

Теорема неравенство Fréchet-Hoeffding

$$\forall u, v \in [0, 1] \quad \max\{u+v-1, 0\} \leq C(u, v) \leq \min\{u, v\} \quad \text{HC-copula}$$

Д-во: $C(u, v) = P(U_1 < u, U_2 < v) \leq P(U_1 < u) = u \quad u \in [0, 1] \Rightarrow C(u, v) \leq \min(u, v)$

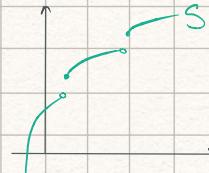
$C(u, v) \leq P(U_2 < v) = v \quad v \in [0, 1]$

$C(u, v) = P(U_1 < u, U_2 < v) = 1 - P(U_1 \geq u \cup U_2 \geq v) \geq 1 - P(U_1 \geq u) - P(U_2 \geq v) =$

$= 1 - (1-u) - (1-v) = u + v - 1$

Упр Записать \cap -то это нер-во в случае $n > 2$

Оп Слн-во $S \subseteq \mathbb{R}^2$ наз. неубывающим, если $H(x, y), (x, y) \in S$ выполнено $(x \leq u) \Rightarrow (y \leq v)$



Оп Слн-во $S \subseteq \mathbb{R}^2$ наз. носителем с.в. \bar{F} , если $\bar{F} \in S$ н.у., т.е. $P(\bar{F} \in S) = 1$

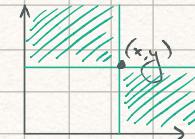
Теорема о правой границе в нер-ве F-H:

$$F_{\bar{F}, \eta}(x, y) = \min\{F_{\bar{F}}(x), F_{\eta}(y)\} \Leftrightarrow \exists \text{ носитель } (\bar{F}, \eta) \text{ неубывающий}$$

Д-во: доказ.

S -неко. $\Leftrightarrow H(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad H(u, v) \in S$

Вып-но: либо $(u \leq x) \Rightarrow (v \leq y)$
либо $(v \leq y) \Rightarrow (u \geq x)$



$$F_{\bar{F}}(x) = P(\bar{F} < x) = P(\bar{F} < x, \eta < y) + P(\bar{F} < x, \eta \geq y) = F_{\bar{F}, \eta}(x, y) + P(\bar{F} < x, \eta \geq y)$$

$$F_{\eta}(y) = \dots$$

$$= F_{\bar{F}, \eta}(x, y) + P(\eta < y, \bar{F} \geq x)$$

$$F_{\bar{F}, \eta}(x, y) = \min\{F_{\bar{F}}(x), F_{\eta}(y)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{либо } P(\bar{F} < x, \eta \geq y) = 0 \\ \text{либо } P(\eta < y, \bar{F} \geq x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{либо } \{(u, v) | u < x, v \geq y\} \notin S \\ \text{либо } \{(u, v) | v < y, u \geq x\} \notin S \end{cases} \Leftrightarrow \text{неко.}$$

Следствие:

Если \bar{F}, η имеют непрерывные ф-ии расп-я, тогда $\bar{F} = \bar{F}(\eta)$, \bar{F} -строго возрастает
 $\Leftrightarrow C_{\bar{F}, \eta}(u, v) = \min\{u, v\}$

стрикто возрастающие
Perfect Dependence (comonotonic)

Упр Сформулируй \cap -то упр-е для левой границы нер-ва F-H

Теорема об инвариантности копулы при строгое возраст. преобр.

Пусть $C(u, v)$ для вектора (\bar{F}, η) с непр. ф-иями расп-я, ф-ии $\bar{F}(x), \eta(x)$
строго возраст. Тогда $C_{\bar{F}\bar{G}, \eta\eta}(u, v) = C_{\bar{F}, \eta}(u, v)$

Д-во: $C_{\bar{F}\bar{G}, \eta\eta}(F_{\bar{F}\bar{G}}(x), F_{\eta\eta}(y)) = P(\bar{F}(\bar{G}(\bar{F}^{-1}(x)), \eta(\eta^{-1}(y))) = P(\bar{F}(\bar{G}(\bar{F}^{-1}(x))), \eta(\eta^{-1}(y))) =$

$$= C_{\bar{F}, \eta}(F_{\bar{F}}(\bar{F}^{-1}(x)), F_{\eta}(\eta^{-1}(y))) \stackrel{*}{=} C_{\bar{F}, \eta}(F_{\bar{F}\bar{G}}(x), F_{\eta\eta}(y))$$

*: $F_{\bar{F}\bar{G}}(x) = P(\bar{F}(\bar{G}(\bar{F}^{-1}(x))) = P(\bar{F}(\bar{F}^{-1}(x))) = F_{\bar{F}}(\bar{F}^{-1}(x))$

$\text{Range}(F_{\bar{F}\bar{G}}(x)) = [0, 1], \quad \text{Range}(F_{\eta\eta}(y)) = [0, 1], \quad \text{т.к. } F_{\bar{F}\bar{G}}(x), F_{\eta\eta}(y) \in C(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow C_{\bar{F}\bar{G}}(u, v) = C_{\bar{F}, \eta}(u, v) \quad \forall u, v \in [0, 1]$ неп-ко уп-е строгое возраст-

Упр Сформулируй \cap -то теорему для $\bar{F}^{\downarrow}, \eta^{\downarrow}$ и $\bar{F}^{\uparrow}, \eta^{\uparrow}$

* Опк козэр-т корреляции Спирмена
 $g_S(q, \eta) = g(F_q(q), F_\eta(\eta)) = g(\text{Copula})$

Spearman's rho

* это опк-т для непр. случаев только, более в конце лекции

* Опк козэр-т корреляции Кендалла
 $g_T(q, \eta) = 2P((q - \hat{q})(\eta - \hat{\eta}) > 0) - 1$, где $(\hat{q}, \hat{\eta})$ - независ. компа вектора (q, η)

Kendall's tau

Св-ва: Пусть F_q, F_η непр-ны и строго возрастают
 1 g_S зависит только от компы (q, η)

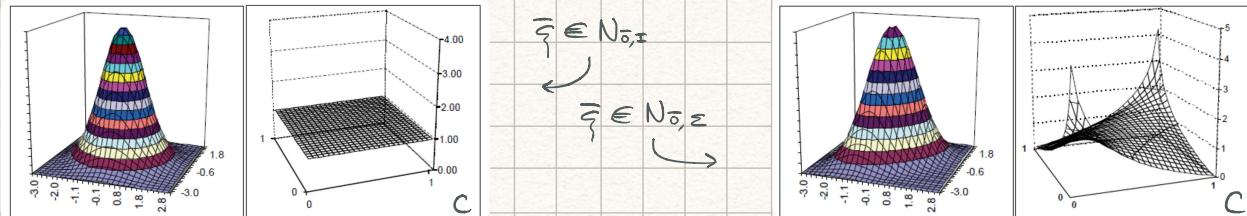
$$\text{тк } C_{F_q(q), F_\eta(\eta)} = C_{q, \eta}$$

2 g_S не меняется при возраст. преобраз-ях

3 $g_S = 1 \Rightarrow F_q(q) = F_\eta(\eta) \Rightarrow C_{q, \eta}(u, v) = \min\{u, v\} \Leftrightarrow q = \tau(q), \tau \uparrow$

УТВ Эти св-ва верни и для g_T

Ex Опк Копула св. $\bar{q} \in N_{\bar{q}, I}$ наз. гауссовой



Определение (Архимедовой копулы). Архимедова копула называется

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)),$$

где $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ непрерывная, строго убывающая, выпуклая функция такая, что $\varphi(1) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \infty$.

Определение (Clayton copula). Архимедова копула с генератором

$$\varphi(t) = t^{-\beta} - 1, \varphi^{-1}(s) = (1+s)^{-1/\beta}, \beta > 0.$$

Копула (при $n = 2$):

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\beta} + u_2^{-\beta} - 1)^{-1/\beta}.$$

Определение (Gumbel copula). Архимедова копула с генератором

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\beta, \varphi^{-1}(s) = \exp(-s^{1/\beta}), \beta \geq 1.$$

Копула (при $n = 2$):

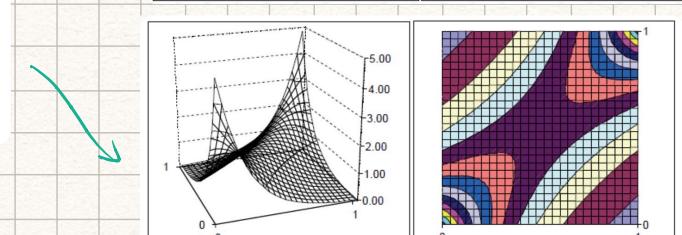
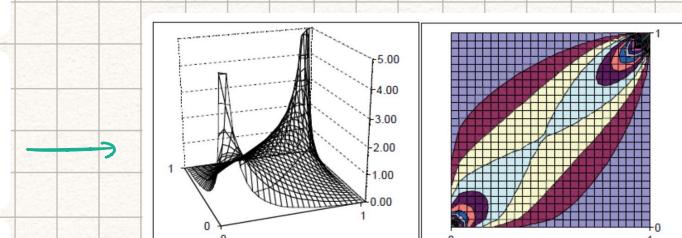
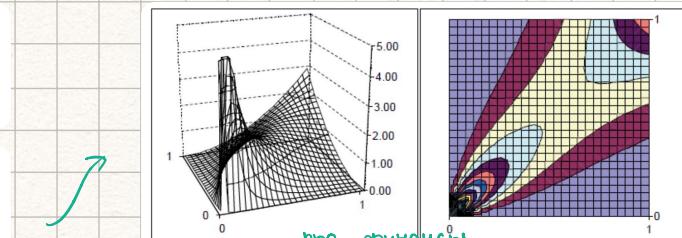
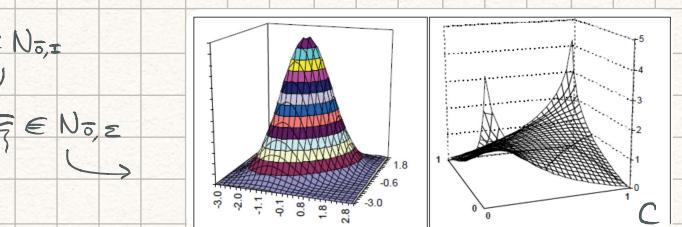
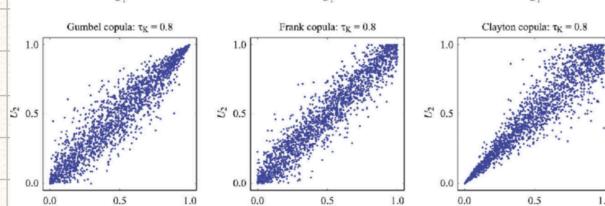
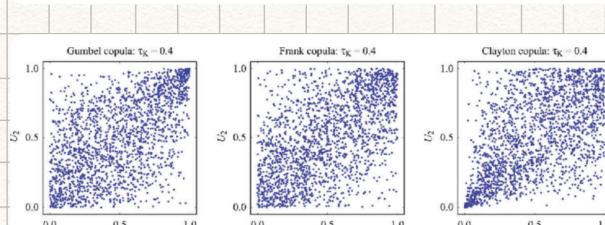
$$C(u_1, u_2) = \exp\left\{-\left((- \log u_1)^\beta + (- \log u_2)^\beta\right)^{1/\beta}\right\}.$$

Определение (Frank copula). Архимедова копула с генератором

$$\varphi(t) = \ln \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^\alpha - 1}, \varphi^{-1}(s) = \alpha^{-1} \ln[1 + e^s(e^\alpha - 1)], \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Копула (при $n = 2$):

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right\}.$$



* Опр. Коэф-ты экстремальной зависимости:

$$\lambda_u(\xi, \eta) = \lim_{d \rightarrow +0} P(\xi > q_\xi(d) \mid \eta > q_\eta(d))$$

upper

$$\lambda_l(\xi, \eta) = \lim_{d \rightarrow +0} P(\xi < q_\xi(d) \mid \eta < q_\eta(d))$$

lower

Следим о коэф-тах экстр. завис-ти:

Пусть F_ξ, F_η - кнр. Тогда $\lambda_u(\xi, \eta) = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{1 - 2d + C(d, d)}{d}$ $\lambda_l(\xi, \eta) = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{C(d, d)}{d}$

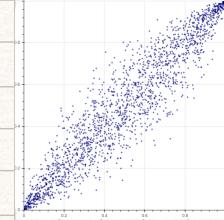
Д-во: $\lambda_l(\xi, \eta) = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{P(\xi < q_\xi(d), \eta < q_\eta(d))}{P(\eta < q_\eta(d))} = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{P(F_\xi(\xi) < F_\xi(q_\xi(d)), F_\eta(\eta) < F_\eta(q_\eta(d)))}{P(F_\eta(\eta) < F_\eta(q_\eta(d)))} =$

$= \lim_{d \rightarrow +0} \frac{C(d, d)}{d}$

Для upper и/з обратное следствие

Ex 1 Гауссовская конуса $\rho = 0.9$. Будет ли зависимость экстр. значением?

Не будет!



2 Gumball $\lambda_u > 0, \lambda_l = 0$

3 Clayton $\lambda_l > 0, \lambda_u = 0$

* Опр. коэф-т корреляции Спирмена

$$\rho_s(\xi, \eta) = 3 [P((q_1 - q_2)(\eta_1 - \eta_2) > 0) - P((q_1 - q_2)(\eta_1 - \eta_2) < 0)],$$
 где $(q_1, \eta_1), (q_2, \eta_2), (q_3, \eta_3)$ - нез. с.в. с расп. как $\rho(\xi, \eta)$

$$\text{Для кнр. } F_\xi, F_\eta: \rho_s(\xi, \eta) = 12 \iint (C(u, v) - uv) du dv = \rho(F_\xi(\xi), F_\eta(\eta))$$

D: $U_{0,1}$ E: $U_{0,1}$
UV независимы и н.н. частот

* Опр. коэф-т корреляции Кендалла

$$\rho_c(\xi, \eta) = P((\hat{\xi} - \hat{\eta})(\hat{\eta} - \hat{\xi}) > 0) - P((\hat{\xi} - \hat{\eta})(\hat{\eta} - \hat{\xi}) < 0),$$
 где $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ - независ. компонент вектора (ξ, η)

* вот это же Опр. для общ. случаев опр-я.