$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\Big|_{\Gamma} \overset{\text{пв}}{=} 0$$

$\sigma \in C(\Gamma)$, $\sigma > 0$

<u>Св-во</u> ... задачи с условиями Неймана плотны в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим случай

$a_0 \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$ $\qquad (Lu, v) = (f, v)$

$$\overset{\shortparallel}{\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\vec{x}}, \quad v = const$$

Тогда $\int\limits_{\Omega} f \cdot v \, d\vec{x} = 0 \overset{v=const}{\Longrightarrow} \int\limits_{\Omega} f \, dx = 0 \Rightarrow f \in L_{2,\perp}(\Omega)$

Пусть u – решение задачи

$\forall v \in H^1 \quad a(u,v) \equiv \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\vec{x} = \int\limits_{\Omega} f v \, d\vec{x}$

Тогда $u + const$ – тоже решение

Поэтому для однозначности берем $u \in H^1_\perp(\Omega)$, т.е. $u : \int\limits_{\Omega} u \, d\vec{x} = 0$

$$D_A = \left\{ v \in C^2(\overline{\Omega}) \,\Big|\, \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \ \int\limits_{\Omega} v \, d\vec{x} = 0 \right\}$$

D_A расширяется до $H_A = H^1_\perp$

I. Задачи на последовательности подпространств

1.1 Задачи в подпространствах и основная лемма

<u>Напом</u>

(2) $f \in H$, найти $u \in H_A$: $\forall v \in H_A \quad a(u,v) = (f,v)$ $\qquad H_A \subset H$

$F(v) = a(v,v) - 2(f,v)$ – функционал энергии

(3) Найти $u \in H_A$: $\forall v \in H_A \quad F(v) \geq F(u)$

$V \subset H_A$ – замкнутое по отн. к H_A подпространство

$\hookrightarrow$ индуцируем гильбертову структуру

(2′) Найти $w \in V : \forall v \in V \quad a(w,v) = (f,v)$

(3′) Найти $w \in V : \forall v \in V \quad F(v) \geq F(w)$

Два вопроса : • Единственно ли решение? $(2') \sim (3')$?

• $\|w-u\|_A$ – ?

Лемма (основная) (Сеа)

$u \in H_A : \forall v \in H_A \quad a(u,v) = (f,v)$ (2)

$w \in V : \forall v \in V \quad a(w,v) = (f,v)$ (2′)

$\Rightarrow \|w-u\|_A = \inf\limits_{v \in V} \|v-a\|_A$

Д-во $v \in V$ т.к. $V \subset H_A$, $v \in H_A$

$\forall v \in V \quad a(u,v) = (f,v)$

$* \quad \forall v \in V \quad a(w-u, v) = 0$

$\|w-u\|_A^2 = a(w-u, w-u) = a(w-u, w-v+v-u) =$

$= a(w-u, w-v) + a(w-u, v-u) = / \, w,v \in V \Rightarrow w-v \in V / \overset{*}{=}$

$= 0 + a(w-u, v-u) \leq \|w-u\|_A \|v-u\|_A$

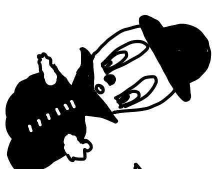
Т.о. $\forall v \in V \quad \|w-u\|_A \leq \|v-u\|_A$

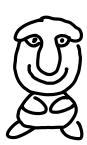
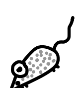
Равенство достигается при $v = w$ ■

Замечание Лемма имеет место и для (3) с (3′)

$$F(w) = \|w-u\|_A^2 - \|u\|_A^2 \geq F(u)$$

1.2. Аппроксимация




$\{V_k\}_1^\infty$, $V_k \subset H_A$ – посл-ть замкнутых подпр-в

$\{V_k\}$ ПРЕДЕЛЬНО ПЛОТНА в H_A, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall u \in H_A \quad \exists K = K(\varepsilon, u) : \forall k \geq K \quad \inf\limits_{v \in V_k} \|v-u\|_A < \varepsilon$

1.3 Методы Галеркина и Ритца

Те же (2′), (3′) но на посл-тях в КВП

(G) $f \in H \quad \{V_k\}_1^\infty, \ V_k \subset H_A$ – конечномерн. подпр-во

Найти $\{w_k\}_1^\infty, \ w_k \in V_k, \quad a(w_k, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_k$

$V: \ \dim V = N < \infty$

$V = \text{span}\{\varphi_i\}_1^N$, φ_i – базис

↳ мин. оболочка

$\forall v \in V \quad \exists! \{\alpha_i\}_1^N \subset \mathbb{R}: \quad v = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k$

$a(w, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \ i = \overline{1,N} \quad *$

(G) $\longrightarrow$ $(*)$ – очевидно

$(*) \longrightarrow$ (G): $\quad \sum_{i=1}^N \alpha_i (a(w, \varphi_i) - (f, \varphi_i)) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(w, v) = (f, w)$

Итого

(G) $f \in H \quad \{V_k\}_1^\infty, \ V_k \subset H_A$ – конечномерн. подпр-во

Найти $w \in V \quad a(w, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \quad i = \overline{1,N}$

Реализация метода Галёркина:

$w \in V \Rightarrow w = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j \Rightarrow a(\sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) \beta_j = (f, \varphi_i) := f_i$

$A := (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=\overline{1,N}}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$

Т.о. метод есть $A\vec{\beta} = \vec{f}$

$\langle A\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = \begin{bmatrix} a(\sum \alpha_j \varphi_j, \varphi_1) \\ \vdots \\ a(\sum \alpha_j \varphi_j, \varphi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N a(\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j, \varphi_i) \alpha_i =$

$= a(\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i) = / v = \sum \alpha_i \varphi_i / = a(v, v) = \|v\|_A^2$

Для $v \neq 0 \quad \langle A\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0 \Rightarrow A$ полож. опр.

Теорема 1 | $\{V_k\}_1^N$ – предельно плотна в H_A, u – реш. обобщ. задачи в H_A

$\Rightarrow \|w_k - u\|_A \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$\underline{\Delta\text{-во}}$ Пред. плотн $\Rightarrow$ $\exists \{v_k\}_1^\infty \subset V_k$: $\|v_k - u\|_A \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Из осн. леммы $\|w_k - u\|_A \leq \|v_k - u\|_A \longrightarrow 0$ ■