

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Цель лекции:

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Цель лекции:

рассмотреть три задачи, тесно связанные между собой:

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Цель лекции:

рассмотреть три задачи, тесно связанные между собой:

- задача о независимом множестве;

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Цель лекции:

рассмотреть три задачи, тесно связанные между собой:

- задача о независимом множестве;
- задача о поиске клики;

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Цель лекции:

рассмотреть три задачи, тесно связанные между собой:

- задача о независимом множестве;
- задача о поиске клики;
- задача о вершинном покрытии.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Независимым множеством вершин графа называется любое множество попарно не смежных вершин, т.е. множество вершин, порождающее пустой подграф.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Независимым множеством вершин графа называется любое множество попарно не смежных вершин, т.е. множество вершин, порождающее пустой подграф.

Definition

Независимое множество называется наибольшим, если оно содержит наибольшее количество вершин.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Независимым множеством вершин графа называется любое множество попарно не смежных вершин, т.е. множество вершин, порождающее пустой подграф.

Definition

Независимое множество называется наибольшим, если оно содержит наибольшее количество вершин.

Definition

Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G обозначается через $\alpha(G)$ и называется числом независимости графа.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Независимым множеством вершин графа называется любое множество попарно не смежных вершин, т.е. множество вершин, порождающее пустой подграф.

Definition

Независимое множество называется наибольшим, если оно содержит наибольшее количество вершин.

Definition

Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G обозначается через $\alpha(G)$ и называется числом независимости графа.

Задача о независимом множестве состоит в нахождении **наибольшего независимого множества**.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Кликой графа называется множество вершин, порождающее полный подграф, т.е. множество вершин, каждые две из которых смежны.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Кликой графа называется множество вершин, порождающее полный подграф, т.е. множество вершин, каждые две из которых смежны.

Definition

Число вершин в клике наибольшего размера называется кликовым числом графа G и обозначается через $\omega(G)$.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Кликой графа называется множество вершин, порождающее полный подграф, т.е. множество вершин, каждые две из которых смежны.

Definition

Число вершин в клике наибольшего размера называется кликовым числом графа G и обозначается через $\omega(G)$.

Задача о независимом множестве преобразуется в задачу о клике и, наоборот, переходом от графа G к его дополнению \overline{G} .

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Кликой графа называется множество вершин, порождающее полный подграф, т.е. множество вершин, каждые две из которых смежны.

Definition

Число вершин в клике наибольшего размера называется кликовым числом графа G и обозначается через $\omega(G)$.

Задача о независимом множестве преобразуется в задачу о клике и, наоборот, переходом от графа G к его дополнению \overline{G} .

При этом, $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Вершинное покрытие графа – это такое множество вершин, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной из этих вершин.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Вершинное покрытие графа – это такое множество вершин, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной из этих вершин.

Definition

Наименьшее число вершин в вершинном покрытии графа G обозначается через $\beta(G)$ и называется числом вершинного покрытия графа.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Definition

Вершинное покрытие графа – это такое множество вершин, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной из этих вершин.

Definition

Наименьшее число вершин в вершинном покрытии графа G обозначается через $\beta(G)$ и называется числом вершинного покрытия графа.

Задача о вершинном покрытии состоит в нахождении **наименьшего вершинного покрытия**.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Между задачами о независимом множестве и о вершинном покрытии имеется следующая связь:

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Между задачами о независимом множестве и о вершинном покрытии имеется следующая связь:

$\alpha(G) + \beta(G) = n$ для любого графа G с n вершинами.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Между задачами о независимом множестве и о вершинном покрытии имеется следующая связь:

$\alpha(G) + \beta(G) = n$ для любого графа G с n вершинами.

Эта связь следует из следующего факта.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Между задачами о независимом множестве и о вершинном покрытии имеется следующая связь:

$\alpha(G) + \beta(G) = n$ для любого графа G с n вершинами.

Эта связь следует из следующего факта.

Fact

Подмножество U множества вершин $V(G)$ графа $G = (V, E)$ является вершинным покрытием тогда и только тогда, когда множество $\bar{U} = V(G) \setminus U$ является независимым множеством.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Таким образом:

- все три задачи тесно связаны друг с другом;

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Таким образом:

- все три задачи тесно связаны друг с другом;
- все три задачи NP-полны.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Таким образом:

- все три задачи тесно связаны друг с другом;
- все три задачи NP-полны.

Эффективные алгоритмы решения таких задач неизвестны.

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Таким образом:

- все три задачи тесно связаны друг с другом;
- все три задачи NP-полны.

Эффективные алгоритмы решения таких задач неизвестны.

Мы рассмотрим переборные алгоритмы, в частности:

- стратегию перебора для задачи о независимом множестве;

Графы и алгоритмы - Лекция-9: Независимые множества, клики, вершинные покрытия

Таким образом:

- все три задачи тесно связаны друг с другом;
- все три задачи NP-полны.

Эффективные алгоритмы решения таких задач неизвестны.

Мы рассмотрим переборные алгоритмы, в частности:

- стратегию перебора для задачи о независимом множестве;
- перебор максимальных независимых множеств.