6/10/20

Динамические задачи линейной теории упругости

$\rho \ddot{\vec{w}} = \operatorname{div} P$, где ρ - плотность тела , $\vec{w}$ - перемещение, $\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}$ - ускорение

Закон Гука: $P = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^*\right)$

$$
\begin{cases}
\rho \dfrac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} \vec{w} + \mu \Delta \vec{w} + \vec{f}_{нач} \\
\left[\begin{array}{l} \vec{w}\big|_{\partial\Omega} = \vec{w}_0(\vec{x}) \\ P\vec{n}\big|_{\partial\Omega} = \vec{\sigma}_0(\vec{x}) \end{array}\right. \\
\vec{w}\big|_{t=0} = \vec{\varphi}(\vec{x}) \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \vec{\psi}(\vec{x})
\end{cases}
$$

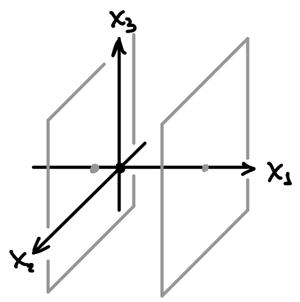
граничные условия (одно из двух)

начальные условия

По t вторая производная $\Rightarrow$ задаём 2 нач. усл.

Плоские волны

Пусть $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1(t, x_1) \\ w_2(t, x_1) \\ w_3(t, x_1) \end{pmatrix}$



движение расслоено по плоскостям $x_1 = const$

$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1}$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + f_{нач_1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2} + f_{нач_i} \quad , i = 2,3$$

Полученные ур-я имеют вид волновых ур-ий: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, где $c = const$

скорость волны

Решениями таких ур-ий являются ф-ии $f(x+ct)$, $g(x-ct)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f'' \cdot c^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - реш-е ур-я

для $g(x-ct)$ аналогично

Для постановки з. К. для волнового ур-я зададим нач. данные:

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

Решение будем искать в виде $u = f(x+ct) + g(x-ct)$

Т.е. $\begin{cases} u\big|_{t=0} = f(x)+g(x) = \varphi(x) & \forall x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = cf'(x) - cg'(x) = \psi(x) & \forall x \end{cases} \Rightarrow f(x)-g(x) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^x \psi(s)\,ds$

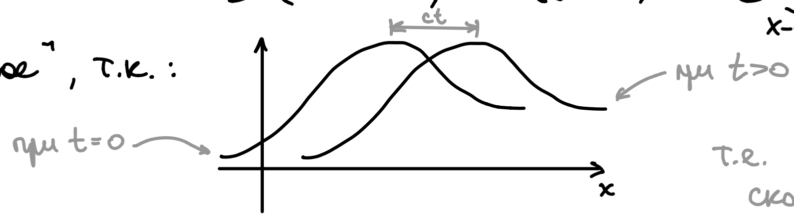
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)\,ds\right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)\,ds\right)$$

Т.е. реш. з.К. записывается в виде

$$u = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct}\psi(s)\,ds\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct}\psi(s)\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(t)\,dt\right)$$ — реш. з.К для волнового ур-я

"Волновое", т.к.:



т.е. график поедет вправо со скоростью c, как волна

Т.е. f "побежит" в положит. направлении, g — в отрицательном

Аналог в жизни — при ударе по воде во все стороны (и вправо, и влево) расходится волна.

Лучше понять именно лево-право можно через пример со струной гитары.

Затухание волн можно

$$\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2}, \quad i=2,3$$

массовыми силами пренебрегаем

Типы волн: 1 продольная (P-волна) — $w_1 \neq 0$; $w_2 = w_3 = 0$

2 поперечная (S-волна) — $w_1 = 0$; $w_2, w_3 \neq 0$

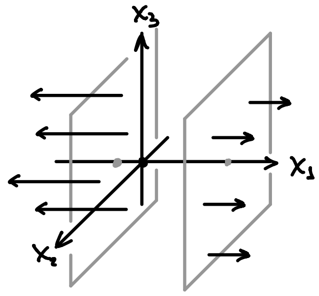
Скорость P-волны $c_p = \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$

Скорость S-волны $c_s = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$

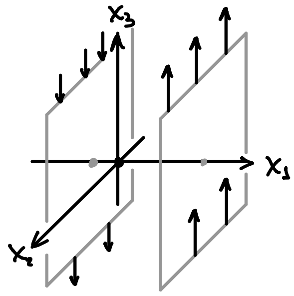
В P-волне $\underbrace{\operatorname{rot}\vec{w} = 0}_{\text{сдвиг}}$, $\underbrace{\operatorname{div}\vec{w} = \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} \neq 0}_{\text{объемная деформация}}$

В S-волне $\operatorname{rot}\vec{w} \neq 0$, $\operatorname{div}\vec{w} = 0$

Т.о. P-волна — сжатие материала, S-волна — сдвиг

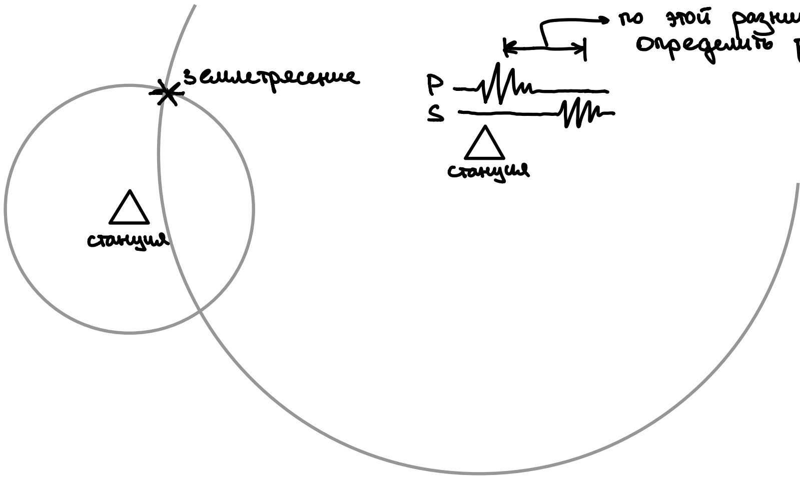


P-волна



S-волна

<u>Пример</u>

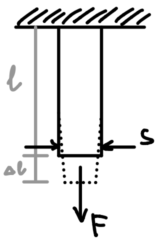


по этой разнице можем определить радиус (знаем соотн. скоростей S- и P- волн)

Теория пластичности

<u>Опр</u> **ПЛАСТИЧНОСТЬ** — св-во материала приобретать после снятия нагрузки <u>остаточные</u> деформации

которые останутся

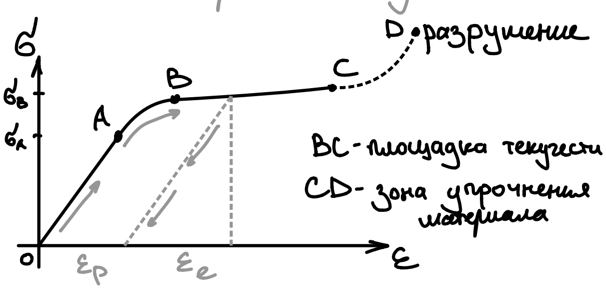


$\sigma = \frac{F}{S}$ – напряжения

$\varepsilon = \frac{l + \Delta l}{l}$ – деформация

$\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга

при линейном законе Гука



BC – площадка текучести

CD – зона упрочнения материала

σ_A – предел пропорциональности

σ_B – предел текучести

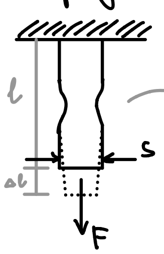
после него деформации становятся необратимыми

ε_p – пластическая (необратимая) деформация

ε_e – упругая (обратимая) деформация

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e$$

После предела текучести



"шейка" – необратимая деформация

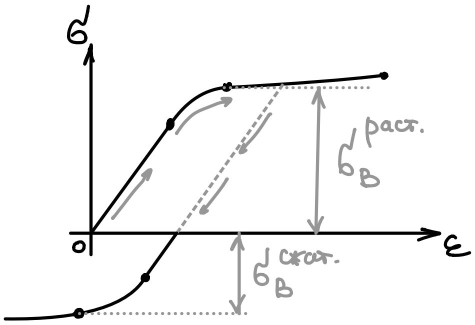
График напряжений – идеальный случай. Для разных материалов он очень разный.

Обозн выше:

↙ – объем пытается вернуться в начальное состояние

↗ – действуем силой, напряжение растет

Если не растягивать, а сжимать материал,



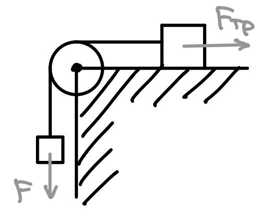
Эффект Баушингера : $|\sigma_в^{сжат}| < |\sigma_в^{раст.}|$

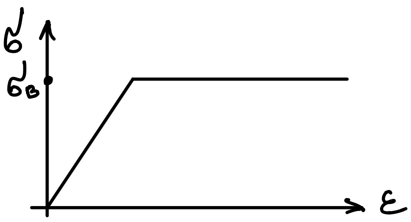
Идеализация видов пластического деформирования

— жестко-пластический материал

$mg \le F_{тр}$

$(\sim \sigma < \sigma_в)$

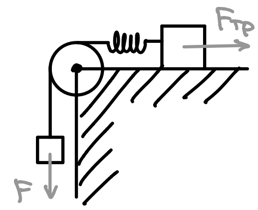


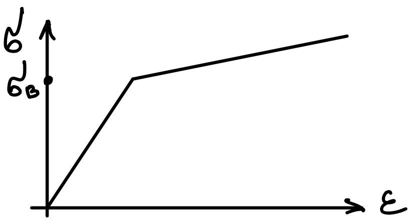


— упруго-пластический материал

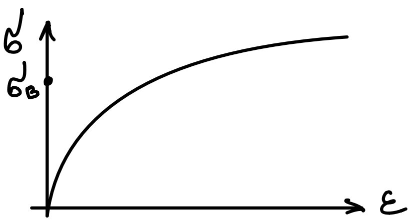
$mg > F_{тр}$

$(\sim \sigma > \sigma_в)$





— - ?



— ?

не успел