихревая составляющая (равны нулю правые части первого и второго уравнений Максвелла).

3. Определение границ области пространства, в которой будет проводиться расчет электромагнитных процессов. Задание граничных условий: значений функции, относительно которой решается задача, либо ее производной, на границах расчетной области. Причем, границы могут быть как внешние, так и внутренние (т. е. исключающие из рассмотрения внутренние области, где распределение поля изначально известно).

### **2.1. Исследование электрического поля, создаваемого отрезками цилиндрического проводника и коаксиального кабеля**

В этих задачах рассматривается распределение электростатического поля, поэтому при их решении используется третье уравнение Максвелла, записанное относительно потенциала электрического поля.

Рассматриваемые системы обладают осевой симметрией, и для определения параметров электрического поля в данном случае удобно использовать цилиндрическую систему координат  $(R, \varphi, z)$  с осью  $Oz$ , совмещенной с осью проводника.

Радиус цилиндрического проводника считаем пренебрежимо малым по сравнению с расстояниями до других зарядов в рассматриваемой системе, а также с длиной этого проводника. В этом случае с достаточной для технических приложений точностью можно рассматривать процессы, происходящие только в одной плоскости, перпендикулярной оси проводника (считаем, что во всех остальных плоскостях, параллельных этой, процессы совершенно одинаковы).

Совместим начало координат с геометрической осью проводника в сечении, перпендикулярном оси  $Oz$  (рис. 2.1). На выделенной плоскости все направления равнозначны, т. е. не зависят от угла  $\varphi$ . Если

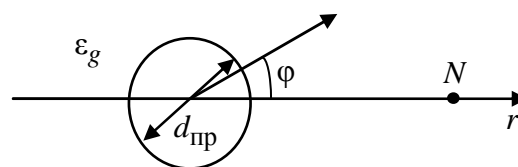


Рис. 2.1

ось  $Oz$  совместить с осью проводника, то распределение потенциала в диэлектрической среде будет зависеть только от расстояния  $R$ . В подобных случаях говорят о цилиндрической симметрии задачи. Таким образом, принципиально трехмерная задача сведется к решению одномерного уравнения Лапласа, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \epsilon R \frac{\partial U}{\partial R} \right] = 0,$$

где  $\epsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, в которой расположен проводник ( $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_g$ );  $r$  – текущий радиус.

Разность потенциалов между двумя произвольными точками, расположенными на расстоянии  $R_1$  и  $R_2$  от начала координат, можно найти, проинтегрировав два раза уравнение Лапласа:

$$U_{12} = C_1 (\ln R_1 - \ln R_2) + C_2 = C_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + C_2.$$

В этом выражении  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, которые можно найти из граничных условий. Первое граничное условие – это либо потенциал на поверхности проводника  $U(R_0^+)$ , если он задан, либо скорость его измерения на этой поверхности, т. е. напряженность электрического поля  $E(R_0^+) = -\text{grad} U(R_0^+) = -C_1/R_0$ . Напряженность поля на поверхности про-

водника можно определить, исходя из значения плотности заряда на поверхности проводника:  $\sigma = q/(2\pi R_0 l) = \tau/(2\pi R_0)$ , где  $l$  – длина проводника,  $\tau = q/l$  – плотность заряда на единицу длины проводника.

Электростатическое поле генерируется зарядом, который скапливается на границе проводящего материала, все точки которого находятся под одним потенциалом. Таким образом, на его поверхности нет касательных составляющих напряженности электрического поля. Для границы «проводник/диэлектрик» третье уравнение Максвелла будет иметь вид:  $(D_{n2} - D_{n1}) = \sigma$ , где  $D_{n1}$  и  $D_{n2}$  – значения нормальной составляющей вектора электрического смещения в проводящем материале и диэлектрике соответственно. С учетом того, что электростатическое поле в проводнике отсутствует, это выражение можно переписать как  $D_{n2} = \sigma = \tau/(2\pi R)$ , а значение напряженности поля на поверхности проводника можно найти следующим образом:  $E(R_0^+) = D_{n2}/\varepsilon = \tau/(2\pi\varepsilon R_0)$ .

Приравняв выражения для напряженности поля на поверхности проводника, можно определить значение одной постоянной интегрирования:  $C_1 = -\tau/(2\pi\varepsilon)$ .

В качестве другого граничного условия можно использовать точку, значение потенциала в которой будем считать равным нулю (точка отсчета  $N$ ). Потенциал относительно точки  $N$ , создаваемый заряженным цилиндрическим проводником в любой другой точке в однородной диэлектрической среде  $U(R) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{R_N}{R}$ , где  $R_N$  – расстояние от оси до точки отсчета. Отсюда видно, что потенциал в произвольной точке определяется только удельной плотностью заряда и расстоянием до этой точки от оси провода и не зависит от диаметра этого провода. Это позволяет говорить о том, что данную задачу можно трактовать как задачу о поле тонкой заряженной нити.

Формулой для расчета потенциала можно также воспользоваться при определении плотности заряда при известном распределении потенциала, а также для определения диэлектрической проницаемости при известном распределении потенциала и плотности заряда.

Для коаксиального кабеля (рис. 2.2), диэлектрическая среда которого состоит из двух диэлектриков:



$$U(r) = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{R_N}{R_1} + \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \ln \frac{R_1}{r},$$

где  $R_1$  – расстояние от оси провода до границы двух диэлектриков, а  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  – относительные диэлектрические проницаемости первого и второго диэлектриков.

Напряженность электрического поля можно определить, взяв производную от потенциала по  $r$ :  $E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}$ .

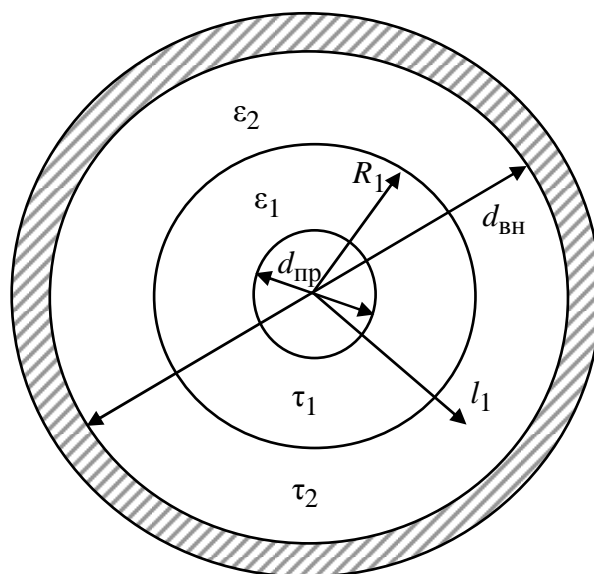


Рис. 2.2

Область с максимальным значением напряженности поля находится на поверхности проводника, а само значение можно определить по формуле  $E(R_0) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon(d_{\text{пр}}/2)}$ . Этой формулой можно

воспользоваться для определения диаметра проводника по известному значению напряженности поля на его поверхности.

Удельную плотность энергии электрического поля на произвольном расстоянии  $r$  от цилиндрического провода можно найти по формуле  $\omega_E(r) = \frac{E(r)D(r)}{2}$ . Энергию, которая запасается в электрическом поле проводника

единичной длины, можно определить путем интегрирования плотности энергии по объему:  $W_E = \int_0^{\infty} \int_{d_{\text{пр}}/2}^{\infty} \omega_E(r) dr dl$ .

## 2.2. Исследование электрического поля, создаваемого отрезком двухпроводной линии или проводом, расположенным над плоской полубесконечной средой

Под двухпроводной линией будем понимать систему из двух параллельных заряженных цилиндрических проводников. Взаимодействие полей этих проводников приводит к тому, что распределение заряда на их поверхности будет не равномерно, поэтому электрическое поле в данной задаче нельзя считать как сумму полей отдельных, не влияющих друг на друга проводников. Однако эту задачу можно свести к задаче о двух тонких заряженных нитях.

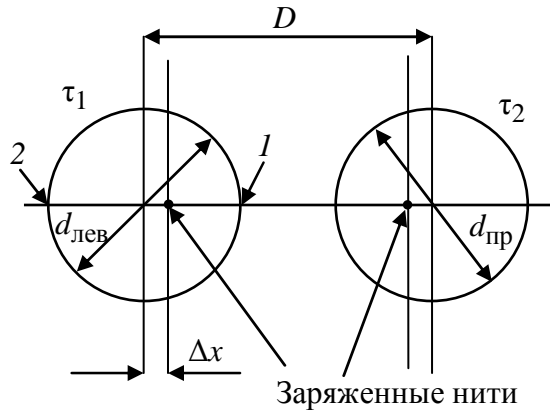


Рис. 2.3

Электростатическое поле в диэлектрике описывается третьим уравнением Максвелла в обоих случаях. Чтобы поля были одинаковы, необходимо только чтобы граничные условия для этих двух задач совпадали. Граничные условия – известное значение потенциала на всей поверхности проводника (как одного, так и другого). Использование этого условия

позволяет свести данную задачу к задаче о суперпозиции полей двух заряженных нитей, расположение которых сдвинуто на расстояние  $\Delta x$  относительно геометрической оси проводов (рис. 2.3). Таким образом, первая часть решения задачи сводится к определению  $\Delta x$ .

Пусть есть две заряженные нити, расположение которых сдвинуто на расстояние  $\Delta x$  относительно геометрической оси проводов, а удельный заряд этих нитей совпадает с зарядом соответствующих проводов. Выберем точку отсчета на расстоянии 1 м от заряженных нитей. Тогда потенциал, который создают нити в точке 1 (на «виртуальной» поверхности проводника),

$$U_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{1}{(0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{1}{(D - 0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)},$$

а в точке 2 –

$$U_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{1}{(0,5d_{\text{лев}} + \Delta x)} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{1}{(D + 0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)}.$$

Для случая одинаковых по модулю удельных плотностей заряда разного знака ( $\tau_1 = -\tau_2$ ) получим:

$$U_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{(D + 0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)}{(0,5d_{\text{лев}} + \Delta x)},$$

$$U_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{(D - 0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)}{(0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)}.$$

Точки 1 и 2 принадлежат поверхности проводника. В электростатике проводник всегда находится под одним потенциалом. Поэтому, приравнявая значения потенциала в точках 1 и 2 и сократив общие члены, получим равенство логарифмов, которое возможно, только если равны значения функций под знаком логарифма, т. е. если выполняется условие:

$$\frac{(D + 0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)}{(0,5d_{\text{лев}} + \Delta x)} = \frac{(D - 0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)}{(0,5d_{\text{лев}} - \Delta x)}.$$

Данное выражение сводится к алгебраическому уравнению второго порядка относительно  $\Delta x$ .

Теперь можем перейти ко второй части решения задачи – определению требуемых параметров. Пусть есть две параллельных разноименно заряженных нити, расположенные на расстоянии  $D$  друг от друга. Построим плоскость, перпендикулярную их осям, и выберем на ней произвольную точку отсчета, которая будет расположена на одинаковом расстоянии от нитей.

Используя принцип суперпозиции, распределение потенциала двухпроводной линии можно найти как сумму потенциалов отдельных заряженных нитей. В частности, на линии, проходящей через оси проводников, потенциал можно найти по формуле

$$U_M = U_{M1} + U_{M2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_{N1}}{R_1} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_{N2}}{R_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – минимальные расстояния от осей первого и второго провода до точки определения потенциала.

Напряженность электрического поля можно определить, либо взяв производную по координатам от потенциала, либо путем векторного сложения напряженностей поля в данной точке от заряженных нитей. Максимальное значение напряженности будет на поверхности проводов, причем если знаки зарядов проводов различны, то напряженность максимальна на внутренней

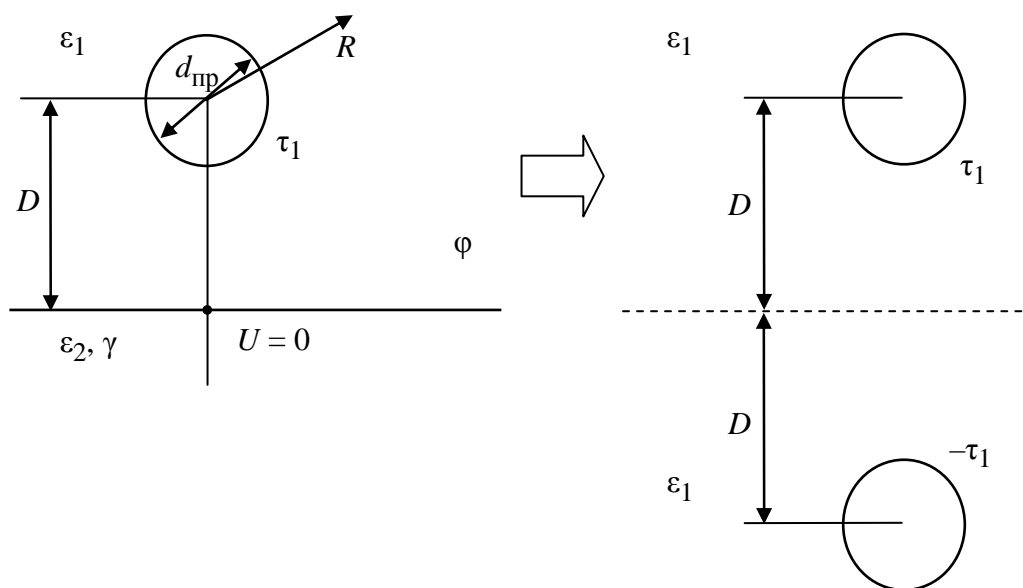


Рис. 2.4

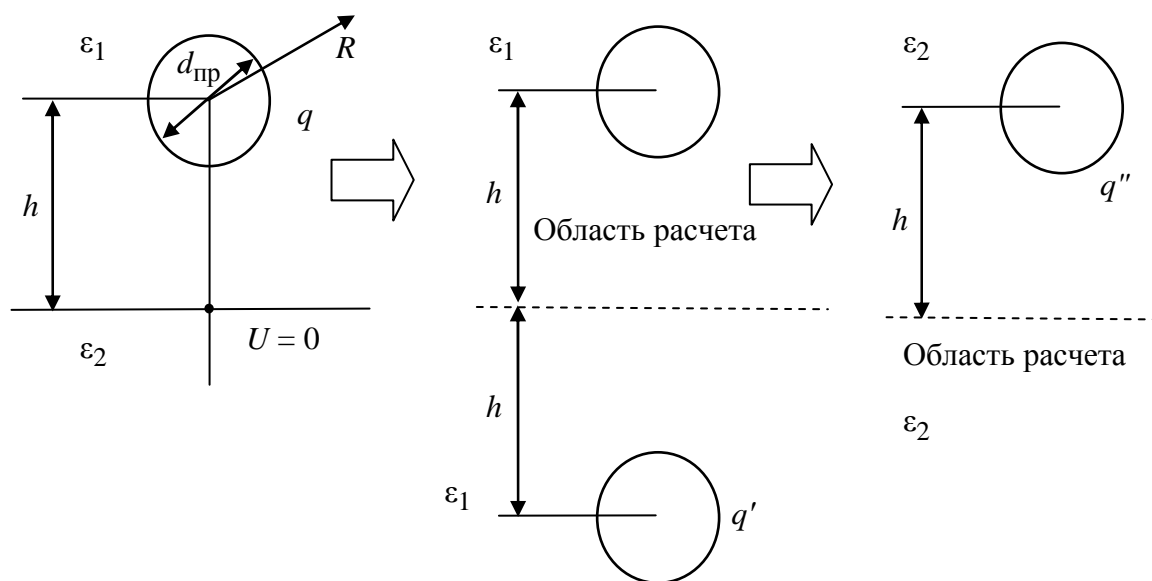


Рис. 2.5

поверхности проводов, а если совпадают – то на их внешней поверхности. Само максимальное значение можно определить по формуле

$$E(R) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon \left( d_{\text{пр}}/2 \pm \Delta x \right)}.$$

Удельная плотность энергии электрического поля  $\omega$  может быть определена как сумма плотностей энергии от каждой заряженной нити в отдельности (см. 2.1).

Использование метода зеркальных отображений (эквивалентных зарядов) позволяет свести задачу определения напряженности электрического поля провода, расположенного над плоской полубесконечной средой (варианты 11–20) к задаче о двух проводниках, помещенных в однородную среду, и использовать для решения описанный алгоритм. На рис. 2.4 приведен случай проводника над проводящей плоскостью. На рис. 2.5 приведен случай проводника над диэлектрической средой с другой диэлектрической проницаемостью.

### 2.3. Исследование магнитного поля постоянного тока, протекающего в отрезке коаксиального кабеля, и распределения энергии электромагнитного поля в такой системе

Здесь рассматривается случай, когда радиус цилиндрического проводника пренебрежимо мал по сравнению с его длиной.

В этом случае с достаточной для технических приложений точностью можно рассматривать только процессы, происходящие в одной плоскости, перпендикулярной оси проводника: считаем, что во всех остальных плоскостях, параллельных этой, процессы совершенно одинаковы.

Для нахождения распределения напряженности электростатического и магнитного полей отрезка коаксиального кабеля удобно использовать цилиндрическую систему координат  $(R, \varphi, z)$  с осью  $Oz$ , совпадающей с геометрической осью проводника (рис. 2.6). Распределение электрических параметров системы аналогично случаю, рассмотренному в 2.1 и 2.2.

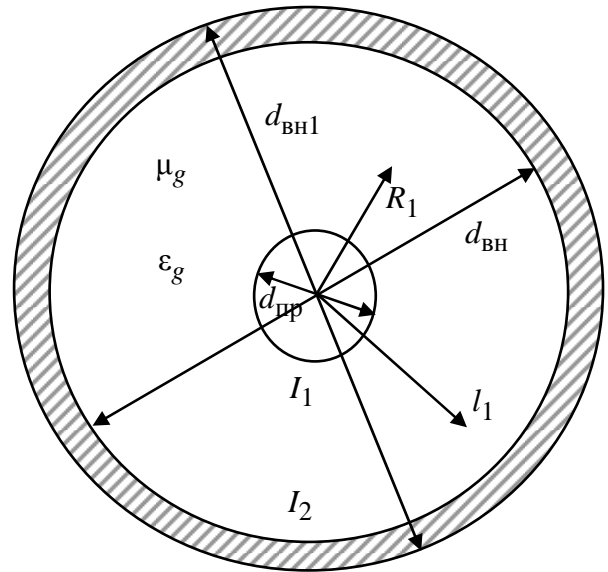


Рис. 2.6

Определить пространственное распределение напряженности магнитного поля при протекании постоянного тока можно на основе решения первого уравнения Максвелла, которое в данном случае будет иметь вид  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ .

Выберем систему координат так, чтобы геометрическая ось проводника совпадала с осью  $Oz$ . Плотность тока проводимости в этом случае будет иметь только одну составляющую  $J_z$ . В результате, записав ротор функции и приравняв коэффициенты при одинаковых ортах, получим, что все проекции, кроме проекции на ось  $Oz$ , равны нулю, а для проекций на ось  $Oz$  можно записать:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z.$$

При расчете напряженности магнитного поля можно воспользоваться цилиндрической симметрией задачи (все направления в сечении, перпендикулярном оси  $Oz$ , равнозначны), которая для данного уравнения означает равенство нулю производной по  $\varphi$ . Таким образом, в левой части уравнения остается только одна производная по  $r$ . Следовательно, напряженность магнитного поля в данной задаче будет иметь только одну составляющую  $H_\varphi$ , направленную по касательной к окружностям с центром в начале координат. Ее можно найти, решив дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = J_z.$$

Удобно искать решение данного уравнения отдельно для каждой из рассматриваемых сред, т. е. разбив область решения на 3 части:

- 1)  $R \in [0; d_{\text{пр}}/2]$  – центральная жила кабеля – проводник диаметром  $d_{\text{пр}}$ ;

2)  $R \in [d_{\text{пр}}/2; d_{\text{вн}}/2)$  – диэлектрическая изоляция кабеля (среда с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_g$ );

3)  $R \in [d_{\text{вн}}/2; d_{\text{вн1}}/2]$  – оплетка кабеля (полый цилиндр, выполненный из проводящего материала, с внутренним диаметром –  $d_{\text{вн}}$ , внешним –  $d_{\text{вн1}}$ , геометрическая ось которого совпадает с осью центральной жилы).

Благодаря непрерывности касательной составляющей напряженности магнитного поля решение, полученное для предыдущего интервала, будет служить граничным условием для следующего. В результате, после несложных преобразований и интегрирования, получим:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi}) = rJ_z \Rightarrow H_{\varphi}(r) = rJ_z/2 + C_2/r,$$

где коэффициент  $C_2$  – постоянная интегрирования, которую можно найти из граничного условия – отсутствия касательной составляющей магнитного поля на оси проводника:  $H_{\varphi}(0) = 0$ , т. е.  $C_2 = 0$ .

На первом интервале напряженность магнитного поля прямо пропорциональна радиусу. Плотность тока в центральной жиле  $J_z$  можно найти, исходя из заданного значения тока  $I_1$ :  $J_z = 4I_1 / (\pi d_{\text{пр}}^2)$ .

Если в условии задачи диаметр центральной жилы не задан, его можно найти, исходя из допустимого уровня разогрева проводника протекающим по нему током и предельно допустимой для данного диэлектрика напряженности поля, так как диэлектрик может выполнять свою функцию, только если напряженность поля не превышает определенной величины. В противном случае между токоведущими частями кабеля может возникнуть разряд, который закортит их.

Допустимый уровень разогрева медного проводника достигается, если плотность тока в нем не превышает  $5 \text{ А/мм}^2$ . Это значение накладывает ограничение на минимальный диаметр проводника:  $d_{\text{пр}} = \sqrt{4I_1 / (\pi J_{\text{доп}})}$ .

Максимальная напряженность электрического поля всегда будет достигаться на поверхности центральной жилы. Допустимая напряженность поля  $E_{\text{проб}}$  также накладывает ограничение на минимальный диаметр проводника:

$$d_{\text{пр}} = \frac{\tau}{\pi \varepsilon E_{\text{проб}} (d_{\text{пр}}/2)}.$$

Диаметр центральной жилы должен быть больше этих двух значений.

Напряженность магнитного поля на поверхности центральной жилы (т. е. в точках, одновременно принадлежащих и первому, и второму интервалам):  $H_{\varphi}(d_{\text{пр}}/2) = J_z d_{\text{пр}}/4 = I_1/(\pi d_{\text{пр}})$ .

При преобразовании и интегрировании уравнения для второго интервала, в котором нет тока, получим:  $\frac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi}) = 0 \Rightarrow H_{\varphi}(r) = C_1/r$ . Здесь  $C_1$  – постоянная интегрирования, которую можно найти из граничного условия:

$$H_{\varphi}(d_{\text{пр}}/2) = 2C_1/d_{\text{пр}} \Rightarrow C_1 = H_{\varphi}(d_{\text{пр}}/2)d_{\text{пр}}/2.$$

На втором интервале напряженность магнитного поля обратно пропорциональна радиусу.

Вид решения для третьего интервала аналогичен полученному для первого:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi}) = rJ_{z1} \Rightarrow H_{\varphi}(r) = (1/2)rJ_{z1} + C_2/r.$$

Значение постоянной интегрирования  $C_2$  можно определить из условия на границе  $d_{\text{вн}}$ :

$$H_{\varphi}(d_{\text{вн}}/2) = J_z d_{\text{вн}}/4 = J_{z1} d_{\text{вн}}/4 + C_2/(d_{\text{вн}}/2) \Rightarrow C_2 = d_{\text{вн}}^2 (J_z - J_{z1})/8,$$

где  $J_{z1}$  – плотность тока в оплетке, которая так же не должна превышать допустимую плотность тока  $J_{\text{доп}}$ . Данное условие позволяет определить внешний радиус оплетки.

Кстати, если токи в центральной жиле и оплетке равны друг другу и противоположны по направлению, напряженность магнитного поля за границей проводника должна быть равна нулю.

Удельную плотность энергии магнитного поля на произвольном расстоянии  $R$  от цилиндрического провода можно найти по формуле

$$\omega_H(r) = \frac{H(r)B(r)}{2},$$

где  $B(r) = \mu H(r)$  – индукция магнитного поля. Энергию, которая запасается в магнитном поле, коаксиального кабеля единичной длины, можно определить

путем интегрирования плотности энергии:  $W_H = \int_0^1 \int_{d_{\text{пр}}/2}^{\infty} \omega_H(r) dr dl$ .

Значение вектора Пойнтинга, который описывает поток энергии электромагнитного поля, можно определить как векторное произведение напряженно-

стей электрического и магнитного полей в данной точке  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . В данном случае вектор Пойнтинга имеет две взаимно перпендикулярные составляющие:  $\Pi_z = E_r H_\phi$  и  $\Pi_r = E_z H_\phi$ . Первая из них описывает передачу электромагнитной энергии по кабелю. Вторая – восполнение энергии, потерянной за счет нагрева проводящего провода протекающим по нему током. Значение модуля вектора Пойнтинга можно найти по формуле:  $|\mathbf{\Pi}| = \sqrt{\Pi_z^2 + \Pi_r^2}$ .

Суммарную мощность, передаваемую по кабелю, можно либо определить, проинтегрировав составляющую вектора Пойнтинга  $\Pi_z$  по  $r$  от  $d_{\text{пр}}/2$  до  $d_{\text{вн1}}/2$ , либо найти по формуле  $P = UI_1$ .

## 2.4. Исследование взаимодействия незаряженной частицы и внешнего электростатического поля

Очевидно, что внешнее электрическое поле будет искажаться за счет свободных (если частица проводящая) или связанных (если она диэлектрическая) зарядов, скапливающихся на ее поверхности, т. е. основным элементом, который искажает равномерное электрическое поле, является шар. Поэтому задачу удобно решать в сферических координатах  $(r, \phi, \theta)$ .

Точку отсчета удобно поместить в начало координат и совместить с центром шара. В этом случае распределение потенциала однородного электрического поля можно найти:  $U_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ .

Появление шара с другой диэлектрической проницаемостью приводит к изменению распределения поля. Однако это распределение как внутри сферы, так и снаружи нее подчиняется уравнению Лапласа, которое в сферической системе координат можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0.$$

Поставленная задача симметрична относительно направления напряженности электрического поля, т. е.  $\partial U / \partial \phi = 0$ , и уравнение Лапласа необходимо решать в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0.$$

Общий вид решения подобного уравнения имеет вид

$$U_n = \left( A_n r + \frac{B_n}{r^2} \right) \cos \theta + C_n,$$



где  $A_n, B_n, C_n$  – постоянные интегрирования для  $n$ -й среды. Индексом  $e$  будем обозначать внешнюю среду, индексом  $i$  – среду внутри шара.

Для решения задачи необходимо найти постоянные интегрирования. При совмещении начала координат и центра шара  $U_i = 0$  при  $r = 0$ . Это возможно, только когда постоянные интегрирования  $B_i = 0, C_i = 0$ . Таким образом, внутри шара напряжение  $U_i = A_i r \cos \theta$ . Постоянная  $C$  определяется точкой отсчета и, следовательно, одинакова для внешней и внутренней сред:  $C_i = C_e = 0$ .

При  $r \rightarrow \infty$  поле шара не оказывает влияния на начальное, равномерное распределение напряженности электрического поля, т. е.  $U(\infty) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ . С другой стороны,  $U_e = A_e r \cos \theta$ . Эти две формулы совпадают с точностью до обозначений:  $A_e = -E_0$ . Таким образом, для определения поля во внешней среде можно записать:  $U_e = \left( -E_0 r + \frac{B_e}{r^2} \right) \cos \theta$ .

Для определения постоянных интегрирования  $A_i$  и  $B_e$  воспользуемся граничными условиями на поверхности шара. При  $r = r_0$ :  $U_i = U_e$  или  $A_i r_0 = -E_0 r_0 + B_e / r_0^2$ .

Другим условием на границе двух диэлектриков является условие равенства нормальных составляющих вектора электрического смещения:

$$D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \varepsilon_i \frac{\partial U_i}{\partial r} = \varepsilon_e \frac{\partial U_e}{\partial r} \text{ или } A_i \varepsilon_i = \varepsilon_e \left( -E_0 - \frac{2B_e}{r_0^3} \right).$$

Совместное решение двух алгебраических уравнений позволяет определить постоянные интегрирования:

$$B_e = \frac{E_0 r_0^3 (\varepsilon_e - \varepsilon_i)}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}, \quad A_i = -3E_0 \frac{\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}.$$

Таким образом, для нахождения распределения потенциалов внутри и снаружи шара, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} U_i = -\frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} r E_0 \cos \theta, \\ U_e = \left( -E_0 r + \frac{E_0 (\varepsilon_i - \varepsilon_e) r_0^3}{(\varepsilon_i + 2\varepsilon_e) r^2} \right) \cos \theta. \end{cases}$$

Поле внутри и вне частицы состоит из двух составляющих: первая – описывает внешнее постоянное электрическое поле, вторая – поле, потенциал которого уменьшается пропорционально  $1/r^2$ . Подобная зависимость характерна для поля диполя, т. е. поле поляризованного шара таково, как будто бы в центре него находится диполь с электрическим моментом

$$\mathbf{P} = k\mathbf{E} = 4\pi\epsilon_e (d_1/2)^3 \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{2\epsilon_e + \epsilon_i} \mathbf{E},$$

где  $k$  – коэффициент диполя.

### Замечания

1. Распределение поля в случае металлического шара можно получить, устремив диэлектрическую проницаемость среды шара в бесконечность:  $\epsilon_i \rightarrow \infty$ . В этом случае дипольный момент можно найти по формуле  $\mathbf{P} = k\mathbf{E} = 4\pi\epsilon_e r_0^3 \mathbf{E}$ , а потенциал и напряженность поля внутри шара равны нулю. Линии внешнего электрического поля будут перпендикулярны поверхности шара, а максимальное значение этого поля  $E_{\max} = 3E_0$  (1 на рис. 2.7), т. е. любое проводящее включение в диэлектрической среде становится концентратором электрического поля, и именно на этом включении происходит в первую очередь пробой диэлектрика.

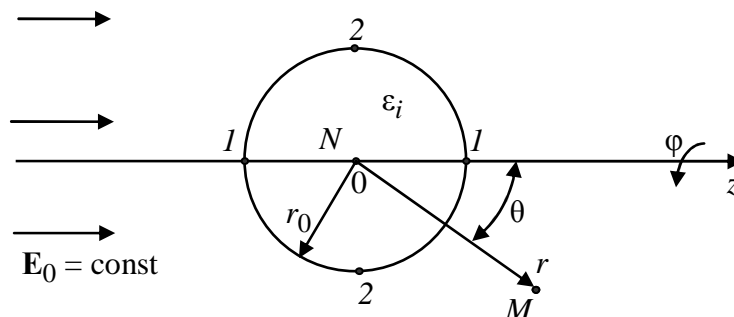


Рис. 2.7

2. В случае  $\epsilon_e > \epsilon_i$  (например, воздушный пузырек в воде) максимальная напряженность поля внутри и на поверхности пузырька (2 на рис. 2.7):  $E_{\max} = 1,5E_0$ .

## 2.5. Исследование электростатического поля отрезка коаксиального кабеля при наличии включения в его диэлектрике

Для расчета силы, действующей на частицу со стороны электростатического поля отрезка коаксиального кабеля (рис. 2.8), необходимо определить распределение напряженности электрического поля. Для этого можно использовать формулы, приведенные при решении задачи 1.2.

The diagram shows a circular system with several concentric regions and labeled parameters. At the center is a small circle labeled  $d_{np}$ . Surrounding it is a region labeled  $I_1$ . The next region is labeled  $I_2$ . The outermost region is shaded with diagonal lines and contains the labels  $\mu_g$  and  $\epsilon_g$ . A point on the boundary of the  $I_1$  region is labeled  $R_1$ . A distance from the center to this point is labeled  $d_{BH1}$ . A distance from the center to the boundary of the  $I_2$  region is labeled  $d_{BH}$ . A distance from the center to the boundary of the shaded region is labeled  $l_1$ . A distance from the center to the boundary of the  $I_1$  region is labeled  $d_1$ .

*Рис. 2.8*

Энергия частицы, вернее, энергия диполя, которым заменили эту частицу,  $W_e = \mathbf{P}\mathbf{E}/2$ , и тогда силу можно найти из формулы

$$F = -\text{grad} \frac{\mathbf{PE}}{2} = -\text{grad} \frac{kE^2}{2}.$$

1. Коэффициент  $k$  может быть как положительным, так и отрицательным. В случае, если  $\varepsilon_e > \varepsilon_i$ :  $k > 0$  и сила направлена в сторону уменьшения напряжения поля. В случае, если  $\varepsilon_e < \varepsilon_i$ :  $k < 0$  и сила направлена в сторону увеличения напряжения поля.

Для нахождения распределения потенциалов, создаваемых внутри и снаружи частицы в случае, когда поле на ее виртуальных границах изменяется незначительно (т. е. ее размеры существенно меньше расстояний, рассматриваемых в задаче), можно воспользоваться формулами:

$$\begin{cases} U_i = -\frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} E \cos\theta, \\ U_e = \left( -Er + \frac{E(\varepsilon_i - \varepsilon_e)r_0^3}{(\varepsilon_i + 2\varepsilon_e)r^2} \right) \cos\theta, \end{cases}$$

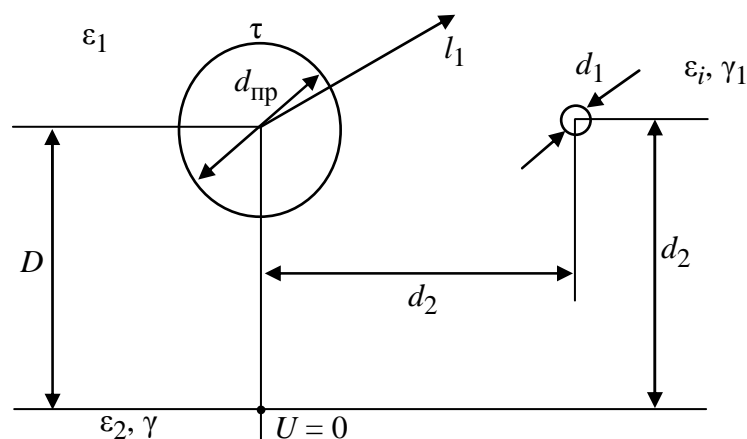
27

Задача решалась в сферических координатах ( $r, \varphi, \theta$ ) с началом, совпадающим с центром частицы (система координат выбрана сферической, поскольку основным элементом, искажающим электрическое поле, является шарообразная частица). Точка отсчета потенциала находится в начале координат.

Определить изменение напряженности электрического поля можно, продифференцировав распределение потенциала.

## 2.6. Исследование сил, действующих на сферическую незаряженную частицу со стороны электростатического поля отрезка цилиндрического проводника

Для расчета силы, действующей на частицу со стороны электростатического поля отрезка провода (рис. 2.9), необходимо определить распределение напряженности электрического поля. Для этого можно использовать формулы, приведенные при решении задачи из 1.3.



Для определения распределения поля внутри и вне частицы, можно использовать формулы, приведенные при решении задачи из 1.5.

## Оглавление

1. Условия задач для самостоятельного решения.....	3
1.1. Задача об электростатическом поле отрезка цилиндрического проводника.....	3
1.2. Задача об электростатическом поле отрезка коаксиального кабеля .....	4
1.3. Задача об электростатическом поле отрезка двухпроводной линии или провода, расположенного над плоской полубесконечной средой .....	5
1.4. Задача о магнитном поле постоянного тока, протекающего в отрезке коаксиального кабеля, и о распределении энергии электромагнитного поля в такой системе.....	7
1.5. Задача о взаимодействии незаряженной частицы и внешнего электростатического поля .....	9
1.6. Задача об искажении электростатического поля отрезка коаксиального кабеля при помещении его в диэлектрик .....	10
1.7. Задача о силах, действующих на сферическую незаряженную частицу со стороны электростатического поля отрезка цилиндрического проводника.....	12
2. Методические указания к решению задач.....	14
2.1. Исследование электростатического поля, создаваемого отрезками цилиндрического проводника и коаксиального кабеля .....	14
2.2. Исследование электростатического поля, создаваемого отрезком двухпроводной линии или проводом, расположенным над плоской полубесконечной средой .....	17
2.3. Исследование магнитного поля постоянного тока, протекающего в отрезке коаксиального кабеля, и распределения энергии электромагнитного поля в такой системе.....	20
2.4. Исследование взаимодействия незаряженной частицы и внешнего электростатического поля .....	24
2.5. Исследование электростатического поля отрезка коаксиального кабеля при наличии включения в его диэлектрике .....	26
2.6. Исследование сил, действующих на сферическую незаряженную частицу со стороны электростатического поля отрезка цилиндрического проводника .....	28

Гончаров Вадим Дмитриевич,  
Самсонов Дмитрий Сергеевич,  
Портной Марк Саулович

**Сборник задач по теории электромагнитного поля**

Учебное пособие

Редактор Н. В. Лукина

---

Подписано в печать 27.12.13. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 2,0.  
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 170 экз. Заказ 269.

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5