18/2/21

$|u|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=k} (D^\lambda u)^2 d\vec{x} \right)^{1/2}$ – ПОЛУНОРМА в пр-ве Соболева

Функционал $\Phi: D_\ell \to \mathbb{R}$ – ПОЛУНОРМА, если

① $\Phi(\alpha u) = |\alpha| \Phi(u)$

② $\Phi(u+v) \le \Phi(u) + \Phi(v)$

Теорема$_1$ Соболева об эквив-ых нормах

Φ_ℓ – ограниz. в $H^\ell(\Omega)$ функционал, обладающий св-вами полунормы
$\forall u(x)$ – полинома : $\deg u \le \ell-1$, $u \ne 0$ $\quad \Phi(u) \ne 0$
$\Rightarrow \|u\|_{H^\ell(\Omega)} \le c \left(|u|^2_{H^\ell(\Omega)} + \Phi_\ell^2(u) \right)^{1/2}$

Теорема "об эквив", т.к. Φ_ℓ огр, и справа тоже сможем ограничить

Теорема$_2$ (Неравенство Пуанкаре)

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le c \left(|u|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\Omega u\, d\vec{x} \right)^2 \right)$$

Д-во $\Phi_1(u) = \left| \int_\Omega u\, d\vec{x} \right|$ – полунорма (очевидно), огр. по нерву К-Б:

$$\left| \int_\Omega u\, d\vec{x} \right| \le \sqrt{\text{mes}\, \Omega}\, \|u\|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{\text{mes}\, \Omega}\, \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

$\Phi_1(\text{const}) = |\text{const}|\, \text{mes}\, \Omega$

$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = |u|^2_{H^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$ ■

Ω – обл, $\Gamma = \partial\Omega$. $\quad tr_\Gamma : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ – СЛЕД на границе

если тут H^2, то не сработает – оператор не будет ограничен

Лемма $\quad u \in H^1(\Omega)$
$\Rightarrow tr_\Gamma u \in L_2(\Gamma)$ и $\|tr_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \le c \|u\|_{H^1(\Omega)}$

Упр док-то

Теорема$_3$ (Обобщенное неравенство Фридрихса)

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le c \left(|u|^2_{H^1(\Omega)} + \|tr_\Gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)} \right)$$

Д-во $\Phi_1(u) := \|tr_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}$ – огр в силу леммы

$u = \text{const} \Rightarrow \|tr_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} = \int\limits_\Gamma (tr_\Gamma u)^2 dx = \text{const}^2 \cdot mes_{m-1} \Gamma$

Т.о. выполняются усл. т. Соболева об эквив ■

Теорема 4 (Неравенство Фридрихса)

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C |u|_{H^1(\Omega)}$$

Д-во $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

Теорема 5 $H_0^1(\Omega)$ - полное пр-во

Д-во $\{u_n\}_1^\infty$ - фунд. в $H^1(\Omega)$ посл-ть, т.е. $\|u_m - u_n\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

$u_1 \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \in H^1(\Omega)$

$u \in H_0^1(\Omega)$?

$\|tr_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} = \|tr_\Gamma (u - u_n)\|_{L_2(\Gamma)} \leq C \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow tr_\Gamma u = 0 \Rightarrow u \in H_0^1(\Omega)$ ■

Следств $u \in H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow \|u\|_{H^1(\Omega)} \simeq |u|_{H^1(\Omega)}$

$L_{2,1}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) \mid \int\limits_\Omega u\, d\vec{x} = 0\}$

$H_1^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \int\limits_\Omega u\, d\vec{x} = 0\}$

Теорема 6 $L_{2,1}(\Omega)$ и $H_1^1(\Omega)$ полны

Д-во $\{u_n\}_1^\infty \subset L_{2,1}(\Omega)$ - фунд. посл-ть. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in L_2(\Omega)$

$\left|\int\limits_\Omega u\, d\vec{x}\right| = \left|\int\limits_\Omega (u - u_n)\, d\vec{x}\right| \leq \sqrt{mes\, \Omega}\, \|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow u \in L_{2,1}(\Omega)$ □

H_1^1 аналогично ■

Следств $\forall u \in H_1^1(\Omega)$ $\|u\|_{H^1(\Omega)} \simeq |u|_{H^1(\Omega)}$

Д-во очевидно или через нер-во Пуанкаре...

Эллиптические задачи

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(\vec{x})\, u, \quad m=1,2,3, \quad \vec{x} \in \Omega$$

$a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$

$a_0 \in C(\bar{\Omega})$, $a_0(\vec{x}) \geq 0$

$$Lu = f$$

Ур-е является ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ в Ω, если

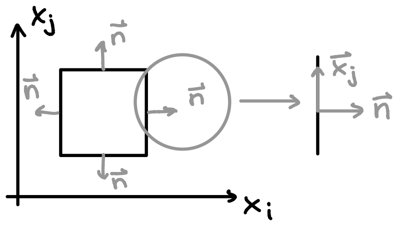
$$\forall \xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} \in \bar{\Omega} \quad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\vec{x}) \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$$

Краевые условия: ① $u|_\Gamma = 0$ — ДИРИХЛЕ

② $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u|_\Gamma = 0$ — НЕЙМАНА, $\sigma \in C(\Gamma)$, $\sigma \geq 0$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО (КО-) НОРМАЛИ

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\vec{n}, \vec{x}_j)$$, n – внеш. нормаль



③ $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$ $(\sigma = 0)$, $a_0 = 0$ — ВЫРОЖДЕННОЕ

ФОРМУЛА ГРИНА

$$\int_\Omega (Lu) v \, d\vec{x} = \int_\Omega \left(\sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 u v\right) d\vec{x} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

$$D_A = \{ u \in C^2(\bar{\Omega}) \mid \text{краевые условия} \}$$

Задача Дирихле

$u, v \in D_A$ $\quad \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$

$A: D_A \to L_2(\Omega)$: $Au = Lu$ $\quad (A = L|_{D_A})$

$$(Au, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 u v\right) d\vec{x} \equiv a(u,v)$$ — это ск. произв., т.к. $a_{ij} = a_{ji}$

$$a(u,v) \geq \lambda_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \lambda_0 |u|^2_{H_0^1}$$

$D_A \subset H_0^1$

$$|u|_A^2 = \int_\Omega \left(\sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2\right) d\vec{x}$$

$$(Au, u) \geq \lambda |u|^2_{H^1(\Omega)} \geq c \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$H_A \subset L_2$

Теорема 7 В з. Дирихле H_A совпадает с H_0^1

Д-во Эквив-сть норм: из эллиптичности $C_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_A^2$

из ограниченности и $|ab| \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$$\|u\|_A^2 \le c_2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Задача Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\sigma u$$

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv\right) d\vec{x} + \int\limits_\Gamma \sigma uv\, ds \quad , \quad \sigma \ge 0$$

$$c_1 \|u\|^2_{H^1} \le a(u,u) \le c_2 \|u\|^2_{H^1}$$