Теорема Пуассона:

Пусть в схеме Бернулли $p = p(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad p(n)\cdot n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in (0,\infty)$. Тогда

$\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $\quad k = 0, 1, \ldots$

Д-во: Обозн. $\lambda_n = p(n)n$. $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot\frac{1}{k!}p^k(1-p)^{n-k} =$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{k!}(p\cdot n)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1}\cdot\frac{1}{k!}\underbrace{\lambda_n^k}_{\to\lambda^k}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{*\to e^{-\lambda}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^k}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$*$:

$$\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{\lambda_n}{n}+o\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)\right)} = e^{-\lambda_n + o(\lambda_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}$$

Пуассон прибл. к биномиальному при малых вероятностях прям здорово!
Но надо бы погрешность оценить

Теорема об оценке погрешности в т. Пуассона

$$\sup_{A\subseteq\mathbb{Z}^+}\left|\mathbb{P}(S_n\in A) - \Pi_{np}(A)\right| \leq \min\{p, np^2\}, \qquad \Pi_\lambda(A) = \sum_{k\in A}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Д-во: когда-нибудь потом, а пока нас не волнует.

Теорема Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n\to\infty \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in\mathbb{R}$$

$p = \frac{1}{2}$ $\quad n\to\infty$ $\quad$ всё $\to 0$. кто главнее?

Можно пользоваться, когда n большое!
При малых p грустно выглядит — погрешность большая.

Теорема о первом успешном испытании

Пусть τ — номер 1го успешного испыт-я.

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau = k) = pq^{k-1} \quad k = 1, 2, \ldots}$$ ← геометрич.

Д-во: $\{\tau = k\} = \{\underbrace{НН\ldots Н}_{k-1}У\}$

Теорема о полиномиальной схеме

Пусть происх. посл-ть независимых в совок-ти испытаний, в кажд. из ктр возможно m исходов с вер. $p_1, \ldots, p_m$, $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.
Пусть $P_n(n_1, \ldots, n_m)$ — вероятн-ть того, что в n испытании kй исход произошёл n_k раз
Тогда

$$\boxed{P_n(n_1,\ldots,n_m) = \frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}}$$

Д-во: $n_1 + \ldots + n_m = n$ $\qquad (\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{m,\ldots,m}_{n_m})$ $\quad p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}$

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\cdot\ldots = \frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}$$

1.7. Формула полной вероятности

Ex Завод произв. детали:

	всего	брак
I	25%	5%
II	35%	3%
III	40%	4%

$A = \{\text{деталь — брак}\}$

$\mathbb{P}(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}04$

$$\mathbb{P}(I(A)) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{\mathbb{P}(A)}$$

Опр Счётный или конечный набор $H_1, H_2, \ldots \in F$ наз. полной группой событий, если:

$\mathbb{P}(H_i) > 0$

$H_i \cap H_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

$\bigcup_i H_i = \Omega$

H_i — гипотезы

Теорема ф-ла полной вероятности

Пусть $H_1, H_2, \ldots$ — ПГС. Тогда $\forall A \in F$ $\quad \mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$

Д-во: $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup H_i) = \bigcup (A \cap H_i)$

$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \varnothing \quad \forall i \neq j$ $\quad \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$

Ex Задача о разорении

I и II играют в игру, пока деньги не проиграют

I	II	
$a_₽$	$b_₽$	
p	q	вер. выигр. в исп.

p_n — вероятн. выигр. I игр., если у него сейчас n рублей

$p_a = ?$

$p_0 = 0 \qquad p_{a+b} = 1$

$H_1 = \{\text{I выигр. в очер. исп.}\}$ $\quad H_2 = \{\text{II выигр. в очер. исп.}\}$

$\mathbb{P}(H_1) = p \qquad \mathbb{P}(H_2) = q \qquad H_1, H_2$ — правда ПГС, ура!

$p_n = p_{n+1}\mathbb{P}(H_1) + p_{n-1}\mathbb{P}(H_2) = p_{n+1}p + p_{n-1}q \qquad 1 \cdot (p+q)$

$q(p_n - p_{n-1}) = (p_{n+1} - p_n)p$

$(p_{n+1} - p_n) = \frac{q}{p}(p_n - p_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^n (p_1 - p_0)$

Пусть $q = p = \frac{1}{2} \Rightarrow p_{n+1} - p_n = p_1 \Rightarrow p_n = np_1$

$p_{a+b} = (a+b)p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{a+b}$ $\qquad \Rightarrow p_a = \frac{a}{a+b}$

$$p_{a+b} - p_n = \sum_{k=n}^{a+b-1}(p_{k+1} - p_k) = \sum_{k=n}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k \cdot (p_1) = p_1 \frac{(q/p)^n - (q/p)^{a+b}}{1 - q/p}$$

$$1 - 0 = p_1 \frac{1 - (q/p)^{a+b}}{1 - q/p} \rightsquigarrow p_1 \qquad 1 - p_n = \frac{(q/p) - (q/p)^{a+b}}{1 - (q/p)^{a+b}}$$

$$\Rightarrow p_a = 1 - \frac{(q/p)^a - (q/p)^{a+b}}{1 - (q/p)^{a+b}} \xrightarrow[b \to \infty]{}$$

$$p > q \quad \xrightarrow[b \to \infty]{} \quad 1 - (q/p)^a$$