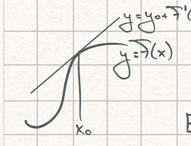
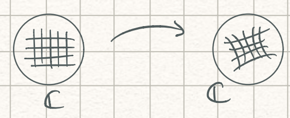
Предложение: $f(z)$ вещ. диф-ма и конформна в $z_0 \Leftrightarrow f(z)$ диф-ма в т. z_0 и $f'(z_0)\neq 0$

Замечание: дифференциал — линейная ф-я



$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow (y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow dy=f'(x_0)dx$$

Если многомерн, то дифф-ал — м-ца (лин. опер-р) в нашем случае $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$



Отобр-е конформно, если явл-ся композицией равном. растяж. и поворота.

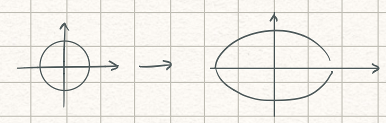
Ex неравномерные растяж-я:

1. $v=x+y$, $u=x$

2. $\omega=2z+\frac{\bar z}{2}$

$z=x+iy$ $\quad \omega=u+iv$

$u=(2+\frac{1}{2})x$ $\quad v=\frac{3}{2}y$



Ex конформные отобр-я:

- $\omega=\rho e^{i\alpha}z$ (растяж. в ρ раз и поворот на α)
- $\omega=2iz$ (растяж. в 2 раза и поворот на $\frac{\pi}{2}$)
- $\omega=-2z$ (растяж. в 2 раза и поворот на π)

$\omega=0$ — сжатие в одну точку — не конформно

Д-во: (предлож-я)

$\Leftarrow$ f диф-ма в z_0 и $f'(z_0)\neq 0 \Rightarrow df(z_0)(\xi)=f'(z_0)\cdot\xi=\overset{\rho}{|f'(z_0)|}\cdot \overset{e^{i\alpha}}{e^{i\arg f'(z_0)}}\cdot\xi$

т.е. пл-ть ξ растяг-ся в $|f'(z_0)|$ раз и повор-ся на $\arg f'(z_0)$

$\Rightarrow f$ конформно (вещ. диф-сть из диф-сти)

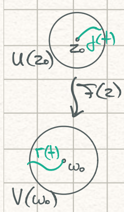
$\Rightarrow$ f вещ. диф-ма $\Rightarrow df(z_0)(\xi)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\cdot\xi+\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\cdot\bar\xi=A\xi+B\bar\xi$

f конформно, а повороты коммутируют м/у собой (в пл-ти) и равном. растяж.

$Ai\xi+Bi\bar\xi=i(A\xi+B\bar\xi) \Leftrightarrow -Bi\bar\xi=Bi\bar\xi \Rightarrow B=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)=0$, т.е. f диф-ма

f невырожд. в $z_0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\neq 0$

Геометрический смысл комплексной производной



$U(z_0)$ — окр-ть z_0. Пусть $f(z)$ конформно в $U(z_0)$ и $f'(z)$ непр. в U.

Пусть $\gamma(t)$ — гладкий путь с началом в т. z_0

$\gamma:[0,1]\to U$, $\gamma(0)=z_0$ $\quad \dot\gamma(t)=\frac{d\gamma(t)}{dt}\neq 0 \ \forall t$ $\quad \Rightarrow \Gamma(t)$ — гладкий путь в $V(\omega_0)$, где $\omega_0=f(z_0)$

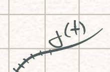
$\Gamma(t):=f(\gamma(t))$ $\quad \dot\Gamma(t)=\underbrace{f'(\gamma(t))}_{\neq 0 \text{ т.к. конформн.}}\cdot\dot\gamma(t)\neq 0$

$\dot\gamma(t)$ задаёт касательн. вект. к $\gamma(t)$: $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} \to \dot\gamma(t)=\begin{pmatrix}\dot\gamma_1(t)\\ \dot\gamma_2(t)\end{pmatrix}$ — векторы

Касат-ная в т. z_0: $z_0+\tau\cdot\dot\gamma(0)$, $\tau\in\mathbb{R}$

А $\dot\Gamma(t)$ зад. кас-ный вект. к $\Gamma(t)$: $\dot\Gamma(0)=f'(z_0)\cdot\dot\gamma(0) \Rightarrow$ Касат-ная в т. ω_0: $f(z_0)+\tau\cdot f'(z_0)\cdot\dot\gamma(0)$

Соотнош-е касат. вект.: $\dot\gamma(0)\rightsquigarrow \underbrace{f'(z_0)}_{\text{растяж-е и поворот, т.к. } f \text{ конформно}}\cdot\dot\gamma(0)$



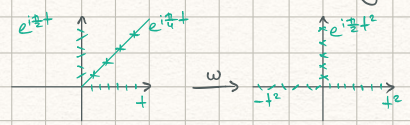
$ds_\gamma(t)=|\dot\gamma(t)|dt$ $\quad ds_\Gamma(t)=|f'(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)|dt$

$\Rightarrow \frac{ds_\Gamma(t)}{ds_\gamma(t)}=|f'(\gamma(t))|$ $\quad \frac{ds_\Gamma(0)}{ds_\gamma(0)}=|f'(z_0)|$ $\Rightarrow$ длина кривой увелич. в $|f'(z_0)|$ раз

$\arg\dot\Gamma(0)-\arg\dot\gamma(0)=\arg f'(z_0)$ — поворот касательной

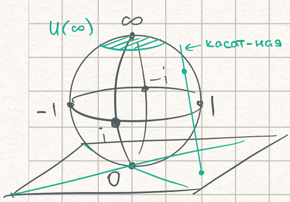
Замечание: Если $f'(z_0)=0$, то угол поворота будет зависеть от напр-я кривой

$\omega = z^2$



неконформно

Замечание: Дифф-сть — широкое математическое понятие
Аналитичность — представимость ф-ии рядом в окр-ти каждой точки
Регулярность — в алгебре для полиномов
Голоморфность — в ТФКП наличие произв. в точке
Конформность — голоморфность + ненулевая произв-я



— стереограф. проекция

∞ — равноправная точка (как опр-ть в ней дифф-сть?)

Риманова сфера

Опр $f(z)\colon \mathbb{C} \supset U(\infty) \to \mathbb{C}$ голоморфна на бесконечности, если $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна в 0.

Замечание: $\omega = \frac{1}{z}$ $\quad \frac{\omega - 1}{\omega + 1} = \frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z} + 1} = \frac{1-z}{1+z} = -\frac{z-1}{z+1} = e^{i\pi} \cdot \frac{z-1}{z+1}$

т.е. $\omega = \frac{1}{z}$ — поворот Римановой сферы на $180°$ отн. оси $(-1, 1)$

Дробно-линейные отображения

Опр $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$ — ДЛО, $ad - bc \neq 0$

$$f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \qquad g(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \qquad g(f(z)) = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_1 a_2 + a_1 b_2) z + b_1 a_2 + d_1 b_2}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + b_1 c_2 + d_1 d_2}$$

$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + c_1 b_2 & a_2 b_1 + d_1 b_2 \\ c_2 a_1 + c_1 d_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$ т.е. композ-я ДЛО $\Leftrightarrow$ произв-е соотв. м-ц

$\Rightarrow \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \omega = \frac{az+b}{cz+d} \longrightarrow z = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a}$

$\Rightarrow$ ДЛО — фактор-группа м-ц.

$PSL_2(\mathbb{C})$ — проективная специальная линейная группа м-ц 2×2 с коэф. из $\mathbb{C}$

Действие алг. отобр. на $\overline{\mathbb{C}}$

$\omega = \frac{az+b}{cz+d}$ $\qquad \omega(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$ $\quad (= \infty$ при $c = 0)$

$$\omega' = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2}$$

$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{a}{z} + b}{\frac{c}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz}$ $\qquad g'(0) = \frac{ad - bc}{c^2}$ $\Rightarrow$ на ∞ тоже голоморфна