06.10.2020

Лекция 6

Th (Томсона) "Кельвина"

При баротропном движении жидкости в потенциальном поле внеш. сил циркуляция вектора скорости по жидкому замкнутому контуру γ_t остается постоянной.

$$\boxed{\Gamma_t = \oint_{\gamma_t} \vec v\, d\vec l = const}$$

$p = p(\rho)$

$\vec f = -\nabla \Pi$

↑ ур-ие движения

$$\frac{d\vec v}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec f = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Pi = -\nabla\left(\int \frac{dp}{\rho(p)} + \Pi\right)$$

$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_{\gamma_t}\vec v\cdot d\vec l = \frac{d}{dt}\oint_{\gamma_0} v_0 \frac{\partial \vec x}{\partial \vec \xi}\, d\vec\xi = \oint_{\gamma_0}\frac{\partial \vec v_0}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec x}{\partial\vec\xi}\, d\vec\xi + \oint_{\gamma_0}\vec v_0\frac{\partial \vec v_0}{\partial \vec\xi}\, d\vec\xi \overset{\text{от Лагр. к Эйлер.}}{=} \oint_{\gamma_t}\frac{d\vec v}{dt}\, d\vec x + \underbrace{\oint_{\gamma_0} d\frac{(\vec v_0)^2}{2}}_{=0} =$$

$$= -\oint_{\gamma_t}\left(\int\frac{\nabla p}{\rho} + \Pi\right) d\vec x = 0.$$

Получили $\frac{d\Gamma_t}{dt} = 0 \Rightarrow \Gamma_t = const$

↓

Следствие: (Th (Лагранжа))

При баротропном движении в пот. поле внеш. сил, если $\vec\omega|_{t=0} = 0$, то $\vec\omega = 0$ при $t>0$ в нек-ом жидком объеме.

↑ $$\Gamma_t = \oint_{\gamma_t}\vec v\, d\vec l = \iint_\sigma \vec\omega\cdot\vec n\, ds = \int_{\gamma_0}\vec v\, dx = \iint_{\sigma_0}\vec\omega_0\vec n\, ds$$

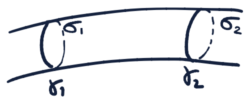
в силу произвольности σ и как следствие $\vec n$ $\boxed{\vec\omega \equiv 0}$

↓

Основные факты из жизни вихревых трубок

Th (1ая т. Гельмгольца)

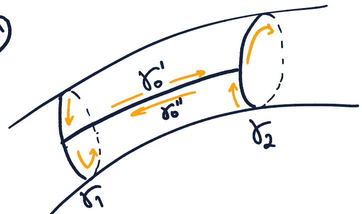
Интенсивность вихревой трубки одинакова в любом её сечении.



$$\Gamma_1 = \int_{\gamma_1}\vec v\, d\vec l = \iint_{\sigma_1}\vec\omega\vec n\, ds = \iint_{\sigma_2}\vec\omega\vec n\, ds = \oint_{\gamma_2}\vec v\, d\vec l = \Gamma_2$$

*интеграл 2го рода

↑



◁ $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_0' \cup \gamma_0''$

$$\Gamma = \oint_\gamma \vec v\, d\vec l = \oint_{\gamma_1}\vec v\, d\vec l + \oint_{\gamma_2}\vec v\, d\vec l \overset{\text{по ф. Стокса}}{=} \iint_\sigma \underbrace{\vec\omega\vec n}_{0}\, ds = 0$$

т.к. $\vec\omega$ кас. к поверхности вихревой трубки

Значит, $\Gamma_1 = \int_{\gamma_1}\vec v\, d\vec l = \int_{-\gamma_2}\vec v\, d\vec l = \Gamma_2$

↓

Th (2ая т. Гельмгольца)

При баротропном движении в пот. поле внеш. сил, частицы жидкости составляющие вихревую линию в нач. момент времени будут сост. вихр. линии в послед. моменты времени.

γ_0 – вихр. линии

γ_t – жидкая линия тоже будет вихревой

↑ Пусть S_1 – жид. пов-ть, сост. в нач. момент из вихр. линий.

Покажем: $S_1|_{t>0}$ состоит из вихревых линий.

$\gamma \subset S_1|_{t=0}$ – жидкий контур

при $t=0$ $\Gamma = \oint \vec v\, d\vec l = \iint_\sigma \vec\omega\cdot\vec n\cdot ds = 0$, ($\sigma$ → выберем на S_1)

при $t>0$ $\Gamma(t)^\gamma = 0$

$\Rightarrow \iint_\sigma \vec\omega\vec n\, ds = 0 \Rightarrow \omega$ – кас. к S_1 при $t>0$

Пусть $\gamma = S_1 \cap S_2$; S_1, S_2 – жидкие пов-ти, сост. в нач. мом. времени из вихр. линий; γ – жидк. линия, в нач. мом. врем. являющаяся вихревой.

$\vec{\omega}$ – кас. к S_1 и S_2 при $t>0 \Rightarrow \vec{\omega}$ – кас. к $\gamma \Rightarrow \gamma$ – вихр. линия.

Th (3ая т. Гельмгольца) | Интенсивность вихревой трубки постоянна во все моменты времени.

↑ из **Th** Томсона

жид. контур, лежащий на пов-ти вихр. трубки при $t=0$, лежит на ней и во все послед. моменты времени

$\Longrightarrow$ интенсивность const.

↓

Интеграл Бернулли

Пусть жидкость баротропна $p = p(\rho)$, масс. силы – потенциальны $\vec{f} = -\nabla \Pi$

ур-ие движение: $\vec{v}_t + \nabla \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}$

ф-ия Лэмба $-\nabla H = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{v} = -\nabla \frac{|\vec{v}|^2}{2} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi$

$$H = \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Pi$$

ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ. При стационорном течении баротропной жидкости в пот. поле внешних сил справедлив интеграл

$H = C(L)$, где $C(L) = \text{const}$, зависящая от L

линия тока или вихр. линия

- $\vec{v} \equiv 0$
- $\vec{\omega} \equiv 0$
- $\vec{\omega} \parallel \vec{v}$

, тогда $c \equiv \text{const}$ во всем объеме

↑ $\vec{\omega} \times \vec{v} \equiv -\nabla H$

1) если $\vec{v} \equiv 0$, $\vec{\omega} \equiv 0$ или $\vec{\omega} \parallel \vec{v}$, то $\nabla H = 0 \Rightarrow H = \text{const}$

2) L – линия тока / вихр. линия

вдоль L $\quad \int_L \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{v})}_{=0} d\vec{l} = -\int_L \nabla H \, d\vec{l}$; $H = H_0$ вдоль L, т.е. $H = C(L)$

↓

Интеграл Коши – Лагранжа

Для нестац. потенциал. движений жид-ти в пот. поле внешних сил справедлив интеграл К.–Л.:

$\boxed{\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{\rho} p + \Pi = F(t)}$, где φ – потенциал поля скоростей: $\vec{v} = \nabla \varphi$, $\vec{f} = -\nabla \Pi$, $F(t)$ – произв. ф-ия

↑ $\vec{v}_t + \nabla \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \underbrace{\vec{\omega}}_{=0} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}$

$\nabla \varphi_t + \nabla \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Pi = 0$

$\nabla \left(\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = 0$

получаем требуемое: $\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + \Pi = F(t)$ ↓

Из ур-ие неразрывности: $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$ — ур-ие Лапласа для потенциала φ.

Для пот. движений как-то получилось 1 ур-ие вместо $4^х$...

Давление определяется из интеграла Коши-Лагранжа.

движение полностью определено

Особенности потенциального поля скоростей.

△ 2мерные плоскопараллельные установив. течения.

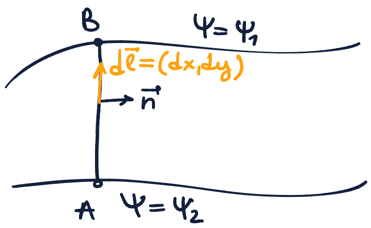
$$\vec{v} = (u, v, 0), \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Ф-ие тока ψ: $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$ — определяет линии тока; $\psi = const$ вдоль линии тока

Усл. совм-ти: $u_x + u_y = 0$ — ур-ие неразрывности.

$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy = -v dx + u dy = 0$ вдоль линии тока, т.к. $(d\vec{l} \parallel \vec{v})$

Получаем, что линии уровня задают линии тока



Расход Q через AB:

$$Q = \int_{AB} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{AB} \psi_y dy + \psi_x dx = \int_{AB} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

$$\vec{v} = (\psi_y, -\psi_x); \quad \vec{n} = \frac{(dy, -dx)}{ds}$$