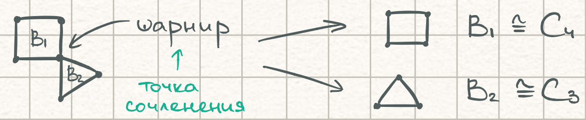
# 7. Блоки. Двусвязность. Выявление блоков.

**Опр** Пусть $G=(V,E)$, тогда максимальный подграф графа $G$, не содержащий собственный шарнир, наз. **блоком**.

**Ex** $G$:




**Опр** В графе $G=(V,E)$ два его эл-та (вершина/ребро) **циклически связаны**, если они принадлежат одному и тому же циклу.

**Опр** Граф $G$ наз. **двусвязным**, если все его эл-ты циклически связаны.

Дальше идёт презентация Кирилла "10_23_pres1" ← можно тут посмотреть целиком
Выписанные из неё формулировки:

Воспоминания:

**Опр** Шарнир — та вершина, при удалении ктр число компонент связн-ти увеличивается

Лемма:
Ребро явл-ся мостом <=> в графе нет простого цикла, содерж. это ребро.

**Опр** Связный граф с не менее чем 3мя вершинами, в ктр нет шарниров, наз. двусвязным

**Ex** $C_n$, $K_n$ - двусвязные $\qquad P_n$ - не двусвязн.

Теорема
В двусвязном графе любые два различных эл-та циклически связаны.
Если в графе любые 2 ребра циклически связаны, то он двусвязен.

Следствие:
Граф с не менее чем 2мя ребрами двусвязен <=> любые 2 разл. ребра циклически связаны.

Теорема:
Для любого графа отношение циклической связности рёбер явл-ся отн-нием эквив-ти.

Презентация закончилась, идём дальше.

**Опр** **Блоком** графа $G=(V,E)$ наз. подграф $B$, если:
a) $B \cong K_1$
b) $B \cong K_2$
c) $B$ - макс. подграф $G$ без собств. шарниров

Теорема:

Два различн. блока одного графа могут иметь не более одной общей вершины.
Вершина принадлежит более чем одному блоку $\Leftrightarrow$ она явл-ся шарниром

**Д-во:** 1 Пусть $B_1, B_2$ - разл. блоки $G$. $B = B_1 \cup B_2$ уже не блок $\Rightarrow$ несвязен или имеет шарнир. Если несвязен, то $B_1, B_2$ - его комп. св-ти, а значит не имеют общих вершин. Если же $B$ - связен и $a$ - шарнир в $B$, то после удал-я $a$ распадётся на $B_1 \setminus a$ и $B_2 \setminus a$ — оба связные, т.к. иначе $a$ была бы шарниром в $B_1$ и/или $B_2$ $\Rightarrow$ $a$ - единств. общая м/у $B_1, B_2$

2 $\Rightarrow$ $x \in$ более чем одному блоку $\Rightarrow$ $x$ инцидентна $(x, y_1) \in B_1$ и $(x, y_2) \in B_2$, т.е. не явл. цикл. связ.. Тогда всякий путь м/у $y_1, y_2$ прох. ч/з $x$
$\Rightarrow$ $x$ - шарнир

$\Leftarrow$ $x$ - шарнир $\Rightarrow$ есть 2 смежн. с $x$ верш. $y_1, y_2$ из разн. комп. св-ти $G \setminus x$
$\Rightarrow$ $(x, y_1)$ и $(x, y_2)$ не явл. цикл. связ. $\Rightarrow$ принадлежат разным блокам.

Тут начинается презентация Жени. "10_23_pres2" ← можно заценить целиком.
Выписанные из неё формулировки:

Теорема

Пусть $x = F(y)$ ($x$ - отец $y$) в DFS-дереве $T$, где $x$ - вершина $B$ с наим. знач-ем $Dnum(x)$
Ребро $(x, y)$ явл-ся нач. ребром нктр блока $\Leftrightarrow$ $Low(y) = Dnum(x)$.

**Алгоритм выявления блоков:**

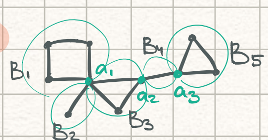
```
for x∈V do
   Dnum(x) = 0
c = 0
k = 0
for x∈V do
 if Dnum(x) == 0
   then Blocks(x)
```

```
Procedure Blocks(x)
c++
Dnum(x) = c
Low(x) = c
x → S
for y∈V(x) do
  if Dnum(y) == 0
    then
      Blocks(y)
      Low(x) = min(Low(x), Low(y))
      if Low(y) == Dnum(x)
        then NewBlock
    else
      Low(x) = min(Low(x), Dnum(y))
```

```
Procedure NewBlock
k++
B(k) = x
repeat
  z ← S
  B(k) = B(k) ∪ {z}
until z == y
```

Презентация закончилась, осталось время для примера:

Ex




Строим BC-граф (дерево)
$V_1 = \{$блоки $G\}$ $V_2 = \{$шарниры $G\}$
$V_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$ $V_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$

$\Rightarrow BC = (V_1 \cup V_2, E^*)$, где $E^* = \{\{x, y\}, x \in V_1, y \in V_2, y \in x\}$