Уравнение равновесия:

$$\bar F = \int_\Omega \bar f\, dV = \int_\Omega \operatorname{div} P\, dV = 0 \quad \forall\Omega \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$ — усл-е равновесия

Если на тело действ. массовые силы $\bar f^m$, то:

$$\int_\Omega (\bar f + \bar f^m)\, dV = 0 \quad \forall\Omega \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} P + \bar f^m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^m = 0 \quad i=1,2,3$$

усл-я равнов-я $x \in \Omega$

Граничные условия:

На границу тела действ. сила $\bar f^e ds$

$\bar f^e - P_{\bar n} = 0$ на $\partial\Omega$ $\quad \sigma_{ij} n_j = f_i^e$, $i=1,2,3$ — гранич. усл-я $\quad x \in \partial\Omega$

Всего 3 ур-я для 6ти компонент => реш-е не единственное!

К любому реш-ю можно добавить реш-е однородной задачи:

$\frac{\partial \sigma^0_{ij}}{\partial x_j} = 0$ на Ω, $\quad \sigma^0_{ij} n_j = 0$ на $\partial\Omega$ $\quad$ т.к. не выдел. ос-сти конкр. материала

Для реш-я задачи о равновесии нужно задать ур-е состояния материала.
Например, (связь м/у напр-ем и деформ-ей) з-н Гука:

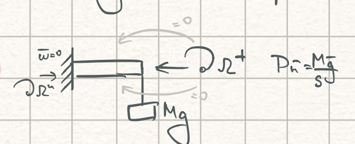
$$P = \lambda \operatorname{tr}\mathcal{E}\, I + 2\mu\mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$0 = \lambda \frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial x_j}\delta_{ij} + 2\mu\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + f_i^m = \lambda\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j\partial x_j} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + f_i^m = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i\partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^m =$$

$$= \boxed{(\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}\bar w + \mu\Delta\bar w + \bar f^m = 0}$$ — ур-я Ламе

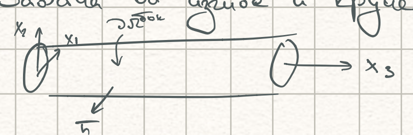
На $\partial\Omega^t$ заданы напряж-я: $P_{\bar n} = \bar f^e$ на $\partial\Omega^t$ — усл-е 2го рода (задача Неймана)
На $\partial\Omega^u$ заданы перемещ-я: $\bar w = \bar w^0$ на $\partial\Omega^u$ — усл-е 1го рода (задача Дирихле)

Ex



Зам Реш-е «чистой» задачи Неймана ($\partial\Omega = \partial\Omega^t$) не единст-но, т.к. есть произвол в твердотельном переносе тела.

Ex Задача об изгибе и кручении бруса:



Брус - однор. упруг. цилиндр произв. сечения
x_3 - вдоль оси цилиндра и прох. ч/з центры тяжести площадок сеч-я ($x_3 = const$)
Лев. конец $x_3 = 0$ зафикс. $\bar w|_{x_3=0} = 0$, а к прав. концу $x_3 = l$ приложен вект. силы $\bar P$ и момент $\bar M$
Бок. пов-ть своб. от нагрузок.

1) Применим принцип Сен-Венана: напряжённое сост-е бруса не завис. от способа прилож-я нагрузки на расст-ях порядка диаметра бруса от его конца.

2) Задача линейна, т.е. можно решить её для отдельн. типов нагруж-я и получим общее реш-е путём линейной комбинации частн. реш-й.

Типы нагрузки

- v • растяж-е силой P_3 — уже решено на пред. лекции
- • изгиб моментом M_2
- • кручение моментом M_3
- • изгиб силой P_2

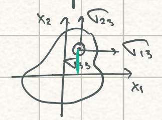
Начнём с изгиба моментом M_2:

Гран. усл-я: на бок. пов-ти $\partial\Omega^{бок}$: $b_{ij} n_j \big|_{\partial\Omega^{бок}} = 0$, $\bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

на лев. границе $x_3 = 0$ прилож. нагрузки: $-\bar{P}_n$ и $-\bar{M}$

на прав. границе $x_3 = l$: $P_3 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{33} dS$, $P_1 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{13} dS$, $P_2 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{23} dS$

Моменты распишем: $M_1 = \int\limits_{x_3=l} \sigma_{33} x_2 dS$ $\quad M_2 = -\int\limits_{x_3=l} \sigma_{33} x_1 dS$ $\quad M_3 = \int\limits_{x_3=l} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dS$



на 13 и 23 всё равно, вращает только 33

в нуж. стор.

Полуобратный метод Сен-Венана:

Будем искать тенз. напр-й в виде: $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ $\quad T \cdot n$ в 2х ур-ях из 3х нули ???

сост. тенз. $= 0$ не только на гр., но и внутри тела

Изгиб груза моментом M_2

Будем считать, что $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{33} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1, \alpha_2 = const$

Усл-я равновесия $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ $\quad$ 1й и 2й столбцы $\equiv 0$

3й столбец: 3ю диф-м — тоже 0 $\Rightarrow$ тожд. выполнены

Гран. усл-я. Смотрим на бок. пов-ти тоже тожд. вып-но

коор-ты ц. тяж-ти площадки, ктр в $(0,0)$

Смотрим гр. стенки: $P_1 = P_2 = 0$, $\quad P_3 = \int\limits_{x_3=l} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) dS = \alpha_1 \underbrace{\int\limits_{x_3=l} x_1 dS}_{0} + \alpha_2 \underbrace{\int\limits_{x_3=l} x_2 dS}_{0} = 0$

$M_1 = \alpha_1 \int\limits_{x_3=l} x_1 x_2 dS + \alpha_2 \int\limits_{x_3=l} x_2^2 dS = 0$ $\quad M_2 = -\alpha_1 \underbrace{\int\limits_{x_3=l} x_1^2 dS}_{I_{11}} - \alpha_2 \underbrace{\int\limits_{x_3=l} x_1 x_2 dS}_{I_{12}}$

подбором конст. α_1, α_2 уд-м усл-я

I_{ij} — комп-ты тенз. инерции площадки

СЛАУ

↳ сист-ма лин алг. ур. для α_1 и α_2