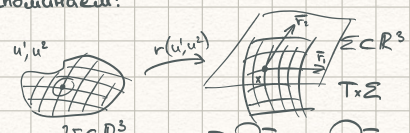
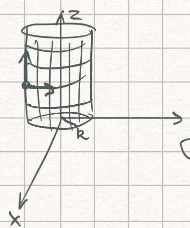
Вспоминаем:



$\bar r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$ $\quad \bar r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$

$(\bar r_i, \bar r_j) = g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2)$



$$\begin{cases} x = R\cos(u/R) \\ y = R\sin(u/R) \\ z = v \end{cases}$$

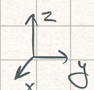
$u^1 = u \quad u^2 = v$

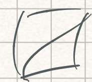
$\bar r_1 = (-R\sin u, R\cos u, 0)$

$\bar r_2 = (0, 0, 1)$

$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F(x,y,z) = 0$





$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \Rightarrow$

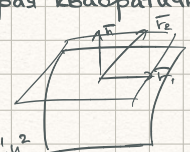
$dz = -\frac{1}{F_z}\left(F_x dx + F_y dy\right)$

$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ominus$

$\ominus\; dx^2 + dy^2 + \frac{1}{F_z^2}\left(F_x^2 dx^2 + F_y^2 dy^2 + 2F_xF_y dxdy\right) = \left(1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}\right)dx^2 + 2\frac{F_xF_y}{F_z^2} + \left(1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}\right)dy^2$

$$\Rightarrow \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} & \frac{F_xF_y}{F_z^2} \\ \frac{F_xF_y}{F_z} & 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2} \end{pmatrix}$$

Вторая квадратичная форма



$\bar r_i = \partial r / \partial u^i$ $\quad \bar r_{ij} = \frac{\partial^2 \bar r}{\partial u^i \partial u^j}$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ $\quad dl^2 = g_{ij}du^idu^j \quad \mathrm{I}$

$b_{ij}du^idu^j \quad \mathrm{II}$

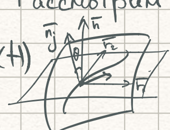
$\bar n = \frac{[\bar r_1 \times \bar r_2]}{|[\bar r_1 \times \bar r_2]|}$ $\quad b_{ij} = (\bar r_{ij}, \bar n)$ $\quad \bar\xi = \xi^i \bar r_i$

$\mathrm{I}(\bar\xi, \bar\xi) = g_{ij}\xi^i\xi^j$

$\mathrm{II}(\bar\xi, \bar\xi) = b_{ij}\xi^i\xi^j$

Ex Рассмотрим кривую на пов-ти:

$r(\gamma(t))$



$\bar n_\gamma$ – нормаль к кривой

θ – угол м/у нормалями

$\frac{d^2\overline{(r(\gamma))}}{dl^2} = k\bar n_\gamma$ $\qquad \frac{dl}{dt} = \left|\frac{dr(\gamma)}{dt}\right| = \sqrt{\mathrm{I}(\dot\gamma, \dot\gamma)}$

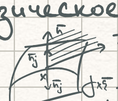
$r\gamma(t(l))) = r(u^1(t(l)), u^2(t(l)))$ $\qquad \frac{dr}{dl} = (\bar r_1 \dot u^1 + \bar r_2 \dot u^2)\frac{dt}{dl}$

$$\frac{d^2 r}{dl^2} = \frac{d}{dl}\left((\bar r_1 \dot u^1 + \bar r_2 \dot u^2)\frac{dt}{dl}\right) = \left(\bar r_{11}(\dot u^1)^2 + 2\bar r_{12}\dot u^1\dot u^2 + \bar r_{22}(\dot u^2)^2\right)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + (\bar r_1 \dot u^1 + \bar r_2 \dot u^2)\frac{d^2t}{dl^2}$$

$$\left(\frac{d^2 r}{dl^2}, \bar n\right) = \frac{b_{ij}\dot u^i \dot u^j}{g_{ij}\dot u^i \dot u^j} \Rightarrow \boxed{k(\bar n_\gamma, \bar n) = k\cos\theta = \frac{\mathrm{II}(\dot\gamma, \dot\gamma)}{\mathrm{I}(\dot\gamma, \dot\gamma)} = \frac{b_{ij}\dot u^i \dot u^j}{g_{ij}\dot u^i \dot u^j}}$$

это была т. Менье́

Физическое сечение:



$\bar\xi \in T_x\Sigma$ $\qquad \Pi_{x,\xi} \cap \Sigma = \gamma_{x,\xi}$

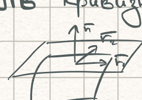
$= \xi^i \bar r_i$

$\gamma_{x,\xi}$ – (плоская кривая)

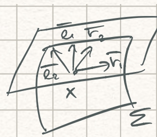
<u>нормальное сечение</u> пов-ти Σ в т. x в напр. вект. $\bar\xi$

$\bar n_\gamma$ коллинеарна $\bar n$

Утв Кривизна нормального сеч-я (нормальн кривизна) $\boxed{k_\gamma = \pm \frac{b_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}}$ + если сонаправлены, иначе –



u^1, u^2 $\quad \bar n = \frac{[\bar r_1 \times \bar r_2]}{|[\bar r_1 \times \bar r_2]|}$ можно u^1, u^2 поменять, тогда всё знак поменяет



$T_x\Sigma$ $G \sim g_{ij}$, $G>0$ $\xi^T G \xi > 0$ $\forall \bar\xi \neq 0$

$B \sim b_{ij}$

$\bar\xi = \xi^1 \bar e_1 + \xi^2 \bar e_2$

$G \sim \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B \sim \begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}$ $\mathrm{I}(\bar\xi,\bar\xi) = (\xi^1)^2+(\xi^2)^2$ $\mathrm{II}(\bar\xi,\bar\xi) = k_1(\xi^1)^2+k_2(\xi^2)^2$

Д-во: $r(x)=x^TGx$ $q(x)=x^TBx$ — кв. формы, приводим r к виду: y^Ty $x=Ty$

$r = x^TGx = y^TT^TGTy = y^TEy$ $T^TGT=E$, q переведём в новый базис:

$q = x^TBx = y^T\boxed{T^TBT}y \xrightarrow[\text{преобр. } y=Sz]{\text{ортог.}} z^TS^TT^TBTSz = z^TDz$ хотим сделать диаг

$r = y^Ty = z^TS^TSz = z^Tz$ всё ещё E

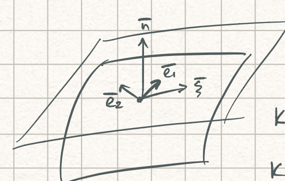
$\bar e_1, \bar e_2$ — главные направления k_1, k_2 — главные кривизны

Формула Эйлера:

$\bar\xi = \xi^i \bar e_i$ Кривизна норм. сечения вдоль $\bar\xi$: $k_{\bar\xi} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$, $\varphi = \angle(\bar\xi, \bar e_1)$

$\bar\xi \in T_x\Sigma$

Д-во: $k_{\bar\xi} = \dfrac{k_1(\xi^1)^2+k_2(\xi^2)^2}{(\xi^1)^2+(\xi^2)^2}$



тема с компактом

k_1 — кривизна вдоль $\bar e_1$

k_2 — вдоль $\bar e_2$

Следствие:

k_1, k_2 — экстрем. знач-я нормальн. кривизн Σ в точке

Д-во: очевидно (дифф-м)

$\det(B-\lambda G)=0$ отсюда можно k_1, k_2 найти

$B \sim T^TBT$ $G \sim T^TGT$

$\det(T^TBT-\lambda T^TGT) = \det T^T \det(B-\lambda G)\cdot\det T = (\det T)^2\cdot\det(B-\lambda G) = 0$

имеет смысл разве что сравнение с 0. Инвариант (не завис. от смены базиса)

$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda g_{11} & b_{12}-\lambda g_{12} \\ b_{12}-\lambda g_{12} & b_{22}-\lambda g_{22}\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (b_{11}-\lambda g_{11})(b_{22}-\lambda g_{22}) - (b_{12}-\lambda g_{12})^2 = 0$

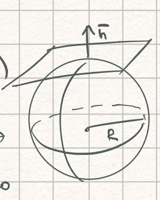
$\underbrace{(b_{11}b_{22}-b_{12})^2}_{\det B} - \lambda(g_{11}b_{22}+b_{11}g_{22}-2b_{12}g_{12}) + \lambda^2\underbrace{(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}_{\det G} = 0$

$K = k_1k_2 = \dfrac{\det B}{\det G}$ $H = \dfrac{k_1+k_2}{2} = \dfrac12\,\dfrac{g_{11}b_{22}+g_{22}b_{11}-2g_{12}b_{12}}{\det G}$

Гауссова кривизна   средняя кривизна

Геом. смысл:

- Гауссова: 1)



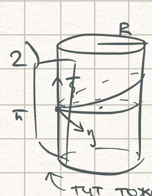
вся пов-ть под касат. пл-тью

$k_{\bar\xi} = \frac1R$

$k_1 = k_2 = \frac1R$

$K = \frac{1}{R^2} > 0$

2)



$k_1 = 0$

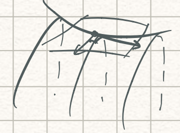
$k_\eta = \frac1R$

$\boxed{K=0}$

тут тоже под

Гауссова кривизна знак не поменяет, кст

3) «седло»



$\boxed{K<0}$ тут по обе стороны от касат. пл-ти