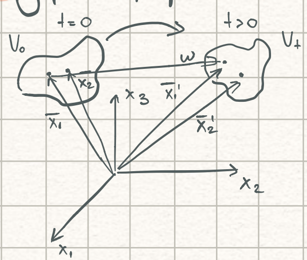
Головин Сергей Валерьевич

Разделы:

1) Теория упругости и пластичности ← описываем не перемещ-я, а деформации
2) Гидродинамика
3) Газовая динамика

Теория упругости

Тензор деформации



$\bar{x}_1' = \bar{x}_1 + \bar{w}(\bar{x}_1)$, где $\bar{w}$ – вектор перемещ-я

$\bar{x}_2' - \bar{x}_1' = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{w}(\bar{x}_2) - \bar{w}(\bar{x}_1)$

при $\bar{x}_1$ близком к $\bar{x}_2$: $d\bar{x}' = d\bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}$ ← в любой СК $\qquad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)$ – м-ца Якоби ← в декарт.

Везде в декарт. сист. коорд-т (почти)

единичная м-ца

$dx' = \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx$

$|dx'|^2 = dx' \cdot dx' = \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \cdot \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx = dx \left(I + \frac{\partial w^*}{\partial x}\right)\left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx = d\bar{x} \cdot (I + 2\mathcal{E}) d\bar{x}$, где

Опр тензор деформации: $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^* + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^* \frac{\partial w}{\partial x}\right)}$

$d\bar{x} = \bar{e}|d\bar{x}|$

Опр Относительное удлинение вектора $d\bar{x}$ – $\boxed{u(\bar{e}) = \frac{|d\bar{x}'| - |d\bar{x}|}{|d\bar{x}|} = \frac{|d\bar{x}'|}{|d\bar{x}|} - 1}$

$|dx'| = (1 + u(\bar{e}))|d\bar{x}|$

$u(\bar{e}) = \frac{|dx'|}{|dx|} - 1 = \frac{\sqrt{dx(I+2\mathcal{E})dx}}{|dx|} - 1 = \sqrt{2\bar{e} \cdot \mathcal{E} \cdot \bar{e} + 1} - 1 \qquad \boxed{u(\bar{e}) = \sqrt{2\bar{e} \cdot \mathcal{E} \cdot \bar{e} + 1} - 1}$

Опр Относительный сдвиг – изменение углов м/у отрезками

$dx_1 = e_1|dx_1| \qquad dx_2 = e_2|dx_2|$

$dx_1' \cdot dx_2' = \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx_1 \cdot \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx_2 = dx_1 \cdot dx_2 + 2 dx_1 \mathcal{E} dx_2 = |dx_1||dx_2|(e_1 \cdot e_2 + 2 e_1 \mathcal{E} e_2)$

$dx_1' \cdot dx_2' = |dx_1'||dx_2'| \cos\varphi' = |dx_1||dx_2|(1 + u(e_1))(1 + u(e_2)) \cos\varphi'$

$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi' = \frac{\bar{e}_1 \bar{e}_2 + 2\bar{e}_1 \mathcal{E} \bar{e}_2}{(1 + u(e_1))(1 + u(e_2))}} \qquad \psi = \varphi' - \varphi$ ← как раз отн. сдвиг

Утв Отсутствие деформаций $\Leftrightarrow \mathcal{E} \equiv 0$

Д-во: $\Rightarrow$ отсутств. деформ-й $\Leftrightarrow$ перемещ-е сводится к твердотельному вращ-ю и переносу

$\Rightarrow \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ – постоянная ортог. м-ца $\Rightarrow \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^* \left(I + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = I + 2\mathcal{E} = \underset{\text{орт.}}{I} \Rightarrow \mathcal{E} \equiv 0$

$\Leftarrow \mathcal{E} \equiv 0 \Rightarrow u(\bar{e}) \equiv 0 \Rightarrow$ нет отн. деф., $\varphi' = \varphi \Rightarrow$ нет сдвигов $\Rightarrow$ деформаций нет

Св-ва т.д. $\mathcal{E}$:

$\mathcal{E}$ – симметр. $\Rightarrow \exists$ базис из ортог. с.в. и 3 веществ. с.з.: $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \mathcal{E}^{(3)} \in \mathbb{R}$

В базисе из с.в.:

$|dx'|^2 = (1 + 2\mathcal{E}^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2\mathcal{E}^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2\mathcal{E}^{(3)}) dx_3^2$

Деформации локально можно представить как растяж-е/сжатие материала вдоль собств. напр-й тензора $\mathcal{E}$

$$\boxed{dx_i' = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}^{(i)}}\, dx_i, \quad i = 1, 2, 3}$$

Изменение объёма:

$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$

Опр Отн-е изм-е объёма: $\frac{dV' - dV}{dV} = \frac{dV'}{dV} - 1 = \sqrt{(1+2\mathcal{E}^{(1)})(1+2\mathcal{E}^{(2)})(1+2\mathcal{E}^{(3)})} - 1 = \sqrt{1 + 2J_1 + 4J_2 + 8J_3} - 1$, где

$J_1 = \mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)} + \mathcal{E}^{(3)} = \mathrm{tr}\,\mathcal{E}$ $\quad J_2 = \mathcal{E}^{(1)}\mathcal{E}^{(2)} + \mathcal{E}^{(1)}\mathcal{E}^{(3)} + \mathcal{E}^{(2)}\mathcal{E}^{(3)}$ $\quad J_3 = \mathcal{E}^{(1)}\mathcal{E}^{(2)}\mathcal{E}^{(3)} = \det \mathcal{E}$

это всё алгебр. инварианты м-цы $\mathcal{E}$

Малые деформации:

Будем считать, что $\left|\frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{x}}\right| \ll 1$, т.е. перемещ-я точек тела малы по сравн-ю с размерами тела $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ малые деформации тела

Опр Тензор малых деформаций — $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{x}}\right)^*\right)}$

Малые деформации не означают малые перемещения!

Вообще линейная теория хорошо работает только для тел, соизмеримых на всех напр-ях

Тут ф-лы пересчитываем

Тут J_2 и J_3 малы $\Rightarrow$ отн. изм. объёма: $\boxed{\frac{dV' - dV}{dV} \approx J_1}$

Отн. удлинение вдоль оси O_x: $d\bar{x}_1 = \bar{e}_1 |d\bar{x}_1|$, $\bar{e}_1$ – орт оси O_x, $u(\bar{e}_1) = \sqrt{2e_1 \cdot \mathcal{E} \cdot e_1 + 1} - 1 = \sqrt{2\mathcal{E}_{11} + 1} - 1 \approx \mathcal{E}_{11}$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \begin{pmatrix} u(e_1) & & \\ & u(e_2) & \\ & & u(e_3) \end{pmatrix}$$

Измен-е углов м/у $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — ортами осей Ox_1 и Ox_2:

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ - угол м/у $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ $\quad \psi = \varphi' - \varphi = \varphi' - \frac{\pi}{2}$

$$\cos\varphi' = \sin\psi = \frac{\overbrace{e_1 e_2}^{=0} + 2e_1 \mathcal{E} e_2}{(1+u(e_1))(1+u(e_2))} = \frac{2\mathcal{E}_{12}}{(1+\mathcal{E}_{11})(1+\mathcal{E}_{22})} \approx 2\mathcal{E}_{12} \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{12} = \frac{1}{2}\psi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} u(e_1) & \frac{1}{2}\psi_{12} & \frac{1}{2}\psi_{13} \\ \frac{1}{2}\psi_{12} & u(e_2) & \frac{1}{2}\psi_{23} \\ \frac{1}{2}\psi_{13} & \frac{1}{2}\psi_{23} & u(e_3) \end{pmatrix}$$