$C_h(0,1)$, $L_{2h}(0,1)$

Опр Сеточная норма $\|\cdot\|_{U_h}$ P_h-согласованная с $\|\cdot\|_U$, если:
$$\lim_{h\to 0}\|P_h u\|_{U_h} = \|u\|_U \qquad u\in U$$

Лемма 1:
$C_h[0,1]$ согл. $C[0,1]$, $\quad L_{2,h}[0,1]$ согл. $L_2[0,1]$ $\quad \|u\|^2_{L_2} = \int_\Omega u^2 dx$

Теорема о сеточном вложении:
$$\boxed{c_1(h)\|u^{(h)}\|_{U_h'} \le \|u^{(h)}\|_{U_h} \le c_2(h)\|u^{(h)}\|_{U_h'}} \qquad (8)$$
Д-во очевидно (из опр-я)

Обратное неравенство
$$\|u^{(h)}\|_{L_{2,h}(\Omega)} \le V^{\frac{1}{2}}(\Omega)\|u^{(h)}\|_{C_h(\bar\Omega)}$$
(тут в общем случае не докажешь)

$h_0 = \min h_{k,i_k} \qquad k=1,\dots,m \qquad i_k=0,\dots,N_k-1$

Опр $\omega_h(\Omega)$ удовл. обр. нер-ву, если $h\le \nu h_0$ (*), где ν - независ. от h

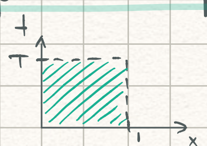
Лемма 2:
$\omega_h(\Omega)$ — уд. (*), то $\|u^{(h)}\|_{C_h(\Omega)} \le \left(\frac{\nu}{h}\right)^{\frac{m}{2}}\|u^{(h)}\|_{L_{2,h}(\Omega)}$

Д-во: $\|u^{(h)}\|^2_{C_h(\Omega)} = \left(\max\limits_{i\in I_{\Omega h}}|u_i|\right)^2 \le \sum\limits_{i\in I_{\Omega h}} u_i^2 \le \frac{1}{h_0^m}\|u^{(h)}\|^2_{L_{2,h}(\Omega)} \qquad \rho_i \ge h_0^m$

5. Сеточные операторы, аппроксимация, устойчивость, сходимость

U_h, F_h ← тут нормы могут отличаться
$L_h: U_h \to F_h \qquad Lu=g$

Ур-е теплопров-ти:



непр. оператор →
$$Lu = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t)\in(0,1)\times(0,T] \\ u & x\in[0,1],\ t=0 \\ u & x=0,\ t\in(0,T] \\ u & x=1,\ t\in(0,T] \end{cases}$$
$$g = \begin{cases} f(x,t) & (x,t)\in(0,1)\times(0,T] \\ u_0(x) & x\in[0,1],\ t=0 \\ 0 & x=0,\ t\in(0,T] \\ 0 & x=1,\ t\in(0,T] \end{cases}$$

Явная схема:
$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} - a^2\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} & n=0,\dots,N_2-1,\ i=1,\dots,N_1-1 \\ u_i^0 & i=0,\dots,N_1 \\ u_0^n & n=1,\dots,N_2 \\ u_{N_1}^n & n=1,\dots,N_2 \end{cases}$$
← число узлов по t
← число узлов по x (почти)

$$g^{(h)} = \begin{cases} f(x_i, t_n) & n=0,\dots,N_2-1 \quad i=1,\dots,N_1-1 \\ u_1(x_i) & i=0,\dots,N_1 \\ 0 & n=1,\dots,N_2, \quad i=0 \\ 0 & n=1,\dots,N_2, \quad i=N_1 \end{cases}$$

то, что относится к слою по времени

$$U_h \to \mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^{(2)} \times \mathcal{E}_h^{(1)} = \{(u_0^0, u_1^0, \dots, u_{N_1}^0, u_0^1, \dots, u_{N_1}^1, \dots, u_0^{N_2}, \dots, u_{N_1}^{N_2})^T\}, \text{ где:}$$

$$\mathcal{E}_h^{(2)} = \{(u^0, \dots, u^{N_2})^T\}_{u^k \in \mathbb{R}} \qquad \mathcal{E}_h^{(1)} = \{(u_0, \dots, u_{N_1})^T\}$$

$G \in \mathcal{E}_h \qquad G = (g^0, \dots, g^{N_2})^T$, где $g^0 = (u_0(x_0), \dots, u_0(x_{N_1}))$, $g^n = (0, f(x_1, t_n), \dots, f(x_{N_1-1}, t_n), 0)$

$\boxed{A_h U = G}$, где:

$$A_h = \begin{bmatrix} \hat{E}_h & & & 0 \\ -\frac{1}{\tau}\hat{E}_h + \hat{A}_h & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{\tau}\hat{E}_h + \hat{A}_h & \hat{E}_h \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_h = \frac{a^2}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{E}_h$ – ед. длины N_1

Будем такое исп-ть: $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A_h u^n = g^n$, $n = 0, \dots, N_2 - 1$, $\quad u^n, g^n \to \mathbb{R}^{N_1-1}$

$$A_h = \frac{a^2}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

узлы с усл-ем Дирихле

$I_\Gamma \subset I_{\Omega_h}$ $\qquad I_{\Omega_h, 0} = I_{\Omega_h} \setminus I_\Gamma$

$U_{h,0} = \{u^{(h)} \in U_h \mid u_i = 0, \ i \in I_\Gamma\}$

нормы в C_h и L_{2h} сохр-ся: $\max\limits_{i \in I_{\Omega_h}} |u_i| = \max\limits_{i \in I_{\Omega_h,0}} |u_i|$ $\qquad \forall u^{(h)} \in U_{h,0}$

$$\sum_{i \in I_{\Omega_h}} \rho_i u_i^2 = \sum_{i \in I_{\Omega_h,0}} \rho_i u_i^2$$

Опр Сеточная задача $L_h u^{(h)} = g^{(h)}$ **аппроксимирует** исходн. задачу $Lu = g$ на реш-ии u, если: $\|L_h(P_h u) - g^{(h)}\|_{F_h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Если $\exists$ c_1, k независ. от h и u: $\|L_h(P_h u) - g^{(h)}\|_{F_h} \le c_1 h^k$, то имеет место **аппроксимация порядка k**.

Опр Реш-е сеточн. задачи $L_h u^{(h)} = g^{(h)}$ **сходится** к реш-ю исх. задачи $Lu = g$, если: $\|P_h u - u^{(h)}\|_{U_h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Если $\exists$ c_0, k независ. от h и u: $\|P_h u - u^{(h)}\|_{U_h} \le c_0 h^k$, то имеет место **сходимость порядка k**.

Для явн. сх.: перенос — $\frac{a\tau}{h} \le 1$, теплопр-ть — $\frac{a^2\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$

Опр1 $L_h u^{(h)} = g^{(h)}$ — устойчива, если:

- $\forall g^{(h)} \in F_h \quad \exists!\, u^{(h)} \in U_h$
- $\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_2 \|g^{(h)}\|_{F_h}$ $\quad c_2$ - незав. от h

Опр2 $L_h u^{(h)} = g^{(h)}$ — устойчива, если $\exists \bar{h}, \delta, c_2$ - независ. от h т. ч.:
$\forall h < \bar{h} \quad \forall \varphi^{(h)} \in F_h : \|\varphi^{(h)}\|_{F_h} \leq \delta$ вып-ны 2 усл-я:

- $L_h v^{(h)} = g^{(h)} + \varphi^{(h)} \quad \exists!\, v^{(h)} \in U_h$
- $\omega^{(h)} = v^{(h)} - u^{(h)} \quad \|\omega^{(h)}\|_{U_h} \leq c_2 \|\varphi^{(h)}\|_{F_h}$

про возмущения

Теорема 1:
Опр 1 <=> Опр 2

Д-во: $1 \Rightarrow 2$ Ставим задачу:

$$\begin{array}{l} L_h v^{(h)} = g^{(h)} + \varphi^{(h)} \\ L_h u^{(h)} = g^{(h)} \\ \hline L_h \omega^{(h)} = \varphi^{(h)} \end{array} \quad \exists!\, v^{(h)} \in U_h$$

тогда и оценка верна: $\|\omega^{(h)}\|_{U_h} \leq c_2 \|\varphi^{(h)}\|$

$2 \Rightarrow 1$

$$\left.\begin{array}{l} L_h v^{(h)} = g^{(h)} + 0 \\ L_h u^{(h)} = g^{(h)} + \varphi^{(h)} \end{array}\right| \Rightarrow L_h \omega^{(h)} = \varphi^{(h)} \quad \forall \|\varphi^{(h)}\|_{F_h} < \delta \quad \|\omega^{(h)}\|_{U_h} \leq c_2 \|\varphi^{(h)}\|_{F_h}$$

Возьмём теперь $\|\varphi^{(h)}\|_{F_h} \geq \delta \qquad \varphi^{(h)} = \frac{\delta}{2} \frac{g^{(h)}}{\|g^{(h)}\|_{F_h}}$

$L_h u^{(h)} = g^{(h)} \qquad \|u^{(h)}\|_{U_h} = \frac{\delta}{2} \|g^{(h)}\|_{F_h} \|\omega^{(h)}\|_{U_h} \leq \frac{\delta}{2} \|g^{(h)}\|_{F_h} c_2 \|\varphi^{(h)}\| = c_2 \|g^{(h)}\|_{F_h}$