Задача оптимизации:

Найти min (max) ф-ии $f: \Omega \to \mathbb{R}$ на мн-ве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, т.е. найти т. $x^* \in \Omega$: $\forall x \in \Omega$ $f(x^*) \leqslant f(x)$ ($\geqslant$), или д-ть, что его не сущ-ет.

Как правило, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m},\ g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}$

Обозн. $f(x) \to \min\limits_{\Omega}$; $\min\limits_{\Omega} f(x)$; $\underset{x \in \Omega}{\text{minimize}}\, f(x)$

$f(x)$ – целевая ф-я $\qquad g_i(x) \leqslant 0$ – ограничения

Ω - мн-во допустим. знач-й пер-х, $\forall x \in \Omega$ - допуст. реш-е, x^* – опт. реш-е

Методы поиска условн. экстремума

$f(x) \to \underset{x \in \Omega}{\text{extr}} \qquad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m}\},\ f, g_i \in C^1$

1 Метод исключ-я пер-х

Считаем, что $\operatorname{Rang} \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\|_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = m$ $\quad *$

Пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0$ в нктр т. $\hat{x}$

Тогда в нктр окрест-ти т. $\hat{x}$ по т. о неявн. ф-ии:
$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases}$, $\varphi_i \in C^1_{i=\overline{1,n}}$

2 Метод Лагранжа

Предп-е: усл-е $*$ вып-но в нктр т. x^*

Ф-я Лагранжа: $F(x, \lambda) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$

Тогда усл. экстр. ф-ии $f(x)$ совп. с безусл. экстр. ф-ии $F(x, \lambda)$

Опр Ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **выпукла**, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \in [0,1]$:
$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

Опр Ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **линейна**, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Опр Задача опт-ции: $f(x) \to \min\limits_{x \in \Omega}$ $\quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$ наз.

1. задачей выпуклого программирования (ЗВП), если f, g_i – выпукл. $\forall i = \overline{1,m}$
2. задачей линейного программир-я (ЗЛП), если f, g_i – линейн. $\forall i = \overline{1,m}$

Элементы выпуклого анализа

Рассм-м n-мерное евкл. пр-во $\mathbb{R}^n$. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Опр
- $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ • $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$
- $x \le y \iff \forall i = \overline{1,n} \quad x_i \le y_i$
- Скал. пр-е: $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$ • Норма: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$

Св-ва нормы:
- $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$
- $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$

Опр $\forall \varepsilon > 0$ ε-окрестностью т. x наз. $U_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \le \varepsilon \}$

Опр Пусть $X \le \mathbb{R}^n$, т. $x \in \mathbb{R}^n$ наз. предельной точкой мн-ва X, если $\forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(x)$ содерж. беск. много т. из X

$\operatorname{Lim} X$ – мн-во пред. точек мн-ва X.

Опр $\overline{X} = X \cup \operatorname{Lim} X$ – замыкание мн-ва X

Опр X – замкнуто, если $X = \overline{X}$

Опр т. $x \in X$ – внутренняя точка мн-ва X, если $\exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \le X$

$\operatorname{Int} X$ – мн-во внутр. точек X

Опр т. $x \in \mathbb{R}^n$ – граничная точка мн-ва X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y_1, y_2 \in U_\varepsilon(x)$: $y_1 \in X$, $y_2 \notin X$

$\operatorname{Fr} X$ – мн-во граничных точек (граница) мн-ва X

Упр $\overline{X} = \operatorname{Int} X \cup \operatorname{Fr} X$

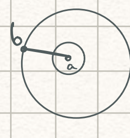
Опр Мн-во $[x, y] = \{ \alpha x + (1 - \alpha) y \mid \alpha \in [0, 1] \}$ – отрезок, соед. т. x и y.

Опр Мн-во $X \le \mathbb{R}^n$ выпукло, если $\forall x, y \in X$ $[x, y] \le X$ или если $X = \varnothing$

Утв X, Y – выпукл. $\Rightarrow$ $X \cap Y$ – выпукл.

Лемма 1:

Пусть $X \le \mathbb{R}^n$ – вып, замкн, $a \in \operatorname{Int} X$, $b \in \operatorname{Fr} X$. Тогда $\forall x \in [a, b)$: $x \in \operatorname{Int} X$



Д-во: по опр-ю Int: $\exists \varepsilon > 0$ $|U_\varepsilon(x)| \le X$, т.е. $\forall c \in \mathbb{R}^n$ $\|c\| \le \varepsilon \Rightarrow a + c \in X$

Пусть $\alpha \in (0, 1]$ $x = \alpha a + (1 - \alpha) b \in [a, b)$

из вып-ти X: $\forall \underset{= a+c}{y} \in U_\varepsilon(a)$ $[y, b] \le X$, т.е. $\forall c \in \mathbb{R}^n$ $\|c\| \le \varepsilon$

$\underbrace{\alpha(a + c) + (1 - \alpha) b}_{= x + \alpha c} \in X \Rightarrow U_{\alpha\varepsilon}(x) \le X$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Int} X$

Опр Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\delta = \inf\limits_{x \in X} \|v-x\|$ — **расст-е** от v до X.

Тогда т. $p \in \overline{X}$ — **проекция** т. v на мн-во X, если $\|v-p\| = \delta$

Теорема 1 о проекции т. на мн-во:
$\forall$ непуст., выпукл., замкн. мн-ва $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\exists! p \in X$: p - проекция т. v на X.

Д-во: Если $v \in X$, то $p = v$, $\delta = 0$. Пусть $v \notin X$

$\exists$ Т.к. $\delta = \inf\limits_{x \in X} \|x - v\|$, то по опр-ю $\inf$ $\exists$ посл-ть $\{x_k\}_{k=1,\infty} \subseteq X$: $\delta = \lim\limits_{k \to \infty} \|x_k - v\|$

Тогда $\{x_k\}$ - огр., т.к. $\forall \varepsilon > 0$ начиная с нктр номера все x_k лежат в шаре радиуса $\varepsilon + \delta$ с центром в т. v. $\Rightarrow \exists$ сход. подпосл-ть $\{x_{k_i}\}$

Обозн. $\lim\limits_{i \to \infty} x_{k_i} = p$. Покажем, что это правда проекция:

X - замкн. $\Rightarrow p \in X$. При этом $\|p - v\| = \lim\limits_{i \to \infty} \|x_{k_i} - v\| = \delta$ $\Rightarrow$ p - проекция

! Предп., что $\exists q \neq p$ - проекция, т.е. $\|q - v\| = \|p - v\| = \delta$

Рассм. $z = \frac{1}{2}(p+q) \in X$ из вып-ти. Тогда:

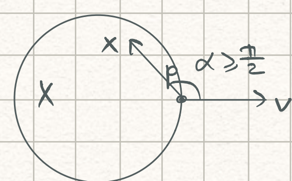
$\delta \leq \|z - v\| = \frac{1}{2}\|p - v + q - v\| \leq \frac{1}{2}(\|p-v\| + \|q-v\|) = \delta \Rightarrow (p-v) \parallel (q-v)$, т.к. $p \neq q$

$\Rightarrow v = \frac{1}{2}(p+q) \in X$ — противоречие

Теорема 2 критерий проекции

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., замкн., $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in X$. Тогда

p - проекция v на X $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ $\langle x - p, v - p \rangle \leq 0$



Д-во: $\Rightarrow$ Пусть p - проекц. т. v на X. $\forall x \in X$ $\forall \lambda \in (0,1)$

$z = \lambda x + (1-\lambda) p \in X$ $\quad \|z - v\|^2 = \|\lambda(x-p) + p - v\|^2 \overset{5}{=} \lambda^2\|x-p\|^2 + \|p-v\|^2 + 2\lambda\langle x-p, p-v\rangle$

из p-проекц. $\Rightarrow$ $\|z-v\|^2 \geq \|p-v\|^2 \Rightarrow \lambda^2\|x-p\|^2 + 2\langle x-p, p-v\rangle \geq 0$ $\quad \forall \lambda \in (0,1)$

при $\lambda \to 0$ имеем: $\langle x-p, p-v\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x-p, v-p\rangle \leq 0$

$\Leftarrow$ Пусть $x \in X$. Тогда $\|x-v\|^2 = \|x-p+p-v\|^2 = \overbrace{\|x-p\|^2}^{\geq 0} + \|p-v\|^2 + 2\overbrace{\langle x-p, p-v\rangle}^{\geq 0} \geq \|p-v\|^2$

$\Rightarrow p$ - проекц. v на X.

Следствие:

Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., замкн., $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in X$ - проекция v на X, то $\forall x \in X$:

1. $\langle x - v, x - p\rangle \geq \|x - p\|^2$
2. $\|x - p\| \leq \|x - v\|$

Д-во: 1 $\langle x-v, x-p\rangle = \langle x-p, x-p\rangle + \overbrace{\langle p-v, x-p\rangle}^{\geq 0} \geq \|x-p\|^2$

2 $\|x-v\|^2 = \|x-p+p-v\|^2 \overset{5}{=} \|x-p\|^2 + \|p-v\|^2 + 2\overbrace{\langle x-p, p-v\rangle}^{\geq 0} \geq \|x-p\|^2$

Опр Пусть $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда мн-во $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x\rangle = \lambda\}$ — **гиперпл-ть** в $\mathbb{R}^n$

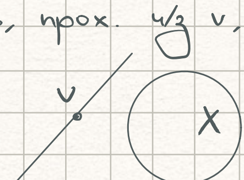
Мн-ва $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x\rangle \leq \lambda\}$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x\rangle \geq \lambda\}$ — **полупр-ва**

Теорема 3 1я т. отделимости:

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., $v \notin \overline{X}$. Тогда $\exists$ отделяющая гиперпл-ть, прох. ч/з v, т.е.

$\exists c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\langle c, v\rangle = \lambda$ и $\forall x \in X$ $\langle c, x\rangle < \lambda$

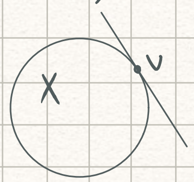


Д-во: Пусть $p \in \overline{X}$ - проекция т. v на X. Положим:

$c = v - p \neq 0$, т.к. $v \notin \overline{X}$. Положим $\lambda = \langle c, v\rangle$

По т. 2 $\forall x \in X$ $\langle x, v-p\rangle \le \langle p, v-p\rangle$. Имеем $\langle p-v, v-p\rangle = -\|v-p\|^2 < 0$,
т.е. $\langle p, v-p\rangle < \langle v, v-p\rangle \Rightarrow \langle c, x\rangle = \langle v-p, x\rangle \le \langle v-p, p\rangle < \langle v-p, v\rangle =$
$= \langle c, v\rangle = \lambda$

Теорема 4 2я т. отделимости:
Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вып., $v \in \mathrm{Fr}\, X$. Тогда $\exists$ опорная гиперпл-ть, прох. ч/з v, т.е.
$\exists c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\langle c, v\rangle = \lambda$ и $\forall x \in X$ $\langle c, x\rangle \le \lambda$



касат. есть $\Rightarrow$ она опорная
а вот если касат. нет, то опорная всё же может быть
т.е. опорная - обобщение касательной (грубо говоря)

Д-во: $v \in \mathrm{Fr}\, X \Rightarrow \exists$ посл-ть $v_k \in \mathbb{R}^n$, $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} v$ и $v_k \notin \overline{X}$. Применим т. 3:
$\forall k$ $\exists$ отд. гиперпл-ть $\Rightarrow \exists c_k \in \mathbb{R}^n$, $c_k \neq 0$ $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$: $\langle c_k, v_k\rangle < \lambda_k$
Можно считать, что $\|c_k\| = 1$ $\forall k$ (можем отнормировать, если нужно)
$\Rightarrow$ посл-ть $\{c_k\}$ - огр. $\Rightarrow \exists$ сход. подпосл-ть c_{k_i}
Пусть $c = \lim\limits_{i\to\infty} c_{k_i}$. Тогда $\|c\| = \lim\limits_{i\to\infty} \|c_{k_i}\| = 1 \Rightarrow c \neq 0$. Положим $\lambda = \langle c, v\rangle$
Тогда $\forall x \in X$ $\langle c_{k_i}, x\rangle < \lambda_{k_i}$: $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_{k_i} = \lim\limits_{i\to\infty} \langle c_{k_i}, v_{k_i}\rangle = \langle c, v\rangle = \lambda$
$\Rightarrow \langle c, x\rangle \le \lambda$ (прост в нерав-х к пределу перешли, строгость потерялась