Уравнение равновесия:

$$\overline{F} = \int_\Omega P\,dV = \int_\Omega \operatorname{div} P\,dV = 0 \quad \forall \Omega \Rightarrow \operatorname{div} P = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$ — усл-е равновесия

Если на тело действ. массовые силы $\overline{f}^m$, то:

$$\int_\Omega (\overline{f} + \overline{f}^m)\,dV = 0 \quad \forall\Omega \Rightarrow \operatorname{div} P + \overline{f}^m = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^m = 0 \quad i=1,2,3$$ ← усл-я равнов-я $\overline{x} \in \Omega$

Граничные условия:

На границу тела действ. сила $\overline{f}^e ds$

$$\overline{f}^e - P_{\overline{n}} = 0 \text{ на } \partial\Omega \qquad \sigma_{ij} n_j = f_i^e, \quad i=1,2,3$$ — гранич. усл-я $x \in \partial\Omega$

Всего 3 ур-я для 6ти компонент => реш-е не единственное!

К любому реш-ю можно добавить реш-е однородной задачи:

$$\frac{\partial \sigma^0_{ij}}{\partial x_j} = 0 \text{ на } \Omega, \quad \sigma^0_{ij} n_j = 0 \text{ на } \partial\Omega$$ т.к. не выдел. ос-сти конкр. материала

Для реш-я задачи о равновесии нужно задать ур-е состояния материала. Например, (связь м/у напр-ем и деформ-й) з-н Гука:

$$P = \lambda \operatorname{tr}\mathcal{E}\, I + 2\mu\mathcal{E} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

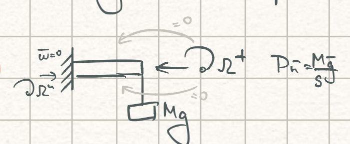
$$0 = \lambda \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_j}\delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + f_i^m = \lambda\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j\partial x_j} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + f_i^m = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i\partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^m =$$

$$= \boxed{(\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}\overline{w} + \mu\Delta\overline{w} + \overline{f}^m = 0}$$ — ур-я Ламе

На $\partial\Omega^+$ заданы напряж-я: $P_{\overline{n}} = \overline{f}^e$ на $\partial\Omega^+$ — усл-е 2го рода (задача Неймана)

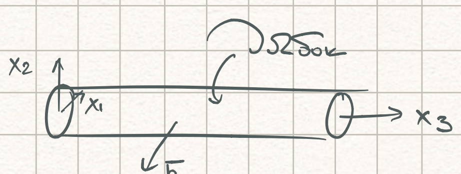
На $\partial\Omega^u$ заданы перемещ-я: $\overline{w} = \overline{w}^0$ на $\partial\Omega^u$ — усл-е 1го рода (задача Дирихле)

Ex



Зам Реш-е "чистой" задачи Неймана ($\partial\Omega = \partial\Omega^+$) не единст-но, т.к. есть произвол в твердотельном переносе тела.

Ex Задача об изгибе и кручении бруса:



Брус – однор. упруг. цилиндр произв. сечения

x_3 – вдоль оси цилиндра и прох. ч/з центры тяжести площадок сечения ($x_3 = const$)

Лев. конец ($x_3=0$) зафикс. $\overline{w}|_{x_3=0} = 0$, а к правому $x_3 = l$ приложен вект. силы $\overline{P}$ и момент $\overline{M}$

Бок. пов-ть своб. от нагрузок

1) Применим принцип Сен-Венана: напряжённое сост-е бруса не завис. от способа прилож-я нагрузки на расст-ях порядка диаметра бруса от его конца.

2) Задача линейна, т.е. можно решить её для отдельн. типов нагруж-я и получим общее реш-е путём линейной комбинации частн. реш-й.

Типы нагрузки:

v • растяж-е силой P_3 — уже решено на пред. лекции
• изгиб моментом M_2
• кручение моментом M_3
• изгиб силой P_2

Начнём с изгиба моментом M_2:

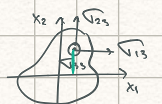
Гран. усл-я: на бок. пов-ти $\partial\Omega^{бок}$: $\sigma_{ij} n_j \big|_{\partial\Omega^{бок}} = 0$, $\bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

на лев. границе $x_3 = 0$ прилож. нагрузки $-\bar{P}_n$ и $-\bar{M}$

на прав. границе $x_3 = l$: $P_3 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{33} dS$, $P_1 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{13} dS$, $P_2 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{23} dS$

Распишем моменты: $M_1 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{33} x_2 dS$ $\quad M_2 = -\int\limits_{x_3=l} \sigma_{33} x_1 dS$ $\quad M_3 = \int\limits_{x_3=l} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dS$

в нуж. стор.



на 13 и 23 всё равно,
вращает только 33

Полуобратный метод Сен-Венана:

Будем искать тенз. напр-й в виде: $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$

Р.н в 2х ур-ях из 3-х нули
соотв. тенз. $= 0$ не только на гр., но и внутри тела

Изгиб груза моментом M_2:

Будем считать, что $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{33} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 = const$

Усл-я равновесия: $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ $\quad$ 1й и 2й столбцы $\equiv 0$
3й диф-м $\Rightarrow$ 3й столбец $\equiv 0$

$\Rightarrow$ усл-я равн-я тожд. выполнены

Гран. усл-я: Смотрим на бок. пов-ти — тоже тожд. вып-но

коор-ты ц. тяж-ти площадки, кт в (0,0)

Смотрим на пр. стенки: $P_1 = P_2 = 0$ $\quad P_3 = \int\limits_{x_3=l} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) dS = \alpha_1 \overbrace{\int\limits_{x_3=l} x_1 dS}^{0} + \alpha_2 \overbrace{\int\limits_{x_3=l} x_2 dS}^{0} = 0$

Смотрим лев. стенки: $P_1 = P_2 = 0$,

$M_1 = \alpha_1 \int\limits_{x_3=l} x_1 x_2 dS + \alpha_2 \int\limits_{x_3=l} x_2^2 dS = 0$ $\qquad \underbrace{M_2 = -\alpha_1 \underbrace{\int\limits_{x_3=l} x_1^2 dS}_{I_{11}} - \alpha_2 \underbrace{\int\limits_{x_3=l} x_1 x_2 dS}_{I_{12}}}_{\hookrightarrow \text{ СЛАУ для } \alpha_1, \alpha_2}$

подбором конст. α_1, α_2 уд-м усл-я

I_{ij} - комп-ты тенз. инерции площадки