Напоминание

$$\underbrace{P_n^*(A)}_{\text{эмпирическое распределение}} = \frac{\#\{x_i \mid x_i \in A\}}{n} \xrightarrow{\text{пн}} \underbrace{\mathbb{P}_{x_1}(A)}_{\text{истинное распределение}} \quad \text{равномерно по } A \in \mathbb{A}$$

$X = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{конкретные значения, уже не СВ}}$ — выборка

$x_1(\omega)$ — СВ

$\mathbb{A}$ — вполне огр. отн. $\mathbb{P}_{x_1}$, $x_i \in (\mathbb{A}, \mathbb{B})$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{A_i^{\pm}\}_1^{N(\varepsilon)} : \forall A \in \mathbb{A} \ \exists n \le N(\varepsilon) : A_n^- \subseteq A \subseteq A_n^+ \ \text{и} \ \mathbb{P}_{x_1}(A_n^+ \setminus A_n^-) \le \varepsilon$$

Минимальное такое $N(\varepsilon)$ — **ε-энтропия**

Теорема Гливенко-Кантелли

$\mathbb{A}$ — вполне огр. отн. $\mathbb{P}_{x_1}$

$$\Rightarrow \sup_{A \in \mathbb{A}} \left| P_n^*(A) - \mathbb{P}_{x_1}(A) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} 0$$

Д-во $B_i := \{A \in \mathbb{A} \mid A_i^- \subseteq A \subseteq A_i^+\}$. $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$ — "брикеты"

$$\bigcup_1^N B_i = \mathbb{A}$$

$$\sup_{A \in \mathbb{A}} \left| P_n^*(A) - \mathbb{P}_{x_1}(A) \right| = \max_{i=1,N} \sup_{A \in B_i} \left| P_n^*(A) - \mathbb{P}_{x_1}(A) \right| \le$$

$\pm P_n^*(A^-) \pm \mathbb{P}_{x_1}(A^-)$

sup нет, т.к. в выраж нет A

$$\le \max_{i=1,N} \Big(\underbrace{\sup_{A \in B_i} \left| P_n^*(A) - P_n^*(A^-) \right|}_{= P_n^*(A^+) - P_n^*(A^-)} + \underbrace{\sup_{A \in B_i} \left| \mathbb{P}_{x_1}(A) - \mathbb{P}_{x_1}(A^-) \right|}_{= \mathbb{P}_{x_1}(A^+) - \mathbb{P}_{x_1}(A^-)} + \underbrace{\left| P_n^*(A^-) - \mathbb{P}_{x_1}(A^-) \right|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} 0 \text{ по ЗБЧ}}$$

по св-ву монотонности меры

По УЗБЧ $P_n^*(A^+) - P_n^*(A^-) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} \mathbb{P}_{x_1}(A^+) - \mathbb{P}_{x_1}(A^-)$

А $\mathbb{P}_{x_1}(A^+) - \mathbb{P}_{x_1}(A^-) = \mathbb{P}_{x_1}(A^+ \setminus A^-) \le \varepsilon$

Т.о. $\displaystyle \sup_{A \in \mathbb{A}} \left| P_n^*(A) - \mathbb{P}_{x_1}(A) \right| \le \max_{i=1,N} 2\varepsilon = 2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ ■

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

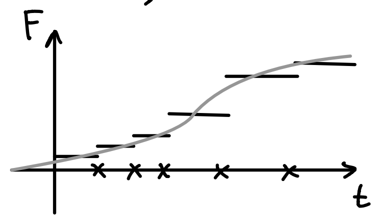
$$F_n^*(t) = \frac{\#\{x_i \mid x_i < t\}}{n}$$

Эмпирические распределения дискретны.
Его атомы: x_i, их массы: $p = 1/n$

$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(n)}$ — **ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД**

Следствие (Классическая теорема Гливенко-Кантелли)

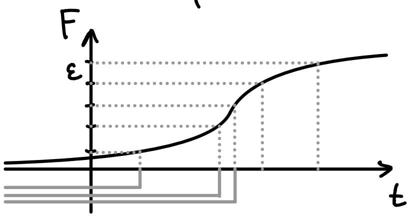
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| F_n^*(t) - F_{X_1}(t) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} 0$$



Д-во

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

Рассмотрим непрерывные распр. : $F_{X_1} \in C(\mathbb{R})$



$\varepsilon := \frac{1}{M}$

Напом $F^{-1}(s) = \inf\{t \mid F(t) \geq s\}$ — квантильное преобр. ф-ии F

$\{A_i^{\pm}\} = \{(-\infty, F^{-1}(\frac{k}{M})) \mid k = \overline{0,m}\}$ $\quad F^{-1}(0) := -\infty$

$F_{X_1}(t+\Delta) - F_{X_1}(t) = \mathbb{P}(X_1 \in (t, t+\Delta))$

Упр $F \notin C(\mathbb{R})$

$$\{A_i^{\pm}\} := \{(-\infty, F^{-1}(\tfrac{k}{M})), (-\infty, F^{-1}(\tfrac{k}{M})] \mid k = \overline{0,m}\} \ \blacksquare$$

Напом $\mathbb{P} = \alpha\mathbb{P}_1 + (1-\alpha)\mathbb{P}_2$ — смесь

Рассматриваем $\mathbb{P}_1$ АНР, $\mathbb{P}_2$ - дискр.

Теорема | $\mathcal{A}$ - вполне огр. отн $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$

$\Rightarrow \forall\alpha\in(0,1)$ $\mathcal{A}$ вполне огр. отн. $\mathbb{P} = \alpha\mathbb{P}_1 + (1-\alpha)\mathbb{P}_2$

Д-во $\{A_i^{\pm}\}_1^{N(\varepsilon)}$, $\{B_i^{\pm}\}_1^{\hat{N}(\varepsilon)}$

Из $\{A_i^{\pm} \cap B_j^{\pm}\}$ сможем набрать класс правых концов для $\mathbb{P}$

А из $\{A_i^{\pm} \cup B_j^{\pm}\}$ — класс левых концов

Обозн. соотв. $\{C_i^+\}_1^{N^*(\varepsilon)}$, $\{C_i^-\}_1^{N^*(\varepsilon)}$

$\forall A\in\mathcal{A}$ $\exists A_{i_0}^{\pm}, B_{j_0}^{\pm}$ (по $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$)

$C_{i_0,j_0}^- := A_{i_0}^- \cup B_{j_0}^-$, $C_{i_0,j_0}^+ = A_{i_0}^+ \cap B_{j_0}^+$

$A_{i_0}^- \subseteq A \subseteq A_{i_0}^+$, $B_{j_0}^- \subseteq A \subseteq B_{j_0}^+ \Rightarrow A_{i_0}^- \cup B_{j_0}^- \subseteq A \subseteq A_{i_0}^+ \cap B_{j_0}^+$

$$\mathbb{P}(C^+_{i_0,j_0} \setminus C^-_{i_0,j_0}) = \alpha\left(\mathbb{P}_1(A^+_{i_0} \cap B^+_{j_0}) - \mathbb{P}_1(A^-_{i_0} \cup B^-_{j_0})\right) + (1-\alpha)\left(\mathbb{P}_2(A^+_{i_0} \cap B^+_{j_0}) - \mathbb{P}_2(A^-_{i_0} \cup B^-_{j_0})\right) \leq$$

$$\mathbb{P}_1(A^+_{i_0} \cap B^+_{j_0}) \leq \mathbb{P}_1(A^+_{i_0}) \qquad \mathbb{P}_2(A^+_{i_0} \cap B^+_{j_0}) \leq \mathbb{P}_2(B^+_{j_0})$$

$$\mathbb{P}_1(A^-_{i_0} \cup B^-_{j_0}) \geq \mathbb{P}_1(A^-_{i_0}) \qquad \mathbb{P}_2(A^-_{i_0} \cup B^-_{j_0}) \geq \mathbb{P}_2(B^-_{j_0})$$

$$\leq \alpha\left(\mathbb{P}_1(A^+_{i_0}) - \mathbb{P}_1(A^-_{i_0})\right) + (1-\alpha)\left(\mathbb{P}(B^+_{j_0}) - \mathbb{P}(B^-_{j_0})\right) \leq \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon$$

■

Теорема | $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, $\mathbb{P}$ - дискр.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}$ вполне огр. отн. $\mathbb{P}$

Напом по т. Лебега $\forall \mathbb{P}$ $\mathbb{P} = \alpha \mathbb{P}_Д + (1-\alpha)\mathbb{P}_Н$, $\mathbb{P}_Д$ - дискр, $\mathbb{P}_Н$ - непр

это есть следствие из доказываемой теоремы

Д-во $\mathbb{X} := \mathbb{N}$, $\mathbb{B} := 2^{\mathbb{N}}$

$\mathbb{P}$: $\{i\}$ - атомы, $\{p_i\}$ - их массы

fix $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon)$: $\sum\limits_{N(\varepsilon)}^{\infty} p_i \leq \varepsilon$

$\mathcal{N}(\varepsilon) := (1, \dots, N(\varepsilon))$

$$A^-_i = \overset{\text{или } \subset \mathcal{N}(\varepsilon)}{A \cap \mathcal{N}(\varepsilon)} \qquad A^+_i := A^-_i \cup \{N(\varepsilon)+1, N(\varepsilon)+2, \dots\}$$

$$\mathbb{P}(A^+_i) - \mathbb{P}(A^-_i) = \sum_{N(\varepsilon)}^{\infty} p_i \leq \varepsilon \quad ■$$