Напом $\|u-\Pi_h u\|_{L_2(0,1)} \leq h^2 |u|_{H^2(0,1)}$ $\ast$

$$\|u-\Pi_h u\|_{H^1(0,1)} \leq h\sqrt{1+h^2}\,|u|_{H^2(0,1)}$$

$$\|u-\Pi_h u\|_{L_2} = \|(u-u_n)+u_n-\Pi_h u_n+\Pi_h(u_n-u)\|_{L_2(0,1)} \leq$$

$$\leq \|u-u_n\|_{L_2(0,1)} + \|u_n-\Pi_h u_n\|_{L_2(0,1)} + \|\Pi_h(u_n-u)\|_{\substack{L_2(0,1)\\ H^1(0,1)}} \leq$$

$$\leq \underbrace{\|u-u_n\|_{L_2}}_{\to 0} + \underbrace{h^2|u_n-u|_{H^2}}_{\to 0} + h^2|u|_{H^2} + \overset{\text{л. об огр } \Pi_h}{\underbrace{c\|u_n-u\|_{H^1}}_{\to}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u-\Pi_h u\|_{L_2(0,1)} \leq h^2|u|_{H^2(0,1)} \quad \forall u\in H^2(0,1) \quad \circledast$$

Теорема сходимости

$f\in L_2(0,1)$, $u\in H_A$ – обобщ. реш.
u^h – A-ортогональная проекция u на V_A

$\Rightarrow \|u-u^h\| \leq ch\|f\|_{L_2(0,1)}$

Д-во По осн. лемме $\|u-u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c\,\|u-v^h\|_{H^1(0,1)}$ $\forall v\in V_A$

$v^h := \Pi_h u \in V_A \Rightarrow$ по т. об интерп. $\|u-u_h\|_{H^1(0,1)} \leq$

$$\leq c_1 h\,|u|_{H^2(0,1)} \underset{\text{т.о. регуляр}}{\leq} c_1c_2 h\,\|f\|_{L_2(0,1)} \quad \blacksquare$$

Аппроксимация гладких решений. Анализ

Вопросы:

① $\|u-u^h\|_{L_2(0,1)} \leq O(h^2)$ докажем потом

② Оптимальность оценки $O(h)$

$$\begin{cases} -u''=f, & 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

Об. реш: $\forall v\in H_0^1(0,1)$ $\quad \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx$

$i=\overline{1,N-1}$ $\quad \int_0^1 (u^h)'\varphi_i'\,dx = \int_0^1 f_i\varphi_i\,dx$, $v=\varphi_i$

$$z := u - u^h \quad = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} z' \varphi_i' \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} z' \varphi_i' \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} z' \varphi_i' \, dx = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} z' dx - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} z' dx =$$

$$= \frac{1}{h} \left(z(x_i) - z(x_{i-1}) \right) - \frac{1}{h} \left(z(x_{i+1}) - z(x_i) \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \left(-z(x_{i-1}) + 2 z(x_i) - z(x_{i+1}) \right) = 0 \quad , \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$z(x_0) = z(x_N) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(x_1) \\ \vdots \\ z(x_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} & z(x_i) = 0 , \quad i = \overline{0, N} \\ & u(x_i) = u^h(x_i) \Rightarrow \\ & \Rightarrow u^h = \Pi_h u \end{aligned}$$

$$z(x) = u(x) - u^h(x) = \left(u(x) - \Pi_h u(x) \right) + \underbrace{\left(\Pi_h u(x) - u^h(x) \right)}_{= 0} = w(x)$$

$$f(x) \equiv 2 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x(1-x) \quad \dots$$

$$z'(x) = x_{i-1} + x_i - 2x \ , \qquad x \in [i-1, i]$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (z')^2 dx = \dots = \frac{1}{3} h^3 \quad , \qquad \int_0^1 (z')^2 dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z')^2 dx = \frac{h^2}{3} \ ,$$

$$|z|_{H^1(0,1)} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$\Pi_h z = \Pi_h u - \Pi_h u^h = \Pi_h u - u^h = 0$ в нашем примере

$$z = u - \Pi_h u + \Pi_h z = u - \Pi_h u$$

Лемма | u - об. реш. , $u^h \in V_A$

$$\Rightarrow \left| a(u - \Pi_h u, v^h) \right| \le c h^2 |u|_{H^2(0,1)} \|v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \forall v^h \in V_A$$

Д-во $\quad a_i(u,v) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (pu'v' + quv) \, dx \ , \qquad w = u - \Pi_h u$

$$a_i(w,v) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (pw'v' + qwv) \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (pw')v' dx + \int_{x_{i-1}} w(qv - p'v') dx$$

$$pw' = (pw)' - p'w$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (pw)'v'dx = \left((pw)(x_i) - (pw)(x_{i-1})\right) \underbrace{const}_{v' = const \text{ в } [x_{i-1}, x_i] \text{ т.к. } v \in V_A} = 0$$

$$|a(w,v^h)| = \left| \int_0^1 w(qv^h - p'(v^h)')\,dx \right| \le \underbrace{c}_{\max\{\max_{[0,1]} q,\ \max_{[0,1]} p\}} \|w\|_{L_2(0,1)} \|v^h\|_{H^1(0,1)} \le$$

т. об интерп в L_2

$$\le ch^2 |u|_{H^2(0,1)} \|v^h\|_{H^1(0,1)}$$

Теорема о сходимости по сеточной норме

u - об. реш., $u^h \in V_A$ - A-ортог. проекция u на V_A

$\Rightarrow \|\Pi_h u - u^h\|_{H^1(0,1)} \le ch^2 \|f\|_{L_2(0,1)}$

Д-во $\|\Pi_h u - u^h\|^2_{H^1(0,1)} \le c\,a(\Pi_h u - u^h, \Pi_h u - u^h) = ca(\Pi_h u - u + u - u^h, \Pi_h u - u^h) = ca(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u^h) + \underbrace{ca(u - u^h, \Pi_h u - u^h)}_{=0} =$

лемма

$$= ca(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u^h) \le c_1 h^2 |u|_{H^2(0,1)} \|\Pi_h u - u^h\|_{H^1(0,1)} \le$$

$$\le c_2 h^2 \|f\|_{L_2(0,1)} \|\Pi_h u - u^h\|_{H^1(0,1)}$$

Т.о. $\|\Pi_h u - u^h\|_{H^1(0,1)} \le c_2 h^2 \|f\|_{L_2(0,1)}$ ■

Следствие $\max\limits_{i=\overline{1,N}} |u(x_i) - u_i| \le ch^2 \|f\|_{L_2(0,1)}$

$$\|u - u^h\|_{C[0,1]} \le ch \|f\|_{L_2(0,1)}$$

Лемма о предельной плотности

$u \in H^1(0,1)$

$\Rightarrow \exists \{v^h\} \subset V_h$ - однопарам. сем-во ф-ий : $\|u - v^h\|_{H^1(0,1)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Д-во fix $\varepsilon > 0$

$H^2(0,1)$ плотно в $H^1(0,1)$

$\exists v_\varepsilon \in H^2(0,1)$: $\|u - v_\varepsilon\|_{H^1(0,1)} < \frac{\varepsilon}{2}$

$v_\varepsilon \in H^2(0,1) \Rightarrow \exists \Pi_h v_\varepsilon$ - кусочн-лин интерполянт :

$$\|v_\varepsilon - \Pi_h v_\varepsilon\|_{H^1(0,1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$|v_\varepsilon|_{H^2(0,1)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$, но всегда можем взять h:

$< \frac{\varepsilon}{2}$, т.к $\le ch\,|v_\varepsilon|_{H^2(0,1)}$

Т.о. $v^h = \Pi_h v_\varepsilon \Rightarrow \|u - v^h\|_{H^1(0,1)} < \varepsilon$ ■

Теорема сходимости для только обобщ. решения

| u - обобщ. реш., u^h – A-огр. проекция u на V_A

$\Rightarrow \|u - u^h\|_{H^1(0,1)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Д-во Из осн. леммы $\|u-u^h\|_{H^1(0,1)} \le c\|u - v^h\|_{H^1(0,1)}$ $\forall v^h \in V_A$

Из леммы о предельн. плотн. $\exists v_h$ $\|u - v^h\|_{H^1(0,1)} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|u-u^h\|_{H^1(0,1)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$$\int_0^1 u'v'\,dx = v(\xi), \quad |v(\xi)| \le \|v\|_{C[0,1]} \le c\,\|v\|_{H^1(0,1)}$$

$u(0) = 0$

$|v(\xi)| \le \|v\|_{C[0,1]} \le c\,\|v\|_{H^1(0,1)}$

$\exists x_j = \xi \Rightarrow u \in V_A \Rightarrow z = u - u^h = 0$

У Лени дописать конец...