Теорема:

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$. След. усл-я экв-ны:

1. $L = L(G)$ для нктр КС-грамм. G
2. $L = L(\mathcal{M})$ для нктр АМП $\mathcal{M}$

Д-во: $1 \Rightarrow 2$ Пусть $L = L(G)$ для нктр КС-грамм. $G = (V, \Sigma, S, R)$. Пусть $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$, $R = \{A_1 \to v_1, \dots, A_n \to v_n\}$, где $m, n \geq 1$, $A_1, \dots, A_n \in V \setminus \Sigma$, $v_1, \dots, v_n \in V^*$

Построим АМП $\mathcal{M}_G$ след. образом: полагаем $Q = \{s, q\}$, $\Gamma = V$, $F = \{q\}$,

$$\Delta = \{((s,e,e),(q,S)), \quad \text{I}$$
$$((q,e,A_i),(q,v_i)), \quad \text{II} \quad \forall i = \overline{1,n}$$
$$((q,a_i,a_i),(q,e))\} \quad \text{III} \quad \forall i = \overline{1,n}$$

III — сокращение

Лемма:

$\forall w \in \Sigma^* \ \forall \alpha \in (V \setminus \Sigma) V^* \cup \{e\}: \quad S \overset{L*}{\Rightarrow}_G w\alpha \iff (q, w, S) \vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, e, \alpha)$

в частн-ти при $\alpha = e$ имеем: $S \overset{L*}{\Rightarrow}_G w \iff (q, w, S) \vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, e, e)$

$\Updownarrow$ $w \in L(G)$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $w \in L(\mathcal{M}_G)$

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть $S \overset{L*}{\Rightarrow}_G w\alpha$. Индукция по длине n порождения:

$S \overset{L}{\Rightarrow}_G u_1 \overset{L}{\Rightarrow}_G u_2 \overset{L}{\Rightarrow}_G \dots \overset{L}{\Rightarrow}_G u_n = w\alpha$

$n=0$: $w = e$ $\alpha = S$, тогда $(q, e, S) \vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, e, S)$

$n \to n+1$: пусть $S \overset{L}{\Rightarrow}_G u_1 \overset{L}{\Rightarrow}_G \dots \overset{L}{\Rightarrow}_G u_n \overset{L}{\Rightarrow}_G u_{n+1} = w\alpha$

Имеем $u_n = xA\beta$, $x \in \Sigma^*$, $A \in V \setminus \Sigma$, $\beta \in V^*$

$u_{n+1} = x\gamma\beta$, где $(A \to \gamma) \in R$

Пусть, например, $\gamma = yB\xi$, $y \in \Sigma^*$, $B \in V \setminus \Sigma$, $\xi \in V^*$

ост. случаи с пустыми словами тривиальны

По инд. предп.: $(q, x, S) \vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, e, A\beta)$, а значит

$(q, \overset{w}{\overset{\shortparallel}{xy}}{}^*, S) \vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, y, A\beta) \vdash_{\mathcal{M}_G} (q, y, \gamma\beta) = (q, y, yB\xi\beta) \vdash^*_{\mathcal{M}_G}$

$\vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, e, B\xi\beta) \overset{*}{=} (q, e, \alpha)$

Т.к. $u_{n+1} = w\alpha = x\gamma\beta = xyB\xi\beta \Rightarrow w = xy \quad \alpha = B\xi\beta$ *

$\Leftarrow$ Пусть $(q, w, S) \vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, e, \alpha)$. Индукция по числу n тактов типа II

$n=0$: $w = e$ $\alpha = S$, тогда $S \overset{L}{\Rightarrow}_G S = w\alpha$

$n \to n+1$: Рассмотрим последний такой такт типа II: пусть

$(q, w, S) \vdash_{\mathcal{M}_G} \dots \vdash_{\mathcal{M}_G} (q, y, A\beta) \underset{\text{посл. такт типа II}}{\vdash_{\mathcal{M}_G}} (q, y, \gamma\beta) \underbrace{\vdash_{\mathcal{M}_G} \dots \vdash_{\mathcal{M}_G}}_{\text{типа III}} (q, e, \alpha)$

По инд. предп.: $(w = xy)$ из $(q, w, S) \vdash^*_{\mathcal{M}_G} (q, y, A\beta) \Rightarrow$

$S \overset{L*}{\Rightarrow}_G xA\beta \overset{L}{\Rightarrow}_G x\gamma\beta \overset{*}{=} w\alpha$ $\quad$ *? "выкинули" y $(q, x, S) \vdash (q, e, A\beta)$

Действ-но: $w = xy \quad \alpha = B\xi\beta$

Опр АМП $\mathcal{M}$ наз. простым, если $\begin{cases} ((q,a,\beta),(p,\gamma)) \in \Delta \\ q \neq s \end{cases} \Rightarrow \beta \in \Gamma$ и $|\gamma| \leq 2$

2 ⇒ 1 Пусть $L = L(M)$ для нктр АМП $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, F, \Delta)$

Лемма:

$\forall$ АМП $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, F, \Delta)$ $\exists$ простой АМП $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', s', F', \Delta')$: $L(M) = L(M')$

Д-во: Полагаем $\Gamma' := \Gamma \cup \{z\}$, $F' = \{f'\}$ (здесь s', f' и z – новые символы)

Помещаем в Δ', кроме всех эл-тов, переходы:
$((s', e, e), (s, Z))$ и $((f, e, Z), (f', e))$ $\forall f \in F$

Далее произведём в Δ' ($\supseteq \Delta$) след. замены:

а) заменим все переходы $((q, a, \beta), (p, \gamma))$ т. ч. $|\beta| \geq 2$

б) заменим все переходы $((q, a, \beta), (p, \gamma))$ т. ч. $|\gamma| \geq 2$ без наруш-я усл-я а

в) заменим все переходы $((q, a, e), (p, \gamma))$ т. ч. $q \neq s'$ без наруш. усл-й а, б

а) заменяем все переходы вида $((q, a, B_1 \ldots B_n), (p, \gamma))$, $n \geq 2$
на переходы $((q, e, B_1), (q_{B_1}, e))$,
$((q_{B_1}, e, B_2), (q_{B_1 B_2}, e))$,
$\vdots$
$((q_{B_1 \ldots B_{n-1}}, a, B_n), (p, \gamma))$

здесь $q_{B_1}, \ldots, q_{B_1 \ldots B_{n-1}}$ – новые сост-я

б) заменяем все переходы вида $((q, a, \beta), (p, C_1 \ldots C_m))$, где $m \geq 2$,
на переходы $((q, a, \beta), (r_1, C_m))$,
$((r_1, e, e), (r_2, C_{m-1}))$,
$\vdots$
$((r_{m-1}, e, e), (p, C_1))$

$r_1, \ldots, r_{m-1}$ – новые сост-я

в) заменяем все переходы вида $((q, a, e), (p, \gamma))$, где $q \neq s'$,
на мн-во переходов вида $((q, a, A), (p, \gamma A))$ $\forall A \in \Gamma \cup \{Z\}$
т.к. $|\gamma| \leq 1$, то $|\gamma A| \leq 2$