Рационализация алгоритма для задачи о раскарске вершин графа

Графы и алгоритмы

4 декабря 2020 г.

Что нужно сделать?

Поймем что мы можем сделать, чтобы более рационально использовать переборный алгоритм для поиска раскраски вершин графа.

Мы можем использовать тот же прием сжатия по включению, который мы использовали для задачи о независимом множестве.

Новое понятие?? Ну почти

Введем новое понятие.
Пусть в графе G имеются две несмежные вершины a и b, такие, что $V(a) \subseteq V(b)$
Тогда будем говорить, что вершина b *несмежно поглощает* a; вершину a будем называть *несмежно поглощаемой*.

Теорема 1

Если вершина a является *несмежно поглощаемой* в графе G, то $\chi(G - a) = \chi(G)$

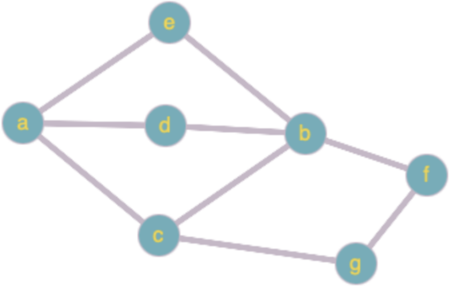
Теорема 1

Доказательство.

Допустим вершина a несмежно поглащается вершиной b. Рассмотрим правильную раскраску графа $G - a$ в наименьшее число цветов. Применим эту же расскраску к графу G: покрасим вершину а в тот же цвет, который имеет вершина b. Так как вершина a смежна только вершинам, которые смежны b, то получится правильная раскраска графа G в тоже самое кол-во цветов. =>
$\chi(G - a) = \chi(G)$ □

Как это работает?

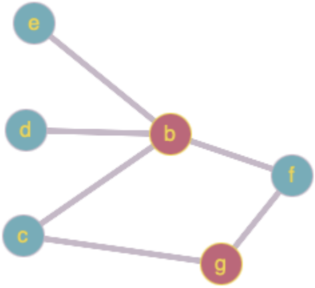
Рассмотрим вот такой граф G



Видно, что вершина b несмежно поглощает вершину a, т.к $V(a) \subseteq V(b)$

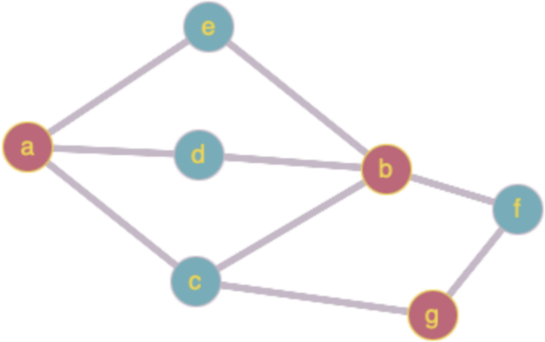
Как это работает?

Рассмотрим граф $(G - a)$ и его правильную раскраску



Видно что в графе G вершина a будет иметь такой же цвет как и вершина b

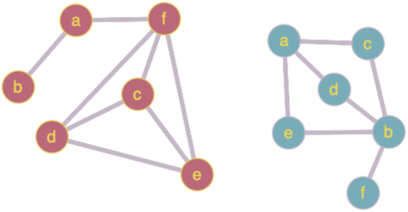
Как это работает?



Граф G

Замечание

Заметим, что если b *смежно поглощает* a в графе G, то в его дополнении $\bar{G}$, очевидно, вершина a будет *несмежно поглащать* вершину b. Верно и обратное.



Граф $\bar{G}$ и G

Теорема 2

В любом графе, *дополнительном к хордальному* и не являющемся полным, имеется *несмежно поглощаемая* вершина.

Теорема 2

В любом графе, *дополнительном к хордальному* и не являющемся полным, имеется *несмежно поглощаемая* вершина.

Эта теорема вытекает из другой теоремы, которая гласит, что в любом непустом хордальном графе имеется смежно поглощающая вершина, и предыдущего замечания.

Новое понятие? Вроде как да

Подмножество множества вершин графа будем называть *раздеющимся множеством (сепаратором)*, если при удалении из графа вершин этого множества граф становится несвязным, т.е происходит увеличение компонент связности.

Понятие *разделяющего множества* является обобщением понятия *шарнир*.

Разделяющее множество минимально, если оно не содержится в большем *разделяющем множестве*.

Теорема 3

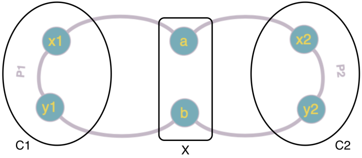
В хордальном графе всякое минимальное *разделяющее множество* является кликой.

Теорема 3

Доказательство.

Допустим что в некотором графе G есть разделяющее мн-во X, которое не является кликой. Это означает, что в X имеются несмежные вершины a и b. При удалении X образуются как минимум две новые компоненты связности. Без ограничения общности можем считать, что C_1 и C_2 такие компоненты. Вершина a смежна как минимум с одной вершиной из каждой компоненты (для определенности x_1 из C_1 и x_2 из C_2. Действительно, если бы a не была связана ни с одной из вершин скажем из C_1, то множество $X = \{a\}$ тоже было бы разделяющим, а это противоречит минимальности. То же относится и к вершине b (для определенности y_1 из C_1 и y_2 из C_2).

Теорема 3



Пусть P_1 - кратчайший путь из x_1 в y_1, а P_2 - кратчайший путь из x_2 в y_2. Рассмотрим последовательность a, P_1, b, P_2, a. Она является простым циклом без хорд длины $\geqslant 4$. Из этого можно сделать вывод, что граф G - не хордальный. $\square$

Новое понятие? Да да да

Вершина графа называется *симплициальной*, если мн-во всех смежных с ней вершин является кликой или пустым мн-вом.

Теорема 4

В любом хордальном графе имеется *симплициальная* вершина.

Теорема 4

Доказательство.

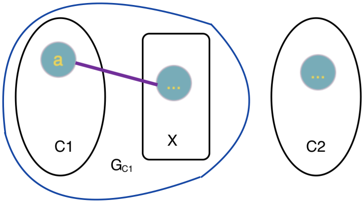
Заметим, что в полном графе любая вершина является *симплициальной*. Докажем, что в любом неполном хордальном графе есть две несмежные симплициальные вершины. Проведем индукцию по числу вершин n:

База: $n = 2$ очевидно

Шаг: Пусть G - хордальный граф с $n \geqslant 3$ вершинами, не являющийся полным.

Если G - несвязен, то по предположению индукции во всех компонентах связности есть симплициальные вершины. Если же граф G связен, то по предыдущей теореме в нем найдется клика. Пусть X - это эта клика, C_1 и C_2 - новые компоненты связности.

Теорема 4



Рассмотрим подграф G_{C_1} порожденный мн-вом $C_1 \cup X$. Если G_{C_1} полный, то в нем каждая вершина симплициальна, иначе по предположению индукции в нем есть две несмежные симплициальные вершины. Хотя бы одна из них принадлежит C_1. В любом случае $a \in C_1$ является симплициальной в графе G_{C_1}. Окрестность вершины a в графе G совпадает с ее окрестность в подграфе G_{C_1}. Из этих устверждений можно сделать вывод, что a - симплициальная вершина G. Аналогично, $\exists b \in C_2$ - симплициальная вершина и a не смежна с b. $\square$

Напоминания

Найдем нижнюю оценку хроматического числа графа G. Если в каком-нибудь графе имеется полный подграф с k вершинами, то для раскраски такого подграфа необходимо k цветов. От сюда следует, что для любого графа выполнено неравенство:

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

где $\omega(G)$ - число вершин в наибольшей клике графа G.

Теорема 5

Для любого хордально графа $\chi(G) = \omega(G)$

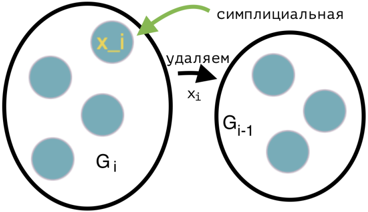
Теорема 5

Доказательство.

Пусть G - хордальный граф с n вершинами, причем $\omega(G) = k$. По предыдущей теореме в графе G найдется симплицальная вершина. Обозначим ее за x_n, а граф $G - x_n$ обозначим G_{n-1}.
Граф G_{n-1} тоже хордальный, а значит и в нем мы сможем найти симплициальную вершину. Обозначим эту вершину x_{n-1}, а граф $G_{n-1} - x_{n-1}$ обозначим G_{n-2}.

Продолжая так действовать получим последовательность вершин $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ и последовательность графов $G, G_{n-1}, ..., G_1$.

Теорема 5



Допустим, что G_{i-1} покрашен в k цветов.
x_i - симплициальная вершина графа G_i, это значит, что множество C всех смежных x_i вершин - клика. Тогда

$$|C| \leqslant k - 1$$

т.к $\omega(G) = k$. Поэтому для вершины x_i можно использовать один из оставшихся цветов. Из этого следует, что каждый G_i, а значит, и исходный граф G, можно покрасить k цветов.

Теорема 5

Получаем искомую оценку на хроматическое число:

$$\chi(G) \leqslant \omega(G)$$

что вместе с нижней оценкой дает утверждение теоремы. $\square$

Теорема 5

План алгоритма для поиска раскрашивания хордального графа в наименьшее число цветов предоставлен в доказательстве последней теоремы.