Плоская задача пластичности

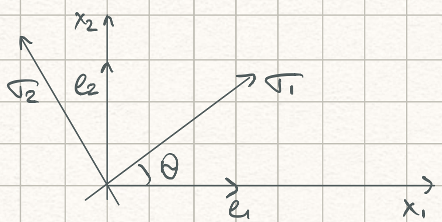
Предположим, что в главных осях тензора скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_3 = 0$
Деформации только в пл-ти Ox_1x_2
В этом случае критерии Мизеса и Треска́ совпадают:

Критерий Мизеса: $f = (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 = 6k^2$

Из ассоциативного з-на течения:
$$\dot{\varepsilon}_3 = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = \lambda\left[2(\sigma_3-\sigma_2)+2(\sigma_3-\sigma_1)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

Подставив в критерий Мизеса, получим:
$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 = 6k^2 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1-\sigma_2)^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_1-\sigma_2| = 2k,$$
а это то же, что **критерий Треска́**: $\frac{1}{2}\max\{|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_2-\sigma_3|, |\sigma_1-\sigma_3|\} = k$

Запишем критерий пластичности в произвольных осях:



Введём e_1, e_2, направленные вдоль x_1, x_2. Выразим σ_x в новой системе коор-т:
$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ -\sin\theta\end{pmatrix} \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{в осях } O\sigma_1\sigma_2$$

В осях Ox_1x_2:
$$\sigma_{11} = \bar{e}_1\cdot P\bar{e}_1 = \sigma_1\cos^2\theta + \sigma_2\sin^2\theta = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta$$
$$\sigma_{22} = \bar{e}_2\cdot P\bar{e}_2 = \sigma_1\sin^2\theta + \sigma_2\cos^2\theta = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta$$
$$\sigma_{12} = \bar{e}_2\cdot P\bar{e}_1 = (\sigma_1-\sigma_2)\sin\theta\cos\theta = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta$$

$(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2$ — критерий Мизеса/Треска́ в произвольной с.к.

$$* \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma + k\cos 2\theta \\ \sigma_{22} = \sigma - k\cos 2\theta \\ \sigma_{12} = k\sin 2\theta \end{cases}, \text{ где } \quad \sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, \quad k = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

При $k = const$ критерий пластичности автоматически выполняется

Усл-я равновесия: $\operatorname{div} P = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$

Подставим $*$:
$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma}{\partial x_1} - 2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + 2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial x_2} + 2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + 2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$
← ур-я плоской задачи идеальной пластичности Мизеса

Инварианты Римана. Характеристическая запись системы ур-й Мизеса

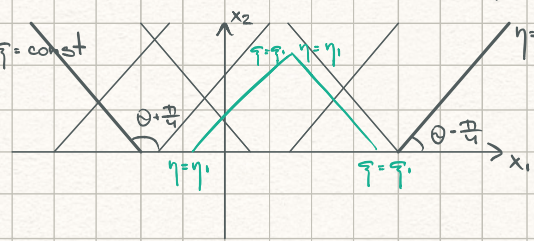
Введём ф-ии: $\boxed{\xi = \frac{\sigma}{2k} + \theta, \quad \eta = \frac{\sigma}{2k} - \theta}$ — инварианты Римана

Тогда в терминах ξ и η ур-я перепишутся:
$$\begin{cases} \frac{\partial\xi}{\partial x_1}\cos 2\theta + \frac{\partial\xi}{\partial x_2}(1+\sin 2\theta) = 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial x_1}\cos 2\theta + \frac{\partial\eta}{\partial x_2}(1+\sin 2\theta) = 0 \end{cases}$$

Покажем верность данной системы:
$$\left(\frac{1}{2k}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)\cos 2\theta + \left(\frac{1}{2k}\frac{\partial\sigma}{\partial x_2} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)(1+\sin 2\theta) = \left(\sin 2\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)\cdot\cos 2\theta + \left(-\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2} - \cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)(1+\sin 2\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\left(\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta + \cos 2\theta - \cos 2\theta(1+\sin 2\theta)\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\left(-\cos^2 2\theta + 1 - \sin^2 2\theta\right) = 0$$

Характеристики: $C_\pm = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\pm 1 + \sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \mathrm{tg}(\theta \pm \frac{\pi}{4})$

Вдоль х-к $C_\pm$ сохраняются ξ (вдоль C_+) и η (вдоль C_-)



Линеаризация этой с.к. осуществляется заменой (x_1, x_2) на (ξ, η)

$x_1 = X_1(\xi(x_1,x_2), \eta(x_1,x_2))$
$x_2 = X_2(\xi(x_1,x_2), \eta(x_1,x_2))$ — тождества по x_1, x_2 => можно диф-ть по x_1, x_2

Простые волны Римана

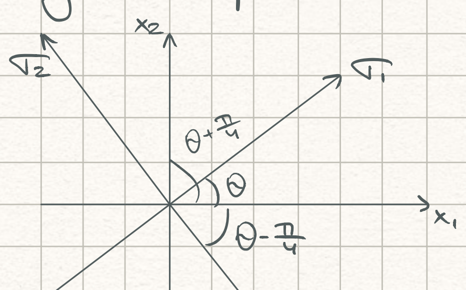
Опр **Простая волна** — точное решение системы Мизеса, в ктр один из инвариантов Римана явл-ся const.

Т.е. ξ-волна ~ ξ=const во всей области η-волна ~ η=const

Если ξ=const во всей обл-ти, то при переходе от одной х-ки к другой ξ не меняется
В ξ-волне вдоль C_- сохр-ся обе ξ и η => вдоль C_- сохр-ся σ и θ => угол наклона х-ки θ=const => х-ка C_- — прямая

Т.е. ξ-волна ~ ξ=const: $x_2 = \mathrm{tg}(\theta - \frac{\pi}{4})x_1 + F(\theta)$ $\frac{\sigma}{2\tau} + \theta = \xi_0$
η-волна ~ η=const: $x_2 = \mathrm{tg}(\theta + \frac{\pi}{4})x_1 + \underset{G(\xi_0 - 2\theta) = G(\eta_0)}{G(\theta)}$ $\frac{\sigma}{2\tau} - \theta = \eta_0$

Физическая трактовка:



Х-ки $C_\pm$ проходят вдоль площадок, повёрнутых на $\frac{\pi}{4}$ отн-но главных осей тензора напр-й => вдоль max касат. напряж-й => вдоль этих линий материал "тай"

$C_\pm$ наз-ся **линиями скольжения** (часто их видно глазами)