Теорема неравенство Fréchet-Hoeffding

$\forall u,v \in [0,1] \quad \max\{u+v-1, 0\} \le C(u,v) \le \min\{u,v\} \quad \forall C$-copula

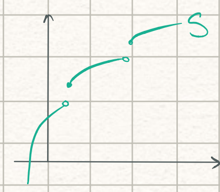
Д-во: $C(u,v) = P(U_1 < u, U_2 < v) \le P(U_1 < u) = u \quad u \in [0,1]$

$C(u,v) \le P(U_2 < v) = v \quad v \in [0,1] \quad \Rightarrow C(u,v) \le \min(u,v)$

$C(u,v) = P(U_1 < u, U_2 < v) = 1 - P(\{U_1 \ge u\} \cup \{U_2 \ge v\}) \ge 1 - P(U_1 \ge u) - P(U_2 \ge v) =$
$= 1 - (1-u) - (1-v) = u+v-1$

Упр Записать и д-ть это нер-во в случае $n>2$

Опр Мн-во $S \subseteq \mathbb{R}^2$ наз. **неубывающим**, если $\forall (x,y), (u,v) \in S$ вып-но $(x \le u) \Rightarrow (y \le v)$



Опр Мн-во $S \subseteq \mathbb{R}^2$ наз. **носителем** с.в. ξ, если $\xi \in S$ п.н., т.е. $P(\xi \in S) = 1$

Теорема о правой границе в нер-ве F-H:

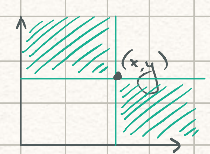
$F_{\xi,\eta}(x,y) = \min\{F_\xi(x), F_\eta(y)\} \Leftrightarrow \exists$ носитель (ξ,η) неубывающий

Д-во: Лемма:

S - неуб. $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (u,v) \in S$

вып-но: либо $(u \le x) \Rightarrow (v \le y)$

либо $(v \ge y) \Rightarrow (u \ge x)$



$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi < x, \eta < y) + P(\xi < x, \eta \ge y) = F_{\xi,\eta}(x,y) + P(\xi < x, \eta \ge y)$

$F_\eta(y) = \ldots = F_{\xi,\eta}(x,y) + P(\eta < y, \xi \ge x)$

$F_{\xi,\eta}(x,y) = \min\{F_\xi(x), F_\eta(y)\}$

$\Leftrightarrow$ либо $P(\xi < x, \eta \ge y) = 0$ $\Leftrightarrow$ либо $\{(u,v) \mid u < x, v \ge y\} \not\subset S$ $\Leftrightarrow$ неуб.

либо $P(\eta < y, \xi \ge x) = 0$ либо $\{(u,v) \mid v < y, u \ge x\} \not\subset S$

Следствие:

Если ξ, η имеют непрерывные ф-ии распр-я, тогда $\xi = f(\eta)$, f - строго возрастает

$\Leftrightarrow C_{\xi,\eta}(u,v) = \min\{u,v\}$

всё ради него

Perfect Dependance (comonotonic)

Упр Сформулир-ть и д-ть утв-е для левой границы нер-ва F-H

Теорема об инвариантности копулы при строго возр. преобр.

Пусть $C(u,v)$ для вектора (ξ,η) с непр. ф-ями распр-я, ф-ии $f(x), g(x)$ строго возр. Тогда $C_{f(\xi),g(\eta)}(u,v) = C_{\xi,\eta}(u,v)$

Д-во: $C_{f(\xi),g(\eta)}(F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y)) = P(f(\xi) < x, g(\eta) < y) = P(\xi < \overleftarrow{f}(x), \eta < \overleftarrow{g}(y)) =$

$= C_{\xi,\eta}(F_\xi(\overleftarrow{f}(x)), F_\eta(\overleftarrow{g}(y))) \overset{*}{=} C_{\xi,\eta}(F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y))$

$*$: $F_{f(\xi)}(x) = P(f(\xi) < x) = P(\xi < \overleftarrow{f}(x)) = F_\xi(\overleftarrow{f}(x))$

$\mathrm{Range}(F_{f(\xi)}(x)) = [0,1]$, $\mathrm{Range}(F_{g(\eta)}(y)) = [0,1]$, т.к. $F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y) \in C(\mathbb{R})$

непр-ть из строгого возраст-я

$\Rightarrow C_{f,g}(u,v) = C_{\xi,\eta}(u,v) \quad \forall u,v \in [0,1]$

Упр Сформулир-ть и д-ть ту же теорему для $f \nearrow, g \searrow$ и $f \searrow, g \searrow$

* **Опр** коэф-т корреляции Спирмена — Spearman's rho

*: это опр-е для непр. случая только, общее в конце лекции

$$\rho_S(\xi,\eta) = \rho(F_\xi(\xi), F_\eta(\eta)) = \rho(\text{Copula})$$

* **Опр** коэф-т корреляции Кендалла — Kendall's tau

$$\rho_\tau(\xi,\eta) = 2P((\xi-\hat{\xi})(\eta-\hat{\eta})>0)-1,$$ где $(\hat{\xi},\hat{\eta})$ - независ. копия вектора (ξ,η)

Св-ва: Пусть F_ξ, F_η непр-ны и строго возрастают

1. ρ_S зависит только от копулы (ξ,η) ← для дискр. не работает

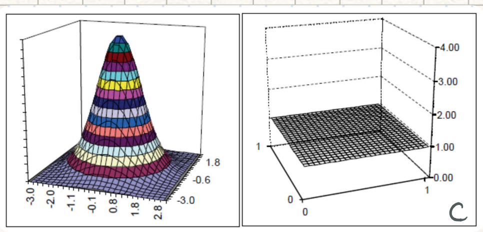
   т.к. $C_{F_\xi(\xi),F_\eta(\eta)} = C_{\xi,\eta}$

2. ρ_S не меняется при возраст. преобр-ях

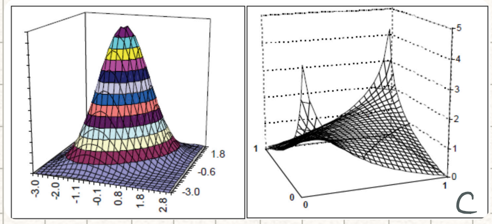
3. $\rho_S=1 \Rightarrow F_\xi(\xi)=F_\eta(\eta) \Rightarrow C_{\xi,\eta}(u,v)=\min\{u,v\} \Leftrightarrow \xi = T(\eta),\ T\uparrow$

Утв Эти св-ва верны и для ρ_τ

Ex **Опр** Копула с.в. $\bar{\xi}\in N_{\bar{a},\Sigma}$ наз. гауссовской

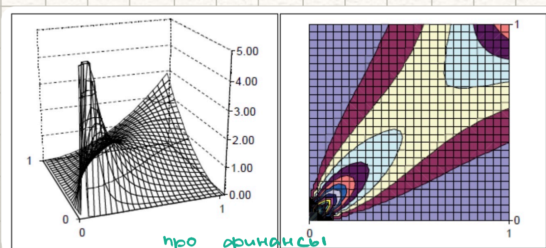


$\bar{\xi}\in N_{\bar{0},I}$ → $\bar{\xi}\in N_{\bar{0},\Sigma}$ →



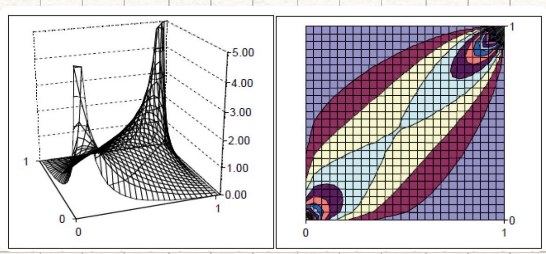
Определение (Архимедовой копулы). *Архимедовой копулой называется*
$$C(u_1,\cdots,u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\cdots+\varphi(u_n)),$$
где $\varphi:(0,1]\to[0,\infty)$ *непрерывная, строго убывающая, выпуклая функция такая, что* $\varphi(1)=0,\ \lim_{t\to 0}\varphi(t)=\infty$.

Определение (Clayton copula). *Архимедова копула с генератором*
$$\varphi(t) = t^{-\beta}-1, \varphi^{-1}(s) = (1+s)^{-1/\beta}, \beta>0.$$
Копула (при $n=2$*):*
$$C(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\beta}+u_2^{-\beta}-1\right)^{-1/\beta}.$$

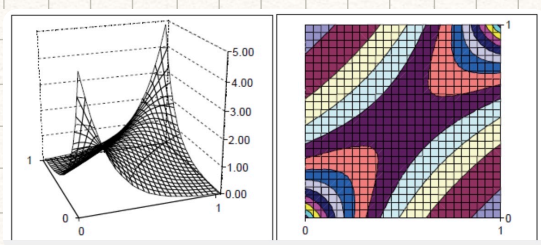


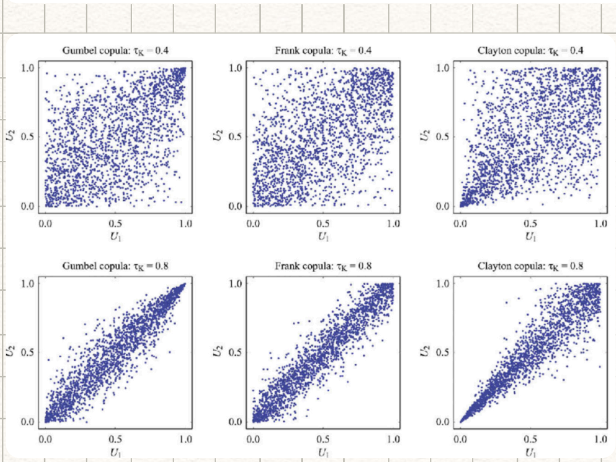
про финансы

Определение (Gumbel copula). *Архимедова копула с генератором*
$$\varphi(t) = (-\ln t)^\beta, \varphi^{-1}(s) = \exp\left(-s^{1/\beta}\right), \beta\ge 1.$$
Копула (при $n=2$*):*
$$C(u_1,u_2) = \exp\left\{-\left((-\log u_1)^\beta+(-\log u_2)^\beta\right)^{1/\beta}\right\}.$$



Определение (Frank copula). *Архимедова копула с генератором*
$$\varphi(t) = \ln\frac{e^{\alpha t}-1}{e^\alpha-1}, \varphi^{-1}(s) = \alpha^{-1}\ln\left[1+e^s(e^\alpha-1)\right], \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$
Копула (при $n=2$*):*
$$C(u_1,u_2) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left\{1+\frac{(e^{-\alpha u_1}-1)(e^{-\alpha u_2}-1)}{e^{-\alpha}-1}\right\}.$$





Опр Коэф-ты экстремальной зависимости:

$$\lambda_u(\xi,\eta) = \lim_{\alpha\to 1-0} P(\xi \geq q_\xi(\alpha) \mid \eta \geq q_\eta(\alpha))$$ upper

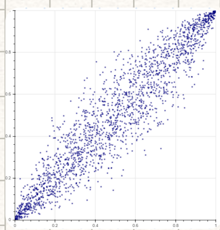
$$\lambda_l(\xi,\eta) = \lim_{\alpha\to +0} P(\xi < q_\xi(\alpha) \mid \eta < q_\eta(\alpha))$$ lower

Лемма о коэф-тах экстр. завис-ти:
Пусть F_ξ, F_η – непр. Тогда $\lambda_u(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to 1-0} \dfrac{1-2\alpha+C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$ $\quad\lambda_l(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to +0} \dfrac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$

Д-во: $\lambda_l(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to+0} \dfrac{P(\xi<q_\xi(\alpha),\ \eta<q_\eta(\alpha))}{P(\eta<q_\eta(\alpha))} = \lim\limits_{\alpha\to+0} \dfrac{P(F_\xi(\xi)<F_\xi(q_\xi(\alpha)),\ F_\eta(\eta)<F_\eta(q_\eta(\alpha)))}{P(F_\eta(\eta)<F_\eta(q_\eta(\alpha)))} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to+0} \dfrac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$ Для upper ч/з обратное событие

Ex 1 Гауссовская копула $\rho = 0{,}9$. Будет ли завис-ть в экстр. значениях?
$\lambda_u = \lambda_l = 0$ Не будет!



2 Gumball $\lambda_u > 0,\ \lambda_l = 0$

3 Clayton $\lambda_l > 0,\ \lambda_u = 0$

* **Опр** коэф-т корреляции Спирмена

$\rho_s(\xi,\eta) = 3\left[P((\xi_1-\xi_2)(\eta_1-\eta_3)>0) - P((\xi_1-\xi_2)(\eta_1-\eta_2)<0)\right]$, где $(\xi_1,\eta_1), (\xi_2,\eta_2), (\xi_3,\eta_3)$ – нез. с.в. с распр-ем как у (ξ,η)

Для непр. F_ξ, F_η: $\rho_s(\xi,\eta) = 12\iint (C(u,v) - \underbrace{uv}_{E:\ U_{0,1}})\,dudv = \rho(F_\xi(\xi), F_\eta(\eta))$

$D:\ U_{0,1}$ EUV после ф-лы и.по частям

* **Опр** коэф-т корреляции Кендалла

$\rho_\tau(\xi,\eta) = P((\xi-\hat\xi)(\eta-\hat\eta)>0) - P((\xi-\hat\xi)(\eta-\hat\eta)<0)$, где $(\hat\xi,\hat\eta)$ – независ. копия вектора (ξ,η)

* вот это уже для общ. случая опр-я.