Устойчивость реш-й диф. ур-й.

$$(1)\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) & t \geq t_0 \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases} \qquad y = y(t, y^0) \qquad t_+ = +\infty$$

← непр. завис-ть на всей полуоси

Опр1 $\bar{y}(t)$ – реш. (1), опр. при $t \geq t_0$. $y(t)$ **устойчиво по Ляпунову**, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$ $\|y^0 - \bar{y}(t_0)\| \leq \delta_\varepsilon$ а) реш. $y(t)$ опр. при $t \geq t_0$

б) $\|\bar{y}(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \quad t \geq t_0$

„глобальная" непр. завис-ть по начальн. усл-ям

$y = y(t, y^0) \qquad y^0 \approx \bar{y}(t_0) \qquad \|y(t, y^0) - \bar{y}(t)\| \approx 0$

Если покачать Солн. систему (нач. усл-я), останется ли она после в равновесии? – такая задача изн-но (будет ли сохр. непр. завис-ть от нач. данных дальше на $+\infty$?)

Опр 2 $\bar{y}(t)$ – **асимптотически устойчиво**, если:

1) $\bar{y}(t)$ уст. по Ляпунову

2) $\exists \delta_0 > 0$ $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$ $\|\bar{y}(t_0) - y^0\| \leq \delta_0 \Rightarrow$ реш. з.К. опред. при $t \geq t_0$

$\|\bar{y}(t) - y(t)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

т.е. на ∞ реш-е уходит на y'

$\bar{y}(t)$, $t \geq t_0$ – реш. (1)

$y(t) = \bar{y}(t) + (\underbrace{y(t) - \bar{y}(t)}_{v(t)}) = \bar{y}(t) + v(t)$

$\underbrace{\frac{d}{dt} y(t)}_{f(t, y(t))} \equiv \frac{d}{dt}\bar{y}(t) + \frac{d}{dt} v(t) \equiv f(t, \bar{y}(t)) + \frac{d}{dt} v(t)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} v(t) \equiv f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)) \equiv f(t, \bar{y}(t) + v(t)) - f(t, \bar{y}(t)) = F(t, v(t))$

$\boxed{\frac{d}{dt} v(t) = F(t, v)}$ можно свести к задаче об устойчивости нулевого реш-я

↖ дальше так и будем

$\boxed{v(t) \equiv 0}$

1. Устойчивость реш-й линейных диф. ур-й

(1) $\frac{d}{dt} y = A(t) y$, $t \geq 0 \qquad A(t) \in C[0, +\infty)$

Т1. $y(t) \equiv 0$ уст. по Ляп. $\Leftrightarrow$ $\forall$ реш. (1) ограничено при $t \geq 0$ (об устойчивости)

$$(2)\begin{cases} y' = A(t) y \\ y|_{t=0} = y^0 \end{cases}$$ реш. $\exists$ на R^+

Д-во: $\Rightarrow$ $\sup\limits_{t \geq 0} \|y(t)\| < \infty$?

$\nexists$ $\bar{y}(t)$ – непр. реш. $\exists \{t_k\}: t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ $\|\bar{y}(t_k)\| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0: \|y^0\| \leq \delta_\varepsilon$ реш. з.К (2) $\boxed{\|y(t)\| \leq \varepsilon \ t > 0}$ $\qquad \bar{y}^0 = \bar{y}(0)$

$\begin{cases} y' = A(t) y \\ y|_{t=0} = \frac{\bar{y}(0)}{\|\bar{y}^0\|}\delta_\varepsilon \end{cases}$ $\quad y(t) = \frac{\bar{y}(t) \cdot \delta_\varepsilon}{\|\bar{y}^0\|} \qquad \|y(0)\| = \frac{\|\bar{y}(0)\|}{\|\bar{y}^0\|}\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon \Rightarrow \underset{\varepsilon}{\underset{\wedge}{\|y(t)\|}} \equiv \underbrace{\frac{\delta_\varepsilon}{\|\bar{y}^0\|}}_{\text{const}} \underbrace{\|\bar{y}(t_k)\|}_{\nearrow \infty} > \varepsilon$

$\Rightarrow$ противоречие

$\Leftarrow$ $Y(t)$ – ФМР $\begin{cases} \frac{d}{dt} Y = A(t) Y \\ Y|_{t=0} = Y_0 \end{cases}$ $\det Y_0 \neq 0$

$\tilde{Y}(t) = Y(t)\cdot Y_0^{-1}$ – реш. з.К

какое ст. реш. при опр. вект.

(2) $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A(t)y \\ y|_{t=0} = y^0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{Y}(t) = A(t)\tilde{Y} \\ \tilde{Y}|_{t=0} = E \end{cases}$

$\|\tilde{Y}(t)\| \underset{t\geq 0}{\leq} C < \infty$

$y(t) = \tilde{Y}(t)\cdot y^0$ – реш.

$y(0) = \tilde{Y}(0)\cdot y^0 = y^0$

$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{c}$ $\|y(t)\| \leq \|\tilde{Y}(t)\|\cdot\|y^0\|$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \|y^0\| \leq \delta_\varepsilon$ – в (2) $\Rightarrow \|y(t)\| < \varepsilon$, $t \geq 0$

Т2. $y(t) \equiv 0$ – асимпт. устойч. $\Leftrightarrow$ $\forall$ реш (1) стремится к 0 при $t \to +\infty$

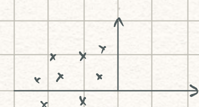
Д-во: $\exists$ ли $\delta_0 > 0$: $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y|_{t=0} = y^0 \end{cases}$ $\|y^0\| \leq \delta_0 \Rightarrow y(t)$ огр. при $t \geq 0$ тривиально $\oplus$

? $\|y(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$\forall$ реш (1) $\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \|\tilde{Y}(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

из $\|y(t)\| \leq \|\tilde{Y}(t)\|\|y^0\|$

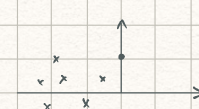
(4) $\frac{dy}{dt} = Ay$, $t \geq 0$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – с.з. A



Т3. $\underset{j=1,\dots,n}{\lambda_j} : \operatorname{Re}\lambda_j < 0 \Rightarrow$ нулевое реш-е (4) асимпт. уст.

Д-во: $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay \\ y|_{t=0} = y^0 \end{cases}$ $y(t) = e^{tA}y^0$ В (3) при $A(t) \equiv A$ $\tilde{Y}(t) \equiv e^{tA}$

$\exists \gamma > 0 : \operatorname{Re}\lambda_j \leq \gamma$ $j = 1,\dots,n$ $\|e^{tA}\| \overset{t\geq 0}{\leq} e^{\gamma t}\left(1 + \frac{2\|A\|t}{1!} + \dots + \frac{(2\|A\|\cdot t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ по т. 2



Т4. $\forall \lambda_j : \operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$ $\exists \lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k = 0 \Rightarrow$ нул. реш. не явл. асимпт. устойч.

Д-во: λ_k – сз A v_k – с.вектор : $Av_k = \lambda_k v_k$ $y(t) = e^{\lambda_k t}v_k$ – реш (4)

$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda_k e^{\lambda_k t} v_k = Ay(t) = e^{\lambda_k t}Av_k = \lambda_k e^{\lambda_k t}v_k$

$\|y(t)\| = \|e^{\lambda_k t}v_k\| = |e^{\lambda_k t}|\cdot\|v_k\| = e^{\operatorname{Re}\lambda_k t}\cdot\|v_k\| = \|v_k\|$ $\Rightarrow$ неуст.

Т5. $\exists \lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k > 0 \Rightarrow$ нул. реш. (4) неуст.

Д-во: $\|y(t)\| = |e^{\lambda_k t}|\|v_k\| = e^{\overset{\operatorname{Re}\lambda_k t}{>0}}\|v_k\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} \infty \Rightarrow$ неуст.

Т6. $\lambda_j : \operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$ $\forall \lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k = 0 \mapsto$ 1мерн. Жорд. кл. $\Rightarrow$ нул. реш. уст. по Ляп.

Т7. $\lambda_j : \operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$ $\exists \lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k = 0 \longrightarrow$ l-мерные Ж. кл. $l \geq 2$ $\Rightarrow$ нул. реш. (4) неуст.

Д-во: $\lambda_1, \dots, \lambda_p : \operatorname{Re}\lambda_k = 0$, $\lambda_p, \dots, \lambda_n : \operatorname{Re}\lambda_j < 0$ $J = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \ddots \lambda_p & 0 \\ \hline 0 & A_- \end{array}\right)$ A_- $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$

$S^{-1}AS = J \quad e^{tA}$ – ФМР $\quad e^{tA}S \equiv Se^{tJ}$ – ФМР $\quad A = SJS^{-1} \quad e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1} \leftarrow S$

$$e^{tJ} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_p t} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & e^{tA_-} \end{array}\right) \quad \|Se^{tJ}\| \leqslant \|S\|\|e^{tJ}\| \qquad \underline{|e^{\lambda_k t}| = 1} \qquad y(t) = Se^{tJ}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

▨ Т6.

$y' = Ay \quad SA^{-1}S = J \quad Se^{tJ}$ – ФМР $\quad \lambda_1 : \mathrm{Re}\,\lambda_1 \mapsto$ не 1мерн. ж. кл.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad Se^{tJ} = \left(e^{\lambda_1 t}S_1 \;\middle|\; (te^{\lambda_1 t}S_1 + e^{\lambda_1 t}S_2) \;\middle|\; \times \quad \times \right)$$

$$Se^{tJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{y}(t) \text{ – реш (4)} \qquad \tilde{y}(t) = te^{\lambda_1 t}S_1 + e^{\lambda_1 t}S_2 = e^{\lambda_1 t}(tS_1 + S_2)$$

$$\|\tilde{y}(t)\| = |e^{\lambda_1 t}|\|S_1 + S_2\|$$

т.е. есть хотя бы одно неогр. реш^{т1,т2} => ни о какой устойч-ти речи не идёт ▨ т7

Спектральный критерий асимп. устойчивости:

Н.р. (4) ас. уст. $\Leftrightarrow \forall \lambda_j : \mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$

Спектральный критерий устойчивости:

Н.р. (4) устойч. $\Leftrightarrow \forall \lambda_j : \mathrm{Re}\,\lambda_j \leqslant 0$, причём $\forall \lambda_k : \mathrm{Re}\,\lambda_k = 0 \mapsto$ 1-мерн. ж. кл.

$A(t+T) \equiv A(t) \qquad y' = A(t)y \quad \leftarrow$ спрашивать у Ыскака (замечательный парень)