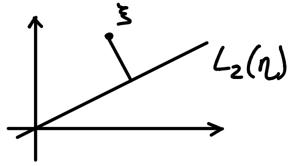
7/4/21

$$\widetilde{\theta}_n^* = \widetilde{\mathbb{E}}(\theta \mid X)$$

ξ $\quad$ η



$$\delta_Q(\theta) = \int\limits_{\Theta} \delta_{\theta_n^*}(t)\, Q(dt) \qquad \forall \theta_n^* \in L_2(\Omega, P)$$

↳ вер. мера — $q(t)\mu(dt)$

↳ субъективизм в байесовской теории "мера уверенности исследователя"

$$\mathbb{X}^n \times \Theta \sim \varphi_{\vec{z}}(t)\, q(t) := f(\vec{z}, t), \quad \vec{z} \in \mathbb{X}^n$$

$$\mathbb{E}(\theta^*(X) - \theta)^2$$

$$\mathbb{E}(\xi - g(\eta))^2 \longrightarrow \min \qquad \eta \in L_2(\eta)$$

(ξ, η) — абс. непр, $\quad \hat{g}(\eta) = \mathbb{E}(\xi \mid \eta) = \int\limits_{\Theta} t\, \dfrac{f_{\xi,\eta}(t,\eta)}{p_\eta(\eta)}\, dt$

Теорема Байеса

$$\widetilde{\theta}_n^* = \widetilde{\mathbb{E}}(\theta \mid X) = \int\limits_{\Theta} t \cdot \frac{\varphi_X(t)\, q(t)}{\int \varphi_X(s)\, q(s)\, \mu(ds)}\, \mu(dt)$$

Пример $\quad \{N(\alpha, 1)\} \qquad \forall \theta_n^* \in L_2(\Omega, P)$

$$q(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

$$q(t)\,\varphi_X(t) = \widetilde{c}_n \exp\left\{-\frac{1}{2} n\overline{X^2} + n\overline{X}t - \frac{1}{2}nt^2 - \frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= c_n^*(X) \exp\left\{-\frac{A_n}{2}\Big(t - \underbrace{\frac{n\overline{X}}{(n + 1/\sigma^2)}}_{\alpha}\Big)^2\right\}$$

$$\widetilde{\alpha} = \int\limits_{\Theta} t \cdot \frac{\varphi_X(t)\, q(t)}{\int \varphi_X(s)\, q(s)\, \mu(ds)}\, \mu(dt)$$

$$\widetilde{\alpha} = \frac{\overline{X}}{1 + \frac{1}{\sigma^2 n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{X}$$

Метод доверительных интервалов

(θ_n^-, θ_n^+) — **ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ** уровня ε (уровня доверия $1-\varepsilon$), если

$$\forall n \quad \mathbb{P}(\theta_n^- \le \theta \le \theta_n^+) \ge 1-\varepsilon, \quad \text{где } \theta \in \mathbb{R}$$

<u>Пример</u> $X_1, \dots, X_n \in N_{\alpha, \sigma_0}$

$$\underbrace{\frac{(\bar X - \alpha)\sqrt{n}}{\sigma_0}}_{} \in N_{0,1}, \quad \text{т.к. } \mathbb{E}\bar X = \alpha, \quad \mathbb{D}\bar X = \frac{\sigma_0^2}{n}$$

$$\mathbb{P}(-t_\varepsilon \le \overline{G(\alpha, X)} \le t_\varepsilon) = 1 - 2\Phi(-t_\varepsilon) := 1-\varepsilon$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

функ. Лапласа

распределение $N_{0,1}$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{\bar X - \frac{\sigma_0 t_\varepsilon}{\sqrt{n}}}_{\alpha^-} \le \alpha \le \underbrace{\bar X + \frac{\sigma_0 t_\varepsilon}{\sqrt{n}}}_{\alpha^+}\right) = 1-\varepsilon$$

Теорема $G(\theta, X)$: $\forall X \quad G_X(\theta) \in C(\Theta)$, строго монот по θ

$F(t) = \mathbb{P}(G(\theta, X) < t)$ не зависит от θ

$\Rightarrow \{G^{-1}(t_\varepsilon^{(1)}, X), \; G^{-1}(t_\varepsilon^{(2)}, X)\}$, где $t_\varepsilon^{(1)}, t_\varepsilon^{(2)}$:

$F(t_\varepsilon^{(1)}) = \frac{\varepsilon}{2}$, $F(t_\varepsilon^{(2)}) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

— границы доверительного интервала ур. ε

(в теореме не пишем прям интервал, т.к. не знаем, какое значение больше)

<u>Пример</u> $X \in N_{0, \sigma}$

$$\frac{n\overline{X^2}}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{X_i}{\sigma}}_{\in N_{0,1}}\right)^2 \in \chi^2_n$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ χ^2_m — χ-квадрат с m степенями свободы —

$\eta \in \chi^2_m$, $\eta \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$, где $\xi_i \in N_{0,1}$, $\vec{\xi}$ — НОР СВ

— примерно такие плотности при разных m

$$\mathbb{P}\left(t_\varepsilon^{(1)} \le \frac{n\overline{X^2}}{\sigma^2} \le t_\varepsilon^{(2)}\right) = 1-\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{n\overline{X^2}}{t_\varepsilon^{(2)}} \le \sigma^2 \le \frac{n\overline{X^2}}{t_\varepsilon^{(1)}}\right)$$ — получили наш доверительный интерв.

<u>Замечание</u> $\Theta \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \Omega$ — доверительная область, если она зависит только от X и

$$\mathbb{P}(\Theta \in \Omega) \ge 1-\varepsilon$$