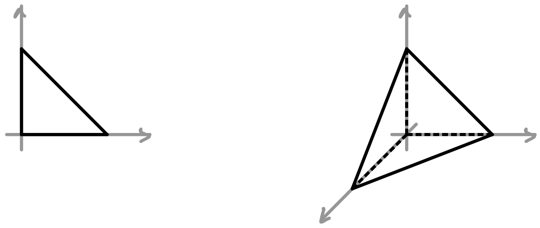
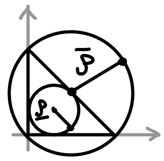
15/4/21

$\omega_0 = \{\vec{y}_i\}_{i=1}^{m+1}$, $\vec{y}_{m+1} = \vec{0}$, $\vec{y}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - i$, $i = \overline{1,m}$

$e_0 = \left\{ \vec{y} = \sum_{i=1}^{m+1} y_i \xi_i \ , \ \xi_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i = 1 \right\}$ – КАНОНИЧЕСКИЙ СИМПЛЕКС



$\underline{\rho} = \sup\limits_{B \subset e_0} d_B$, $\bar{\rho} = \inf\limits_{B \supset e_0} d_B$



$S_1 \subset \mathbb{R}^m$, $S_2 \subset \mathbb{R}^m$, S_1 и S_2 замкнуты

S_1 и S_2 АФФИННО-ЭКВИВАЛЕНТНЫ, если

$F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{x} = F(\vec{y}) = G\vec{y} + \vec{b}$, $G \in M_m(\mathbb{R})$, $\det G \neq 0$

и $\forall \vec{y} \in S_1$ $\vec{x} = F(\vec{y}) \in S_2$ и $\forall \vec{x} \in S_2$ $\vec{y} = F^{-1}(\vec{x}) \in S_1$

тут видимо где-то пропущенны кванторы $\exists$

Теорема об аффинной эквив-ости

$\mathbb{T}_h = \{e\}$, $\forall e \in \mathbb{T}_h$ e аффин-эквив. e_0 ,

т.е. $\exists F_e(\vec{y}) = G_e \vec{y} + \vec{b}_e$: $\|G_e\| \leq \frac{h_e}{\underline{\rho}}$, $\|G_e^{-1}\| \leq \frac{\bar{\rho}}{h_e}$

Д-во Конструктивно построим G_e и b_e.

$\omega_e = \{\vec{x}_i\}_1^{m+1}$, $\omega_0 = \{\vec{y}_i\}_1^{m+1}$

$\vec{x}_i = G_e \vec{y}_i + \vec{b}_e$, $i = \overline{1, m+1}$ $\Rightarrow$ $\vec{x}_{m+1} = \vec{b}_e$

$$G_e \vec{y}_i = \begin{bmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{mi} \end{bmatrix} = \vec{g}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_{m+1}$$

$$G_e = \begin{bmatrix} x_{1,1} - x_{1,m+1} & \cdots & x_{1,m} - x_{1,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} - x_{m,m+1} & \cdots & x_{m,m} - x_{m,m+1} \end{bmatrix} \in M_{(m+1)}(\mathbb{R})$$

$$\tilde{G}_e := \left[\begin{array}{c|c} 0 \cdots 0 & 1 \\ \hline G_e & \begin{array}{c} x_{1,m+1} \\ \vdots \\ x_{m,m+1} \end{array} \end{array} \right] \Rightarrow |\det \tilde{G}_e| = |\det G_e|$$

$$Q_e := \begin{pmatrix} 1 & & \mathbb{O} & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbb{O} & & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_{m\times m} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 1 \cdots 1 & 1\end{array}\right) \in M_{(m+1)}(\mathbb{R}) \quad , \quad \det Q_e = 1$$

$\widetilde{G}_e Q_e = X_e^T$ (специально так строили)

$$|\det G_e| = |\det \widetilde{G}_e| = |\det G_e \det Q_e| = |\det G_e Q_e|$$
$$= |\det X_e^T| = |\det X_e| \neq 0$$

Т.е. $\mathring{e} \neq \varnothing$

$\vec y \in e_0 \Rightarrow \vec y = \sum_{i=1}^{m+1} \vec y_i \xi_i$

$\vec x = G_e \vec y + \vec b_e = G_e \sum \vec y_i \xi_i + \vec b_e = \sum_{i=1}^{m+1}(G_e \vec y_i)\xi_i + \sum_{i=1}^{m+1} b_e \xi_i$

АЫЕУ я стираю через 3 сек после того как пишу на доске

ЫЫЫ УАЮЮЮ ЭЭЭАЫУЕЕА УЫУЕАЭ АЫЫЫУУУ

$$\vec x \in e \Rightarrow \vec y = G_e^{-1}(\vec x - \vec b_e) = G_e^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{m+1} \vec x_i \xi_i - \sum_{i=1}^{m+1}\vec b_e \xi_i\Big) =$$
$$= G_e^{-1}\sum_{i=1}^{m+1}(\vec x_i - \vec b_e)\xi_i = \sum_{i=1}^{m+1} G_e^{-1}(\vec x_i - h_e)\xi_i = \sum_{i=1}^{m+1} y_i \xi_i \in e_0$$

$\|G_e\| = \frac{1}{\underline{\rho}}\sup\limits_{\|\vec y\|=\underline{\rho}}\|G_e\vec y\|$, $\|\vec y\| = \underline{\rho} \Rightarrow \exists y_1, y_2 \in e_0 :$
$\vec y = \vec y_1 - \vec y_2$

$$G_e\vec y = G_e \vec y_1 - G_e \vec y_2 = (G_e\vec y_1 - \vec b_e) - (G_e \vec y_2 - \vec b_e) = \vec x_1 - \vec x_2,$$
где $\vec x_1, \vec x_2 \in e$

$\|\vec x_1 - \vec x_2\| \le \underline{\rho} \Rightarrow \|G_e\| \le \frac{\overline{h}_e}{\underline{\rho}}$ □

Вторая оценка док-ется аналогично:

$\|G_e^{-1}\| = \frac{1}{\underline{h_e}}\sup\limits_{\|\vec x\| = \underline{h_e}}\|G_e^{-1}\vec x\|$

$\vec x = \vec x_1 - \vec x_2$, $\vec x_1, \vec x_2 \in e$

$G_e^{-1}(\vec x_1 - \vec b_e) - G_e^{-1}(\vec x_2 - \vec b_e) = \vec y_1 - \vec y_2$, $\vec y, \vec y \in e_0$

$\|G_e^{-1}\| \le \frac{\overline{\rho}}{\underline{h_e}}$ ■

<u>Замечание</u> $\|G_e\| \le \frac{h}{\underline{\rho}}$. А $\|G_e^{-1}\| \le \frac{\overline{\rho}\sigma\nu}{h}$, тут необх квазирег

Конечные элементы

$T \in \mathbb{R}^m$ – замкнутое множество

$P_n^{(\ell)}$

ммм все в слух
писать я это конечно же не буду

$$p^{(2)}(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \in P_6^{(2)}$$

$$p^{(2)}(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_4 xy \in P_4^{(2)}$$

$$p^{(2)}(x,y) = a_0 + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \in P_4^{(2)}$$

Это все линейные пр-ва

Мы будем рассматривать линейные ф-ии.

$\{\ell_i\}_1^{m+1}$ – лин. ф-алы P_n всё я устал он всё стёр

Лема спаси.

Лемма (кот-у он стер)

Док-во.

$\Rightarrow$ Иииии место ⊛

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_{m+1} = 0 \qquad \alpha_j = 1$

$n = m+1$

$p_j \in P_n^{(\ell)} \qquad \ell_i(p_j) = \alpha_i \qquad \ell_i(p_j) = \delta_{ij}$

$\ell_1(p_j) = 0$

$\vdots$

$\ell_{j-1}(p_j) = 0$

$\ell_j(p_j) = 1$

$\ell_{j+1}(p_j) = 0$

$\vdots$

$\ell_{m+1}(p_j) = 0$

(Стер)

$\Longleftarrow \quad \{p_j\}_{j=1}^{m+1} \qquad p = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_{m+1} p_{m+1} \in P_n^{(\ell)}$

$\ell_i(p) = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \, \ell_i(p_j) = \alpha_i \qquad \ell_i(p_j) = \delta_{ij}$

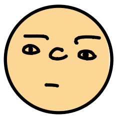
$(\tau, P_n^{(\ell)}, Q_n)$ - конечный элемент

$P_{m+1}^{(1)} \ (\ell = 1, \ n = m+1)$

$\tau = e \qquad P(x_i) = \ell_i(p) \quad i = \overline{1, m+1} \quad \bar{x}_i \in \omega_0$

$e \qquad \{x_i\}_{i=1}^{n+1}$

$\{\varphi_i^e(\bar{x})\}_{i=1}^{n+1} \qquad \varphi_i^e(\bar{x})$ - линейная ф-ция, $\varphi_i^e(x_j) = \delta_{ij}$



помотала жизнь....