$$(1)\ \begin{cases} y_t = f(t,y,\mu) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases} \qquad (t,y,\mu) \in B \subseteq R^{n+k+1}$$

1. $f \in C(B)$, вещ-зн.
2. $\exists \frac{\partial}{\partial y_i} f \in C(B)_{i=1,..,n}$ $\qquad (t_0, y^0, \mu) \in B$

$y(t,m)$ – непрод. реш. $\qquad (t_-(\mu), t_+(\mu))$

$\mathfrak{M} = \{(t,\mu) : (t_0, y^0, \mu) \in B, \quad t_-(\mu) < t < t_+(\mu)\}$

T1. 1,2 – вып. $\Rightarrow$ 1) $\mathfrak{M}$ – откр.
2) $y(t,m) \in C(\mathfrak{M})$

3. $\exists \frac{\partial}{\partial \mu_l} f \in C(B)_{l=1,..,k}$

T2. 1,2,3 – вып. $\Rightarrow$ 1) $\exists \frac{\partial}{\partial \mu_i} y(t,\mu) \in C(\mathfrak{M})$
2) $v_i(t,y) = y_\mu(t,\mu)$

Сист. ур-й Пуанкаре (по параметру ?)

$$(2)\ \begin{cases} \frac{d}{dt} v_i = f_y(t, y(t,\mu), \mu)\, v_i + f_{\mu_i}(t, y(t,\mu), \mu) \\ v_i|_{t=t_0} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} v_i(t,\mu) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mu_i} y(t,\mu)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t,\mu) \equiv f(t, y(t,\mu), \mu) \\ y(t_0, \mu) \equiv y^0 \end{cases}$$

$$(3)\ \exists \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{\partial}{\partial t} y(t,\mu) \equiv f_y(t, y(t,\mu), \mu) \frac{\partial}{\partial \mu_i} y(t,\mu) + f_{\mu_i}(t, y(t,\mu), \mu)$$

Сл-вие: $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mu_i} y(t,\mu) \equiv \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{\partial}{\partial t} y(t,\mu)$

$$(4)\ \begin{cases} \frac{d}{dt} y = g(t,y) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$$

Усл-я: A. $g(t,y) \in C(G)$ вещ. $\qquad$ (G – область y)
B. $\exists g_{y_j}(t,y) \in C(G)$ $\quad j=1,..,n$

$y(t,y^0)$ – непрод. реш $\Rightarrow (t_-(y^0), t_+(y^0))$ $\qquad \mathfrak{M}_0 = \{(t,y^0) : (t,y^0) \in G,\ t_-(y^0) < t < t_+(y^0)\}$

T3 о непр. завис-ти по нач. данным:
A, B – вып. $\Rightarrow$ 1) $\mathfrak{M}_0 \subset R^{n+1}$ – откр
2) $y(t,y^0) \in C(\mathfrak{M}_0)$

$$(5)\ \begin{cases} v|_{t=t_0} = 0 \\ \frac{d}{dt} v = \tilde{g}(t, v, y^0) \end{cases} \qquad \begin{matrix} k=n \\ \mu = y^0 \end{matrix}$$

Д-во: 2) $y(t,y^0) = y^0 + v(t,y^0)$

$$\frac{d}{dt} v(t,y^0) \equiv \frac{d}{dt} y(t,y^0) \equiv g(t, y(t,y^0)) = g(t, y^0 + v(t,y^0)) = \tilde{g}(t, v, y^0)$$

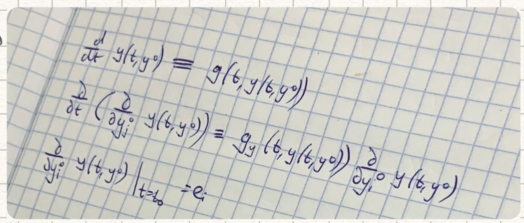
(свели к T1 и что)

Т4 (дифф. завис-ть по нач. данным):

A, B — вып. $\Rightarrow$ 1) $\exists \frac{\partial}{\partial y_i^0} y(t, y^0) \in C(G)$ $i=1,\dots,n$

2) $v_i(t, y^0) = \frac{\partial}{\partial y_i^0} y(t, y^0)$ — реш.: $(6)\begin{cases} \frac{d}{dt} v_i = \left(g_y(t, y(t, y^0))\right) v_i \\ v_i|_{t=t_0} = e_i \end{cases}$ $\leftarrow$ ур-я Пуанкаре по комп. нач. вектора

Д-во: (только кусок)



$$\frac{d}{dt} y(t,y^0) \equiv g(t, y(t,y^0))$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial y_j^0} y(t,y^0)\right) \equiv g_y(t, y(t,y^0)) \frac{\partial}{\partial y_j^0} y(t,y^0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i^0} y(t,y^0)\Big|_{t=t_0} = e_i$$

Следствие:

$V(t, y^0) = \left(\frac{\partial}{\partial y_i^0} y_j(t, y^0)\right)$ — реш-е з. К: $\begin{cases} \frac{d}{dt} V = g_y(t, y(t, y^0)) V \\ V|_{t=t_0} = E \end{cases}$

Следствие 2:

$\det V(t, y^0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\left(g_y(s, y(s, y^0)\right) ds}$ (Д-во из ф-лы Остроградского)

Упр 1 $\begin{cases} u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}, \mu) \\ u|_{t=t_0} = u^0 \\ u'|_{t=t_0} = u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)}|_{t=t_0} = u^{n-1} \end{cases}$ $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$

сф-ть и д-ть аналоги Т3 и Т4

Упр 2 $\begin{cases} u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \\ u|_{t=t_0} = u^0 \\ u'|_{t=t_0} = u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)}|_{t=t_0} = u^{n-1} \end{cases}$

$(7)\begin{cases} \frac{d}{dt} y = f(t, y) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$

1. $f \in C(G)$ — вещ., $G \subseteq R^{n+1}$ — обл.
2. $\exists \frac{\partial}{\partial y_j} f(t, y) \in C(G)$

$\exists!$ $y(t)$ непрод. реш. (t_-, t_+)

$H = \{t, y_1(t), \dots, y_n(t)\} \subset R^{n+1}$ — инт. кривая, $t \in (t_1, t_2) \subseteq (t_-, t_+)$

$H, \tilde{H}$ — инт. крив. $y' = f(t, y)$. $H \cap \tilde{H} \neq \varnothing \Rightarrow H = \tilde{H}$

$h = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\} \subset R^n$ — траектор. $y' = f(t, y)$, $t \in (t_1, t_2) \subseteq (t_-, t_+)$

$h, \tilde{h}$: тут не всегда с $\cap$ штука работает

(8): $\frac{dy}{dt} = g(y)$ — автономная сист. дифф. ур.

$g(y) \in C^1(B)$ — вещ., $B \subseteq \mathbb{R}^n$

$h, \tilde{h}$ — траект. (t_1, t_2): $h \cap \tilde{h} \neq \varnothing \Rightarrow h = \tilde{h}$

Упр Все траектории автон. ур-й (8) разб. на 3 класса:

1) траект, сост. только из 1й точки (точка покоя)

$g(c) = 0 \sim y_1(t) = c_1,\ y_2(t) = c_2, \dots$

2) замкн. траектория (соотв. реш-е периодич.)

3) траектория без самопересечения (без „восьмёрок" и подобного)

4. Устойчивость реш-й дифф. ур-й.

$\frac{d}{dt} y = f(t, y),\ t \geq t_0$ $\qquad [t_0, +\infty) \times B \subset \mathbb{R}^{n+1},\ B$ – обл. $\subseteq \mathbb{R}^n$

1. $f \in C([t_0, \infty) \times B)$, вещ.
2. $\exists f_{y_i} \in C([t_0, \infty) \times B)$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) & t > t_0 \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$$