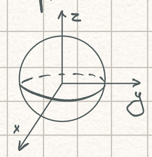
Поверхности в $\mathbb{R}^3$



① $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ $\quad (F(x,y,z)=0)$

② $\begin{cases} x = R\cos u\cos v \\ y = R\cos u \sin v \\ z = R\sin u \end{cases}$

③ $z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Переходы: $3 \to 1$: $F = z - f(x,y) = 0$ $\qquad 3 \to 2$: $(x, y, f(x,y)) = 0$

Опр Мн-во точек $S \subset \mathbb{R}^3$ образует **регулярную поверхность**, если в окрестности каждой своей точки оно предст. в виде $z = f(x,y)$ в подходящей системе декартовых коор-т (для разных точек f может быть разной)

Теорема о неявной ф-ии:

$F: U \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$, $\quad F \in C^m(U)$, т.е. $F = (F_1, \dots, F_n)$, $\quad F_i : U \to \mathbb{R}$ $\quad i = \overline{1,n}$

$F(x_0) = 0$, $x_0 \in U$. М-ца $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^{k+j}}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$ обратима $(\det \neq 0)$

$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{N}(x_0)$ $\quad \exists W \in \mathcal{N}((x_0^1, \dots, x_0^k))$ $\qquad ((x_0^1, \dots, x_0^k) \in U \cap \mathbb{R}^k$, а $x_0 \in U < \mathbb{R}^{n+k})$:

1. $\exists f_i : W \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $f_i \in C^m(W)$
2. $(x^1, \dots, x^{n+k}) \in V \longrightarrow (x^1, \dots, x^k) \in W$
3. $F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{k+1} = f_1(x^1, \dots, x^k) \\ x^{k+2} = f_2(x^1, \dots, x^k) \\ \vdots \\ x^{k+n} = f_n(x^1, \dots, x^k) \end{cases}$

Д-во: матанализ

Опр Точка $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ — **регулярная (неособая)** точка гладкого отобр-я $F: U \to \mathbb{R}^m$, если $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) = m$

$\hookrightarrow (x^1, \dots, x^n) \xrightarrow{F} (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m(x^1, \dots, x^n))$

Ex $f: U \to \mathbb{R}$, x_0 — рег. точка f, если $\nabla f|_{x_0} \neq 0$

Опр **Критическая (особая)** точка — нерегулярная

Замечание: в случае $\mathbb{R}^3$ в т. о неявн. ф-ии: $n=1$, $k=2$: $F(x,y,z)|_{x_0,y_0,z_0} = 0$ $\quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \Leftrightarrow z = f(x,y)$

Лемма: Мн-во точек $S \subset \mathbb{R}^3$ образует **регулярную поверхность** $\Leftrightarrow \forall x \in S$ $\exists U \in \mathcal{N}(x)$, $U \subset \mathbb{R}^3$: в U мн-во S задаётся как образ гладкого отобр-я $r : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $r: V \to U$, $V \subset \mathbb{R}^2$, в кажд. точке V: $\overline{r}_1 = \frac{\partial r}{\partial u}$ и $\overline{r}_2 = \frac{\partial r}{\partial v}$ ЛНЗ

Д-во: $\Rightarrow$ $F = z - f(x,y)$, где f — из опр-я регул. пов-ти, $u = x$, $v = y$, $r(u,v) = (u, v, f(u,v))$

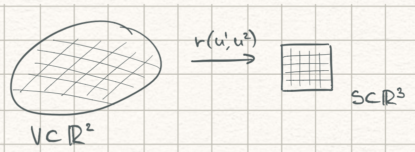
$\overline{r}_1 = (1, 0, f_u)$ и $\overline{r}_2 = (0, 1, f_v)$ — ЛНЗ $\qquad f_u := \frac{\partial f}{\partial u}$

$\Leftarrow$ $(u,v) \xrightarrow{r} (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u_0, v_0) \in V \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{r}_u, \overline{r}_v$ — ЛНЗ $\Rightarrow$

$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$, без огр общ : $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$ — обратима в т. (u_0, v_0)

$\Rightarrow$ в нктр окр-ти т. $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))$ опр-м обратим. отобр-е: $(x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$

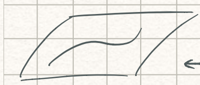
$\Rightarrow$ $z = z(u,v) = \tilde{z}(x,y) := f(x,y)$



$\bar r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$ $\quad$ $\bar r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$

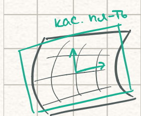
Замечание: Условие регулярности для выраж-й вида $F(x,y,z)=0$: $\nabla F \neq 0$

Ex нерегулярная пов-ть — конус. $x^2+y^2-z^2=0$ $\quad$ $(0,0,0)\in$ конусу, но: $\nabla F|_{0,0,0}=0$



$\gamma: [a,b]\to V$ $\qquad$ $\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$

$r(\gamma(t))$ — кривая на пов-ти в $\mathbb{R}^3$

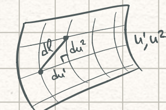


$\frac{dr(\gamma(t))}{dt} = \bar r_1\cdot \dot u^1 + \bar r_2\cdot \dot u^2$ $\qquad$ потому мы и требуем, чтобы J раскладывался

Касательную пл-ть можно опр-ть как мн-во векторов-скоростей в данной точке кривых, ч/з неё проходящих $\quad$ $l = \int_a^b |\dot\gamma(t)|dt = \int_a^b \left|\frac{dr(\gamma(t))}{dt}\right|dt$

$$\left(\frac{dr(\gamma(t))}{dt}, \frac{dr(\gamma(t))}{dt}\right) = (\dot u^1)^2(\bar r_1,\bar r_1) + 2\dot u^1\dot u^2(\bar r_1,\bar r_2) + (\dot u^2)^2(\bar r_2,\bar r_2) = \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 g_{ij}\dot u^i\dot u^j := \underset{\uparrow\text{ пр. Ньютона}}{g_{ij}\dot u^i\dot u^j} = |\bar v|^2$$

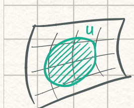
$(g_{ij}) = ((\bar r_i, \bar r_j))$ — м-ца Грама $\qquad$ т.е. $l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\dot u^i\dot u^j}\,dt$



$dl^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2 = (du^1, du^2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}$

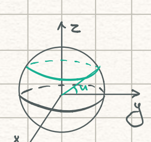
$(g_{ij}) = \begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\bar\xi = \xi^1\bar r_1 + \xi^2\bar r_2$, $\quad$ $\bar\eta = \eta^1\bar r_1 + \eta^2\bar r_2$ $\qquad$ $dl^2 = g_{ij}du^idu^j$

$$I(\bar\xi,\bar\eta) \equiv (\bar\xi,\bar\eta) = (\xi^1,\xi^2)\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^1\\\eta^2\end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\bar\xi,\bar\eta) = \frac{I(\bar\xi,\bar\eta)}{\sqrt{I(\xi,\xi)}\sqrt{I(\eta,\eta)}}$$



$$S(U) = \iint_U \sqrt{\det G}\,du^1du^2$$

Ex



$$\begin{cases}x = R\cos u\cos v\\ y = R\cos u\sin v\\ z = R\sin u\end{cases} \qquad u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ v\in[0,2\pi) \qquad \bar r_1 = \frac{\partial r}{\partial u} = \begin{pmatrix}-R\sin u\cos v\\ -R\sin u\sin v\\ R\cos u\end{pmatrix} \qquad \bar r_2 = \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix}-R\cos u\sin v\\ R\cos u\cos v\\ 0\end{pmatrix}$$

$G = \begin{pmatrix}R^2&0\\0&R^2\cos^2u\end{pmatrix}$ $\qquad$ $dl^2 = R^2du^2 + R^2\cos^2u\,dv^2$

$$\iint_S\sqrt{\det G}\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos u\,du\,dv = 2\pi R^2\sin u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2$$

$(u(t), v(t)) = (u_0, t)$ $\qquad$ $\frac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 = (0\ 1)\begin{pmatrix}R^2&0\\0&R^2\cos^2u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = R^2\cos^2u$

$$l = \int_0^{2\pi} R\cos u_0\,dt = 2\pi R\cos u_0$$

Опр Метрика **индуцирована**, если длина любой кривой, посчитанной как кривая на пов-ти, совпадает с посчитанной просто в $\mathbb{R}^3$