Тетенов Андрей Викторович — солнышко

Дифф-ть: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -i\frac{\partial v}{\partial x}$ — усл-е Коши-Римана

Комплексн. пл-ть — мн-во точек вида $(x,y) = z$, где x — вещ. часть ($x = \operatorname{Re} z$), y — мним. часть ($y = \operatorname{Im} z$) $\quad \bar{z} := (x, -y)$

$\mathbb{R} = \{z = (x, 0)\}$ $\quad \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ $\quad$ **вещественная ось**

$i\mathbb{R} = \{z = (0, y)\}$ $\quad \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ $\quad$ мнимая ось

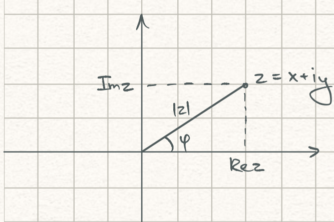
$\begin{cases} (1,0) = 1 \\ (0,1) = i \end{cases}$ — базис $\Rightarrow z = (x,y) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$

Умножение: $1 \cdot 1 = 1 \quad 1 \cdot i = i \quad i \cdot i = -1$

$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \Rightarrow$ образует кольцо

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow$ образует поле

$\mathbb{C}$ — поле, $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто



$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

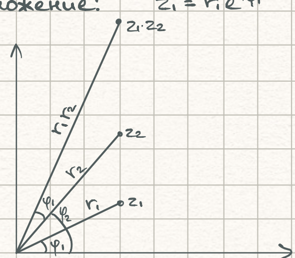
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ $\quad \varphi = \arg z : \ \varphi \in (-\pi, \pi]$

$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$

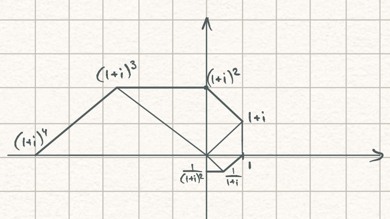
$z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ← полярная запись

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ $\quad \varphi = \arg z = \operatorname{Im} \ln z$

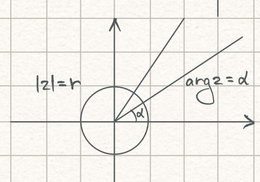
Умножение: $z_1 = r_1e^{i\varphi_1} \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2} \quad z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$



по сути, преобр-е подобия (растяжение + поворот)

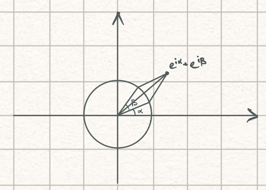


$(\sqrt{3} - i)^6 = 64e^{-i\pi} = -64$

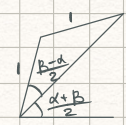


$z = r_0e^{i\alpha} \quad \alpha \in [0, 2\pi)$

$|z| = r_0$



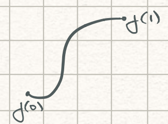
$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\,e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$



Кривые на комплексной пл-ти

$\underset{\text{непр.}}{\gamma}(t): [0,1]\to\mathbb{C}$ — путь на компл. пл-ти

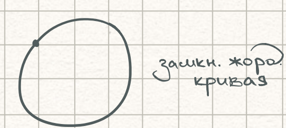
$\gamma_1(t)$ $\gamma_2(t)$



Пути γ_1 и γ_2 **эквивалентны**, если $\exists$ неуб. биективная ф-я $\varphi: [0,1]\to[0,1]$ такая, что $\gamma_2(t)=\gamma_1(\varphi(t))$
Кривая в $\mathbb{C}$ – класс эквив-ти путей

Кривая γ в $\mathbb{C}$ **жорданова**, если $\forall\gamma(t)$, задающего γ, ф-я $\gamma(t)$ инъективна

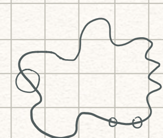
Кривая γ замкнута, если $\gamma(0)=\gamma(1)$



Теорема Жордана:
замкн. кривая Жордана делит пл-ть на 2 части

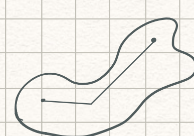
Кривая γ **гладкая**, если она представима путём $\gamma(t)$, где $\gamma(t)\in C'$ и $|\gamma'(t)|\neq 0$

Теорема о станд. радиусе:
если γ - гладкая кривая Жордана, то $\exists$ такое r, что при $\rho<r$ окр-ти радиуса ρ с центром на γ пересекают γ ровно дважды, а напр-е касательной к γ внутри круга рад. r меняются не более чем на θ

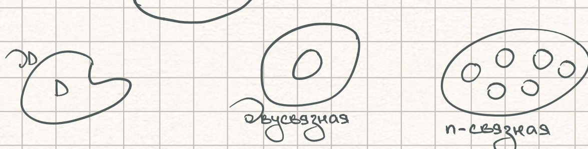


Области в $\mathbb{C}$

Область — открытое лин. связное мн-во в $\mathbb{C}$



∂D - граница области
Если ∂D связна, то D - односвязна



Сфера Римана