Теорема 5

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., $f: X \to \mathbb{R}$ - вып., $x^* \in X$ - т. лок. min ф-ии f. Тогда x^* - т. глоб. min и мн-во всех глоб. min X^* - вып.

Д-во: Пусть x^* - т. лок. min. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in X \cap U_\varepsilon(x^*) \quad f(x^*) \leq f(x)$

Предп. $\exists \tilde{x} \in X: f(\tilde{x}) < f(x^*)$. Положим $\alpha = \frac{\varepsilon}{\|x^* - \tilde{x}\|} < 1$ т.к. $\tilde{x} \notin U_\varepsilon(x^*)$

X - вып. $\Rightarrow [\tilde{x}, x^*] \subseteq X$. В частн, $y = \alpha\tilde{x} + (1-\alpha)x^* \in X$

Очев. $\|y - x^*\| = \alpha\|\tilde{x} - x^*\| = \varepsilon \Rightarrow y \in U_\varepsilon(x^*)$ и $f(y) \geq f(x^*)$

С др. стор., $f(x^*) \leq f(y) \leq \alpha f(\tilde{x}) + (1-\alpha)f(x^*) < f(x^*)$ - противоречие

$\Rightarrow x^*$ - т. глоб. min

Пусть $x', x'' \in X^* \Rightarrow f(x') = f(x'') = f^* = \min\limits_{x \in X} f(x)$

Из вып-ти X: $[x', x''] \subseteq X \Rightarrow \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leq$

$\leq \lambda f(x') + (1-\lambda)f(x'') = f^* \Rightarrow \lambda x' + (1-\lambda)x'' \in X^* \Rightarrow X^*$ - вып.

Следствие:

Если $f: X \to \mathbb{R}$ - строго вып., x^* - т. лок min f, то x^* - единств. глоб. min

Теорема 6: критерий того, что т. явл. т. min

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., $f: X \to \mathbb{R}$ - вып., дифф. на X, $x^* \in X$. Тогда x^* - т. min f $\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \langle f'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$

Д-во: $\Leftarrow$ По т. 4 $\forall x \in X \quad f(x) - f(x^*) \geq \langle f'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \Rightarrow x^*$ - т. min

$\Rightarrow$ Пусть x^* - т. min. $\forall \alpha \in [0,1] \quad \alpha x + (1-\alpha)x^* \in X \quad \forall x \in X$

Пусть $z(\alpha) := \alpha x + (1-\alpha)x^* \quad \varphi(\alpha) := f(z(\alpha)) = f(x^* + \alpha(x - x^*))$ - дифф-ма на $[0,1]$

Тогда $0 \leq \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}(f(x^* + \alpha(x - x^*)) - f(x^*)) = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} = \varphi'(0) = \langle \frac{df}{dz}, \frac{dz}{d\alpha} \rangle \Big|_{\alpha=0} =$

$= \langle f'(x^*), x - x^* \rangle$

Опр Направление $s \in \mathbb{R}^n$ ($\|s\| = 1$) в т. $x \in X$ наз. **возможным**, если $\exists \lambda_0 > 0: \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_0] \quad x + \lambda s \in X$

т.е. можем сдвинуться немного и остаться в X

Эквив. форм. теоремы 6:

понадобится в конце курса

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., $f: X \to \mathbb{R}$ - вып., дифф., $x^* \in X$. Тогда x^* - т. min $\Leftrightarrow$ производные f по всем направлениям неотрицательны

Теперь хотим про сущ-е поговорить. Вот, например, у $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 0$ нет min

Сильно выпуклые функции

Опр Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып. $f: X \to \mathbb{R}$ - сильно выпукла, если $\exists \lambda > 0$:

$\forall \alpha \in [0,1] \quad \forall x, y \in X \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \lambda\alpha(1-\alpha)\|x - y\|^2$

λ - параметр сильной выпуклости

Зам Сильно вып. ф-я явл-ся строго вып. Обратное неверно

Ex Если A – строго пол. опр. симм. матр., то $f = \langle Ax, x\rangle$ – сильно вып.

Д-во: из утв 1: $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \alpha(1-\alpha)\langle A(x-y), x-y\rangle \leq$
из алг.: Если A – стр. пол. опр., то все её СЗ > 0 и $\langle Au, u\rangle \geq \lambda_{min} \cdot \|u\|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$
$\leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \lambda_{min}\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \Rightarrow f$ – сильн. вып. с парам. λ_{min}

Теорема 7 Критерий сильной выпуклости
Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – вып., $f \in C^1(X)$. Тогда
f – сильн. вып. $\Leftrightarrow \exists \mu > 0: \forall x, y \in X \quad \langle f'(x) - f'(y), x-y\rangle \geq \mu\|x-y\|^2$

Д-во: $\Rightarrow$ из сильн. вып-ти $\exists \lambda > 0: \forall x, y \in X$ при $\alpha = \frac{1}{2}$:
$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{4}\lambda\|x-y\|^2$
По т. 4: $f(x) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \langle f'(x), \frac{x-y}{2}\rangle$ и $f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \langle f'(y), \frac{y-x}{2}\rangle$
Тогда $\lambda\|x-y\|^2 \leq 2f(x) + 2f(y) - 4f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\left(\langle f'(x), \frac{x-y}{2}\rangle + \langle f'(y), \frac{y-x}{2}\rangle\right) =$
$= \langle f'(x) - f'(y), x-y\rangle$, т.е. берём $\mu = \lambda$

почти как в т.4 → $\Leftarrow$ Пусть $\varphi(\alpha) = f(\alpha x + (1-\alpha)y) = f(y + \alpha(x-y))$. Пусть $x, y \in X$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$
Положим $z_i = y + \alpha_i(x-y)$ $i = 1, 2$. Тогда $z_1 - z_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(x-y)$
$\varphi'(\alpha_1) = \langle \frac{df}{dz}, \frac{dz}{d\alpha}\rangle\Big|_{\alpha=\alpha_1} = \langle f'(z_1), x-y\rangle \qquad \varphi'(z_2) = \langle f'(z_2), x-y\rangle$
$\varphi'(\alpha_1) - \varphi'(\alpha_2) = \dfrac{\langle f'(z_1) - f'(z_2), z_1 - z_2\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2} \geq \mu\dfrac{\|z_1 - z_2\|^2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \mu(\alpha_1 - \alpha_2)\|x-y\|^2$

Тогда $\forall \beta \in (0,1)$ имеем: $\beta f(x) + (1-\beta)f(y) - f(\beta x + (1-\beta)y) = \beta\varphi(1) + (1-\beta)\varphi(0) -$
$- \varphi(\beta) = (\beta\varphi(\tau) - \varphi(\beta\tau))\Big|_{\tau=0}^{1} = \int_0^1 (\beta\varphi'(\tau) - \beta\varphi'(\tau\beta))d\tau \geq \beta\int_0^1 \mu(\tau - \tau\beta)\|x-y\|^2 d\tau =$
$= \mu\beta(1-\beta)\|x-y\|^2 \cdot \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\mu}{2}\beta(1-\beta)\|x-y\|^2$
$\Rightarrow f$ – сильн. вып. с парам. $\lambda = \frac{\mu}{2}$

Теорема 8:
Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – вып, $\operatorname{Int} X \neq \varnothing$, $f: X \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(X)$. Тогда
f – сильн. вып. $\Leftrightarrow \exists \mu > 0: \forall x \in X \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \langle f''(x)y, y\rangle \geq \mu\|y\|^2$

Зам μ в т.7 и т.8 одно и то же

Теорема 9 о существовании т. min
Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – вып, замкн., $f: X \to \mathbb{R}$ – сильн. вып. и $f \in C^1(X)$. Тогда
1. $\forall x_0 \in X$ мн-во $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ – огр.
2. $\exists! x^* \in X: f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

Д-во: $\forall x, y \in X$ $f(x) - f(y) = f(\alpha(x-y) + y)\Big|_{\alpha=0}^{1} = \int_0^1 \langle f'(y + \alpha(x-y)), x-y\rangle d\alpha = \langle f'(y), x-y\rangle +$
$+ \int_0^1 \frac{1}{\alpha}\langle f'(\alpha(x-y) + y) - f'(y), (x-y)\alpha\rangle d\alpha \geq \langle f'(y), x-y\rangle + \int_0^1 \frac{1}{\alpha}\mu\|(x-y)\alpha\|^2 d\alpha =$
$= \langle f'(y), x-y\rangle + \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2$
При $y = x_0$, $x \in X_0$: $0 \geq f(x) - f(x_0) \geq \langle f'(x_0), x - x_0\rangle + \frac{\mu}{2}\|x - x_0\|^2$, т.е.:
$\|x - x_0\|^2 \leq \frac{2}{\mu}\langle f'(x_0), x_0 - x\rangle \overset{\text{НК-Б}}{\leq} \frac{2}{\mu}\|f'(x_0)\| \cdot \|x_0 - x\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x_0 - x\| \leq \frac{2}{\mu}\|f'(x_0)\| = const \Rightarrow X_0$ – огр.
т.к. f – непр, а X_0 – компактно, то по т. Вейерштр. $\exists x^*$ – т. min f на X_0
$\Rightarrow$ по т. 5 x^* – единств. глоб. min f

Зам Т9 верна и без требования $f \in C^1(X)$
прост тогда трюк с интегралом не пройдет и д-во будет сложнее

Выпуклая оптимизация

Опр **ЗВП**: $f(x) \to \min\limits_{x}$, $X = \{x \in \Gamma \mid g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m}\}$, где f, g_i – вып. $i = \overline{1,m}$
$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ – вып. замкн.

Как правило, $\Gamma = \mathbb{R}^n$ или $\Gamma = \mathbb{R}^n_+$

если говорим про вогнутость, то $\to \max$

Решить ЗВП значит:

1. Найти $x^* \in X$: $\forall x \in X$ $f(x^*) \le f(x)$
2. Если нет такого x^*, то найти $f^* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$, т.е. $\forall x \in X$ $f^* \le f(x)$ и $\forall f' > f^*$ $\exists x \in X$: $f' > f(x)$ (возм. $f^* = -\infty$)
3. Или д-ть, что $X = \varnothing$

Опр Мн-во X удовл-т **условию регулярности Слейтера** (УС), если $\operatorname{Int} X \ne \varnothing$, т.е. $\exists x_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$: $g_i(x_0) < 0$ $\forall i = \overline{1,m}$

Утв Вып. мн-во $X = \{x \in \Gamma \mid g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m}\}$ уд-т УС $\Leftrightarrow$ $\forall i = \overline{1,m}$ $\exists x_i \in X \cap \operatorname{Int}\Gamma$: $g_i(x_i) < 0$

Д-во: $\Rightarrow$ $x_i = x_0$ $\forall i$

$\Leftarrow$ $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{x_i}{m} \in X \cap \operatorname{Int}\Gamma$. По нер-ву Йенсена $\forall j = \overline{1,m}$:
$g_j(x_0) \le \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{g_j(x_i)}{m} < 0$, т.к. $g_j(x_j) < 0$ и $g_j(x_i) \le 0$

Опр **Функция Лагранжа для ЗВП:**
$L(x,y) = f(x) + \langle g(x), y\rangle$, где $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $y \ge 0$, $x \in \Gamma$

Опр Пара (x^*, y^*) — **седловая точка ф-ии Лагранжа**, если $x^* \in \Gamma$, $y^* \ge 0$ и $\forall x \in \Gamma$ $\forall y \ge 0$ $L(x^*, y) \le L(x^*, y^*) \le L(x, y^*)$

Теорема 1:
Если (x^*, y^*) – седл. т. ф-ии Лагр., то x^* – т. min ф-ии f.

Д-во: По опр-ю $f(x^*) + \langle g(x^*), y\rangle \le f(x^*) + \langle g(x^*), y^*\rangle \le f(x) + \langle g(x), y^*\rangle$ $\forall x \in \Gamma$ $\forall y \ge 0$
Тогда (из лев. нер-ва): $\langle y - y^*, g(x^*)\rangle \le 0$ $\forall y \ge 0$
в частн. при $y = y^* + e_i$ $\forall i = \overline{1,m}$ получим $g_i(x^*) \le 0$ $\forall i = \overline{1,m}$ $\Rightarrow x^* \in X$
При $y = 0$ $\langle y^*, g(x^*)\rangle \ge 0$ и т.к. $y^* \ge 0$, $g(x^*) \ge 0$, то $\langle y^*, g(x^*)\rangle = 0$
Пусть $x \in X$, т.е. $x \in \Gamma$ и $g(x) \le 0$. Тогда $\langle \underset{\ge 0}{y^*}, \underset{\le 0}{g(x)}\rangle \le 0$
$\Rightarrow f(x^*) \le f(x) + \langle g(x), y^*\rangle \le f(x)$ $\Rightarrow$ x^* – т. min