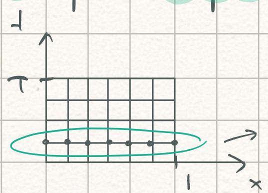
Векторно-матричная запись РС



$u(h,\tau) = \{\bar{u}^n,\ n=0,\dots,N_\tau\}$

$\bar{u}^n = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}$

Ур-е движ-я: $K = N_x$ Ур-е теплопров-ти: $K = N_x - 1$

Явн. схема:

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\tau} + A_h \bar{u}^n = \bar{\varphi}^n \qquad n = 0,\dots,N_\tau - 1$$

Ур-е переноса: $A_h = \frac{a}{h}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ур-е теплопров-ти: $A_h = \frac{a^2}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Неявная схема:

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\tau} + A_h \bar{u}^{n+1} = \bar{\varphi}^{n+1} \qquad n = 0,\dots,N_\tau - 1$$

$$(E + \tau A_h)\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \tau \bar{\varphi}^{n+1}$$

Ур-е переноса: $(E + \tau A_h)^{-1} = \begin{pmatrix} b^{-1} & & & 0 \\ r^{-1} b^{-2} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ r^{-(N_x-1)} b^{-N_x} & \cdots & r^{-1} b^{-2} & b^{-1} \end{pmatrix}$

$b = 1 + a\frac{\tau}{h} \qquad r = \frac{a\tau}{h}$

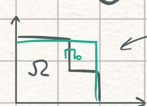
Ур-е тепл-ти: $(E + \tau A_h)^{-1}$ – заполн.

(не выпишем красиво)

Глава 3. Основные понятия теории РС

3.1. Сеточная область, пространство сеточных функций

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – открытая, огранич., связн.



будем такие области рассматривать (границы ∥ осям коор-т)

$П = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ – m-прямоугольник $\quad V(П) = (b_1 - a_1)\dots(b_m - a_m)$

Минимальный прямоуг. $П_0$: $\quad V(П_0) = \min\limits_{П \supseteq \Omega} V(П)$

Сетка:

$h > 0$ – параметр $\quad \omega_h = (a_k, b_k) = \{a_k = x_{k,0} < \dots < x_{k,N_k} = b_k\}$ (вершины), $\quad \max(x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}) \le h \quad 0 \le i_k \le N_k - 1$

Сетка в П:

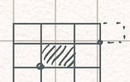
$\omega_h(П) = \omega_h(a_1, b_1) \times \dots \times \omega_h(a_m, b_m)$

индексы: $I \equiv \{ i = (i_1,\dots,i_m),\ 0 \le i_k \le N_k,\ k = 1,\dots,m\}$ – векторн. нумерация

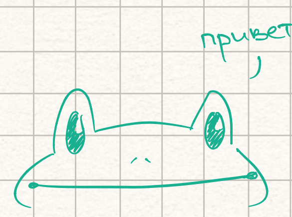
$\{x_i = (x_{1,i_1}, \dots, x_{m,i_m}),\ i \in I\}$ – узлы

$I_0 = \{ i \in I :\ i_k < N_k,\ k = 1,\dots,m\}$

↑ те, из ктр можно построить ячейки



$d_{h,i} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \dots \times [x_{m,i_m}, x_{m,i_m+1}]$ — ячейка сетки $\quad \forall i \in I_0$



$\bigcup_{i\in I_0} d_{h,i} = \Pi$ $I_D \subset I_0 \Rightarrow D = \bigcup_{i\in I_D} d_{h,i}$ $V(D) = \sum_{i\in I_D} V(d_{h,i})$

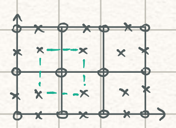
Ω_h — сеточная область, если $V(\Omega_h) = \min_{D\supseteq\bar\Omega} V(D)$

$\omega_h(\Omega) = \Omega_h \cap \omega_h(\Pi)$

$\bigcup_{i\in I} S_i = S \supset \partial\Omega$
гиперпл-ти

$h_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}$ шаг сетки в x_{k,i_k}

$h = \max\limits_{\substack{k=1,..,m \\ i_k=0,..,N_k-1}} h_{k,i_k}$



o − $\omega_h(\Pi)$
x − $\hat\omega_h(\Pi)$

□ − объём, привяз. к вершине

$\hat\omega_h(a_k,b_k) = \{a_k = y_{k,0} < \ldots < y_{k,i_k} < \ldots < y_{k,N_k} = b_k \mid y_{k,i_k} = \frac{x_{k,i_k}+x_{k,i_k+1}}{2}\}$ вспомогат. сетка

$\hat\omega_h(\Pi) = \hat\omega_h(a_1,b_1)\times\ldots\times\hat\omega_h(a_m,b_m)$

$\hat I_0 = \{i \mid i_k = 0,..,N_k,\ k=1,\ldots,m\} = I$ $\hat d_{h,i} = [y_{1,i_1}, y_{1,i_1+1}]\times\ldots\times[y_{m,i_m}, y_{m,i_m+1}]$ — ячейка вспомогат. сетки

$\bigcup_{i\in I}(\hat d_{h,i}\cap\Omega_h) = \Omega_h = \bar\Omega$ $\rho_i = V(\hat d_{h,i})$ $i\in I$

ура, с сетками закончили!

Пр-во сеточных функций:

$u^{(h)}: \omega_h(\Omega)\to\mathbb{R}$, $u^{(h)} = \{u_i \mid i\in I_{\Omega_h}\}$ $u^{(h)}\in U_h$ — пр-во сет. ф-й

$N_h = \dim\omega_h(\Omega)$ — кол-во узлов $\|u^{(h)}\|_{U_h}$ — сеточная норма

$u\in U$ $P_h: U\to U_h$ — огр, т.е. $\|P_h u\|_{U_h} \le c\|u\|_U$
P_h — оператор проектир-я на $\omega_h(\Omega)$ $P_h u = (u)_h$ $(P_h u)_i = u(x_i)$

Ex 1 Равномерная норма: $\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_{i\in I_{\Omega_h}}|u_i|$ $U_h = C_h(\bar\Omega)$

$u\in C(\bar\Omega)$ $\|P_h u\|_{U_h} \le \underset{c=1}{c}\|u\|_{C(\bar\Omega)} = \max_{x\in\bar\Omega}|u(x)|$

2 Сеточн. $L_{2,h}$ $\|u^{(h)}\|_{L_{2,h}} = \left[\sum_{i\in I_{\Omega_h}}\rho_i u_i^2\right]^{1/2}$ $U_h = L_{2,h}(\Omega)$

$L_{2,h}(\Omega)$ — гильбертово, т.к. $(u^{(h)}, v^{(h)})_{L_{2,h}} = \sum_{i\in I_{\Omega_h}}\rho_i u_i v_i$ — скал. пр-е в $L_{2,h}(\Omega)$

$\|P_h u\|_{L_{2,h}} \le V(\Omega)^{1/2}\|u\|_{C(\bar\Omega)}$

Упр $u\in L_2(\Omega)$ $(P_h u)_i = \frac{1}{\rho_i}\int_{\hat d_{h,i}\cap\Omega_h} u(x)dx$:   Д-ть: $\|P_h u\|_{L_{2,h}} \le c\|u\|_{L_2(\Omega)}$