5/10/20

Опр Жорданова дуга $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ АНАЛИТИЧЕСКАЯ в $\mathbb{C}$, если

① $\gamma(t)$ вещественно-аналитична на $(0,1)$

② $\forall t \in (0,1) \quad \gamma'(t) \neq 0$

Теорема (Принцип Шварца)

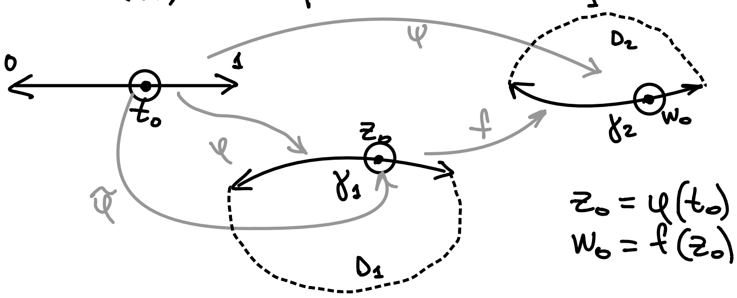
$k=1,2$

D_1, D_2 – области в $\mathbb{C}$: $\partial D_k \supset \gamma_k$, где γ_k – аналитическая дуга

$f: D_1 \to D_2$: $f_1: \gamma_1 \to \gamma_2$ аналитична в D_1 и непр в $D_1 \cup \gamma_1$

$\Rightarrow \exists V(\gamma_1)$ – окрестность : f_1 аналитически продолжается в V

Д-во



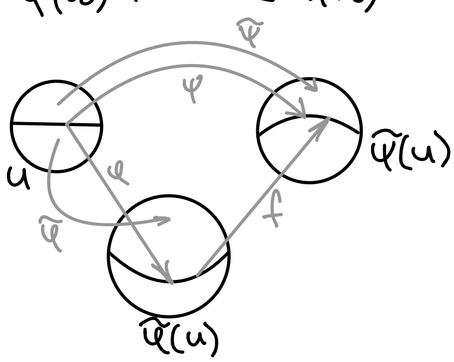
$\psi = f \circ \varphi$

$z_0 = \varphi(t_0)$

$w_0 = f(z_0) = \psi(t_0) = f \circ \varphi(t_0)$

Пусть $\tilde\varphi, \tilde\psi$ – аналит. продолж. φ и ψ в окр-ть $V((0,1))$

Т.к. $\varphi'(t_0) \neq 0 \quad \exists U(t_0)$: $\tilde\varphi$ взаимооднозначно переводит $U(t_0)$ в $U(\varphi(t_0))$

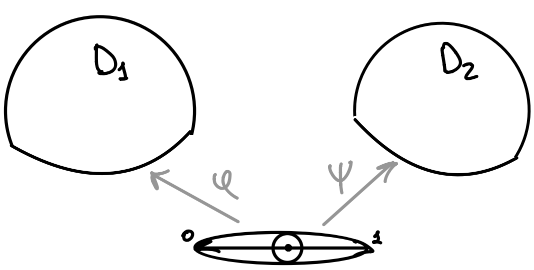


$$f \circ \varphi\big|_{U \cap (0,1)} \equiv \psi\big|_{U \cap (0,1)}$$

Рассмотрим $g = \tilde\psi \circ \tilde\varphi^{-1}$

Тогда $g\big|_{\gamma \cap \tilde\varphi(U)} \equiv f$

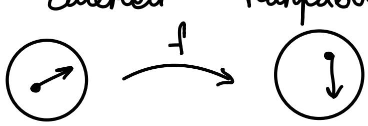
По граничной т. единственности $f \equiv g$ на $\tilde\varphi(U) \cap D_1 \Rightarrow$ для g есть аналит. продолж. в $D_1 \cup \tilde\varphi(U)$ ■



ещё были пометки но всё стерли :(

Замеч Любую точку окружности можно перевести в любую другую с желаемой сменой направления

$\exists f$:



Теорема Римана

Суть: Любую односвязную область в $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит не менее 2 точек, можно отобразить на круг.

D — односвязная область в $\mathbb{C}$: $\#\{x \in \partial D\} \geq 2$, $z_0 \in D$

$\Rightarrow \exists!\, f: D \to \Delta$: $f(z_0)=0$ и $f'(z_0)>0$

Д-во ниже

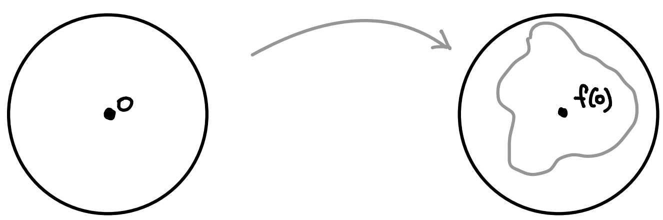
Лемма Шварца

$f \in A(\Delta) \cap C(\overline{\Delta})$, при $|z|=1$ $|f(z)| \leq 1$, $f(0)=0$

$\Rightarrow \forall z$ $|z|<1 \to |f(z)| \leq |z|$, $|f'(0)| \leq 1$

причем если $\exists z : |z|<1 : |f(z)|=|z|$, то $f(z) = ze^{i\alpha}$

если $|f'(0)|=1$, то $f(z) = ze^{i\alpha}$



Д-во $f(0)=0 \Rightarrow \varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z=0 \end{cases}$ аналитична в Δ

$|\varphi(z)| \leq 1$ на $|z|=1$ $\max|\varphi(z)|=1$

по принципу максимума от противного всё устно доказали ■

Следствие $f(z) \leq \frac{R}{r}$

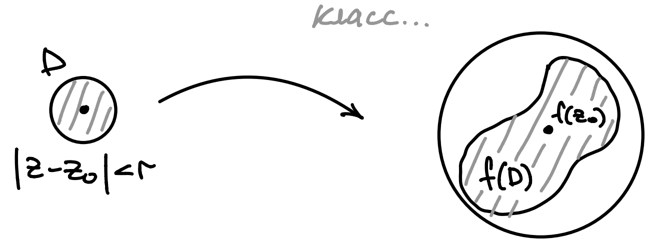
или

$f(z_0) \leq \frac{R}{r}$

или

$f(z) < \frac{R}{r}$

класс...



$|f(z)-f(z_0)|<R$

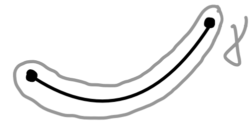
тогда $f'(z) \leq \frac{R}{r}$

Лемма Гурвица

f_n — посл-ть однолистных функций в области D, которые равном. сходятся внутри D, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$

$\Rightarrow f$ однолистна в D

Д-во Пусть $\exists z_1, z_2 \in D$: $f(z_1) = f(z_2) = a$



Т.е. z_1, z_2 – нули ф-ии $(f(z)-a)$

$\forall D'$ – односв. обл, ограниченной кривой γ, $\exists z_1, z_2$:

$z \in D \setminus \{z_1, z_2\} \longrightarrow f(z) \neq 0$

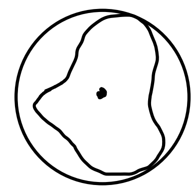
Пусть $\rho := \min\limits_{\gamma} |f(z) - a|$

Тогда если $|f_n(z) - f(z)| < a$, $|f_n(z) - a|$ имеет 2 нуля в D'.

Поэтому f_n неоднолистна ■

Д-во теоремы Римана (в простейшем случае)

Пусть $D \subset \Delta$ – односвязная область и $0 \in D$



Док-ем, что $\exists f : D \to \Delta$: $f(0) = 0$

Пусть $\mathfrak{M} = \{A(D) \cap \{$мн-во однолистных в D ф-ий$\} \mid f(D) \subset \Delta$ и $f(0)=0\}$

$\mathfrak{M} \neq \varnothing$ т.к. при $\lambda \in (0,1)$ $\lambda f \in \mathfrak{M}$

$\exists M > 0$: $\forall f \in \mathfrak{M}$ $|f'(0)| \leq M$ $\quad \left(M = \sup\limits_{f \in \mathfrak{M}} |f'(0)|\right)$

Возьмем ρ: $\rho \cdot \Delta \subset D$. Т.к. $f(0) = 0$, $f(\rho\Delta) \subset \Delta$ $|f'(0)| \leq \frac{1}{\rho}$

Тогда $\exists f_n \in \mathfrak{M}$: $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n'(0)| = M$.

При этом можем считать, что $f_n'(0) > 0$

В силу принципа компактности $\exists f_{n_k}$ – равном. сх. посл-ть :

$\lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k} = f$: $f'(0) = M$ и

f однолистна в D. Т.е. $f \in \mathfrak{M}$