14/3/21

(θ_n^-, θ_n^+) $\quad \mathbb{P}(\theta_n^- \leq \theta \leq \theta_n^+) \geq 1-\varepsilon$

<u>Пример</u> $\{N(\alpha,\sigma)\}_{\substack{\alpha>0\\ \sigma>0}}$

$$\mathbb{P}(\alpha_n^- \leq \alpha \leq \alpha_n^+, \quad \sigma^- \leq \sigma \leq \sigma^+) \geq 1-\varepsilon$$

$$(\alpha,\sigma) \in [\alpha^-,\alpha^+] \times [\sigma^-,\sigma^+]$$

<u>Лемма Фишера</u>

| $X \in N(0,1)$, C – ортог. матр.

$\Rightarrow Y = XC \in N(0,1)$

<u>Д-во</u> $\quad y_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i c_{ik}$, $k=1,\dots,n$

y_k – свертка НОР СВ с норм. распр $\Rightarrow$ норм. расп

$\mathbb{E}y_k = 0$, $\quad \mathbb{D}y_k = \mathbb{E}y_k^2$, $\quad \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j \Rightarrow$

$$\mathbb{D}y^k = \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j} x_i x_j c_{ik} c_{jk}\Big) = \sum_{i,j} \mathbb{E}x_i x_j c_{ik} c_{jk} \ominus$$

$$\mathbb{E}x_i x_j = \begin{cases} 0, \ i\neq j, & \text{т.к. } x_i \perp\!\!\!\perp x_j, \ \mathbb{E}x_i = \mathbb{E}x_j = 0 \\ 1, \ i=j, & \text{т.к. } \mathbb{D}x_i = \mathbb{E}x_i^2 = 1 \end{cases}$$

$$\ominus \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot c_{ik}^2 = 1$$

Т.о. $y_k \in N(0,1)$

Осталось показать, что $y_i \perp\!\!\!\perp y_j$

Вероятностное понятие независимости шире обыденного понятия отсутствия причинно-следственных связей.

Есть примеры СВ, в обыденном понимании зависящих от одного явления, независимых с точки зрения ТВ.

Как здесь — все y_i зависят от X, но ведут себя как независимые.

Нормальный вектор имеет многомерное нормальное распр $\Leftrightarrow$ его компоненты независимы $\Leftrightarrow$ они некоррелир.

только для норм. вект.

$$\mathbb{E}y_k y_m = \dots = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} c_{im} = \delta_{km} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ компоненты не коррелируют $\Rightarrow$ независимы $\Rightarrow Y \in N(0,1)$

Следствие $\left| \; Q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - y_1^2 - \dots - y_r^2 \quad \forall r \le n \right.$

$\Rightarrow$ ① $Q(X) \in \chi^2_{n-r}$

② $Q(X) \perp\!\!\!\perp (y_1, \dots, y_r)$

$\{N(\alpha, \sigma)\}$, $\sigma^2 - ?$

$+\alpha - \alpha$

$$G(\sigma^2, X) = \frac{nS^2}{\sigma^2}, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{x})^2, \quad \widetilde{X}_i := \frac{x_i - \alpha}{\sigma}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\widetilde{x}_i - \overline{\widetilde{x}})^2 = n\overline{\widetilde{X}^2} - n\overline{\widetilde{X}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i^2\right)$$

$$\mathbb{P}\left(t_\varepsilon^{(1)} \le \frac{nS^2}{\sigma^2} \le t_\varepsilon^{(2)}\right) = 1 - \varepsilon$$

$$\underbrace{\frac{nS^2}{t_\varepsilon^{(2)}}}_{\to \sigma^-} \le \sigma^2 \le \underbrace{\frac{nS^2}{t_\varepsilon^{(1)}}}_{\to \sigma^+}$$

$$S_0^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$$

$$G(\alpha, X) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \alpha)/\sigma}{S_0/\sigma} \qquad \mapsto := \xi \in N(0,1)$$

Лиза спасает