4/3/21

Замечание

A – оператор, $A: D_A \to \dots$, D_A – плотно

A действует на сеточные функции, Av, где $v=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varphi_i$

$\mathbb{A}$ – матрица (была в методе Галеркина)

$\mathbb{A}$ действует на векторы $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_N\end{bmatrix}$, $\mathbb{A}\vec{\alpha}=\vec{f}$

$\mathbb{A}$ - представление A в евклидовом пр-ве

$\mathbb{A}=(a(\varphi_i,\varphi_j))$ - матрица жесткости

$\mathbb{M}=((\varphi_i,\varphi_j))$ – матрица масс (матрица Грама)

$$\mathbb{M}\ddot{\vec{\alpha}}+\mathbb{A}\vec{\alpha}=\vec{f}$$

Напом $\|w_k-u\|_A\to 0 \Rightarrow \|w_k-u\|\xrightarrow[u\to\infty]{} 0$

– сходимость метода Галёркина

Метод Ритца

Минимизируем ф-ал $F(v,v)=a(v,v)-2(f,v)$

(R) $\{V_k\}_1^\infty$, $V_k\subset H_A$, $\dim V_k=N_k$

Найти $\{w_k\}_1^\infty\subset V_k$: $F(w_k,w_k)\leqslant F(v,v)$ $\forall v\in V_k$

Индекс k далее опустим, чтобы не загромождать

$v\in V$, $v=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varphi_i$

$$F(v,v)=a\left(\sum_1^N\alpha_i\varphi_i,\sum_1^N\alpha_j\varphi_j\right)-2\left(f,\sum_1^N\alpha_i\varphi_i\right)=\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\alpha_i\alpha_j\,a(\varphi_i,\varphi_j)-$$
$$-2\sum_{i=1}^N\alpha_i(f,\varphi_i)$$

Ищем минимум, составляем ур-е Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=0,\ i=\overline{1,N}\Rightarrow 2\sum_{j=1}^N\alpha_j\,a(\varphi_i,\varphi_j)-2(f,\varphi_j)=0,\ i=\overline{1,N}$$

$$\sum_{j=1}^N\alpha_j\,a(\varphi_i,\varphi_j)-(f,\varphi_j)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{A}\vec{\alpha}=\vec{f}$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}=\mathbb{A}$$

Методы Ритца и Галеркина разные, а результат одинаковый

<u>Напом</u> $A = A^T > 0 \Rightarrow \nu(A) = \dfrac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i}$

Теперь устойчивость: k опускаем, но не забываем

$\forall v \in V \quad a(w, v) = (f, v)$

Ищем $w \in V \quad v = w \Rightarrow \|w\|_A^2 = (f, w) \leq \|f\| \cdot \|w\|$

① $\|w\| \leq \frac{1}{\gamma} \|w\|_A$, $\|w\|_A^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| \|w\|_A \Rightarrow$

$\|w\|_A \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|$ — неравенство устойчивости

② $\|w\| \leq \frac{1}{\gamma^2} \|f\|$

$$\boxed{\mathbb{A} = \mathbb{A}^T > 0}$$

$\langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle = \|v\|_A^2 \qquad \langle \mathbb{M} v, v \rangle = \|v\|^2$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$, $v = \sum_{i=1}^{N} v_i \varphi_i$

$\|v\|^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} \|v\|_A^2$, $\gamma^2 \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle$

$\gamma_1 \|v\|^2 \leq \|v\|_A^2 \leq \gamma_2 \|v\|^2$, $\gamma_1 = \gamma^2$, и γ_1, γ_2 не зависят от выбора базиса V

$\forall v \in V$

Т.о. $\gamma_1 \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \gamma_2 \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle$

Хотим получить $\nu(\mathbb{A})$ через $\nu(\mathbb{M})$, а $\mathbb{M}$ зависит только от выбранного базиса

<u>Напом</u> $\lambda_{min} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \lambda_{max} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ — неулучшаемые оценки *

$0 < \lambda_{min} \leq \lambda_{max}$

$\mu_{min} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \mu_{max} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \qquad 0 < \mu_{min} \leq \mu_{max}$

① $\langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \gamma_1 \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \gamma_1 \mu_{min} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \Rightarrow \lambda_{min} \geq \gamma_1 \mu_{min}$

т.к. оценка неулучш. *

② $\langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \gamma_2 \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \gamma_2 \mu_{max} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \Rightarrow \lambda_{max} \leq \gamma_2 \mu_{max}$

$\gamma_1 \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \gamma_2 \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\gamma_2} \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \frac{1}{\gamma_1} \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle$

③ $\langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \frac{1}{\gamma_2} \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \frac{\lambda_{min}}{\gamma_2} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \Rightarrow \mu_{min} \geq \frac{\lambda_{min}}{\gamma_2}$

④ $\langle \mathbb{M}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \frac{1}{\gamma_1} \langle \mathbb{A}\vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \frac{\lambda_{max}}{\gamma_1} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \Rightarrow \mu_{max} \leq \frac{\lambda_{max}}{\gamma_1}$

$\operatorname{cond} A = \nu(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ $\qquad$ $\operatorname{cond} M = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \le \frac{\gamma_2 \mu_{max}}{\gamma_1 \mu_{min}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \operatorname{cond} M \quad (\text{из } ① \text{ и } ②)$$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \ge \frac{\gamma_1 \mu_{max}}{\gamma_2 \mu_{min}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \operatorname{cond} M \quad (\text{из } ③ \text{ и } ④)$$

$\operatorname{cond} A \ge 1$

$$\max\left\{1, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\operatorname{cond} M\right\} \le \operatorname{cond} A \le \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\operatorname{cond} M$$

Но вспоминаем, что k опустили, и это все посл-ти

$\{\varphi_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_k}$ образует **устойчивое семейство**, если $\exists \rho > 0,\ \rho \ne \rho(k) : \operatorname{cond} M_k < \rho$

(k) - индекс, не произв

<u>Пример</u> печальный $\quad H_A = H^1(0,1)$, $\quad V_k = \{p_k - \text{полином} \mid \deg p_k \le k-1\}$

$\deg V_k = N_k = k$, $\{V_k\}$ предельно-плотна в $H^1(0,1)$

Рассмотрим "плохой" базис: $1, x, x^2, \dots$

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1}x^{k-1} \equiv 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + (k-1)\alpha_{k-1}x^{k-2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\vdots$$

Т.о. $\alpha_i = 0 \quad \forall i = \overline{0, k-1}$

Базис V_k: $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \sum_{i=0}^{k-1} v_i \varphi_i(x)$$

$$v \equiv 1 \qquad \langle M v, v\rangle = \|v\|^2 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v \equiv x^{k-1}, \quad \langle M\vec{v}, \vec{v}\rangle = \int_0^1 x^{2k-2}\,dx = \frac{1}{2k-1}$$

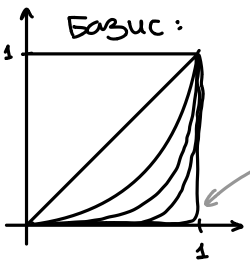
$$\mu_{max} \ge 1, \quad \mu_{min} \le \frac{1}{2k-1} \Rightarrow \operatorname{cond} M \ge 2k-1 \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \Rightarrow$$

Данный базис не порождает устойчивое семейство

Что представляет собой M:

$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^i x^j \, dx = \int_0^1 x^{i+j} \, dx = \frac{1}{i+j+1}$$

Матрица такого вида — матрица Гильберта



Вот эти функции, хоть и ЛНЗ, отличаются совсем чуть-чуть. Компьютеру вообще кажется, что они равные.

Хороший базис: $\varphi_i^{(k)} \longrightarrow \psi_i^{(k)} = \dfrac{\varphi_i^{(k)}}{\sqrt{d_i^{(k)}}}$, где $D_k = \begin{bmatrix} d_k^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_k^{N_k} \end{bmatrix}$

$\{\varphi_i^{(k)}\}$ D_k–УСТОЙЧИВОЕ СЕМЕЙСТВО, если $\exists \rho \neq \rho(k)$:

$$\operatorname{cond}\left(D_k^{-1/2} M_k D_k^{1/2}\right) \leq \rho$$