Лаевский Юрий Миронович

Книжки, кто могут пригодиться:

2 семестр: Ю.М. Лаевский – «Метод конечных элементов (основы теории, зад.)»

1 семестр: Годунов, Рябенький(?) – «Разностные схемы»

1. Предварительные сведения о разностных схемах

(этого на экзамене не будет)

Основные задачи мат. физики:

1) Гиперболические ур-я

$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$, $t \in (0, T)$, $x \in (0, 1)$ ← ур-я колебаний

Кр. усл-я: $u(t, 0) = g_0(t)$; $u(t, 1) = g_1(t)$

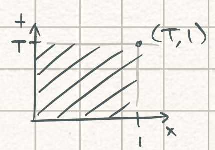
Усл-я Коши (нач. данные): $u(0, x) = \Phi_0(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \Phi_1(x)$

Для $x \in (-\infty, \infty)$: $u(t, x) = \Phi(x - at) + \Psi(x + at)$ – реш-е Даламбера

Ур-я движения: (следствие из гипербол. зад.)

$\frac{\partial r}{\partial t} + a\frac{\partial r}{\partial x} = 0$, $a > 0$, $r(t, x) = \Phi(x - at)$

$\frac{\partial s}{\partial t} - a\frac{\partial s}{\partial x} = 0$, $s(t, x) = \Psi(x + at)$



$Ta = 1$

$x - at = const$

$1 - aT = const = 0$

2) Параболические ур-я

$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ $u(t, 0) = g_0(t)$, $u(t, 1) = g_1(t)$ $u(0, x) = \Phi(x)$

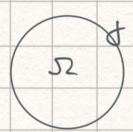
чтобы тут '–' поставить, надо усл-я краевые менять, иначе некорректно

$y' = -\lambda y$ $y = y_0 \cdot e^{\lambda t}$ – задача некорректна

3) Эллиптические ур-я

тут задача Коши некорректна

$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ в Ω



$u|_\gamma = \Phi(x, y)$

2. Простейшие разностные схемы для ур-й движения

Опр $\omega_h = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1}\}$, $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, N-1$, $h = \frac{1}{N}$ (сетка)

$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{0\} \cup \{1\}$

$u^h : \omega_h \to \mathbb{R}$ – сеточная ф-я, u_i – знач-е ф-ии u^h в т. x_i

$\omega_{h,\tau} = \{x_i = ih,\ i = 1, \ldots, N-1,\ t_n = n\tau,\ n = 1, \ldots, M-1,\ \tau = \frac{T}{M}\}$

$u^{h,\tau} : \omega_{h,\tau} \to \mathbb{R}$, u_i^n – знач-е сет. ф-ии $u^{h,\tau}$ в т. (t_n, x_i)

Опр Разностная схема – связь м/у значениями сеточной ф-ии и входными данными

Ур-е движ-я: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)}$, $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$

← это наша задача

$u(t, 0) = 0$ $u(0, x) = \Phi(x)$

так можно, спасибо $f(t, x)$

Ex $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \approx \frac{u(t+\tau,x)-u(t,x)}{\tau}$

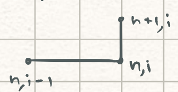
$$\approx \frac{u(t,x)-u(t-\tau,x)}{\tau}$$

$$\approx \frac{u(t+\tau,x)-u(t-\tau,x)}{2\tau}$$

Разн. сх. „правый нижний уголок"

$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} + a\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{h} = f(t_n,x_i) = f_i^n$, $i=1,\dots,N$, $n=0,\dots,M-1$ тут можно $(t,x)\in(0,T]\times(0,1]$

$u_i^0 = \varphi(x_i)=\varphi_i$, $i=1,\dots,N$ $\quad u_0^n=0$, $n=0,\dots,M$



— сеточный шаблон (теперь ясно, откуда название взялось)

0) Разрешима ли задача? (*)

1) Насколько Зад. и Разн. сх. похожи?

2) $\xi^{h,\tau} = u^{h,\tau} - (u)^{h,\tau}$, где $(u)^{h,\tau}$ — сет. ф-я со знач-ем $u(t_n,x_i)$

← погрешность реш-я

0) u_i^0 – заданн. $u_i^{n+1} = \left(1-\frac{a\tau}{h}\right)u_i^n + \frac{a\tau}{h}u_{i-1}^n + \tau f_i^n$, $i=1,\dots,N$, $n=0,\dots,M-1$

видно, что разрешимо ← число Куранта

1) $\psi^{h,\tau} \Rightarrow \psi_i^n = f_i^n(t_n,x_i) - \frac{u(t_{n+1},x_i)-u(t_n,x_i)}{\tau} - a\frac{u(t_n,x_i)-u(t_n,x_{i-1})}{h}$

← погрешность аппроксимации