<u>Следствие</u> | $\exists\, \widehat{\theta}_n = \arg\max \Psi_{\mathbb{X}}(\theta) = \arg\max \varphi(\theta, S)$
$\Rightarrow \widehat{\theta}_n = g(S)$

<u>Пример</u> $\mathbb{X}$ – ДС

$(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$ – ДС

$\Psi_{\mathbb{X}}(\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_\theta(x_{(j)}) \equiv \varphi(\theta, (x_{(1)},\dots,x_{(n)}))$

Для $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda>0}$ $\overline{X}$ – ДС

$\{N(a,\sigma)\}$: $S(\overline{X}, \overline{X^2}) \longleftrightarrow S$

<u>Пример</u> задачи

Построить скалярную достаточную статистику для $\{N(a,\sigma)\}$
(построить алг. её нахождения)

<u>Замечание</u> Для одного параметр. семейства могут существовать и скалярные, и векторные достаточные статистики

Статистика S ПОЛНА отн. парам. семейства $\{F_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, если $\mathbb{E}_\theta\, g(S) \underset{\theta\in\Theta}{\equiv} 0 \iff g=0$ ПН отн. $F_\theta\ \forall\theta$
или можно сказать отн. S, экв-о

<u>Пример</u> $S = X_1 - X_2$ неполна, $\theta = \mathbb{E}X_1$

<u>Пример</u> $\{\Pi(\lambda)\}_{\lambda>0}$ $S := n\overline{X}$

$S \in \Pi(n\lambda)$

$\mathbb{E}_\theta\, g(S) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g(k)\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$

$z := n\lambda$. Варьируем $\lambda>0 \Rightarrow$ варьируем $z>0$

Смотрим на знак, а $e^{-n\lambda}$ на него не влияет.

$\sum g(k)\dfrac{z^k}{k!} \equiv 0 \iff g\equiv 0$

Т.о. S полная статистика. Более того, она полная достаточная оценка

<u>Св-во</u> | $f(S)$ – полная
$\Rightarrow g\circ f$ – полная

$\Big\{$ вроде так, но не факт

Рассмотрим пример с АНР:

$\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$ $X_{(n)}$ – достаточная статистика по т. о фактор. Н-Ф:

$$\varphi_X(\theta) = \frac{1}{\theta^n} I(\theta > X_{(n)}) := \varphi(\theta, S)\, h(X)$$

Посмотрим на полноту: $\mathbb{E} g(X_{(n)}) = \int_0^\theta g(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt$

$$\mathbb{E} g(X_{(n)}) \equiv 0 \iff \int_0^\theta g(t)\, t^{n-1} dt$$

Интегр. Лебега – $\underline{\text{6-аддитивный}}$ $\underline{\text{заряд}}$ → знакопеременная ф-ия

↳ $\int\limits_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} = \sum_{i=1}^\infty \int\limits_{A_i}$, где $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$

Т.о. эквивалентно рассмотрим $\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(t)\, t^{n-1} dt \equiv 0$

$$\int\limits_{U[\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(2)}]} g(t)\, t^{n-1} dt$$

$d(A,B) = \lambda(A \triangle B)$ $\Rightarrow$ $U[\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}] \longrightarrow A$

↳ мера Лебега

Т.о. $\int_A g(t)\, t^{n-1} dt \equiv 0$ $\forall A \in \mathbb{B}[0,\theta]$

МИНИМАЛЬНАЯ ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА — полная достаточная статистика

<u>Св-во</u> Минимальная достаточная статистика выражается как ф-ия относительно любой другой достаточной статист.

Вернемся к $\int_A g(t)\, t^{n-1} dt \equiv 0$

$A^+ := \{t \mid g(t) > 0\}$, для A^+ тоже $\int_{A^+} g(t)\, t^{n-1} dt \equiv 0$

$\lightning\ \lambda(A^+) > 0 \Rightarrow \int_{A^+} g(t)\, t^{n-1} dt > 0\ \lightning \Rightarrow \lambda(A^+) = 0$

Аналогично для A^-. Т.е. $\lambda(\{t \mid g(t) \neq 0\}) = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ пн.

<u>Упр</u> Проверить полноту $\theta_n^* = 2\overline{X}$

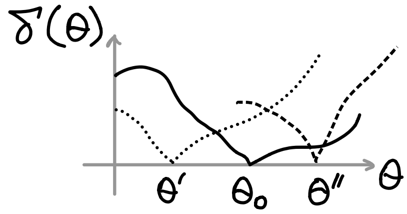
Построение эффективных оценок

Оценка $\check{\theta}$ **ЭФФЕКТИВНА В КЛАССЕ** $K = \{\theta_n^* \mid E(\theta_n^*)^2 < \infty\}$,
если $\forall \theta_n^* \in K$ $\quad \delta_{\check{\theta}_n}(\theta) \le \delta_{\theta^*}(\theta)$ и $\exists \theta_0 \in K : \delta_{\check{\theta}_n}(\theta) < \delta_{\theta_0}(\theta)$

<u>Пример</u> $\quad \theta_n^* = const = \theta_0$

$$\delta_{\theta_n^*} = E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2$$

↳ истинный параметр



Нижняя огибающая $\delta_{\theta_n^*}(\theta)$, $\theta_n^* \in K$ — это ось абсцисс, $\delta \equiv 0$.

Но тогда получаем, что $E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 \equiv 0 \Rightarrow \theta_n^* = \theta_0$
Странно...

$$K_b = \{\theta_n^* \mid E(\theta_n^*)^2 < \infty,\ E\theta_n^* = \theta + b_n(\theta)\}$$

Теорема 1 | S – ДС, $\forall \theta_n^* \in L_2$ т.е. $E(\theta^*)^2 < \infty$

$\Rightarrow$ а) $\theta_S^* = E(\theta_n^* \mid S)$ – оценка – преобразование от выборки не зависит от параметра

б) $\delta_{\theta_S^*}(\theta) \le \delta_{\theta_n^*}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$

<u>Д-во</u> а) $P_\theta(X \in A \mid S)$ не зависит от θ

$$\int \theta_n^*(\vec{z})\, \underline{P(X \in d\vec{z} \mid S)} = E(g(X) \mid S)$$

↳ это зависит от θ
↳ но после "усреднения" больше нет □

<u>Замечание</u> $\quad \theta_n^* \in K_b \Rightarrow \theta_S^* \in K_b$

Следует из ф-лы полн. вер.: $E(E(\xi \mid S)) = E\xi$

$E\theta_S^* = E\theta_n^* = \theta + b_n(\theta)$

б)

$$\delta_{\theta_n^*}(\theta) = E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 \overset{\pm\theta_S^*}{=} \underbrace{E_\theta(\theta_n^* - \theta_S^*)^2}_{\ge 0} + \underbrace{E_\theta(\theta_S^* - \theta)^2}_{\delta_{\theta_S^*}(\theta)} + \underbrace{2E_\theta((\theta_n^* - \theta_S^*)(\theta_S^* - \theta))}_{\text{надо док-ть, что это 0}}$$

$E_\theta(E_\theta((\theta_n^* - \theta_S^*)(\theta_S^* - \theta) \mid S))$. Есть св-во: $E(\xi g(S) \mid S) = \xi g(S) \Rightarrow$

$E_\theta((\theta_S^* - \theta)\, E(\theta_n^* - \theta_S^* \mid S)) = 0$ ■

Теорема 2 | S – полная ДС, $\theta_n^* \in K_b$

$\Rightarrow$ θ_S^* – единственная эффективная оценка в K_b

Лемма $\exists!\ \theta_n^* = g(S)$ в K_b

Д-во $g_1(S) = \hat{\theta}_n^* \neq \theta_n^* \Rightarrow \mathbb{E}\big(g(S) - g_1(S)\big) \equiv 0$

$\hookrightarrow \tilde{g}(S) = 0$ ПВ отн S

Т.е. $g = g_1$ ПВ отн S ■