Ex решения ЗВП:

$f = x^2 + y^2 + 2z \to \min$ $\quad 2x^2 + z^2 \le 6$, $\quad y - z \le 0$

обл-ть неогр.
метод Лагр. ничего не гарантирует

УС: $(0,-1,0) \in \mathrm{Int}\, X$

Метод Лагранжа:

1. $x^2 + y^2 + 2z \to \min_{\mathbb{R}^n}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 \ne 0$

2.1. $x^2 + y^2 + 2z \to \min_{2x^2+z^2=6}$

$\mathrm{Rang}(4x, 0, 2z) = 0$ при $x = z = 0$ — не подх. для $2x^2 + z^2 = 6$

$F = x^2 + y^2 + 2z + \lambda(2x^2 + z^2 - 6)$

$$\begin{cases} 2x + 4\lambda x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2 + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

$y = 0$

1) $x = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{6}$ $\quad y - z \le 0 \Rightarrow -\sqrt{6}$ не подх.

2) $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = 2, \ x = \pm 1$

$\Rightarrow (0, 0, \sqrt{6})$ и $(\pm 1, 0, 2)$ берём

2.2. $f \to \min_{y-z=0}$ $\quad f = x^2 + y^2 + 2y$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

$x = 0$, $y = -1 = z$ $\quad \Rightarrow (0, -1, -1)$

3. $f \to \min_{\substack{2x^2+z^2=6 \\ y=z}}$ $\quad F = x^2 + z^2 + 2z + \lambda(2x^2 + z^2 - 6)$

$$\begin{cases} 2x + 4\lambda x = 0 \\ 2z + 2 + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

1) $x = 0$ $\quad y = z = \pm\sqrt{6}$

2) $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\quad y = z = -2$ $\quad x = \pm 1$

$\Rightarrow (0, \pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6})$ и $(\pm 1, -2, -2)$

$f(1) = 2\sqrt{6}$ $\quad f(2) = 5$ $\quad \underline{f(3) = -1}$ $\quad f(4) = 6 \pm 2\sqrt{6}$ $\quad f(5) = 1$

↑ наим

$x^* = (0, -1, -1)$ — подозрит. на min точка (МЛ не гарантирует миним-ть)

$g_1 = 2x^2 + z^2 - 6$ $\quad g_2 = y - z$

$g_1(x^*) = -5 < 0$ $\quad g_2(x^*) = 0$ $\quad \Rightarrow I(x^*) = \{2\}$

$-f' = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad g_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 2 = \lambda \\ -2 = -\lambda \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \lambda = 2 \ge 0 \quad \Rightarrow x^*$ - опт. (по т. 4)

Подобная задача точно будет на к/р

Линейное программирование

Обознач-я: A - матр. $m \times n$, a_i - iя строка A $(i = \overline{1,m})$, A_j - jй столбец A $(j = \overline{1,n})$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

1 ЗЛП в общей форме:

$w = \langle c, x \rangle \to \min(\max)$

$\langle a_i, x \rangle - b_i \geq 0, \ i \in I_1 \qquad x_j \geq 0, \ j \in J_1 \qquad I_1 \cap I_2 = J_1 \cap J_2 = \varnothing$

$\langle a_i, x \rangle - b_i = 0, \ i \in I_2 \qquad x_j = 0, \ j \in J_2 \qquad I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, m\}, \ J_1 \cup J_2 = \{1, \dots, n\}$

2 ЗЛП в канонической форме:

$I_1 = J_2 = \varnothing$, т.е. $w = \langle c, x \rangle \to \min\limits_{\Omega}$, где $\Omega = \{x \geq 0, \ Ax = b\}$

3 ЗЛП в стандартной форме:

$I_2 = J_2 = \varnothing$, т.е. $w = \langle c, x \rangle \to \min\limits_{\Omega}$, где $\Omega = \{x \geq 0, \ Ax \geq b\}$

Зам $\operatorname{Rang} A = m$ $(\Rightarrow m \leq n)$ иначе есть ЛЗ строки (либо система несовместна, либо можно упростить)

Зам Мы будем говорить о канонич. форме

Опр **Базис** — любой набор из m ЛНЗ столбцов $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ м-цы A

$B = \{A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}\}$ — базисная матрица

$S = \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$ $\quad S' = \{1, \dots, n\} \setminus S$ $\quad N = (A_j \mid j \in S')$ - м-ца из небазисн. столбцов

т.к. $\det B \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

Пусть $\forall i \ \ \sigma(i) = i$ (переставим, если нужно). Тогда $A = (B, N)$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ← базисные пер-е, ← небазисн.

$Ax = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$

Если $x_N = 0$, то $x_B = B^{-1}b$

Реш-я системы $Ax = b$ вида $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ наз. **базисными решениями** соотв. м-цы B

Утв 1 Реш-е x сист. $Ax = b$ — базисное $\Leftrightarrow$ мн-во столбцов $\{A_j \mid x_j \neq 0\}$ явл. ЛНЗ

Д-во: $S(x) := \{j \mid x_j \neq 0\}$

$\Rightarrow$ x - базисн. $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(x) \subseteq S$

$\Rightarrow \{A_j \mid j \in S(x)\} \subseteq \{A_j \mid j \in S\}$ - ЛНЗ по опр-ю базиса

$\Rightarrow \{A_j \mid j \in S(x)\}$ тоже ЛНЗ

$\Leftarrow$ т.к. $\operatorname{Rang} A = m$, то $|S(x)| \leq m$

Если $|S(x)| = m$, то x - базисн. по опр-ю

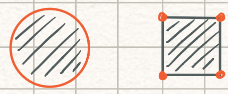
Если $|S(x)| < m$, то его можно дополнить до базиса (по т. из алг.)

Зам Если $|S(x)| = m$, то базисн. м-ца единств. иначе м.б. не единств.

Опр Если x - базисн. реш-е и $B^{-1}b \geq 0$, то x — базисное допустимое реш-е (БДР)

Геом. интерп-я: крайние точки мн-ва Ω

Опр $x\in\Omega$ — крайняя точка, если не сущ. $y,z\in\Omega$ т.ч. $y\neq z$ и $x=\frac{y+z}{2}$

Ex 

Утв2 x - БДР $\Leftrightarrow$ x - крайн. точка мн-ва $\Omega=\{x\geq 0,\ Ax=b\}$

Д-во: $\Leftarrow$ Пусть x - кр. т. мн-ва $\Omega \Rightarrow x\in\Omega$, т.е. $Ax=b$ и $x\geq 0$

$\Rightarrow$ x - реш-е системы и оно допустимо

Предп., что x - небазисн.:

По утв. 1: $\{A_j \mid j\in S(x)\}$ - ЛЗ, где $S(x)=\{j\mid x_j>0\}$

$\Rightarrow \exists\{y_j\mid j\in S(x)\}$ не все $=0$ т.ч. $\sum\limits_{j\in S(x)} y_jA_j=0$

Дополним нулями: $y_j=0$ при $x_j=0$

Получим $y\in\mathbb{R}^n\neq 0$: $Ay=0 \Rightarrow \forall t\in\mathbb{R}$ $z(t)=x+ty$ уд-т сист. $Az(t)=b$

Пусть $t_0:=\min\{|\frac{x_j}{y_j}|,\ y_j\neq 0\}$, $\varepsilon=\frac{t_0}{2}\geq 0$

Покажем, что $z(\varepsilon)=x+\varepsilon y\geq 0$ и $z(-\varepsilon)=x-\varepsilon y\geq 0$:

Если $y_j=0$, то $z_j(-\varepsilon)=z_j(\varepsilon)=x_j\geq 0$

Если $y_j>0$, то $z_j(\varepsilon)=x_j+\varepsilon y_j\geq 0$

$z_j(-\varepsilon)=x_j-\varepsilon y_j = y_j\left(\underbrace{\frac{x_j}{y_j}}_{\geq t_0}-\frac{t_0}{2}\right)\geq \frac{t_0 y_j}{2}\geq 0$

Если $y_j<0$, то $z_j(-\varepsilon)=x_j-\varepsilon y_j\geq 0$

$z_j(\varepsilon)=x_j+\varepsilon y_j = -y_j\left(|\frac{x_j}{y_j}|-\frac{t_0}{2}\right)\geq -\frac{t_0 y_j}{2}\geq 0$

Т.о. $z(\varepsilon), z(-\varepsilon)\in\Omega$, но: $x=\frac{z(\varepsilon)+z(-\varepsilon)}{2}$ — против-е, т.к. x - кр.т. $\Rightarrow x$ - БДР

$\Rightarrow$ Пусть x - БДР. Предп., что x — не кр.т., т.е. $x=\frac{x'+x''}{2}$, где $x'\neq x''$ и $x',x''\in\Omega$

$Ax'=Ax''=b \Rightarrow A(x'-x'')=0$, т.е. мн-во столбцов $\{A_j\mid x'_j\neq x''_j\}$ - ЛЗ

т.к. $x',x''\geq 0$, то если $x'_j\neq x''_j$, то $x'_j+x''_j>0$

$\Rightarrow x_j=\frac{x'_j+x''_j}{2}>0 \Rightarrow \underbrace{\{A_j\mid x_j>0\}}_{\text{должно быть ЛНЗ}}\supseteq\underbrace{\{A_j\mid x'_j\neq x''_j\}}_{\text{ЛЗ}}$ — против-е!

Лемма 1:

Если $\Omega\neq\varnothing$ и $\exists w_0\in\mathbb{R}$: $w=\langle c,x\rangle\geq w_0$ $\forall x\in\Omega$, то $\forall x^\circ\in\Omega$ $\exists$ БДР $\bar x\in\Omega$: $\langle c,\bar x\rangle\leq\langle c,x^\circ\rangle$

Д-во: т.к. $\Omega\neq\varnothing$, то $\exists x^\circ\in\Omega$. Положим $\Omega_0=\{x\in\Omega\mid \langle c,x\rangle\leq\langle c,x_0\rangle\}$, $x^\circ\in\Omega\Rightarrow\Omega_0\neq\varnothing$

Пусть $\bar x$ - вект. из Ω_0 с min числом ненул. коор-т

Если $\bar x=0$, то $\bar x$ - базисн., т.к. $\operatorname{Rang} A=m$

Пусть $\bar x\neq 0$. Предп., что $\bar x$ - небазисн.

По утв. 1 $\{A_j\mid \bar x_j>0\}$ - ЛЗ. Тогда $\exists y\in\mathbb{R}^n$: $y\neq 0$ & $y_j=0$ при $\bar x_j=0$ & $Ay=0$

Пусть $d=\langle c,y\rangle$. Можно считать, что $d\leq 0$ (иначе заменим y на $-y$)

Пусть $z(t)=\bar x+ty \Rightarrow \forall t\in\mathbb{R}$ $Az(t)=b$

1) $\forall j$ $y_j\geq 0$. Тогда $\forall t\geq 0$ $z(t)\in\Omega$. Тогда $\langle c,z(t)\rangle=\langle c,\bar x\rangle+td\geq w_0$ $\forall t\geq 0$

$\Rightarrow d=0 \Rightarrow \langle c,z(t)\rangle=\langle c,\bar x\rangle\leq\langle c,x^\circ\rangle$ $\forall t\in\mathbb{R}$, т.е. $z(t)\in\Omega_0$ $\forall t$: $z(t)\in\Omega$

Положим $t_0=-\min\{\frac{\bar x_j}{y_j}\mid y_j>0\}$. Пусть j_0 - коорд., где достиг. min

Тогда $z_{j_0}(t_0)=\bar x_0-\frac{\bar x_{j_0}}{y_{j_0}}y_j=0$

Если $\bar x_j=0$, то $y_j=0$ и $z_j(t_0)=0$

Если $\bar x_j=0$, то $y_j=0$ и $z_j(t_0)=0$

п сть $j\neq j_0$

Пусть $j\neq j_0$:

1 если $y_j=0$, то $z_j(t_0)=\bar x_j\geq 0$

2 если $y_j>0$, то $z_j(t_0)=\bar x_j-\frac{\bar x_{j_0}}{y_{j_0}}\cdot y_j=\underbrace{y_j}_{\geq 0}\cdot\left(\frac{\bar x_j}{y_j}-\frac{\bar x_{j_0}}{y_{j_0}}\right)\geq 0$

$\Rightarrow z(t_0)\in\Omega_0$ и имеет меньше ненул. коор-т, чем $\bar x$

2 $\exists j: y_j < 0$. Полож. $t_0 = \min\{-\frac{\bar{x}_j}{y_j} \mid y_j < 0\} \Rightarrow t_0 \geq 0$

Пусть j_0 - коорд., где достиг. min

$z_{j_0}(t_0) = 0$ $\quad z_j(t_0) = 0$, если $\bar{x}_j = 0$

1 Если $y_j = 0$, то $z_j(t_0) = \bar{x}_j = 0$

2 Если $y_j > 0$, то $z_j(t_0) = \bar{x}_j + y_j t_0 \geq 0$

3 Если $y_j < 0$, то $z_j(t_0) = -y_j\left(-\frac{\bar{x}_j}{y_j} - t_0\right) \geq 0$

$\Rightarrow z(t_0) \in \Omega$ и $\langle c, z(t_0)\rangle = \langle c, \bar{x}\rangle + t_0 d \leq \langle c, \bar{x}\rangle \leq \langle c, x^0\rangle \Rightarrow z(t_0) \in \Omega_0$

и хотя бы на одну коор-ту меньше $\Rightarrow$ тоже против-е

Следствие:

$\forall \Omega = \{x \geq 0, Ax = b\} \neq \emptyset \Rightarrow \Omega$ содерж. кр. т.

Теорема 1. Критерий разрешимости ЗЛП:

ЗЛП $\langle c, x\rangle \to \min\limits_{\Omega}$, $\Omega = \{x \geq 0, Ax = b\}$ разрешима $\Leftrightarrow$ $\Omega \neq \emptyset$ и $\exists w_0 \in \mathbb{R}: \langle c, x\rangle \geq w_0 \ \forall x \in \Omega$

Д-во: $\Rightarrow$ x^* - опт. $\Rightarrow x^* \in \mathbb{R}$ $\quad \langle c, x\rangle \geq \langle c, x^*\rangle = w_0 \quad \forall x \in \Omega$

$\Leftarrow$ из следствия мн-во БДР не пусто. Очев, оно конечно ($\exists \leq \binom{n}{m}$ баз. матр.)

Пусть x^* - БДР с min знач-ем цел. ф-ии, т.е. $\forall$ БДР $\bar{x}$: $\langle c, x^*\rangle \leq \langle c, \bar{x}\rangle$

Если $\exists x^0 \in \Omega: \langle c, x^*\rangle > \langle c, x^0\rangle$, то по п. 1 $\exists$ БДР $\bar{x}$:

$\langle c, x\rangle \leq \langle c, x^0\rangle < \langle c, \bar{x}\rangle \leq \langle c, x^*\rangle$