10/3/21

$\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$, $\theta^*_{n,k} = ((k+1)\overline{X^k})^{\frac{1}{k}}$ – АНО

$$\mathbb{D}x_1^k = \mathbb{E}x_1^{2k} - (\mathbb{E}x_1^k)^2 = \frac{\theta^{2k}}{2k+1} - \frac{\theta^{2k}}{(k+1)^2} = \frac{k^2\theta^{2k}}{(2k+1)(k+1)^2}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{k\theta^k}{\sqrt{2k+1}(k+1)}$$

$$H(t) = ((k+1)t)^{\frac{1}{k}}, \quad H'(t) = (k+1)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{k} t^{\frac{1}{k}-1}$$

$$\tilde{\sigma} = (k+1)^{1/k} \frac{1}{k} \left(\frac{\theta^k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}-1} \frac{k\theta^k}{\sqrt{2k+1}(k+1)} = \frac{\theta}{\sqrt{2k+1}} \quad *$$

$$(\theta^*_n - \theta) \approx \frac{\gamma \cdot \sigma(\theta)}{\sqrt{n}}, \quad \gamma \in N_{0,1}$$

<u>Напом</u> Равном. интегр: $\sup\limits_n \mathbb{E}|\xi_n| I(|\xi_n| > N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

<u>Напом</u> | $\xi_n \Rightarrow \xi$, $\{\xi_n\}$ РИ

$\Rightarrow \mathbb{E}\xi_n \longrightarrow \mathbb{E}\xi$

$$\frac{\sqrt{n}(\theta^*_n - \theta)}{\sigma(\theta)} \Rightarrow \gamma \in N_{0,1} \Rightarrow \frac{n(\theta^*_n-\theta)^2}{\sigma^2} \Rightarrow \gamma^2, \text{ РИ} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\frac{n(\theta^*_n-\theta)^2}{\sigma^2(\theta)} \longrightarrow \mathbb{E}\gamma^2 = 1 \Rightarrow \delta(\theta) = \mathbb{E}(\theta^*_n - \theta)^2 \sim \frac{\sigma^2}{n}$$

$\theta^*_n = ((k+1)x_1^k)^{\frac{1}{k}}$, чем k больше, тем оценка лучше $\circledast$

fix n, $k \to \infty$:

$$\left((k+1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \leq (k+1)^{\frac{1}{k}} \cdot X_{(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} X_{(n)}$$

$$\left((k+1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \geq (k+1)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/k} X_{(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} X_{(n)}$$

Т.о. $\left((k+1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} X_{(n)}$

↳ ОММ для $\{U[0,\theta]\}$ ↳ АНО

↳ ОМП для $\{U[0,\theta]\}$ ↳ не АНО

<u>Замечание</u> Класс АНО не замкнут.

Достаточные статистики и оценки

<u>Напом</u> Статистика – измеримая ф-ия от X $\quad S = S(X)$

Оценка – статистика, приближающая в том или ином смысле неизвестный параметр

$S=S(X)$ – **достаточная** для оценки θ статистика, если

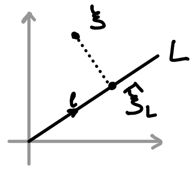
$\forall A \in \mathbb{X}^n$ (или $\subseteq$) $\quad \mathbb{P}_\theta(X\in A \mid S)$ не зависит от θ (почти наверное)

$\hookrightarrow \mathbb{E}\{I(X\in A)\mid S\} := \hat{g}(S)$

<u>Замечание</u> По умолчанию предполагаем, что $\mathbb{E}X_1^2$ сущ-ет,
т.к. работаем с $\delta_{\theta_n^*}(\theta) = \mathbb{E}(\theta_n^* - \theta)^2$

Если по обозн. мат. ан-а, то работаем в $L_2(\Omega, \mathbb{P})$

<u>Напом</u> Ортопроекция — $\forall l \in L \quad (\hat{\xi}_L, l) = (\xi, l) = \mathbb{E}\xi l \quad (\hat{\xi}_L - \xi, l) = 0$



$$L = \{g(S) \mid \mathbb{E}g^2(S) < \infty\}$$

Пусть S – дискр.

Св-во (Эквивалентное определение дост. статист. для дискр. СВ)

$S=S(X)$ – достаточная оценка $\iff$

$\forall A \in \mathbb{X}^n \quad \mathbb{P}_\theta(X\in A \mid S=s_i)$ – не зависит от θ для всех s_i

$\hookrightarrow$ обычная условная вероятность

<u>Замечание</u> Статистика "достаточная", потому что в ней есть вся информация про параметр.

<u>Пример</u> $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda>0} \qquad S = n\overline{X}$

$$\mathbb{P}(S\in A) = \sum_{i\in A} p_i$$

Т.к. тут X дискр, то можем считать $\mathbb{P}_\theta(X=\vec{z} \mid S=s_i)$

$$\mathbb{P}(X=\vec{z} \mid S=s_i) = \frac{\mathbb{P}(X_1=z_1,\dots,X_n=z_n, S=s_i)}{\mathbb{P}(\sum_{j=1}^n X_j = s_i)} \ominus$$

$\hookrightarrow \in \Pi_{n\lambda}$

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^n X_j = s_i\Big) = \frac{(n\lambda)^{s_i}}{s_i!} e^{-n\lambda}$$

$$\ominus \begin{cases} 0, & s_i \neq \sum_{j=1}^n z_j \\ \dfrac{\mathbb{P}(X_1=z_1,\dots,X_n=z_n)}{\mathbb{P}(\sum X_j = s_i)}, & s_i = \sum_{j=1}^n z_j \end{cases} = \begin{cases} 0, & s_i \neq \sum_{j=1}^n z_j \\ \dfrac{\dfrac{\lambda^{\sum z_j}\cdot e^{-n\lambda}}{\prod z_j!}}{\dfrac{(n\lambda)^{\sum z_j} e^{-n\lambda}}{(\sum z_j)!}}, & s_i = \sum z_j \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & s_i \neq \sum_{i=1}^{n} z_j \\ \dfrac{(\sum z_j)!\,(\prod z_j)!}{n^{\sum z_j}}, & s_i = \sum_{i=1}^{n} z_j \end{cases}$$

– не зависит от λ $\Rightarrow$ достаточная

Теорема (Факторизационная теорема Неймана-Фишера)

Критерий достаточности

S – достаточная статистика $\Leftrightarrow$ $\Psi_X(\theta) = \varphi(\theta, S)\, h(\vec{X})$

<u>Д-во</u> $\Leftarrow$ для простоты док-ва рассмотрим дискретные распр.

$$\mathbb{P}(\vec{X} = \vec{z} \mid S = s_i) = \frac{\mathbb{P}(x_1 = z_1, \dots, x_n = z_n, S = s_i)}{\mathbb{P}(S = s_i)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & s_i \neq \sum z_j \\ ? & \end{cases}$$

Но $$\mathbb{P}(\vec{X} = \vec{z} \mid S = s_i) = \frac{\Psi_{\vec{z}}(\theta)}{\mathbb{P}(S(\vec{X}) = s_i)} = \frac{\Psi_{\vec{z}}(\theta)}{\sum\limits_{\vec{y}: S(\vec{y}) = s_i} \Psi_{\vec{y}}(\theta)}$$

Т.о. $$\begin{cases} 0, & s_i \neq \sum z_j \\ \dfrac{\varphi(\theta, S)\, h(\vec{z})}{\sum\limits_{\vec{y}: S(\vec{y}) = s_i} \varphi(\theta, S)\, h(\vec{y})}, & s_i = \sum z_j \end{cases} = \begin{cases} 0, & s_i \neq \sum z_j \\ \dfrac{h(\vec{z})}{\sum\limits_{\vec{y}: S(\vec{y}) = s_i} h(\vec{y})}, & s_i = \sum z_j \end{cases}$$

– не зависит от θ ■

тут ещё чуть-чуть что-то было

<u>Замечание</u> Любое взаимооднозначное отображение достаточность не портит.