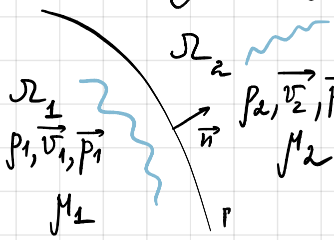
2) Граница раздела двух несмеш. жидкостей:



а) кинематическое условие:

$\boxed{\vec v_1\cdot\vec n = \vec v_2\cdot\vec n\,\big|_\Gamma}$ для вязкой и для идеальной жидк.

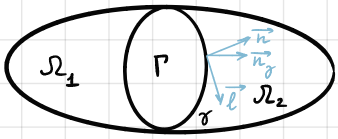
$\boxed{\vec v_1\cdot\vec\tau = \vec v_2\cdot\vec\tau\,\big|_\Gamma}$ — для вязкой жидкости

касательный вектор

Для вязкой жидкости условия прилипания

$\boxed{\vec v_1=\vec v_2\,\big|_\Gamma}$

б) динамическое условие



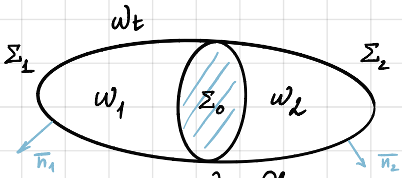
$\vec l$ — касат к $\gamma=\partial\Gamma$

$\vec n$ — нормаль к Γ

$\vec n_\gamma$ — нормаль с γ в касат. пл. к Γ

закон сохранение импульса

Л№3 22.09.2020



граница раздела двух несмеш. жидкостей

$\omega_t=\omega_1\cup\omega_2$

$\partial\omega_t=\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$

$\partial\omega_1=\Sigma_1\cup\Sigma_0$

$\partial\omega_2=\Sigma_2\cup\Sigma_0$

Закон сохранения импульса для ω_t:

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}\rho\vec v\,d\omega=\int_{\omega_t}\rho\vec f\,d\omega+\int_{\partial\omega_t}\vec p_n\,d\Sigma$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_1}\rho\vec v_1\,d\omega+\frac{d}{dt}\int_{\omega_2}\rho\vec v_2\,d\omega=\int_{\omega_1}\rho_1\vec f_1\omega+\int_{\omega_2}\rho_2\vec f_2\omega+\int_{\Sigma_1}p_1\vec n_1\,d\Sigma+\int_{\Sigma}p_2\vec n_2\,d\Sigma$$

$$+\int_{\Sigma_0}p_1\vec n\,d\Sigma+\int_{\Sigma_0}p_2(-\vec n)\,d\Sigma+$$

$$+\int_{\Sigma_0}(p_2-p_1)\vec n\,d\Sigma$$

вычли

$$\int_{\Sigma_0}\overset{p_2-p_1}{[p]}\vec n\,d\Sigma=0$$

в силу произвольности $\omega_t\Rightarrow[p]\vec n=0$ на границе раздела

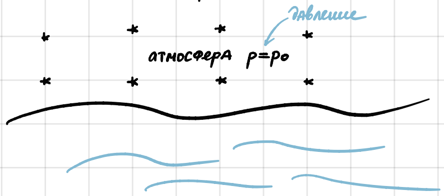
динамическое условие $\boxed{[p]\vec n=0}$

при наличии поверхностного натяжения: $[p]\vec n=2\sigma K\vec n$

σ — пов. натяжение $\left[\frac{Н}{м}\right]=\left[\frac{Дж}{м^2}\right]$ K — средняя кривизна пов-ти

$K=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$

3) Свободная поверхность (жидкость – газ)



а) кинематическое условие

$$\boxed{\vec v\cdot\vec n = V_n}$$

V_n – скорость движения свободной границы по нормали

как в пред. случае ↓ переформул.

б) динамические условия

как в пред. случае ↓ переформул.

тензор напряжений

Для атмосферы $P_a = -p_0 I$

для жидкости $P = -pI + 2\mu D$

$P\vec n = P_a\vec n$

$-p_0\vec n = -p\vec n + 2\mu D\vec n \quad \Big| \cdot\vec n$

$p = p_0 + 2\mu(D\vec n,\vec n) \quad \Big| \cdot\vec\tau$ (касат. вектор)

$(D\vec n,\vec\tau) = 0$

касательные напряжения на свободной границе $=0$

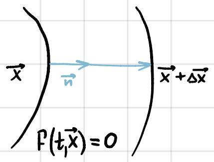
при наличии поверхностного натяжения $\boxed{p = p_0 + 2\sigma K}$ (для идеальной жидкости)

капилярное дав-ие

ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

граница раздела двух жидкостей или свободная граница обычно явл. неизвестными и определяются в процессе решения

- пусть граница раздела или свободная граница : $F(t,\vec x) = 0$
найдем V_n



$V_n = \lim \dfrac{|\Delta\vec x|}{\Delta t}$

тейлор

$F(t+\Delta t,\vec x+\Delta\vec x) = F(t,\vec x) + F_t\Delta t + \nabla F\cdot\Delta\vec x + o\left(\Delta t + |\Delta\vec x|\right) = 0 \quad \Big| : \Delta t$

$F(t,\vec x) = 0$ (лежит на пов-ти)

$F(t+\Delta t,\vec x+\Delta\vec x) = 0 \qquad F_t + \nabla F\cdot\dfrac{\Delta\vec x}{\Delta t} + o(1) = 0$

$$\left.\begin{aligned}\Delta\vec x &= |\Delta\vec x|\cdot\vec n\\ \vec n &= \frac{\nabla F}{|\nabla F|}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad F_t + |\nabla F|\frac{|\Delta\vec x|}{\Delta t} + \underbrace{o(1)}_{=0} \ \xrightarrow{\text{переходим к lim}}\ V_n = -\frac{F_t}{|\nabla F|}$$

Свободн. гр. $z = h(t,x,y)$

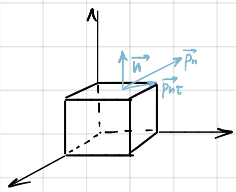
$$\left.\begin{aligned}&F = h(t,x,y) - z \Rightarrow V_n = \vec v\cdot\vec n \qquad \vec v = (u,v,w)\\ &-\frac{F_t}{|\nabla F|} = \vec v\cdot\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \qquad -F_t = \vec v\cdot\nabla F \Rightarrow -h_t = uh_x + vh_y - w\end{aligned}\right\}\ h_t + uh_x + vh_y = w \ \text{ на свободн. границе}$$

- Тензор напряжений $P = -pI + 2\mu D$

$D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

$\vec p_n = P\vec n$

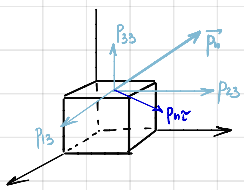
$\vec n = (0,0,1)$



$p_{n\tau}$ – напряжение в плоскости площадки (касательные напряжения)

$\vec p_{n\tau} = \begin{pmatrix} p_{13}\\ p_{23}\\ 0\end{pmatrix}$

$\vec p_n = \begin{pmatrix} p_{13}\\ p_{23}\\ p_{33}\end{pmatrix}$



p_{ij} – i-ая компонента напряжения с нормалью по оси j

$p_{n\tau} = (P\vec n,\vec\tau) = (-p\vec n + 2\mu D,\vec\tau) = 2\mu(D\vec n,\vec\tau)$

для идеальной жидкости $p_{n\tau} = 0$

Уравнение для вихря и функции тока

$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \mathrm{curl}\,\vec{v}$

из второго равенства: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \nabla \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{0} - \underbrace{\mathrm{rot}\,\omega}_{-\Delta\vec{v}} = -\Delta\vec{v}$

уравнение импульсов, с учетом 1-го тождества:

$$\boxed{\vec{v}_t + \vec{\omega}\times\vec{v} + \nabla\frac{|\vec{v}|^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\,\mathrm{rot}\,\vec{\omega} + \vec{f}}$$ – УРАВНЕНИЯ В ФОРМЕ ГРОМЕКИ–ЛАМБА

- уравнения Навье-Стокса
$$\begin{cases} \vec{v}_t + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + f \\ \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \end{cases}$$
$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{v} + \nabla\frac{|\vec{v}|^2}{2}$

- $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \nabla\cdot\mathrm{div}\,\vec{a} - \Delta\vec{a}$

Вычислим rot: $\vec{\omega}_t + \mathrm{rot}(\vec{\omega}\times\vec{v}) = -\nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\omega + \mathrm{rot}\,\vec{f}$ $\quad(\mathrm{rot}\,\nabla\varphi = 0)$

$\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}$

$\mathrm{div}\,\vec{\omega} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \mathrm{rot}(\vec{\omega}\times\vec{v}) = \vec{\omega}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{0} - \vec{v}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{\omega}}_{0} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v}$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{\omega} = \nabla\cdot\mathrm{div}\,\vec{\omega} - \Delta\vec{\omega} = -\Delta\omega$

$$\boxed{\vec{\omega}_t + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} + \nu\Delta\vec{\omega} + \mathrm{rot}\,\vec{f}}$$

(если $\vec{f} = -\nabla\Pi$ – сила потенциальн. $\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{f} = 0$)

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПЕРЕНОСА ВИХРЕЙ

Функция тока для плоского течения

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ – течение, в $\int$ $\begin{cases} \vec{v} = (u, v, 0) \\ \frac{\partial}{\partial z} = 0 \end{cases}$

- уравнение неразрывности
$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

$u_x + v_y = 0 \Rightarrow \exists\,\psi(t,x,y):\ u = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$

* ψ – ФУНКЦИЯ ТОКА

$u_x = -v_y$ – условие совместности

выполнено в силу ур-ия неразрывности

Зная ψ, можем вычислить поле скоростей: $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}\quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$

$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \underbrace{v_x - u_y}_{\overset{def}{=}\,\omega}) = (0, 0, \omega)\qquad \omega = v_x - u_y = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$

перепишем ур-ие Гельмгольца

$\vec{\omega}_t + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} = \underbrace{(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v}}_{0} + \nu\Delta\cdot\omega$

$\vec{\omega}_t + u\omega_x + v\omega_y = \nu\Delta\omega$

$$\boxed{(\Delta\psi)_t + \psi_y(\Delta\psi)_x - \psi_x(\Delta\psi)_y = \nu\Delta\Delta\psi}$$ – уравнение для функции тока

Функция тока для осесимметр. течений

$(r, \theta, z)\qquad \frac{\partial}{\partial\theta} = 0$

$\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$

$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r v_z)}{\partial z} = 0$

$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$