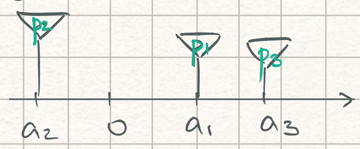
Зам о вычислении МО:

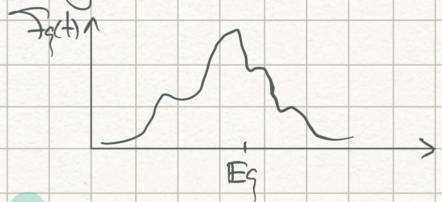
1 Пусть $\xi \in$ дискр. $\sum_k P(\xi = a_k) = 1$ $\quad E\xi = \sum_k a_k P(\xi = a_k)$, если $\sum |a_k| P(\xi = a_k) < \infty$



Вспоминаем про центр масс.

2 Пусть $\xi \in$ а.н.р. с $f_\xi(t)$ $\quad E\xi = \int_{\mathbb{R}} t f_\xi(t)\,dt$, если $\int_{\mathbb{R}} |t| f_\xi(t)\,dt < \infty$

$P(\xi \in A) = \int_A f_\xi(t)\,dt$
$P(\xi \in dt) = f_\xi(t)\,dt$



3 $P(\xi \in A) = p_1 P(\xi_1 \in A) + p_2 P(\xi_2 \in A) + p_3 P(\xi_3 \in A)$ $\qquad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \geq 0$
$E\xi = p_1 E\xi_1 + p_2 E\xi_2 + p_3 E\xi_3$

4 $$E g(\xi) = \int_\Omega g(\xi(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) P(\xi \in dt) = \begin{cases} \sum_k g(a_k) P(\xi = a_k), & \text{если } \xi \text{ - дискр и } \Sigma \text{ сх. абс.} \\ \int_{\mathbb{R}} g(t) f_\xi(t)\,dt, & \text{если } \xi \text{ - а.н. и } \int \text{ сх. абс.} \end{cases}$$

5 $$E g(\xi, \eta) = \int_\Omega g(\xi(\omega), \eta(\omega)) P(d\omega) = \left| \begin{matrix} \xi(\omega) = x \\ \eta(\omega) = y \end{matrix} \right| = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) P(\xi \in dx, \eta \in dy)$$

6 $P(\xi \in [x, y]) = F_\xi(y) - F_\xi(x)$ $\qquad P(\xi \in dt) = dF_\xi(t)$
$E\xi = \int_{\mathbb{R}} t P(\xi \in dt) = \int_{\mathbb{R}} t\,dF_\xi(t)$ — интеграл Лебега-Стилтьеса

просто запись красивая, а так не нужно

Св-во МО 6:

Пусть $\xi \perp \eta$: $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$. Тогда $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$

Д-во: $$E(\xi, \eta) \overset{(5)}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} xy P(\xi \in dx, \eta \in dy) \overset{\text{нез}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} xy P(\xi \in dx) P(\eta \in dy) \overset{\text{ТФ}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} xy P(\xi \in dx) \right) P(\eta \in dy) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} y \left(\int_{\mathbb{R}} x P(\xi \in dx) \right) P(\eta \in dy) = \int_{\mathbb{R}} y P(\eta \in dy) \int_{\mathbb{R}} x P(\xi \in dx) = E\xi \cdot E\eta$$

Теорема о свёртке:
$$F_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(x-y)\,dF_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\eta(x-y)\,dF_\xi(y), \text{ если } \xi \perp \eta$$

Д-во: $F_{\xi+\eta}(x) = P(\xi + \eta < x) = E\,\mathbb{1}\{\xi + \eta < x\} = E g(\xi, \eta)$, где $g(u, v) = \mathbb{1}\{u + v < x\}$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}\{u + v < x\} P(\xi \in du) P(\eta \in dv) = \iint_{u+v<x} 1 \cdot P(\xi \in du) P(\eta \in dv) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) \int_{-\infty}^{x-u} P(\eta \in dv) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) \int_{-\infty}^{x-u} \mathbb{1}\{v < x-u\} P(\eta \in dv) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) \cdot E\,\mathbb{1}\{\eta < x - \xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) P(\eta < x - \xi) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} P(\xi \in du) F_\eta(x-u) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(x-u)\,dF_\xi(u)$$

Ex вычисления МО:

1 $\xi \in B_p$

ξ	0	1
P	$1-p$	p

$E\xi = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$

2 $\xi \in B_{n,p}$ $\quad \xi \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ $\quad E\xi = \sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$
$$= np \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m p^m (1-p)^{(n-1)-m}}_{(p + (1-p))^{n-1}} = np$$

Или: $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ $\quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{i-й успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad \xi \overset{d}{=} S_n$ ← распр-я совп.

$$\Rightarrow E\xi = ES_n = E(X_1 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n = p + \ldots + p = np$$

3

ξ	2	4	8	…
P	1/2	1/4	1/8	

$P(\xi = 2^k) = \frac{1}{2^k}$ $\quad E\xi \cancel{=} \sum_k 1 = \infty$

4 $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ $\quad \eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1}$ $\quad \xi = \sigma\eta + a$

$E\xi = E(\sigma\eta + a) = E(\sigma\eta) + E(a) = \sigma E\eta + a$

$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0$ ← будет у всех спрашиваться на экзамене

Проверим на сх-ть: $\int_{\mathbb{R}} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\int_0^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2/2} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = 2$

3.2. Моменты высшего порядка

Опр k-й момент: $E\xi^k = \int_{\mathbb{R}} t^k P(\xi \in dt) = \begin{cases} \sum_m a_m^k P(\xi = a_m), & \text{если } \xi \text{ - дискр. и } \sum \text{ сх. абс.} \\ \int_{\mathbb{R}} t^k f_\xi(t) dt, & \text{если } \xi \text{ - а.н. и } \int \text{ сх. абс.} \end{cases}$

Опр k-й центральный момент: $E(\xi - E\xi)^k$

Опр Дисперсия: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ $\quad$ во всём мире Var

Опр $\sigma = \sqrt{D\xi}$ — стандартное отклонение

Теорема о существовании моментов:
Пусть $0 < m < k$ и $E|\xi|^k < \infty$. Тогда $E|\xi|^m < \infty$

Д-во: $|x|^m \leq |x|^k + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\xi\|^m \leq \|\xi\|^k + 1 \Rightarrow E|\xi|^m \leq E|\xi|^k + 1 < \infty$

3.3. Моментные неравенства

Теорема нер-во Маркова
Пусть $E|\xi| < \infty$. Тогда $\forall x > 0 \quad P(|\xi| \geq x) \leq \frac{E|\xi|}{x}$

Д-во: $E|\xi| = \underbrace{E(|\xi|, \mathbb{1}\{|\xi| \geq x\})}_{\geq E(x \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq x\})} + \underbrace{E(|\xi|, \mathbb{1}\{|\xi| < x\})}_{\geq 0} \geq E(x \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq x\}) = x \cdot P(|\xi| \geq x)$

Следствие:
Если $\xi \geq 0$ и $E\xi = 0$, то $\xi = 0$ почти наверное (почти всюду) $\Leftrightarrow P(\xi = 0) = 1$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \quad P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow P(\xi > 0) = 0 \Leftrightarrow P(\xi = 0) = 1$

Теорема обобщённое нер-во Чебышёва
Пусть $g(x) \geq 0$ и неубывает. $Eg(\xi) < \infty$. Тогда $P(\xi \geq x) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}$

Д-во: $\{\xi \geq x\} \subseteq \{g(\xi) \geq g(x)\}$.
$P(\xi \geq x) \leq P(g(\xi) \geq g(x)) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}$

Зам экспоненциальное нер-во Чебышёва:

$P(\xi \geq x) \leq e^{-\Lambda(x)}$, где $\Lambda(x) = \sup\limits_{\lambda \geq 0} \{\lambda x - \ln \mathbb{E} e^{\lambda \xi}\}$