Тензор напряжений

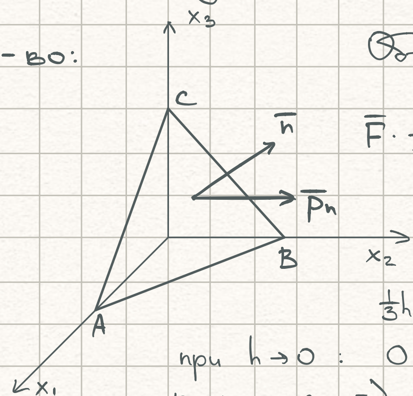
Постулат близкодействия:

Силы взаимодействия м/у эл-тами среды явл-ся близкодейств-ми
=> суммарная сила, действ. на выделен. объём — поверхностная сила

Опр $\bar{F} = \int_V \bar{F}(\bar{x})dV$ — главный вектор сил $\qquad \int_V \bar{F}(\bar{x})dV = \int_{\partial V} \bar{p}_n dS \quad (*)$

Лемма 2 (теорема Коши):

Пусть $\forall V$ найдётся такая $\bar{F}$ что для $\bar{p}_n$ вып. $*$.
Тогда $\bar{p}_n$ завис. от $\bar{n}$ линейно, т.е. $\exists$ тензор P такой, что $\bar{p}_n = P\langle\bar{n}\rangle$



Д-во: Объём тетраэдра: $\frac{1}{3}hS$, где h - высота, S - площ. осн-я

$\bar{F}\cdot\frac{1}{3}hS = \bar{p}_{\bar{n}}\cdot S + \bar{p}_{-\bar{e}_1} S\cdot\cos(\bar{n},\bar{e}_1) + p_{-e_2}\cdot S\cdot\cos(n,e_2) + p_{-e_3}\cdot S\cdot\cos(n,e_3)$

(так можно записать по т. о среднем) $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

$\cos(n,e_i) = \frac{n_i}{\|n\|} = n_i$

$\frac{1}{3}hS\,\bar{F} = S\bar{p}_{\bar{n}} + n_1 S\,\bar{p}_{-\bar{e}_1} + n_2 S\,\bar{p}_{-\bar{e}_2} + n_3 S\,\bar{p}_{-\bar{e}_3} \quad \Big| \cdot \frac{1}{S}$

при $h\to 0$: $\quad 0 = \bar{p}_{\bar{n}} + n_1\bar{p}_{-\bar{e}_1} + n_2\bar{p}_{-\bar{e}_2} + n_3\bar{p}_{-\bar{e}_3}$

n - произв. => можем подст. и e_i => $\bar{p}_{\bar{e}_i} = -\bar{p}_{-\bar{e}_i}$

$\bar{p}_{\bar{n}} = n_1\bar{p}_{\bar{e}_1} + n_2\bar{p}_{\bar{e}_2} + n_3\bar{p}_{\bar{e}_3} \qquad P = \begin{bmatrix} p_{e_1} & p_{e_2} & p_{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{p}_{\bar{n}} = P\langle\bar{n}\rangle$

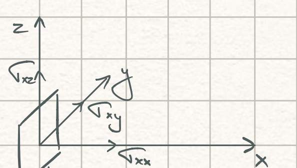
Опр P — тензор напряжений Коши

$\int_{\partial V} \bar{p}_{\bar{n}} dS = \int_{\partial V} P\langle\bar{n}\rangle dS \overset{\text{ГО}}{=} \int_V \operatorname{div} \overset{\curvearrowright \text{ранга } 1}{P}\, dV \qquad (\operatorname{div} P)_i = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad$ суммир-е по j, $i = 1,2,3$

$\int_V \bar{x}\times\bar{F}(\bar{x})dV = \int_{\partial V} \bar{x}\times\bar{p}_{\bar{n}} dS = \int_{\partial V} \bar{x}\times P\langle\bar{n}\rangle dS = \int_{\partial V} \bar{x}\times\bar{p}_{\bar{e}_i} n_i dS \overset{\text{ГО}}{=} \int_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{x}\times\bar{p}_{\bar{e}_i})dV = \int_V \left(\bar{e}_i\times\bar{p}_{\bar{e}_i} + \bar{x}\times\frac{\partial\bar{p}_{\bar{e}_i}}{\partial x_i}\right)dV =$

$= \int_V (\Delta + \bar{x}\times\operatorname{div} P)dV$, где $\Delta = (\sigma_{23}-\sigma_{32})\bar{e}_1 + (\sigma_{31}-\sigma_{13})\bar{e}_2 + (\sigma_{12}-\sigma_{21})\bar{e}_3$

$\bar{F} = \operatorname{div} P \Rightarrow \int_V \Delta\, dV = 0 \Rightarrow \Delta \equiv 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$



dS с вект. норм. $\bar{x}$

Связь напряжений и деформаций

Идеально упругое и гиперупругое тело

Опр Тело идеально упругое, если $P = \varphi(\mathcal{E})$

Опр Путь нагружения — процесс изм-я тензора напряж-й (деформ-й) в завис-ти от от монот. возр. параметра t

$\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$, $P = P^*$ => 6 независ. компонент $\qquad \mathbb{R}^6(\varepsilon_{ij})$ или $\mathbb{R}^6(\sigma_{ij})$

Опр Тело гиперупругое, если работа над элемент. объёмом в замкн. цикле по напр-ям или деформ-м $= 0$

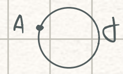
свёртка

$\delta A = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \qquad \delta A = \sigma : d\varepsilon, \quad A:B = \mathrm{tr}(AB^T))$

полн. дифф-ал

$\oint \delta A = \oint \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} = 0$

$dU = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \qquad \sigma_{ij} = \dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$



$\oint\limits_{d} dF = F(A) - F(A) = 0$

$f(x,y) \qquad df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$

Если хотим обратить завис-ть:

$f = u \quad x = \varepsilon_{ij}$

$y = \dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$

$\Phi = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - u(\varepsilon_{ij}) \;\Big|\; \dfrac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}$

$\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$

Преобр-е Лежандра:

$(f, x) \to (\Phi, y)$

$y = f'(x) \qquad \Phi = yx - f(x)$

Опр U - упругая энергия

Φ - потенциал деформаций

Линейная теория упругости

$P = \varphi(\varepsilon)$ – линейна

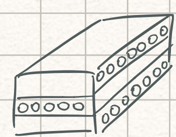
Опр $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad \varepsilon_{ij} = \Pi_{ijkl}\sigma_{kl}$

E_{ijkl} – тензор модулей упругости

Π_{ijkl} – тензор модулей податливости

$P = P^*, \; \varepsilon = \varepsilon^* \Rightarrow E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} \qquad \Pi_{ijkl} = \Pi_{jikl} = \Pi_{ijlk}$

тут 27 констант — сдохнуть можно



ex: сосуды

Закон Гука

Для изотропного тела

Опр Тело изотропно, если есть инвариантн-ть отн-но группы вращ-й

Ex Q-ортог. м-ца $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T \qquad \varepsilon' = Q\varepsilon Q^T$ Если $P = P(\varepsilon)$, то $P' = P(\varepsilon)'$

$P' = QPQ^T$

$P = \alpha I + \beta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2$ по т. Гамильт.-Кэли $J_1 - J_2\varepsilon + J_3\varepsilon^2 - \varepsilon^3 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = f(J_1, J_2, J_3, \varepsilon, \varepsilon^2)$

$P' = QPQ^T = \alpha\underbrace{QQ^T}_{=I} + \beta\underbrace{Q\varepsilon Q^T}_{=\varepsilon'} + \gamma\underbrace{Q\varepsilon^2 Q^T}_{=(\varepsilon')^2} = P(\varepsilon')$

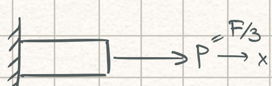
Закон Гука:

$\boxed{P = \lambda\, \mathrm{tr}\,\varepsilon\, I + 2\mu\varepsilon} \qquad \mathrm{tr}\,\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \qquad \lambda, \mu$ – коэф-ты Ламе

Навесим на него tr:

$\mathrm{tr}P = 3\lambda\,\mathrm{tr}\,\varepsilon + 2\mu\,\mathrm{tr}\,\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{1}{2\mu}\left(P - \dfrac{\lambda\,\mathrm{tr}P}{3\lambda + 2\mu} I\right)$

Константы можно брать из эксперимента:



$P = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

отн. изм-е

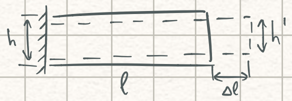
$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \dfrac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} p$

$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{22} = -\dfrac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} p$

из термеха: сила пропорц. растяж-ю $\quad p = E\varepsilon_{xx}$

$E = \dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ – модуль Юнга (коэф-т растяж-я)

Ex



ε_{yy} - поперечн. сжатие ε_{xx} - продольн. растяж-е

$$\left|\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}\right| = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \nu$$ — коэф-т Пуассона

Знаем:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{xx} = \dfrac{\Delta l}{l} \\ P\end{matrix}\right| \Rightarrow E$$

или

Знаем:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{xx} = \dfrac{\Delta l}{l} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{h'-h}{h}\end{matrix}\right| \Rightarrow \nu$$