Константинова Елена Валентиновна

1. Основные понятия теории графов

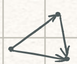
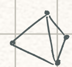
Опр Графом $G=(V,E)$ наз. пара мн-в: $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ — мн-во **вершин** (конечное!)
$E=\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\dots,\{v_n,v_n\}\}$ — мн-во **рёбер**

Опр Если пара вершин $\{v_1,v_2\}$ явл. упорядочен, то граф G наз. **ориентированным**

Опр Если пара вершин $\{v_1,v_2\}$ явл. неупор, то граф G наз. **неориентированным**

(нужно, чтобы выполн. для всех пар вершин)

Опр Если мн-во $E(G)$ содерж. одно и то же ребро неск. раз, то G явл. **мультиграфом**

Ex  ориент.  неориент.  ← петля  мультиграф

Опр Граф $G=(V,E)$ наз. **обыкновенным**, если он не содержит петель, кратных рёбер и явл. неориентированным.

Обозн: $V(G)$ – мн-во вершин гр. G, $|V(G)|=n, =n(G)$
$E(G)$ – мн-во рёбер гр. G, $|E(G)|=m, =m(G)$

Опр Мощность мн-ва вершин гр. G наз. **порядком**

Опр Если в гр. $G=(V,E)$ имеется $e=\{u,v\}$, то верш. u и v наз. **смежными**

Опр Пусть $e=\{u,v\}$, тогда вершины u и v наз. **инцидентными** ребру e

Опр **Степенью** вершины $v\in V(G)$ ($\deg(v)$) наз. число инцидентных ей рёбер

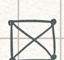
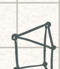
Опр Граф G наз. **регулярным**, если степени всех его вершин совпадают.
Более того, если $\forall v\in V(G)$ $\deg(v)=k$, то гр. G наз. **k-регулярным**

Ex  $k=0$ $G=(V,E)$, $V\neq\varnothing$, $E=\varnothing$ $k=1$  $k=2$ только циклы! (или их объед-я) 

Опр Вершина v наз. **изолированной**, если $\deg(v)=0$ в гр. $G=(V,E)$

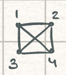
Опр Вершина v в гр. $G=(V,E)$ наз. **висячей (терминальной)**, если $\deg(v)=1$

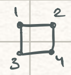
Опр 3-регулярн. граф наз. **кубическим**

Ex $k=3$  $n=4$ других с $n=4$ нет | для $n=5$ вообще нет | $n=6$:  ещё один придумать:

Опр Пусть $G=(V,E)$, тогда его **матрица смежности** $A(G)=(a_{ij})$, $1\le i,j\le n$, $n=|V(G)|$ задаётся так:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i\sim j \text{ (смежна)}\\ 0, & \text{если } i\nsim j\end{cases}$$

Ex 

: $A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

: $A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Σ всех 1ц одной строки – степень вершины

ура, симметричная!

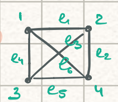
Св-ва м-цы смежности обыкн. графа порядка n:

1) $(n \times n)$
2) бинарная
3) симметричная
4) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = deg(j) \quad \forall j = 1, .., n$

Утв $\Sigma deg(v) = 2 \cdot m(G) \quad \forall v \in V(G)$

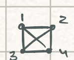
Опр Матрица инциидентности гр. $G = (V, E)$, $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ задаётся след. образом:

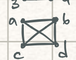
$B(G) = (b_{ij})$, $\begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{matrix}$ $\quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{верш. } i \text{ инцид. ребру } j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Ex 

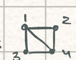
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

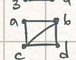
Опр 2 графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ наз. изоморфными, если на мн-ве их вершин $\exists$ вз.-одн. соотв-е, сохр. смежность

Ex G_1: 

G_2: 

$G_1 \cong G_2$: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

G_1: 

G_2: 

$G_1 \cong G_2$: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$