**Опр** Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – нктр язык. **Отношение (бинарное) $\approx_L$** опр-ся на мн-ве слов $\Sigma^*$ так:

$x \approx_L y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall z \in \Sigma^* \ xz \in L \leftrightarrow yz \in L \quad (x, y \in \Sigma^*)$

Легко видеть, что $\approx_L$ явл. отн-ем экв-ти на $\Sigma^*$, поэтому корректно опр-ны **классы экв-ти** $[x]_{\approx_L} \leftrightharpoons \{y \in \Sigma^* \mid x \approx_L y\}$ $(x \in \Sigma^*)$, а также **фактор-мн-во** $\Sigma^*/_{\approx_L} \leftrightharpoons \{[x]_{\approx_L} \mid x \in \Sigma^*\}$

$\approx_L$ наз. **отношением эквивалентности**

**Анонс** Будет показано, что:

$L$ – рег. язык $\Leftrightarrow$ $\Sigma^*/_{\approx_L}$ конечно

**Теорема**

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – нктр язык т.ч. $\Sigma^*/_{\approx_L}$ – конечное. Тогда $\exists$ ДКА $M_L$ т.ч. $L(M_L) = L$ и число сост-й $M_L$ равно $|\Sigma^*/_{\approx_L}|$.

**Д-во:** Построим для $L$ канонический ДКА $M_L = (Q_L, \Sigma, s_L, F_L, \delta_L)$ след. образом:

полагаем $Q_L := \Sigma^*/_{\approx_L}$, $s_L := [e]_{\approx_L}$,

$F_L := \{[x]_{\approx_L} \mid x \in L\}$

$\delta_L([x]_{\approx_L}, a) := [xa]_{\approx_L}$

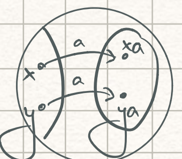
Хотим проверить, что не будет неоднозначности в опр-нии, т.е. надо п-ть, что:

1) это опр-е корректно
2) $L(M_L) = L$

**1** Покажем, что $x \approx_L y \Rightarrow xa \approx_L ya \quad \forall a \in \Sigma$

Это следует непоср-но из опр-я $\approx_L$: имеем $x \approx_L y \Rightarrow \forall z \in \Sigma^* \ xaz \in L \leftrightarrow yaz \in L$

Аналогично, если $x \in L$ и $y \approx_L x$, то $y \in L$ $(z = \varnothing)$




**2** Покажем, что $\forall x, y \in \Sigma^*$: $([x]_{\approx_L}, y) \vdash^*_{M_L} ([xy]_{\approx_L}, e)$

Инд-я по $y$:

а) $y = e$ – очев.

б) $y = ay'$ $(a \in \Sigma)$. Имеем:

за один шаг

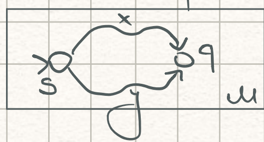
$([x]_{\approx_L}, y) = ([x]_{\approx_L}, ay') \vdash_{M_L} ([xa]_{\approx_L}, y') \vdash^*_{M_L} ([xay']_{\approx_L}, e) = ([xy]_{\approx_L}, e)$

Имеем $w \in L(M_L) \Leftrightarrow (s_L, w) \vdash^*_{M_L} (q, e)$ для нктр $q \in F_L$. Но $(s_L, w) = ([e]_{\approx_L}, w) \vdash^*_{M_L} ([w]_{\approx_L}, e)$, поэтому $w \in L(M_L) \Leftrightarrow [w]_{\approx_L} \in F_L$, т.е. $w \in L$

**Опр** Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ — нктр рег. язык и пусть $\mathcal{M}=(Q,\Sigma,s,F,\delta)$ — ДКА, для ктр $L = L(\mathcal{M})$.

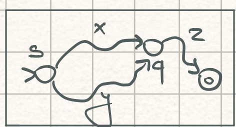
На мн-ве слов $\Sigma^*$ опр-м (бинарное) отношение $\sim_M$ след. образом: $\forall x, y \in \Sigma^*$

$x \sim_M y \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists q \in Q$ т. ч. $(s,x) \vdash_M^* (q, e)$ и $(s,y) \vdash_M^* (q,e)$



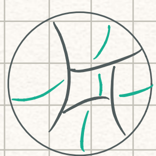

↑ это отн-е $\mathcal{M}$-экв-ти

**Зам** Для $L = L(\mathcal{M})$ имеем $x \sim_M y \Rightarrow x \approx_L y \quad \forall x, y \in \Sigma^*$




↑ очев. из опр-й $\sim_M$ и $\approx_L$

**Зам** Отн-е $\sim_M$ явл. уточнением отн. $\approx_L$, а значит $|\Sigma^*/_{\approx_L}| \le |\Sigma^*/_{\sim_M}| \le |Q|$. В частн, $\Sigma^*/_{\approx_L}$ конечно.



$\Sigma^*/_{\approx_L}$, $\Sigma^*/_{\sim_M}$

— - отн. $\sim_M$

— - отн. $\approx_L$

Кроме того, канонич. автомат, построенный для $L$ в пред. теореме имеет наим. возм-е число сост-й среди всех ДКА, распозн-х $L$

**Теорема** Мэйхилла-Нероуда:

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ явл. рег. $\Leftrightarrow$ $\Sigma^*/_{\approx_L}$ конечно.

**Д-во:** $\Rightarrow$ установлено выше

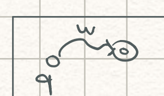
$\Leftarrow$ следует из пред. теоремы:

т.к. $\Sigma^*/_{\approx_L}$ конечно, то для $L$ $\exists$ ДКА $\mathcal{M}_L$ т. ч. $L = L(\mathcal{M}_L)$

**Зам** Построение канонич. ДКА нельзя назвать конструктивным ввиду сложности опр-я $\approx_L$

Хотим построить алгоритм минимизации, ктр преобразует произв. ДКА $\mathcal{M}$ в ДКА $\mathcal{M}'$ т. ч.: $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$ и $\mathcal{M}'$ имеет наим. возм. число сост-й, т.е. $|\Sigma^*/_{\approx_{L(\mathcal{M})}}|$

**Опр** Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$ — произв. ДКА.

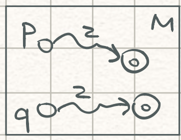



Конфигурация $(q, w)$ наз. „хорошей", если $(q,w) \vdash_M^* (r, e)$ для нктр $r \in F$

**Опр** Бинарное отношение $\equiv$ зададим на мн-ве $Q$ так: $\forall p, q \in Q$

$p \equiv q \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall z \in \Sigma^*$ $(p, z)$ — „хорошей" конф. $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $(q, z)$ — „хорошей" конф.

↑ явл-ся отн-ем экв-ти




Из опр-я "≡" возникает конструкция $M'$.

Пусть $Q_{дост} \subseteq Q$ – мн-во всех сост-й, достижимых из $s$.

Полагаем $M' = (Q', \Sigma, s', F', \delta')$, где:

$Q' := Q_{дост}/_{\equiv}$, $s' := [s]_{\equiv}$, $F' := \{[r]_{\equiv} \mid r \in F \cap Q_{дост}\}$

$\delta'([q]_{\equiv}, a) := [\delta(q,a)]_{\equiv}$

**Упр** Д-ть корректность этого опр-я

Имеем $L(M') = L(M)$, причём $|Q'| = |Q_{дост}/_{\equiv}| = |\Sigma^*/_{\approx_{L(M)}}|$ упр

это как бы алгоритм был

**Зам** Отн-е $\equiv$ вновь опр-но неконструктивно

**Опр** $p \equiv_n q \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z \in \Sigma^*, |z| \leq n, n \geq 0, p, q \in Q$

$(p,z)$ – „хорош." конф. $\leftrightarrow$ $(q,z)$ – „хорош." конф.

это отн-я экв-ти

**Св-ва** $\equiv_n$:

1. $p \equiv_n q \Rightarrow p \equiv_m q$ при $n \geq m$ $\quad \forall p, q \in Q$
2. $p \equiv q \Rightarrow p \equiv_n q$ $\quad \forall p, q \in Q \quad \forall n \geq 0$
3. $p \equiv_0 q \Longleftrightarrow p \in F \leftrightarrow q \in F$
4. $p \equiv_n q \Longleftrightarrow \begin{cases} p \equiv_{n-1} q \\ \delta(p,a) \equiv_n \delta(q,a) \quad \forall a \in \Sigma \end{cases}$ $\quad \forall p, q \in Q$

$Q$ конечно $\Rightarrow \exists n: \equiv_n \Longleftrightarrow \equiv_{n+1} \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \equiv$