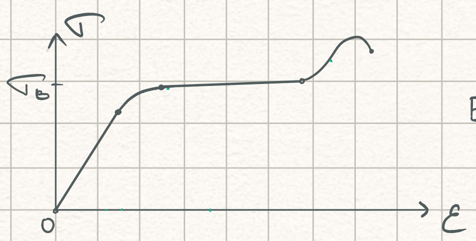
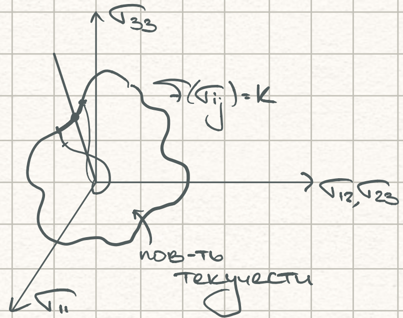
Идеальная пластичность



Будем считать, что пластичность наступает при выполнении рав-ва:

$F(\sigma_{ij}) = K$ – усл-я пластичности



Св-ва поверхн-ти текучести:
- замкнута
- содержит внутри себя начало коор-т
- «звёздна», т.е. любой луч, выходящий из начала коор-т, пересекает поверхность не более одного раза

Постулат: Наступление пластичности не зависит от всестороннего сжатия материала

Опр Среднее напряжение: $\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{trP}{3} = \frac{\sigma_{kk}}{3}$

Опр Девиатор тензора напряжений: $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\cdot\delta_{ij}$

$tr\,\sigma'_{ij} = 0$, σ'_{ij} – отвечает за сдвиговые напряжения

$P = \lambda\, tr\varepsilon I + 2\mu\varepsilon$ – объёмное напряжение

$trP = (3\lambda + 2\mu)\,tr\varepsilon$ – объёмная деформация

$tr\varepsilon$ – отвечает за объёмное сжатие материала — $dV' = (1+tr\varepsilon)dV$

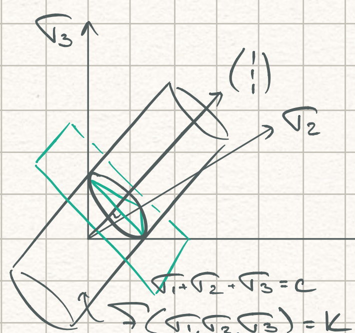
$F(\sigma'_{ij}) = K$ – в силу постулата

Изотропный материал:

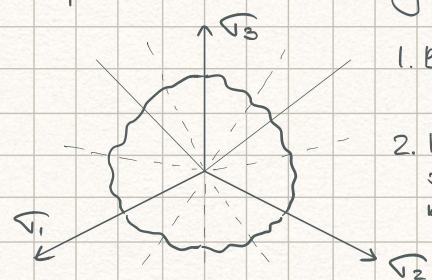
$\boxed{F(J_2(\sigma'_{ij}), J_3(\sigma'_{ij})) = K}$, где J_2, J_3 – алг. инварианты σ'_{ij}

В терминах тензора P усл-я пластичности изотропного материала запис. в виде:

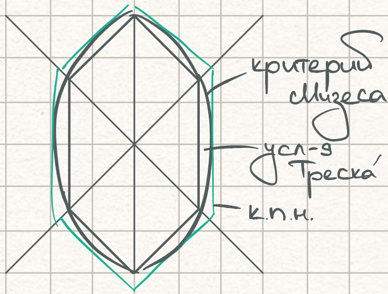
$F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = K$ (при этом F не меняется при переходе с одной плоскости $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = c$ на другую)



Рассмотрим след. пов-ти текучести на пл-ти $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = 0$:



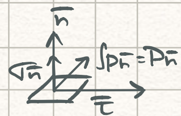
1. В силу симметрии σ_i получ. кривая симметр. отн-но кажд. из осей
2. Нормальная пластичн-ть ⟺ отсутствие эффекта Баушингера (кп) ⟺ одинаковый критерий пластичности при растяж. и сжатии ($\sigma_i \to -\sigma_i$ не меняет кривую)

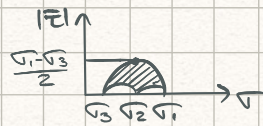


Распространённые критерии пластичности:

1. Критерий максимума касат. напряж-й (критерий Треска)

$$\frac{1}{2}\max\{|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_2-\sigma_3|, |\sigma_1-\sigma_3|\} = k$$





2. Критерий октоэдрических напряжений:

$$J_2(\sigma_{ij}') = \sum_{ij}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = \frac{4}{3}k^2$$ — критерий Мизеса

$$\Leftrightarrow (\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2 = 6k^2$$

3. Критерий приведённого напряж-я:

$$\max\{|\sigma_1-\sigma|, |\sigma_2-\sigma|, |\sigma_3-\sigma|\} = k$$

На практике обычно используют критерий Мизеса, но чем материал ближе к идеальн., тем он ближе к критерию Треска.

Принцип максимума:

Для сост-я пластичности ур-я сост-я среды будут зависеть от скорости деформации:

$$\dot\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x} + \left(\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x}\right)^*\right)$$ — тензор скорости деформации $\qquad \dot\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$

Рассмотрим скорость диссипации энергии: $\quad D = \sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij} = P:\dot\varepsilon$

Мощность поверхностных сил:

$$\int_{\partial V}(P\bar n)\dot{\bar w}\,ds = \int_V \mathrm{div}(P\dot{\bar w})\,dV = \int_V \underbrace{P:\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x}}_{\sigma_{ij}\frac{\partial \dot w_i}{\partial x_j}}dV = \int_V P:\dot\varepsilon\, dV$$

$\mathrm{div}P = 0$ усл-е равн.

$$\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x} + \left(\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x}\right)^*\right)}_{\text{"}\dot\varepsilon\text{" симм.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x} - \left(\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x}\right)^*\right)}_{\text{"}\dot\Omega\text{" кососимм.}}$$

$$P:\frac{\partial\dot{\bar w}}{\partial x} = P:\dot\varepsilon + \underbrace{P:\dot\Omega}_{=0}, \text{ т.к. } P = P^*$$

Принцип максимума: в состоянии пластичности скорость диссипации энергии максимальна на действительн. напряж. состоянии по сравнению со всеми возм. напр. сост.

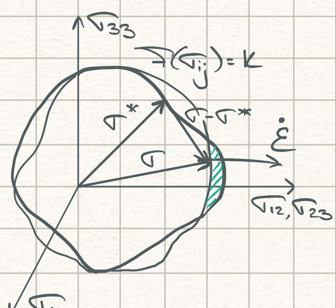
$$\boxed{\sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij} \ge \sigma_{ij}^*\dot\varepsilon_{ij}}$$

σ_{ij} - действ., σ_{ij}^* - возм. напряж. сост-я

Нужно искать макс. ф-ии Лагранжа:

$$\Phi = \sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij} - \lambda(f(\sigma_{ij}) - k),$$ λ - множ-ль Лагранжа

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dot\varepsilon_{ij} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}, \quad i,j = 1,2,3 \\ f(\sigma_{ij}) = k\end{cases}$$ — принцип максимума (ассоциированный з-н течения)

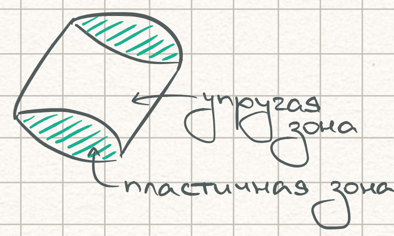


$\Rightarrow (\sigma-\sigma^*)\cdot\dot\varepsilon \geq 0 \quad \forall\sigma^* \Rightarrow$ угол м/у $(\sigma-\sigma^*)$ и $\dot\varepsilon$ не тупой

$\Rightarrow$ пов-ть текучести не вогнута

Если пов-ть текучести строго выпукла, то $\dot\varepsilon$ и σ связаны взаимноодн-но

Постановка задачи упруго-пластического деформирования материала



В упругой зоне:
1. ур-я равновесия: $\operatorname{div} D = 0$
2. закон Гука: $D = \lambda \operatorname{tr}\mathcal{E} I + 2\mu \mathcal{E}$
3. либо $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\right)^*\right)$,
   либо усл-е совместности для деформаций

В пластической зоне:
1. ур-я равновесия: $\operatorname{div} D = 0$
2. усл-я пластичности: $\mathcal{F}(\sigma_{ij}) = k$
3. ассоцииp. з-н течения: $\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}}$
4. либо $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial x_i}\right)$, либо усл-я совместности

На границе между упругой и пластич. зонами рав-во напр. и перемещ-й.