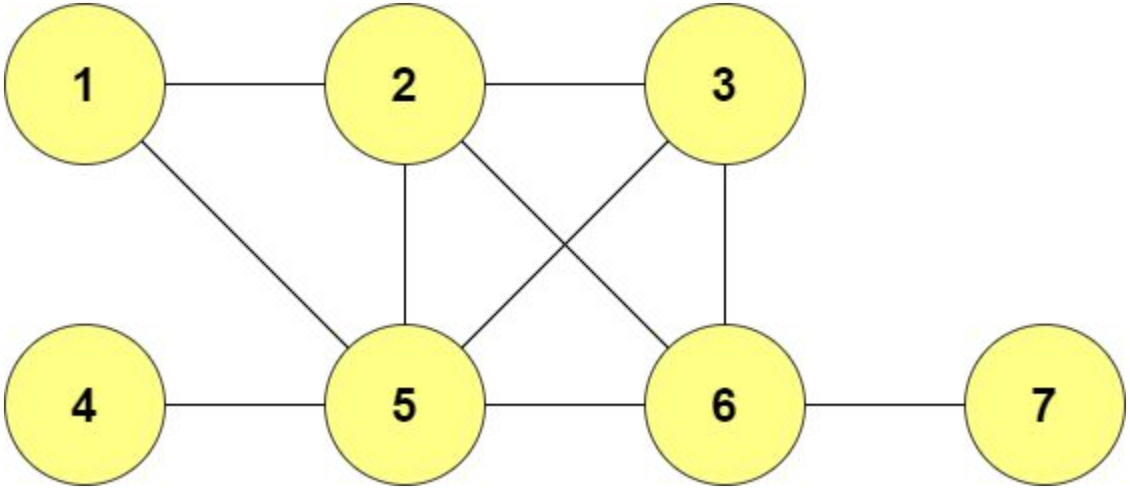
Рационализация переборных алгоритмов

Рационализация поиска наибольшего независимого множества

Известны различные приемы сокращения перебора при использовании описанной стратегии исчерпывающего поиска. Один из них основан на следующем наблюдении. Допустим, в графе G, для которого нужно найти наибольшее независимое множество, имеются две вершины a и b, такие, что каждая вершина, отличная от b и смежная с a вершиной, смежна и с вершиной b. Иначе говоря, $V(a) - \{b\} \subseteq V(b)$. Будем говорить в этом случае, что вершина b поглощает вершину a. Если при этом вершины a и b смежны, то скажем, что вершина b смежно поглощает вершину a. Вершину b в этом случае назовем **смежно поглощающей**.

Например, в графе, вершина 2 смежно поглощает вершины 1 и 3. Вершины 5 и 6 в этом графе тоже являются смежно поглощающими.

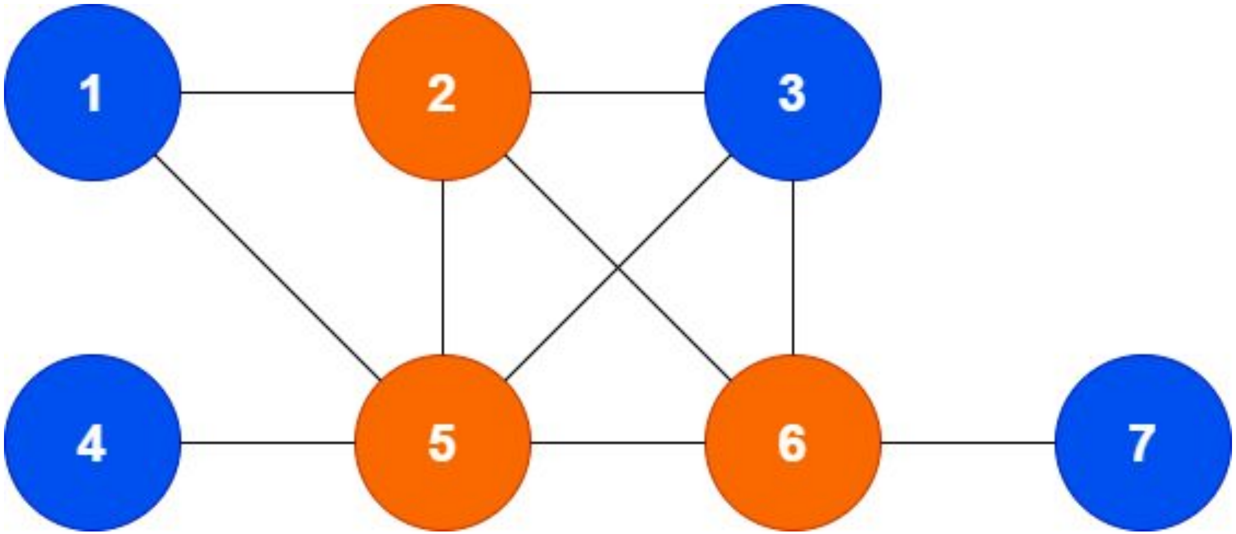


Теорема 1

Если вершина b является смежно поглощающей в графе G, то $\alpha(G - b) = \alpha(G)$.

Доказательство:

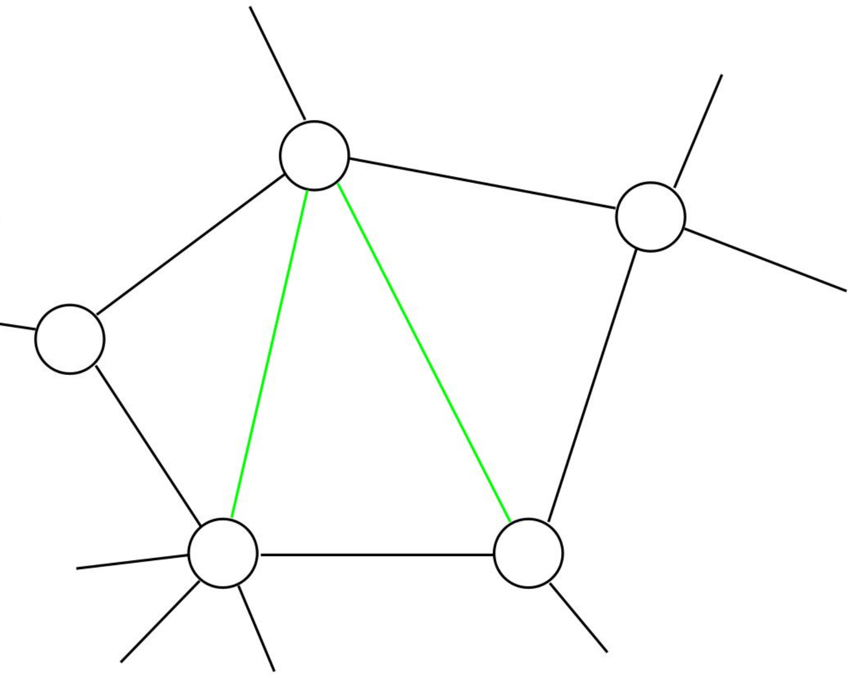
Допустим, вершина b смежно поглощает вершину a в графе G.
Пусть X - наибольшее независимое множество графа G.
Если X не содержит вершину b, то оно является наибольшим независимым множеством и в графе $G - b$, так что в этом случае $\alpha(G - b) = \alpha(G)$.
Предположим, что множество X содержит вершину b. Тогда ни одна вершина из множества $V(b)$ не принадлежит X. Значит, X не содержит вершину a и ни одну вершину из множества $V(a)$.
Но тогда множество $(X - \{b\}) \cup \{a\}$ тоже будет независимым, причем оно целиком содержится в графе $G - b$, а число элементов в нем такое же, как в множестве X. Значит, и в этом случае $\alpha(G - b) = \alpha(G)$.


1
2
3
4
5
6
7

Итак, если мы удалим из графа смежно поглощающую вершину b, то получим граф с тем же числом независимости. Так как новый граф является порожденным подграфом исходного графа G, то каждое наибольшее независимое множество нового графа будет наибольшим независимым множеством исходного. Этот прием называется "сжатием по включению". Исследование применимости и применение операции сжатия по включению к каждому встречающемуся подграфу требуют, конечно, дополнительных расходов времени (каких?), но могут привести к существенному сокращению дерева подзадач. Для некоторых графов задача о независимом множестве может быть решена с помощью одних только сжатий по включению. Таков, например, граф pK_2, и вообще любой лес. Действительно, любая вершина, смежная с листом, поглощает этот лист. Рассмотрим более широкий класс графов, для которых этот прием эффективен.

Хордальные графы

Граф называется хордальным, если в нем нет порожденных простых циклов длины $\geqslant 4$ Иначе говоря, в хордальном графе для каждого простого цикла длины 4 или больше имеется хотя бы одна хорда - ребро, не принадлежащее циклу, но соединяющее две вершины цикла.

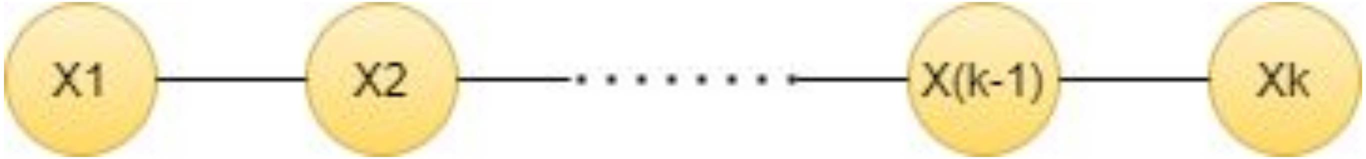


Теорема 2

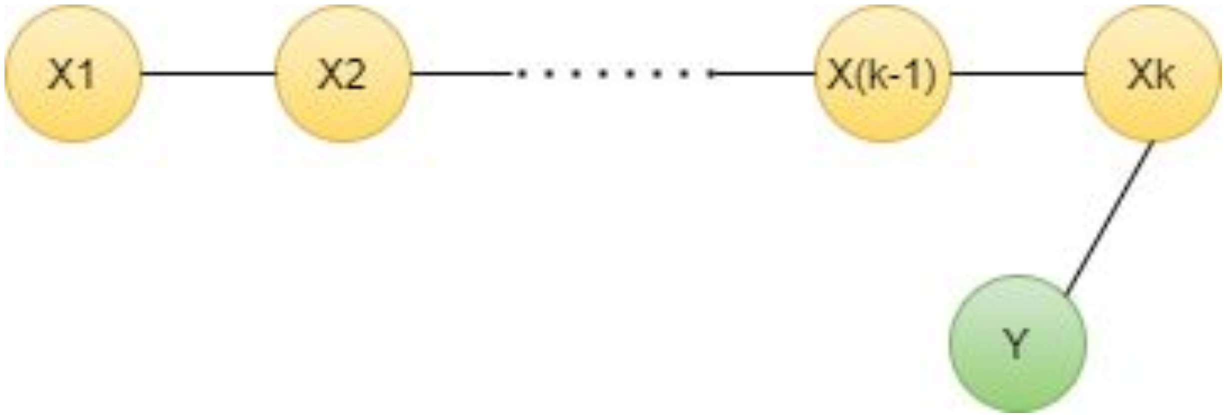
В любом непустом хордальном графе имеется смежно поглощающая вершина.

Доказательство:

Пусть G - непустой граф, в котором нет смежно поглощающих вершин.
Докажем, что G - не хордальный.
Рассмотрим в нем простой путь $P = x_1, x_2 \ldots x_k$ наибольшей длины, не имеющий хорд, то есть ребер, соединяющих две вершины пути и не принадлежащих пути. Так как граф непустой, то $k \geq 2$.

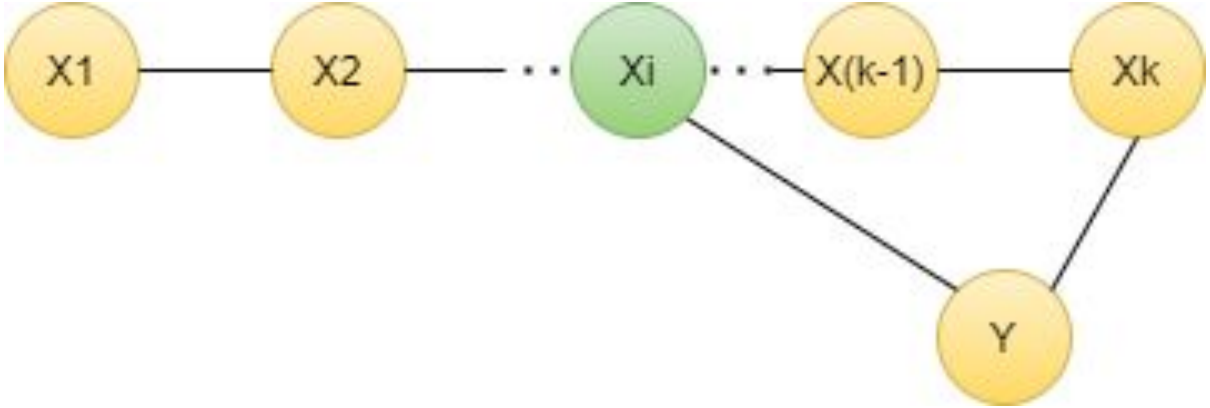


Рассмотрим вершину x_k. Так как она не поглощает вершину x_{k-1}, то существует вершина $y \neq x_{k-1}$, смежная с вершиной x_k, но не смежная с x_{k-1}. Вершина y не принадлежит пути P так как иначе ребро (x_k, y) было бы хордой этого пути. Таким образом, последовательность $P' = x_1, x_2 \dots x_k, y$ является простым путем.



Но длина этого пути больше, чем длина пути P, поэтому, в силу выбора пути P, у пути P' должна существовать хорда. Такой хордой может быть только ребро вида (y, x_k), где $i < k-2$.

Пусть i - наибольшее, при котором ребро (y, x_i) является хордой пути P'. Тогда последовательность $y, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k, y$ является циклом без хорд длины не менее 4.



Итак, для хордального графа наибольшее независимое множество можно найти с помощью одних только сжатий по включению. Нужно только находить смежно поглощающие вершины и удалять их из графа до тех пор, пока оставшийся граф не станет пустым. Множество оставшихся вершин и является наибольшим независимым множеством.