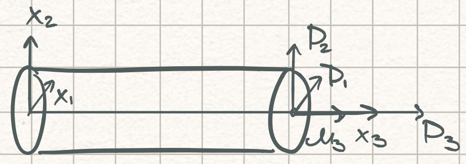


$x_3 = l$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad P_i = \int_S \sigma_{i3}\, dS, \quad i = 1,2,3$$

$$M_1 = \int_S x_2 \sigma_{33}\, dS \qquad M_2 = -\int_S x_1 \sigma_{33}\, dS \qquad M_3 = \int_S (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13})\, dS$$

Кручение бруса:

$x_3 = l$, $M_3 = M$ – задали задачу

$x_3 = 0$, $M_3' = -M$ – усл-я равновесия

Ищем реш-е в виде: $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2)$, $\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2)$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

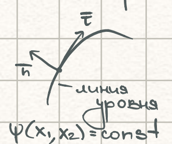
Ур-я равновесия:

- $\dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$
- $\dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$

$\Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2)$, $\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2)$

- $\dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0$

Введём ф-ю $\psi(x_1, x_2)$ т.ч. $\sigma_{13} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}$, $\sigma_{23} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}$



$$\bar{\tau} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) \qquad \bar{n} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) \text{ – градиент}$$

$\Rightarrow$ вектор $(\sigma_{13}, \sigma_{23})$ явл-ся касат-ным к линии уровня $\psi(x_1, x_2)$

Закон Гука:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} D - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} D\, I}$$

E – модуль Юнга, ν – коэф-т Пуассона

из вида $D \Rightarrow \operatorname{tr} D = 0$ $\qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^*\right)$ $\qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 0 \end{bmatrix}$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\right) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} = \frac{1+\nu}{E}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) \overset{**}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\right) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Диф-я и вычитая ** из *, получим:

$$\frac{1+\nu}{E}\Delta\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\right), \text{ где } \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}$$

$\varepsilon_{ii} = \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x_i}$

(11): $\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_1(x_2, x_3)$

(22): $\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_2(x_1, x_3)$

(33): $\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \omega_3 = \omega_3(x_1, x_2)$

$$0 = 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial \omega_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} \overset{\#}{=} -\frac{\partial \omega_2(x_1, x_3)}{\partial x_1}$$

1) $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$: $\dfrac{\partial^2 \omega_2(x_1, x_3)}{\partial x_1^2} = 0 \xRightarrow{\text{интегр-м 2 раза}} \omega_2 = \theta(x_3)x_1 + \beta(x_3)$

2) $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$: $\dfrac{\partial^2 \omega_1(x_2, x_3)}{\partial x_2^2} = 0 \xRightarrow{\text{инт. 1 раз}} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \gamma(x_3) \overset{\#}{=} -\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = -\theta(x_3) \Rightarrow \omega_1 = -\theta(x_3)x_2 + \alpha(x_3)$

Ищем реш-я в виде:

$$\omega_1 = -\theta(x_3)x_2 + \alpha(x_3) \qquad \omega_2 = \theta(x_3)x_1 + \beta(x_3) \qquad \omega_3 = \omega_3(x_1, x_2)$$

Упростим предст-е реш-я:

$$\frac{1+\nu}{E}\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2)}_{\text{не завис. от } x_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}(x_2, x_3) + \underbrace{\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}(x_1, x_2)}_{\text{не завис. от } x_3}\right) \Rightarrow \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}(x_2, x_3) \text{ не завис. от } x_3$$

Из ** аналогично: $\frac{\partial w_2}{\partial x_3}(x_1,x_3)$ не завис. от x_3

Вывод: $\theta(x_3)$, $\alpha(x_3)$, $\beta(x_3)$ — линейные ф-ии по x_3

на лекции было ω, но я так пишу w и можно запутаться

$$\begin{cases} w_1 = -\theta(x_3)x_2 + \alpha(x_3) \\ w_2 = \theta(x_3)x_1 + \beta(x_3) \\ w_3 = w_3(x_1,x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -(kx_3+b_1)x_2 + (a_2x_3+b_2) = -kx_2x_3 - b_1x_2 + a_2x_3 + b_2 \\ w_2 = (kx_3+b_1)x_1 + (a_3x_3+b_3) = kx_1x_3 + b_1x_1 + a_3x_3 + b_3 \\ w_3 = k\varphi(x_1,x_2) - a_2x_1 - a_3x_2 + b_4 \end{cases}$$

Если взять $\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{k}(w_3(x_1,x_2) + a_2x_1 + a_3x_2 - b_4)$, то $w_3 = w_3(x_1,x_2)$

$$\overline{w} = \begin{bmatrix} -kx_2x_3 \\ kx_1x_3 \\ k\varphi(x_1,x_2) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -b_1 & a_2 \\ b_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\text{произв. поворот}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\text{произв. перенос}}$$

Ищем реш-е в виде: $w_1 = -kx_2x_3$ $\quad w_2 = kx_1x_3$ $\quad w_3 = k\varphi(x_1,x_2)$

k - крутка, $\theta = kx_3$ - угол поворота в сечении $x_3 = const$

Связь φ и ψ:

из * и **:
$$\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \frac{k}{2}\left(-x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$$
$$-\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{k}{2}\left(x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$$

Подставив реш-е $\overline{w}$ в ☼, получим: $\Delta\psi = -\frac{E}{1+\nu}k$ - ур-е Пуассона на $\psi = \psi(x_1,x_2)$

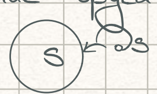
Рассмотрим это ур-е в сечении бруса:

На бок. пов-ти бруса $\overline{p}_{\overline{n}} = 0$ $\quad \overline{n} = (n_1, n_2, 0)^T$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = 0 \quad i = 1,2,3$

$\overline{n} = (n_1, n_2, 0)$ $\quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0$

Сечение бруса



Введём параметризацию границы ∂S:
$$\begin{cases} x_1 = x_1(s) \\ x_2 = x_2(s) \end{cases}$$

Вектор $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, 0)^T$ - касат. вект. к ∂S. Вектор нормали: $(\dot{x}_2, -\dot{x}_1, 0)^T$ $\quad \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial s}$

$\sigma_{13} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$ $\quad \sigma_{23} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$ $\quad \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\dot{x}_1 = 0$

Как произв-я сл. ф-ии: $\frac{\partial}{\partial s}\psi(x_1(s), x_2(s)) = 0$

ψ на ∂S постоянна, без огр-я общн-ти: $\psi|_{\partial S} = 0$ $\quad \rightarrow \begin{cases} \Delta\psi = -\frac{E}{1+\nu}k \\ \psi|_{\partial S} = 0 \end{cases}$

Ф-ла Грина:

$$\boxed{\int\limits_S \nabla u \cdot \nabla v\, ds = \oint\limits_{\partial S} v\frac{\partial u}{\partial n}dl - \int\limits_S v\Delta u\, ds}$$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \overline{n}$

при $x_3 = l$: $P_1 = \int\limits_S \sigma_{31} ds = \int\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial x_2} ds = \begin{cases} u = x_2 \\ v = \psi \end{cases}$

Для P_2 аналогично

$$\nabla u \nabla v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \oint\limits_{\partial S} \underbrace{\psi}_{0 \text{ на } \partial S}\frac{\partial x_2}{\partial n}dl - \int\limits_S \psi\underbrace{\Delta x_2}_{0} ds = 0$$

$M_1 = M_2 = 0$, т.к. $\sigma_{33} = 0$

$$M_3 = \int\limits_S (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})ds = \Big/ \begin{matrix} u = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \\ v = \psi \end{matrix} \Big/ = \int\limits_S \left(x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)ds = \oint\limits_{\partial S} \underbrace{\psi}_{0}\frac{\partial u}{\partial n}dl + 2\int\limits_S \psi ds = M$$

$M = 2\int\limits_S \psi ds$ - связь заданного M и крутки k

Замена: $\psi = \frac{kE}{2(1+\nu)}\left(\chi(x_1, x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right)$

Задача для χ: $\begin{cases} \Delta\chi = 0 \\ \chi|_{\partial S} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$

$M = kD \qquad D = \frac{E}{1+\nu}\int\limits_S \left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \chi\right)ds$, где D – жёсткость бруса на кручении