2.1. Важнейшие классы графов и их обозначения

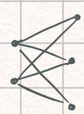
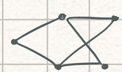
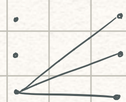
Опр Граф **полный** на n вершинах, если у него имеются рёбра м/у всеми парами вершин. (Об.: K_n)

Ex K_1: • K_2:  K_3:  K_4:  $|V| = n$ $|E| = \binom{n}{2}$ $deg(v) = n-1 \Rightarrow$
K_n явл. $(n-1)$ – регулярн.

Опр Граф **пустой** на n верш, если у него нет ни одного ребра. (Об: O_n)

Опр Пусть $\Gamma = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, тогда Γ наз. **двудольным**, если в Γ имеются рёбра вида $\{v_1, v_2\}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, но нет рёбер вида

Опр Γ наз. **полным двудольным**, если $E = \{\{v_1, v_2\} \mid \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$
($K_{p,q}$ $p = |V_1|$, $q = |V_2|$)

Ex $K_{2,3}$:  $\cong$  $K_{3,3}$: 

Опр Граф на n вершинах, в ктр имеются рёбра вида $E = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}$ наз. **путь** (P_n)

Опр **Цикл** на n вершинах — замкнутый путь P_n, т.е. $C_n = (V, E \cup \{1, n\})$

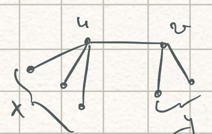
2.2. Операции на графах (локальные, алгебраические (глобальные))

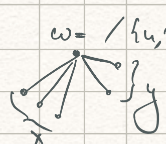
Локальные:

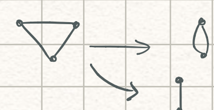
- удаление / добавление ребра ($G \setminus e$ и $G + e$)
- удаление / добавление вершин ($G \setminus v$ и $G + v$)
  $G \setminus v$: Пусть $G = (V, E)$, тогда $G \setminus v = (V \setminus v, E \setminus \{\{v, x\} \mid \forall x \in V\})$

  Зам. $K_n \setminus v \cong K_{n-1}$

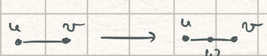
- стягивание ребра:
  (наследует все св-ва смежности)





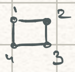
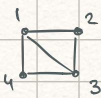


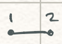
- подразбиение ребра

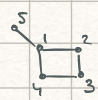


Алгебраические (глобальные):

- объединение графов: $G_1 = (V_1, E_1)$ $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
  $G = G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
- пересеч-е графов: $G = G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$

Ex G_1:  $\cong C_4$ G_2:  $\cong K_2$ $\longrightarrow$ $G_1 \cup G_2$:  $G_1 \cap G_2$: 

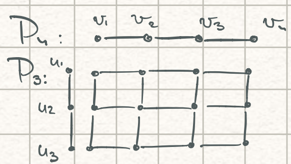
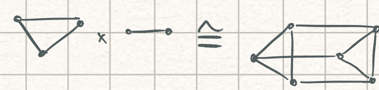
 $\longrightarrow$ $G_1 \cup G_2 \cong G_1$ $G_1 \cap G_2 \cong G_2$

Зам: добавл-е ребра / удал-е верш. VS объед-е / пересеч-е графов  $\cong C_4 \cup \{1,5\}$

° сложение графов $G = G_1 + G_2$, где $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

Ex $K_4 + 3K_2$: 

° декартово произв-е графов $G = (V, E)$ $H = (U, F)$, тогда $\Gamma = G \times H$, где
$V(\Gamma) = \{\{v, u\}\ \forall v \in V\ u \in U\}$
$E(\Gamma) = \{\{v_1, u_1\}, \{v_2, u_2\}\}$, где $v_1 = v_2$, $u_1 \sim u_2$ в H; $v_1 \sim v_2$ в G, $u_1 = u_2$

Ex $G = P_4$ $H = P_3$  

2.3. Подграфы

Опр Пусть $G = (V, E)$, $H = (U, F)$, где $U \in V$, $E \subseteq F$, тогда H — подграф G

Опр Если $V = U$, то H — остовный подграф G

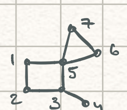
Опр Пусть $G = (V, E)$, $U \subset V$, тогда $H = \langle U \rangle$ индуцируется на мн-ве верш. U, если $H = (U, E_n)$ $E_n = \{\{x, y\} \mid x, y \in U,\ \{x, y\} \in E\}$

2.4. Маршруты в графе

Опр Маршрутом в графе наз. посл-ть вершин $(v_1, v_2, \dots, v_k)$, где $\forall i = \overline{1,k}$: $\{v_i, v_{i+1}\}$ явл. ребром

Опр Маршрут, в ктр все рёбра разл., наз. путём

Опр Путь, в ктр все вершины разл., наз. простым путём

Ex 

123432156 – маршрут
12356751 – путь
123567 – пр. путь
1235651 – замкн. маршр.
12356751 – цикл
12351 – прост. цикл

Опр Маршрут наз. замкнутым, если $v_1 = v_k$

Опр Замкн. путь, в ктр все рёбра разл., наз. циклом

Опр Цикл, в ктр все верш. разл., наз. простым циклом

Теорема

В любом маршруте, соед. 2 вершины, содерж. простой путь, соед. те же верш..

Д-во: $G(V,E)$ $x_1, \dots, x_n$ если $\forall i \neq j$ $x_i \neq x_j$ => уже прост. путь

Иначе пусть $x_i = x_j$, $i<j$. Тогда удалим часть маршрута с x_{i+1} по x_j, т.е.

$x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_j x_{j+1} \dots x_n \longrightarrow x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{j+1} \dots x_n$. Повторять, пока совп. вершин не останется и, ура, получим простой путь.

Теорема

В любом цикле, содерж. ребра, содерж. простой цикл, содерж. те же рёбра

Д-во: аналогично д-ву пред. теоремы

Теорема

Если в графе степень каждой вершины не меньше 2х, то в нём есть цикл

Д-во: Найдём в графе прост. путь наибольшей длины (пусть $x_1 x_2 \dots x_n$)

x_n смежна с x_{n-1}, но т.к. $\deg x_n \geq 2$, то она смежна ещё хотя бы с одной перем-й (пусть y). Если $y \neq x_i$ $\forall i < n-1$, то $\exists$ путь большей длины

=> $y = x_i$, $i < n-1$ => $x_1 \dots x_{n-1} x_n x_i$ — цикл