Цель лекции:

Цель лекции:

- изучить раскраски вершин и рёбер в графе;

Цель лекции:

- изучить раскраски вершин и рёбер в графе;

- рассмотреть переборный алгоритм для вершинной раскраски;

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Раскраски

Цель лекции:

- изучить раскраски вершин и рёбер в графе;

- рассмотреть переборный алгоритм для вершинной раскраски;

- доказать теорему Визинга о хроматическом числе графа;
(выступление Натальи Атутовой)

Цель лекции:

- изучить раскраски вершин и рёбер в графе;

- рассмотреть переборный алгоритм для вершинной раскраски;

- доказать теорему Визинга о хроматическом числе графа;
(выступление Натальи Атутовой)

- поговорить о рационализации переборных алгоритмов.
(выступление Татьяны Плевако)

Definition

Вершинной раскраской графа $G = (V, E)$ называется функция $f : V(G) \to C$, где $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ есть множество цветов.

Definition

Вершинной раскраской графа $G = (V, E)$ называется функция $f : V(G) \to C$, где $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ есть множество цветов.

Под раскраской также понимается разбиение множества вершин на классы k цветов так, что $V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \ldots \bigcup V_k$.

Definition

Вершинной раскраской графа $G = (V, E)$ называется функция $f : V(G) \to C$, где $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ есть множество цветов.

Под раскраской также понимается разбиение множества вершин на классы k цветов так, что $V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \ldots \bigcup V_k$.

Definition

Вершинная раскраска называется правильной, если любые две смежные вершины графа имеют разные цвета.

Definition

Вершинной раскраской графа $G = (V, E)$ называется функция $f : V(G) \to C$, где $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ есть множество цветов.

Под раскраской также понимается разбиение множества вершин на классы k цветов так, что $V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \ldots \bigcup V_k$.

Definition

Вершинная раскраска называется правильной, если любые две смежные вершины графа имеют разные цвета.

Задача о вершинной раскраске состоит в нахождении правильной раскраски данного графа G в наименьшее число цветов.

Definition

Наименьшее число цветов, необходимых для правильной вершинной раскраски графа G, называется хроматическим числом $\chi(G)$.

1. Граф K_n имеет хроматическое число

1. Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$

1. Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$
2. Граф C_n имеет хроматическое число

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Примеры

1. Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$
2. Граф C_n имеет хроматическое число $\chi(C_n) = 2$, если n чётно

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Примеры

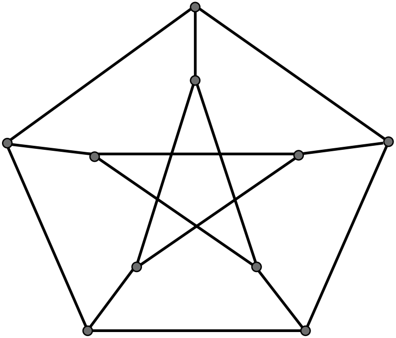
1. Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$

2. Граф C_n имеет хроматическое число $\chi(C_n) = 2$, если n чётно и $\chi(C_n) = 3$, если n нечётно

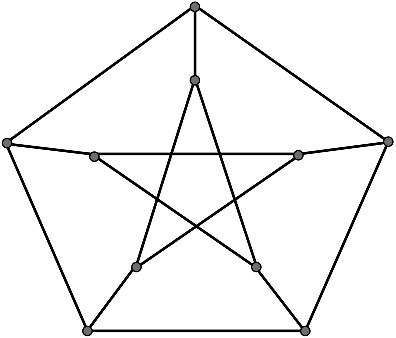
1. Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$

2. Граф C_n имеет хроматическое число $\chi(C_n) = 2$, если n чётно и $\chi(C_n) = 3$, если n нечётно

3. Граф Петерсена P имеет хроматическое число



1. Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$
2. Граф C_n имеет хроматическое число $\chi(C_n) = 2$, если n чётно и $\chi(C_n) = 3$, если n нечётно
3. Граф Петерсена P имеет хроматическое число



$\chi(P) = 3$

Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n \quad \Rightarrow$

Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$ $\quad\Rightarrow$

если в графе имеется клика с k вершинами,
то для раскраски клики необходимо k цветов $\quad\Rightarrow$

Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$ $\Rightarrow$

если в графе имеется клика с k вершинами,
то для раскраски клики необходимо k цветов $\Rightarrow$

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$ $\quad \Rightarrow$

если в графе имеется клика с k вершинами,
то для раскраски клики необходимо k цветов $\quad \Rightarrow$

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

Имеются примеры, когда хроматическое число графа строго больше кликового числа графа.

Граф K_n имеет хроматическое число $\chi(K_n) = n$ $\Rightarrow$

если в графе имеется клика с k вершинами,
то для раскраски клики необходимо k цветов $\Rightarrow$

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

Имеются примеры, когда хроматическое число графа строго больше кликового числа графа.

Пример. $\chi(C_5) = 3$, при этом $\omega(C_5) = 2$

Правильную раскраску можно рассматривать как разбиение множества вершин на независимые множества (цветные классы).

Правильную раскраску можно рассматривать как разбиение множества вершин на независимые множества (цветные классы).

Каждый цветной класс содержит не более чем $\alpha(G)$ вершин.

Правильную раскраску можно рассматривать как разбиение множества вершин на независимые множества (цветные классы).

Каждый цветной класс содержит не более чем $\alpha(G)$ вершин.

Поэтому произведение числа классов (т.е. цветов) на $\alpha(G)$ не превосходит числа n всех вершин графа $\Rightarrow$

$$\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)}$$

Правильную раскраску можно рассматривать как разбиение множества вершин на независимые множества (цветные классы).

Каждый цветной класс содержит не более чем $\alpha(G)$ вершин.

Поэтому произведение числа классов (т.е. цветов) на $\alpha(G)$ не превосходит числа n всех вершин графа $\Rightarrow$

$$\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)}$$

Граф C_5 является примером, когда это неравенство является строгим.

1. $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G \cong O_n$

1. $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G \cong O_n$

2. $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ множество вершин графа G можно разбить на два независимых множества $\Rightarrow G$ является двудольным графом.

1. $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G \cong O_n$

2. $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ множество вершин графа G можно разбить на два независимых множества $\Rightarrow G$ является двудольным графом.

Definition

Двудольные графы называют бихроматическими.

1. $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G \cong O_n$

2. $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ множество вершин графа G можно разбить на два независимых множества $\Rightarrow$ G является двудольным графом.

Definition

Двудольные графы называют бихроматическими.

Fact (Теорема Кёнига)

Граф является бихроматическим тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.

Fact

Для графов G с хроматическим числом $\chi(G) = 3$ не существует их характеризации.

Fact

Для графов G с хроматическим числом $\chi(G) = 3$ не существует их характеризации.

Fact

Не известны простые алгоритмы для тестирования 3-хроматичности графов.

Fact

Для графов G с хроматическим числом $\chi(G) = 3$ не существует их характеризации.

Fact

Не известны простые алгоритмы для тестирования 3-хроматичности графов.

Fact

Задача проверки наличия вершинной раскраски графа в k цветов, где $k \geqslant 3$, является NP-трудной.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

Рассмотрим алгоритм решения задачи о вершинной раскраске.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

Рассмотрим алгоритм решения задачи о вершинной раскраске.

Он похож на переборный алгоритм для задачи о независимом множестве:

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

Рассмотрим алгоритм решения задачи о вершинной раскраске.

Он похож на переборный алгоритм для задачи о независимом множестве:

задача для исходного графа сводится к задаче для двух других графов

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

Рассмотрим алгоритм решения задачи о вершинной раскраске.

Он похож на переборный алгоритм для задачи о независимом множестве:

задача для исходного графа сводится к задаче для двух других графов

$\Rightarrow$ возникает дерево решений.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

Рассмотрим алгоритм решения задачи о вершинной раскраске.

Он похож на переборный алгоритм для задачи о независимом множестве:

задача для исходного графа сводится к задаче для двух других графов

$\Rightarrow$ возникает дерево решений.

Главное отличие:

два новых графа не являются подграфами исходного графа.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.
2. Построим два новых графа:

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.
2. Построим два новых графа:

G_1 получается добавлением ребра $\{u, v\}$ в графе G

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.

2. Построим два новых графа:

G_1 получается добавлением ребра $\{u, v\}$ в графе G

G_2 получается слиянием вершин u и v.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.

2. Построим два новых графа:

G_1 получается добавлением ребра $\{u, v\}$ в графе G

G_2 получается слиянием вершин u и v.

3. Если в правильной раскраске графа G вершины u и v имеют разные цвета, то она будет правильной и для графа G_1.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.

2. Построим два новых графа:

G_1 получается добавлением ребра $\{u, v\}$ в графе G

G_2 получается слиянием вершин u и v.

3. Если в правильной раскраске графа G вершины u и v имеют разные цвета, то она будет правильной и для графа G_1.

4. Если вершины u и v в раскраске графа G имеют один цвет, то граф G_2 можно покрасить в то же число цветов.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.

2. Построим два новых графа:

G_1 получается добавлением ребра $\{u, v\}$ в графе G

G_2 получается слиянием вершин u и v.

3. Если в правильной раскраске графа G вершины u и v имеют разные цвета, то она будет правильной и для графа G_1.

4. Если вершины u и v в раскраске графа G имеют один цвет, то граф G_2 можно покрасить в то же число цветов.

$\Rightarrow$ $$\chi(G) = min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.

2. Построим два новых графа:

G_1 получается добавлением ребра $\{u, v\}$ в графе G

G_2 получается слиянием вершин u и v.

3. Если в правильной раскраске графа G вершины u и v имеют разные цвета, то она будет правильной и для графа G_1.

4. Если вершины u и v в раскраске графа G имеют один цвет, то граф G_2 можно покрасить в то же число цветов.

$\Rightarrow$ $$\chi(G) = min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

рекурсивный поиск раскраски графа в минимальное число цветов.

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Переборный алгоритм вершинной раскраски

1. Выберем в исходном графе G две несмежные вершины u и v.

2. Построим два новых графа:

G_1 получается добавлением ребра $\{u, v\}$ в графе G

G_2 получается слиянием вершин u и v.

3. Если в правильной раскраске графа G вершины u и v имеют разные цвета, то она будет правильной и для графа G_1.

4. Если вершины u и v в раскраске графа G имеют один цвет, то граф G_2 можно покрасить в то же число цветов.

$\Rightarrow$
$$\chi(G) = min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

рекурсивный поиск раскраски графа в минимальное число цветов.

Замечание: граф G_1 имеет столько же вершин, сколько исходный граф, но у него больше ребер $\Rightarrow$ рекурсия приводит к полным графам.

Для задачи о раскраске вершин придумано немало эвристик.

Для задачи о раскраске вершин придумано немало эвристик.

Одна из простейших называется последовательной раскраской:

Для задачи о раскраске вершин придумано немало эвристик.

Одна из простейших называется последовательной раскраской:

- вершины графа как-нибудь линейно упорядочиваются;

Для задачи о раскраске вершин придумано немало эвристик.

Одна из простейших называется последовательной раскраской:

- вершины графа как-нибудь линейно упорядочиваются;

- раскрашиваются в этом порядке в цвета так, что очередная вершина красится в наименьший цвет, который еще не использован ни для одной из смежных с ней вершин.

Для задачи о раскраске вершин придумано немало эвристик.

Одна из простейших называется последовательной раскраской:

- вершины графа как-нибудь линейно упорядочиваются;

- раскрашиваются в этом порядке в цвета так, что очередная вершина красится в наименьший цвет, который еще не использован ни для одной из смежных с ней вершин.

Fact

Для любого графа существует упорядочение, при котором последовательная раскраска дает оптимальный результат.

Обозначим через $\Delta(G)$ наибольшую степень вершины в графе G.

Обозначим через $\Delta(G)$ наибольшую степень вершины в графе G.

При окрашивании очередной вершины в алгоритме последовательной раскраски для смежных с ней вершин использовано не более $\Delta(G)$ цветов, значит, хотя бы один из цветов $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ свободен и может быть применен. Отсюда следует еще одно неравенство для хроматического числа:

Обозначим через $\Delta(G)$ наибольшую степень вершины в графе G.

При окрашивании очередной вершины в алгоритме последовательной раскраски для смежных с ней вершин использовано не более $\Delta(G)$ цветов, значит, хотя бы один из цветов $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ свободен и может быть применен. Отсюда следует еще одно неравенство для хроматического числа:

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

Обозначим через $\Delta(G)$ наибольшую степень вершины в графе G.

При окрашивании очередной вершины в алгоритме последовательной раскраски для смежных с ней вершин использовано не более $\Delta(G)$ цветов, значит, хотя бы один из цветов $1, 2, \ldots, \Delta(G)+1$ свободен и может быть применен. Отсюда следует еще одно неравенство для хроматического числа:

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

Fact (Теорема Брукса)

Вершины связного графа G, в котором все вершины имеют не больше $\Delta(G)$ соседей, можно раскрасить всего в $\Delta(G)$ цветов, за исключением двух случаев — полных графов и циклов нечётной длины, для которых требуется $\Delta(G)+1$ цветов.

Definition

Рёберной раскраской графа $G = (V, E)$ называется функция $f : E(G) \to C$, где $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ есть множество цветов.

Definition

Рёберной раскраской графа $G = (V, E)$ называется функция $f : E(G) \to C$, где $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ есть множество цветов.

Definition

Рёберная раскраска называется правильной, если любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены в разные цвета.

Definition

Рёберной раскраской графа $G = (V, E)$ называется функция $f : E(G) \to C$, где $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ есть множество цветов.

Definition

Рёберная раскраска называется **правильной**, если любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены в разные цвета.

Задача о рёберной раскраске состоит в нахождении правильной рёберной раскраски данного графа G в наименьшее число цветов.

Definition

Наименьшее число цветов, необходимых для правильной рёберной раскраски графа G, называется **хроматическим индексом** графа и обозначается $\chi'(G)$.

1. Граф K_n имеет хроматический индекс

1. Граф K_n имеет хроматический индекс $\chi'(K_n) = n - 1$, если n чётно

1. Граф K_n имеет хроматический индекс $\chi'(K_n) = n - 1$, если n чётно и $\chi'(K_n) = n$, если n нечётно

1. Граф K_n имеет хроматический индекс $\chi'(K_n) = n - 1$, если n чётно и $\chi'(K_n) = n$, если n нечётно

2. Граф C_n имеет хроматический индекс

Графы и алгоритмы - Лекция-10: Примеры

1. Граф K_n имеет хроматический индекс $\chi'(K_n) = n - 1$, если n чётно и $\chi'(K_n) = n$, если n нечётно

2. Граф C_n имеет хроматический индекс $\chi'(C_n) = 2$, если n чётно

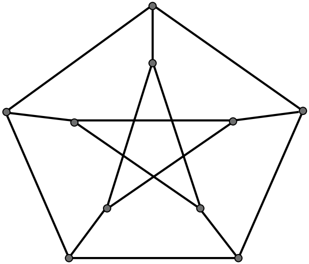
1. Граф K_n имеет хроматический индекс $\chi'(K_n) = n - 1$, если n чётно и $\chi'(K_n) = n$, если n нечётно

2. Граф C_n имеет хроматический индекс $\chi'(C_n) = 2$, если n чётно и $\chi'(C_n) = 3$, если n нечётно

1. Граф K_n имеет хроматический индекс $\chi'(K_n) = n - 1$, если n чётно и $\chi'(K_n) = n$, если n нечётно

2. Граф C_n имеет хроматический индекс $\chi'(C_n) = 2$, если n чётно и $\chi'(C_n) = 3$, если n нечётно

3. Граф Петерсена P имеет хроматический индекс

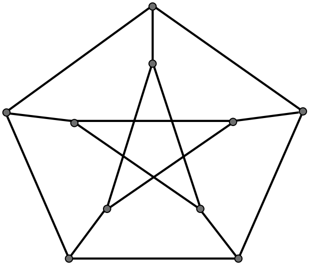


Графы и алгоритмы - Лекция-10: Примеры

1. Граф K_n имеет хроматический индекс $\chi'(K_n) = n - 1$, если n чётно и $\chi'(K_n) = n$, если n нечётно

2. Граф C_n имеет хроматический индекс $\chi'(C_n) = 2$, если n чётно и $\chi'(C_n) = 3$, если n нечётно

3. Граф Петерсена P имеет хроматический индекс



$\chi'(P) = 4$

Fact (Теорема Визинга, 1964)

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$