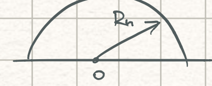
$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi = \qquad z = e^{i\varphi} \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

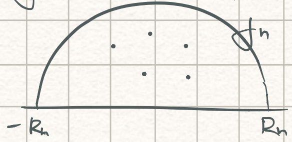
$$= \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\cdot\frac{-i\,dz}{z} \qquad dz = ie^{i\varphi}d\varphi \quad d\varphi = -i\frac{dz}{z}$$

2. Несобств. интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Пусть для нктр посл-ти $R_n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n \cdot \max\limits_{\substack{|z|=R_n\\ y>0}} |f(z)| = 0$

$= M_n$





$z = R_n e^{i\varphi}$

$\varphi \in [0, \pi]$

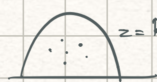
$$\int_{-R_n}^{R_n} f(z)\,dz + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

Т.к. $M_n R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: $\left(\int_{-R_n}^{R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$\qquad \overset{\shortparallel}{2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z), z_n)}$, где $\overline{z_1, z_n}$ – полюсы

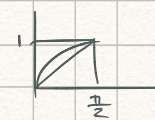
$$F(f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{itz}\,dz = \varphi(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{itz}\,dz$$



$z = Re^{i\varphi}$

Пусть $z = Re^{i\varphi}$ $\left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})e^{itRe^{i\varphi}}\cdot iRe^{i\varphi}\,d\varphi\right| \leq 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR\frac{2\varphi}{\pi}}\,d\varphi$



$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$

$$|e^{itRe^{i\varphi}}| = e^{-tR\sin\varphi} \leq e^{-tR\frac{2\varphi}{\pi}}$$

$$-\frac{\pi e^{-\frac{tR\,2\varphi}{\pi}}}{2tR}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2tR}\Big(1 - \underbrace{e^{-tR}}_{tR\to\infty\ 0}\Big) \leq \frac{\pi}{2tR}$$

$\Downarrow$

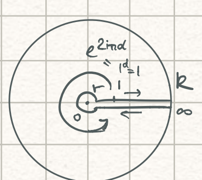
$$2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR\frac{2\varphi}{\pi}}\,d\varphi < 2M_R R\,\frac{\pi}{2tR} = \frac{\pi M_R}{t}$$

Пусть $M_R = \max\{|f(Re^{i\varphi})| \mid 0 \leq \varphi \leq \pi\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{itz}\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f(z)e^{itz}, z_k)$$

$\int_0^{\infty} \frac{Q(x)}{x^\alpha}\,dx$ $\qquad Q(x)$ – рац. ф-я, $Q(\infty) = 0$ $\qquad$ многозначная ф-я

$\qquad 0 < \alpha < 1$



$$(1 - e^{-2\pi i\alpha})\int_r^R Q(x)\cdot\frac{dx}{x^\alpha} + \int_0^{2\pi}\frac{Q(Re^{i\varphi})}{(Re^{i\varphi})^\alpha}\,iRe^{i\varphi}\,d\varphi = -\int_0^{2\pi}\frac{|Q(ze^{i\varphi})|}{(ze^{i\varphi})^\alpha}\,ize^{i\varphi}\,d\varphi$$

$|\,|\,| < \frac{2\pi}{z^\alpha}\cdot r = 2\pi c r^{1-\alpha} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0 \qquad Q(x) \sim \frac{1}{x^n},\ n \geq 1 \qquad Q(x) < \frac{M}{R}$

$$\rho < \frac{\frac{M}{R}}{R^\alpha}\,2\pi R = \frac{2\pi M}{R^\alpha} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

оба инт. $\to 0 \Rightarrow$ $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{Q(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{2\pi i\sum\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{z^\alpha}, z_k\right)}{1 - e^{-2\pi i\alpha}}}$ $\longleftarrow$ так эти интегралы считаются

Логарифмический вычет

Принцип аргумента

Теорема Руше

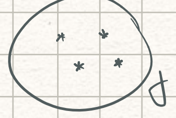
Осн. т. алгебры

Н-листность ф-и $f(z)$ вблизи нуля порядка n

Критерий однолистности

Принцип сохр-я обл-ти

Пусть $f(z)$ аналитична в односв. обл. D всюду, кроме кон. числа полюсов и непр-на в окр. $\partial D = \gamma$ – кус. гл. крив. Жордана и $f(z) \neq 0$ на γ

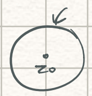


Рассмотрим: $\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

Пусть z_0 – нуль порядка n ф-ии $f(z)$. Тогда

$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^n \varphi(z),$$ где $\varphi(z_0) \neq 0$ и $\varphi(z)$ аналитична в окр. т. z_0



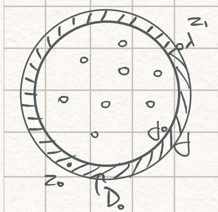
$$f'(z) = n(z-z_0)^{n-1}\varphi(z) - (z-z_0)^n \varphi'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \qquad \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = n \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\delta} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

N = сумма порядков нулей, P = сумма порядков полюсов

Т.к. $\ln(f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$ вычет ф-ии $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в точке a наз. логарифмическим вычетом



$f' \neq 0, f \neq 0, f \neq \infty$

$\frac{f'}{f}$ аналитична в D_0 и имеет в ней первообразную $F(z)$

$$d\left(f e^{-F(z)}\right) = f'(z) e^{-F(z)} - f(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} e^{-F(z)} = 0$$

Т.е. $f e^{-F(z)}$ постоянны в D_0

$$f(z) e^{-F(z)} = f(z_0) \cdot e^{-F(z_0)}$$

$$\ln f(z) := \ln f(z_0) + F(z) - F(z_0)$$ ← Так опред-м $\ln$ в D_0

$$\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \ln f(z)\Big|_\gamma = \ln|f(z)| + i\arg f(z)\Big|_\gamma$$

Приращ-е аргумента $f(z)$ вдоль пути γ равно $2\pi(N-P)$

Теорема Руше:

Если $f(z)$ и $g(z)$ аналит. и непр-ны вплоть до гр. в односв. обл-ти, огр. кус. гл. кр. γ и $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ на γ, то f и g имеют в D равное кол-во нулей.

Пояснения, почему лекции Тетенова больше записываться не будут:

это абсолютно бесполезно, т.к:

- они абсолютно не структурированны
- никогда не знаешь, что это он сейчас доказывает (почти)
- существует чудесная методичка Бинуты
- сам я их никогда перечитывать не буду и вам не советую!