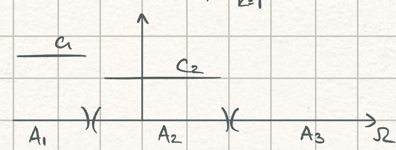
3. Числовые характеристики распределения

3.1. Математическое ожидание

$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$ — мат. ожидание

Опр Простая сл. в. $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$, где $N\in\mathbb{N}$, $c_k\in\mathbb{R}$, $\bigcup_{k=1}^{N} A_k = \Omega$, $A_i\cap A_j=\varnothing\ \forall i\ne j$,

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$ — индикатор



простые
⇕
ступенчатые

Опр Мат. ожидание для простых с.в.: $E\xi = \sum_{k=1}^{N} c_k P(A_k)$

Св-ва:
1. $Ec = c$
2. $E\alpha\xi = \alpha E\xi \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$ — однородность
3. $\xi\le\eta \Rightarrow E\xi\le E\eta$
4. $|E\xi|\le E|\xi|$ — нер-во Δ-ка   можно из (3) д-ть
5. $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$ — аддитивность

Д-во: $\xi = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{A_k}$ $\eta = \sum_{n=1}^{M} d_k \mathbb{1}_{B_n}$ $\xi+\eta = \sum_{k,n}(c_k+d_n)\mathbb{1}_{A_k\cap B_n}$

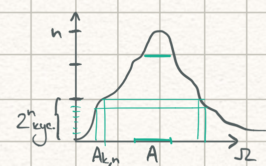
$E(\xi+\eta) = \sum_{k,n}(c_k+d_n)P(A_k\cap B_n) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{M} c_k P(A_k\cap B_n) + \sum\sum d_n P(A_k\cap B_n) =$

$= \sum_k c_k \sum_n P(A_k\cap B_n) + \ldots \overset{\cap B_n=\Omega}{=\!=} \sum_n c_k P(A_k) + \sum_n d_n P(B_n) = E\xi + E\eta$

Опр $E(\xi; B) = \int_B \xi(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)P(d\omega)$

Лемма о приближении с.в. простыми с.в.:
$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ посл-ть простых ξ_n: $\forall\omega\in\Omega$ $\xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\nearrow} \xi(\omega)$ (сходится, возрастая)

Д-во: $\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \underbrace{\xi(\omega)\ge n}_{A} \\ \frac{k}{2^n}, & \underbrace{\xi(\omega)\in\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}_{A_{k,n}}, \quad k=0,\dots,n2^n-1 \end{cases}$



всего $n\cdot 2^n$ кус.

$\xi_n(\omega) \ge \xi_{n,1}(\omega) \ge \xi_{n,2}(\omega) \ge \ldots \quad \forall\omega\ \forall n$

Разбивается не по обл-ти опр-я, а по обл-ти знач-й — ключевое место

$\forall\omega\in\Omega \quad |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \le \frac{1}{2^n}$

Осталось понять, явл. ли $\xi_n(\omega)$ сл. в.:

$\xi_n(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{\{A_{k,n}\}}$ — простая с.в., т.к. $A_{k,n}$ измеримы (т.к. ξ — с.в.)

Лемма о единственности предела
Пусть $\xi>0$, $\xi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \xi$ $\eta_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} \xi$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} E\xi_n = \lim_{k\to\infty} E\eta_k$

Д-во: $\forall n\ge 1$ $E\xi_n \le \lim_{k\to\infty} E\eta_k$ ← для начала это покажем   ← если $\xi_n-\eta_k\le\varepsilon$ $\mathbb{1}=1$, иначе 0

$\xi_n-\eta_k = (\xi_n-\eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n-\eta_k<\varepsilon\} + (\xi_n-\eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\} < \varepsilon + (\xi_n-\eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\}$

$E(\xi_n-\eta_k) \le E\varepsilon + E((\xi_n-\eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\}) \le \varepsilon + E(\xi_n\mathbb{1}\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\}) \le$

$\le \varepsilon + c_n E\mathbb{1}\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\} = \varepsilon + c_n P(\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon)$

$\Rightarrow E\xi_n \le \varepsilon + c_n P(\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon) + E\eta_k$

вот с этой частью осторожно. где лажа

$\begin{cases} B_k = \{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\} \qquad B_k\supset B_{k+1}\supset B_{k+2}\supset\ldots \\ \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing, \text{ т.к. } \forall\omega\in\Omega\ \exists K:\ \forall k\ge K \quad \eta_k(\omega)-\xi > -\frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow B_k\subset\{\xi_n-\xi>\frac{\varepsilon}{2}\} = \varnothing \qquad \forall k\ge K \end{cases}$

$\lim\limits_{k\to\infty} P(B_k)=0 \quad E\xi_n \le \varepsilon + c_n \underbrace{P(\xi_n-\eta_k \ge \varepsilon)}_{\downarrow k\to\infty,\ 0} + E\eta_k \to \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$

$\Rightarrow E\xi_n \le \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$, аналогично получим $E\eta_k \le \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$

$\downarrow n\to\infty \qquad\qquad \downarrow k\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \le \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k \qquad \lim E\eta_k \le \lim E\xi_n \qquad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$

Опр Мат. ожидание: Если $\xi \ge 0$ $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$, где $\xi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \xi$ – простые с.в.

$\xi = \xi^+ - \xi^-$, $\xi^+ = \max\{0, \xi\}$, $\xi^- = \max\{0, -\xi\}$

$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, если $E|\xi| = E\xi^+ + E\xi^- < \infty$

Св-ва

1. $E\alpha\xi = \alpha E\xi \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\xi \le \eta \Rightarrow E\xi \le E\eta$
3. $|E\xi| \le E|\xi|$
4. $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$, $E(|\xi|+|\eta|) < \infty$
5. $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \quad A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i\ne j \quad E|\xi|<\infty \ : \ E(\xi; A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} E(\xi; A_k)$ — счёт. аддит. интегралов

Д-во: $A \cap B = \varnothing \quad E(\xi; A\cup B) = E\xi \mathbb{1}_{A\cup B} = E\xi(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) = E(\xi;A) + E(\xi;B)$

Пусть $\xi \ge 0$. Д-м, что если A_n: $P(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $E(\xi, A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$B_m = \{\xi \ge m\} \quad P(\overline{B_m}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad P(B_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \ \forall m \ge M \quad P(B_m) < \varepsilon$

$E(\xi; A_n) = E(\xi; A_n \cap B_m) + E(\xi; A_n \cap \overline{B_m}) \le$

$\xi_m \underset{m\to\infty}{\nearrow} \xi \qquad \xi \ge \xi \mathbb{1}_{\overline{B_m}} \ge \xi_m \mathbb{1}_{\overline{B_m}} \qquad (\xi_m \underset{m\to\infty}{\nearrow} \xi)$

$\Rightarrow E\xi \ge E\xi \mathbb{1}_{\overline{B_m}} \ge E\xi_m \mathbb{1}_{\overline{B_m}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} E\xi \quad \Rightarrow E\xi \mathbb{1}_{B_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\le E(\xi; B_m) + \underbrace{m \cdot P(A_n)}_{\downarrow n\to\infty,\ 0} \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E(\xi; A_n) \le \underbrace{E(\xi; B_m)}_{m\to\infty \to 0} \quad \forall m$

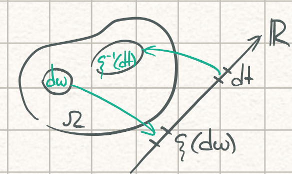
$\Rightarrow E(\xi, A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \xi = \xi^+ - \xi^-$

$E(\xi; A) - E(\xi; \bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k) = E(\xi; \bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty} A_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$P(\bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty} A_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ т.к. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(A) < \infty$

$\Rightarrow E(\xi; A) - \sum\limits_{k=1}^{N} E(\xi; A_k) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Зам МО по распр-ю



$\xi \mapsto P_\xi(B) = P(\xi \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} g(t) P_\xi(dt)$

$E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = [\xi(\omega) = t] = \int\limits_{\mathbb{R}} t P(\xi^{-1}(dt)) = \int\limits_{\mathbb{R}} t P_\xi(dt)$

это не д-во и нормального не будет

$E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} t P_\xi(dt)$

Зам МО для дискр.

Если ξ – дискр., т.е. $\sum\limits_k P(\xi = a_k) = 1$, то $E\xi = \sum\limits_k a_k P(\xi = a_k)$, если $\sum\limits_k |a_k| P(\xi = a_k) < \infty$