Продолжение

$$\sup_{\theta\in S_i(\varepsilon)} \left|L_x^{(n)}(\theta) - \varphi(\theta)\right| \le \overset{\mathrm{I}}{\sup_{\theta\in S_i(\varepsilon)} \left|L_x^{(n)}(\theta) - L_x^{(n)}(\theta_i)\right|} + \overset{\mathrm{II}}{\sup_{\theta\in S_i(\varepsilon)} \left|\varphi(\theta) - \varphi(\theta_i)\right|} + \underset{\mathrm{III}}{\left|L_x^{n}(\theta_i) - \varphi(\theta_i)\right|}$$

$l_x(\theta) \in Lip(K(x))$, $\mathbb{E}_\theta K(X_1) < \infty$ – было дано

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\theta) &= \mathbb{E} l_{x_1}(\theta)\\ \varphi(\theta') &= \mathbb{E} l_{x_1}(\theta')\end{aligned}\right\} \Rightarrow |\varphi(\theta) - \varphi(\theta')| \le \mathbb{E}\underbrace{|l_{x_1}(\theta) - l_{x_1}(\theta')|}_{\le K(X_1)\, d(\theta,\theta')} \le d(\theta,\theta')\,\mathbb{E}K(X_1)$$

$d(\theta,\theta_i) \le \varepsilon$ т.к. $\theta \in S_i(\varepsilon)$

Т.е. слагаемое II ограничено

Слагаемое III $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Слагаемое I: $L_x^{(n)}(\theta) - L_x^{(n)}(\theta_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(l_{x_i}(\theta) - l_{x_i}(\theta_i)\right)$

$$\left|L_x^{(n)}(\theta) - L_x^{(n)}(\theta_i)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left|l_{x_i}(\theta) - l_{x_i}(\theta_i)\right|}_{\le K(X_i)\, d(\theta,\theta_i) \le K(X_i)\,\varepsilon} \le \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^{n} K(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon\mathbb{E}K(X_1)$$

Т.о. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\theta\in S_i(\varepsilon)} \left|L_x^{(n)}(\theta) - \varphi(\theta)\right| \le 2\varepsilon\mathbb{E}K(X_1)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{i=1,N(\varepsilon)} \sup_{\theta\in S_i(\varepsilon)} \left|L_x^{(n)}(\theta) - \varphi(\theta)\right| \le 2\varepsilon\mathbb{E}K(X_1), \text{ т.к. } N(\varepsilon) < \infty \;\blacksquare$$

Ещё раз:

Теорема о состоятельности оценки макс. правдоподобия

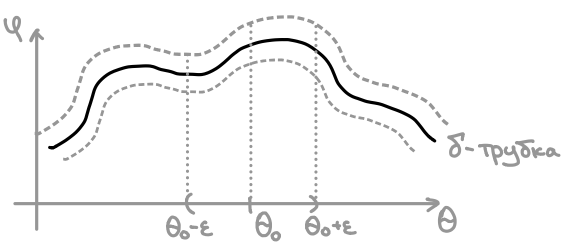
$\{f_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, $l_x(\theta) \in Lip(K(x))$, $\mathbb{E}_\theta K(X_1) < \infty$

(A1) – Θ – метрический компакт размерности d ($\Rightarrow$ сущ-ет конечная ε-сеть, покрывающая Θ)

(A2) $f_{\theta_1} = f_{\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

(A3) $\mathrm{supp}\, f_\theta$ не зависит от θ (один и тот же для всех f_θ)

$\Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} \theta$



Пример $\{\Pi(\lambda)\}_{\lambda>0}$

$$l_x(\lambda) = -\lambda + k\log\lambda - c(x)$$

Сравнение оценок

Для $\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$ $\quad \hat{\theta}_n = X_{(n)}$

$$\theta_n^*: \quad g(x) = x^k, \quad \overline{X^k} = \mathbb{E}X_1^k = \int_0^\theta t^k \frac{1}{\theta}\,dt = \frac{\theta^k}{k+1}$$

$$\theta_n^* = \sqrt[k]{(k+1)\overline{X^k}} \text{ — } \overset{k\in\mathbb{R}^{>0}}{\text{континуум}} \text{ сильн. сост. оценок}$$

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКАЯ ПОТЕРЯ $\quad \delta_{\theta_n^*}(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\theta_n^* - \theta)^2$

Оценка θ_n^* ЛУЧШЕ оценки $\hat{\theta}_n$, если $\delta_{\theta_n^*}(\theta) \le \delta_{\hat{\theta}_n}(\theta)$

Обозн $\quad \theta_n^* \prec \hat{\theta}_n$

Оценка θ_n^* **НЕСМЕЩЕННАЯ**, если $\quad \mathbb{E}_\theta\theta_n^* = \theta$

Замечание Для несмещ. оценок $\quad S_{\theta_n^*}(\theta) = \mathbb{D}\theta_n^*$

СМЕЩЕНИЕ смещенной оценки θ_n^* — $b_n(\theta)$: $\quad \mathbb{E}\theta_n^* = \theta + b_n(\theta)$

Пример $\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$, $\quad \theta_n^* = 2\overline{X}$ — несмещенная

$$\delta_{\theta_n^*}(\theta) = \mathbb{D}(2\overline{X}) = \frac{4}{n^2}\mathbb{D}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \frac{4}{n}\mathbb{D}X_1 = \frac{4}{n}\big(\mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2\big) =$$

$$= \frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} = O\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Замечание Аддитивные оценки несмещенны

Пример $\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$, $\quad \hat{\theta}_n = \max_i X_i$

$$\mathbb{E}(\max X_i - \theta)^2 = \int_0^\theta (t-\theta)^2 \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+2}}{n+2} - \frac{2\theta^{n+2}}{n+1} + \frac{\theta^{n+2}}{n}\right)$$

$$= n\theta^2\Big(\frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

$$\left(\mathbb{P}(X_{(n)} < t) = \Big(\frac{t}{\theta}\Big)^n \Rightarrow f_{X_{(n)}}(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\right)$$

Т.о. для $\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$ $\quad \hat{\theta}_n \prec \theta_n^*$

Напом $\quad \mathbb{E}f(X) = \int\limits_{\mathfrak{X}^n}\cdots\int f(\vec{z})\,\varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n\,d\vec{z}$

$$\delta_{\theta_n^*}(\theta) = \int\limits_{\mathfrak{X}^n}\cdots\int \Big(\sqrt[k]{(k+1)\tfrac{1}{n}\textstyle\sum z_i^k} - \theta\Big)\varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n\,d\vec{z}$$

Ассимптотически нормальные оценки

θ_n^* — АНО, если $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \xi \in N(0, \sigma(\theta))$, $\sigma(\theta)$ — КОЭФФИЦИЕНТ РАССЕИВАНИЯ

т.е. $\frac{\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)}{\sigma(\theta)} \Rightarrow \xi \in N(0, 1)$

$$\overline{g(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \xrightarrow{\text{пн}} \mathbb{E}g(X_1) \not\equiv \theta$$

$$\sqrt{n}\left(\overline{g(X)} - \mathbb{E}g(X_i)\right) = \frac{\sum\left(g(X_1) - \mathbb{E}g(X_1)\right)}{\sqrt{\mathbb{D}g(X)}\sqrt{n}} \Rightarrow \xi \in N(0,1)$$

<u>Пример</u> $\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$

$\theta_n^* = 2\overline{X}$ — АНО

$\hat{\theta}_n = X_{(n)}$. $\sqrt{n}(X_{(n)} - \theta)$

$1 \equiv \mathbb{P}(\sqrt{n}(X_{(n)} - \theta))$, если АНО, то $\mathbb{P}(\sqrt{n}(X_{(n)} - \theta) < 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

$\xi \in N(0,1)$, $\mathbb{P}(\xi < 0)$

т.е. $\hat{\theta}_n$ — не АНО

Теорема о суперпозиции

θ_n^* — АНО, $\sigma(\theta) > 0 \in C(\Theta)$

$H(t) \in C^1(\operatorname{supp}\theta_n^*)$, $H'(t) \neq 0 \ \forall t \in \operatorname{supp}\theta_n^*$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_n^* = H(\theta_n^*)$ — АНО, $\tilde{\sigma} = |H'(\theta)|\sigma(\theta)$

<u>Д-во</u> $$\sqrt{n}(H(\theta_n^*) - H(\theta)) = H'(\tilde{\theta}_n^*)(\theta_n^* - \theta)\sqrt{n} = \underbrace{\frac{H'(\tilde{\theta}_n^*)}{H'(\theta)}}_{\eta_n \xrightarrow{P} c} \underbrace{H'(\theta)(\theta^* - \theta)\sqrt{n}}_{\Rightarrow N(0, |H'(\theta)|\sigma(\theta))}$$

<u>Лемма</u> упр | θ_n^* — АНО

$\Rightarrow \theta_n^*$ — состоятельная

Т.о. по т. Слуц ■