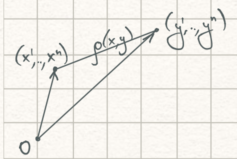
$\mathbb{R}^n$, $x^1, \dots, x^n$



$$\rho(x,y) = \sqrt{(x^1-y^1)^2 + \dots + (x^n-y^n)^2}$$
$$(\bar{x},\bar{y}) = u^1v^1 + \dots + u^nv^n = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$$

Опр **Кривая** — отобр-е $[a,b] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $[a,b] \ni t \mapsto \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$

Мы будем рассматривать гладкие регулярные кривые

Опр Кривая **гладкая**, если $\gamma(t) \in C^m[a,b]$ (m сколь угодно большое)

Опр Кривая **регулярная**, если $\forall t \in [a,b]$ $\frac{d\gamma}{dt}(t) \neq 0$ (т.е. нигде не останавливаемся на кривой при движении)

$\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^n$

т.е. $\exists \varphi^{-1}$ тоже гладкое

Опр $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, если $\exists \varphi : [a_1,b_1] \xrightarrow[\text{на}]{1-1} [a_2,b_2]$, $\varphi \in C^m[a_1,b_1]$: $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ $\forall t \in [a_1,b_1]$

Опр $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ — **длина кривой** γ.

Св-во: Длина аддитивна, работает для прямой

Лемма: Длина кривой не зависит от выбора параметра

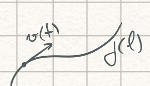
Д-во: $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^n$, γ_1, γ_2 задают одну и ту же кривую
$t \in [a_1,b_1]$, $s \in [a_2,b_2]$ $\gamma_1(t) = \gamma_2(s)$
$\exists s = s(t)$, $\frac{ds}{dt} \neq 0$, т.к. они задают одну кривую, т.е. $\gamma_1 \simeq \gamma_2$
$L(\gamma_1) = \int_{a_1}^{b_1} \left|\frac{d\gamma_1}{dt}\right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left|\frac{d\gamma_1}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right| dt = \int_{a_2}^{b_2} \left|\frac{d\gamma_2}{ds}\right| ds = L(\gamma_2)$

Опр Кривая $\gamma(l)$, $l \in [a,b]$ **параметризована натуральным параметром**, если $\forall a_1, a_2$: $a \leq a_1 \leq a_2 \leq b$ длина дуги кривой $L_{a_1}^{a_2}(\gamma) = a_2 - a_1$

Лемма: На любой (регулярной) кривой $\exists$ натуральная параметризация

Д-во: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ t - данный (нерегулярный) параметр, l - регулярный
$\frac{dl}{dt} = \left|\frac{d\vec{\gamma}}{dt}\right|$ $l(a) = 0$ $l(b) = L(\gamma)$ - задача Коши
$l = l(t)$, $t = t(l)$: $[0, L(\gamma)] \to [a,b]$. $\gamma(t) = \gamma(t(l)) = \gamma_0(l)$ - уже "новая" кривая, завис. от l
$\left|\frac{d\gamma_0}{dl}\right| = \left|\frac{d\gamma_0}{dt} \cdot \frac{dt}{dl}\right| = \left|\frac{d\gamma_0}{dt}\right| \cdot \frac{dt}{dl} \overset{\text{з.к.}}{=} 1$ => l - натур. парам.

Кривые в $\mathbb{R}^2$



l - натур. параметр. $\bar{v} = \frac{d\gamma}{dl}$

Дополним $\bar{v}$ до правого ОНБ, где $\bar{v}$ - первый вектор:
$(\bar{v}, \bar{n})$ - правый ОНБ ($|\bar{v}| = |\bar{n}| = 1$)

Опр $(\bar{v}, \bar{n})$ — репер Френе

Теорема: $\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{n}\end{pmatrix}$ — формула Френе

Д-во: $\bar{v} = \frac{d\gamma}{dl}$ $\quad (\bar{v}, \bar{v}) = \left(\frac{d\gamma}{dl}, \frac{d\gamma}{dl}\right) = \left|\frac{d\gamma}{dl}\right| = 1$

$$\begin{cases}(\bar{v},\bar{v}) = 1\\ (\bar{n},\bar{n}) = 1\\ (\bar{v},\bar{n}) = 0\end{cases} \overset{\text{диф.}}{\Rightarrow} \begin{cases}\left(\frac{d\bar{v}}{dl}, \bar{v}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{v}}{dl} = \alpha\bar{n}\\ \left(\frac{d\bar{n}}{dl}, \bar{n}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{n}}{dl} = \beta\bar{v}\\ \left(\frac{d\bar{v}}{dl}, \bar{n}\right) + \left(\bar{v}, \frac{d\bar{n}}{dl}\right) = \alpha + \beta = 0\end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta$$

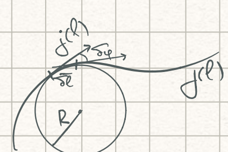
$k := \alpha \Rightarrow \beta = -k$

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{n}\end{pmatrix}$$

Опр k — кривизна кривой

$$\frac{d\bar{v}}{dl} = k\bar{n} \qquad k = \left(\frac{d\bar{v}}{dl}, \bar{n}\right) = \left(\frac{d^2\gamma}{dl^2}, \bar{n}\right) \qquad |k| = \left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right|$$

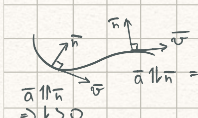
Геом. смысл:



$$\lim_{\delta l \to 0} \frac{\delta\varphi}{\delta l} = \frac{d\varphi}{dl} = k$$

$R = \frac{1}{|k|}$ — радиус кривизны

в общем случае $k = \left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right| \geqslant 0$
но!
можно рассм-ть знакопеременную кривизну

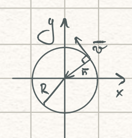


$\bar{a}$ — вект. ускорения

Тут поле нормалей будет непр. и $(\bar{v}, \bar{n})$ останется правым базисом

Если же оставить сонапр-ть n и a, то поле $\bar{n}$ станет разрывным (неустранимо)

Ex



$$\begin{cases}x(t) = R\cos t\\ y(t) = R\sin t\end{cases}$$

Ищем натур. парам: $\frac{dl}{dt} = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|$

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$\dot{\gamma}(t) = (-R\sin t, R\cos t)$ $\qquad |\dot{\gamma}| = R$

$l = Rt \qquad t = \frac{l}{R}$

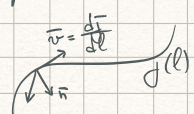
$\gamma(l) = \left(R\cos\frac{l}{R}, R\sin\frac{l}{R}\right) \qquad \bar{v} = \frac{d\gamma}{dl} = \left(-\sin\frac{l}{R}, \cos\frac{l}{R}\right) \qquad |\bar{v}| = 1$, т.е. построили натур. парам.

Напом: Базисы одинаковоориентированы, если $\begin{pmatrix}\bar{e}_1'\\ \bar{e}_2'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix}$, $\det A > 0$

$(\bar{v}, \bar{n})$ — правый ОНБ $\Rightarrow \bar{n} = \left(-\cos\frac{l}{R}, \sin\frac{l}{R}\right)$

$\frac{d\bar{v}}{dl} = k\bar{n} = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{l}{R}, \frac{1}{R}\sin\frac{l}{R}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{R}$

Кривые в $\mathbb{R}^3$:



$$\bar{n} = \frac{d^2\gamma}{dl^2} \Big/ \left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right| \qquad \left(\frac{d\gamma}{dl}, \frac{d\gamma}{dl}\right) = 1 \qquad \left(\frac{d^2\gamma}{dl^2}, \frac{d\gamma}{dl}\right) = 0$$

В n-мерном случае $(n>2)$ нет необх-ти в отрицат. кривизны, т.к. не огр. выбором нормали

$k = \left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right| \qquad \gamma = \gamma(t) \qquad t = t(l) \qquad \frac{d\gamma(t(l))}{dl} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{dl} = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \qquad \left(\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}, \frac{dl}{dt} = |\dot{\gamma}|\right)$

$$\frac{d^2\gamma(t(l))}{dl^2} = \frac{d}{dl}\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}\right) \cdot \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \overset{*}{=} \frac{1}{|\dot{\gamma}|}\left(\frac{\ddot{\gamma}|\dot{\gamma}| - \dot{\gamma}\frac{(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|}}{|\dot{\gamma}|^2}\right) = \frac{\ddot{\gamma}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^4} \Rightarrow$$

$(*)$: $\frac{d(|\gamma'|)}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma',\gamma')^{\frac{1}{2}} = \frac{2(\gamma'',\gamma')}{2(\gamma',\gamma')^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\gamma'',\gamma')}{|\gamma'|}$ $\Big|$ $\Rightarrow k = \frac{|\gamma''(\gamma',\gamma') - \gamma'(\gamma'',\gamma')|}{|\gamma'|^4}$ – кривизна в n-мерном случае

Замечание: В случае натур. парам. $|\gamma'| = 1$ $(\gamma'',\gamma') = 0 \Rightarrow$ остаётся $|\gamma''|$

Замечание: В $\mathbb{R}^3$ есть вект. произв. и $k = \frac{\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')}{|\gamma'|^4} = \frac{[\gamma'',\gamma']}{|\gamma'|^3}$

Теорема: $k: [0,L] \to \mathbb{R}$, $k \in C^\infty[0,L] \Rightarrow \exists \gamma: [0,L] \to \mathbb{R}^2$ – гладкая кривая, кривизна кот. равна $k(\ell)$

Д-во: $(\overline{v}_0, \overline{n}_0)$ – фикс. правый ОНБ в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\ell}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} \\ \overline{v}(0) = \overline{v}_0 \\ \overline{n}(0) = \overline{n}_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{новая з.К.}} \begin{cases} \begin{cases} \frac{d}{d\ell}(\overline{v},\overline{v}) = 2\left(\frac{d\overline{v}}{d\ell},\overline{v}\right) = 2k(\overline{v},\overline{n}) \\ \frac{d}{d\ell}(\overline{n},\overline{n}) = 2\left(\frac{d\overline{n}}{d\ell},\overline{n}\right) = -2k(\overline{v},\overline{n}) \\ \frac{d}{d\ell}(\overline{v},\overline{n}) = k(\overline{n},\overline{n}) - k(\overline{v},\overline{v}) \end{cases} \\ (\overline{v}(0),\overline{v}(0)) = 1 \\ (\overline{n}(0),\overline{n}(0)) = 1 \\ (\overline{v}(0),\overline{n}(0)) = 0 \end{cases}$$

Решение з.К единственно, $v(0) = v_0$ и $n(0) = n_0$ подходят $\Rightarrow$
$v(\ell) = v(0) = v_0$
$n(\ell) = n(0) = n_0$

Теперь найдём кривую: $\overrightarrow{\gamma(\ell)} = \int_0^\ell v(s)\,ds$ $\begin{cases} \frac{d\gamma}{d\ell} = v(\ell) \\ \left|\frac{d\gamma}{d\ell}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{d\overline{v}}{d\ell} = k\overline{n}$