Св-ва: 6. $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

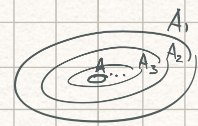
Д-во: $B_1 = A_1 \quad B_2 = A_2 \setminus A_1 \quad B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \quad \dots \qquad B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum \mathbb{P}(A_i)$$

7. Св-во непрер-ти вероятностной меры:

$\forall A, A_2, \dots \in \mathcal{F}, \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

Д-во: $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \quad B_k = A_k \setminus A_{k+1} \quad A \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) = A_1 \quad B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i,j$



$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) < \infty$$

$$A_n = A \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) \qquad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) + \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(A)$$

8. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum\limits_{i<j} \mathbb{P}(A_i A_j) + \sum\limits_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \dots A_n)$

Д-во: Индукция по n:

$n=2$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) +$

$n-1 \mapsto n$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup\limits^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits^{n-1} A_i\right) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}\Big(\underbrace{\left(\bigcup\limits^{n-1} A_i\right) \cap A_n}_{=\bigcup\limits^{n-1}(A_i \cap A_n)}\Big) =$

$= \sum\limits^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - \sum\limits^{n-1} \mathbb{P}(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-2} \mathbb{P}(A_1 \dots A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n) -$

$- \left[\sum\limits^{n-1} \mathbb{P}(A_i A_n) + \dots + (-1)^{n-2} \mathbb{P}(A_1 \dots A_n)\right] = \sum\limits^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum \mathbb{P}(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} \dots$

Опр Тройка $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ наз. **вероятностным пр-вом**

1.5. Условная вероятность, независимость

Ex Бросаем 2 кубика. $A = \{\Sigma = 8\} \quad B = \{\text{I чёт}\}$

I\II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{18}{36}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36}$

$\mathbb{P}(A, \text{если } B \text{ произошло}) = \frac{3}{18} = \frac{3/36}{18/36} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Опр **Условной вероятностью** соб. A при условии, что B произошло, наз. число

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \mathbb{P}(B) > 0$$

Св-ва: 1. $\forall A, B \quad \mathbb{P}(A) > 0, \ \mathbb{P}(B) > 0 \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$

2. $\mathbb{P}(A_1 \dots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_1|A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \dots A_{n-1}), \quad \mathbb{P}(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$

Опр Соб. A и B наз. **независимыми** ($A \perp B$), если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

3. Пусть $A \perp B \quad \mathbb{P}(B) > 0 \quad \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$

Ex Достаём 1 карту из колоды 52 карты

$A = \{\spadesuit\} \quad B = \{9\} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{13} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$

Св-ва: Пусть $A \perp\!\!\!\perp B$

1. $\mathbb{P}(B) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
2. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(B) = 0$

Д-во: $\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = 0$

3. $A \perp\!\!\!\perp \overline{B},\ \overline{A} \perp\!\!\!\perp B,\ \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$:

Д-во: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$
$\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(\overline{B})$

Опр Соб. $A_1, \dots, A_n$ попарно независимы, если $\forall i,j \quad A_i \perp\!\!\!\perp A_j$

Опр Соб. $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности, если $\forall k \geq 1,\ k \leq n$
$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \qquad \mathbb{P}(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$

Ex Пример Бернштейна

$A = \{кр\}$ $\qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$

$B = \{бел\}$ $\qquad \mathbb{P}(AB) = \frac{1}{4}\ \ \mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(AC)$ $\qquad$ попарно независ.

$C = \{ч\}$ $\qquad \mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ нет незав. в совокупн-ти

1.6. Схема Бернулли

Ex
1. Монету подбрас. 10 раз — Успех = Орёл — Неудача = Решка
2. Проверка iPhone 1000 раз — Успех = Нераб. — Неудача = Раб.
3. Страхование 15000 чел. — Успех = Смерть — Неудача = Выжил

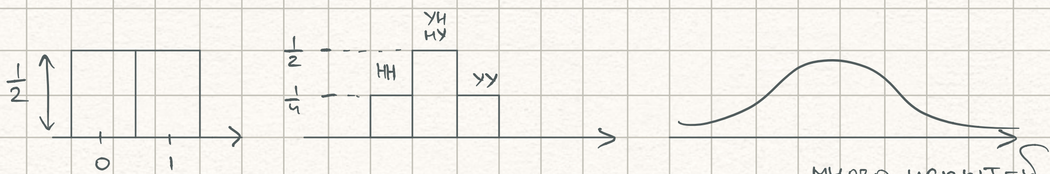
Опр Схема Бернулли — послед-ть независ. в совокупн-ти испытаний, в ктр возможны только 2 исхода: "успех" и "неудача", при этом вероятн-ть "успеха" равна $p \in [0,1]$, вер-ть "неудачи": $q = 1-p$.

Теорема (Формула Бернулли):
Пусть S_n – число успехов в $n > 1$ испытаний схемы Бернулли. Тогда

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n}$$

Д-во: Пусть $k = 0 \qquad \{S_n = 0\} = \{НН\ldots Н\} \qquad \mathbb{P}(S_n = 0) = q^n$
$k = 1 \qquad \{S_n = 1\} = \{\underbrace{УН\ldots Н}_{pq^{n-1}}, \dots, \underbrace{Н\ldots НУ}_{pq^{n-1}}\} \qquad \mathbb{P}(S_n = 1) = C_n^1 p q^{n-1}$

$$\{S_n = k\} = \{\overbrace{\underbrace{У\ldots У}_{k}\underbrace{Н\ldots Н}_{n-k}}^{p^k q^{n-k}}, \dots\} \qquad \mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$



много испыт-й
(при равновер. У, Н)