Опр Нормальное (гауссовское) распр-е :

Сл. в. $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, если:

$$f_\xi(t) = \varphi_{a,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Утв Если $a>0$, $\sigma=1$ $N_{0,1}$ – ст. норм. распр-е

$$F_\xi(x) = \Phi_{a,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{a,\sigma^2}(t)\,dt$$

Утв $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left|\frac{t-a}{\sigma}=u\right| = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = I$ $\quad I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}dv = \iint e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}du\,dv = \left|\begin{matrix}u=\rho\cos\varphi\\ v=\rho\sin\varphi\end{matrix}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\, d\varphi = \int_0^\infty 2\pi\rho e^{-\rho^2/2}d\rho = 2\pi\left(-e^{-\rho^2/2}\right)\Big|_0^\infty = 2\pi$$

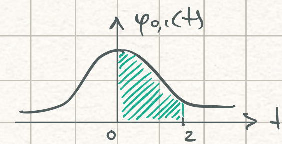
=> плотность

Утв $\xi\in N_{0,1}$ $\quad P(\xi>0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac12$

$P(\xi\in(0,2)) = \int_0^2 \varphi_{0,1}(t)dt > 0$ (почти $\frac12$)

$P(\xi\in(-2,0)) = P(\xi\in(0,2))>0$

$P(\xi\in(-\infty,-10^6))>0$ $\longrightarrow$ $\boxed{P(\xi\in B)>0 \quad \forall B: \ \lambda(B)>0}$



плотность (чётная)

Св-ва N_{a,σ^2}:

1. $\xi\in N_{a,\sigma^2} \Leftrightarrow \eta = \frac{\xi-a}{\sigma}\in N_{0,1}$

2. $\forall x$ $\quad \Phi_{0,1}(0)=\frac12 \quad \Phi_{0,1}(-x) = 1-\Phi_{0,1}(x)$

3. $\xi\in N_{a,\sigma^2} \Rightarrow P(|\xi-a|>3\sigma) < 0{,}0027$

Д-во: 1. => $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ $\quad \eta=\frac{\xi-a}{\sigma}$: $F_\eta(x) = P(\eta<x) = P\left(\frac{\xi-a}{\sigma}<x\right) = P(\xi<\sigma x + a) =$

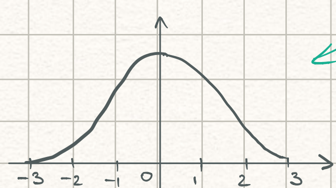
$$= \int_{-\infty}^{\sigma x+a}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt = \left|\frac{t-a}{\sigma}=u\right| = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi_{0,1}(x) \Rightarrow \eta\in N_{0,1}$$

2. $\Phi_{0,1}(0) = P(\eta<0)$, где $\eta\in N_{0,1}$ $= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac12$, т.к. $\varphi_{0,1}(t)$ – чётн.

$$\Phi_{0,1}(-x) = \int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1 - \int_{-x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = |t=-u| = 1-\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1-\Phi_{0,1}(x)$$

3. $P(|\xi-a|>3\sigma) = P\left(\left|\frac{\xi-a}{\sigma}\right|>3\right) = P(|\eta|>3) = P(\eta<-3)+P(\eta>3) \overset{2}{=}$

$= 1 - P(\eta<3) + P(\eta>3) = 1-P(\eta<3)+1-P(\eta\le 3) = 2P(\eta>3) < 0{,}0027$



когда лень что-то делать, исп-м самое простое (тупое) нормальное распред-е

Опр Гамма-распределение:

Сл. в. $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, если $f_\xi(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$, $\lambda > 0$

Утв Гамма-распр-е $\longrightarrow$ показат. распр-е: $\Gamma_{\alpha,1} = E_\alpha$

$$F_\xi(x) \overset{x>0}{=} \int_0^x \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt$$

Утв Если $\lambda = n \in \mathbb{N}$: $F_\xi(x) = \sum_{k=n}^\infty \frac{(\alpha x)^k}{k!} e^{-\alpha x} = P(\eta \geq n)$, где $\eta \in \Pi_{\alpha x}$

Опр Распределение Коши: хвосты толстые, в отл. от норм.

Сл. в. $\xi \in C_{a,\sigma^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, если:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-a)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2+(x-a)^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sigma} dx = \left| \frac{x-a}{\sigma} = u \right| = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2+(x-a)^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Опр Распределение Парето: теория экстрем. знач-й

Сл. в. $\xi \in P_\alpha$, $\alpha > 0$, если $p_\xi(t) = \begin{cases} \alpha t^{-\alpha-1}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$

Св-во: $\forall x, y \geq 1$ $P(\xi > xy \mid \xi > x) = P(\xi > y)$

<u>Д-во</u>: упр!

Опр Логнормальное распр-е: финансы всякие

Сл. в. $\xi \in LN_{a,\sigma^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, если $\xi = e^\eta$, где $\eta \in N_{a,\sigma^2}$

Утв $F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(e^\eta < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dots \end{cases}$

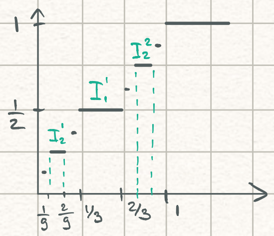
$$\overset{x>0}{=} P(\eta < \ln x) = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{array}{l} e^t = u \\ t = \ln u \\ dt = \frac{du}{u} \end{array} \right| = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln u - a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{u} du$$

$$f_\xi(u) = \begin{cases} \frac{1}{u\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln u-a)^2}{2\sigma^2}}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

Есть ещё много, но с нас хватит!

Сингулярные

1. Лестница Кантора



$I_1^1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ $\quad I_2^1 = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ $\quad I_2^2 = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$

$I_3^1 = \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right]$ $\quad I_3^2 = \left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right]$ ...

$I_n^k = \left[\frac{\ }{3^n}, \overset{?}{\ } \frac{\ }{3^n}\right]$ $\quad \mu(I_n^k) = 3^{-n}, \quad k = 1, \dots, 2^{n-1}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{1 - 2/3} = 1$$

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k \Rightarrow \mu(C) = 0$$

Утв $P(\xi \in I_1^1) = P(\xi \le \frac{2}{3}) - P(\xi < \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$P(\xi \in \cup\cup) = 0$

$P(\xi \in [0,1]) = 1 = P(\xi \in C) = 1$

$P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in C$

Упр Д-ть, что лестница Кантора непр-на. на экзамене не спросят

И хватит!

Опр Сл.в ξ явл-ся **смесью**, если $\exists \xi_1, \xi_2, p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$ и
$P(\xi \in B) = p_1 P(\xi_1 \in B) + p_2 P(\xi_2 \in B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Зам о двойной рандомизации:

$$\xi = \begin{cases} \xi_1, & \text{с вер. } p_1 \\ \xi_2, & \text{с вер. } p_2 \end{cases}$$

$$P(\xi \in B) \overset{\text{ФПВ}}{=} P(\xi \in B | H_1) \cdot P(H_1) + P(\xi \in B | H_2) \cdot P(H_2) = P(\xi_1 \in B) p_1 + P(\xi_2 \in B) p_2$$