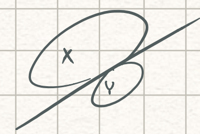
Теорема 5 3я теорема отделимости:

Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — вып. и $\operatorname{Int} X \neq \varnothing$, $Y \cap \operatorname{Int} X = \varnothing$. Тогда $\exists$ разделяющая гиперплоскость, т.е. $\exists c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ т.ч. $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ $\langle c, x\rangle \geq \langle c, y\rangle$



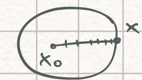
Д-во: Рассм-м мн-во $Z = \{z = y - x \mid y \in Y,\ x \in \operatorname{Int} X\}$

Очев. Z - вып. и $0 \notin Z$. По т.3 или т.4:

$\exists c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ т.ч. $\langle c, z\rangle \leq \langle c, 0\rangle = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall y \in Y$ $\forall x \in \operatorname{Int} X$ $\langle c, y\rangle \leq \langle c, x\rangle$. $\exists x_0 \in \operatorname{Int} X$ и по п.1:

$\forall x \in X$ $[x_0, x) \subseteq \operatorname{Int} X$ $\Rightarrow$ $\exists \{x_i\} \in \operatorname{Int} X$ т.ч. $x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$



Значит $\forall y \in Y$ $\langle c, x_i\rangle \geq \langle c, y\rangle$ $\Rightarrow$ $\langle c, x\rangle \geq \langle c, y\rangle$

Опр Мн-во $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — **конус**, если $\forall x \in U$ $\forall \lambda \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda x \in K$

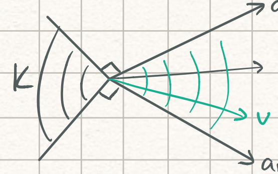
Ex $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ — конус

Теорема Фаркаша:

Пусть A - матр. $m \times n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Тогда v представим в виде $v = A^T u$, где $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in K$ вып-но $\langle v, x\rangle \leq 0$.

Геометр. интерпретация:

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, где $a_i^T \in \mathbb{R}^n$ $\quad Ax = \begin{pmatrix} \langle a_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, x\rangle \end{pmatrix}$ $\quad K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ – мн-во векторов, образующих неостр. угол со всеми a_i



$v = A^T u = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^T u_i$, $u_i \geq 0$, т.е. $v \in$ конической оболочке векторов $a_1, \dots, a_m$ $\Leftrightarrow$ v образует неостр. угол со всеми вект. из K

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть $x \in K$: $\langle v, x\rangle = \langle A^T u, x\rangle = \langle \overset{\geq 0}{u}, \overset{\leq 0}{Ax}\rangle \leq 0$

$\Leftarrow$ $\forall x$ $Ax \leq 0$ $\Rightarrow$ $\langle v, x\rangle \leq 0$. Положим $W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = A^T u,\ u \in \mathbb{R}^m,\ u \geq 0\}$

Заметим, что W - вып. замкн. конус и $0 \in W$

От противного: предположим, что $v \notin W$

По т.1 $\exists$ проекция p т. v на W. Из д-ва т.3 для $c = v - p$ и $\lambda = \langle c, v\rangle$ вып. $\langle c, w\rangle < \lambda$ $\forall w \in W$, т.е. $\langle c, w\rangle < \langle c, v\rangle$ $\forall w \in W$

В части. при $u = 0$ имеем $\boxed{\langle c, v\rangle > 0}$

С другой стороны, по т.2 $\forall w \in W$: $\langle w - p, c\rangle = \langle w - p, v - p\rangle \leq 0$, т.е. $\langle w, c\rangle \leq \langle p, c\rangle$

Т.к. W - конус, то $\forall \alpha > 0$ $\forall w \in W$ вып.: $\alpha w \in W$, т.е.

$\forall \alpha > 0$ $\forall w \in W$ $\langle \alpha w, c\rangle \leq \langle p, c\rangle$ $\Rightarrow$ $\langle w, c\rangle \leq 0$ $\forall w \in W$

Тогда $\forall u \geq 0$ $\langle u, Ac\rangle = \langle A^T u, c\rangle = \langle w, c\rangle \leq 0$ $\Rightarrow$ $Ac \leq 0$

Значит $c \in K$ $\Rightarrow$ $\boxed{\langle v, c\rangle \leq 0}$ — противоречие $\Rightarrow$ $v \in W$

Выпуклые функции

Опр Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — вып., ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ выпукла (вогнута), если $\forall x, y \in X$ $\forall \alpha \in [0,1]$ $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \underset{(\geq)}{\leq} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

Если $\forall x \neq y$ $\forall \alpha \in [0,1]$ это нер-во строгое, то f — строго выпукла (вогнута)

Зам f — вогнута $\Leftrightarrow$ $-f$ — выпукла
Поэтому про вогнутость больше не говорим

Утв 1 Пусть A — симм. м-ца. Тогда $f = \langle Ax, x \rangle$ — вып. $\Leftrightarrow$ A — пол. опр.

Д-во: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha^2 \langle Ax, x \rangle + (1-\alpha)^2 \langle Ay, y \rangle + \alpha(1-\alpha)\langle Ay, x \rangle +$$
$$+ \alpha(1-\alpha)\langle Ax, y \rangle = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) + (\alpha^2 - \alpha)[\langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle -$$
$$- \langle Ax, y \rangle - \langle Ay, x \rangle] = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - \underset{\geq 0}{\alpha}\underset{\geq 0}{(1-\alpha)} \langle A(x-y), x-y \rangle \leq$$
$$\leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$
$$\Leftrightarrow \langle A(x-y), x-y \rangle \geq 0, \text{ т.е. } A \text{ — пол. опр.}$$

Утв 2 Пусть $f, g: X \to \mathbb{R}$ — вып., $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — вып. Тогда $h = \max\{f, g\}$ — вып. на X

Д-во: Пусть $x, y \in X$, $\alpha \in [0,1]$. $h(\alpha x + (1-\alpha)y) = \max\{f(\alpha x + (1-\alpha)y), g(\alpha x + (1-\alpha)y)\} \leq$
$$\leq \max\{\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y)\} \leq \alpha \max\{f(x), g(x)\} +$$
$$+ (1-\alpha)\max\{f(y), g(y)\} = \alpha h(x) + (1-\alpha) h(y)$$

Утв 3 Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — вып. и $\forall x \in X$ $f(x) \geq 0$. Тогда $f^2(x)$ — вып.

Д-во: $0 \leq f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$
$$\Rightarrow f^2(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha^2 f^2(x) + (1-\alpha)^2 f^2(y) + 2\alpha(1-\alpha) f(x) f(y) = \alpha f^2(x) +$$
$$+ (1-\alpha) f^2(y) + \alpha(1-\alpha)[2 f(x) f(y) - f^2(x) - f^2(y)] = \alpha f^2(x) + (1-\alpha) f^2(y) -$$
$$- \underset{\geq 0}{\alpha}\underset{\geq 0}{(1-\alpha)} \underset{\geq 0}{(f(x) - f(y))^2} \leq \alpha f^2(x) + (1-\alpha) f^2(y)$$

Свойства выпуклых функций

Теорема 1 Неравенство Йенсена

Пусть $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Тогда если f — вып., то $f(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$

Д-во: Индукция по k. При $k = 1$ — очев.
Предп, что при $k = k_0$ нер-во верно. Пусть $k = k_0 + 1$
Пусть все $\alpha_i > 0$. Положим $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k_0+1}}$ $i = \overline{1, k_0}$ $\Rightarrow$ $\beta_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{k_0} \beta_i = 1$

$$f(x) = f\left(\alpha_{k_0+1} x_{k_0+1} + \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i x_i\right) = f\left(\alpha_{k_0+1} x_{k_0+1} + (1 - \alpha_{k_0+1}) \sum_{i=1}^{k_0} \beta_i x_i\right) \leq$$
$$\leq \alpha_{k_0+1} f(x_{k_0+1}) + (1 - \alpha_{k_0+1}) f\left(\sum_{i=1}^{k_0} \beta_i x_i\right) \overset{\text{инд}}{\leq} \alpha_{k_0+1} f(x_{k_0+1}) + (1 - \alpha_{k_0+1}) \sum_{i=1}^{k_0} \beta_i f(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i f(x_i)$$

Теорема 2:

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – вып., $f: X \to \mathbb{R}$ – вып., $x \in \operatorname{Int} X$. Тогда $\forall s \in \mathbb{R}^n$ т.ч. $\|s\| = 1$ $\exists$ произв-я по напр-ю s в т. x, т.е. $\exists \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{f(x+\alpha s) - f(x)}{\alpha} = \dfrac{\partial f}{\partial s}$

Теорема 3:

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – вып., $f: X \to \mathbb{R}$ – вып., $x \in \operatorname{Int} X$. Тогда $f(x)$ – непр. в т. x

Теорема 4 Критерий выпуклости

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – вып., $f: X \to \mathbb{R}$ – дифф. на X. Тогда
$f(x)$ – вып. $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X$ $\langle f'(x), y-x \rangle \le f(y) - f(x)$

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть $x, y \in X$, $\alpha \in (0,1]$. Тогда усл-е вып-ти можно записать в след. виде:

$$f(x + \alpha(y-x)) = f(\alpha y + (1-\alpha)x) \le \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) = f(x) + \alpha(f(y) - f(x)),$$

т.е. $\dfrac{f(x+\alpha(y-x)) - f(x)}{\alpha} \le f(y) - f(x)$

Рассмотрим ф-ии: $z(\alpha) := x + \alpha(y-x)$ и $\varphi(\alpha) = f(z(\alpha)) = f(x + \alpha(y-x))$

Тогда $f(y) - f(x) \ge \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} = \varphi'(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \left\langle \dfrac{df}{dz}, \dfrac{dz}{d\alpha} \right\rangle = \langle f'(x), y-x \rangle$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall x, y \in X$ $f(y) - f(x) \ge \langle f'(x), y-x \rangle$

Возьмём $z(\alpha) = x + \alpha(y-x)$ и $\varphi(\alpha) = f(z(\alpha)) = f(x + \alpha(y-x))$

Выберем произв. $x, y \in X$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$

Положим $x_1 = x + \alpha_1(y-x)$ $y_1 = x + \alpha_2(y-x)$ $\Rightarrow$ $y_1 - x_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)(y-x)$

$\varphi'(\alpha_1) = \left\langle \dfrac{df}{dz}, \dfrac{dz}{d\alpha} \right\rangle\Big|_{\alpha=\alpha_1} = \langle f'(x_1), y-x \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi'(\alpha_1) = \langle f'(x_1), y_1 - x_1 \rangle \le f(y_1) - f(x_1)$ $*$

Аналогично: $\varphi'(\alpha_2) = \langle f'(y_1), y-x \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi'(\alpha_2) = \langle f'(y_1), x_1 - y_1 \rangle \le f(x_1) - f(y_1)$ $**$

Сложим нер-ва $*$ и $**$:

$(\varphi'(\alpha_1) - \varphi'(\alpha_2))(\alpha_2 - \alpha_1) \le 0 \Rightarrow \varphi'(\alpha)$ – неуб.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, $\lambda \in (0,1]$. Будем проверять усл-е выпукл-ти

$\lambda\varphi(\alpha_2) + (1-\lambda)\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_2\lambda + (1-\lambda)\alpha_1) = \lambda(\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)) -$

$- \varphi(\alpha_1 + \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)) + \varphi(\alpha_1) = [\lambda\varphi(\alpha_1 + \tau(\alpha_2 - \alpha_1)) - \varphi(\alpha_1 + \lambda\tau(\alpha_2 - \alpha_1))]\Big|_{\tau=0}^{1} =$

$= \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) \int\limits_0^1 [\varphi'(\alpha_1 + \tau(\alpha_2 - \alpha_1)) - \varphi'(\alpha_1 + \lambda\tau(\alpha_2 - \alpha_1))] d\tau \ge 0,$

т.к. $(\alpha_1 + \tau(\alpha_2 - \alpha_1)) - (\alpha_1 + \lambda\tau(\alpha_2 - \alpha_1)) = \tau(1-\lambda)(\alpha_2 - \alpha_1)$, а значит знак φ' совп. со знаком $\alpha_2 - \alpha_1$ $\Rightarrow \varphi(\alpha)$ – выпукл.

Тогда $f(\alpha y + (1-\alpha)x) = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 0) \le$

$\le \alpha\varphi(1) + (1-\alpha)\varphi(0) = \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) \Rightarrow f$ – вып.