План:

1. Связь с матрицами
   Группа ДЛО изоморфна $PSL(2, \mathbb{C})$ $\qquad \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{-1} = \left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)$

2. Действие на $\mathbb{C}$
   $\mathcal{F}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ взаимно одн. отобр. $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$

3. Дифференцируемость. Конформность

4. $\mathcal{F}(z)$ переводит обобщ. окр-ти в обобщ. окр-ти
   а) задача 1.19
   б) окр и пр $\Rightarrow$ окр и пр $\longleftarrow$ круговое св-во ДЛО
   в) инверсия в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^3$ и стереогр. проекция

1. Связь с матр-ми

1) $\mathcal{F}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad-bc \neq 0$ (иначе $\mathcal{F}(z) \equiv const$)

2) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d}$

3) Если $\mathcal{F}_1(z) = \frac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1}$ $\quad \mathcal{F}_2(z) = \frac{a_2 z+b_2}{c_2 z+d_2}$,
то коэф-ты в $\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2(z))$ такие же, как в м-це $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

При этом $I(z) = \frac{1 \cdot z+0}{0 \cdot z+1} = z$ — нейтр. эл-т, а $\mathcal{F}^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ — обр. эл-т

Поэтому ДЛО образ. группу с опер. $\mathcal{F} \circ g$

Таким образом $\varphi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ — эпиморфизм группы $GL(2, \mathbb{C})$ на группу дробно-лин. отобр.

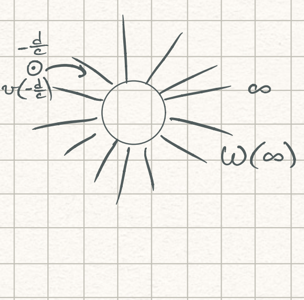
При этом $\varphi^{-1}(I(z)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$

$PSL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad-bc=1, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$

Ex $\frac{2z+1}{z+2} = i \qquad z = \frac{2i-1}{-i+2} = \frac{(2i-1)(i+2)}{5} = \frac{-4+3i}{5}$

2. Действие на $\mathbb{C}$

$\mathcal{F}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
- При $z \to -\frac{d}{c}$ $\mathcal{F}(z) \longrightarrow \infty$. Будем писать, что $\mathcal{F}(-\frac{d}{c}) = \infty$
- При $z \to \infty$ $c \neq 0$ $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$, т.е. $\mathcal{F}(\infty) = \frac{a}{c}$



$\mathcal{F}: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, причём $\mathcal{F}$ — биекция $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, т.к. $\mathcal{F}$ обратимо

В каждой точке $z \neq -\frac{d}{c}$ $\mathcal{F}(z)$ непрерывна

Т.к. $\lim\limits_{z \to -\frac{d}{c}} \mathcal{F}(z) = \infty$, $\mathcal{F}$ непр в т. $-\frac{d}{c}$ как отобр. $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

аналогично $\mathcal{F}(z)$ непр. в ∞,

$\mathcal{F}$ — гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$:

$\mathcal{F}(z)$ диф-ма в $\mathbb{C}$:

$\mathcal{F}'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, если $ad-bc$ $\qquad \lim\limits_{z \to \infty} \mathcal{F}'(z) = 0$

$\mathcal{F}'(\frac{1}{z})\Big|_{z=0} = \left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)' = \frac{ad-bc}{(c+dz)^2} = \frac{1}{c^2}$, если $ad-bc=1$

$\Rightarrow \mathcal{F}(z)$ — биголоморфный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

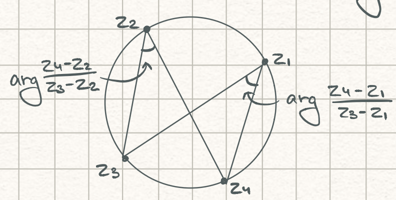
Мёбиусово отобр-е пр-ва $\overline{\mathbb{R}}^n$ — композиция конечного числа инверсий.
Если рассм-ть композ. чётного числа инверсий, то получим мёбиусовы отобр-я, сохр. ориентацию.

4. f переводит об. окр-ти $\to$ об. окр-ти

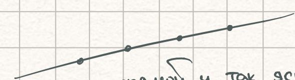
Обобщённая окр-ть — окр. или прямая (в $\overline{\mathbb{R}}^n$) в $\overline{\mathbb{C}}$

1.19. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ принадл. нктр обобщ. окр-ти $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\operatorname{Im}(\quad) = 0 \qquad \arg(\quad) = k\pi$



$\arg A - \arg B = \arg \dfrac{A}{B}$



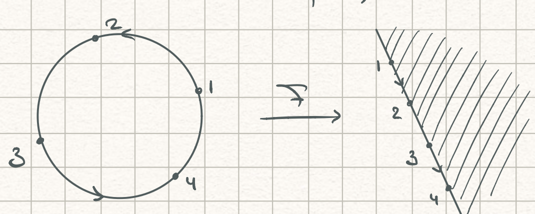
с прямой и так ясно

Лемма (круговое св-во ДЛО):

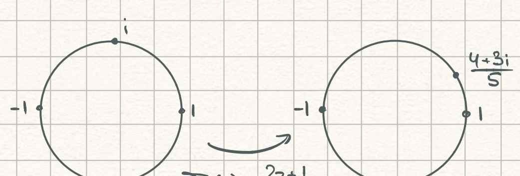
$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d} = \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \frac{(f(z_3)-f(z_1))(f(z_4)-f(z_2))}{(f(z_4)-f(z_1))(f(z_3)-f(z_2))} = \frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}$$

Если z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на об. окр-ти, то и $f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)$
(надо бы ещё посмотреть, что на ∞ происх., но делать мы этого не будем)



Ex



$f(z) = \dfrac{2z+1}{z+2}$

Св-во: Если $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ пер. $0,0 \to 0,0$, то $g(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

также $0,0 \to 0,0$ и сохр. вел-ны углов м/у кр

Рассм. $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad f(ze^{i\alpha}) = \frac{1}{r}e^{i\alpha}$

$$J_{R,z_0}(z) = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0 \text{ — инверсия}$$