2. Введение в Теорию Информации

2.1. Что такое информация?

Опр-е по Колмогорову:

х-ка внутр. организованности материальн. сист. по мн-ву сост-й, ктр может принимать

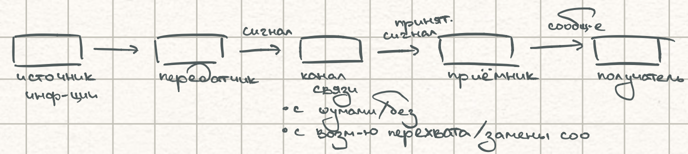
2.2. Задача Т.И.

- в кибернетике
- самое важное теоремы, уст. пред. возможности
- источники и каналы информации

1) Дан источник. Найти мин. число бит., необх. для кодирования — теория сжатия
2) Дан канал. Найти max v передачи с вероятн-ю ошибки $\to 0$ — теория кодир-я
3) Даны оба. Найти min вероятн-ть ошибки — теория кодирования

- часто неконструктивна (нет методов почти)

Схема связи:



2.3. Возникновение Т.И.

1948. Клод Шенон, 1932 Котельников, потом Колмогоров

3. Мера неопределённости информации. Энтропия

3.1. Ф-ла Хартли (1928)

Пусть A — мн-во из N эл-в, выделим нктр $x \in A$

$\log_2 N$ — кол-во инф. нужное, чтобы точно опр-ть x (бинарным поиском)

Задача про поиск фальш. монеты взвеш-ем, кст

Ф-ла Хартли как раз показывает это предельн. значение: $\boxed{H(x) = \log_2 N}$

Если log не целый, то показ-т среднее знач-е

3.2. Ф-ла Шеннона

$A = \{x_1, \dots, x_N\}$ $p_1, \dots, p_N$ - вер-ть того, что $\xi = x_k$, $\sum p_i = 1$, $1 \le p_i < 0$

$\{A, P\}$ - дискретный источник сообщ-й, $H(\xi)$ - объём инф-ии от наблюд-я за объектом.

ф-ла Шеннона: $H(\xi) = p_1 \log \frac{1}{p_1} + p_2 \log \frac{1}{p_2} + \dots + p_N \log \frac{1}{p_N}$

Ex: $A = \{0, 1, 2\}$ $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$ $H(\xi) = \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4 = 1{,}5$ (2 монеты кидаем: число орлов)

0 | 00
1 |
2 | 01

в ср. тратим 1,5 бита

Для энтропии в термодинамике

3.3. Энтропия.

$\{A, P\}$ $\quad A = \{x_1, \dots, x_N\}$, $P = \{p_1, \dots, p_N\}$

Кол-во информации в сообщении — $x_i \in A$ $\quad I(x_i) = \log \frac{1}{p_i}$ $\quad$ // $I(0) = 2$, $I(1) = 1$, $I(2) = 2$

Св-ва кол-ва инф-ции:

1) $I(x_i) \geq 0$, $\quad I(x_i) = 0 \iff p_i = 1$
2) Аддитивность инф-ции:

   Если x_i, x_j статист. независимы, т.е. $P(x_i, x_j) = p_i \cdot p_j$, то $I(x_i, x_j) = I(x_i) + I(x_j)$

Энтропия источника $\{A, P\}$ — мат. ожидание $H(A)$ случайной величины $I(x)$:

$$H(A) = p_1 I(x_1) + \dots + p_N I(x_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log \frac{1}{p_i}$$

она же мера неопределённости

Св-ва энтропии:

1) $H(A) \geq 0$, $\quad H(A) = 0 \iff \exists p_i = 1$
2) $H(A) \leq \log_2 N$, $\quad H(A) = \log_2 N \iff \forall p_i = \frac{1}{N}$ (когда верна ф-ла Хартли)

▷ Будем исп-ть нер-во $*)\ \ln x \leq x - 1 \ \ \forall x$ (рав-во только в $x = 1$)

$\log x = \log e \cdot \ln x$

Рассмотрим $H(A) - \log N = \sum p_i \log \frac{1}{p_i} - \log N \cdot \sum p_i = \sum p_i \left(\log \frac{1}{p_i} + \log \frac{1}{N}\right) = \log e \cdot \sum p_i \cdot \ln \frac{1}{p_i \cdot N}$

По нер-ву $*$: $H(A) - \log N \leq \log e \cdot \sum p_i \left(\frac{1}{p_i \cdot N} - 1\right) = \log e \cdot \left[\sum \frac{1}{N} - \sum p_i\right] = 0 \implies H(A) \leq \log N$

Рав-во $\iff x = 1$, т.е. $\frac{1}{p_i N} = 1 \iff p_i = \frac{1}{N}$