8/4/21

$u(0) = g_0,$ $u'(1) = g_1$ $\qquad D_A = \{v \in C^2[0,1] \mid v(0) = g_0,\ v'(1) = g_1\}$

$z \in D_A, \quad z = g_0 + x g_1$

$\tilde{u} = u - z \Rightarrow -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} \tilde{u} + q\tilde{u} = \tilde{f}, \quad \tilde{f} = f + \frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} z - qz$

$\tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{u}'(1) = 0$

$\tilde{D}_A = \{\tilde{v} \in C^2[0,1] \mid \tilde{v}(0) = 0,\ v'(1) = 0\} \rightsquigarrow H_A = \{v \in H^1(0,1) \mid v(0) = 0\}$

$\tilde{u} \in H_A \quad a(\tilde{u}, v) = (\tilde{f}, v) \quad \forall v \in H_A$ — эквив-ая задача

$\forall v \in H_A \quad a(u,v) = (f,v) + p(1) g_1 v_1(1), \quad u(0) = g_0$

$i = \overline{1,N} \quad a(u^h, \varphi_i) = (f, \varphi_i) + p(1) g_1 \varphi_i(1) \Rightarrow i = 1, \dots, N-1$

$a(u^h, \varphi_i) = (f, \varphi_i)$

$a(u^h, \varphi_N) = (f, \varphi_N) + g_1$

тут возможно где-то не хватает p

$u^h = g_0 \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$

Основные понятия метода конечных элементов

Симплексиальное разбиение множеств

Симплециальное

В $\mathbb{R}^2$ – треангуляция

Обозн $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$\vec{x}_i$ - i-ый вектор, $x_{k,i}$ – k-я коорд i-го вектора

$\omega_e = \{\vec{x}_i\}_{i=1}^{m+1}$ – мн-во различных точек в $\mathbb{R}^m$

$v(\vec{x}) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$

Т.е. $a_0 + a_1 x_{1,1} + \dots + a_m x_{m,1} = v(\vec{x}_1)$

$\vdots$

$a_0 + a_1 x_{1,m+1} + \dots + a_m x_{m,m+1} = v(\vec{x}_{m+1})$

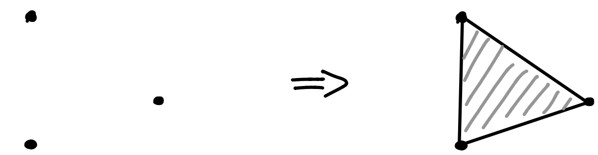
$\Updownarrow$

$X_e \cdot \vec{a} = \vec{v}$, где $X_e = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & \dots & x_{m,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1,m+1} & \dots & x_{m,m+1} \end{bmatrix}$

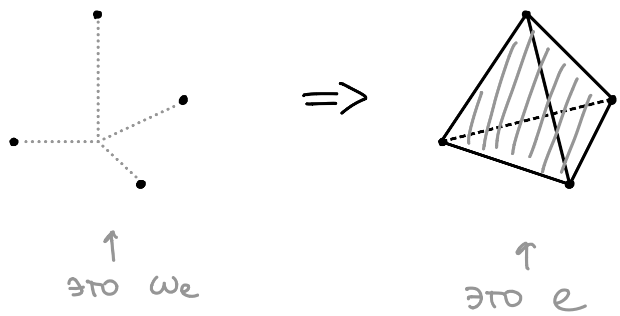
СИМПЛЕКС (m-симплекс) — минимальное замкнутое выпуклое множество e, содержащее ω_e

<u>Пример</u>

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



ВНУТРЕННОСТЬ СИМПЛЕКСА $\mathring{e} = e \setminus \partial e$

СИМПЛЕКС $e = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{m+1} \vec{x}_i \xi_i ,\ \xi_i \in \mathbb{R},\ \xi_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i = 1 \}$

<u>Лемма</u> Симплекс e невырожденный $\Leftrightarrow$ $\det X_e \neq 0$

<u>Д-во</u> $(\Leftarrow)$ $\det X_e \neq 0 \Rightarrow \mathring{e} \neq \varnothing$

$\lightning$ $\mathring{e} = \varnothing \Rightarrow \exists j : \xi_j = 1$ или $\xi_j = 0$

Без огр. общн. $j = m+1$

- $\xi_{m+1} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \xi_j = 0,\ \xi_j \geq 0 \Rightarrow \xi_j = 0\ \forall j = \overline{1,m}$

  Т.о. $\vec{x} = \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j \vec{x}_j = \vec{x}_{m+1} \quad \forall \vec{x} \in e.$

  Т.е. e — одна точка $\lightning$ $\square$

- $\xi_{m+1} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \xi_j = 1,\ \xi_j \geq 0$

  $\xi'_{m+1} := -1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \xi_j + \xi'_{m+1} = 0 \Rightarrow$

  $\vec{x}_{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \vec{x}_j$

  Т.о. $\sum_{j=1}^{m} \xi_j \vec{x}_j + \xi'_{m+1} \vec{x}_{m+1} = 0$

  $X_e^T \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi'_{m+1} \end{bmatrix} = 0,\ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi'_{m+1} \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \det X_e = 0$ $\lightning$ $\square$

$\Rightarrow$ $\mathring{e} \neq \varnothing \Rightarrow \det X_e \neq 0$

↯ $\det X_e = 0 \Rightarrow \exists \{\alpha_i\}_1^{m+1} : \sum \alpha_i^2 \neq 0$, но

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \vec{x}_i = 0$$

Без огр. общн. $\alpha_{m+1} \neq 0$

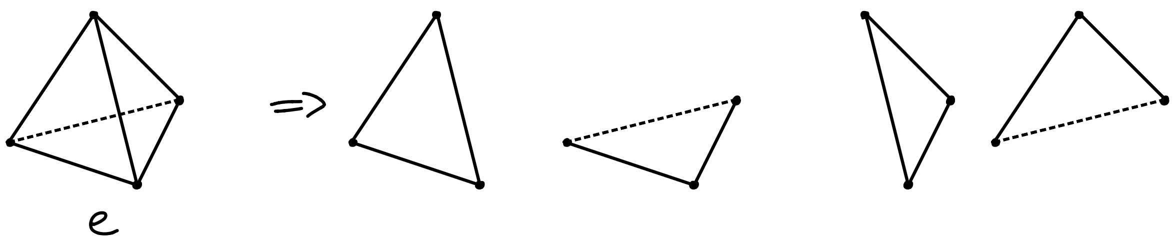
$$\vec{x}_{m+1} = -\frac{1}{\alpha_{m+1}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{x}_i$$

$\vec{x} = \sum \beta_i \vec{x}_i$ всё стерли...

r-СИМПЛЕКС $e^{(r)}$: $\omega_e^{(r)} \subset \omega_e$ — $\omega_e^{(r)} = \{\vec{x}_{i_k}\}_{k=1}^{r+1} \Rightarrow e^{(r)} \subset \partial e$

грань симплекса e

Пример

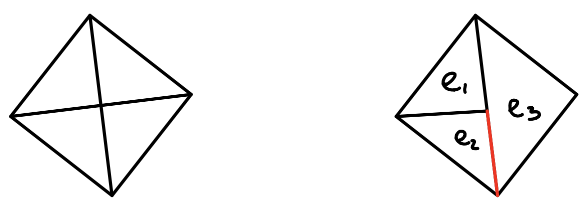


$\mathbb{T} = \{e\}$ — мн-во симплексов, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$

$\mathbb{T}$ — СИМПЛЕКСИАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ Ω, если

1. $\forall e \in \mathbb{T} \quad \mathring{e} \neq \varnothing$
2. $\bigcup_{e \in \mathbb{T}} e = \overline{\Omega}$
3. $\forall i \neq j \quad e_i, e_j \in \mathbb{T} \quad \mathring{e}_i \cap \mathring{e}_j = \varnothing$
4. $\forall e \in \mathbb{T}$ любая r-грань e является частью $\partial\Omega$, или r-гранью другого симплекса из $\mathbb{T}$.

Замечание (4) определяет СОГЛАСОВАННОСТЬ разбиения



Красная грань e_2 — не грань e_3 (а только часть грани)

согласованное несогласованное

Несогласованные разбиения не рассматриваем

Обозн $h_e = \sup_{B \subset e} d_B$, B — шар, вписанный в e

$\overline{h}_e = \inf_{B \supset e} d_B$, B — шар, в который помещается e (не всегда описанный!)

$$h = \max_{e \in \mathbb{T}} \bar{h}_e$$

$$\mathbb{T}^{(1)} \rightsquigarrow \mathbb{T}^{(k)} = \mathbb{T}_h \quad , \quad h = \frac{1}{2^k} h^{(1)}$$

Когда подразбиваешь, начинают появляться подобные симплексы.

РЕГУЛЯРНЫЙ СИМПЛЕКС — симплекс, для которого сущ-ет σ не зависящее от h :

$$\bar{h}_e \leq \sigma \underline{h}_e$$

РЕГУЛЯРНОЕ СИМПЛ. РАЗБИЕНИЕ $\mathbb{T}_h$, если $\exists \sigma : \forall e \in \mathbb{T}_h \;\; \bar{h}_e \leq \sigma \underline{h}_e$

Симпл. разбиение $\mathbb{T}_h$ **КВАЗИРАВНОМЕРНО**, если $\exists \nu$ не зав от h

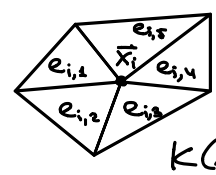
$$h \leq \nu \bar{h}_e \quad \forall e \in \mathbb{T}_h$$

$K(\vec{x}_i)$ — количество симплексов, содержащих т. $\vec{x}_i$

Лемма | $\mathbb{T}_h$ — регулярное квазиравномерное разбиение

$\Rightarrow \exists K_0$ не зав. от h : $\forall \vec{x}_i \quad K(\vec{x}_i) \leq K_0$

Д-во $\{e_{i,k}\} \subset \mathbb{T}_h$: $e_{i,k} \ni \vec{x}_i \qquad k = 1, \dots, K(\vec{x}_i)$



$K(\vec{x}_i) = 5$

$\underline{h}_{i,k} := \underline{h}_{e_{i,k}} \quad , \quad \bar{h}_{i,k} = \bar{h}_{e_{i,k}} \qquad \sum_{k=1}^{K(\vec{x}_i)} \underline{h}^m_{i,k}$

$h \leq \nu \bar{h}_{i,k}$ в силу квазиравн. , $\bar{h}_{i,k} \leq \sigma \underline{h}_{i,k}$ в силу рег.

Т.е. $h \leq \nu\sigma \underline{h}_{i,k}$

$$h^m \leq (\nu\sigma)^m \underline{h}^m_{i,k} \Rightarrow K(x_i) h^m \leq (\nu\sigma)^m \sum_{k=1}^{K(\vec{x}_i)} \underline{h}^m_{i,k} = \frac{(\nu\sigma)^m}{\rho_m} \sum_{k=1}^{K(\vec{x}_i)} \operatorname{mes} B_{i,k}$$

где ρ_m — объем единичн. шара, $B_{i,k} \subset e_{i,k}$

$$\leq \frac{(\nu\sigma)^m}{\rho_m} \sum_{k=1}^{K(\vec{x}_i)} \operatorname{mes} e_{i,k} \leq (2\nu\sigma)^m$$

$K_0 := (2\nu\sigma)^m$ ■

Канонический симплекс