Воспоминания:

$$(1)\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(t,y)\\ y|_{t=t_0}=y_0\end{cases}\qquad Ц=\{(t,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid |t-t_0|<T\quad \|y-y_0\|<\rho\}\qquad (t_0,y^0)\in\mathbb{R}^{n+1}$$

Усл-я на f: 1. $f(t,y)\in C(\overline{Ц})$, вещ

2. $f(t,y)$ удовл. по y усл-ю Липшица, т.е. $\forall (t,y'),(t,y'')\in Ц$:

$$\|f(t,y')-f(t,y'')\|\le L\|y'-y''\|$$

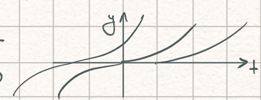
Т. (Пикар):

п. 1,2 вып-ны, $F=\max\limits_{Ц}\|f(t,y)\| \Rightarrow \exists!$ реш-е (1) $|t-t_0|\le T_0$ $\quad T_0=\min\{T,\frac{\rho}{F}\}$ радиус шара

Т. (Пеано):

1 вып-но, $F=\max\limits_{Ц}\|f\| \Rightarrow$ на $|t-t_0|\le T_0$ $\exists$ реш-е (1)

Ex: $\begin{cases}y'=\sqrt{|y|}\\ y|_{t=0}=0\end{cases}$



Усл-е Липшица можно ослабить (для!)

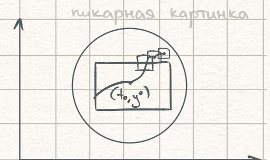
$$\|f(t,y')-f(t,y'')\|\le L\|y'-y''\|\cdot\ln\|y-y'\|$$

даже так:

$$\|f(t,y')-f(t,y'')\|\le L\|y'-y''\|\cdot\ln(\ln\|y-y'\|)\quad \text{и т.д.}$$

Нелинейные диф. ур-я
Непродолжаемые реш-я

пикарная картинка



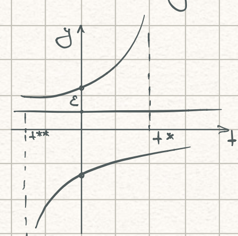
(1) $\dfrac{dy}{dt}=f(t,y)\qquad G\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$

1. $f(t,y)\in C(G)$, вещ.
2. $\exists f_{y_i}(t,y)\in C(G)\quad i=1,\dots,n$

$\forall (t_0,y^0)\in G$

(2) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(t,y)\\ y|_{t=t_0}=y^0\end{cases}\qquad \exists B((t_0,y^0),\delta)$

Ex: $\begin{cases}y|_{t=0}=y^0\\ y'=y^2-\varepsilon y\end{cases}$



$y^0=0\Rightarrow y(t)\equiv 0$ – реш-е

$y^0=\varepsilon\Rightarrow y(t)\equiv\varepsilon$ – реш-е

$\begin{cases}y'=1+y^2\\ y|_{t=0}=y^0\end{cases}$

тут с 2х сторон будут стенки

Опр 1. $y(t)$ – реш-е (1), опр. на (t_1,t_2), $\tilde y(t)$ – реш. (1), опр. на $(\tilde t_1,\tilde t_2)$

$\tilde y(t)$ – **продолж-е реш-я** $y(t)$, если $(t_1,t_2)\subset(\tilde t_1,\tilde t_2)$: $y(t)\equiv\tilde y(t)$ $t\in(t_1,t_2)$

см карт., это пикарим

Опр 2. $y(t)$ – реш. (1), опр. на (t_1,t_2) **непродолжаемо**, если не сущ-т никакого его продолж-я.

Теорема 1:

1,2 вып-но $\Rightarrow \forall (t_0,y^0)\in G$ $\exists!$ непродолжаемое реш. (1) | $y(t_0)=y^0$

Лемма:

$y(t)$ – реш. (1) на (t_1,t_2), $\tilde y(t)$ – реш. (1) на $(\tilde t_1,\tilde t_2)$

Пусть $(t_1,t_2)\cap(\tilde t_1,\tilde t_2)=(a,b)$, $b>a$. $\exists t_0\in(a,b) / y(t_0)=\tilde y(t_0)\Rightarrow y(t)\equiv\tilde y(t)$ $t\in(a,b)$

Д-во:

$\lightning\ \exists t^* \in (a,b) \,/\, y(t^*) \neq \tilde{y}(t^*)$ $\quad \cancel{t_0 < t^* < b}$ (для опр-ности)

$\mathcal{M} = \{t \in (a, \overset{t^*<b}{b}) \mid y(t) = \tilde{y}(t)\} \overset{?}{-}$ замкн.

$\forall t'$ - пред. точка $\mathcal{M} \sim \exists \{t_k\}: t_k \to t'$ $\quad y(t_k) = \tilde{y}(t_k) \sim y(t_k) - \tilde{y}(t_k) = 0 \quad \overset{\lim = 0}{\{y(t_k) - \tilde{y}(t_k)\}}$

$\Rightarrow y(t') = \tilde{y}(t') \Rightarrow \mathcal{M}$ замкнутое

$t^{**} = \sup \mathcal{M} \qquad t^{**} \in \mathcal{M},\ y(t^{**}) = \tilde{y}(t^{**}) = v^{**}$

Рассм. задачу Коши: $\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y|_{t=t^{**}} = v^{**} \end{cases}$ $\quad |t - t^{**}| \leq T_0$

$y(t) = \tilde{y}(t) \quad (a,b) \cap \{t \mid |t - t^{**}| \leq T_0\}$

t^{**} можем немного сдвинуться от t^{**}, но t^{**} - $\sup \mathcal{M} \Rightarrow$ против-е $\lightning$

Д-во:

Y - мн-во всех реш-й (2) $y(t)$ $\quad (t_1, t_n)$

T_- - мн-во всех t_1, $\quad T_+$ - мн-во всех t_n, $\quad t_- = \inf T_-$, $\quad t_+ = \inf T_+$

Если реш-е $\exists$, то оно на (t_-, t_+)

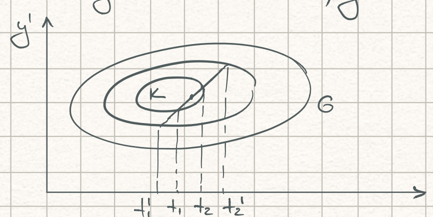
$\forall t^* \in (t_-, t_+)$. $y^*(t)$ опр. в окр-ти t^*: $y(t^*) = y^*(t^*)$ $\quad$ получ-я ф-я класса C^1

$y(t)$ - непр. реш. (1), (t_-, t_+) - интервал $\exists$я

Теорема 2 (о покидании компакта):

о восходящем солнышке

Связн. компакт $K \subset G$, $y(t)$ - непр. реш. (1) $\Rightarrow \exists [t_1, t_2] \subset (t_-, t_+)$: $(t, y(t)) \notin K \quad t \notin [t_1, t_2]$



Д-во:

$0 < d < \rho(\partial K, \partial G) \quad K' = \{(t,y) \subset G \mid \rho((t,y), K) \leq \frac{d}{2}\}$ - компакт (расшир-е нашего) $\quad K \subset K' \subset G$

$\max\limits_{(t,y) \in K'} \|f(t,y)\| = F$

$U(t_0, y^0) = \{(t,y) \mid |t - t_0| < \frac{d}{4},\ \|y - y^0\| < \frac{d}{4}\}$ $\qquad \sqrt{|t-t_0|^2 + \|y - y^0\|^2} \leq \sqrt{\frac{d^2}{16} + \frac{d^2}{16}} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$

$(t_0, y^0) \in K \Rightarrow \overline{U(t_0, y^0)} \subset K'$

$(t_0, y^0) \in K \quad |t - t_0| \leq \underset{H_0}{T_0} = \min\{\frac{d}{4}, \frac{d}{4F}\} \qquad (t, \overset{\text{реш (1)}}{y(t)}) \in K'$

$t_2 = t_+ - T_0 \Rightarrow t > t_2 \quad (t, y(t)) \notin K \qquad \Big(\underset{(t_2+\varepsilon), y(t_2+\varepsilon) \in K}{t_2 + \varepsilon + T_0 \leq t_+} \quad \underset{\text{против-е}}{t_+ - \cancel{T_0} + \varepsilon + \cancel{T_0} < \cancel{t_+}} \Big)$