наш мир устроен по Байесу!

Теорема ф-ла Байеса:

Пусть $A: P(A) > 0$, $H_1, H_2, \ldots$ – ПГС. Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}$$

Д-во: $P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}$

Ex Монета:

I	1	1/2	Орёл
II	0,0001	1/2	Решка

$A = \{$пуля попала в мишень$\}$

$$P(O_p|A) = \frac{P(A|O_p)P(O_p)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 1/2}{1 \cdot 1/2 + 0.0001 \cdot 1/2} \approx 0,9999$$

Всё хорошее закончилось

2. Случайные величины и их распределения

надо бы так научиться → ξ

2.1. Случайные величины

$\langle \Omega, F, P \rangle$ – фиксир. пр-во

Опр Ф-я $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ наз. случайной величиной, если $\forall B \in B(\mathbb{R})$ $\xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in F$ (т.е. измеримая ф-я)

Ex 1 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $F = 2^\Omega$ $\xi(\omega) = \omega$ – сл. в., т.к. $\xi^{-1}(\omega) \subseteq \Omega \Rightarrow \xi^{-1}(\omega) \in F$

2 $\Omega = \{1,..,6\}$ $F = \{\emptyset, \Omega\}$ $\xi(\omega) = \omega$ ← неизмеримо (надо показать)
$B = \{2\}$ $\xi^{-1}(\{2\}) = \{\omega: \xi(\omega) = 2\} = \{2\} \notin F$ $\Rightarrow$ не случ. величина

3 $\Omega = [0,1]$ $F = B([0,1])$ $P = \lambda$ $\xi(\omega) = \begin{cases} \ln \omega, & \omega \neq 0 \\ 500, & \omega = 0 \end{cases}$ ← была с ∞ проблема – случ. в.

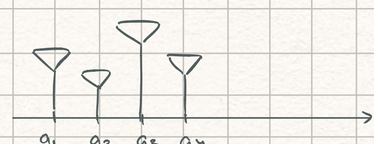
2.2. Распределение случайных величин

Опр Вер. мера $P_\xi(B) = P(\{\omega: \xi(\omega) \in B\})$ для $B \in B(\mathbb{R})$ наз. распред-ем случ. в. ξ

В дальнейшем забываем об ω: $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$

Опр Сл. в. ξ имеет дискретное распред-е, если $\exists$ кон. или счёт. набор $\{a_1, a_2, \ldots\}$: $\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = a_k) = 1$

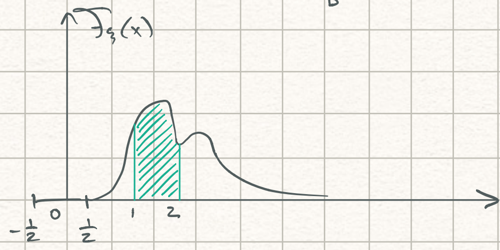
Ex $\Omega = [0,1]$ $F = B([0,1])$ $\xi(\omega) = \begin{cases} \sqrt{1/2}, & \omega < 1/2 \\ -1/2, & \omega \geq 1/2 \end{cases}$



$p_k = P(\xi = a_k)$

ξ	a_1	a_2	...	a_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

Опр Сл.в. ξ имеет **абсолютно непрерывное распр-е**, если $\exists f_\xi(x) \geq 0$:
$P(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)\,dx$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, где $f_\xi(x)$ — **плотность**



$$P(1 \leq \xi \leq 2) = \int_1^2 f_\xi(x)\,dx$$

$$P(-\infty < \xi < \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$$ св-во плотности

$$P(\xi \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) = \int_{-1/2}^{1/2} f_\xi(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} 0\,dx = 0$$

$$P(\xi = 3) = P(\xi \in \{3\}) = \int_{\{3\}} f_\xi(x)\,dx = 0$$

Теорема о плотности
Пусть $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, тогда найдётся $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ и сл.в. ξ: $f_\xi(x) = f(x)$

Д-во: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P(B) = \int_B f(x)\,dx$ $\quad \xi(\omega) = \omega$
$P_\xi(B) = P(B) = \int_B f(x)\,dx$

Опр Сл.в. ξ имеет **сингулярное распред-е**, если $\exists C \subseteq \mathbb{R}$ $\lambda(C) = 0$, $P(\xi \in C) = 1$ и
$\forall x \in C$ $P(\xi = x) = 0$

$P(\xi \in C) = \sum_{x \in C} P(\xi = x) = 0$ счётн. не м/б ?

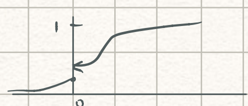
2.3. Функция распределения

Опр $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ $x \in \mathbb{R}$ — ф-я распред-я

$F_\xi(x) = P(\xi \in (-\infty, x)) = P_\xi((-\infty, x))$
$P(\xi \in [-2, 0)) = P(\{\xi < 0\} \setminus \{\xi < -2\}) = P(\xi < 0) - P(\xi < -2) = F_\xi(0) - F_\xi(-2)$

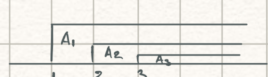
Св-ва ф-ии распред-я:
1. $\forall x \leq y$ $F(x) \leq F(y)$ монотонность
2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $F(x_0 - 0) := \lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ $\quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ непр-ть слева

Ex



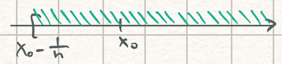
Д-во: 1 $x \leq y$ $\quad \{\xi < x\} \subseteq \{\xi < y\}$ $\Rightarrow F(x) = P(\xi < x) \leq P(\xi < y) = F(y)$

2 lim точно есть. Д-м: $\lim_{n \to \infty} F(n) = 1$:



$A_n = \{\xi \geq n\}$ $\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\xi = \infty\} = \varnothing$
$\lim_{n \to \infty} (1 - F(n)) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} F(n) = 1$

$B_n = \{\xi < -n\}$ $\quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ $\quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \{\xi = -\infty\} = \varnothing$
$\lim_{n \to \infty} F(-n) = \lim_{n \to \infty} P(B_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$

3 $x_0 \in \mathbb{R}$ 

$C_n = \{\xi \geq x_0 - \frac{1}{n}\}$ $\quad C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \{\xi \geq x_0\}$

$$\lim_{n\to\infty} F(x_0 - \tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(C_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(C_n) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) = 1 - P(\xi \geq x_0) = F(x_0)$$

Теорема о классе функц. распр-я

Пусть F облад. св-вами 1-3. Тогда $\exists \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ и сл.в. ξ : $F_\xi(x) = F(x)$

Идея д-ва: $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F} = B(\mathbb{R})$ $\quad P([a,b]) = F(b) - F(a)$ — вер. мера на алгебре интервалов

По теор. Каратеодори

$\exists! \, \tilde{P}$ на $B(\mathbb{R})$ $\quad \tilde{P}([a,b]) = P([a,b])$

$\xi(\omega) = \omega$ $\quad P_\xi(B) = \tilde{P}(B)$ $\quad F_\xi(x) = F(x)$

2.4. Примеры распределений

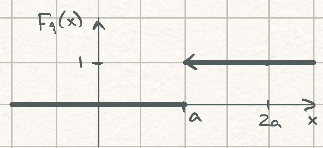
Дискретные:

Опр $\xi \in I_a$ (ξ имеет вырожденное распред-е с пар-ром a), если $P(\xi = a) = 1$.

Ex $a = \pi$: $\xi \in I_\pi$ $\quad P(\xi = \pi) = 1$

$P(\xi = 10) \leq P(\xi \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\}) = P(\xi \in \mathbb{R}) - P(\xi = \pi) = 1 - 1 = 0$

ξ	a
P	1



$F_\xi(x) = P(\xi < x)$

Опр $\xi \in B_p$ (распр-е Бернулли) $p \in [0,1]$, если $P(\xi = 0) = 1 - p$, $\quad P(\xi = 1) = p$

ξ	0	1
P	$1-p$	p