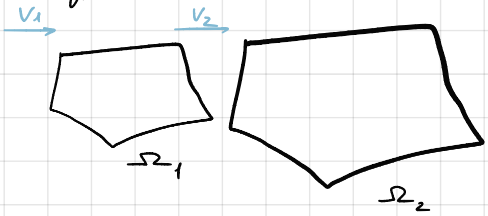
Гидродинамическое подобие

Л№4 29.09.2020



- Пусть $L, V, T=\frac{L}{V}, g, \rho, \nu$ – характерные масштабы течения

Вводим безразмерные переменные (штрих) $\vec{x}=L\vec{x}'$, $\vec{v}=V\vec{v}'$, $t=Tt'=\frac{L}{V}t'$, $f=gf'$, $p=\rho V^3 p'$

ур-ие Навье–Стокса

$$\begin{cases}\vec{v}_t+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{f}+\nu\Delta\vec{v}\\ \operatorname{div}\vec{v}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} V\frac{V}{L}\vec{v}'_{t'}+\frac{V}{L}(\vec{v}'\cdot\nabla')\vec{v}'=-\frac{1}{\rho}\frac{\rho V^2}{L}\nabla' p'+gf'+\nu\frac{V}{L^2}\Delta'\vec{v}'+gf' \\ \frac{V}{L}\operatorname{div}'\vec{v}'=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{v}'_{t'}+(\vec{v}'\cdot\nabla')\vec{v}'=-\nabla' p'+\frac{\nu}{VL}\Delta'\vec{v}'+\frac{gL}{V^2}f' \\ \operatorname{div}\vec{v}'=0\end{cases}$$

Re число Рейнольдса $=\frac{VL}{\nu}$ $\quad Fr$ число Фруда $=\frac{V^2}{L}$

уравнения Навье–Стокса в безразмерных переменных

$$\boxed{\begin{cases}\vec{v}_t+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\nabla p+\frac{1}{Re}\Delta\vec{v}+\frac{1}{Fr}\vec{f}\\ \operatorname{div}\vec{v}=0\end{cases}}$$

$\Downarrow$

Критерий подобия

Пусть два течения вязкой несжимаемой жидкости опр-ся характерными параметрами $L_i, V_i, g_i, \rho_i, \nu_i$ $(i=1,2)$. Тогда эти течения около геометрически подобных тел явл. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ ПОДОБНЫМИ, если $Re_1=Re_2$, $Fr_1=Fr_2$

$[Re]=\left[\frac{VL}{\nu}\right]=\frac{м}{с}\cdot\frac{1}{м^2/с}=1$

$[Fr]=\frac{м^2}{с^2}\cdot\frac{1}{\frac{м}{с^2}\cdot м}=1$

Условия равновесия жидкостей

1) $\vec{v}=0$ жидкость покоится

Из уравнения импульсов: $0=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{f} \Rightarrow \vec{f}=\frac{1}{\rho}\nabla p$ (сила д.б. потенциальной) $\vec{f}=-\nabla\Pi$ потенциал

Тогда: $-\frac{1}{\rho}\nabla p=-\nabla\Pi \Rightarrow p=-\rho\Pi+const$

Если $\vec{f}$ – сила тяжести $\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$: $\Pi=gz$ $\quad p=-\rho gz+const$ – гидростатическое распределение давления

Если $\vec{f}=0$: $p=const$ – закон Паскаля

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Вихревое движение

Движение наз-ся ВИХРЕВЫМ, если $\vec{\omega}=\operatorname{rot}v\neq 0$

Движение наз-ся БЕЗВИХРЕВЫМ, если $\vec{\omega}=\operatorname{rot}\vec{v}=0$

Движение наз-ся ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ, если $\exists\varphi$ – потенциал поля, т.ч. $\vec{v}=\nabla\varphi$

Если движение безвихревое, то оно потенциально и наоборот. $\vec{\omega}=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\nabla\varphi$

ВЕКТОРНАЯ ЛИНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ – кривая, касат. к $\int$ парал-ны векторному полю.

Векторные линии поля скорости – линии тока

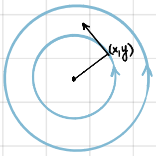
Векторные линии поля вихря – вихревые линии

Линии тока: $\boxed{\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3}}$

Вихревые линии: $\boxed{\frac{dx_1}{\omega_1}=\frac{dx_2}{\omega_2}=\frac{dx_3}{\omega_3}}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ – модуль радиус вектора

примеры твёрдотельное вращение Ω



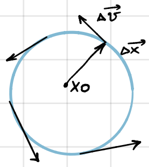
$|\vec v|=\Omega r$

$\vec v=(\overset{u}{-\Omega y},\overset{v}{\Omega x},0)$

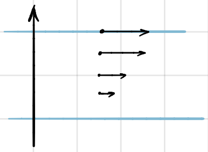
$\vec\omega=(0,0,\omega)$ $\quad\omega=v_x-u_y=2\Omega$

$\vec v=(-\Omega y,\Omega x)$ $\qquad\mathcal D=0$

$\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}=\begin{pmatrix}0&-\Omega\\\Omega&0\end{pmatrix}=\mathcal E$ $\quad\Delta\vec v=\vec v-\vec v(x_0)=\mathcal E\Delta\vec x=\Omega\begin{pmatrix}-\Delta y\\\Delta x\end{pmatrix}$



сдвиговое течение



$\vec v=(y,0,0)$

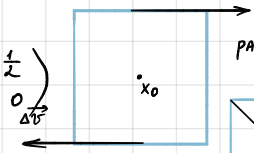
$\vec\omega=(0,0,\omega)$

$\omega=v_x-u_y=-1$

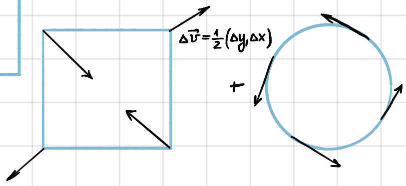
$\vec v=(y,0)$

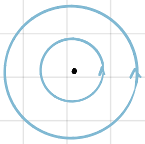
$\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac12\\\frac12&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\frac12\\-\frac12&0\end{pmatrix}$

$\Delta\vec v=\begin{pmatrix}\Delta y\\0\end{pmatrix}$



раскладн-е на 2



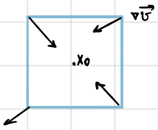


$|\vec v|=\frac1r$ $\quad\vec v=\left(-\frac{y}{r^2},\frac{x}{r^2},0\right)$

$\omega=v_x-u_y=\frac1{r^2}-\frac{2x^2}{r^4}+\frac1{r^2}-\frac{2y^2}{r^4}=0$

$|\vec v|=\frac1r$ $\quad\vec v=\left(-\frac{y}{r^2},\frac{x}{r^3}\right)$

$\frac{\partial\vec v}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{2xy}{r^4}&-\frac1{r^2}+\frac{2y^2}{r^4}\\\frac1{r^2}-\frac{2x^2}{r^4}&\frac{2xy}{r^4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2xy}{r^4}&\frac{y^2-x^2}{r^4}\\\frac{y^2-x^2}{r^4}&\frac{2xy}{r^4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$



$\vec x_0=(1,0)$

$\mathcal D|_{x_0}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ $\quad\Delta\vec v=(-\Delta y,-\Delta x)$

$\vec v(\vec x)=\vec v(\vec x_0)+\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}\Big|_{x_0}\Delta\vec x+o(\Delta\vec x)=$

$=\vec v(x_0)+\mathcal D|_{x_0}\Delta\vec x+\mathcal E\Delta\vec x+o(\Delta\vec x)$

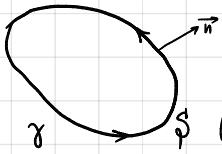
$\mathcal D=\frac12\left(\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}+\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}^*\right)$ $\quad\mathcal E=\frac12\left(\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}-\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}^*\right)$ $\quad\vec v=(u,v,0)$

$\frac{\partial\vec v}{\partial\vec x}=\begin{pmatrix}u_x&u_y&0\\v_x&v_y&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\mathcal D=\begin{pmatrix}u_x&\frac12(u_y+v_x)&0\\\frac12(u_y+v_x)&v_y&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad\mathcal E=\begin{pmatrix}0&\overset{\omega}{\frac{u_y-v_x}{2}}&0\\\overset{-\omega}{\frac{v_x-u_y}{2}}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac12\begin{pmatrix}0&-\omega&0\\\omega&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Кинематические и динамические св-ва вихрей

ЦИРКУЛЯЦИЕЙ ВЕКТОРА СКОРОСТИ по замкнутому контуру γ наз-ся $\Gamma=\oint_\gamma\vec v\cdot d\vec x$

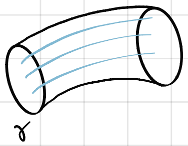


Th Стокса

$$\boxed{\Gamma=\oint_\gamma\vec v\cdot d\vec x=\iint_S \mathrm{rot}\,\vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_S\vec\omega\cdot\vec n\,dS}$$

(характеризует завихренность движения)

ВИХРЕВАЯ ТРУБКА – область, ограниченная поверх-ю, образованной вихревыми линиями, проходящими ч/з некоторый замкнутый контур



ИНТЕНСИВНОСТЬ ВИХРЕВОЙ ТРУБКИ: $\Gamma=\oint_\gamma\vec v\,d\vec x=\iint_S\vec\omega\cdot\vec n\,dS$