Опр Совместным распределением с.в. $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ наз. вер. мера $P_{\bar{\xi}}(B) = P(\bar{\xi} \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Совместная ф-я распр-я: $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Св-ва тут всё для $n=2$, но ясно, что для общ. случая аналогичные

1. $\forall x_1, x_2 \quad 0 \le F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) \le 1$
2. $\forall x_1 \le y_1, \; x_2 \le y_2 \quad F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) \le F_{\bar{\xi}}(y_1, y_2)$ — монотонность
3. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = 0$

   $\lim\limits_{x_1 \to \infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = P(\xi_2 < x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$

   $\lim\limits_{x_1 \to \infty} \lim\limits_{x_2 \to \infty} F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = 1$

4. $F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2)$ непр. слева по кажд. аргументу
5. $\forall x_1 \le y_1, \; x_2 \le y_2$

$$F_{\bar{\xi}}(y_1, y_2) - F_{\bar{\xi}}(y_1, x_2) - F_{\bar{\xi}}(x_1, y_2) + F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) \geq 0$$
$$\shortparallel$$
$$P(\xi_1 \in [x_1, y_1), \; \xi_2 \in [x_2, y_2))$$

Зам Св-ва 1-5 х-теристические

Опр С.в. $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет дискретное распр-е, если найдётся не более чем счётный набор $\{(a_i, b_j)\}_{i,j}$: $\sum\limits_{i,j} P(\bar{\xi} = (a_i, b_j)) = 1$

$\xi_2 \backslash \xi_1$	a_1	....	a_m	
b_1	p_{11}		p_{m1}	
b_j	p_{ij}		p_{mj}	p_j
b_n	p_{1n}		p_{mn}	
	$P(\xi_1 = a_1) = q_1$		q_m	

$p_{11} = P(\xi_1 = a_1, \; \xi_2 = b_1) \qquad p_{ij} = P(\xi_1 = a_i, \; \xi_2 = b_j)$

$\sum\limits_i P(\xi_1 = a_i, \; \xi_2 = b_j) = P(\bigcup\limits_i \{\xi_1 = a_i, \; \xi_2 = b_j\}) = P(\xi_2 = b_j) = p_j$

В общем, $\sum\limits_i q_i = 1 \qquad \sum\limits_j p_j = 1$, а $p_i + q_j$ = чему угодно от 0 до 2

$\xi_2 \backslash \xi_1$	1	.....	n
1	p_{11}		p_{n1}
$\vdots$			
n	p_{1n}		p_{nn}

$$P(\xi_1 = \xi_2) = P(\bigcup_{i=1}^{n} \{\xi_1 = \xi_2 = i\}) \overset{\text{несовм. соб.}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_1 = \xi_2 = i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}$$

Опр С.в. $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет абсолютно непр. распр-е, если $\exists \, p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $P(\bar{\xi} \in B) = \int\limits_B p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) d\bar{x} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Св-ва:

1. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) d\bar{x} = 1$

   Д-во: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) d\bar{x} = P(\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n) = P(\xi_1 \in \mathbb{R}, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}) = 1 \qquad P(\xi_i \in \mathbb{R}) = 1$

2. $p_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int p_{\bar{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$

   Д-во: $P(\xi_1 \in B) = P(\xi_1 \in B, \; \xi_2 \in \mathbb{R}, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}) \overset{\text{т. Тонеля-Фубини (кого-то из)}}{=} \int\limits_{B_1} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) dx_2 \dots dx_n}_{p_{\xi_1}(x_1)} dx_1$

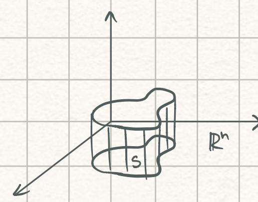
$$P(\xi=\eta)=P((\xi,\eta)\in\{(x,x): x\in\mathbb{R}\})=\iint\limits_{\underset{\text{меры } 0}{x=y}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx\,dy=0$$

$$P(\xi<\eta)=\iint\limits_{\{(x,y):x<y\}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx\,dy = \text{чему угодно от 0 до 1}$$

Опр многомерное равномерное распределение

$\bar\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in U_S$, $S\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(S)\in(0,\infty)$,

если $f_{\bar\xi}(\bar x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda(S)}, & x\in S\\ 0, & x\notin S\end{cases}$



Опр многомерное нормальное распределение:

$\bar\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in N_{\bar a,\Sigma}$, $\bar a\in\mathbb{R}^n$, $\Sigma=\Sigma^T>0$, $\Sigma\in M_n(\mathbb{R})$,

если $f_{\bar\xi}(\bar x)=\dfrac{(2\pi)^{-n/2}}{(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\frac{(\bar x-\bar a)\Sigma^{-1}(\bar x-\bar a)^T}{2}}$

Ex

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2\end{pmatrix}\qquad f_{\bar\xi}(\bar x)=\frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sigma_1\dots\sigma_n}e^{-\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}+\dots+\frac{(x_n-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right]}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}}_{\varphi_{a,\sigma_1^2}(x_1)}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{-\frac{(x_n-a_n)^2}{2\sigma_n^2}}}_{\varphi_{a,\sigma_n^2}(x_n)}$$

Опр С.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ независимы, если $\forall B_1,\dots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$P(\xi_1\in B_1,\dots,\xi_n\in B_n)=P(\xi_1\in B_1)\dots P(\xi_n\in B_n)$

Теорема Критерий независимости:

След. утв-я эквивалентны:

1. $\xi_1,\dots,\xi_n$ — независимы
2. $F_{\bar\xi}(\bar x)=F_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n)\quad\forall\bar x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
3. Если $\bar\xi$ имеет дискр. распр-е, то $\forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$:
   $P(\xi_1=a_1,\dots,\xi_n=a_n)=P(\xi_1=a_1)\dots P(\xi_n=a_n)$
4. Если $\bar\xi$ имеет а.н.р., то $\forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\quad f_{\bar\xi}(x_1,\dots,x_n)=f_{\xi_1}(x_1)\dots f_{\xi_n}(x_n)$

Д-во: (1) <=> (4)

$\Rightarrow P(\xi_1\in B_1,\dots,\xi_n\in B_n)=P(\xi_1\in B_1)\dots P(\xi_n\in B_n)\overset{\text{св-во пл-ти}}{=}\int_{B_1}f_{\xi_1}(x_1)dx_1\dots\int_{B_n}f_{\xi_n}(x_n)dx_n\overset{\text{Фубини}}{=}$

$=\int\!\!\int_{B_1\times\dots\times B_n}f_{\xi_1}(x_1)\dots f_{\xi_n}(x_n)\,dx_1\dots dx_n$ дальше слова про Каратеодори

$\Rightarrow\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\quad P(\bar\xi\in B)=\int\!\!\int_B f_{\xi_1}(x_1)\dots f_{\xi_n}(x_n)\,d\bar x\overset{\text{опр}}{=}\int_B f_{\bar\xi}(\bar x)\,d\bar x$

$\Rightarrow f_{\bar\xi}(\bar x)=f_{\xi_1}(x_1)\dots f_{\xi_n}(x_n)$

$\Leftarrow P(\xi_1\in B_1,\dots,\xi_n\in B_n)=\int\!\!\int_{B_1\times\dots\times B_n}f_{\bar\xi}(\bar x)\,d\bar x=\int\!\!\int_{B_1\times\dots\times B_n}f_{\xi_1}(x_1)\dots f_{\xi_n}(x_n)\,d\bar x\overset{\text{Фубини}}{=}\int_{B_1}f_{\xi_1}(x_1)dx_1\dots\int_{B_n}f_{\xi_n}(x_n)dx_n=$

$=P(\xi_1\in B_1)\dots P(\xi_n\in B_n)$

Теорема о свёртке для дискретных с.в.

Пусть $\xi\perp\!\!\!\perp\eta$ (ξ не зависит от η), $P(\xi\in\{0,1,\dots\})=P(\eta\in\{0,1,\dots\})=1$

Тогда $P(\xi+\eta=n)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(\xi=k)P(\eta=n-k)$, $n=0,1,2,\dots$

Д-во: $\{\xi+\eta=n\}=\bigcup\limits_{k=0}^{n}\{\xi=k,\ \xi+\eta=n\}$

$\Rightarrow P(\xi+\eta=n)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(\xi=k,\ \xi+\eta=n)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(\xi=k,\ \eta=n-k)\overset{\text{нез.}}{=}\sum P(\xi=k)P(\eta=n-k)$

Теорема о свёртке для а.н.р.:

Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ имеет а.н.р.. Тогда $f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) f_\eta(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-t) f_\eta(t)\,dt$

Д-во:
$$F_{\xi+\eta}(y) = P(\xi+\eta<y) = \iint_{u+v<y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv = \iint_{u+v<y} f_\xi(u) f_\eta(v)\,du\,dv \overset{\text{Фуб}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)\,du \int_{-\infty}^{y-u} f_\eta(v)\,dv =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)\,du \int_{-\infty}^{y} f_\eta(v-u)\,dv \underset{\text{Фуб}}{=} \int_{-\infty}^{y} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u) f_\eta(v-u)\,du}_{= f_{\xi+\eta}(v)} \Big)\,dv = \int_{-\infty}^{y} f_{\xi+\eta}(v)\,dv$$

Свёртка вообще клёвая штука. Для распр-я суммы

Ex $\xi \in \Pi_\lambda,\ \eta \in \Pi_\lambda \;\cancel{\Rightarrow}\; \xi+\eta \in \Pi_{2\lambda}$ тут что-то не так!

Ex 1) $\xi \in N_{0,1},\ \eta = \xi,\ \eta \in N_{0,1} \Rightarrow \xi+\eta = 2\xi \in N_{0,4}$

2) $\xi \in N_{0,1},\ \eta = -\xi,\ \eta \in N_{0,1} \Rightarrow \xi+\eta = 0 \in I_0$

3) $\xi \in N_{0,1},\ \xi \perp\!\!\!\perp \eta,\ \eta \in N_{0,1} \Rightarrow \xi+\eta \in N_{0,2}$

Д-во:
$$f_{\xi+\eta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-u)^2}{2}}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(2u^2-2uv+v^2)}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}u-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{v^2}{4}}\,du =$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(u-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2}\,du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v^2}{4}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$\to \sigma^2 = 2$