4.3. Характеристические функции

$\xi = \xi_1 + i\xi_2 \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2 \quad \xi \in \mathbb{C},\ \eta \in \mathbb{C}$ Умеем: $\xi \pm \eta \quad \xi \cdot \eta \quad \xi / \eta \quad |\xi| \leq |\eta|$
$e^{i\eta} = \cos\eta + i\sin\eta$

Опр $E\xi = E\xi_1 + iE\xi_2$

Св-ва:
1. $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$
2. $|E\xi| \leq E|\xi|$
3. $(\xi_1, \xi_2) \perp\!\!\!\perp (\eta_1, \eta_2) \Rightarrow E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$

Опр Характеристической функцией наз. $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi)$ просто мат. аппарат

Зам Хар. ф-я существует всегда! $|\varphi_\xi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leq E|e^{it\xi}| = E1 = 1$

Зам

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \begin{cases} \sum e^{ita_n} P(\xi = a_n), & \text{если } \xi \sim \text{дискр.} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} p_\xi(x)\,dx, & \text{если } \xi \sim \text{а.н.р.} \end{cases}$$

– преобр-е Фурье $p_\xi(t) \Rightarrow$ его св-ва все

Св-ва:
1. $\varphi_\xi(0) = 1, \quad |\varphi_\xi(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_{a\xi+b}(t) = Ee^{it(a\xi+b)} = Ee^{iat\xi} \cdot e^{itb} = \varphi_\xi(at) \cdot e^{itb}$
3. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} \cdot e^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$
4. Если $E|\xi|^k < \infty$, то $\varphi_\xi(t)$ непр. диф-ма k раз, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot E\xi^k$

Д-во: $k=1$: $\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF(x) \quad \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ix \cdot e^{itx}\,dF(x)\right| \leq \int |ixe^{itx}|\,dF(x) = \int 1 \cdot |x| \cdot 1\,dF(x) = E|\xi| < \infty$

$\frac{d}{dt}\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx}\,dF(x)$, $\varphi'(0) = iE\xi$ ← интеграл произв-х. нужна его равном. сх-ть

$k-1 \to k$: $\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx}\,dF(x)\right| \leq E|\xi|^k \Rightarrow \int$ из k-х произв-х сх. равном-но.

по предп. инд.: $\varphi^{(k-1)}(0) = i^{(k-1)} E\xi^{k-1} < \infty \Rightarrow \varphi^{(k)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx}\,dF(x) \Rightarrow \varphi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$

Нужна ещё непр-ть:

$|\varphi^{(k)}(t+h) - \varphi^{(k)}(t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{i(t+h)x}\,dF(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx}\,dF(x)\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k \cdot e^{itx}(e^{ihx} - 1)\,dF(x)\right| \leq$

$\leq \int |x|^k |e^{ihx} - 1|\,dF(x) = E|\xi|^k |e^{ihx} - 1| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, т.к. $|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow[h \to 0]{\text{п.н.}} 0$

Нужна мажоранта для т. Лебега: $|\xi|^k |e^{ih\xi} - 1| \leq 2 \cdot |\xi|^k$, вот и непр-ть

5. Если $\xi \sim$ а.н.р., то $\varphi_\xi(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ ← просто сх-ть, а тут сх-ть со скоростью
6. Если плотность $p_\xi(t)$ диф-ма k раз и $p_\xi^{(k)}(t)$ интегрируема, то $|\varphi(t)| \leq \frac{C}{t^k}$

эскиз д-ва: $\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} p(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{itx}}{it}\right)'_x p(x)\,dx = \underbrace{\frac{e^{itx}}{it} p(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0 \text{ для монот.}} - \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{it} p'(x)\,dx = \frac{-1}{it} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p'(x)\,dx$

k раз по частям и вот

Ex

1. $\xi = a$: $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{ita}$

2. $\xi \in \Pi_\lambda$: $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{[e^{it}\lambda]^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$

3. $\xi \in N_{a,\sigma^2}$: $\xi \stackrel{d}{=} \sigma\eta + a \quad \eta \in N_{0,1}$. $\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$ можно это считать, а можно хитрее

$\frac{d}{dt}\varphi_\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -ie^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-x^2/2})'\,dx = -ie^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -te^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = -t\varphi_\eta(t)$

Получили дифф.ур. Решив, получим: $\varphi_\eta(t) = Ce^{-t^2/2}$, $C = 1 \Rightarrow \varphi_\eta(t) = e^{-t^2/2} \Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Теорема формула обращения:

Пусть $F_\xi(x)$ – ф.р. с.в. ξ, тогда $\forall x, y$ – точек непр-ти $F_\xi(\cdot)$ вып-но:

$$F_\xi(x) - F_\xi(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt} - e^{-iyt}}{-it} \varphi_\xi(t) \cdot e^{-\frac{t\sigma^2}{2}} dt$$

Зам 1 Если $\frac{\varphi_\xi(t)}{t} \in L_1(\mathbb{R})$ $\quad F_\xi(x) - F_\xi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt} - e^{-iyt}}{-it} \varphi_\xi(t) dt$

2 Хар. ф-я однозначно опр-т распр-е

Следствие устойчивость по суммированию:

1 Пусть $\xi \in \Pi_\lambda$, $\eta \in \Pi_\mu$, $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow (\xi + \eta) \in \Pi_{\lambda+\mu}$

Д-во: $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \cdot e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$

2 Пусть $\xi \in N_{a_1, \sigma_1^2}$, $\eta \in N_{a_2, \sigma_2^2}$, $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$. Тогда $\xi + \eta \in N_{a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2}$

3 $\xi \in B_{n,p}$, $\eta \in B_{m,p}$, $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \xi + \eta \in B_{n+m,p}$

4 $\xi \in \Gamma_{\lambda,\alpha}$, $\eta \in \Gamma_{\mu,\alpha}$, $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \xi + \eta \in \Gamma_{\lambda+\mu,\alpha}$

5 $\xi \in C_{0,1}$, $\eta \in C_{0,1}$, $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \xi + \eta \in C_{0,2}$

Д-во теоремы: Пусть ξ имеет плотность $p(x)$, $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. $p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$

$$F(x) - F(y) = \int_y^x p(u) du = \int_y^x \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \varphi(t) dt du \overset{\text{инт-мо}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y^x e^{-itu} du \, \varphi(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it} \varphi(t) dt$$

Пусть $\eta_k = \sqrt{2}\sigma_k \cdot \eta$, где $\eta \in N_{0,1}$, $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, $\sigma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ это общий случай смотрим

$\xi + \eta \sim$ а.н.р., $\xi + \eta_k \sim$ а.н.р. $\quad \varphi_{\xi+\eta_k}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_{\eta_k}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot e^{-\sigma_k^2 t^2}$

$|\varphi_\xi(t)| \le 1 \Rightarrow \varphi_{\xi+\eta_k}(t) \in L_1(\mathbb{R})$

$$F_{\xi+\eta_k}(x) - F_{\xi+\eta_k}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-txu} - e^{-tyu}}{-it} \varphi_\xi(t) e^{-\sigma_k^2 t^2} dt$$

$\xi + \eta_k = \xi + \sqrt{2}\sigma_k \eta \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi + \eta_k \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} \xi \Rightarrow \forall x_0$ – т. непр. $F_\xi(\cdot)$

$\Rightarrow F_{\xi+\eta_k}(x_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} F_\xi(x_0) \Rightarrow F_\xi(x) - F_\xi(y) = \lim_{\sigma_k \to 0} \ldots$