Простейшие Д/Л О:

$\omega = z + b$ — сдвиг на вектор b

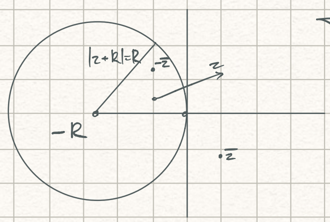
$\omega = az$ — растяжение в $|a|$ раз и пов. на $\angle = \arg a$

$\omega = \frac{1}{z}$

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1 \qquad \omega = \frac{a}{c} + \frac{az + b - \frac{a}{c}(cz+d)}{cz+d} = \overbrace{\frac{a}{c}}^{\text{сдвиг}} + \frac{1}{\underbrace{(-c^2)}_{\text{раст-е и поворот}}\underbrace{\left(z + \frac{d}{c}\right)}_{\text{сдвиг}}} \Bigg] \frac{1}{z}$$

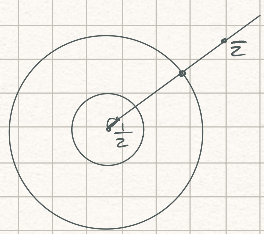
произошла шаладушка

T <u>Инверсия</u> отн. окр-ти $|z - z_0| = R$ задаётся ф-лой $\boxed{\omega = \frac{R^2}{\bar z - \bar z_0} + z_0}$



$$\mathcal{F}_R(z) = \frac{R^2}{\bar z + R} - R = -\frac{R\bar z}{\bar z + R} \longrightarrow -\bar z$$

???



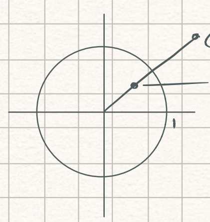
$$\frac{R^2}{\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = R^2 z$$

были ещё картинки, но он их стёр :с

Св-ва: 1) Всякое ДЛО — композиция чётного числа инверсий

2) Инверсия переводит окр и пр., не прох. ч/з 0, в окр-ти и прямые

3) содерж. 0, в прямые



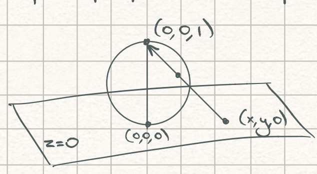
$\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}$

$$\bar x \longrightarrow \frac{\bar x}{\|\bar x\|^2} \qquad \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$$

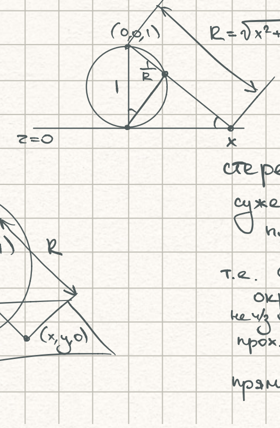
инверсия переводит сферы в сферы, угол тоже сохр.

окр-ть — пересеч-е сфер $\Rightarrow$ окр-ть $\longrightarrow$ окр-ть

Стереографическая проекция:

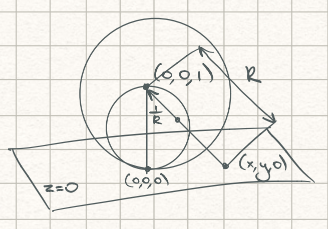


$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



стереогр. пр. совп. с сужением сферы на пл-ть x,y

сфера в 2 раза больше
инверсия отн-но един. сферы



т.е. стереогр. пр. перев.

окр $\rightarrow$ окр на ед. сфере
не ч/з 0

прох. ч/з 0 $\longrightarrow$ касающ. их окр., прох ч/з 0

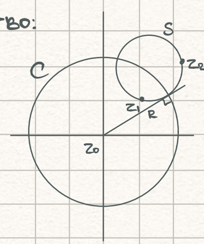
прямые $\rightarrow$ окр. ч/з 0,0,1

Принцип симметрии ДЛО.

Опр 2 точки z_1, z_2 **симметричны отн. окр-ти** $\overset{C(z_0,R)}{|z-z_0|=R}$, если при инверсии отн-но $C(z_0,R)$ т. z_1 перех. в т. z_2, т.е. $z_2 = \dfrac{R^2}{\overline{z_1}-\overline{z_0}} + z_0$

Св-во: т. z_1, z_2 симм. отн. окр-ти C $\Leftrightarrow$ любая окр., прох. ч/з z_1 и z_2 $\perp C$

Д-во:

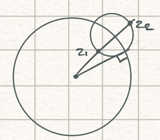


$\Rightarrow$ а весь прикол в том, что инверсия углы перев. в себя

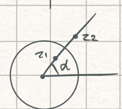
$\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$

$\alpha + \beta = \pi$ $\quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow$



$z_2 - z_0 = \dfrac{R^2}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}$ $\quad |z_1 - z_0||z_2 - z_0| = R^2$



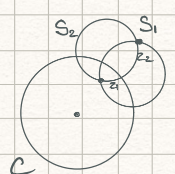
$z_1 = |z_1|e^{i\alpha}$ $\quad z_2 = |z_2|e^{i\alpha}$ $\quad |z_2| = \dfrac{1}{|z_1|}$ $\quad z_2 = |z_2|e^{i\alpha} = \dfrac{1}{|z_1|e^{-i\alpha}} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$ $\quad$ для 1 окр-ти

\+ аналогичное св-во для прямой

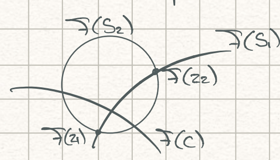
Принцип симметрии:

Пусть z_1, z_2 симм. отн-но окр-ти C, а $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ – ДЛО.
Тогда $f(z_1)$ и $f(z_2)$ симм. отн-но окр. $f(C)$

Д-во:

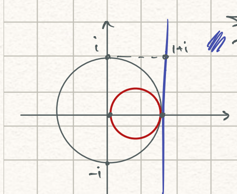


$C \perp S_i$



$\perp$я окр-ть при инверсии перейдёт в себя
точки пересеч-я никуда не денутся и успех

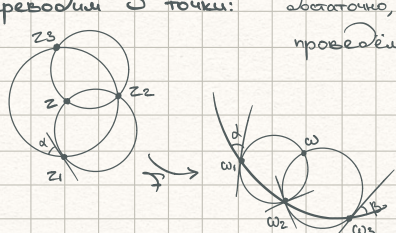
Пусть z_1 и z_2 симм. отн-но C, тогда можем взять $S_1 \perp C$, $S_2 \perp C$, прох. ч/з z_1 и z_2.
$f(S_1)$ и $f(S_2)$ – окр-ти в силу кругового св-ва ДЛО
f – конформно $\Rightarrow f(S_1) \perp f(C)$, $f(S_2) \perp f(C)$ (углы сохр-ся)
$\Rightarrow$ при инверсии отн. $f(C)$ перех. в себя, тогда их т. пересеч-я $f(z_1)$ и $f(z_2)$ при инв. отн. $f(C)$ меняются местами



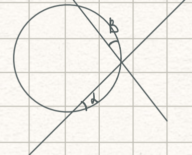
$\xrightarrow{f}$ O $\quad f(z) = \dfrac{1}{z}$

$\infty \to 0$

Переводим 3 точки: достаточно, чтобы определиться с судьбой 4й точки
проведём ч/з них окр-ть или прямую (окр-ть ∞ радиуса | окр. ч/з 2 т. и ∞)



∞:



$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} \cdot \frac{\omega - \omega_2}{\omega - \omega_1}$$

ω выразим отсюда и ура!

$\infty \to -i$