30/3/21

Теорема | $L \subseteq \Sigma^*$

$\Rightarrow \quad \exists G$ — КС-грам : $L = L(G) \iff$

$\iff \exists M$ — АМП : $L = L(M)$

Д-во $\Leftarrow$ АМП $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, F, \Delta)$ — простой АМП, если

$$((q,a,\beta),(p,\gamma)) \in \Delta \ \& \ q \neq s \Rightarrow \beta \in \Gamma, \ |\gamma| \leq 2$$

Лемма $\forall M$-АМП $\exists M'$ — простой АМП : $L(M) = L(M')$

её док-ли на прошл. лекции

Т.о., пусть $M' = (Q', \Sigma, \Gamma \cup \{z\}, s', \{f'\}, \Delta')$ — простой АМП, соотв. M.

т.е. $((s',e,e),(s,z)) \in \Delta'$, $\forall f \in F \ ((f,e,z),(f',e)) \in \Delta'$

Построим КС-грам. $G_M := (V, \Sigma, S, R)$:

$$V = \{\langle q, A, p\rangle \mid q,p \in Q', A \in \Gamma \cup \{z,e\}\} \cup \Sigma$$

R состоит из правил $S \to \langle s, z, f'\rangle$,

$\langle q, e, q\rangle \to e \quad \forall q \in Q'$

единственное правило, где нетерминалы терминируются

Далее каждому переходу вида $((q,a,B),(p,C)) \in \Delta'$ где $B, C \in \Gamma \cup \{z,e\}$, сопоставляем конечн. мн-во правил вида $\{\langle q, B, r\rangle \longrightarrow a\langle p, C, r\rangle \mid r \in Q'\}$

Аналогично каждому переходу вида $((q,a,B),(p,C_1C_2)) \in \Delta'$ где $B \in \Gamma \cup \{z,e\}$, $C_1, C_2 \in \Gamma \cup \{z\}$, сопоставляем мн-во правил вида $\{\langle q,B,r\rangle \longrightarrow a\langle p, C_1, r'\rangle\langle r', C_2, r\rangle \mid r, r' \in Q'\}$

Лемма | $w \in \Sigma^*$, $q,p \in Q'$, $A \in \Gamma \cup \{z,e\}$

$\Rightarrow \quad \langle q, A, p\rangle \Rightarrow^*_{G_M} w \iff (q,w,A) \vdash^*_{M'} (p,e,e)$

Д-во упр, по инд $\square$

$$S \Rightarrow^*_{G_M} w \overset{\text{в силу простоты}}{\iff} \langle s, z, f'\rangle \Rightarrow^*_{G_M} w \overset{\text{в силу леммы}}{\iff} (s,w,z) \vdash^*_{M'} (f',e,e) \iff$$

$$\iff w \in L(M') \iff w \in L(M) \ \blacksquare$$

Замечание КСЯ $\cap$ РЯ = КСЯ

Нормальная форма Хомского для КС-грамматик

КС-грамматика $G = (V, \Sigma, S, R)$ находится в **НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ХОМСКОГО** (НФХ), если $R \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^2$ справа от стрелки ровно два символа

Теорема | G – КС-грам

$\Rightarrow \exists G'$ – КС-гр. в НФХ : $L(G) \setminus \{\Sigma \cup \{e\}\} = L(G')$

конечное число слов длины 0 и 1.

Замечание Дерево КС-гр в НФХ бинарное

Д-во $G = (V, \Sigma, S, R)$. Построим КС-гр. $G' = (V', \Sigma, S', R')$:

$S' = S$, R' получено из R следующ. обр.:

1. удаляем "длинные" правила (правила, у которых справа от стрелки более двух символов)
2. удаляем e-правила (правила, у которых справа от стрелки e)
3. удаляем одноэлементные правила (правила, у которых справа от стрелки 1 символ)

Реализация удалений:

1. $(A \to B_1 \dots B_m) \in R$, $m \geq 3$ сопоставляем в R' мн-во правил $\{A \to B_1 A_1,\ B_1 \to B_2 A_2, \dots, B_{m-2} \to B_{m-1} B_m\}$ где $A_1, \dots, A_{m-2} \in V' \setminus V$ – новые нетерминалы

2. $\mathcal{E}_0 \leftrightharpoons \varnothing$, $\mathcal{E}_{n+1} \leftrightharpoons \{B \in V' \mid (B \to \beta) \in R, \beta \in \mathcal{E}_n^*\}$ зв. Клини

   Заменяем $A \to BC$ и $A \to CB$ из R : $B \in \mathcal{E}$ на правила $A \to C$, где $\mathcal{E} = \{B \mid B \overset{*}{\Rightarrow}_G e\}$

   $\mathcal{E}$ – наим. неподв. т. мн-в $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \subseteq \cdots$

3. $\forall A \in V'$ $D(A)$ – наим. неподв. т. посл-ти

   $D_0(A) \subseteq D_1(A) \subseteq \cdots$, где $D_0(A) \leftrightharpoons \{A\}$,

   $D_{n+1}(A) \leftrightharpoons D_n(A) \cup \{B \in V' \mid \exists A' \in D_n(A) : (A' \to B) \in R'\}$

   Если A – терминал, то $D_0(A) = D_i(A) = A$ $\forall i \in \mathbb{N}$

Удаляем из R' все одноэлем. правила

$\forall (A \to BC)$ добавл. $(A \to B'C')$ $\forall B' \in D(B), C' \in D(C)$

Добавим правила $S \to BC$ для правил $X \to BC$ где $X \in D(S) \setminus \{S\}$ $\blacksquare$