Теорема неравенство Fréchet-Hoeffding

$\forall u,v \in [0,1]$ $\quad \max\{u+v-1, 0\} \le C(u,v) \le \min\{u,v\}$ $\quad \forall C$ - copula

Д-во: $C(u,v) = P(U_1<u, U_2<v) \le P(U_1<u) = u \quad u\in[0,1]$

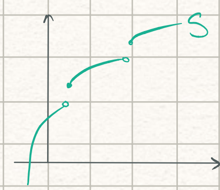
$C(u,v) \le P(U_2<v) = v \quad v\in[0,1]$ $\quad \Rightarrow C(u,v)\le \min(u,v)$

$C(u,v) = P(U_1<u, U_2<v) = 1 - P(\{U_1\ge u\}\cup\{U_2\ge v\}) \ge 1 - P(U_1\ge u) - P(U_2\ge v) =$

$= 1-(1-u)-(1-v) = u+v-1$

Упр Записать и д-ть это нер-во в случае $n>2$

Опр Мн-во $S\subseteq \mathbb{R}^2$ наз. **неубывающим**, если $\forall (x,y), (u,v)\in S$ вып-но $(x\le u) \Rightarrow (y\le v)$



Опр Мн-во $S \subseteq \mathbb{R}^2$ наз. **носителем** с.в. ξ, если $\xi\in S$ п.н., т.е. $P(\xi\in S)=1$

Теорема о правой границе в нер-ве F-H:

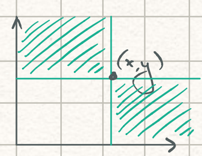
$F_{\xi,\eta}(x,y) = \min\{F_\xi(x), F_\eta(y)\} \Leftrightarrow \exists$ носитель (ξ,η) неубывающий

Д-во: Лемма:

S - неуб. $\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall (u,v)\in S$

вып-но: либо $(u\le x) \Rightarrow (v\le y)$

либо $(v\ge y) \Rightarrow (u\ge x)$



$F_\xi(x) = P(\xi<x) = P(\xi<x,\eta<y) + P(\xi<x, \eta\ge y) = F_{\xi,\eta}(x,y) + P(\xi<x,\eta\ge y)$

$F_\eta(y) = \dots = F_{\xi,\eta}(x,y) + P(\eta<y, \xi\ge x)$

$F_{\xi,\eta}(x,y) = \min\{F_\xi(x), F_\eta(y)\}$

$\Leftrightarrow$ либо $P(\xi<x, \eta\ge y)=0$ либо $P(\eta<y, \xi\ge x)=0$ $\Leftrightarrow$ либо $\{(u,v)|u<x, v\ge y\} \not\subset S$ либо $\{(u,v)|v<y, u\ge x\} \not\subset S$ $\Leftrightarrow$ неуб.

Следствие:

Если ξ,η имеют непрерывные ф-ии распр-я, тогда $\xi = f(\eta)$, f - строго возрастает

$\Leftrightarrow C_{\xi,\eta}(u,v)=\min\{u,v\}$

всё ради него

Perfect Dependance (comonotonic)

Упр Сформулир-ть и д-ть утв-е для левой границы нер-ва F-H

Теорема об инвариантности копулы при строго возр. преобр.

Пусть $C(u,v)$ для вектора (ξ,η) с непр. ф-ями распр-я, ф-ии $f(x), g(x)$ строго возр. Тогда $C_{f(\xi),g(\eta)}(u,v) = C_{\xi,\eta}(u,v)$

Д-во: $C_{f(\xi),g(\eta)}(F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y)) = P(f(\xi)<x, g(\eta)<y) = P(\xi<f^{-1}(x), \eta<g^{-1}(y)) =$

$= C_{\xi,\eta}(F_\xi(f^{-1}(x)), F_\eta(g^{-1}(y))) \overset{*}{=} C_{\xi,\eta}(F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y))$

$*: F_{f(\xi)}(x) = P(f(\xi)<x) = P(\xi<f^{-1}(x)) = F_\xi(f^{-1}(x))$

$\mathrm{Range}(F_{f(\xi)}(x)) = [0,1]$, $\mathrm{Range}(F_{f(\eta)}(y)) = [0,1]$, т.к. $F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y) \in C(\mathbb{R})$

$\Rightarrow C_{f,g}(u,v) = C_{\xi,\eta}(u,v) \quad \forall u,v\in[0,1]$

Упр Сформулир-ть и д-ть ту же теорему для $f\nearrow, g\searrow$ и $f\searrow, g\searrow$

Опр коэф-т корреляции Спирмена — Spearman's rho

$$\rho_S(\xi,\eta) = \rho(F_\xi(\xi), F_\eta(\eta)) = \rho(\text{Copula})$$

Опр коэф-т корреляции Кендалла — Kendall's tau

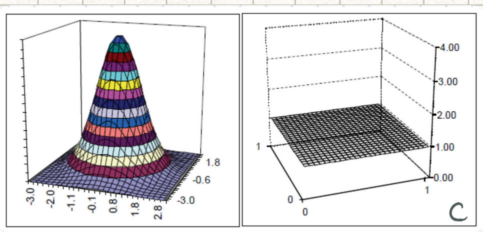
$$\rho_\tau(\xi,\eta) = 2P((\xi-\hat\xi)(\eta-\hat\eta)>0) - 1,$$ где $(\hat\xi,\hat\eta)$ - независ. копия вектора (ξ,η)

Св-ва: Пусть F_ξ, F_η непр-ны и строго возрастают

1. ρ_S зависит только от копулы (ξ,η) — т.к. $C_{F_\xi(\xi),F_\eta(\eta)} = C_{\xi,\eta}$
2. ρ_S не меняется при возраст. преобр-ях
3. $\rho_S = 1 \Rightarrow F_\xi(\xi) = F_\eta(\eta) \Rightarrow C_{\xi,\eta}(u,v) = \min\{u,v\} \Leftrightarrow \xi = T(\eta),\ T \nearrow$

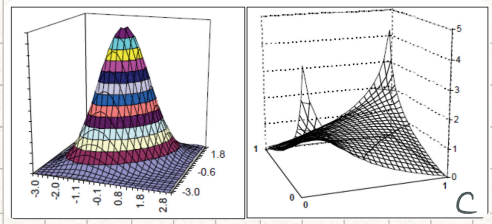
Утв Эти св-ва верны и для ρ_τ

Ex **Опр** Копула с.в. $\bar\xi \in N_{\bar a,\Sigma}$ наз. гауссовской



$\bar\xi \in N_{\bar 0,I}$

$\bar\xi \in N_{\bar 0,\Sigma}$



Определение (Архимедовой копулы). *Архимедовой копулой называется*

$$C(u_1,\cdots,u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\cdots+\varphi(u_n)),$$

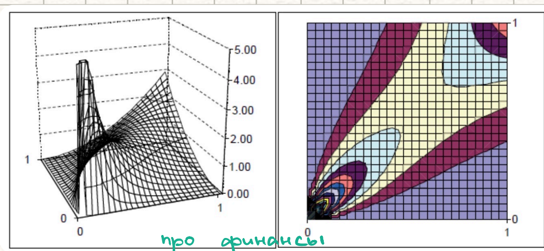
где $\varphi:(0,1]\to[0,\infty)$ *непрерывная, строго убывающая, выпуклая функция такая, что* $\varphi(1)=0$, $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=\infty$.

Определение (Clayton copula). *Архимедова копула с генератором*

$$\varphi(t) = t^{-\beta}-1, \varphi^{-1}(s) = (1+s)^{-1/\beta}, \beta>0.$$

Копула (при $n=2$):

$$C(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\beta}+u_2^{-\beta}-1\right)^{-1/\beta}.$$



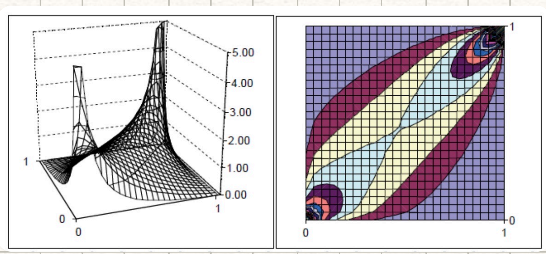
про финансы

Определение (Gumbel copula). *Архимедова копула с генератором*

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\beta, \varphi^{-1}(s) = \exp\left(-s^{1/\beta}\right), \beta\ge 1.$$

Копула (при $n=2$):

$$C(u_1,u_2) = \exp\left\{-\left((-\log u_1)^\beta + (-\log u_2)^\beta\right)^{1/\beta}\right\}.$$

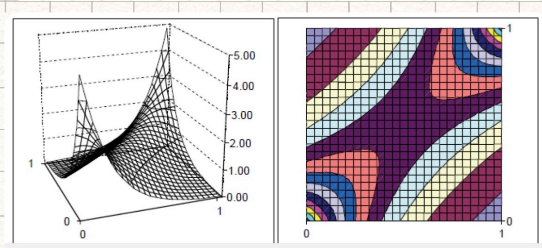


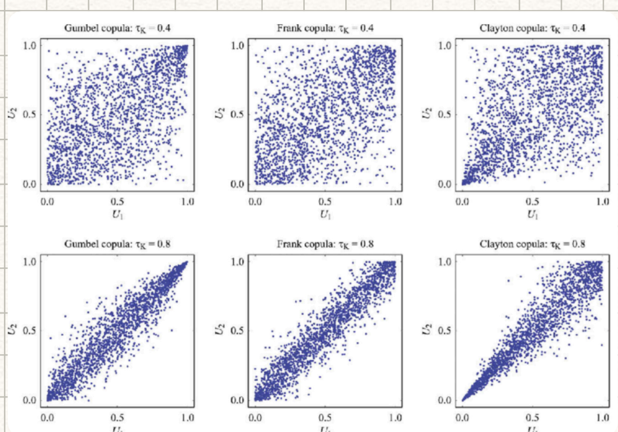
Определение (Frank copula). *Архимедова копула с генератором*

$$\varphi(t) = \ln\frac{e^{\alpha t}-1}{e^\alpha-1}, \varphi^{-1}(s) = \alpha^{-1}\ln\left[1+e^s(e^\alpha-1)\right], \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Копула (при $n=2$):

$$C(u_1,u_2) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left\{1+\frac{(e^{-\alpha u_1}-1)(e^{-\alpha u_2}-1)}{e^{-\alpha}-1}\right\}.$$





Опр Коэф-ты экстремальной зависимости:

$$\lambda_u(\xi,\eta) = \lim_{\alpha\to 1-0} P(\xi \geq q_\xi(\alpha) \mid \eta \geq q_\eta(\alpha))$$ upper

$$\lambda_l(\xi,\eta) = \lim_{\alpha\to +0} P(\xi < q_\xi(\alpha) \mid \eta < q_\eta(\alpha))$$ lower

Лемма о коэф-тах экстр. завис-ти:

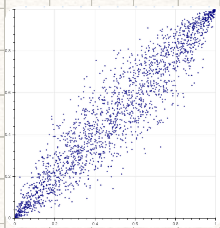
Пусть F_ξ, F_η – непр. Тогда $\lambda_u(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to 1-0} \dfrac{1-2\alpha+C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$ $\quad \lambda_l(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to +0} \dfrac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$

Д-во: $\lambda_l(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to +0} \dfrac{P(\xi < q_\xi(\alpha),\ \eta < q_\eta(\alpha))}{P(\eta < q_\eta(\alpha))} = \lim\limits_{\alpha\to +0} \dfrac{P(F_\xi(\xi) < F_\xi(q_\xi(\alpha)),\ F_\eta(\eta) < F_\eta(q_\eta(\alpha)))}{P(F_\eta(\eta) < F_\eta(q_\eta(\alpha)))} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to +0} \dfrac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$ $\qquad$ Для upper ч/з обратное событие

Ex 1 Гауссовская копула $\rho = 0{,}9$. Будет ли завис-ть в экстр. значениях?

$\lambda_u = \lambda_l = 0$ $\qquad$ Не будет!



2. Gumball $\lambda_u > 0,\ \lambda_l > 0$
3. Clayton $\lambda_l > 0,\ \lambda_u = 0$