Напом.: $(t,y)\in G\subset \mathbb{R}^{n+1}$

(1) $y' = f(t,y)$ ① f – веществ-зн., $f\in C(G)$

② $\exists f'_{y_j} \in C(G)$, $j=1,\dots,n$ (т.е. класса C^1)

② можно ослабить, взяв вместо него усл-е Липшица для каждой отдельн. окр-ти
(локальное исполн-е усл-я Липшица)

$(t_0,y^0)\in G$ $Ц = \{(t,y) \mid |t-t_0|<T,\ \|y-y_0\|<\rho\}$

Теорема о единств-ти непрод. реш-я:

$\forall (t_0,y^0)\in G$ $\exists!$ непрод. реш-е з. Коши $\begin{cases} y'=f(t,y)\\ y|_{t=t_0}=y^0\end{cases}$ (2) $y(t)$ – непр. реш.
интервал $\exists$я: (t_-,t_+)

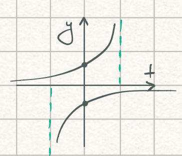
Теорема о покидании компакта:

$\forall$ компакта $K\subset G$ и $y(t)$ – непрод. реш-я $(1)_{(2)}$ $\exists [t_1,t_2]: (t,y(t))\notin K$ при $t\notin[t_1,t_2]$

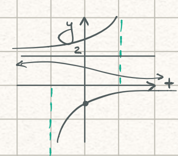
Опр $y(t)$ – реш $(1)_{(2)}$, опред. на (t_1,t_2). $\{(t,y) \mid t\in(t_1,t_2),\ y=y(t)\}$ — **интегральная кривая**

Св-во: Какой бы ни взяли компакт, инт кривая всё равно его покинет.

$y'=y^2$



$y'=y^2-\varepsilon y$

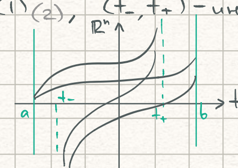


целый континуум ф-й с dom $= (-\infty,+\infty)$

Теорема 3: $G=(a,b)\times\mathbb{R}^n$, $y(t)$ – непрод. реш-е $(1)_{(2)}$, (t_-,t_+) – интервал $\exists$я

=> 1) $t_+=b$
или
$t_+<b$, $\|y(t)\|\xrightarrow[t\to t_+-0]{}\infty$

2) $t_-=a$
или
$t_->a$, $\|y(t)\|\xrightarrow[t\to t_-+0]{}\infty$



4 вар-та

Д-во: Если $t_+<b$, то воспол-ся т. о покид. компакта $\rho\gg1$ – сильно больше 1, "гигантское" число

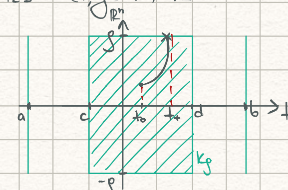
$K_\rho := [c,d]\times\{\|y\|\le\rho\}$, $t_+<d<b$, $a<c<t_+$. По т.2 $\exists[t_1,t_2]: t\notin[t_1,t_2] \to (t,y(t))\notin K$

Должны покинуть компакт K_ρ, но есть интервал $\exists$я $[t_-,t_+]$

Т.е. не можем покинуть на асимптоте, надо превзойти $|\rho|$

$\rho\gg1$ – произвольн. большое число

при $t_2\to t_+$ и $\rho\to\infty$: $y(t_2)\to\infty$



Опр (3) $\frac{dy}{dt}=f(y)$ — **автономная система** (не зависит от t)

$f(0)=0$ f – вещ.-зн., $f(y)\in C^1(\|y\|\le r)$ => y – реш-е (3)

(4) $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=f(y)\\ y|_{t=0}=y^0\end{cases}$ $\|y^0\|<r$

Цель: Можно ли гарантировать, что реш-е (4) $\exists$ на всей правой полуоси $(t>0)$?

(Дост. усл.: Ляпунов, 1893 г.)

Опр $H(y)$, $\|y\|<r$ — **функция Ляпунова** для системы (3), где $\vec{f}(0)=0$ и автономн., если:

1) $H(y) \in C^1(\|y\|<r)$
2) $H(y) \geq 0$, $H(y)=0 \Leftrightarrow y=0$
3) $(\nabla H(y), \vec{f}(y)) \leq 0$, $\|y\|<r$

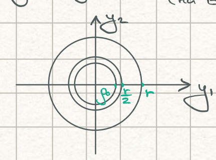
3) завязано на правую часть системы (3)

$$\langle \nabla H, \vec{f} \rangle = \sum_{j=1}^{\dim} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} H \cdot \vec{f}_j(y) \right)$$

Теорема 4 Ляпунова (1893):

$\exists H(y)$ — ф-я Ляпунова для сист. (3) $\Rightarrow \exists \rho_0 \in (0,r): \forall y^0 \ \|y^0\| < \rho^0 \longrightarrow$ реш-е (4) опред. при $t \geq 0$ (на всей прав. полуоси)

Д-во: $0 \leq \rho \leq r$. $M(\rho) = \max\limits_{\|y\|\leq\rho} H(y)$ $\quad m(\rho) = \min\limits_{\rho \leq \|y\| \leq r} H(y) \overset{2)}{>} 0$



$\rho_0 > 0: \ M(\rho_0) < m\left(\frac{r}{2}\right) > 0$, т.к. $H(y)=0 \Leftrightarrow y=0$, $\frac{r}{2} \neq 0$

$\vec{f} \in C^1 \Rightarrow \exists$ непрод. реш-е (4). $F = \max\limits_{\|y\|<r} \|\vec{f}(y)\|$ — конкретное число

$\vec{f}$ не завис. от времени $\Rightarrow$ при формул-ке т. Пеано: $\overline{Ц} = \{|t-t_0| \leq T, \ \|y-y_0\| \leq \rho\}$

на $[0, \frac{\rho}{F}]$ реш-е точно $\exists \leftarrow$ T_0 опр. как $\frac{\rho}{\max\|\vec{f}\|}$ $\leftarrow$ $T_0 = \min\left(T, \frac{\rho}{\max\|\vec{f}\|}\right)$ $\quad T$ – гигантское

$\|y^0\| \leq \rho_0$, $\|y-y^0\| \leq \frac{r}{2} \Rightarrow \|y\| = \|y-y^0+y^0\| \leq \|y-y^0\| + \|y^0\| \leq \frac{r}{2} + \rho_0 < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

$\|y^0\| \leq \rho_0$ $\ \|y-y^0\| \leq \frac{r}{2}$ $\quad \overline{Ц} = \{(t,y) \mid |t| \leq T \gg 1, \ \|y-y_0\| \leq \frac{r}{2}\}$ $\quad |t| \leq T_0 = \frac{r}{2F}$ - Пеано гарантирует $\exists!$ реш. на этом отрезке

$\|y(T_0)\| \overset{?}{\leq} \frac{r}{2}$ (знаем только $\|y(T_0)\| < r$)

$(t, y(t))$ – двигаемся по инт. кривой

$$\frac{d}{dt} H(y(t)) = \sum_{j=1}^{\dim} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} (H|_{y=y(t)}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} y_j(t) \right) = \sum_{1}^{\dim} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} H|_{y=y(t)} \cdot \vec{f}_j(y(t)) \right) = \langle \nabla H, \vec{f} \rangle|_{y=y(t)}$$

$y(t)$ в шаре $\Rightarrow \frac{d}{dt} H(y, y(t)) \leq 0 \Rightarrow \forall t \ \|y(t)\| \leq \frac{r}{2} \Rightarrow \|y(T_0)\| \leq \frac{r}{2}$

$H(y(t)) \leq H(y(0)) = H(y^0) \leq M(\rho_0) < m\left(\frac{r}{2}\right) \longrightarrow y(t) < \frac{r}{2}$

$y(T_0) = y^1$ $\quad \|y^1\| < \frac{r}{2}$ $\quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \vec{f}(y) \\ y|_{t=T_0} = y^1 \end{cases}$ $\quad t > T_0$

$Ц_1 = \{|t-T_0| \leq T \gg 1, \ \|y-y^1\| \leq \frac{r}{2}\} \Rightarrow \|y\| < r$ ($Ц_1$ лежит в трубке, для $Ц_1$ вып. все усл-я т. Пеано, r заведомо в шаре)

Отр. Пеано, где $\exists$ реш: $T_1 = \min\{T, \frac{r}{2F}\} = \frac{r}{2F}$ (стартуя от нуля или от любой др. точки, сможем сдвинуться на $\frac{r}{2F}$)

т.е. $0 \rightsquigarrow \frac{r}{2F} \rightsquigarrow \frac{r}{F} \overset{*}{\rightsquigarrow} \frac{3r}{2F} \rightsquigarrow \frac{2r}{F} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow +\infty$

$*$: (6) $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \vec{f}(y) \\ y|_{t=2T_0} \end{cases}$ $\quad y^2 = y(2T_0)$ – реш-е (5)

$\frac{d}{dt} H(y(t)) = \langle \nabla H(y(t)), \vec{f}(y(t)) \rangle \leq 0 \quad H(y(t)) \leq H(y(T_0)) \leq H(y^0) \leq M(\rho^0) < m\left(\frac{r}{2}\right) \Rightarrow \|y(t)\| < \frac{r}{2}$

$\|y^2\| < \frac{r}{2}$. Сдвинем Ц из зад. (5) в y^2. $\quad T_2 = T_1 = T_0 = \frac{r}{2F}$

Замечание: налево с этими условиями ходить не умеем

Следствие: $\exists H(y)$ – ф-я Ляпунова для (3), причём $\langle \nabla H(y), \vec{f}(y) \rangle < 0$, $\ 0 < \|y\| \leq 2$

$\Rightarrow \forall y^0: \|y^0\| \leq \rho^0: \ \|y(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

более сильное утв-е. д-во — упр-е :c