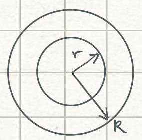
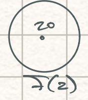


$r<|z-z_0|<R \qquad f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ ряд Лорана

$$\underbrace{\ldots+\frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}}_{\text{главная}}\Bigg|+\underbrace{c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2}_{\text{правильн. часть}}$$



Изолированная особая точка $0<|z-z_0|<R$

1) главная часть пустая $(c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots)$ — устранимая особ. т.

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0 \Leftrightarrow f(z)$ огр. при $|z|\leq\rho<R$

2) главная часть содерж. конечн. число членов:

$$\underbrace{c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{полюс порядка } n}+\ldots+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots=\frac{c_{-n}+c_{1-n}(z-z_0)+\ldots+c_0(z-z_0)^n}{(z-z_0)^n}=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$$

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \qquad \frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^n}{\varphi(z)}$ имеет нуль порядок n

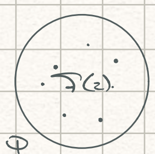
существенна особая точка

Главн. часть содерж. беск. много ненул. членов $\Rightarrow$ мн-во пред. знач. $f(z)$ при $z\to z_0$ $=\mathbb{C}$

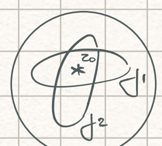
(т. Сохоцкого

↳ всё это было в прошлом семестре

Теория вычетов



Пусть $f(z)$ аналитична везде кроме конечного числа изол. особых точек $(z_1, \ldots, z_n)$

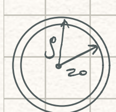


γ^1 и γ^2 — пути обхода точки

вне зав-ти от выбора кривой интегралы равны

$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=c$ — вычет в точке z_0

Интеграл по области = сумме вычетов. Теперь надо учиться эти вычеты находить



Пусть $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ — разл. в ряд Лорана в кольце $0<|z-z_0|<\rho$

Будем это разл-е интегрировать

ряд Лорана сходится на компакте

Возьмём нктр окр-ть $\gamma_{\rho'}$ в этом кольце, ряд сх. равн. $\Rightarrow$

$\int\limits_{\gamma_{\rho'}} \sum c_k(z-z_0)^k dz=\sum c_k\int\limits_{\gamma_{\rho'}}(z-z_0)^k dz=c_{-1}\cdot 2\pi i$ ← это вычет (Res), ура!

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0)=c_{-1}\cdot 2\pi i}$$

Пусть z_0 — простой (1го порядка) полюс $f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+\ldots$

$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ← ан. ф-я $\neq 0$ в z_0; ← нуль 1 порядка в z_0

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\boxed{\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

Пусть z_0 — полюс порядка n. Тогда $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \dots$

$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n$

Продифф-м правую часть $n-1$ раз: $c_{-1}\cdot(n-1)! + c_0 \cdot * \cdot (z-z_0)^n + \dots = c_{-1}\cdot(n-1)! + \psi(z-z_0)$

$\Rightarrow c_{-1} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^n \cdot f(z)\right)^{(n-1)}}{(n-1)!}$

какая-то ф-я неважна, тк при $z \to z_0$ слагаемое $\to 0$

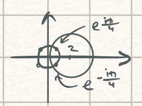
Учимся считать с Тетеновым:

- $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(2z-3)}$ 2 особые точки, но в круге только одна

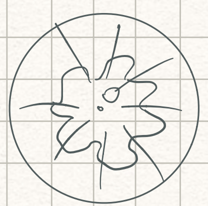
  $z = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{(2z-3)}$ =

- $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1}$ $\gamma = \{|z-2|=2\}$

  $= 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{3i\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{-3i\frac{\pi}{4}}}\right) = i\pi\cos\frac{3\pi}{4} = -i\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$



Область может быть не только ограниченной (в отличии от тебя):



$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \begin{matrix} 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) \\ 2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) \end{matrix}$

Если $f(z)$ аналит. в кольце $R < |z-z_0| < \infty$ и c_{-1} – коэф-т разл-я в ряд Лорана в этом кольце, то $\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$

кажется, т.к. обход в обр. сторону

Теорема:

Если $f(z)$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ кон. число изол. особ. точек, то Σ всех вычетов f, включая ∞, равна 0.

Техника (бозюцу) вычисления интегралов:

$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos z, \sin z)\,dz$

ex: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + 2} = \left(\text{Замена: } z = e^{ix} \leftrightarrow \cos x = \frac{z^2+1}{2z} \quad dz = ie^{ix}dx \quad dx = -i\frac{dz}{z}\right) = \int\limits_{|z|=1} \frac{-2i\,dz}{z^2+4z+1} = -2i\int \frac{dz}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} = \frac{\cancel{-2i}\cdot 2\pi i}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$