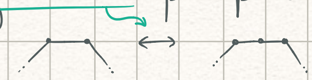
Теорема Критерий Понтрягина - Куратовского

Граф G планарный $\Leftrightarrow$ в нём нет подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$

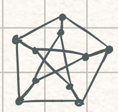
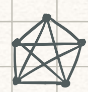
Опр Графы G и H **гомеоморфны**, если подразбиением рёбер они сводятся к изоморфным



Теорема Критерий Вагнера

Граф G планарный $\Leftrightarrow$ в нём не содержатся подграфы, стягиваемые к K_5 или $K_{3,3}$

Ex Граф Петерсона (минимальный по числу вершин) кубический (3-регулярный) граф без мостов

 $\xrightarrow{\text{стягиваем}}$ K_5: 

5. Алгоритмы на графах. Поиск в ширину.

Стратегия: 1) обход вершин графа

2) исследование инцидентных каждой вершине рёбер

Тактика: обходить вершины на расст-ии k от данной только после того, как исследуем все рёбра, инцидентные вершинам на расст-ии $k-1$ от данной.

Опр $v \in V(G) \Rightarrow S_r(v) = \{x \in V(G) \mid d(v,x) = r\}$: $0 \le r \le ecc(v)$

Опр **Посещённая** вершина — исследованная вершина

Новая вершина — непосещённая вершина

Активная вершина — исследуемая в данный момент

Закрытая вершина — та, все смежные вершины к ктр исследованы (окрестность её)

Опр Процедура BFS(a) — обход в ширину из вершины a

Трудоёмкость: $O(m)$, где $m = E(G)$

Св-ва:
- процедура конечна
- исследует только компоненту связности, содерж. a
- позволяет опр-ть компоненты связности

Применение:
- выявление компонент связности
- построение каркаса
- построение геодезического дерева (для нахожд-я расст-й в графе)

Опр Каркас, получаемый после применения к связн. комп-те BFS процедуры, наз. **BFS-деревом**

Опр **Геодезическое дерево** — каркас T связного гр. G с корнем a, если $\forall x \in V(G)$ путь из x в a в T явл-ся кратч. путём из x в a в G.

Теорема
BFS-дерево явл-ся геодезическим

Д-во: Обозн. $D(i)$ - мн-во всех верш. на расст-ии i от старт. в. a | Смотрим на такой псевдо-код:

Procedure BFS(a)
1. посетить a
2. a => Q
3. while Q≠∅ do
4. x <= Q
5. for y∈V(x) do
6. исследовать ребро (x,y)
7. if вершина новая
8. then посетить y
9. y => Q

Начинаем с $D(0)$. За первое вып-е while посетим и поместим в очередь все верш. из $D(1)$.
Далее кажд. из них будет стан. активной, будут исслед-ся смежн. с ними верш.. Так те из них, кто ещё не посещён, образуют $D(2)$ и т.д. Таким образом пришли к выводам:
А: $\forall i = 0, 1, \dots$ Все верш. из $D(i+1)$ будет посещены после всех вершин из $D(i)$ (по индукции легко показать)
Б: Если активна вершина из $D(i)$, то в этот момент все вершины из $D(i)$ уже посещены (из А: все из $D(i-1)$ иссл-ны => все из $D(i)$ посещены)
Пусть активна $x \in D(i)$ и $\exists y$ - смежная с ней новая вершина
$d(y,a) = d(x,a) + 1$ — получ. кратч. по постр-ю