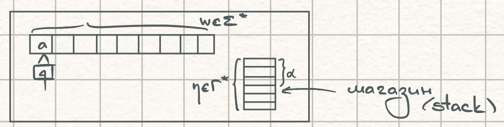
Автоматы с магазинной памятью (pushdown automata)

Опр **Автоматом с магазинной памятью** наз. упор. шестёрка $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, F, \Delta)$, где Q – конечное мн-во сост-й, $s \in Q$ – начальное сост-е

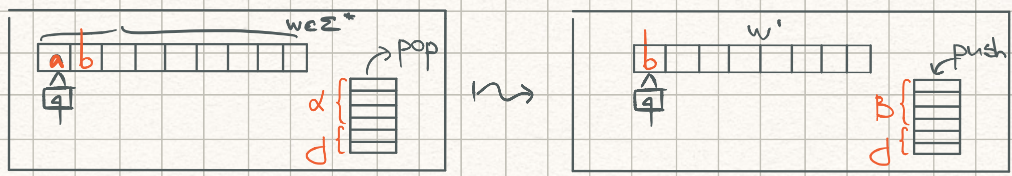
$F \subseteq Q$ – мн-во заключительных сост-й

Σ – внешний алфавит, Γ – внутр. алфавит

$\Delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*)$ – конечн. отн-е перехода



$((q, a, \alpha), (p, \beta))$



Опр **Конфигурацией АМП** M наз. упор. тройка $C = (q, w, \eta) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

q – текущ. сост., w – текущ. слово, η – текущ. сост. магазина

Опр Пусть (q, w, η), (p, w', η') – конфигурации АМП M:

$(q, w, \eta) \vdash_M (p, w', \eta') \overset{def}{\Leftrightarrow}$ $w = aw'$, $\eta = \alpha\gamma$, $\eta' = \beta\gamma$, $\exists ((q, a, \alpha), (p, \beta)) \in \Delta$, где $a \in \Sigma \cup \{e\}$, $w, w' \in \Sigma^*$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma^*$, $p, q \in Q$

Как обычно отн-е $\vdash_M^*$ опр. как рефл. и транз. замык-е отн. $\vdash_M$

Опр Слово $w \in \Sigma^*$ **распознаётся** АМП M, если $(s, w, e) \vdash_M^* (q, e, e)$ для нктр $q \in F$

Опр Для АМП M $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ распозн. $M\}$ – **язык, распознаваемый** M.

Теорема:

L – КСЯ $\Leftrightarrow L = L(M)$ для нктр АМП M

Ex Построим АМП, распозн. КСЯ $\{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Возьмём $Q = \{s, q, f\}$ $\Sigma = \{a, b, c\}$ $\Gamma = \{a, b, c\}$ $F = \{f\}$

$\Delta = \{((s, e, e), (q, e)),$

$((q, a, e), (q, a)),$
$((q, b, e), (q, b)),$ } пихаем в стек a, b

$((q, c, e), (f, e)),$

$((f, a, a), (f, e)),$
$((f, b, b), (f, e))\}$ } читаем букву наверху стека и очищаем

это недетермин. вариант

Перед д-вом теоремы установим её полезное следствие

Предложение:

Пересечение КСЯ с РЯ явл-ся КСЯ

Д-во: Пусть $L_1 \subseteq \Sigma^*$ - КСЯ, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ - РЯ. Т.е. $L_1 = L(M_1)$ для нктр АМП $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, s_1, F_1, \Delta_1)$ и $L_2 = L(M_2)$ для нктр ДКА $M_2 = (Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta)$

Построим АМП $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, F, \Delta)$ т.ч. $L_1 \cap L_2 = L(M)$

Полагаем $Q := Q_1 \times Q_2$, $\Gamma = \Gamma_1$, $s = (s_1, s_2)$, $F = F_1 \times F_2$

Наконец, отн. перехода Δ опр-ся как объед-е мн-в

$\{(((q_1,q_2),a,\alpha),((q_1',\delta(q_2,a)),\beta)) \mid a\in\Sigma,\ ((q_1,a,\alpha),(q_1',\beta))\in\Delta_1\}$

и $\{(((q_1,q_2),e,\alpha),((q_1',q_2),\beta)) \mid ((q_1,e,\alpha),(q_1',\beta))\in\Delta_1\}$

Теорема: та самая, но другими словами

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$. След. усл-я экв-ны:

1. $L = L(G)$ для нктр КС-грамм. G
2. $L = L(M)$ для нктр АМП M

Д-во: $1 \Rightarrow 2$ Пусть $L = L(G)$ для нктр КС-грамм. $G = (V, \Sigma, S, R)$. Пусть $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$, $R = \{A_1 \to v_1, \dots, A_n \to v_n\}$, где $m, n \geq 1$, $A_1, \dots, A_n \in V \setminus \Sigma$, $v_1, \dots, v_n \in V^*$

Построим АМП M_G след. образом: полагаем $Q = \{s, q\}$, $\Gamma = V$, $F = \{q\}$,

$\Delta = \{((s,e,e),(q,S)),$ I

$((q,e,A_i),(q,v_i)),$ II $\forall i = \overline{1,n}$

$((q,a_i,a_i),(q,e))\}$ III $\forall i = \overline{1,n}$

III — сокращение

Покажем, что $L = L(G) = L(M_G)$:

$w \in L = L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^* w \Leftrightarrow S \overset{L}{\Rightarrow}{}_G^* w \Leftrightarrow (s,w,e) \vdash_{M_G}^* (q,e,e) \Leftrightarrow w \in L(M_G)$

Продолжение на след. лекции

строгое д-во см. в конспектах