Напом **Теорема** Неравенство Рао-Крамера

$$\delta_{\theta_n^*}(\theta) \geqslant \frac{(1+b'(\theta))^2}{nI(\theta)} + b_n^2(\theta), \quad \text{где } I(\theta) = \mathbb{E}\,(\ell'_{x_1}(\theta))^2$$

Оценка R-эффективна, если $\delta_{\theta_n^*}(\theta) \geqslant \frac{(1+b'(\theta))^2}{nI(\theta)} + b_n^2(\theta)$

$$(\mathbb{E}(\theta_n^* - \mathbb{E}\theta_n^*)\, L'_X(\theta))^2 \leq D\theta_n^* \cdot nI(\theta)$$

$$(\mathbb{E}\xi\eta)^2 = (\mathbb{E}\xi)^2(\mathbb{E}\eta)^2 \iff \eta = c\xi, \quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{в т.г. } 0)$$

Т.о. оценка R-эфф $\iff$ $\theta^* \equiv \text{const}$

$$L'_X(\theta) = c(\theta)\,(\theta^* - \mathbb{E}\theta^*)$$

Следствие (Критерий R-эффективности)

$$\theta_n^* \text{ R-эффективна} \iff \underbrace{L_X(\theta)}_{\varphi_X(\theta) = \exp\{A_n(\theta)\theta_n^* + B_n(\theta)\}\, h(X)} = A_n(\theta)\cdot\theta_n^* + B_n(\theta) + S(X)$$

$$\underbrace{\exp\{A_n(\theta)\theta_n^* + B_n(\theta)\}}_{\text{как в т. Нейм-Фиш. } \varphi(\theta,\theta_n^*)}$$

Пример • $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda>0}$

$$\varphi_X(\lambda) = \prod \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \underbrace{\lambda^{n\overline{X}} e^{-\lambda n}}_{= e^{\underbrace{-\lambda n + n\overline{X}\log\lambda}_{\text{оценка входит в показатель линейно}}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\prod x_i!}}_{h(X)}$$

Т.о. $\overline{X}$ — R-эфф

• $\{N_{\alpha,1}\}$

$$\varphi_X(\alpha) = c(X)\exp\{\underbrace{-\tfrac{1}{2}n\overline{X} - n\alpha\overline{X}}_{\text{входит линейно}} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 n\}$$

$\overline{X}$ - R-эфф.

• $\{E_\alpha\}_{\alpha>0}$ $\qquad f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$

$$\varphi_X(\alpha) = e^{-\alpha n \frac{1}{\hat{\alpha}_n} + n\log\alpha}, \quad \hat{\alpha}_n = \frac{1}{\overline{X}}$$

Тут $\hat{\alpha}_n$ - эф. оценка, но не R-эф.

$I(\lambda) = \mathbb{E}(\ell'_{x_1}(\lambda))^2 \qquad f_\lambda(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad \ell_x(\lambda) = x\log\lambda - \lambda + c(x)$

$I(\lambda) = \mathbb{E}\left(\frac{x_1-\lambda}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}(x_1-\lambda)^2 = \frac{\mathbb{D}x_1}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$

$\mathbb{E}(\bar{x}-\lambda)^2 = \mathbb{D}\bar{x} = \frac{\lambda}{n}$

<u>Теорема</u> | $\theta_n^* \in K_0$ — R-эффективна

$\Rightarrow \theta_n^* = \hat{\theta}_n$ — ОМП

<u>Д-во</u> θ_n^* — R-эф $\Rightarrow \mathbb{E}(\theta_n^* - \underset{\mathbb{E}\theta_n^*}{\theta})^2 = \frac{1}{nI(\theta)}$

Из д-ва т. о нер-ве Рао-Крамера знаем:

- $L_x'(\theta) = c(\theta)(\theta_n^* - \mathbb{E}\theta_n^*)$
- $\mathbb{E}(\theta_n^* - \theta)L'(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)}$

Подставим первое во второе:

$\frac{1}{nI(\theta)} = c(\theta)\,\mathbb{D}\theta_n^* \Rightarrow c(\theta) > 0$

Т.о. $L_x'(\theta) > 0$ при $\theta < \theta_n^*$, $L_x'(\theta) < 0$ при $\theta > \theta_n^*$

Т.е. $\theta_n^* = \arg\max L_x(\theta)$ — ОМП ■

<u>Теорема</u> | $\theta_n^* \in K_b$ — R-эффективна

$\Rightarrow \sup_{\theta\in\Theta} |b_n'(\theta)| = o(1)$ (при $n\to\infty$)

<u>Д-во</u> упр

Байесовский подход. Баесовские оценки

Изучали ф-ию потерь: $\delta_{\theta_n^*}(\theta) = \mathbb{E}(\theta_n^* - \theta)^2$

Нижняя огибающая ф-ий потерь в одном классе K_b — эффективная оценка

Идея Байеса — не искать минимум ф-ии потерь, а усреднять.

УСРЕДНЁННАЯ ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ $\quad \delta_Q(\theta_n^*) = \int_\Theta \delta_{\theta_n^*}(t)\, Q(dt)$

Q - конечная мера

Если Q – конечная мера, то без огр. общн. она вероятностная.

<u>Обозн</u> $\frac{dQ}{d\mu}(t) = q(t)$, где μ – σ-конечная мера на Θ

$q(t)$ – ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЫ – АПРИОРНАЯ ПЛОТНОСТЬ

$$\frac{dQ}{d\mu} = q \iff Q(A) = \int_A q(t)\,\mu(dt).$$

① Q – вероятн. мера

② $\frac{dQ}{d\mu}(t) = q(t)$ $\Rightarrow$ имеется абс. непр.

Начинаем <u>док-во</u> т. Байеса, сформулируем её по итогу.

$$\delta_{\theta_n^*}(\theta) = \mathbb{E}(\theta_n^* - \theta)^2 = \int\cdots\int_{\mathfrak{X}^n} (\theta_n^*(\vec{z}) - \theta)^2\, \varphi_{\vec{z}}(\theta)\, \lambda^n(dt)$$

$\vec{z} \in \mathfrak{X}^n$

$$\delta_Q(\theta_n^*) = \int_\Theta \left(\int\cdots\int_{\mathfrak{X}^n} (\theta_n^*(\vec{z}) - t)^2\, \underbrace{\varphi_{\vec{z}}(t)\, q(t)}_{:= f(\vec{z}, t)}\, \lambda^n(d\vec{z}) \right) \mu(dt)$$

$:= f(\vec{z}, t)$ – плотность, т.к.

$\Omega := \Theta \times \mathfrak{X}^n$ $\quad \int\cdots\int_\Omega f(\vec{z}, t)\, \lambda^n(d\vec{z})\, \mu(dt)$

По т. Фубини, т.к. подынт. ф-ия (плотность) неотрицательная, кратный интеграл $\iff$ повторный.

$$\int\cdots\int_\Omega f(\vec{z}, t)\, \lambda^n(d\vec{z})\, \mu(dt) = 1$$ — действительно плотность

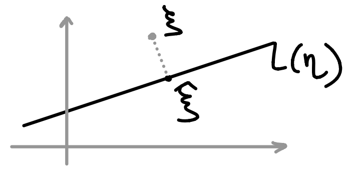
Т.о. $\delta_Q(\theta_n^*) = \widetilde{\mathbb{E}}(\theta_n^* - \theta)^2$. В Ω и θ_n^*, и θ – случайные величины.

<u>Св-ва</u> ортопроекции

① $\mathbb{E}(\xi - \hat{\xi})\, g(\eta) = 0$ – ТОЖДЕСТВО ОРТОПРОЕКЦИИ

② $\inf\limits_{g \in L(\eta)} \mathbb{E}(\xi - g(\eta))^2 = \mathbb{E}(\xi - \hat{\xi})^2$, где $\hat{\xi} = \mathbb{E}(\xi | \eta) = \hat{g}(\eta)$

$L(\eta) = \{ g(\eta) \mid \mathbb{E} g^2(\eta) < \infty \}$



БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА – $\arg \min\limits_{\theta^* \in L_2} \delta_Q(\theta_n^* - \theta)^2 := \widetilde{Q}_Q$

Теорема Байеса

Байесовская оценка сущ-ет и вычисляется в явном виде