Оценка неизвестных параметров

ПАРАМЕТР распределения $\Theta = G(\mathbb{P}_{X_1})$ — функционал от истинного распределения

Пример $\Theta = \int x \mathbb{P}_{X_1}(dx)$ — интегральный функционал

↳ мат. ожидание

$\int x^k \mathbb{P}_{X_1}(dx)$ — k-ый момент

$\int |x|^\alpha \mathbb{P}_{X_1}(dx)$ — абсолютный момент

$\int |x - \mathbb{E}X_1|^k \mathbb{P}_{X_1}(dx)$ — при $k=2$ — дисперсия

ВЫБОРОЧНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА — любой функционал от эмпирического распределения

$G(P_n^*)$

СТАТИСТИКА — любое измеримое отображение выборочного пр-ва

$S(X)$

ОЦЕНКА — выборочная характеристика, в том или ином виде оценивающая неизвестный параметр

$$\Theta_n^* = G(P_n^*) \xrightarrow{\text{оценивает}} \Theta$$

Оценка **СОСТОЯТЕЛЬНАЯ**, если $\Theta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} \Theta$

Оценка **СИЛЬНО СОСТОЯТЕЛЬНАЯ**, если $\Theta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} \Theta$

$\Theta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \Theta$, если $\mathbb{E}(\Theta_n^* - \Theta)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

L_2, потому что $\mathbb{E}(\Theta_n^* - \Theta)^2 = \int_{\mathfrak{X}^n} (\Theta_n^*(z) - \Theta)^2 \mathbb{P}(X \in dz) = \|\Theta_n^* - \Theta\|_{L_2}$

$\Theta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \Theta$, если $\mathbb{E}|\Theta_n^* - \Theta| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Соответственно определяются L_1- и L_2-состоятельные оценки.

Пример $\Theta = G(\mathbb{P}_{X_1}) := \int x \mathbb{P}_{X_1}(dx)$

$$\Theta_n^* = G(P_n^*) = \int x \, \underbrace{P_n^*(dx)}_{\{x_i\},\ p_i = \frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$ — ср. ариф.

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ — **ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ**

$$\int g(x)\, P_n^*(dx) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \overline{g(X)}$$

<u>Напом</u> УЗБЧК : $\overline{X} \longrightarrow a \iff \mathbb{E}X_1$ сущ-ет , тогда $a = \mathbb{E}X_1$

Метод моментов

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО распределений — <u>известная</u> <u>общая функциональная форма,</u> описываемая <u>одним</u> или несколькими параметрами

↳ выписывается ф-ия распр / плотн / таблица атомов

$\{F_\theta\}_{\theta \in \Theta}$

<u>Примеры</u> $\{\Pi(\lambda)\}$ $\quad \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\{N(\alpha, \sigma^2)\}$ $\quad f_{\alpha,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$

Во втором случае $\theta = (\alpha, \sigma) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}}_{\Theta}$, т.е. θ - вектор

$$m_g(\theta) = \underbrace{\int g(x)\, dF_\theta(x)}$$ – ПРОБНЫЙ МОМЕНТ

↳ инт Стилтьеса

$g \in C \Rightarrow$ совпадает с инт. Лебега

$g(x) \in C$ – ПРОБНАЯ ФУНКЦИЯ

$\overline{g(X)} \xrightarrow{\text{пн}} m_g(\theta)$ $\quad \theta$ – фиксированное для данного распр, $\theta \in \Theta$

Метод : $\quad \overline{g(X)} := m_g(\theta)$

Корень данного ур-я есть ОЦЕНКА МЕТОДА МОМЕНТОВ

<u>Обозн</u> θ_n^*

<u>Теорема</u> Оценка метода моментов сильно состоятельна

<u>Д-во</u> $\quad m_g(\theta) \in C$, строго монот $\Rightarrow \exists\, m_g^{-1}(\theta)$.

Т.е. $\theta_n^* = m_g^{-1}(\overline{g(X)}) \xrightarrow{\text{пн}} m_g^{-1}(m_g(\theta)) = \theta$ ■

<u>Примеры</u> • $\{\Pi(\lambda)\}_{\lambda > 0}$

$g(x) := x \qquad m(\lambda) = \mathbb{E}X_1 = \lambda \Rightarrow \lambda_n^* = \overline{X}$

$g(x) := x^2 \qquad m(\lambda) = \mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 = \lambda + \lambda^2$

Ур-е : $\lambda + \lambda^2 = \overline{X^2}$, корни : $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(\overline{X^2})}}{2}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda_n^* = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\overline{X^2}}}{2}$

$$\overline{X^2} \xrightarrow{пн} \lambda_0 + \lambda_0^2 \qquad \lambda_0 \text{ - истинное зн.}$$

Т.о. $\lambda_n^* \xrightarrow{пн} \lambda_0$ - тоже сильно сост. оценка

<u>Замечание</u> ОММ может быть сколько угодно в силу произвольности выбора пробной ф-ии $g(x)$

$\Theta \in \mathbb{R}^k$, $g_1(x), \dots, g_k(x)$ - ЛНЗ пробные ф-ии

Получим систему
$$\begin{cases} m_{g_1}(\vec{\theta}) = \overline{g_1(x)} \\ \vdots \\ m_{g_n}(\vec{\theta}) = \overline{g_n(x)} \end{cases}$$

- $\{N(\alpha, \sigma)\}_{\alpha \in \mathbb{R}, \sigma > 0}$ $\quad \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$

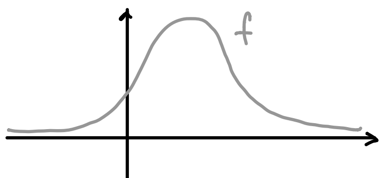
$$m_1(\alpha, \sigma) = \alpha \qquad \begin{cases} \alpha = \overline{X} \\ \alpha^2 + \sigma^2 = \overline{X^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^* = \overline{X} \\ \sigma^* = \sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} = \sqrt{S^2} = S \end{cases}$$
$$m_2(\alpha, \sigma) = \alpha^2 + \sigma^2$$

ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ — $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X}^2)$

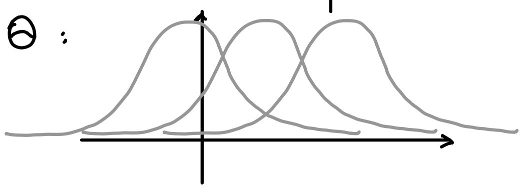
среднеквадратич. отклонение эмпирического распределения

Метод максимального правдоподобия

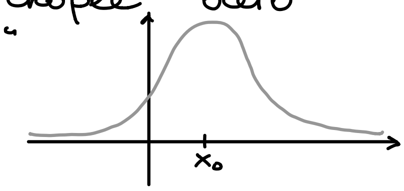
<u>Идея</u> $f_\theta(x) := f(x - \theta)$



Если варьировать θ:



Если увидели, что СВ дала x_0, то скорее всего x_0 - в самом центре "шапочки Гаусса"



Скорее всего там, т.к.
$$f(x) \approx \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\mathbb{P}(X_1 \in [x, x+\Delta))}{\Delta x}$$

<u>Метод</u> Есть выборка X

$$\prod_{i=1}^{n} f_\theta(t_i) = p_X(t_1, \dots, t_n) \text{ , т.к. } X \text{ НОР СВ}$$

$$\psi_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \longrightarrow \max_\theta$$

$\hat{\theta}_n = \arg \max\limits_\theta \psi_X(\theta)$ — **ОЦЕНКА МЕТОДА МАКС. ПРАВДОПОДОБИЯ**

Замечание Не зависит от $\dim \Theta$

Замечание Если распр. дискретно, то вместо плотности берём точечную массу $f_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X_1 = x)$

Примеры • $\{\Pi(\lambda)\}_{\lambda>0}$

$$f_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\Psi_X(\lambda) = e^{-\lambda n}\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda n}\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$$

$$e^{-\lambda n}(-\lambda n + n\bar{x})\lambda^{n\bar{x}-1} := 0$$

$\hat{\lambda}_n = \bar{X}$ — то же, что и ОММ

{ Нашли экстремальную точку, сразу поняли, что это максимум, т.к. $\Psi_X(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ и $\Psi_X(\lambda) > 0$ на любой области, а точка экстремума одна единственная }

• $\{N(\alpha, \sigma)\}$

$$\Psi_X(\alpha,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\alpha)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\overline{x^2} - 2\bar{x}\alpha + n\alpha^2\right)\right\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = 0 \end{cases}$$

$L_X(\theta) = \ln \Psi_X(\theta)$ — ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ Ф-ИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

Упр Оценить $\{N(\alpha,\sigma)\}$ через такую ф-ию

Получится ОМП $\{N(\alpha,\sigma)\}$ = $\begin{cases} \hat{\alpha}_n = \bar{X} \\ \hat{\sigma}_n = S \end{cases}$