Аксиомы дискретной вероятности

1) Ω не более чем счётно
2) $\forall \omega_i \in \Omega \ \exists p_i \geq 0$ — вероятность ω_i. $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1$
3) $A \subseteq \Omega$ — события $\quad \mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$

Ex 2 игр. бросают монету. Выигр. тот, у кого вып. О.

$\Omega = \{ \underset{\frac{1}{2}}{О}, \underset{\frac{1}{4}}{РО}, \underset{\frac{1}{8}}{РРО}, \underset{1/16}{РРРО}, \dots \}$

$A = \{\text{выиграет I}\} = \{О, РРО, РРРРО, \dots\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

$B = \{\text{выиграет II}\}$ $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$

1.3. Геометрическая вероятность

Аксиомы геометрической вероятности:

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримые $\lambda(\Omega) \in (0, \infty)$
2) $A \subseteq \Omega$ — измеримые подпр-ва Ω
3) $\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$

Ex1 Выбираем точку наудачу из $[0, 1)$

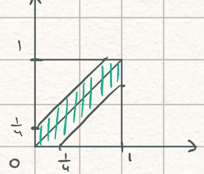
$[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)$ — равновер-но $\qquad \mathbb{P}(\frac{1}{2}) = 0$

Ex2 Выберем т. из $[0,1] \times [0,1]$

Ex3 Задача о встрече

Договорились о встрече I и II м/у 14:00 и 15:00 след. образом: ждёт 15 мин. и уходит

$A = \{\text{I и II встретились}\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = ?$ $\qquad \Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1]\}$



$A = \{(x,y) \mid |x - y| \leq \frac{1}{4}\}$ $\qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1 - 9/16}{1} = \frac{7}{16}$

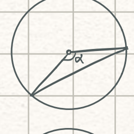
Замечание:

Всегда искать Ω

При реш-ии задачи нужно искать эксперимент "выбираем точку из Ω"

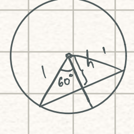
Ex Парадокс Бертрана

Из единичн. окр-ти случайно выбирается хорда

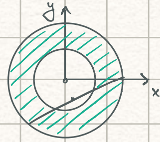


$\alpha \in [0, \pi]$

$A = \{\text{длина дуги} \leq \frac{2\pi}{3}\} = \{\alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]\}$ $\qquad \mathbb{P}(A) = \frac{2\pi/3}{\pi} = \frac{2}{3}$



$h \in [0, 1)$ $\qquad A = \{h \in [\frac{1}{2}, 1)\}$ $\qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$



$\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ $\quad A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \ge \frac{1}{4}\}$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\pi \cdot \frac{1}{4}}{\pi} = \frac{3}{4}$

ой!

Какая из моделей лучше? (неважно)

Надо говорить, согласно какому распределению

1.4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Опр Мн-во $F \subseteq 2^{\Omega}$ наз. σ-алгеброй, если:

F_1: $\Omega \in F$

F_2: $\forall A \in F \quad \bar{A} \in F$

F_3: $\forall A_1, A_2, \ldots \in F \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

Св-ва:

1. $\varnothing \in F$

Д-во: $\varnothing \in \Omega \setminus \Omega \in F$

2. $\forall A_1, \ldots, A_N \in F \quad \bigcup_{i=1}^{N} A_i \in F$

Д-во: $A_1, A_2, \ldots, A_N, \varnothing, \varnothing, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{N} A_i = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \cup \varnothing \cup \ldots \in F$

3. $\forall A_1, A_2, \ldots \in F \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

Д-во: $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \forall i=1,2 \; \bar{A}_i \in F \; (F_2) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F \Rightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} \in F$

Формула двойственности:

$$\boxed{\forall B_1, B_2, \ldots \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i}$$

Д-во: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B,\ B \subseteq A \qquad A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \in B$

Пусть $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} \Leftrightarrow \forall i=1,\ldots \; x \notin B_i \Leftrightarrow \forall i=1,\ldots \; x \in \bar{B}_i \Leftrightarrow x \in \bigcap B_i$

Ex

1. $\Omega = \{1\ 2\}$ $\quad F_1 = 2^{\Omega} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$F_2 = \{\varnothing, \Omega\}$

2. $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\quad F_1 = 2^{\Omega}$

$F_2 = \{\varnothing, \Omega\}$

$F_3 = \{\varnothing, \Omega, \{2\}, \{1,3,4\}\}$

3. $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad F_1 = 2^{\Omega}$

$F_2 = \{\varnothing, \Omega\}$

$F_3 = B(\mathbb{R})$

Опр $B(\Omega)$ — Борелевская σ-алгебра — наим. σ-алгебра, содерж. все откр. мн-ва.
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

Опр Ф-я $\mathbb{P}: F \to \mathbb{R}$, если

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $\forall A \in F \quad \mathbb{P}(A) \ge 0$

3) $\forall A_1, A_2, \ldots \in F \quad \forall i \ne j \quad A_i \cap A_j = \varnothing \; : \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

счёт. аддит.

Св-ва: 1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

Д-во: $A_1 = \varnothing,\ A_2 = \varnothing,\ \dots \quad \sum \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\cup A_i) = \mathbb{P}(\varnothing)$

$\sum \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) \Rightarrow \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}: A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j \qquad \mathbb{P}(\overset{n}{\cup} A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$

Д-во: $A_1, \dots, A_n, \varnothing, \varnothing, \dots$

$\mathbb{P}(\overset{n}{\cup} A_i \cup \varnothing \cup \varnothing \dots) = \sum\limits^{n} \mathbb{P}(A_i) + 0 + 0 + \dots = \sum \mathbb{P}(A_i)$

3. $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

Д-во: $\Omega = A \cup \overline{A} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$

$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$

4. $\forall A, B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Д-во: $A \cup B = A \cup (B \setminus A) \qquad (B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$

$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \end{cases} \longrightarrow$ отсюда найдём нужное $\mathbb{P}(A \cup B)$

5. $\forall A \subseteq B \quad A, B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Д-во: $B = A \cup B \setminus A \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$