ВВЕДЕНИЕ

№1. 08.09.2020
Александр Канчерович
khe@nsu.ru

1) Жданов С.А., Рябченко В.П., Теплухов. Лекции по гидродинамике
2) Рябченко В.П., Карабут Е.А. Задачи по гидродинамике.
3) Кочин Н.Е, Кибель И.А, Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика (сложный)
4) Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости

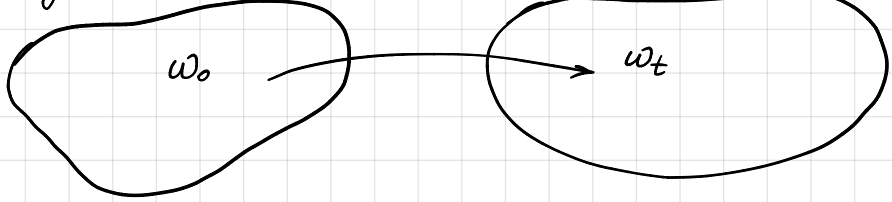
ГИДРОДИНАМИКА – изучение движения жидкости под воздействием внешних сил или при взаимодействии с телами.

ЖИДКОСТЬ :
- сплошность (непрерывность физико-химических хар-к среды) изучаются явления на макромасштабе, т.е в каждой точке среды достаточно много молекул
- текучесть (подвижность)

Будут изучаться 2 модели жидкости

ИДЕАЛЬНАЯ – нет внутреннего трения

ВЯЗКАЯ – есть внутреннее трение



$\omega_0 \to \omega_t$ – гомеоморфизм

ЖИДКАЯ ЧАСТИЦА : $x = x(x_0, t)$, $x_0 \in \omega_0$, – фиксированная точка из ω_0

ТРАЕКТОРИЯ – кривая в $\mathbb{R}^3$, к-я описывает жидкая частица в процессе движения.

ЖИДКИЙ ОБЪЕМ – объем, состоящий из одних и тех же жидких частиц.

ЛАГРАНЖЕВЫ КООРДИНАТЫ : (x_0, t) или (ξ, t) – „нумеруют жидкие частицы" (часто $x\big|_{t=0} = x_0 = \xi$)

ЭЙЛЕРОВЫ КООРДИНАТЫ $(\vec{x}, t)$ – координаты в пр-ве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

лагр. к. эйлер. к.

$\Phi(\vec{x}_0, t)$, $\varphi(\vec{x}, t)$ и $\vec{x} = \vec{x}(x_0, t)$ – отображение, связ-ее эйлеровы и лагранжевы коорд.

$\Phi(\vec{x}_0, t) = \varphi(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}} \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}}_{\text{скорость движ. частицы}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi = \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla\right)}^{\text{оператор}} \varphi = \frac{d\varphi}{dt}$$

$\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{x}(\vec{x}_0, t)}{\partial t}$ – скорость жидк. частицы

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla}$$ – **ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ** (материальная, индивидуальная, субстанциональная)

Траектории :

- $V(x_0, t)$ – скорость в лагранжевых координатах

(проинтегрировать) $x = x_0 + \int_0^t V(x_0, t)\, d\tau$

- $\vec{V}(\vec{x}, t)$ – скорость в эйлеровых координатах

(определяются ур-нием) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \\ \vec{x}\big|_{t=0} = \vec{x}_0 \end{cases}$

Формула Эйлера

$J = \det\left(\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0}\right)$ якобиан для перехода от лагр. к. к эйлеровым (показывает относительное изменение объема)

$$\boxed{\frac{dJ}{dt} = J \cdot \operatorname{div} \vec{v}}$$

док-во из матмодов

Th Переноса Пусть движение непрерывно, ω_t – жидкий объем. $F(x, t)$ – произвольная функция (скалярная или векторная) тогда

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} F(x, t)\, d\omega = \int_{\omega_t} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \vec{v}\right) d\omega}$$

$$\blacktriangleright\ \frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} F\,d\omega = \frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_0} F_0 J\,d\omega_0 = \int\limits_{\omega_0}\left(\frac{dF_0}{dt}J + F_0\frac{dJ}{dt}\right)d\omega = \int\limits_{\omega_0}\left(\frac{dF_0}{dt}J + F_0 J\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)d\omega_0 = \int\limits_{\omega_t}\left(\frac{dF}{dt} + F\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)d\omega$$

$$\left(F_0 = F_0(x_0,t) = F(x(x_0,t),t)\right)\left(\frac{dF}{dt} = F_t + \vec{v}\nabla F\right) \blacktriangleleft$$

Основные хар-ки для среды:

1. плотность $\rho = \lim\limits_{\omega\to 0}\frac{M}{\omega}$ (предполагается, что предел сущ-ет в каждой точке)
2. импульс $K = \int\limits_{\omega_t}\rho\vec{v}\,d\omega$
3. момент импульса $H = \int\limits_{\omega_t}\rho(\vec{x}\times\vec{v})\,d\omega$
4. кинетическая энергия $E = \int\limits_{\omega_t}\rho\frac{|\vec{v}|^2}{2}\,d\omega$

Силы, действующие на жидкость

дальнего действие (внешние массовые силы)
- сила тяжести $\vec{g}$
- электромагнитные силы

ближнего действие (внутренние поверхностные силы)
- силы со стороны остальной жидкости

т.е. силы, действующие на жидк. объем

$$F(\omega_t) = F_e(\omega_t) + F_i(\omega_t) = \int\limits_{\omega_t}\rho\vec{f}\,d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t}\vec{p}_n\,d\sigma$$

$\vec{p}_n$ – вектор напряжения (сила на ед. площади) на площадке с внешней нормалью $\vec{n}$

момент сил:

$$G(\omega_t) = \vec{G}_e(\omega_t) + \vec{G}_i(\omega_t) = \int\limits_{\omega_t}\rho(\vec{x}\times\vec{f})\,d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t}\vec{x}\times\vec{p}_n\,d\sigma$$

Закон сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho\,d\omega = 0 \xrightarrow{\text{Th переноса}} \int\limits_{\omega_t}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)d\omega = 0$$

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

в силу произвольности ω_t: $\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

ДИФФЕРЕН-ЫЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

Закон сохранения импульса

* $\vec{f}$ – плотность массовых сил

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho\vec{v}\,d\omega = F(\omega_t) = \int\limits_{\omega_t}\rho\vec{f}\,d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t}\vec{p}_n\,d\sigma$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho\vec{v}\,d\omega = \int\limits_{\omega_t}\left(\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} + \rho\vec{v}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)d\omega = \int\limits_{\omega_t}\left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\vec{v} + \rho\vec{v}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)d\omega =$$

$$= \int\limits_{\omega_t}\left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)}_{\substack{= 0\\ \text{ЗСМ}}}\vec{v}\right)d\omega = \int\limits_{\omega_t}\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,d\omega$$

можно показать, что $\exists$ тенз. поле 2 ранга P: $\vec{p}_n = P\cdot\vec{n}$

$$\int\limits_{\partial\omega_t}\vec{p}_n\,d\sigma = \int\limits_{\partial\omega_t}P\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int\limits_{\omega_t}\mathrm{div}\,P\,d\omega$$

таким образом

$$\int\limits_{\omega_t} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\omega = \int\limits_{\omega_t} (\rho\vec{f} + \operatorname{div} P) d\omega$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} P + \rho\vec{f}$$

ДИФФ-ЫЕ УР-ИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0 & \text{ЗСМ} \\ \rho \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} P + \rho\vec{f} & \text{ЗСИ} \end{cases}$$

* $\rho, \vec{v}, P$ – искомые функции