29/10/20

Опр 5 Сеточная задача (2) **БЕЗУСЛОВНО УСТОЙЧИВА**, если

$$\exists K, \bar{h}, \bar{\tau} : \|S^n_{h,\tau}\| \leq K \quad \forall h \leq \bar{h},\ \tau \leq \bar{\tau},\quad n = 0, \dots, N_\tau$$

↳ не векторы ↳ оператор шага

Норма оператора: $S : U_h \to U_h$, $\|S\| = \sup\limits_{u \in U_h} \dfrac{\|Su\|_h}{\|u\|_h}$

Опр 6 Сеточная задача (2) **УСЛОВНО УСТОЙЧИВА**, если

$$\exists q(\tau) > 0,\quad q \in C(0),\quad q(0) = 0 \quad \text{и} \quad \exists \bar{\tau}, K : \|S^n_{h,\tau}\| \leq K$$
$$\forall \tau < \bar{\tau},\quad h = q(\tau)$$

Примеры ① Ур-е движения

┘ – правый нижний угол, $a\frac{\tau}{h} \leq 1 : a\tau \leq q(\tau)$, $h = a\tau$

② Ур-е теплопроводности (явные схемы)

$$2a^2 \frac{\tau}{h^2} \leq 1, \quad a\sqrt{2\tau} \leq q(\tau)$$

тут сравнивается уже квадрат сетки, нужно брать очень маленький шаг

При этом неявные схемы для ур-я теплопроводн. устойчивы безусловно, т.е. на практике пользуемся ими.

Для ур-я движения, при этом, хорошо сработает и явная схема.

В прошлой лекции была опечатка – в каком-то операторе поставили L_h на диагонали, а должно стоять τL_h

$L_{h,\tau} u^{(h,\tau)} = g^{(h,\tau)}$ – неявная схема с прошлой лекции

$$L_{h,\tau} u^{(h,\tau)} = \frac{1}{\tau}\left(Q^{(1)}_{h,\tau} u^{n+1} - Q^{(2)}_{h,\tau} u^n\right)$$

$$g^{(h,\tau)} = \begin{pmatrix} g^0 \\ g^1 \\ \vdots \\ g^{N_\tau} \end{pmatrix}$$

Напом Устойчивость (4):

- $\forall g^{(h,\tau)}\ \exists u^{(h,\tau)}\quad L_{h,\tau} u^{(h,\tau)} = g^{(h,\tau)}$
- $\exists C : \|u^{(h,\tau)}\|_{U_{h,\tau}} \leq C \|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}}$

Условие A $\max\limits_{n=0,\dots,N_\tau-1} \|g^n\|_{U_h} \le K_1 \|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}}$, K_1 не зависит от h,τ

Условие B $\|u^0\|_{U_h} \le K_2 \|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}}$, K_2 не зависит от h,τ

Теорема 1 A и B $\left(\max\limits_{n=0,\dots,N_\tau-1} \|g^n\|_{U_h} \le K_1 \|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}}\right.$ и $\left.\|u^0\|_{U_h} \le K_2 \|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}}\right)$

$\Rightarrow$ из безусловной устойчивости следуют устойчивости в смыслах определения № 3.2.4

Д-во $\max\limits_n \|u^n\|_{U_h} \le C_2 \|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}}$

$u^n =$ (раскрутим I каноническую форму) $= S^n_{h,\tau} u^0 + \tau\left(S^{n-1}_{h,\tau} g^0 + \dots + S_{h,\tau} g^{n-2} + g^{n-1}\right)$

$$\|u^n\|_{U_h} \le K\|u^0\|_{U_h} + \tau K\left(\|g^0\|_{U_h} + \dots + \|g^{n-1}\|_{U_h}\right) \le \text{(усл-я A и B)} \le$$
$$\le K(K_2 + TK_1)\|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}} = C_2 \|g^{(h,\tau)}\|_{F_{h,\tau}} \quad \blacksquare$$

Преобразования подобия

$R_{h,\tau} : U_h \to G_h$, считаем, что сущ-ет $R^{-1}_{h,\tau} : G_h \to U_h$

Напом Схема (I канон форма) : $u^{n+1} = S_{h,\tau} u^n + \tau \varphi^n$

$v^n = R_{h,\tau} u^n \in G_h$

$u^{n+1} = S_{h,\tau} R^{-1}_{h,\tau} v^n + \tau\varphi^n \quad \Big| \; R_{h,\tau} \cdot$

$R_{h,\tau} u^{n+1} = R_{h,\tau} S_{h,\tau} R^{-1}_{h,\tau} v^n + R_{h,\tau} \tau \varphi^n$

$v^{n+1} = \tilde{S}_{h,\tau} v^n + \tau\tilde{\varphi}^n$, где $\tilde{S}_{h,\tau} := R_{h,\tau} S_{h,\tau} R^{-1}_{h,\tau}$, $\tilde{\varphi}^n = R_{h,\tau}\varphi^n$

Если $G_h = F_h$, $R_{h,\tau} = Q^{(1)}_{h,\tau}$, то $\tilde{S}_{h,\tau} = Q^{(2)}_{h,\tau} K_{h,\tau} : F_h \to F_h$, $\tilde{\varphi}^n = g^n$

IV Устойчивость двухслойных разностных схем в гильбертовых пространствах

Напом U_h – гильбертово пр-во , $\dim U_h = M_h$

$(u^{(h)}, v^{(h)}) = \sum\limits_{i=1}^{M_h} \rho_i u_i^{(h)} v_i^{(h)}$ – скалярное произв. сеточных ф-ий

$U_h \simeq L_{2,h}$

$F_h := U_h$ — принимаем пр-ва сеточных ф-ий и правых частей совпадающими

$$\|u^{(h)}\|_{L_{2,h}} = \sqrt{(u^{(h)}, u^{(h)})}$$

4.1 Векторно-матричное представление разностных схем

H_h - евклидово пр-во

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{M_h} u_i v_i \quad , \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

Тогда $\|u^{(h)}\|_{L_{2,h}} \neq \|\vec{u}\|$, где $U_h \ni u^{(h)} \longleftrightarrow u \in H_h$

Но если $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{M_h} \end{pmatrix}$, $u_i := \sqrt{\rho_i}\, u_i^{(h)}$, то $\|\vec{u}\| = \|u^{(h)}\|_{L_{2,h}}$

$\Pi_h : U_h \longrightarrow H_h$, $\Pi_h u^{(h)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho_1} \cdot u_1^{(h)} \\ \vdots \\ \sqrt{\rho_{M_h}} \cdot u_{M_h}^{(h)} \end{pmatrix} \in H_h$ т.е. Π_h просто согласует меры. $\Pi_h(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^{M_h}$

$\Pi_h^{-1} : H_h \longrightarrow U_h$, $\Pi_h^{-1} \vec{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\rho_1}\; u_1 \\ \vdots \\ 1/\sqrt{\rho_{M_h}}\; u_{M_h} \end{pmatrix} \in U_h$ $\Pi_h^{-1}(x) = \frac{x}{\alpha}$

$L_h : U_h \to U_h$ - разостный оператор в U_h

$A_h : H_h \longrightarrow H_h$ - "запись" L_h в H_h

Т.о. от U_h перешли к H_h

$$A_h = \Pi_h L_h \Pi_h^{-1}$$

Т.о. $v^{(h)} = L_h u^{(h)} \implies \bar{v} = A_h \bar{u}$, где $\bar{u} = \Pi_h u^{(h)}$, $\bar{v} = \Pi_h v^{(h)}$

Лемма 1

$e^{(h),k} \in U_h$ — k-ый орт в U_h , $e_i^{(h),k} = \delta_{ik}$, $i = 1, .., M_h$

$$\implies a_{ij} = (A_h)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\rho_i \rho_j}} \left(e^{(h),i}, L_h e^{(h),j}\right)$$

Д-во $\underbrace{\langle \Pi_h u^{(h)}, \Pi_h v^{(h)} \rangle}_{\text{ск. произв в } H_h} = \underbrace{(u^{(h)}, v^{(h)})}_{\text{ск. произв в } L_{2,h}}$

$$(e^{(h),i}, L_h e^{(h),j}) = \langle \Pi_h e^{(h),i}, \Pi_h L_h e^{(h),j} \rangle =$$

$$= \langle \Pi_h e^{(h),i}, \Pi_h L_h \Pi_h^{-1} \Pi_h e^{(h),j} \rangle = \langle \Pi_h e^{(h),i}, A_h \Pi_h e^{(h),j} \rangle = \ast$$

При этом $\Pi_h e^{(h),i} = \sqrt{\rho_i}\, \vec{e}^{\,i}$, где $\vec{e}^{\,i}$ — i-ый орт евк. пр-ва H_h

$$\circledast = \sqrt{\rho_i \rho_j} \langle \vec{e}^{\,i}, A_h \vec{e}^{\,j} \rangle = \sqrt{\rho_i \rho_j}\, (A_h)_{ij} = \sqrt{\rho_i \rho_j}\, a_{ij} \quad \blacksquare$$

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n}}{\tau} + A_1 \bar{u}^{n+1} + A_2 \bar{u}^{n} = \bar{g}^{n}, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \bar{u}^n = \Pi_h u^n \\ \bar{g}^n = \Pi_h g^n \end{array}$$

$$A_k = \Pi_h L_h^{(k)} \Pi_h^{-1}, \quad k = 1, 2$$