2.5. Преобразование случайных величин

Зам об измеримости преобр-я

Если ξ - с.в., $g(t)$ - борелевск. ф-я, то $\eta = g(\xi)$ - с.в.

Д-во: $g(t)$ - борел. $\Rightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \eta^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \ni \eta^{-1}(B) = \{\omega : \eta(\omega) \in B\} = \{\omega : g(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in \underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\}$$

Теорема о лин. преобразовании абс. непр. распр-й

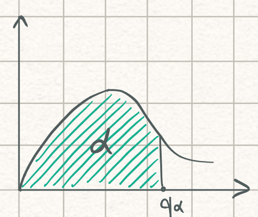
Пусть ξ имеет абс. непр. распр-е с $p_\xi(x)$. Тогда $\forall a \neq 0, b \in \mathbb{R}$: с.в. η имеет а.н.р. с

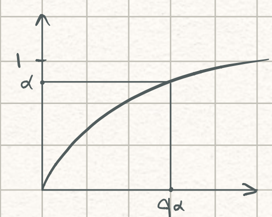
$$p_\eta(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Д-во: Пусть $a > 0$. $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} p_\xi(t)\,dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{u-b}{a} \\ dt = \frac{du}{a} \end{matrix} \right| =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} p_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right) du = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\eta(u)\,du$$

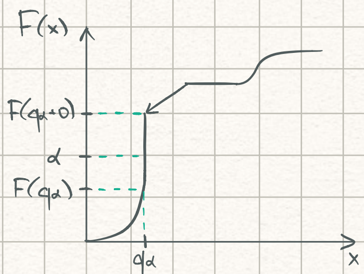
Опр Квантилью для непр. монот. ф-ии распр-я уровня $\alpha \in [0,1]$ наз. число $q_\alpha \in \mathbb{R}$: $F(q_\alpha) = \alpha$

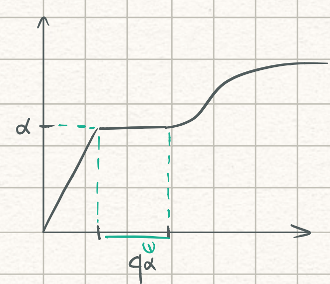




Опр Квантилью уровня $\alpha \in [0,1]$ наз. любое число $q_\alpha \in \mathbb{R}$: (общий случай)

$F(q_\alpha) \leq \alpha \qquad F(q_\alpha + 0) \geq \alpha$



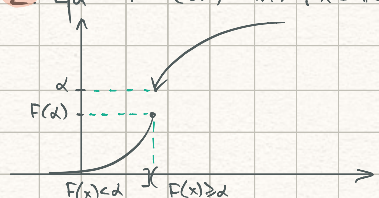


Опр Медиана: $\mu = q_{\frac{1}{2}}$

Опр Мода — любой локальн. max плотности распр-я.

Теорема о линейн. преобр. квантилей:

1. Пусть q_α - квантиль уровня $\alpha \in [0,1]$ для ξ. Тогда:
   $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \qquad a q_\alpha + b$ - квантиль уровня $\alpha \in [0,1]$ для $\eta = a\xi + b$
2. $q_\alpha = F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < \alpha\}$



Д-во: 1. $F_\xi(q_\alpha) = P(\xi < q_\alpha) = P(a\xi + b < aq_\alpha + b) = P(\eta < aq_\alpha + b) = F_\eta(aq_\alpha + b) \leq \alpha$

$F_\xi(q_\alpha + 0) = P(\xi \leq q_\alpha) = P(a\xi + b \leq aq_\alpha + b) = P(\eta \leq aq_\alpha + b) = F_\eta(aq_\alpha + b + 0) \geq \alpha$

2. $F(F^\leftarrow(\alpha)) \leq \alpha \qquad F(F^\leftarrow(\alpha) + 0) \geq \alpha$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : F(x_\varepsilon) \geq \alpha \qquad F^{-1}(\alpha) + \varepsilon > x_\varepsilon \Rightarrow F(F^\leftarrow(x) + \varepsilon) \geq F(x_\xi) \geq \alpha$

По опр-ю sup: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad F(x_\varepsilon) < \alpha : F^\leftarrow(\alpha) + \varepsilon > x_\varepsilon$ $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow F(F^\leftarrow(\alpha) + \varepsilon) \geq F(x_\alpha) \geq \alpha$

$\downarrow \varepsilon \to 0$

$F(F^\leftarrow(\alpha) + 0) \geq \alpha$

Теорема о квантильном преобразовании:

1. Пусть F_ξ - ф-я распр-я с.в. ξ. $U \in U_{0,1}$. Тогда $F_\xi^\leftarrow(U) \in F_\xi$
2. Пусть F_ξ - непр. Тогда $F_\xi(\xi) \in U_{0,1}$

Д-во: $F_\xi(x) = P(\xi < x) \qquad F_\xi(\xi) \cancel{\ } P(\xi < \xi) = 0$

$\{U \leq F(x)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{это}}}{\subseteq} \{F_\xi^\leftarrow(U) < x\} \subseteq \{U \leq F(x)\}$

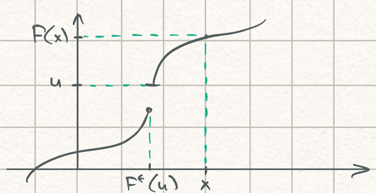
Покажем это от противного:

Пусть $F_\xi^\leftarrow(U) \geq x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : F(x_\varepsilon) < U$ и $F^\leftarrow(U) - \varepsilon < x_\varepsilon$

$\Rightarrow x - \varepsilon \leq F^\leftarrow(U) - \varepsilon < x_\varepsilon$

$F(x - \varepsilon) = F(x_\varepsilon) < U \quad \Rightarrow$ при $\varepsilon \to 0$: $F(x) < U$

$\Rightarrow \{F^\leftarrow(U) \geq x\} \subseteq \{F(x) \leq U\} \Rightarrow \{F(x) > U\} \subseteq \{F^\leftarrow(U) < x\}$



1. $P(U < F(x)) \leq P(F^\leftarrow(U) < x) \leq P(U \leq F(x))$

$\qquad \overset{\shortparallel}{F(x)} \qquad \overset{\shortparallel}{F(x)} \qquad \overset{\shortparallel}{F(x)}$

2. $P(F(\xi) < x) \overset{\text{упр}}{=} P(\xi < F^\leftarrow(x)) = F(F^\leftarrow(x)) \overset{\text{упр}}{=} x, \quad x \in [0, 1]$ эти упр-я сделать надо!

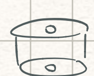
2.6. Многомерные распределения

Ex Кидаем 2 монеты:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р	
О	1/4	1/4	1/2
Р	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

Теперь склеили их так:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	1/2	0
Р	0	1/2



Теперь склеили иначе:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	0	1/2
Р	1/2	0

Общий случай:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р	
О	p	$\frac{1}{2}-p$	1/2
Р	$\frac{1}{2}-p$	p	1/2
	1/2	1/2	

$p \in [0, \frac{1}{2}]$

Опр Случайный вектор — $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots \xi_n)$, если $\forall i \quad \xi_i$ - с.в.