24/3/21

Напом

Теорема 2 | S – полная ДС, $\theta_n^* \in K_b$
$\Rightarrow$ θ_S^* – единственная эффективная оценка в K_b

Лемма $\exists!$ $\theta_n^* = g(S)$ в K_b

Эту лемму док-ли

Д-во теоремы

θ_n' : $\delta_{\theta_n'}(\theta) \leq \delta_{\theta_S^*}(\theta)$ и $\exists \theta_0$: $\delta_{\theta_n'}(\theta_0) < \delta_{\theta_0}(\theta_0)$

$\widetilde{\theta}_n := E(\theta_n'|S)$, $\delta_{\widetilde{\theta}_n}(\theta_0) \leq \delta_{\theta_n'}(\theta_0)$ или тут θ а не θ_0

$E(\theta_n'|S) = \tilde{g}(S)$

$\theta_S^* = E(\theta_n^*|S) = \hat{g}(S) \equiv \tilde{g}(S)$

$\delta_{\theta_n'}(\theta) = \delta_{\theta_S^*}(\theta)$ – это мы докажем

$$E_\theta(\theta_n' - \theta_S^*)^2 = E_\theta(\theta_n' - \theta + \theta - \theta_S^*)^2 = \underbrace{\delta_{\theta_n'}(\theta) + \delta_{\theta_S^*}(\theta)}_{2\delta_{\theta_S^*}(\theta)} + 2\underbrace{E_\theta(\theta_n'-\theta)(\theta-\theta_S^*)}_{2EE\left((\theta_n'-\theta)(\theta-\theta_S^*)|S\right)}$$

$\hat{g}(S)$ в силу л.

$$= 2\delta_{\theta_S^*}(\theta) + 2E(\theta-\theta_S^*)\underbrace{E\left((\theta_n'-\theta)|S\right)}_{E(\theta_n'|S)-\theta} = 2\delta_{\theta_S^*}(\theta) \underbrace{-}_{} 2E(\theta_S-\theta)^2 = 0$$

т.к. $\theta - \theta_S^* = -(\theta_S^* - \theta)$ разность вида Оценка – Параметр

Т.о. $E_\theta(\theta_n' - \theta_S^*)^2 = 0 \Rightarrow \theta_n' \overset{\text{пн}}{=} \theta_S^*$ ■

Док-во короткое, но очень тонкое
Через ортопроекции (УМО).

Следствие | S – полная достаточная оценка в K_b
$\Rightarrow$ S – единственная эффективная оценка в K_b

$S = \theta_n^*$, $E(\theta_n^*|S) = E(S|S) = S$

Пример $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda>0}$ $S = n\overline{X}$ – ПДС , $S = \overline{X}$ – ПДО
т.к. оценка и получена из ПДС взаимнооднозн. отобр.

$K_0 = \{\theta_n^* \mid E\theta_n^* = \theta\}$

$S_1 = X_{(1)}$, $E\overline{X} = EX_{(1)} = \lambda$, $\overline{X}, X_{(1)} \in K_0$

Какую бы оценку мы ни подставили в $\mathbb{E}(\theta_n^*|S)$, получим одну и ту же единственную эффективную оценку.

Т.е. $\mathbb{E}(X_{(1)}|\overline{X}) = \overline{X}$

<u>Пример</u> $\{U[0,\theta]\}_{\theta>0}$ $\quad \hat{\theta}_n = X_{(n)}$, $S_1 = \frac{X_1+X_2}{2}$, $S_2 = \frac{X_3+X_4}{2}$

все это несмещ. оценки

Все они после усреднения дадут $\overline{X}$.

Рассмотрим подробнее $\hat{\theta}_n = X_{(n)} = \max\limits_{i=\overline{1,n}} X_i$

$K_b = \{\theta_n^* \mid b_n(\theta) = -\frac{\theta}{n+1}\}$

$\theta_n^* = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ – единств. эф. оценка в K_0

<u>Замечание</u> В т. Нейм.-Фиш. док-м, что $\forall \theta_n^*$ – ДС $\mathbb{E}\theta_n^{*2} < \infty$

$\exists g: \theta_n^* = g(S)$

если ОМП сущ-ет, то она обязательно так выражается

Если S – ПДС в $K_b = \{\theta_n^* \mid \mathbb{E}\theta_n^* = \mathbb{E}\hat{\theta}_n\}$

$\theta_S^* = \mathbb{E}(g(S)|S) = g(S) = \hat{\theta}_n$

ОМП, если сущ-ют, самые точные.

R-эффективные оценки

По прежнему ищем оценки, минимизирующие ф-ии потерь
Поиск ПДС – нетривиальная задача
Подойдем к задаче с другой стороны

Неравенство Рао – Крамéра

R-оценка — Regular-оценка — регулярно-эффективная оценка

① $\ell_x(\theta) = \log f_\theta(x) \in C^1$, $b_n(\theta) \in C^1$

⋮ и еще усл-я, о них позже

<u>Теорема</u> (Неравенство Рао-Крамера)

$\ell_x(\theta) \in C^1$, $b_n(\theta) \in C^1$, * – будет ниже

$\Rightarrow \delta_{\theta_n^*}(\theta) \geqslant \frac{(1+b_n'(\theta))^2}{nI(\theta)} + b_n^2(\theta)$, где $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\ell_{x_1}'(\theta))$

ИНФОРМАЦИОННОЕ КОЛИЧЕСТВО ФИШЕРА

Оценка R-ЭФФЕКТИВНА, если $\delta_{\theta_n^*}(\theta) = \frac{(1+b_n'(\theta))^2}{nI(\theta)} + b_n^2(\theta)$

<u>Замечание</u> ПЧ нер-ва не зависит от оценки, только от парам. семейства

<u>Св-во</u> R- эффективность $\Rightarrow$ эффективность

Эффективность $\not\Rightarrow$ R- эффективность

<u>Д-во</u> теоремы

$$\mathbb{E}_\theta \theta_n^* = \theta + b_n(\theta) \;\Big|\; \frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}_\theta \theta_n^* = 1 + b_n'(\theta)$$

Когда можно вносить диф-е под МО?

$$\mathbb{E}\theta_n^*(\vec{X}) = \int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \theta_n^*(\vec{z})\,\varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z})$$

λ^n — мера, отн которой интегрируем

$$\frac{d}{d\theta}\int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \theta_n^*(\vec{z})\,\varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z}) \overset{?}{=} \int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \theta_n^*(\vec{z})\,\frac{d}{d\theta}\varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z})$$

требуется ограниченность производной подынтегр. ф-ии

Это и есть второе условие ⊛

$$\int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \theta_n^*(\vec{z})\,\varphi_{\vec{z}}'(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z}) = \int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \theta_n^*(\vec{z})\,\frac{\varphi_{\vec{z}}'(\theta)}{\varphi_{\vec{z}}(\theta)}\,\varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \theta_n^*(\vec{z})\,L_{\vec{z}}'(\theta)\,\varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z}) = \mathbb{E}\,\theta_n^* L_X'(\theta)$$

Т.о. $\mathbb{E}\theta_n^* L_X'(\theta) = 1 + b_n'(\theta)$

$$\int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z}) = 1 \quad \text{по св-вам плотности}$$

$$\frac{d}{d\theta}\int\limits_{\mathbb{X}^n}\!\cdots\!\int \varphi_{\vec{z}}(\theta)\,\lambda^n(d\vec{z}) = \mathbb{E}L_X'(\theta) = 0$$

Т.о.

$$-\begin{cases} \mathbb{E}\theta_n^* L_X'(\theta) = 1 + b_n'(\theta) \\ c\,\mathbb{E}L_X'(\theta) = 0 \end{cases}, \quad c = \mathbb{E}\theta_n^* = \theta + b_n(\theta)$$

$$\overline{\mathbb{E}_\theta(\theta_n^* - \mathbb{E}\theta_n^*)L_X'(\theta) = 1 + b_n'(\theta)}$$

$$\left(\mathbb{E}_\theta(\theta_n^* - \mathbb{E}\theta_n^*) L_x'(\theta)\right)^2 = (1 + b_n'(\theta))^2$$

$$\overset{\text{К-Б}}{\leq} \mathbb{E}(\theta_n^* - \mathbb{E}\theta_n^*)^2 \, \mathbb{E} L_x'(\theta)^2 = \mathbb{D}\theta_n^* \mathbb{D} L_x'(\theta) = \mathbb{D}\theta_n^* n I(\theta)$$

<u>Напом</u> $\xi, \eta \in L_2$ $\quad (\mathbb{E}\xi\eta)^2 \leq \mathbb{E}\xi^2 \mathbb{E}\eta^2$ – нер-во К-Б,

$(\mathbb{E}\xi\eta)^2 = \mathbb{E}\xi^2 \mathbb{E}\eta^2 \iff \eta = 0$ или $\eta = c\xi$, $c \neq 0$

<u>Замеч</u> $\mathbb{E}(L_x'(\theta))^2 = \mathbb{D}L_x'(\theta)$ т.к. $\mathbb{E}L_x'(\theta) = 0$

Т.о. $\mathbb{D}\theta_n^* \geq \dfrac{(1 + b_n'(\theta))^2}{nI(\theta)}$

$\delta_{\theta_n^*}(\theta) = \mathbb{D}\theta_n^* + b_n^2(\theta)$