Борисов Игорь Семенович 3/2/21

В тервере было: есть вер. пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и эксперимент, у которого известно распределение

По этим данным изучаем S_n и пр., через ЗБЧ, ЦПТ и пр.; узнаем вероятности получения конкретных результатов

В матстате: знаем результаты эксперимента (конечное число, «выборка»), по ним выводим распределение, а точнее его оцениваем

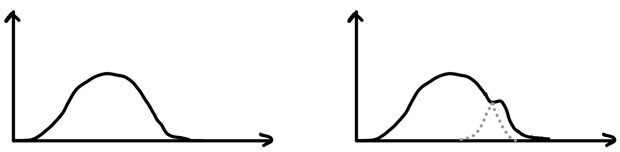
$X = (x_1, \dots, x_n)$ — **ВЫБОРКА** объема n из неизвестного распределения

МАТ. СТАТИСТИКА — раздел математики, занимающийся математич. обработкой результатов стохастического эксперимента

↳ случайного

<u>Пример</u> Голосование

схема Бернулли



ОК ВБРОС

ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение, построенное по выборке

$$P_n^*(A) := \frac{\#\{x_i \mid x_i \in A\}}{n}$$

↳ мера

С точки зрения тервера $X = (x_1, \dots, x_n)$ — НОР СВ

независ. одинаково распред. СВ

ИСТИННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — $\mathbb{P}_{x_1}(A) := \mathbb{P}(x_1 \in A)$, $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$

<u>Теорема</u> (ЗБЧ для P_n^*)

$$\forall A \quad P_n^*(A) \xrightarrow{\text{пн}} \mathbb{P}_{x_1}(A)$$

Неизвестное распределение приближаем эмпирическим

<u>Д-во</u> Эта теорема — следствие УЗБЧ □

$$P_n^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i \in A) \qquad I(x_i \in A) = \begin{cases} 1, & x_i \in A \\ 0, & x_i \notin A \end{cases}$$

$$\sup_{A \in \mathbb{A}} \left| P_n^*(A) - \mathbb{P}_{x_1}(A) \right| \xrightarrow{\text{пн}} 0$$ — надо это док-ть

$x_i \in \mathfrak{X}$ — любое измеримое пр-во в общем случае

Сейчас рассмотрим $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$

$\mathbb{A}$ - все конечные мн-ва $\mathbb{X}$

Если $\forall t \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}_{X_1}(t) = 0$, то $\forall A \in \mathbb{A}$ $\mathbb{P}_{X_1}(A) = \sum\limits_{t \in A} \mathbb{P}_{X_1}(t) = 0$

Но $\exists A \in \mathbb{A}$ $P_n^*(A) = 1$

Т.е. поточечная сходимость есть, а равномерной — нет ■

Теорема Гливенко-Кантели

$X_i \in (\mathbb{X}, \mathbb{B})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A}$ вполне огр отн. $\mathbb{P}_{X_1}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{A_i^{\pm}\}_1^{N(\varepsilon)} \subset \mathbb{B} : \forall A \in \mathbb{A} \quad \exists n \le N(\varepsilon) : \begin{array}{l} A_n^- \subseteq A \subseteq A_n^+ \\ \mathbb{P}_{X_1}(A_n^+ \setminus A_n^-) \le \varepsilon \end{array}$$

$\{A_i^{\pm}\}_1^N$ — ДВУСТОРОННЯЯ ε-СЕТЬ

$\mathbb{A}$ - метрический предкомпакт

Теорема Гливенко-Кантели — обобщенная

$\mathbb{A}$ - вполне огр отн $\mathbb{P}_{X_1}$

$$\Rightarrow \sup_{A \in \mathbb{A}} |P_n^*(A) - \mathbb{P}_{X_1}(A)| \xrightarrow{\text{пн}} 0$$

Пример $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{A} = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ открытые лучи

$$\forall F : \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n^*(t) - F_{X_1}(t)| \xrightarrow{\text{пн}} 0$$

$F_n^*(t) = \dfrac{\#\{x_i \mid x_i < t\}}{n}$ — ЭМПИРИЧЕСКАЯ Ф-ИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ