13/5/21

Не рассказывал про квадратичные …
про сходимость в пр-ве непрерывных ф-ий

Программирование метода конечных элементов

Метода Галеркина

$A\vec{u} = \vec{f}$ $\mathbb{T}_h$ – регулярное симплексиальное разбиение

$n \simeq 10^8$ A – разреженная матрица в силу регулярности $\mathbb{T}_h$ – у каждого симплекса небольшое число соседей

Если метод прямой, то нужно знать все (ненулевые) элементы.

В итерационных методах достаточно иметь операцию действие оператора на вектор.

Работа с областью

$\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{T}_h$ – делаем разбиение – нетривиальная задача!

$\mathbb{T}_h = \{e_i\}$ Двумерные разбиения строятся отлично
А вот трёхмерные – не очень
Gmh делает хорошие тетраэдральные разбиения

$\overline{\Omega} \longrightarrow \omega_h = \{\overline{x}_i\}_{i=1}^N$ – вершины сетки

I_e – мн-во индексов, отвечающим узлам симплексов

$\mathbb{T}_h = \{ \underbrace{\{\overline{x}_i\}_{i\in I_e}, (a_{ij}), a_0, \text{условие для граничных симплексов}} \}$

(a_{ij}), a_0 → const

→ "паспорт" для каждого симплекса из разбиения

$\int_e a_{ij} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j$

Способ I. Поэлементное формирование системы

Способ II. Поузловое формирование системы

Начнем с II:

$\omega_h = \{\vec{x}_i\} = \{ \underbrace{\mathbb{T}_{h,i} = \{e \mid \vec{x}_i \in e\} \rightsquigarrow \text{паспорта этих } e} \}$

→ "паспорта" узлов

Берем очередной узел (не знаем наперёд) – $\vec{x}_j$ ("достаем из мешка")

$\vec{x}_j \rightsquigarrow (A)_{ji}, \quad i=1,..,k_j$

В сл II к каждой строке A возвращаемся один раз

Но недостаток — каждый симплекс считаем 3 раза

Теперь I:

Берем очередной симплекс

$$(A)_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{e\in T_h} a_e(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{e} (A_e)_{ij} \cdot u_j = \sum_e f_{e,i}$$

Формируем A_e, в ней 9 (3×3) ненулевых элементов

$$A_e = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

$A_0 = 0_{n\times n}$

$A = A_0 \rightsquigarrow A \mathrel{+}= A_{e_1} \rightsquigarrow A \mathrel{+}= A_{e_2} \rightsquigarrow \dots$

У A_{e_i} и A_{e_j} будут ненулевые эл-ты на одном и том же месте, если e_i сопряжен e_j, при этом одинаковых мест столько, сколько общих узлов.

Как раз связи "сложатся" в A, так и надо.

Недостаток: пока не рассмотрим все симплексы, не достроим.