Нормальные алгоритмы Маркова и продукции Поста

Опр Нормальным алгоритмом Маркова наз. упор. тройка $M = (\Sigma, R, F)$, где
Σ — конечный алфавит
$R \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)^n$ $(n \geq 1)$ — конечный упор. набор правил (продукций)
$F \in \{1, 2, \ldots, n\}$ — мн-во номеров заключит. правил

Как обычно, вместо пр-ла $(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ исп-м обозн-е $u \to v$
Заключит. пр-ла обозн. $u \to \cdot v$

Опр Для слова $\alpha \in \Sigma^*$ однозначно опр-ся слово $\beta = M(\alpha) \in \Sigma^*$, явл. рез-том работы 1 шага алгоритма Маркова M на слове α:
выбираем наим. номер пр-ла, применимого к слову α, если оно сущ.
выбираем самое первое вхожд-е в α левой части этого пр-ла и
заменяем это вхожд-е на правую часть соотв. пр-ла — это и есть β
если же применимого к α пр-ла в R нет, то полагаем $\alpha = \beta$

Аналогичным образом можно опр-ть рез-т работы алг. Маркова M как частичную ф-ю на мн-ве слов Σ^*:

Опр Пусть $\alpha \Rightarrow_M \beta$ означ., что β - рез-т работы 1 шага алг-ма Маркова M на α
Полагаем $M(\alpha) = \gamma \in \Sigma^*$, если $\exists$ посл-ть $\alpha \Rightarrow_M \alpha_1 \Rightarrow_M \ldots \Rightarrow_M \alpha_n = \gamma$ $(n \geq 1)$, где лишь посл. переход осуществл. либо по одному из закл., либо по 2му варианту из опр-я $\alpha \Rightarrow_M \beta$
В противн. случае говорим, что $M(\alpha)$ не определено (обозн. $M(\alpha)\uparrow$)

Опр Частичн. ф-я $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ наз. вычислимой с помощью норм. алг. Маркова M, если 1) $\forall \alpha \in \Sigma^*$ $\alpha \in Dom(f) \Leftrightarrow M(\alpha)$ опр.
2) $\forall \alpha \in Dom(f)$ $f(\alpha) = M(\alpha)$

Опр Частичн. ф-я $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ наз. вычислимой на машине Тьюринга
$M = (Q, \Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\}, s, \{h\}, \delta)$, если:
1) $\forall \alpha \in \Sigma^*$ $\alpha \in Dom(f) \Leftrightarrow M$ останавл., начав работать в конфиг. $(\triangleright\sqcup, s, \alpha\triangleleft)$
2) $\forall \alpha \in Dom(f)$ $(\triangleright\sqcup, s, \alpha\triangleleft) \vdash_M^* (\triangleright\sqcup, h, f(\alpha)\triangleleft)$

Теорема:
Для любой частичн. ф-ии $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ след. усл. экв-ны:
1) f вычисл. с пом. нктр норм. алг. Маркова
2) f вычисл. на нктр машине Тьюринга

Три главных слова: теорема без д-ва

Опр **Системой преобразований** (rewriting system) наз. упор. пара $R = (\Sigma, R)$,
где Σ – конечный алфавит
$R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ – конечн. мн-во пр-л (продукций)

Как обычно пр-ло $(u,v) \in R$ обозн. $u \to_R v$

Опр Пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ $\alpha \Rightarrow_R \beta$ означ., что $\exists (u,v) \in R$: $\alpha = xuy$, $\beta = xvy$ для нктр $x, y \in \Sigma^*$

Как обычно, $\Rightarrow_R^*$ – рефл. и транзит. замыкание отнош-я $\Rightarrow_R$

Опр **Системой продукций Поста** наз. упор. пара $P = (\Sigma, P)$, где
Σ - конечный алфавит
$P = \{\alpha_1 w \to w\beta_1, \dots, \alpha_n w \to w\beta_n\}$ – конечное мн-во **продукций Поста**
$n \geq 1$, $\alpha_i, \beta_i \in \Sigma^*$ $\forall i = \overline{1,n}$

Опр Пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ $\alpha \Rightarrow_P \beta$ означ., что $\exists$ продукция Поста $(\alpha_i w \to w\beta_i) \in P$ т., ч.
$\alpha = \alpha_i z$ $\beta = z\beta_i$ для нктр $z \in \Sigma^*$

Как обычно, $\Rightarrow_P^*$ – рефл. и транз. замыкание отнош-я $\Rightarrow_P$

Теорема:
Для любой системы преобраз-й $R = (\Sigma, R)$ $\exists$ система продукций Поста $P_R = (\Sigma', P)$,
где $\Sigma \subseteq \Sigma'$ и $\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*$ $\alpha \Rightarrow_R^* \beta \iff \alpha \Rightarrow_{P_R}^* \beta$

Д-во: Пусть $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ $R = \{\alpha_1 \to \beta_1, \dots, \alpha_n \to \beta_n\}$ для нктр $m, n \geq 1$, $\alpha_i, \beta_i \in \Sigma^*$
Положим $\Sigma' = \{a_1, \dots, a_m, \underbrace{a_1', \dots, a_m'}_{\text{новые симв.}}\}$ (a_i' – "дубликат" a_i)
Опр-м операцию $'$ на мн-ве слов Σ^*: $e' = e$ $(ua_i)' = u'a_i'$
Положим $P := \{\alpha_1 w \to w\beta_1, \dots, \alpha_n w \to w\beta_n,$
$a_1 w \to wa_1', \dots, a_m w \to wa_m',$
$a_1' w \to wa_1, \dots, a_m' w \to wa_m\}$
Непоср. из опр-я получаем, что $\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*$ $\alpha \Rightarrow_R^* \beta \Rightarrow \alpha \Rightarrow_{P_R}^* \beta$
т.е. переставляем α_i в начало, потом меняем с β_i, а после
перетаскиваем β_i на нужное место и расштриховываем обратно