4.3. Некоторые применения достаточного условия устойчивости.

Определение. Матрица A называется *положительной* $A > 0$ *(неотрицательной* $A \geq 0$*)*, если

$$\forall \bar{u} \neq 0 \qquad \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle > 0 \qquad (\langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0).$$

Далее,

$$A > B \qquad (A \geq B), \qquad \text{если} \quad A - B > 0 \qquad (A - B \geq 0).$$

Некоторые элементарные факты

Факт 1. $A > 0 \quad \Rightarrow \quad det\, A \neq 0.$

$\boxdot$

$$\text{Пусть } det\, A = 0 \;\Rightarrow\; \exists \bar{u}_0 \neq 0, \text{ что } A\bar{u}_0 = 0.$$

■

Факт 2. $A > 0\ (A \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad A^T > 0\ (A^T \geq 0).$

$\boxdot$

По определению A^T имеем

$$\langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{u}, A^T\bar{u} \rangle = \langle A^T\bar{u}, \bar{u} \rangle.$$

■

Факт 3. $A = A^T > 0 \;\; (A = A^T \geq 0) \quad \Leftrightarrow$ «все собственные числа A положительные (неотрицательные)».

$\boxdot$

A – ортогонально подобна диагональной матрице (спектральное разложение симметричной матрицы)

$$\Lambda = diag(\lambda_i): \quad A = R\Lambda R^{-1}, \qquad \text{где } R^{-1} = R^T \;\; (R - \text{ортогональная}).$$

Тогда

$$\langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle = \langle R\Lambda R^T\bar{u}, \bar{u}\rangle = \langle \Lambda\bar{v}, \bar{v}\rangle, \qquad \text{где } \bar{v} = R^T\bar{u}.$$

Т.к. $\bar{u} \neq \bar{0}$, то $\bar{v} \neq \bar{0}$. Т.е.

$$A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda > 0.$$

Пусть $A \geq 0$, причем

$$\exists \bar{u}_0 \neq \bar{0} \quad \text{такой, что} \quad A\bar{u}_0 = \bar{0},$$

Значит $\bar{u}_0 -$ собственный вектор, отвечающий нулевому собственному числу, тогда $\Lambda \geq 0$, причем

$$\Lambda\bar{v}_0 = \bar{0}, \qquad \text{где } \bar{v}_0 = R^T\bar{u}_0.$$

$\blacksquare$

Факт 4. $A > 0 \;\; (A \geq 0) \quad \Leftrightarrow$ «все собственные числа симметричной матрицы $(A + A^T)$ положительные (неотрицательные)».

$\boxdot$

$$A > 0 \; (A \geq 0) \quad \text{из Факта 2} \quad \Rightarrow \quad A^T > 0 \; (A^T \geq 0)$$

Следовательно,

$$A + A^T > 0 \;\; (A + A^T \geq 0) \;\; \text{и ссылаемся на Факт 3.}$$

В обратную сторону получаем из факта 3, что:

$$\langle (A + A^T)\bar{u}, \bar{u}\rangle > 0 \quad (\langle (A + A^T)\bar{u}, \bar{u}\rangle \geq 0), \qquad \text{но } \langle (A + A^T)\bar{u}, \bar{u}\rangle = \langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle + \langle A^T\bar{u}, \bar{u}\rangle = 2\langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle.$$

$\blacksquare$

Факт 5. Для $A = A^T \geq 0$ определена единственная симметричная неотрицательная матрица B, такая, что

$$B^2 = A, \qquad \text{будем обозначать} \quad B = A^{1/2}.$$

$\boxdot$

Существование.

$$A = R\Lambda R^T, \qquad \Lambda = diag(\lambda_i), \;\text{ и }\; \lambda_i \geq 0 \qquad (\text{Факт 3.})$$

Пусть

$$\Lambda^{1/2} = diag\left(\sqrt{\lambda_i}\right) \quad \text{и} \quad B = R\Lambda^{1/2}R^T.$$

Тогда

$$B^2 = R\Lambda^{1/2}R^T R\Lambda^{1/2}R^T = R\Lambda R^T = A.$$

Единственность. Пусть

$$\exists B_1 = {B_1}^T \geq 0, \qquad \text{что } {B_1}^2 = A \qquad \Rightarrow \qquad B_1 = QN_1Q^T, \qquad \text{где } Q^{-1} = Q^T \; \begin{pmatrix} Q - \text{ортогональная} \\ N_1 - \text{диагональная} \end{pmatrix},$$

$$\text{тогда } {B_1}^2 = QN_1^2Q^T = A.$$

Ввиду единственности спектрального разложения

$$N_1^2 = \Lambda \;\text{ и }\; Q = R \qquad \Rightarrow \qquad B_1 = R\Lambda^{1/2}R^T = B.$$

$\blacksquare$

Факт 6. $A = A^T \geq 0$. Тогда

$$\|A\|_2 = \left\|A^{1/2}\right\|_2^2.$$

$\boxdot$

$$\|A\|_2 = \max_i \lambda_i, \qquad \left\|A^{1/2}\right\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i},$$

$\blacksquare$

Факт 7. Пусть $A = A^T > 0$, тогда

$$\langle A\bar{u}, \bar{v}\rangle - \text{скалярное произведение},$$

$$\sqrt{\langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle} - \text{норма}.$$

$\boxdot$

Пусть

$$f(\bar{u}) = \sqrt{\langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle}.$$

Аксиомы нормы

- "Если $f(\bar{u}) = 0$, то $\bar{u} = \bar{0}$", в противном случае, если $\bar{u} \neq \bar{0}$, то $f(\bar{u})^2 = \langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle > 0$ и $f(\bar{u}) \neq 0$.
- "$f(c\bar{u}) = |c| f(\bar{u})$" $-$ очевидно.
- Неравенство треугольника

$$f(\bar{u} + \bar{v}) = \left\| A^{1/2}(\bar{u} + \bar{v}) \right\| = \left\| A^{1/2}\bar{u} + A^{1/2}\bar{v} \right\| \leq \left\| A^{1/2}\bar{u} \right\| + \left\| A^{1/2}\bar{v} \right\| = f(\bar{u}) + f(\bar{v}).$$

$\blacksquare$

Определение. Евклидово пространство с нормой $\sqrt{\langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle}$ будем называть *энергетическим пространством матрицы* A и обозначать H_A, а норму $\|\bar{u}\|_A$.

Замечание. Отметим, что если $A = A^T \geq 0$, т.е. $\exists \bar{u}_0 \neq 0$, что $A\bar{u}_0 = \bar{0}$, то величина $\sqrt{\langle A\bar{u}, \bar{u}\rangle}$ нормой не является, т.к. не выполняется первая аксиома.

Лемма 1. Пусть $C \geq 0$ (не обязательно симметричная) и $\sigma \geq 1/2$. Тогда

$$\exists (E+\sigma C)^{-1} \text{ для всех } \ \sigma \geq 0, \qquad \text{и} \qquad \|(E+\sigma C)^{-1}(E-(1-\sigma)C)\|_2 \leq 1.$$

$\boxdot$

Обозначим

$$B = (E+\sigma C)^{-1}(E-(1-\sigma)C).$$

Так как

$$(E+\sigma C) \text{ и } (E-(1-\sigma)C) \ - \text{перестановочны},$$

то

$$(E+\sigma C)^{-1} \text{ и } (E-(1-\sigma)C) \ - \text{перестановочны}.$$

При $\sigma \geq 0$

$$(E+\sigma C) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists (E+\sigma C)^{-1}.$$

По определению нормы

$$\|B\|_2 = \sup_{\bar u \neq 0} \frac{\|(E-(1-\sigma)C)(E+\sigma C)^{-1}\bar u\|}{\|\bar u\|} = \sup_{\bar v \neq 0} \frac{\|(E-(1-\sigma)C)\bar v\|}{\|(E+\sigma C)\bar v\|}, \quad \text{где} \ \ \bar v = (E+\sigma C)^{-1}\bar u \ \ (\text{если } \bar u \neq 0, \text{то и } \bar v \neq 0).$$

Тогда

$${\|B\|_2}^2 = \sup_{\bar v \neq 0} \frac{\|\bar v\|^2 - 2(1-\sigma)\langle C\bar v, \bar v\rangle + (1-\sigma)^2\|C\bar v\|^2}{\|\bar v\|^2 + 2\sigma\langle C\bar v, \bar v\rangle + \sigma^2\|C\bar v\|^2} = \sup_{\bar v \neq 0}\left\{1 - 2\frac{\langle C\bar v, \bar v\rangle + (\sigma - 1/2)\|C\bar v\|^2}{\|(E+\sigma C)\bar v\|^2}\right\},$$

и

$$C \geq 0 \text{ и } \sigma \geq 1/2 \qquad \Rightarrow \qquad \|B\|_2 \leq 1.$$

$\blacksquare$

Пусть $A_h -$ квадратная матрица, соответствующая сеточному оператору L_h, и

$$A_1 = \sigma_0 A_h, \qquad A_2 = (1-\sigma_0)A_h.$$

Тогда схема (4) называется *схемой с весами*.

Частные случаи: $\sigma_0 = 0$ – схема явная, $\sigma_0 = 1$ – схема чисто-неявная, $\sigma_0 = 1/2$ – схема Кранка-Николсона.

Теорема 4. Пусть $A_h \geq 0$. Если $\sigma_0 \geq 0$, то выполнено условие разрешимости,

если $\sigma_0 \geq 1/2$, то схема с весами абсолютно устойчива в смысле двух определений, $K = 1$.

$\boxdot$

При приведении (4) к (5) имеем:

$$B_1 = E + \sigma_0 \tau A_h, \qquad B_2 = E - (1-\sigma_0)\tau\, A_h.$$

Тогда

$$A_h \geq 0, \quad \sigma_0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 \geq E > 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{ из Факта } 1) \quad \Rightarrow \quad \det B_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists {B_1}^{-1},$$

$$S = B_1^{-1} B_2 = (E + \sigma_0 \tau A_h)^{-1}(E - (1-\sigma_0)\tau A_h).$$

$$\text{Для} \quad C = \tau A_h \geq 0 \;\; \text{и} \;\; \sigma = \sigma_0 \geq 1/2 \quad \Rightarrow \quad \|S\|_2 \leq 1 \quad (\text{лемма } 1) \quad \Rightarrow \quad \|S^n\|_2 \leq {\|S\|_2}^n \leq 1 = K.$$

Условие А:

$$\left\|\bar{\phi}^n\right\| = \|(E + \sigma_0 \tau A_h)^{-1} \bar{g}^n\| \leq \|(E + \sigma_0 \tau A_h)^{-1}\|_2 \|\bar{g}^n\| \leq \|\bar{g}^n\| \quad (\text{лемма 1 для } \sigma = 1 \text{ и } C = \sigma_0 \tau A_h), \qquad K_1 = 1.$$

Условие В – очевидно. Имеем абсолютную устойчивость схемы с весами при $\sigma_0 \geq 1/2$ в смысле двух определений.

■

Рассмотрим случай $0 \le \sigma_0 \le 1/2$.

Теорема 5. Пусть $A_h = A_h^T > 0$. Тогда для $\sigma_0 \in [0, 1/2)$ схема с весами условно устойчива, если

$$\tau \|A_h\|_2 \le \frac{2}{1 - 2\sigma}.$$

$\boxdot$ Пусть

$$C = \tau A_h.$$

Для оценки $\|S\|_2 \le 1$ достаточно выполнения неравенства (смотреть доказательство леммы 1)

$$\tau \langle A_h \bar{v}, \bar{v} \rangle + \tau^2 (\sigma_0 - 1/2) \|A_h \bar{v}\|^2 \ge 0.$$

Получим отсюда условия на τ:

$$\bar{w} = {A_h}^{1/2} \bar{v} \quad \text{и} \quad \|\bar{w}\|^2 \ge \tau (1/2 - \sigma_0) \|\bar{w}\|_{A_h}^2 \qquad (\text{факты } 5 - 7)$$

или

$$\tau \le \frac{2}{1 - 2\sigma_0} \frac{\|\bar{w}\|^2}{\|\bar{w}\|_{A_h}^2}.$$

При этом т.к. ${A_h}^{1/2} > 0$, то $\bar{w} \ne 0$ и последнее неравенство выполняется для всех $\bar{w} \ne 0$, а значит, что

$$\tau \le \frac{2}{1 - 2\sigma_0} \frac{1}{\sup\limits_{\bar{w} \ne 0} \frac{\|\bar{w}\|_{A_h}^2}{\|\bar{w}\|^2}} = \frac{2}{1 - 2\sigma_0} \frac{1}{\|A_h\|_2}.$$

откуда следует требуемое.

$\blacksquare$

Отметим, что схему с весами при $\sigma_0 \in (0, 1/2)$ использовать не имеет смысла. Она является неявной, но условно устойчивой. Условие устойчивости для явной схемы ($\sigma_0 = 0$):

$$\tau \|A_h\|_2 \le 2.$$

Пример. Пусть

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

матрица размерности $M_h = 1/h$. Как известно,

$$\|A_h\|_2 = \max_i |\lambda_i| = \frac{4}{h^2}.$$

Тогда условие устойчивости явной схемы

$$\tau \le \frac{1}{2} h^2$$

уже известное условие.

4.4. Устойчивость в D −нормах.

- Если $A_h = A_h^T$, то для схемы с весами S – симметричная матрица и согласно *теореме 3* вопрос об устойчивости сводится к оценке спектрального радиуса.
- Для схемы (4), когда

$$A_k^T = A_k, \qquad k = 1,2, \qquad \text{и} \qquad A_1A_2 = A_2A_1$$

ситуация аналогичная. Действительно, в этом случае

$$B_k^T = B_k \text{ и } B_1^{-1}B_2 = B_2B_1^{-1}$$

тогда

$$S^T = (B_1^{-1}B_2)^T = B_2^T(B_1^{-1})^T = B_2B_1^{-1} = B_1^{-1}B_2 = S \quad - \text{симметричная,}$$

- Если

$$A_1A_2 \neq A_2A_1, \text{ то } S \neq S^T.$$

- Однако, когда схему с симметричными матрицами

$$A_k^T = A_k, \qquad k = 1,2$$

можно симметризовать?

С этой целью проведем исследование устойчивости в энергетическом пространстве некоторой симметричной положительной матрицы.

- Пусть $D = D^T > 0$. Введем H_D – энергетическое пространство матрицы D со скалярным произведением $\langle D\bar{u}, \bar{v}\rangle$ и нормой

$$\|\bar{u}\|_D = \sqrt{\langle D\bar{u}, \bar{u}\rangle}.$$

- Норма матрицы, подчиненная D – норме определяется равенством:

$$\|B\|_D = \sup_{\bar{u}\neq 0} \frac{\|B\bar{u}\|_D}{\|\bar{u}\|_D}.$$

- Рассмотрим, как связаны между собой нормы матриц $\|\cdot\|_D$ и $\|\cdot\|_2$. Так как

$$\left(D^{1/2}\right)^T = D^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \langle D\bar{v}, \bar{v}\rangle = \left\langle D^{1/2}\bar{v}, D^{1/2}\bar{v}\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \|\bar{v}\|_D = \left\|D^{1/2}\bar{v}\right\| \quad \Rightarrow \quad \|B\|_D = \sup_{\bar{u}\neq 0} \frac{\left\|D^{1/2}B\bar{u}\right\|}{\|D^{1/2}\bar{u}\|}$$

  Так как $D^{1/2} > 0$, то $\bar{v} = D^{1/2}\bar{u} \neq 0$ при $\bar{u} \neq 0$. При этом $\bar{u} = D^{-1/2}\bar{v}$ и, следовательно

$$\|B\|_D = \sup_{\bar{v}\neq 0} \frac{\left\|D^{1/2}BD^{-1/2}\bar{v}\right\|}{\|\bar{v}\|} = \left\|D^{1/2}BD^{-1/2}\right\|_2 \tag{1}$$

- Вопрос об исследовании устойчивости в D –норме сводится к проверке неравенства

$$\|S^n\|_D \leq K.$$

- Нетрудно заметить, что теорема 1 может быть переформулирована для D –нормы: для устойчивости достаточно выполнения неравенства

$$\|S\|_D \leq 1 + c\tau.$$

Пусть

$$S^T S \neq S S^T \quad \text{и теорема 3 (лемма 2)не верны.}$$

А для каких матриц S

$$\|S\|_D = \rho(S) \quad \text{и теорема 3 (лемма 2) верны?}$$

Из (1) следует ответ

$$S - \text{такова, что} \qquad \tilde{S}^T \tilde{S} = \tilde{S} \tilde{S}^T, \qquad \text{где} \quad \tilde{S} = D^{1/2} S D^{-1/2} - \text{нормальная матрица.}$$

Рассмотрим случай

$$A_k = A_k^T \geq 0, \qquad k = 1{,}2, \qquad \text{но} \quad A_1 A_2 \neq A_2 A_1.$$

Тогда

$$S = B_1^{-1} B_2, \qquad \tilde{S} = D^{1/2} B_1^{-1} B_2 D^{-1/2}.$$

При этом

$$B_1 = E + \tau A_1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_1^T > 0.$$

Пусть

$$D = B_1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{S} = {B_1}^{-1/2} B_2 {B_1}^{-1/2}.$$

В нашей ситуации

$$B_2 = E - \tau A_2 = B_2^T \quad \Rightarrow \quad \tilde{S} = \tilde{S}^T \quad \Rightarrow \quad \rho(\tilde{S}) = \|\tilde{S}\|_2 \ \text{ и } \ \|S\|_{B_1} = \rho(\tilde{S}).$$

С другой стороны,

$$\tilde{S} = {B_1}^{1/2} S {B_1}^{-1/2} \ \text{подобна}\ S \quad \Rightarrow \quad \rho(\tilde{S}) = \rho(S) \quad \Rightarrow \quad \|S\|_{B_1} = \rho(S).$$

Доказана теорема

Теорема 6. (аналог теоремы 3) Если

$$A_k = A_k^T \geq 0, \qquad k = 1{,}2,$$

то

- спектр матрицы S вещественный;
- для устойчивости в норме B_1 необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\rho(S) \leq 1 + c\tau.$$

Обсуждение

По сути дела, вместо анализа устойчивости для матрицы

$$S = B_1^{-1} B_2,$$

проведен анализ для симметричной матрицы

$$\tilde{S} = {B_1}^{-1/2} B_2 {B_1}^{-1/2}.$$

В этом смысле мы симметризовали разностную схему.