Зависимость решений дифференциальных уравнений от параметра

$$(1)\ \begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y,\mu) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases} \qquad (t,y,\mu) \in B \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} \qquad (t_0, y^0, \mu) \in B$$

Замечание: ① $f \in C(B)$, вещ-значна
② $\exists D_{y_j} f \in C(B)$ $\Rightarrow$ $\exists!$ непрод. реш. $y(t,\mu)$ на интервале $(t_-(\mu), t_+(\mu))$

$$\mathfrak{M} := \{(t,\mu) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid (t_0, y^0, \mu) \in B, \quad t_-(\mu) < t < t_+(\mu)\}$$

Теорема 1 о непрерывной зависимости реш-й от параметров:
Вып-ны ① и ②, $(t_0, y^0, \mu) \in B$ $\Rightarrow$ а) $\exists\ \mathfrak{M}$ – откр. б) $y(t,\mu) \in C(\mathfrak{M})$

Ex Сформулируем т. о непр. зав. при малых μ: $\begin{cases} u'' + \mu^2 u = 0 \\ u|_{t=0} = u^0 \\ u'|_{t=0} = u^1 \end{cases}$

Общее реш-е $u'' + \mu^2 u = 0$: $\begin{cases} u(t,\mu) = c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t), & \mu > 0 \\ u(t,0) = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 t, & \mu = 0 \end{cases}$ но! $u(t,\mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0$
теряем ровно половину реш-й

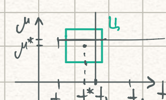
Д-во: а) упр
б) $(t^*, \mu^*) \in \mathfrak{M} \longrightarrow \exists Ц$ – окр-ть (t^*, μ^*) : $Ц \subset \mathfrak{M}$, причём $Ц = \{(t,\mu) \mid |t - t^*| \le \delta,\ \|\mu - \mu^*\| \le \delta\}$

Хотим п-ть непр. $y(t,\mu)$: $\|y(t,\mu) - y(t^*,\mu^*)\| \xrightarrow[\mu \to \mu^*]{t \to t^*} 0$?

Возьмём $y(t,\mu^*)$ – непрод. реш. (1) на $(t_-(\mu^*), t_+(\mu^*))$. Без огр-я общн. $t^* > t_0$

Возьмём t_1: $t^* < t_1 < t_+(\mu^*)$. $[t_0, t_1] \subset (t_-(\mu^*), t_+(\mu^*))$

$[t_0, t_1] \times \{\|\mu - \mu^*\| \le \delta\} \subset \mathfrak{M}$ при малых δ, т.к.:
$(t_0, t^* + \delta) \times \{\|\mu - \mu^*\| \le \delta\}$
$t_1 \in (t^*, t^* + \delta) \subset Ц$ при $\mu \approx \mu^*$ ($\|\mu - \mu^*\| \le \delta$)



$y(t,\mu)$ и $y(t,\mu^*)$ на $[t_0, t_1]$ точно опр-ны при $\|\mu - \mu^*\| \le \delta$

Везде далее $\|\mu - \mu^*\| \le \delta$. $\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t,\mu) \equiv f(t, y(t,\mu), \mu) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t,\mu^*) \equiv f(t, y(t,\mu^*), \mu^*) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$

Лемма Адамара:
$U \subseteq \mathbb{R}^m$ $V \subseteq \mathbb{R}^l$, V выпукл. $g: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C(U \times V)$ $\exists g_{v_j}(u,v) \in C(U \times V)$
$\Rightarrow \forall v', v''$: (u,v') и $(u,v'') \in U \times V$ $g(u,v'') - g(u,v') = A(u,v',v'')(v'' - v')$
зависис. от матр. Якоби

Д-во: $g(u,v'') - g(u,v') = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \left(g(u,v)|_{v = v' + \lambda(v'' - v')} \right) d\lambda$ $\ominus$ (в силу ф-лы Н-Л смотр. на первообр.)
$\ominus \sum_{j=1}^{l} \left(\left(\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v_j} g(u,v)|_{v' + \lambda(v'' - v')} d\lambda}_{A(u,v',v'')} \right) \cdot (v_j'' - v_j') \right)$ $A(u,v,v') = \left(\frac{\partial}{\partial v_j} g_i(u,v') \right)$

$$\frac{d}{dt}\left(y(t,\mu) - y(t,\mu^*)\right) \equiv f(t, y(t,\mu), \mu) - f(t, y(t,\mu^*), \mu^*) \equiv \left(f(t, y(t,\mu), \mu) - f(t, y(t,\mu^*), \mu) \right) +$$
по y нет проблем с вып.
$$+ \left(f(t, y(t,\mu^*), \mu) - f(t, y(t,\mu^*), \mu^*) \right) \overset{\text{л. Адамара}}{\equiv} A(t,\mu,\mu^*)\left(y(t,\mu) - y(t,\mu^*)\right) + F(t,\mu,\mu^*)$$
непр. по совок. перем.
$F(t,\mu,\mu^*) \xrightarrow[\mu \to \mu^*]{} 0$

А $y(t_0,\mu) - y(t_0,\mu^*) = 0$ и $y(t,\mu) - y(t,\mu^*)$ „крутая задача Коши"
$\Rightarrow y(t,\mu) - y(t,\mu^*) \longrightarrow 0$ Д-м непр-ть по времени и ура!

$$J = \|y(t,\mu) - y(t^*,\mu^*)\| = \|y(t,\mu) - y(t,\mu^*) + y(t,\mu^*) - y(t^*,\mu^*)\| \le \|y(t,\mu) - y(t,\mu^*)\| + \|y(t,\mu^*) - y(t^*,\mu^*)\| \longrightarrow 0$$

$\|y(t,\mu) - y(t,\mu^*)\| \to 0$

$\|y(t,\mu^*) - y(t^*,\mu^*)\|$: реш-е $\xrightarrow[\mu \to \mu^*]{t \to t^*} 0$

ура!

Теорема 2 о дифференцируемой завис-сти реш-й от параметров:

① $f \in C(B)$, вещ-зн
② $\exists D_{y_j} f \in C(B)$ $\quad \Rightarrow \quad$ а) $\forall i = \overline{1,k}$ $\exists \frac{\partial}{\partial \mu_i} y(t,\mu) \in C(\mathfrak{M})$
③ $\exists D_{\mu_i} f \in C(B)$ $\quad$ б) $v_i(t,\mu) = \frac{\partial}{\partial \mu_i} y(t,\mu)$ явл. реш-м з.К. (2)

Опр (2) $\begin{cases} \frac{d}{dt} v_i = f_y(t, y(t,\mu), \mu) v_i + f_{\mu_i}(t, y(t,\mu), \mu) \\ v_i|_{t=t_0} = 0 \end{cases}$ — **ур-я в вариациях по параметру** (Пуанкаре),

где f_y - м-ца Якоби f по $\overline{y_1, y_k}$, f_{μ_i} - произв-е по μ_i

Д-во: $t^* > t_0$ $\quad (t^*, \mu^*) \in \mathfrak{M}$ $\quad [t_0, t_1] \times \{\|\mu - \mu^*\| \leq \delta\} \subset \mathfrak{M}$ $\quad y(t,\mu)$, $\|\mu - \mu^*\| \leq \delta$ работаем в одном общем отрезке

$|\tau| < \frac{\delta}{2}$ $\quad (t, \mu')$: $\|\mu' - \mu^*\| < \frac{\delta}{2}$, $\mu'' = \mu' + \tau e_j$, т.е.:

$$\|\mu'' - \mu^*\| \leq \|\mu'' - \mu'\| + \|\mu' - \mu^*\| < |\tau| + \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t,\mu') = f(t, y(t,\mu'), \mu') \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt} y(t,\mu'') = f(t, y(t,\mu''), \mu'') \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$$

Хотим посчитать произв-ю в (t, μ')

$\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{y(t,\mu'') - y(t,\mu')}{\tau} = \frac{\partial}{\partial \mu_j} y(t,\mu')$, т.к. $\mu'' = \mu' + \tau e_j$, если, конечно, $\exists \lim$

$$\frac{d}{dt}\big(y(t,\mu'') - y(t,\mu')\big) \equiv f(t, y(t,\mu''), \mu'') - f(t, y(t,\mu'), \mu') = \big(f(t, y(t,\mu''), \mu'') - f(t, y(t,\mu'), \mu'')\big) +$$

$$+ \big(f(t, y(t,\mu'), \mu'') - f(t, y(t,\mu'), \mu')\big) \overset{\text{т.!}}{\equiv} \overbrace{A(t,\mu',\mu'')\big(y(t,\mu'') - y(t,\mu')\big)}^{\text{л. Адамара по } y} + \overbrace{B(t,\mu',\tau)(\mu'' - \mu')}^{\text{л. Адамара по } \mu} \equiv$$

$$\equiv A(t,\mu',\mu'')\big(y(t,\mu'') - y(t,\mu')\big) + B(t,\mu',\tau) \cdot \tau e_j$$

Поделим на τ: $\frac{\frac{d}{dt}\big(y(t,\mu'') - y(t,\mu')\big)}{\tau} \equiv A(t,\mu',\mu'') \cdot \frac{y(t,\mu'') - y(t,\mu')}{\tau} + B(t,\mu',\tau) e_j$

$\frac{y(t_0,\mu'') - y(t_0,\mu')}{\tau} = 0$. Тогда: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{y(t,\mu'') - y(t,\mu')}{\tau}\right] \equiv A(t,\mu',\mu'')\left[\frac{y(t,\mu'') - y(t,\mu')}{\tau}\right] + B(t,\mu',\tau) e_j \\ \left[\frac{y(t,\mu'') - y(t,\mu')}{\tau}\right]\Big|_{t=t_0} = 0 \end{cases}$

$v_i := \frac{y(t,\mu'') - y(t,\mu')}{\tau}$ $\quad A(t,\mu',\mu'') := f_y$ $\quad B(t,\mu',\tau) := f_{\mu_i}$