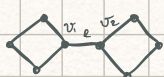
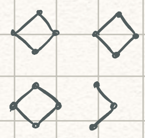
3.1. Связность, расстояния

Опр Граф $G=(V,E)$ наз. **связным**, если $\forall u,v \in V(G)$ $\exists\,(u,v)$ – путь.

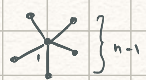
Опр **Компонентами связности** графа G явл-ся его связн. подграфы

Опр Вершина $v \in V(G)$ наз. **шарниром**, если $G \setminus \{v\}$ имеет большее число комп. связ-ти, чем G

Опр Ребро $e \in E(G)$ наз. **мостом** (**перешейком**), если $G \setminus \{e\}$ имеет большее число комп. связ-ти, чем G

Ex G:  $\to$ $G\setminus\{e\}$  $\cong C_4 \cup C_4 = 2C_4$

$\to$ $G\setminus\{v_1\} \cong G\setminus\{v_2\}$ $\cong C_4 + P_3$

Ex **Звезда** $K_{1,n-1}$ 

Факт 1: Пусть G – связн. Вершина $v \in V(G)$ явл-ся шарниром $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ для вершин $x,y \in V(G)$ всякий (x,y) путь проходит ч/з v.

Факт 2: Пусть G – связн. Ребро $e \in E(G)$ явл-ся перешейком $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ребро не принадлежит ни одному циклу в G

Опр Под **расстоянием** $d(u,v)$ м/у вершинами u,v – длина кратчайшего (u,v) пути

Расст-е явл-ся **метрикой**:
1) $d(u,v) \geq 0$
2) $d(u,v) = d(v,u)$
3) $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$

Метрические х-ки в графе

Опр **Эксцентриситет** вершины: $ecc(v) = \max\limits_{u \in V(G)} d(u,v)$

Опр Вершина наз. **центральной**, если у неё наименьший эксцентриситет.

Опр Вершина наз. **периферийной**, если у неё наибольший эксцентриситет.

Опр **Радиус** графа: $r(G) = \min\limits_{v} \max\limits_{u} d(u,v)$

Диаметр: $d(G) = \max\limits_{u} \max\limits_{v} d(u,v)$

3.2. Эйлеровы графы

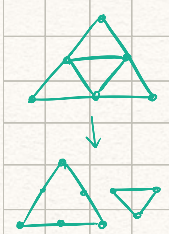
Опр Цикл, проход. по всем рёбрам связного графа $G=(V,E)$ только один раз наз. **эйлеровым циклом**

Опр Путь, проход. по всем рёбрам связного графа $G=(V,E)$ только один раз наз. **эйлеровым циклом**

Теорема:
Связный граф эйлеров $\Leftrightarrow \forall v \in V(G)$ $\deg(v)$ чётна
(можно предст. в виде эйл. цикла)

Д-во: $\Rightarrow$ При прохождении цикла ч/з какую-либо вершину исп-ся 2 ребра (вход/выход)

$\Leftarrow$ Пусть G - связн, $|V|>1$, $\forall v \in V(G)$ $\deg(v)$ чёт. $\Rightarrow \deg(v) \geq 2 \Rightarrow$ в G $\exists Z_1$ - цикл
↑ по посл. теор. прошлой лекции
Уберём все ребра Z_1 из G, останется G_1, у ктр все $\deg$ тоже чёт.
Делаем так, пока не останется пустой граф.
Получится сист. циклов $Z_1 Z_2 \dots Z_k$, причём $\forall v \in V(G)$ $\exists! Z_i \ni v$ $i=\overline{1,k}$
Теперь надо пок-ть, что из $Z_1 \dots Z_k$ можно составить один цикл:
G связн. $\Rightarrow$ хотя бы 1 из $Z_1 \dots Z_{k-1}$ имеет общую вершину с Z_k
Пусть это $Z_{k-1} = y_1 \dots y_q$, а $Z_k = x_1 \dots x_p$ и $x_i = y_j$ $\Rightarrow$
$Z'_{k-1} = x_1 x_2 \dots x_i y_{j+1} \dots y_q y_1 \dots y_j x_{i+1} \dots x_p$ — тоже цикл.
Так сведём все $Z_1 \dots Z_k$ к одному большому циклу $\Rightarrow G$ - эйлеров.



для мультиграфов тоже работает

Теорема:
В связн. графе G $\exists$ эйл. путь $\Leftrightarrow$ число $\{v \in V \mid \deg v$ нечёт.$\} \leq 2$

Д-во: Если это число $=0$, то $\exists$ эйл. цикл — он и есть искомый эйл. путь.
$=1$ число быть не может ($\sum \deg(v) = 2m(G) \Rightarrow$ число вершин неч. степени чётно)
$=2$: строим новый граф с доб-ем ребра, соед. эти вершины.
В нём все $\deg$ чёт $\Rightarrow \exists$ эйл. цикл. Сдвинем так, что новое ребро последнее
Удалим его обратно $\rightarrow$ останется путь, ура!

3.3. Деревья

Опр Связный граф T наз. **деревом**, если он не содержит циклов
$\Updownarrow$
Опр **Дерево** — ациклический связный граф

Опр **Лес** состоит из деревьев

Опр Вершина $\deg(v)=1$ наз. **терминальной/листом** (для T)/**висячей**

Теорема о характеризации деревьев
Граф $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$ явл. деревом $\Leftrightarrow$ вып. любые 2 из 3 усл-й:
1) связность
2) нет циклов
3) $m = n-1$

Д-во: (1) и (2) – опр-е

(1), (2) => (3): (индукция по числу вершин). База: $n=1$ ок

$n \geqslant 2$: есть хотя бы 1 лист. Если его убрать, у нас всё ещё дерево.

В новом дереве $n-1$ верш. и по пр. инд. $n-2$ ребра. Вернём лист => $n-1$ ребро в исх. дереве

(2), (3) => (1): Пусть его комп. связн. – $G_1, \dots, G_k$, где G_i сост. из n_i верш. $i = 1, \dots, k$

$\forall i$ G_i – дерево => $m_i = n_i - 1$ => $m = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k = n - 1$ => $k = 1$ => связный

(1), (3) => (2): Если цикл есть, то удалив любое ребро из него, получим связн. граф с меньшим числом рёбер. Делаем так, пока циклы не кончатся. Получили дерево, в ктр $m < n-1$ $\longrightarrow$ противоречие с (3).

Лемма:

Любое ребро в дереве – мост.

Д-во: очевидно из: Ребро – мост <=> в G нет прост. цикла, содерж. это ребро

А это верно, т.к. только при удал. из комп. св. G ребра, не сост. в цикле, число комп. связн-ти увеличится (иначе не изм. цикл $\setminus \{e\} \to$ путь)

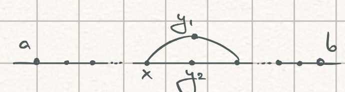
Теорема

G – дерево. Тогда вып-но:

1) в G $\forall u, v \in V(G)$ $\exists!$ (u,v) – путь
2) $G + e$ => появляется цикл
3) $G - e$ => G станет несвязным

Д-во: 1) $\exists$ из связности. ! (от противного):

Пусть м/у $a, b \in V(G)$ $\exists 2$ пути.



Если удалить (x, y_1), то м/у ними есть другой путь => (x, y_1) не мост, что противоречит с леммой. Получается единственный

2, 3) очевидны из 1.

Опр Центр графа – мн-во центральных вершин

Теорема:

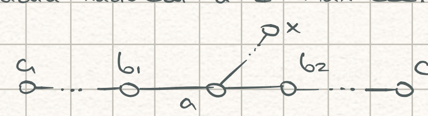
Центр дерева состоит из одной вершины или из 2х смежных вершин.

Д-во: (от противного)

Пусть $\exists$ c_1, c_2 – несмежн. центр. верш. На пути м/у ними найдём a с max ecc.

Пусть x – наиболее удал. от a в дереве верш.,

т.е. $d(a, x) = ecc(a)$.



Путь, соед. a и x не может прох. ч/з обе b_1 и b_2.

Пусть не прох. ч/з b_1 => единств. путь из b_1 в x прох. ч/з a

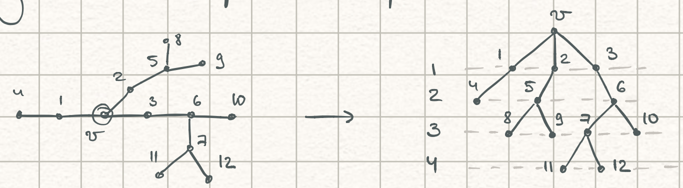
=> $d(b_1, x) > d(a, x)$ => $ecc(b_1) > ecc(a)$ $\longleftarrow$ противоречие с выбором a, если $b_1 \neq c_1$. Если же $b_1 = c_1$, тогда c_1 – не центральн. вершина.

=> Любые 2 центр. верш. смежны, причём > 2 таких быть не может, т.к. в дереве не м.б. 3х попарно смежн. вершин (цикл)

Корневые деревья:

Опр Метрическая сфера: $S_i(v) = \{u \in V(T) \mid d(v,u) = i\}$ радиуса i $\quad 1 \leq i \leq ecc(v)$

Ex Пусть v – **корень** дерева. Тогда:



Каркасы

Опр **Каркас** — остовное дерево, являющееся остовным подграфом связного графа G.

Ex G: