Ex 1. $z = f(x,y)$ $\quad r(x,y) = (x, y, f(x,y))$ Посчитаем всё, что получится:

$$\begin{matrix} \bar r_1 = \\ \bar r_2 = \end{matrix} \left| \begin{matrix} i & j & k \\ (1, & 0, & f_x) \\ (0, & 1, & f_y) \end{matrix} \right| \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix} \qquad \bar n = \frac{[\bar r_1 \times \bar r_2]}{|[\bar r_1 \times \bar r_2]|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \qquad b_{ij} = (r_{ij}, n)$$

$$\bar r_{11} = (0, 0, f_{xx}) \qquad \bar r_{12} = (0, 0, f_{xy}) \qquad \bar r_{22} = (0, 0, f_{yy})$$

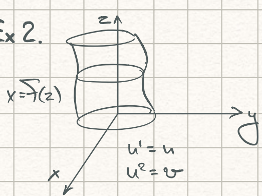
$$B = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{\det B}{\det G} \qquad H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{g_{11} b_{22} + g_{22} b_{11} - 2 g_{12} b_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}}$$

$$z = xy \qquad f(x,y) = xy \qquad f_{xx} = f_{yy} = 0 \qquad f_{xy} = 1 \qquad K = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2} < 0$$

Ex 2.



$$\begin{cases} x = f(v)\cos u \\ y = f(v)\sin u \\ z = v \end{cases}$$

$$\bar r_1 = (-f\sin u, f\cos u, 0) \qquad \bar r_2 = (f'\cos u, f'\sin u, 1)$$

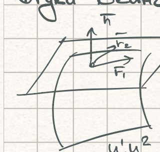
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1+(f')^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar r_{11} = (-f\cos u, -f\sin u, 0) \qquad \bar r_{12} = (-f'\sin u, f'\cos u, 0) \qquad \bar r_{22} = (f''\cos u, f''\sin u, 0)$$

$$\bar n = \frac{(f\cos u, f\sin u, -ff')}{\sqrt{1+(f')^2}} = \frac{(\cos u, \sin u, -f')}{\sqrt{1+(f')^2}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}} \begin{pmatrix} -f & 0 \\ 0 & f'' \end{pmatrix} \qquad K = \frac{\det B}{\det G} = \frac{-f''}{f(1+(f')^2)^2}$$

Штуки Вейнгартена:



$$r = r(u^1, u^2) \qquad \bar r_i = \partial \bar r / \partial u^i \qquad \bar r_{ij} = \partial \bar r^2 / \partial u^i \cdot \partial u^j \qquad g_{ij} = (\bar r_i, \bar r_j)$$

$$\bar n = \frac{[\bar r_1 \times \bar r_2]}{|[\bar r_1 \times \bar r_2]|} \qquad b_{ij} = (\bar r_{ij}, \bar n)$$

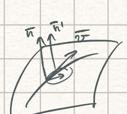
$$(\bar n, \bar n) = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial \bar n}{\partial u^i}, \bar n\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar n}{\partial u^i} = a_i^j \bar r_j$$

$$(\bar r_j, \bar n) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u^i}(\bar r_j, \bar n) = (\bar r_{ij}, \bar n) + (\bar r_j, a_i^j \bar r_j) = b_{ij} + a_i^k g_{jk} = 0 \ \Big| \cdot g^{jl}$$

$$g^{kl} g_{lj} = \delta_j^k \qquad \Leftarrow \qquad b_{ij} g^{jl} + a_i^k \underbrace{g_{jk} g^{jl}}_{\delta_k^l} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{a_i^l = -b_{ij} g^{jl}} \qquad \begin{matrix} j \to k \\ l \to j \end{matrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar n}{\partial u^i} = -b_{ik} g^{kj} \bar r_j} \text{ — ур-я Вейнгартена}$$

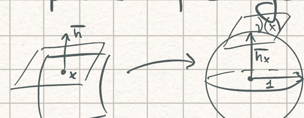
$A = (a_i^j)$ — оператор Вейнгартена $\qquad a_i^j = -b_{ik} g^{kj} \Rightarrow A = -G^{-1}B : T_x\Sigma \to T_x\Sigma$



$$\frac{\bar n' - \bar n}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} AV$$

Сферическое отобр-е (отобр-е Гаусса):

$$\nu: \underset{\omega}{\Sigma} \to S^2 \qquad \text{т.} x \mapsto \bar n_x$$



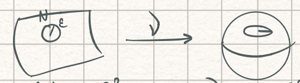
$$T_{\nu(x)} S^2 \qquad T_x\Sigma \parallel T_{\nu(x)} S^2$$

$$d\nu : T_x\Sigma \to T_x\Sigma$$

T Опер-р $d\nu$ в базисе $\bar r_1, \bar r_2$ имеет м-цу $A = (a_i^j)$. Векторы $\bar e_1, \bar e_2$ главных напр-й явл. собств. вект. опер-ра $d\nu$, $(-k_1), (-k_2)$ — собств. знач-я, $\det(d\nu) = \frac{\det B}{\det G} = k_1 k_2$

$\det(B-\lambda G)=0 \qquad \det(-A+\lambda E)=0$

$H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}A=\frac{k_1+k_2}{2} \qquad K=\det A=k_1k_2$



перех. в эллипс

$S(N)\approx\pi\varepsilon^2 \qquad S(\nu(N))\approx\pi\varepsilon^2k_1k_2 \;\rightarrow\; \frac{S(\nu(N))}{S(N)}\approx k_1k_2$

Утв $\quad \frac{S(\nu(N))}{S(N)}=|K|+o(S(N))$

Основные ур-я поверхностей:

$r=r(u^1,u^2)$

$\bar r_i=\partial\bar r/\partial u^i$

$\bar r_{ij}=\partial\bar r^2/\partial u^i\cdot\partial u^j$

$g_{ij}=(\bar r_i,\bar r_j)$

$\bar n=\frac{[\bar r_1\times\bar r_2]}{|[\bar r_1\times\bar r_2]|}$:

$b_{ij}=(\bar r_{ij},\bar n)$

$r_{ij}=\Gamma_{ij}^k\bar r_k+\beta_{ij}\bar n$ ← домножим скал. на $\bar n$ и поймём, что $\beta_{ij}=b_{ij}$

$\boxed{r_{ij}=\Gamma_{ij}^k\bar r_k+b_{ij}\bar n}$ – ур-я Гаусса

симв. Кристофф.

$\boxed{\frac{\partial}{\partial u^i}\begin{pmatrix}\bar r_1\\ \bar r_2\\ \bar n\end{pmatrix}=A_i\begin{pmatrix}\bar r_1\\ \bar r_2\\ \bar n\end{pmatrix}}$ – деривационные ур-я

$A_1=\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & b_{11}\\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & b_{12}\\ -b_{1k}g^{k1} & -b_{1k}g^{k2} & 0\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}\Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & b_{21}\\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & b_{22}\\ -b_{2k}g^{k1} & -b_{2k}g^{k2} & 0\end{pmatrix}$ в матр. виде

Условия совместности:

$\frac{\partial}{\partial u^1}\underbrace{\frac{\partial}{\partial u^2}\begin{pmatrix}\bar r_1\\ \bar r_2\\ \bar n\end{pmatrix}}_{A_2(\vdots)}=\frac{\partial}{\partial u^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial u^1}\begin{pmatrix}\bar r_1\\ \bar r_2\\ \bar n\end{pmatrix}}_{A_1(\vdots)} \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial u^1}A_2-\frac{\partial}{\partial u^2}A_1-(A_1A_2-A_2A_1)\right]\begin{pmatrix}\bar r_1\\ \bar r_2\\ \bar n\end{pmatrix}=0$

$\boxed{\frac{\partial A_2}{\partial u^1}-\frac{\partial A_1}{\partial u^2}=[A_1,A_2]}$ – ур-я Кодацци

Т $\boxed{\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)}$

Теорема Бонне:

Пусть $G=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$ – гладкие кв. формы в нктр обл U, гомеоморфной внутр. круга, причём $G>0$. Пусть коэф. g_{ij}, b_{ij} уд. ур. Кодацци. Тогда $\exists!$ (с точн. до движ.) пов-ть в $\mathbb{R}^3$, для ктр эти формы явл. Iй и IIй кв. формами.

(без д-ва)