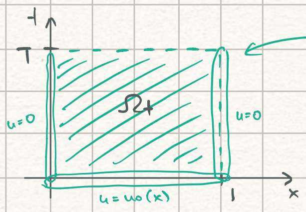
Простейшие разностные схемы для ур-я теплопроводности



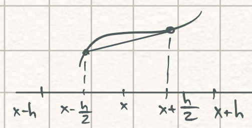
эта обл-ть наз-ся временной цилиндр

это всё начальная краевая задача

Ур-е теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & (x,t)\in\Omega_T = (0,1)\times(0,T)\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{— нач. данные}\\ u(0,t)=0 \quad u(1,t)=0 & \text{— краевые усл-я}\end{cases}$$

$$* \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(x+\frac{h}{2},t\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\left(x-\frac{h}{2},t\right)\right)$$ — центральная разность



$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\left(x+\frac{h}{2},t\right) &\approx \frac{1}{h}\left(u(x+h,t)-u(x,t)\right)\\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(x-\frac{h}{2},t\right) &\approx \frac{1}{h}\left(u(x,t)-u(x-h,t)\right)\end{aligned}\right\} \leftarrow$$ подставим их в $*$:

$$* \approx \frac{1}{h^2}\left(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{1}{\tau}\left(u(x,t+\tau) - u(x,t)\right)$$

1. Явная схема:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \varphi_i^n \qquad \begin{matrix} i=1,..,N_h-1\\ n=0,..,N_\tau-1\end{matrix}$$

$$u_i^0 = u_0(x_i) \qquad i=0,..,N_x$$

$$u_0^{n+1} = 0, \quad u_{N_x}^{n+1} = 0 \qquad n=0,..,N_t-1$$

Аппроксимация

$$\psi_i^n = f(x_i,t_n) - \frac{u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n)}{\tau} + a^2\frac{u(x_{i+1},t_n) - 2u(x_i,t_n) + u(x_{i-1},t_n)}{h^2} =$$

$t' \in [t_n, t_{n+1}]$

$$= f(x_i,t_n) - \frac{1}{\tau}\left[u(x_i,t_n) + \tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t') - u(x_i,t_n)\right] + \frac{a^2}{h^2}\left[u(x_i,t_n) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_n) + \right.$$
$$+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - \frac{h^3}{6}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x',t_n) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_n) - 2u(x_i,t_n) + u(x_i,t_n) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_n) +$$
$$\left. + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x',t_n) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_n) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x'',t_n)\right] = f(x,t_n) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_n) +$$
$$+ a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - \frac{\tau}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_n) + \frac{a^2}{24}\cdot h^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x',t_n) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x'',t_n)\right)$$

выглядит как лажа

надо по книжкам проверять

Принцип максимума для РС

$$\|u^{n+1}\|_{h,\infty} \le \|u^n\|_{h,\infty} + \tau\|f^n\|_{h,\infty} \le \|u^0\|_{h,\infty} + \frac{\tau(n-1)}{T}\|f^{(h,\tau)}\|_{h,\tau,\infty}$$

$$\|u^{(h,\tau)}\|_{h,\tau,\infty} = \max_n \|u^n\|_{h,\infty}$$

Если это нер-во вып-но, то схема устойчива

Устойчивость

$\sigma = \frac{\tau a^2}{h^2}$ — параболическое число Куранта

Запишем нашу РС в след виде:

$$u_i^{n+1} = u_i^n(1-2\sigma) + \sigma u_{i-1}^n + \sigma u_{i+1}^n + \tau\varphi_i^n$$

$$\xi_i^n = u_i^n - u(x_i, t_n)$$

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n(1-2\sigma) + \sigma\xi_{i-1}^n + \sigma\xi_{i+1}^n + \tau\psi_i^n$$ ← тут ошибка аппр. и сидит

$$|\xi_i^{n+1}| \le |1-2\sigma||\xi_i^n| + \sigma|\xi_{i-1}^n| + \sigma|\xi_{i+1}^n| + \tau|\psi_i^n| \le \max_i|\xi_i^n|(|1-2\sigma| + 2\sigma) + \tau\max_i|\psi_i^n|$$

Усл-е устойч-ти по пр. max: $|1-2\sigma| + 2\sigma \le 1$

1) $1-2\sigma \ge 0$ $\left(\sigma \le \frac{1}{2}\right)$ → $1-2\sigma+2\sigma = 1 \le 1$, ура!

2) $\sigma > \frac{1}{2}$ $\quad 2\sigma - 1 + 2\sigma \le 1$ → против-е

$4\sigma \le 2$

$\sigma \le \frac{1}{2}$

=> одно усл-е на σ: $\boxed{\sigma \le \frac{1}{2}}$

2. Неявная схема

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_i^{n+1} \qquad \begin{matrix} i = 1, .., N_h - 1 \\ n = 0, .., N_\tau - 1\end{matrix} \qquad (x_i, t_{n+1})$$

Тут тоже хотим на устойч-ть и принцип максимума посмотреть:

$$(1+2\sigma)u_i^{n+1} = u_i^n + \sigma u_{i-1}^{n+1} + \sigma u_{i+1}^{n+1} + \tau\varphi_i^{n+1}$$

$$(1+2\sigma)|\xi_i^{n+1}| \le \max_i|\xi_i^n| + 2\sigma\max_i|\xi_i^{n+1}| + \tau\max_i|\psi_i^{n+1}|$$

$$(1+\cancel{2\sigma})\underbrace{\max_i|\xi_i^{n+1}|}_{\|\xi^{n+1}\|_{h,\infty}} \le \|\xi^n\|_{h,\infty} + \cancel{2\sigma\|\xi^{n+1}\|_{h,\infty}} + \tau\|\psi^{n+1}\|_{h,\infty}$$

$$\|\xi^{n+1}\|_{h,\infty} \le \|\xi^n\|_{h,\infty} + \tau\|\psi^{n+1}\|_{h,\infty}$$ ← это и есть принцип максимума

=> никаких доп. усл-й не нужно — неявная схема и так устойчива

3. Схема Кранка - Николсон

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{h^2}+\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{h^2}\right]+\varphi_i^{n+\frac12}$$

$\varphi_i^{n+\frac12} \to f(x_i, t_n+\frac{\tau}{2})$

$\searrow \frac12\left(f(x_i,t_n)+f(x_i,t_{n+1})\right)$

от этой схемы можно ожидать 2го порядка

Опорн. точка: $(x_i, \underbrace{t_n+\tau/2}_{t_{n+\frac12}})$

$$\frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{\tau} - u'_t(t_{n+\frac12}) = \frac1\tau\Big(\cancel{u(t_{n+\frac12})} + \frac\tau2 \cancel{u'_t(t_{n+\frac12})} + \left(\frac\tau2\right)^2\cdot\frac12 \cancel{u''_{tt}(t_{n+\frac12})} + \left(\frac\tau2\right)^3\cdot\frac16 u'''_{ttt}(t') -$$

$$- \cancel{u(t_{n+\frac12})} + \frac\tau2 \cancel{u'_t(t_{n+\frac12})} - \left(\frac\tau2\right)^2\cdot\frac12 \cancel{u''_{tt}(t_{n+\frac12})} + \left(\frac\tau2\right)^3\cdot\frac16 u'''_{ttt}(t'')\Big) - \cancel{u'_t(t_{n+\frac12})} =$$

$$= \frac{\tau^2}{48}\left[u'''_{ttt}(t') + u'''_{ttt}(t'')\right]$$

$\sigma < 1 \to$ принцип max