Теорема 2 Куна-Таккера:

Пусть $X=\{x\in\Gamma \mid g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m}\}$ уд-т УС, $f, g_i: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — вып., $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^n$ — вып.
Тогда $x^*\in X$ — опт. реш-е ЗВП $f(x)\to\min\limits_x$ $\Leftrightarrow$ $\exists y^*\ge 0: (x^*,y^*)$ — седл. т. ф-ии Лагранжа $L(x,y)=f(x)+\langle y, g(x)\rangle$ на мн-ве $x\in\Gamma,\ y\ge 0$

Д-во: $\Leftarrow$ следует из Т1

$\Rightarrow$ Пусть x^* — т. min ф-ии f на X, т.е. $f(x^*)\le f(x)\ \ \forall x\in X$

Пусть $D=\{w\in\mathbb{R}^{m+1}\mid w_0\le f(x^*),\ w_i\le 0,\ i=\overline{1,m}\}$ $\ S=\bigcup\limits_{x\in\Gamma} S(x)$, где
$S(x)=\{z\in\mathbb{R}^{m+1}\mid z_0\ge f(x),\ z_i\ge g_i(x),\ i=\overline{1,m}\}$

Хотим отделить D от S по 3й т. отделимости. Надо проверить усл-я для неё

Очев, D - вып. Покажем, что S - вып:

Пусть $z', z''\in S \Rightarrow z'\in S(x'),\ z''\in S(x'')$ для нктр $x',x''\in\Gamma$

Пусть $\alpha\in[0,1]$, $z=\alpha z'+(1-\alpha)z''$, $x=\alpha x'+(1-\alpha)x''\in\Gamma$

$f(x)\le \alpha f(x')+(1-\alpha)f(x'')\le \alpha z_0'+(1-\alpha)z_0''=z_0$

С др. стор, $\forall i=\overline{1,m}$ $\ g_i(x)\le\alpha g_i(x')+(1-\alpha)g_i(x'')\le \alpha z_i'+(1-\alpha)z_i''=z_i$

$\Rightarrow z\in S(x) \Rightarrow S$ - вып.

$D_0 := \mathrm{Int}\, D$, т.е. $D_0=\{w\in\mathbb{R}^{m+1}\mid w_0<f(x^*),\ w_i<0,\ i=\overline{1,m}\}\ne\varnothing$

Покажем, что $D_0\cap S=\varnothing$:

Пусть $w\in D_0$, $z\in S$, т.е. $\exists x\in\Gamma: z\in S(x)$. Рассмотрим 2 случая:

1 $x\in X$. Тогда $z_0\ge f(x)\ge f(x^*)>w_0 \Rightarrow z\ne w$

2 $x\notin X \Rightarrow \exists i: g_i(x) \Rightarrow z_i\ge g_i(x)>0>w_i \Rightarrow z\ne w$

По 3й т. отделимости: $\exists u\in\mathbb{R}^{m+1},\ u\ne 0,\ \sum\limits_{i=0}^m u_iz_i\ge\sum\limits_{i=0}^m u_iw_i\ \ \forall z\in S\ \ \forall w\in D$

т.к. $\forall w_i$ — неогр. снизу, то $u\ge 0$. При $w_0=f(x^*)$, $w_i=0$ $\ i=\overline{1,m}$ $\ \forall x\in\Gamma$

При $z_0=f(x)$, $z_i=g_i(x)$. Получим $u_0f(x)+\sum\limits_{i=1}^m u_ig_i(x)\ge u_0f(x^*)$

Предп. $u_0=0$. Тогда $\forall x\in\Gamma$ $\ \sum\limits_{i=1}^m u_ig_i(x)\ge 0$. Из УС:

$\exists\tilde x\in\mathrm{Int}\,\Gamma: g_i(\tilde x)<0\ \ \forall i=\overline{1,m}$. Тогда $0\le\sum \underbrace{u_i}_{\ge 0}\underbrace{g_i(\tilde x)}_{<0}\le 0 \Rightarrow u_i=0\ \ \forall i=\overline{1,m}$

$\Rightarrow u=0$ — противоречие

$\Rightarrow u_0>0$. Положим $y_i^*=\frac{u_i}{u_0}\ge 0$, $y^*\in\mathbb{R}^m$.

Покажем, что (x^*,y^*) — седл. т. ф-ии Лагранжа:

Имеем $f(x)+\langle y^*, g_i(x)\rangle\ge f(x^*)\ \ \forall x\in\Gamma$. При $x=x^*$ имеем:

$\langle y^*, g(x^*)\rangle\ge 0$. Т.к. $x^*\in X$, то $g(x^*)\le 0 \Rightarrow \forall y\ge 0\ \ \langle y, g(x^*)\rangle\le 0$

В частн., $\langle y^*, g(y^*)\rangle\le 0 \Rightarrow \langle y^*, g(y^*)\rangle=0$

$f(x^*)+\langle y, g(x^*)\rangle\le f(x^*)=f(x^*)+\langle y^*, g(y^*)\rangle\le f(x)+\langle y^*, g(x)\rangle$

$\Rightarrow (x^*,y^*)$ — седл. т.

Ex важности УС:

ЗВП $f(x)=-x\to\min\limits_x$ $\ X=\{x\in\overset{\Gamma}{\mathbb{R}}\mid x^2\le 0\}=\{0\}$ — не уд-т УС, $x^*=0$, но седл. точки нет:

Предп. (x^*,y^*) — седл. т., где $y^*\ge 0$ $\quad L(x,y)=-x+yx^2$

$L(x^*,y)=L(x^*,y^*)=0$ $\quad L(x,y^*)=-x+y^*x^2<0$

При $x\in(0,\frac{1}{y^*})$, если $y^*>0$ $\qquad$ т.е. $\Gamma=\mathbb{R}$ $\qquad \Rightarrow$ седл. т. нет

При $x>0$, если $y=0$

Теорема 3:

Если выпуклые ф-ии $f, g_i \in C^1(\Gamma)$, $i=\overline{1,m}$, $\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x\geq 0\}$. Тогда (x^*,y^*) – седл. т. ф-ии Лагр. в обл-ти $x\geq 0$, $y\geq 0$ <=> вып-ны условия:

1. $\frac{\partial L^*}{\partial x_j}\geq 0$ 2. $x_j^*\cdot\frac{\partial L^*}{\partial x_j}=0$ 3. $x_j^*\geq 0$ $\forall j=\overline{1,m}$

4. $\frac{\partial L^*}{\partial y_i}\leq 0$ 5. $y_i^*\cdot\frac{\partial L^*}{\partial y_i}=0$ 6. $y_i^*\geq 0$ $\forall i=\overline{1,m}$, где:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_j}=\frac{\partial L}{\partial x_j}\Big|_{\substack{x=x^*\\ y=y^*}} \qquad \frac{\partial L^*}{\partial y_i}=\frac{\partial L}{\partial y_i}\Big|_{\substack{x=x^*\\ y=y^*}}$$

Д-во: => очев., т.к. 1)-3) – необх. усл-я min $L(x,y)$ по перем. x_j

4)-6) – необх. усл-я max $L(x,y)$ по перем. y_i

<= т.к. $y\geq 0$, f, g_i – вып., то $L(x,y)=f(x)+\sum y_i g_i(x)$ – вып. на X

По т.4 $\forall x\geq 0$ $L(x,y^*)-L(x^*,y^*)\geq \langle x-x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}\rangle = \langle \underbrace{x}_{\geq 0\,(3)}, \underbrace{\frac{\partial L^*}{\partial x}}_{\geq 0\,(1)}\rangle -$

$- \underbrace{\langle x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}\rangle}_{=0\,(2)} \geq 0$ => $L(x,y^*)\geq L(x^*,y^*)$

Очев. $\frac{\partial L}{\partial y_i}=g_i(x)$

$L(x^*,y^*)-L(x^*,y)=\sum_{i=1}^m (y_i^*-y_i)\, g_i(x^*) = \langle y^*-y, \frac{\partial L^*}{\partial y}\rangle = -\langle \underbrace{y}_{\geq 0}, \underbrace{\frac{\partial L^*}{\partial y}}_{\leq 0}\rangle \geq 0$

=> $L(x^*,y^*)\geq L(x^*,y)$

Зам 1 Если $\Gamma=\mathbb{R}^n$, то вместо усл-й 1)-3) нужно усл-е $\frac{\partial L^*}{\partial x_j}=0$ $j=\overline{1,m}$

2 Если $X=\{x\in\Gamma \mid g_i(x)\leq 0,\ i=\overline{1,m}\}$ уд-т УС, то усл-я 1)-6) – необх. и дост. усл-я оптим-ти т. x^*

Теорема 4 Куна-Таккера для непр. дифф-х ф-й

Пусть вып. ф-ии $f, g_i\in C^1(\Gamma)$, $i=\overline{1,m}$, $\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x\geq 0\}$. Пусть $X=\{x\in\Gamma\mid g_i(x)\leq 0,\ i=\overline{1,m}\}$ уд-т УС. Тогда т. $x^*\in X$ – оптимальна <=>

<=> $\exists y\in\mathbb{R}^m$, $v\in\mathbb{R}^n$, $y\geq 0$, $v\geq 0$ и $-f'(x^*)=\sum_{i\in I(x^*)} y_i g_i'(x^*) - \sum_{j\in J(x^*)} v_j e_j$ *, где

$I(x^*)=\{i\mid g_i(x^*)=0\}$ $J(x^*)=\{j\mid x_j^*=0\}$

e_j – j-й един. вект.

Д-во: Покажем, что условия т.4 экв-ны условиям 1)-6) из т.3

Действ., т.к. $\frac{\partial L^*}{\partial y_i}=g_i(x^*)$, то 3) и 4) экв. $x^*\in X$

Положим $v_j=\frac{\partial L^*}{\partial x_j}=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^m y_i\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}$ => 1) экв. $v_j\geq 0$, 6) экв. $y\geq 0$

2) и 5) экв. $v_j x_j^*=0$ и $y_i g_i(x^*)=0$ $\forall j=\overline{1,n}$ $i=\overline{1,m}$

т.е. при $j\notin J(x^*)$ => $v_j=0$ и при $i\notin I(x^*)$ => $y_i=0$

Тогда 2) и 5) экв. $-f'(x^*)=\sum_{i=1}^m y_i g_i'(x^*)-v=\sum_{i\in I(x^*)} y_i g_i'(x^*)-\sum_{j\in J(x^*)} v_j e_j$

т.е. 2) и 5) экв. *

Зам Если $\Gamma=\mathbb{R}^n$, то * принимает вид: $-f'(x^*)=\sum_{i\in I(x^*)} y_i g_i'(x^*)$ – этим обычно пользуемся на семинарах

Теорема 5:

Пусть $X=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x\geq 0,\ Ax\leq b\}$. Тогда $x^*\in X$ – т. min вып. ф-ии f на X <=>

<=> $\exists y^*\geq 0$: (x^*,y^*) – седл. т. ф-ии Лагр. в обл-ти $x\geq 0$, $y\geq 0$

т.е. ограничения линейны $g_i=\langle a_i, x\rangle$

Д-во: $\Leftarrow$ из т. 1

$\Rightarrow$ Рассмотрим $I(x^*) = \{i \mid (Ax^*)_i = b_i\}$ $\quad J(x^*) = \{j \mid x^*_j = 0\}$

По т.6 (крит-е из min):

x^* - опт. $\Leftrightarrow$ $\forall$ возм. напр-я s в т. x^* вып-ся: $\langle f'(x^*), s\rangle \geq 0$

Напомн.: s - возм. напр. в т. x^* $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_0 > 0$ $\quad \forall \lambda \in [0, \lambda_0] \Rightarrow x^* + \lambda s \in X$

т.е. s - возм. $\Leftrightarrow$ $s_j \geq 0$ $\quad \forall j \in J(x^*)$ и $(-As)_i \geq 0$ $\quad \forall i \in I(x^*)$

Действ., если $x^*_j = 0$ $\quad s_j < 0$, то $\forall \lambda > 0$ $\quad (\lambda s + x^*)_j < 0$, т.е. $\lambda s + x^* \notin X$

если $x^*_j > 0$, то $\exists \lambda > 0 : (\lambda s + x^*)_j \geq 0$

если $(Ax^*)_i = b_i$ и $(As)_i > 0$, то $(A(x^* + \lambda s))_i > b_i$ $\quad \forall \lambda > 0$ вылезли

если $(Ax^*)_i < b_i$, то $\exists \lambda > 0 : (A(x^* + \lambda s))_i \leq b_i$

Перенумеруем столбцы и строки матр. A: $J(x^*) = \{1, \dots, l\}$ $\quad l \leq n$

$I(x^*) = \{1, \dots, k\}$ $\quad k \leq m$

Введём матр. $B = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \dots \\ -a_k \\ e_1 \\ \dots \\ e_l \end{pmatrix}$ $(k-l) \times n$, где a_i - i-я строка A, e_j - j-й ед. вект.

Тогда s - возм. $\Leftrightarrow$ $Bs \geq 0$. По т6 $\forall$ возм. s $\langle f'(x^*), s\rangle \geq 0$

По т. Фаркаша (для $v = f'(x^*)$): $\exists u \in \mathbb{R}^{k+l}$, $u \geq 0$: $f'(x^*) = B^T u$

Обозн. $u^T = (y_1, \dots, y_k, v_1, \dots, v_l)$ $\Rightarrow$ $-f'(x^*) = \sum\limits_{i \in I(x^*)} y_i a_i - \sum\limits_{j \in J(x^*)} v_j e_j$, т.е. * из т.4