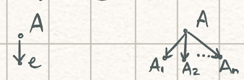
Теорема

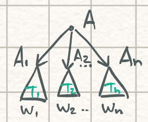
Пусть $G=(V,\Sigma,S,R)$ – нктр КС-грамматика. Тогда след. утв-я экв-ны:
$\forall A\in V\setminus\Sigma \quad \forall w\in\Sigma^*$:

1. $A \Rightarrow^*_G w$
2. $\exists$ дерево разбора в грамм-ке G с корнем A и результатом w

Д-во: см. конспект, дальше только идейно

2⇒1 индукция по высоте h дерева разбора

$h=1$:  $A_i\in\Sigma$

$h\rightsquigarrow h+1$:  $A_i\in\Sigma$

$w=w_1+\ldots+w_n$

$A,\ A_1\ldots A_n,\ w_1A_1\ldots A_n, \ldots$

1⇒2 индукция по длине m линейного порождения

$m=1$: $A\to e$, $A\to A_1\ldots A_n$ $\quad A_i\in\Sigma$ дерево как при $h=1$

$m\rightsquigarrow m+1$: $A, A_1\ldots A_n, \ldots, w$ $\quad \underbrace{A\Rightarrow_G A_1\ldots A_n \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w}_{m+1}$

тож ясно, как дерево строится

Опр Для КС-грамм-ки $G=(V,\Sigma,S,R)$ **шириной** G будем называть число
$\omega(G) := \max\{n \mid (A\to A_1\ldots A_n)\in R\}$

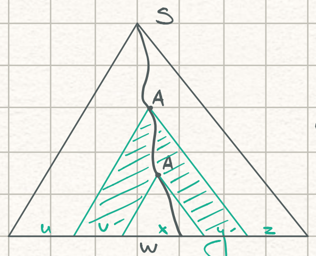
Лемма:
Если T- дерево разбора для G высоты h и с результатом w, то:
$|w| \le \omega(G)^h$

д-ся очевидно инд-ей по h

Следствие:
Если T- дерево разбора для G с рез-том w т.ч. $|w|>\omega(G)^h$, то в T есть путь длины $> h$.

Теорема о накачке для КСЯ:
Пусть $G=(V,\Sigma,S,R)$ – нктр КС-грамм. и пусть $w\in L(G)$ т.ч. $|w|>\omega(G)^{|V\setminus\Sigma|}$.
Тогда $\exists u,v,x,y,z\in\Sigma^*$ т.ч. $vy\ne e$, $w=uvxyz$ и $uv^kxy^kz\in L(G)$ $\forall k\ge 0$ ← св-во накачивания

Д-во: Рассм. дерево разбора для G с результ. w, имеющее наим. возм. число листьев (считаем, что в G нет правил $A\to A$)

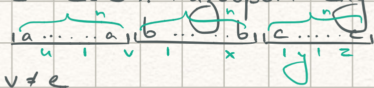


В этом дереве есть путь (из корня в лист) длины $> |V\setminus\Sigma|$, поэтому на нём $\ge |V\setminus\Sigma|+2$ узла, а значит $\ge |V\setminus\Sigma|+1$ нетерминал. Т.о. $\exists A\in V\setminus\Sigma$, ктр встречается как минимум дважды.
По выбору дерева $vy\ne e$ (иначе A бы схлопнулись)
Очевидно, что $uv^kxy^kz\in L(G)$ $\forall k\ge 0$

Следствие:
Язык $\{a^nb^nc^n \mid n\ge 0\}$ не явл-ся КС.

Д-во: От противного: предп., что $\exists$КС-гр. G. Рассм. слово $w=a^nb^nc^n$ т.ч. $|w|>\omega(G)^{|V\setminus\Sigma|}$. По теор. о накачке $\exists u,v,x,y,z\in\{a,b,c\}^*$ т.ч. $w=uvxyz$,

$vy \ne e$ и $uv^kxy^kz \in L(G)$. Разбором случаев для v и y убеждаемся, что это невозможно



Пусть, напр., $v \ne e$

а) если v содерж. ≥ 2 разл. симв., то против-е

б) если v содерж только 1 симв., то тоже против-е

при накачивании вылезет

Т.о. КС-гр. G с $L(G)=\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ не сущ-т

Предложение:

Класс КСЯ не замкнут отн-но пересеч-я и доп-я

Д-во: Языки $L_1=\{a^nb^nc^m \mid n,m \geq 0\}$ и $L_2=\{a^nb^mc^m \mid n,m \geq 0\}$ явл. КС (упр)

Т.к. $L_1 \cap L_2 = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ => нет замкнутости кл. КСЯ отн-но $\cap$

Из того, что $\forall L_1, L_2$ $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, следует то, что кл. КСЯ не замкн. и отн-но доп-я

Опр Пусть $G=(V,\Sigma,S,R)$ - нктр КС-гр-ка и пусть $u,v \in V^*$

1. $u \overset{L}{\Rightarrow}_G v \overset{def}{\Leftrightarrow} u=xAy,\ v=xzy,\ (A \to z) \in R$ для нктр $x \in \Sigma^*$, $y,z \in V^*$

2. $u \overset{R}{\Rightarrow}_G v \overset{def}{\Leftrightarrow} u=xAy,\ v=xzy,\ (A \to z) \in R$ для нктр $x,z \in V^*$, $y \in \Sigma^*$

Отн-я $\overset{L}{\Rightarrow}{}^*_G$ и $\overset{R}{\Rightarrow}{}^*_G$ опр-ся как рефл. и транзит. замыкания отн. $\overset{L}{\Rightarrow}_G$ и $\overset{R}{\Rightarrow}_G$ соотв.

Лемма:

$\forall u \in V^*$ $\forall v \in \Sigma^*$ след. утв-я экв-ны

1. $u \Rightarrow^*_G v$
2. $u \overset{L}{\Rightarrow}{}^*_G v$
3. $u \overset{R}{\Rightarrow}{}^*_G v$

Д-во - упр

Теорема

Пусть $G=(V,\Sigma,S,R)$ - нктр КС-грамм.. След. утв-я экв-ны $\forall w \in \Sigma^*$:

1. $S \Rightarrow^*_G w$ т.е. $w \in L(G)$
2. $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^*_G w$
3. $S \overset{R}{\Rightarrow}{}^*_G w$
4. $\exists$ дерево разбора для G с корнем S и рез-том w

Автоматы с магазинной памятью (pushdown automata)

Опр **Автоматом с магазинной памятью** наз. упор. шестёрка $M=(Q,\Sigma,\Gamma,s,F,\Delta)$, где Q - конечное мн-во сост-й, $s \in Q$ - начальное сост-е

$F \subseteq Q$ - мн-во заключительных сост-й

Σ - внешний алфавит, Γ - внутр. алфавит

$\Delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*)$ - конечн. отн-е перехода