4. Сходимость с.в. и их распределений. Предельные теоремы.

4.1. Сходимость

Опр Сходимость почти наверное:

$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} \xi$, если $P(\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}) = 1$

Опр Сходимость по вероятности:

$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Опр Сходимость по распределению / слабая сходимость:

$\xi_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \xi$, если $\forall x_0$ – точки непр-ти $F_\xi(x)$ вып-но: $F_{\xi_n}(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x_0)$

просто сх-ть по распр-ю, нам неважно, как связ. ξ_n и ξ

Зам Если $F_\xi(x)$ – непр., тогда $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ т.е. равномерная сход-ть

Опр Сходимость в среднеквадратич. смысле:

$\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, если $E\xi_n^2 < \infty$, $E\xi^2 < \infty$ и $E|\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Теорема Закон Больших Чисел Чебышёва:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – попарно независ. и од. распр, $E\xi_1^2 < \infty$. Тогда $\frac{S_n}{n} = \frac{\sum \xi_k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} E\xi_1$

отсюда и назвали средним

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\frac{S_n}{n} - E\xi_1| \geq \varepsilon) = P(|\frac{S_n}{n} - E(\frac{S_n}{n})| \geq \varepsilon) \overset{\text{нер-во Чебышёва}}{\leq} \frac{D\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$S_n \simeq nE\xi_1$

Теорема Бореля – Кантелли:

Пусть $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$. $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Тогда

1. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, то $P(A) = 0$
2. Если $\{A_n\}$ независ. в совок. и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_k) = \infty \Rightarrow P(A) = 1$

хотя бы одно от n до ∞

сходится $\to$ беск. часто с $P = 0$

расход. $\to$ беск. часто

Д-во:

1. $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$

2. $\overline{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$, $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$ – возр. посл-ть $\Rightarrow$ можно показать, что

$P(\overline{A}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} P(\bigcap\limits_{k=n}^{N} \overline{A_k}) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} P(\overline{A_n}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_N}) \leq$

$\leq \left| 1 - x \leq e^{-x} \right| \leq \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} e^{-\sum\limits_{k=n} P(A_k)} = 0 \quad \Rightarrow P(A) = 1$

Лемма критерий сходимости п.н.:

$\xi_n \xrightarrow{\text{пн}} \xi \quad \Leftrightarrow \quad \sup\limits_{k\geq n} |\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

Д-во: $A = \{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n\geq N} \{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \frac{1}{m}\}$

$\overline{A} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geq N} \{|\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}\}$. $P(\overline{A}) = 0 \Leftrightarrow \forall m \geq 1 \quad P(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geq N}\{|\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}\}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall m \geq 1 \quad \lim\limits_{N\to\infty} P(\bigcup\limits_{n\geq N}\{|\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}\}) = 0 \Leftrightarrow \forall m \geq 1 \quad \lim\limits_{N\to\infty} P(\sup\limits_{n\geq N} |\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sup\limits_{n\geq N} |\xi_n - \xi| \xrightarrow[N\to\infty]{P} 0$

Теорема $\xrightarrow{п.н.}$ vs $\xrightarrow{P}$

1. $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \exists\, n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty :\ \xi_{n_k} \xrightarrow{п.н.} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$

Д-во: 1) $\forall \varepsilon>0\ \ P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon) \le P(\sup_{k\ge n}|\xi_k-\xi|\ge\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

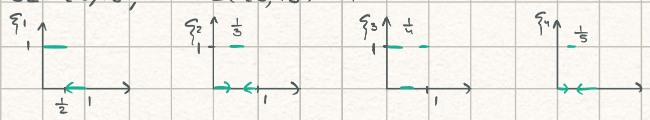
2) Д-м сначала: $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon)<\infty\ \ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{пн} \xi$:

$\forall\varepsilon>0\ \ P(\sup_{n\ge N}|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon) = P(\bigcup_{n\ge N}\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\}) \le \sum_{n\ge N} P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. $\forall k\ge1\ \ \exists n_k\ \ P(|\xi_{n_k}-\xi|\ge\frac{1}{k}) \le \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \forall k_0: \frac{1}{k_0}<\varepsilon\ \ \sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k}-\xi|\ge\varepsilon) \le \sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k}-\xi|\ge\frac{1}{k}) \le \sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[k_0\to\infty]{} 0$

3) $\Omega=[0,1],\ \ \mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])\ \ P=\lambda$



т.е. ступенька постоянно бегает и уменьшается

$P(\xi_n\ge\frac{1}{2}) = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad\forall\varepsilon<1\ \ P(\xi_n\ge\varepsilon)=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

$\{\omega: \sup_{n\ge N}\xi_n(\omega)>\frac{1}{2}\} = [0,1]$ когда-нибудь найдётся любое знач-е с.в. из $[0,1]$

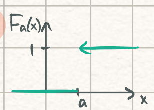
Теорема $\xrightarrow{P}$ vs $\Rightarrow$

1. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$
2. $\xi_n \Rightarrow a \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} a$
3. $\xi_n \Rightarrow \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$

Д-во: 1) $F_{\xi_n}(x) = P(\xi_n<x) \overset{\forall\varepsilon>0}{=} \underbrace{P(\xi_n<x,\ |\xi_n-\xi|<\varepsilon)}_{\le P(\xi<x+\varepsilon)} + \underbrace{P(\xi_n<x,\ |\xi_n-\xi|\ge\varepsilon)}_{\le P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \le P(\xi<x+\varepsilon)$

$F_{\xi_n}(x) = P(\xi_n<x) \ge P(\xi_n<x,\ |\xi_n-\xi|<\varepsilon) \ge P(\xi<x-\varepsilon,\ |\xi_n-\xi|<\varepsilon) = P(\xi<x-\varepsilon) - P(\xi<x-\varepsilon,\ |\xi_n-\xi|\ge\varepsilon) \le P(\xi<x-\varepsilon) - \underbrace{P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon)}_{\to 0} \le P(\xi<x-\varepsilon)$

$\Rightarrow F_\xi(x-\varepsilon) \le \varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \le \varlimsup_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \le F_\xi(x+\varepsilon) \Rightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$

2) 

$\forall x<a\ \ F_{\xi_n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\forall x>a\ \ F_{\xi_n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
$\Rightarrow$ $P(\xi_n<a-\varepsilon)$, $P(\xi_n\ge a+\varepsilon)$ $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$

3) $\xi_n = \begin{cases}\xi, & n=2k\\ \xi, & n=2k+1\end{cases}$ $\quad \xi\in N_{0,1} \Rightarrow \xi_n(\omega)=\{-\xi(\omega), \xi(\omega), -\xi(\omega), \dots\}$ сход. только если $\xi(\omega)=0$

это д-ли расх-ть п.н.

$\forall\varepsilon>0\ \ P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon) = \begin{cases}P(0\ge\varepsilon), & n=2k\\ P(|2\xi|\ge\varepsilon), & n=2k+1\end{cases} = \begin{cases}0, & n=2k\\ 2\Phi(\frac{\varepsilon}{2})>0 & n=2k+1\end{cases} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$

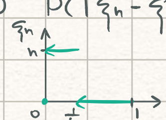
$\xi_n \Rightarrow \xi \quad \Leftarrow \quad F_{\xi_n}(x)\longrightarrow F_\xi(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R} \quad \Leftarrow \quad F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Теорема $\xrightarrow{L_2}$ vs $\xrightarrow{пн}$ + $\xrightarrow{P}$

1. $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{пн} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$

нер-во Маркова (почти)

Д-во: 1) $\forall\varepsilon>0\ \ P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon) \le \frac{E|\xi_n-\xi|^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) Пусть 

$\Omega=[0,1]\ \ \ \mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])\ \ \ P=\lambda$

$\forall\omega\ \ \xi_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{пн} 0$

$E\xi_n^2 = n^2\cdot\frac{1}{n} + 0\cdot\frac{n-1}{n} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow$ нет $\xrightarrow{L_2}$