4. Двудольные и планарные графы

Двудольные графы

Опр Пусть $G=(V,E)$, где $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, $|V_1|+|V_2|=n$
$E=\{\{a,b\},\ a\in V_1,\ b\in V_2\}$, то
G – двудольный граф

Опр Если у двудольн. графа $E=\{\{a,b\}\ \forall a\in V_1,\ \forall b\in V_2\}$
то G – полный двудольный граф $(K_{p,q},\ |V_1|=p,\ |V_2|=q)$

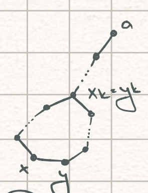
Q Как опр-ть двудольность?
A Выделить все разбиения, но грустно

Теорема структурная х-теризация двудольных графов
G – двудольный $\Leftrightarrow$ G не содержит нечётные циклы

Д-м кое-что покруче!

Теорема
След. утв-я для графа G равносильны:
1. G – двудольный
2. в G нет циклов неч. длины
3. в G нет простых циклов неч. длины

Д-во: $1\Rightarrow 2$
Пусть G – двудольн. с нктр разбиением, $C=x_1x_2\dots x_kx_1$ – цикл дл. k в G
$\forall i=1,\dots,k-1$ x_i и x_{i+1} смежны $\Rightarrow$ находятся в разных долях
т.е. одна доля – неч. индексы, а другая – чёт.
но x_k и x_1 тоже смежны $\Rightarrow$ должны быть в разных долях $\Rightarrow$ k – чёт.
$2\Rightarrow 3$ очевидно
$3\Rightarrow 1$ G – граф без прост. циклов неч. длины
Граф, в ктр кажд. комп. св-ти двуд. граф, тоже двудольный
Поэтому можем считать, что G – связн.
Фикс. $a\in V(G)$. Д-м, что $\forall$ смежных $x,y\in V(G)$: $|d(a,x)-d(a,y)|=1$
Предположим: $d(a,x)=d(a,y)=t$, тогда:
$x_1,\dots,x_t$ – кратч. путь из a в x
$y_1,\dots,y_t$ – кратч. путь из a в y
$x_1=y_1=a$ $x_t=x$, $y_t=y$
$\Rightarrow \exists k:$ $x_k=y_k$ и $x_i\neq y_i$ $\forall i>k$



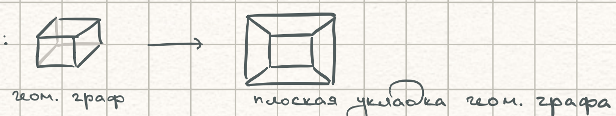
Но тогда $x_ky_{k+1}\dots x_ty_t\dots y_{k+1}y_k$ – прост. цикл длины $2(t-k)+1$ – неч.
против-е $\Rightarrow$ $d(a,x)\neq d(a,y)$
Возьмём $d(a,x)<d(a,y)$:
$x_1,\dots,x_t$ – кратч. из a в x $\Rightarrow$ $x_1\dots x_ty$ – кратч. из a в y
$\Rightarrow d(a,x)=d(a,y)+1$
Обозн. A – мн-во всех верш. таких, что р-е до них от a – чёт
B – мн-во верш. с неч. расст-ем до a
$\Rightarrow \forall e\in E(G)$ один конец окажется в A, другой в B $\Rightarrow$ двудольный

Опр $G \to A(G) \to$ с.в. и с.з. A. $\{\lambda_i^{mul}\}_{i=\overline{1,n}}$ — **спектр графа**, где mul – кратность

Теорема **спектральная х-теризация двудольн. графов.**
Граф двудольный $\Leftrightarrow$ его спектр симметр. отн. 0, т.е. если G имеет λ_i, то имеется и $-\lambda_i$ $i=\overline{1,n}$

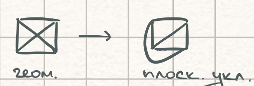
Планарные графы

Q_3:

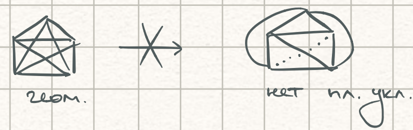


Опр Граф **плоский**, если его можно изобразить так, что ни одна пара рёбер не пересекается.

Ex K_4:



K_5:



Опр Граф **планарный**, если $\exists$ его плоская укладка.

Опр $G(V,E)$ – **обыкнов.**, если $|V|=n$, $|E|=m$.

Опр $G(V,E,F)$ – **плоский**, где $|V|=n$, $|E|=m$, $|F|=r$, где F – мн-во граней

Опр **Гранью** в плоск. графе наз. область, огр. замкнутым путём
(это, конечно, не совсем правда, но мы все понимаем, что такое грань)
(или режем ножницами по всем рёбрам)

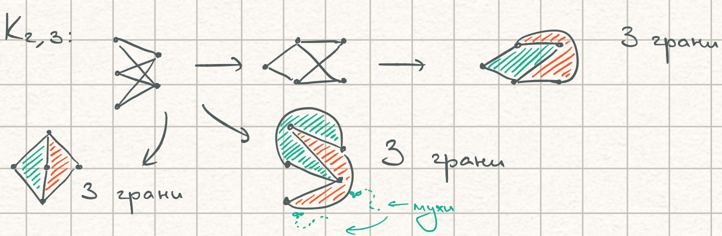
Утв F состоит из внутр. граней и одной внешней.

Q. Как связаны n, m и r в плоском графе

Ex $K_{3,3}$:

$\Rightarrow K_{3,3}$ не планарн.

$K_{2,3}$:



Теорема **Формула Эйлера**
Кол-во граней в любой плоск. укладке планарного графа, $|V|=n$, $|E|=m$, k – комп. св,
$|F| = r = m-n+k+1 = \gamma(G)+1$

Д-во: $k=1$ если нет циклов, то грань одна и $m=n-1$
Пусть есть хотя бы 1 цикл. Возьмём ее C (пр. цикл)
Тогда ее границе 2х граней (внутри и снаружи C), если удал. e, они сольются:
$G_1 = G \setminus e$ – плоск. и связн., число вершин то же, −1 ребро, −1 грань
$G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_r$ – связн. плоск. граф без циклов (т.е. дерево)
с $n-1$ ребром и 1 гранью $\Rightarrow$ удалили $r = m-n+1$ ребро
$\Rightarrow$ в исх. графе было $m-n+2$ грани $\Rightarrow \forall$ пл. связн. графа ф-ла верна
$k>1$ у кажд. комп. св-ти $m_i - n_i + 1$ внутр. граней. Суммируем:
$\left(\sum_i (m_i - n_i + 1)\right) + 1 = m-n+k+1$ ура!
одна внеш. грань

Следствие 1:

Если в планарн. графе $n \geq 3$: $m \leq 3(n-2)$

Д-во: Если нет цикл., то $m = n-k$ и нер-во вып-но при $n \geq 3$

Рассмотрим плоск. G с r гранями, в ктр есть циклы:

Пронумеруем грани от 1 до r. a_i – кол-во ребер у грани i.

Т.к. граница кажд. грани содерж. цикл: $a_i \geq 3$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{r} a_i \geq 3r$

С др. стороны, кажд. ребро $\in$ границе ≤ 2х граней $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{r} a_i \leq 2m$

$\Rightarrow 3r \leq 2m$. Применив ф-лу Эйлера, получим: $m \leq 3n - 3k - 3 \leq 3n - 6$

Следствие 2:

Если в планарн. графе $n \geq 3$ верш., m ребер и нет циклов длины 3, то $m \leq 2(n-2)$

Ex Для $K_{3,3}$ не вып-но $\Rightarrow$ не планарен