$$\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\tau^2}+L_h u^n=0 \longleftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Lu=0$$

3хслойн. эта штука соотв-ет этой задаче 2хслойн.

Теперь встал вопрос, как из 3хслойн. сделать 2хслойн.?

$$\hat{u}^n=\begin{bmatrix}u^n\\u^{n-1}\end{bmatrix} \qquad \hat{L}_h=\begin{bmatrix}L_h-\frac{1}{\tau}I_h & \frac{1}{\tau}I_h\\ -\frac{1}{\tau}I_h & \frac{1}{\tau}I_h\end{bmatrix} \qquad \frac{\hat{u}^{n+1}-\hat{u}^n}{\tau}+\hat{L}_h\hat{u}^n=0$$

← а вот как раз 2хслойн. получили

$$(2)\ \begin{cases}\dfrac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+L_h^{(1)}u^{n+1}+L_h^{(2)}u^n=g^n, & n=0,..,N_t-1\\ u^0=P_h u_0\end{cases}$$

$u^n\in U_h$, $g^n\in F_h$, $u_0\in U$

Опр Если $L_h^{(1)}=0$, то схема (2) явная, иначе — неявная

(*) $Q_{h,\tau}^{(1)}u^{n+1}=Q_{h,\tau}^{(2)}u^n+\tau g^n$, $n=0,\dots,N_t-1$

$Q_{h,\tau}^{(1)}=(I+\tau L_h^{(1)})$ $\quad Q_{h,\tau}^{(2)}=(I_h-\tau L_h^{(2)})$, где $I_h u^n=u^n$ – единичный оператор

$Q_{h,\tau}^{(2)}=I_h \rightarrow$ схема явная (т.к. $Q_{h,\tau}^{(1)}=0$)

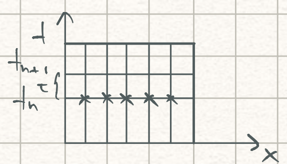
Опр (2) – разрешимо, если $\exists K_{h,\tau}: F_h\rightarrow U_h$ такой, что $K_{h,\tau}Q_{h,\tau}^{(1)}=I_h$ — усл-е разреш-ти

$u^{n+1}=K_{h,\tau}Q_{h,\tau}^{(2)}u^n+\tau K_{h,\tau}g^n$ из (*)

Опр $S_{h,\tau}=K_{h,\tau}Q_{h,\tau}^{(2)}: U_h\rightarrow U_h$ — оператор шага

Опр $u^{n+1}=S_{h,\tau}u^n+\tau K_{h,\tau}g^n$ — 1я канонич. форма 2хслойн. разн. схемы

$\psi^n=\frac{1}{\tau}\left(Q_{h,\tau}^{(1)}(P_h u(t_n+\tau))-Q_{h,\tau}^{(2)}(P_h u(t_n))\right)-g^n\in F_h$ — погрешность аппроксимации



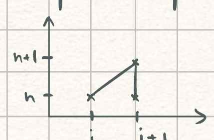
$u(x,t_n)=\hat{u}(x)$ $\quad P_h\hat{u}(x): U\rightarrow U_h$

Опр Задача (2) безусловно аппроксимирует задачу (1): $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+Lu=g\\ u(0)=u_0\end{cases}$ на реш-ии u, если:

$$\|\psi^n\|_{F_h}\longrightarrow 0 \qquad n=0,\dots,N_t,\quad h\rightarrow 0,\ \tau\rightarrow 0$$

Если $\exists c_1,k_1,c_2,k_2$, не завис. от h,τ и $\max\limits_{n=0,..,N_t}\|\psi^n\|_{F_h}\leq c_1h^{k_1}+c_2\tau^{k_2}$, то (2) безусловно аппроксимирует з. (1) с порядком $(h^{k_1}+\tau^{k_2})$

Ex Ур-е переноса: $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ $\qquad \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+a\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{h}=0$



$$\psi_i^n=\left(1+a\frac{\tau}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n)+a\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_n)+\frac{\tau}{2}\left(1+a\frac{\tau}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_n)-a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i',t_n)$$

$r=a\frac{\tau}{h}$

1. $r\rightarrow 0$ $\quad \|\psi^n\|_{F_h}\rightarrow 0$
2. $r=const$ $(\tau=c\cdot h)$ $\quad (1+r)\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$
3. $r\rightarrow\infty$ аппрокс-ции нет

$a=\tau^{\alpha}$, $\alpha>0$
$r=a\tau^{1-\alpha}$

$\alpha<1$ – есть аппр.
$\alpha=1$ – аппр. др. зад.
$\alpha>1$ – нет аппр.

Исследуем вопрос сходимости:

$$(1+a\frac{\tau}{h})\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + a\frac{\tau}{h}\xi_{i-1}^n + \tau\psi_h^n$$

$$(1+a\frac{\tau}{h})|\xi_i^{n+1}| \leq \max_i|\xi_i^n|(1+a\frac{\tau}{h}) + \tau\max_i|\psi_i^n|$$

$$(1+a\frac{\tau}{h})>1 \quad \|\xi^{n+1}\|_{U_h} \leq \|\xi^n\|_{U_h} + \tau\|\psi^n\|_{F_h}$$

$$\max_n\|\xi^n\|_{U^n} \leq T\max_n\|\psi^n\|_{F_h}$$

Опр Сет. з. (2) условно аппроксимирует (1) на реш-ии u, если $\exists$ нктр ф-я $q(\tau)>0$, непр. в 0, $q(0)=0$ такая, что при $h=q(\tau)$ $\|\psi^n\|_{F_h}\to 0$ $\quad n=0,\dots,N_t$

Если $\exists c,k$, не завис. от τ, $\|\psi^n\|_{F_h}\leq c\tau^k$ при $h=q(\tau)$, $n=0,\dots,N_t$, то имеет место условная аппроксимация с порядком τ^k.

Опр Реш-е сет. з. (2) безусловно сходится к реш-ю з. (1), если $\max_n\|P_hu(t_n)-u^n\|_{U_h}\xrightarrow[h,\tau\to 0]{}0$

Если $\exists c_3,k_3,c_4,k_4$, не завис. от h,τ, $\max_n\|P_hu(t_n)-u^n\|_{U_h}\leq c_3h^{k_3}+c_4\tau^{k_4}$, то имеет место безусловная сходимость порядка $(h^{k_3}+\tau^{k_4})$

Опр Реш-е сет. з. (2) условно сходится к реш-ю з. (1), если $\exists q(\tau)>0$: непр. в 0, $q(0)=0$

$$\max_n\|P_hu(t_n)-u^n\|_{U_h}\to 0 \quad \text{при} \quad h=q(\tau),\ \tau\to 0$$

Если $\exists c_0,k_0$, не завис. от τ, $\max_n\|P_hu(t_n)-u^n\|_{U_h}\leq c_0\tau^{k_0}$ при $h=q(\tau)$, то имеет место условная сходимость порядка τ^{k_0}