Вспоминаем: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{2}-i\frac{x^3}{6}+\ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\, e^{ix} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\ldots = \cos x$, $\mathrm{Im}\, e^{ix} = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\ldots = \sin x$

$\Rightarrow$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Дифференцируемость ф-й комплексной переменной

Опр Ф.К.П. — $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $z = x+iy$ $f(z) = u(z)+iv(z) = w$ $f(x,y) = \underbrace{u(x,y)}_{Re} + i\underbrace{v(x,y)}_{Im}$

Опр $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ — вещественно-дифференцируема в т. $z_0 = x_0+iy_0$, если

$u, v\in D(z_0)$ $\Delta f = f(x,y)-f(x_0,y_0) = \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

$\exists a,b\in\mathbb{C}:$ $\Delta f = a\Delta x + b\Delta y + o(\Delta z)$, т.е. $\exists a,b\in\mathbb{C}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |\Delta z|<\delta \to |\Delta f - a\Delta x - b\Delta y| < \varepsilon|\Delta z|$

$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f}{\Delta x} = a$ $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f}{\Delta y} = b$

Дифф-ть $\Rightarrow$ $\exists$е произв-й

$z = x+iy$ $\bar z = x-iy$ $\Rightarrow$ $x = \frac{z+\bar z}{2}$ $y = \frac{z-\bar z}{2i}$ $\Rightarrow$ $\Delta x = \frac{\Delta z+\Delta\bar z}{2}$ $\Delta y = \frac{\Delta z-\Delta\bar z}{2i} = -i\,\frac{\Delta z-\Delta\bar z}{2}$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\Delta z+\Delta\bar z}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-i\,\frac{\Delta z-\Delta\bar z}{2}\right) + o(\Delta z) = \frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta\bar z + o(\Delta z)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = \frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$

$df(z_0): \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $df(z_0): \zeta\mapsto df(z_0)\cdot\zeta = \frac{\partial f}{\partial z}\zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\bar\zeta$, $\zeta\in\mathbb{C}$

Опр $f(z)$ — (комплексно-)дифференцируема в т. z_0, если $\exists a\in\mathbb{C}$: в нктр окр-ти т. z_0:

$\Delta f = a\Delta z + o(\Delta z)$

Замечание: Далее дифф-ть $\simeq$ компл.-дифф-ть

Если f дифф-ма в z_0, то $\exists\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) = a$. $f'(z_0)$ — (комплексная) производная f в т. z_0

Теорема: $f(z)$ опред. в окр-ти $V(z_0)$:

f — компл.-дифф-ма $\Leftrightarrow$ 1) f вещ.-дифф-ма в т. z_0
2) $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$ — усл-я Коши-Римана

$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0)$

Д-во: $\Rightarrow$ f дифф-ма в т. z_0 $\overset{\text{опр.}}{\Rightarrow}$ она вещ.-диф-ма, $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ и $df(z_0)(\zeta) = a\cdot\zeta$

$\Leftarrow$ f - вещ.-диф. $\Rightarrow$ $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\Delta\bar z + o(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\Delta z)$ $\leftarrow$ опр-е

Условия Коши-Римана:

$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac12\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac12\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ \ \&\ \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$ — традиционная запись усл-й Коши-Римана

$z = re^{i\varphi}$ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi$ $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi$ $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi$ $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$

$\bar z = re^{-i\varphi}$ $r = \sqrt{z\bar z}$ $\varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{z}{\bar z}$ $(*)\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\sqrt{\bar z}}{2\sqrt{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z} = \frac{i}{2\bar z} = \frac{ie^{i\varphi}}{2r} \end{cases}$

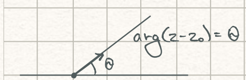
Утв $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $-\pi < \arg z \le \pi$

$(*) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \bar z} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z} = \frac{e^{i\varphi}}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{ie^{i\varphi}}{2r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \iff u_r + iv_r + \frac{i}{r}u_\varphi - \frac{v_\varphi}{r} = 0$

$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}}$ — усл-я **Коши-Римана** в полярных коор-тах

Производная по направлению



мн-во произв-х в fix точке, очевидно, пробегает окр-ть

$\Delta z = |\Delta z|\cdot e^{i\theta}$

$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\Delta\bar z + o(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial z}|\Delta z|e^{i\theta} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}|\Delta z|e^{-i\theta} + o(\Delta z) = |\Delta z|e^{i\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}e^{-2i\theta}\right) +$

$+ o(\Delta z) = \Delta z\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}e^{-2i\theta}\right) + o(\Delta z)$

$\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0 \\ \arg\Delta z = \theta}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + e^{-2i\theta}\frac{\partial f}{\partial \bar z} := f'_\theta(z_0)$ — **произв-я f в т. z_0 по напр-ю θ**

Предложение: $f(z)$ вещ-диф-ма в т. z_0 и $f'_\theta(z_0)$ не зависит от $\theta \iff \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \iff f'_\theta(z_0) = f'(z_0)$

Аналитические функции

Пока что регулярность $\iff$ дифф-сть $\iff$ аналитичность $\iff$ голоморфность

Опр $f(z)$, опред. в окр-ти т. z_0, **аналитическая** в т. z_0, если она диф-ма на этой окр-ти

Ф-я **аналитична в области**, если она аналит. в кажд. её точке

Опр $f: V(z_0) \to \mathbb{C}$ вещ.-дифф-ма в т. z_0 — **конформное** отобр-е, если его дифференциал — — композиция равномерного растяжения и поворота

Отобр-е **конформно в обл-ти**, если оно конформно в каждой точке этой области