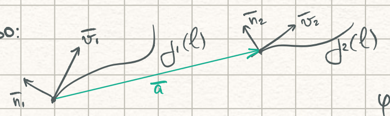
Теорема: $\gamma_1:[0,L]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma_2:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ – натур. параметриз. регул. кривые с совп. кривизной: $\forall l\in[0,L]\quad k_1(l)=k_2(l) \Rightarrow \exists\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ – движ-е, сохр. ориентацию, причём
$\gamma^2(l)=\varphi(\gamma_1(l))\quad\forall l\in[0,L]$

Д-во:



$(\bar v_1,\bar n_1)$, $(\bar v_2,\bar n_2)$ – реперы Френе в нач. точках кривых

$\varphi:\Omega\circ T_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, где Ω – вращ., T_a – сдвиг $(T_a: x\mapsto x+a)$
(любое движ. предст. композ. вращ. и парал. переноса)

$a:=\gamma_2(0)-\gamma_1(0)$. Хотим получить $\Omega(\bar v_1(0))\overset{1}{=}\bar v_2(0)$ и $\Omega(\bar n_1(0))\overset{2}{=}\bar n_2(0)$ $\quad(1\Rightarrow 2)$

Репер Френе кривой $\varphi(\gamma_1(l))$: $(\Omega(v_1),\Omega(n_1))$

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}\Omega v_1\\ \Omega n_1\end{pmatrix}=\Omega\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v_1\\n_1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\Omega&0\\0&\Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&k\\-k&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\n_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k\\-k&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega&0\\0&\Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\n_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k\\-k&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega v_1\\ \Omega n_1\end{pmatrix}$$

т.е. (v_2,n_2) и $(\Omega v_1,\Omega v_2)$ уд. ур-ям Френе и совп. в нач. усл-ях
Снова получ. з. Коши, в силу ед-ти её реш-я: $\begin{cases}\Omega\bar v_1(l)=v_2(l)\\ \Omega\bar n_1(l)=n_2(l)\end{cases}\quad\forall l\in[0,L]$

Теперь сдвиг: $\gamma_2(l)=\gamma_2(0)+\int_0^l v_2(t)dt=\varphi(\gamma_1(0))+\int_0^l\varphi(v_1(t))dt=\varphi(\gamma_1(l))$,
т.е. φ кажд. точку γ_1 и её репер правильно переносит на γ_2, ура!

Вывод: Если дана кривизна, то с точностью до движ-я плоск-ти можно найти задаваемую ей параметриз. кривую

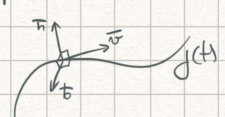
Опр $k=k(l)$ — **натуральное ур-е плоской кривой**

Утв $\alpha(l)=\int_0^l k(t)dt$, $k=k(l)$ $\quad(*)\quad\Rightarrow\gamma(l)=\left(\int_0^l\cos\alpha(t)dt,\ \int_0^l\sin\alpha(t)dt\right)$ – кривая, задаваемая ур-ем $(*)$

Д-во: $\frac{d\gamma}{dl}=(\cos\alpha(l),\sin\alpha(l))\qquad\left|\frac{d\gamma}{dl}\right|=1$

$\frac{d^2\gamma}{dl^2}=(-\sin\alpha(l)\cdot\alpha',\ \cos\alpha(t)\cdot\alpha')\qquad\left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right|=\sqrt{(\alpha')^2}=|\alpha'|=\left|\frac{d}{dl}\left(\int_0^l k(t)dt\right)\right|=|k(l)|$

Кривые в $\mathbb{R}^3$:



Будем рассм-ть **бирегулярные кривые**, т.е. $\frac{d\gamma}{dl}\neq0$, $\frac{d^2\gamma}{dl^2}\neq0$

$\bar v=\frac{d\gamma}{dl}$ – **вектор скорости** $\qquad\bar n=\dfrac{\frac{d^2\gamma}{dl^2}}{\left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right|}$ – **нормаль**

$b:=[\bar v\times\bar n]$ – **бинормаль**

$(\bar v\ \bar n\ \bar b)$ – репер Френе в $\mathbb{R}^3$ $\qquad k=\left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right|$ – **кривизна** $\qquad\varkappa$ — **кручение**

Теорема: Формулы Френе в $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}v\\n\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\-k&0&\varkappa\\0&-\varkappa&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\n\\b\end{pmatrix}$$

Д-во: $(v,v)=(n,n)=(b,b)=1\qquad\left(\frac{dv}{dl},v\right)=\left(\frac{dn}{dl},n\right)=\left(\frac{db}{dl},db\right)=0\Rightarrow \text{diag}=\{0,0,0\}$

$\frac{d\bar v}{dl}=k\bar n\Rightarrow a_{12}=k\quad a_{13}=0$

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}v\\n\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\x_1&0&x_2\\x_3&x_4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\n\\b\end{pmatrix}:\quad(\bar v,\bar n)=(\bar v,\bar b)=(\bar n,\bar b)=0\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{dv}{dl},n\right)+\left(v,\frac{dn}{dl}\right)=0\\ \left(\frac{dv}{dl},b\right)+\left(v,\frac{db}{dl}\right)=0\\ \left(\frac{dn}{dl},b\right)+\left(n,\frac{db}{dl}\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} k + (v, x_1 v + x_2 b) = 0 \\ 0 + (v, x_3 v + x_4 n) = 0 \\ x_2 (b,b) + (n, x_4 n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + x_1 (v,v) + x_2 (v,b) = 0 \\ x_3 (v,v) + x_4 (v,n) = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -k \\ x_3 = 0 \\ x_2 = -x_4 := \varkappa \end{cases}$$

Утв $\varkappa = \dfrac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{|[\dot\gamma \times \ddot\gamma]|^2}$ при любой параметризации

Д-во: для натур. параметра (для произв. — упр). $\gamma(l)$ — натур. параметриз. кривая

$\bar{\dot\gamma} = \bar v$ $\quad \bar{\ddot\gamma} = \dfrac{d\bar v}{dl} = k\bar n \quad \bar{\dddot\gamma} = \dfrac{d}{dl}(k\bar n) = \dfrac{dk}{dl}\bar n + k\dfrac{d\bar n}{dl} = \dfrac{dk}{dl}\bar n + k(-k\bar v + \varkappa \bar b)$ из ф-л Френе

т.е. $(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = (\bar v, k\bar n, \frac{dk}{dl}\bar n - k^2\bar v + k\varkappa\bar b) = \overset{n\|n}{\cancel{(\bar v, k\bar n, \frac{dk}{dl}\bar n)}} + \overset{v\|v}{\cancel{(\bar v, k\bar n, -k^2\bar v)}} + (\bar v, k\bar n, k\varkappa\bar b) = k^2\varkappa(\bar v, \bar n, \bar b) =$
$= k^2\varkappa$

$|[\dot\gamma \times \ddot\gamma]|^2 = |\dot\gamma|^2 |\ddot\gamma|^2 \cdot \sin^2\frac{\pi}{2} = k^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{|[\dot\gamma, \ddot\gamma]|^2} = \dfrac{k^2\varkappa}{k^2} = \varkappa$

Геом. смысл:

Опр $\left.\begin{array}{l} O\bar v\bar n \text{ — соприкасающаяся} \\ O\bar n\bar b \text{ — нормальная} \\ O\bar v\bar b \text{ — спрямляющая} \end{array}\right\}$ плоскости

Кривизна — мера вращения вектора скорости
Кручение — мера вращения соприкасающейся плоскости вокруг вектора $\bar v$ (что есть мера вращ-я b вокруг $\bar v$)
(тут мера <=> скорость)

Если кривая задана произв. параметром:

$k = \dfrac{|[\dot\gamma \times \ddot\gamma]|}{|\dot\gamma|^3}$ (как и в $\mathbb{R}^2$) $\quad \bar v = \dfrac{\bar{\dot\gamma}}{|\dot\gamma|} \quad b = \dfrac{[\dot\gamma \times \ddot\gamma]}{|[\dot\gamma \times \ddot\gamma]|} \Rightarrow \bar n = [\bar b \times \bar v]$ — так строится репер Френе для кривой произв. парам-ции в $\mathbb{R}^3$

Ex $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, ht)$ — винтовая линия

$\dfrac{d\gamma}{dt} = (-a\sin t, a\cos t, h) \quad \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \quad \dfrac{d^3\gamma}{dt^3} = (a\sin t, -a\cos t, 0)$

$(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = ha^2 \qquad [\dot\gamma \times \ddot\gamma] = a^2h^2 + a^4 = a^2(h^2 + a^2) \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \dfrac{h}{a^2 + h^2}$

$|\dot\gamma|^2 = a^2 + h^2 \quad k = \dfrac{a\sqrt{h^2+a^2}}{(a^2+h^2)^{3/2}} = \dfrac{a}{a^2+h^2} \qquad \bar v = \dfrac{\bar{\dot\gamma}}{|\dot\gamma|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(-a\sin t, a\cos t, h)$

$\bar n = (-\cos t, -\sin t, 0)$, т.к. $\ddot\gamma \perp \dot\gamma$ (как в натур. парам.) $l\uparrow, t\uparrow \Rightarrow$ знаки не меняем
$\bar b = [\bar v \times \bar n] = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h\sin t, -h\cos t, a)$

т.е. у винтовой линии кривизна и кручение постоянны

Теорема: $k: [0,L] \to \mathbb{R}^{>0}$ $\varkappa: [0,L] \to \mathbb{R}$, $k, \varkappa \in C^m[0,L] \Rightarrow \exists \gamma: [0,L] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma \in C^3[0,L]$ с крив. $k(l)$ и круч. $\varkappa(l)$

Теорема: $\gamma_1: [0,L] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_2: [0,L] \to \mathbb{R}^3$ — натур. парам. регул. кривые с совп. кривизной и кручением, т.е. $\forall l \in [0,L]$ $k_1(l) = k_2(l)$ и $\varkappa_1(l) = \varkappa_2(l)$
$\Rightarrow \exists \varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — движ-е, сохр. ориентацию: $\gamma_2(l) = \varphi(\gamma_1(l))$ $\forall l \in [0,L]$

Д-во: аналогично случаю в $\mathbb{R}^2$

Опр $\begin{cases} k = k(l) \\ \varkappa = \varkappa(l) \end{cases}$ – натур. ур-я кривой в $\mathbb{R}^3$

Замечание: не всегда интегрируемы

$\underline{k=0}$ – прямая $\underline{k>0}$ – дуга окр-ти радиуса $\frac{1}{k}$