таким образом

$$\int\limits_{\omega_t} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\omega = \int\limits_{\omega_t} (\rho\vec{f} + div P) d\omega$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = div P + \rho\vec{f}$$

ДИФФ-ЫЕ УР-ИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\vec{v} = 0 & \text{ЗСМ} \\ \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = div P + \rho\vec{f} & \text{ЗСИ} \end{cases}$$

* ρ, v, P – искомые функции

Л№2 15.09.2020

Закон сохранения момента импульса

(у нас не используется)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho(\vec{x}\times\vec{v}) d\omega = \int\limits_{\omega_t} \rho(\vec{x}\times\vec{f}) d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t} (\vec{x}\times\vec{p_n}) d\sigma$$

=> можно показать, что P – симметричен ($P_{ij} = P_{ji}$) ← тензор нап. напряжений

Законы сохранение для фиксированного объема (эйлерова) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} \rho\, d\Omega = -\int\limits_{\partial\Omega} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n}) d\Sigma$$

эл. объем; внешняя нормаль; поток ч/з границу

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} \rho\vec{v}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \rho\vec{f} d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \vec{p_n} d\Sigma - \int\limits_{\partial\Omega} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n}) d\Sigma$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} \rho(\vec{x}\times\vec{v}) d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \rho(\vec{x}\times\vec{f}) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} (\vec{x}\times\vec{p_n}) d\Sigma - \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\vec{x}\times\vec{v})(\vec{v}\cdot\vec{n}) d\Sigma$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

справедливы для любой среды

ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ:

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}^{*}\right) \quad \leftarrow \text{сопряжение}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Тейлор; разложим на симм. и антисимм. части

$$\vec{v}(\vec{x}+\Delta\vec{x}) = \vec{v}(x) + \left.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right|_{\vec{x}} \cdot \Delta\vec{x} + O(\Delta\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}^{*}\right)\Delta\vec{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} - \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}^{*}\right)\Delta\vec{x} + O(\Delta\vec{x}) \ominus$$

$$\ominus \vec{v} + D\cdot\Delta\vec{x} + \mathcal{E}\,\Delta\vec{x} + O(\Delta\vec{x})$$

$$\mathcal{E}\cdot\Delta\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\times\Delta\vec{x}$$

$$\vec{\omega} = rot\,\vec{v} = \nabla\times\vec{v}$$

отвечает за поворот среды

Жидкости и газы – среды, в ρ P зависит от скорости деформации ($P = P(D, \vec{x}, t, \rho, T, \ldots)$) другие термодин. переменные, если они будут

далее будем рассматривать сплошные среды с аксиомами Стокса

Аксиомы Стокса

(1) Среда однородна: P не зависит явно от $(\vec{x}, t)$

(2) Изотропность: $\forall$ ортогональной Q: $QPQ^* = P(QPQ^*)$

\+ (3) Покоящаяся среда идеальна: $P = -pI$

Ньютоновские жидкости

(4) P линейно зависит от D

=> $P = (-p + \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{v})I + 2\mu D$

след тензора D

λ, μ – коэффициенты вязкости

μ – коэф-т динамич-ой вязкости

λ – второй коэф-т вязкости

Будем рассматривать однородные несжимаемые жидкости: $\rho = const$

Из закона сохранения массы $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v} = 0}$ УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ => $P = -pI$

давление

$$\mathrm{div}\,P = \mathrm{div}(-pI + 2\mu D) = -\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \mu\,\mathrm{div}\,2D$$

пр. по x_j коорд.

$$\mathrm{div}\,2D = \partial_j(\partial_j v_i + \partial_i v_j) = \partial_j^2 v_i + \partial_i \partial_j v_j = \Delta\vec{v} + \nabla \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{=0} \qquad \Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

0 (жидкость несжимаема)

$$\mathrm{div}\,P = -\nabla p + \mu\Delta\vec{v}$$

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f} \\ \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \end{cases}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – коэф-т кинематической вязкости

$[\mu] = Па \cdot с$, $[\nu] = м^2/с$

$\nu = 0$ – ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \\ \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}, p : (\vec{x}, t)$$

Начальные условия:

$\vec{v}\big|_{t=t_0} = \vec{v}_0(\vec{x})$, условие согласования: $\mathrm{div}\,\vec{v}_0 = 0$

Граничные условия:

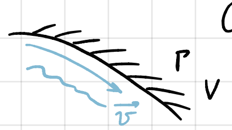
(1) Твердая стенка

(2) Граница раздела двух несмешив-ся жидкостей

частный случай

(3) Свободная поверхность – граница раздела жидкость – газ

1) Г.У. на твердой стенке: а) кинематическое условие:



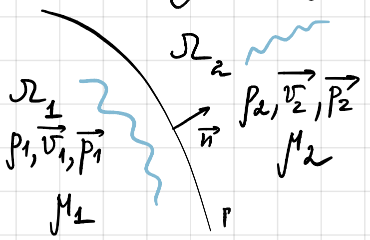
$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n} \text{ на } \Gamma}$ УСЛОВИЯ НЕПРОТЕКАНИЯ

$\vec{v}$ – скорость жидкости

$\vec{V}$ – скорость стенки

$\vec{n}$ – нормаль к границе

2) Граница раздела двух несмеш. жидкостей:



а) кинематическое условие:

$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} \,\Big|_\Gamma}$ для вязкой и для идеальной жидк.

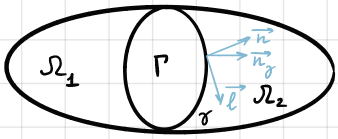
$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{\tau} = \vec{v}_2 \cdot \vec{\tau} \,\Big|_\Gamma}$ — для вязкой жидкости

касательный вектор

Для вязкой жидкости условия прилипания

$\boxed{\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \,\Big|_\Gamma}$

б) динамическое условие



$\vec{\ell}$ – касат. к $\gamma = \partial\Gamma$

$\vec{n}$ – нормаль к Γ

$\vec{n}_\gamma$ – нормаль с γ в касат. пл. к Γ

закон сохранения импульса