Напом. Оценка максимального правдоподобия вводится на основании

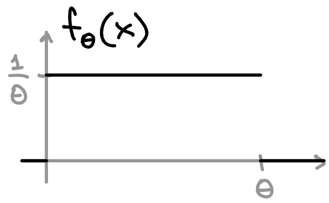
$\{f_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ – параметриз. семейство обобщ. плотностей

$$\varphi_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$$

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta} \varphi_X(\theta)$$

ВАЖНЫЙ ПРИМЕР:

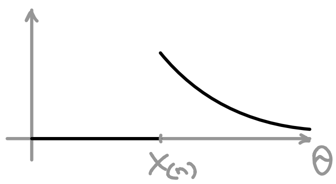
$\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$



$$\varphi_X(\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \forall X_i \in [0,\theta] \\ 0, & \exists X_i \notin [0,\theta] \end{cases}$$

$\forall X_i \in [0,\theta] \Leftrightarrow X_{(n)} \le \theta$

$\exists X_i \notin [0,\theta] \Leftrightarrow X_{(n)} > \theta$



$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = X_{(n)} = \max_{i=\overline{1,n}} X_i$$

Если по методу моментов:

$$g(x) = x$$

$$\mathbb{E}X_1 = \int_0^\theta t \, \frac{1}{\theta} \, dt = \frac{\theta}{2}$$

$$\overline{X} = \frac{\theta}{2}$$

$$\theta_n^* = 2\overline{X} \xrightarrow[\text{пн}]{\text{УЗБЧ}} 2\mathbb{E}X_1 = 2\,\frac{\theta}{2} = \theta \Rightarrow \text{сильн. состоят.}$$

Оценки получились разные: $\hat{\theta}_n = X_{(n)} \not\equiv 2\overline{X} = \theta_n^*$

Проверим состоят-сть $\hat{\theta}_n$:

$$\mathbb{P}(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\theta - X_{(n)} > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_{(n)} < \theta - \varepsilon) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 < \theta-\varepsilon, \ldots, X_n < \theta - \varepsilon) \overset{\text{НОР}}{=} \left(\mathbb{P}(X_1 < \theta - \varepsilon)\right)^n = \Big(\underbrace{\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}}_{<1}\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Т.о. есть сходимость по вероятности $(\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta) \Rightarrow$ оценка сост.

Но $\{X_{(n)}\}$ – монотонная посл-ть (с ростом числа испытаний максимальное значение не будет уменьшаться) $\Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{пн}} \theta$, оценка сильн. сост.

Пример $\{U[\theta,\theta+1]\}_{\theta\in\mathbb{R}}$

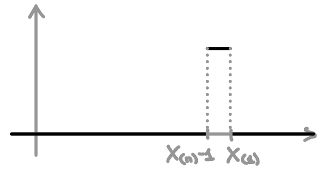
$$f_\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\theta, \theta+1] \\ 0, & t \notin [\theta,\theta+1] \end{cases}$$

$$\varphi_X(\theta) = \begin{cases} 1, & \forall X_i \in [\theta,\theta+1] \\ 0, & \exists X_i \notin [\theta,\theta+1] \end{cases}$$

$\forall X_i \in [\theta,\theta+1] \Leftrightarrow \theta \le X_{(1)},\ X_{(n)} \le \theta+1$

$\Leftrightarrow X_{(n)} - 1 \le \theta \le X_{(1)}$

отрезок непустой т.к. размах вариац. ряда ≤ 1



Тут континуум ОМП.

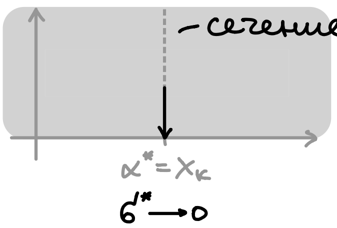
Замечание Если ОМП не единственна, то каждая ОМП считается оценкой

Замечание ОМП не (не всегда) единственна

$$f_{(\alpha,\sigma)}(x) = \frac{1}{2}\varphi_{(\alpha,\sigma)}(x) + \frac{1}{2}\varphi_{(0,1)}(x), \quad \text{где} \quad \varphi_{(\alpha,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\{f_{(\alpha,\sigma)}(x)\}_{\theta\in\Theta}, \quad \Theta = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{>0}$$

$$\Psi(\alpha,\sigma) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\alpha)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}}\right)$$



– сечение пр-ва параметров

$$\Psi(\alpha^*,\sigma) \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \infty$$

Замечание ОМП не всегда сущ-ет

Теорема о состоятельности оценки макс. правдоподобия

$\{f_\theta\}_{\theta\in\Theta}$

(A1) – Θ – метрический компакт размерности d
(⇒ сущ-ет конечная ε-сеть, покрывающая Θ)

(A2) $f_{\theta_1} = f_{\theta_2} \iff \theta_1 = \theta_2$

(A3) $\operatorname{supp} f_\theta$ не зависит от θ (один и тот же для всех f_θ)

$\Rightarrow$

Замечание (A3) не обязательно, но док-во станет сложнее

Распределение **РЕГУЛЯРНОЕ**, если $\operatorname{supp} f_\theta$ не зависит от θ
(f_θ в смысле обобщ. плотности)

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПЛОТНОСТЬ $\ell_x(\theta) = \ln f_\theta(x)$, $x \in \operatorname{supp} f_\theta$

Св-во $L_X(\theta) = \ln \Psi_X(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ell_{x_i}(\theta)$

Обозн $\varphi(\theta) := \mathbb{E}_{\theta_0} \ell_{x_1}(\theta)$

Лемма | Ⓐ, θ_0 - истинный параметр $\qquad \operatorname{supp} f_\theta \overset{A3}{=} \operatorname{supp} f_\theta$

$\Rightarrow \varphi(\theta) < \varphi(\theta_0) \quad \forall \theta \neq \theta_0$

Д-во $$\varphi(\theta) - \varphi(\theta_0) = \int\limits_{\operatorname{supp} f_\theta} \ell_t(\theta) \cdot f_{\theta_0}(t)\, \lambda(dt) - \int\limits_{\operatorname{supp} f_\theta} \ell_t(\theta_0) \cdot f_{\theta_0}(t)\, \lambda(dt) =$$

$$= \int\limits_{\operatorname{supp} f_\theta} \ln \frac{f_\theta(t)}{f_{\theta_0}(t)} f_{\theta_0}(t)\, \lambda(dt) = \int\limits_{\operatorname{supp} f_\theta} \ln \left(1 + \frac{f_\theta(t)}{f_{\theta_0}(t)} - 1\right) f_{\theta_0}(t)\, \lambda(dt) <$$

$$< \Big/ \begin{matrix} \log(1+z) \leq z \quad \forall z \geq -1 \\ \text{строгое нер-во в силу (A2)} \end{matrix} \Big/ < \int\limits_{\operatorname{supp} f_\theta} \left(\frac{f_\theta(t)}{f_{\theta_0}(t)} - 1\right) f_{\theta_0}(t)\, \lambda(dt) =$$

$$= \int\limits_{\operatorname{supp} f_\theta} f_\theta(t)\, \lambda(dt) - \int\limits_{\operatorname{supp} f_\theta} f_{\theta_0}(t)\, \lambda(dt) = 0 \quad \blacksquare$$

Замечание Т.е. θ_0 — истинный парам — т. глоб. max

НОРМИРОВАННАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ Ф-ИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

$$L_X^{(n)}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ell_{x_i}(\theta)$$

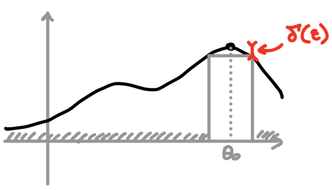
Лемма $L_X^{(n)}(\theta) \xrightarrow{\text{пн}} \varphi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$

Д-во По УЗБЧ $\quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ell_{x_i}(\theta) \xrightarrow{\text{пн}} \mathbb{E} \ell_{x_i}(\theta) = \varphi(\theta) \ \blacksquare$

Следствие из двух лемм

| Ⓐ ((A1))

$\Rightarrow$ экстремум отделим, т.е. $\sup\limits_{\theta:\, d(\theta,\theta_0) > \varepsilon} \varphi(\theta) \leq \varphi(\theta_0) + \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) > 0$



Д-во от прот.

Отделимости нет $\Rightarrow \exists \{\theta_k\}_1^\infty \subset \Theta : \varphi(\theta_k) \to \varphi(\theta_0)$

Θ компакт $\Rightarrow \varphi(\theta^*) = \varphi(\theta_0) \ \blacksquare$ не понял...

Лемма | Ⓐ, $|\ell_x(\theta) - \ell_x(\theta')| \leq K(x)\, d(\theta,\theta')$ — $\ell_x(\theta)$ – ф-ия Липшица $\ell_x \in Lip(K(x))$

$\mathbb{E} K(X_1) < \infty$

$\Rightarrow \sup\limits_{\theta \in \Theta} |L_X^{(n)}(\theta) - \varphi(\theta)| \xrightarrow{\text{пн}} 0$

Д-во $S_i(\varepsilon) := \{\theta \in \Theta \mid d(\theta,\theta_i) \leq \varepsilon\}, \quad \Theta = \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} S_i(\varepsilon)$

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| L_X^{(n)}(\theta) - \varphi(\theta) \right| = \max_{i=\overline{1, N(\varepsilon)}} \underline{\sup_{\theta \in S_i(\varepsilon)} \left| L_X^{(n)}(\theta) - \varphi(\theta) \right|}$$

если это пн сходится к 0, то max тоже и лемма доказана

$$\sup_{\theta \in S_i(\varepsilon)} \left| L_X^{(n)}(\theta) - \varphi(\theta) \right|$$