

Аксиомы дискретной вероятности

- 1) Ω не более чем счетно
- 2) $\forall w_i \in \Omega \exists p_i \geq 0$ — вероятность w_i . $\sum_{w_i \in \Omega} p_i = 1$
- 3) $A \subseteq \Omega$ — событие $P(A) = \sum_{w_i \in A} p_i$

Ex 2 игр. бросают монету. Выигр. тот, у кого вып. О.

$$\Omega = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots \right\}$$

$$A = \{\text{выигрывает I}\} = \{0, PPO, PPPPO, \dots\} \quad P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$B = \{\text{выигрывает II}\} \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

1.3. Геометрическая вероятность

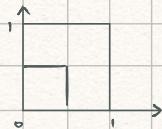
Аксиомы геометрической вероятности:

- 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримые $\lambda(\Omega) \in (0, \infty)$
- 2) $A \subseteq \Omega$ — измеримые подмножества Ω
- 3) $P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$

Ex1 Выбираем точку на отрезке из $[0, 1]$

$$[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1] \text{ — равновер-но} \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

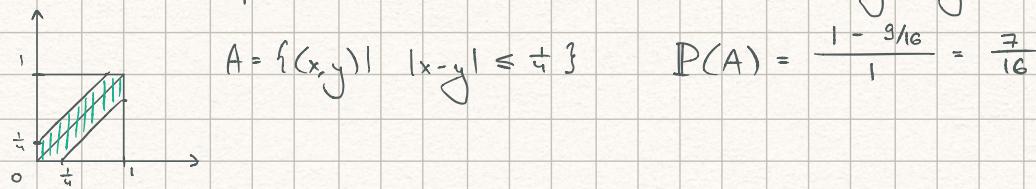
Ex2 Выбираем τ из $[0, 1] \times [0, 1]$



Ex3 Задача о встрече

Договорились о встрече I и II и/у 14:00 .. 15:00 след. образом:
ходит 15 мин и уходит

$$A = \{I \text{ и } II \text{ встретились}\} \quad P(A) = ? \quad \Omega = \{(x, y) | x, y \in [0, 1]\}$$



Замечание:

Всегда искать Ω

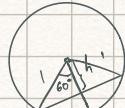
При решении задачи нужно искать эксперимент "выбираем точку из Ω "

Ex Парадокс Берtrand'a

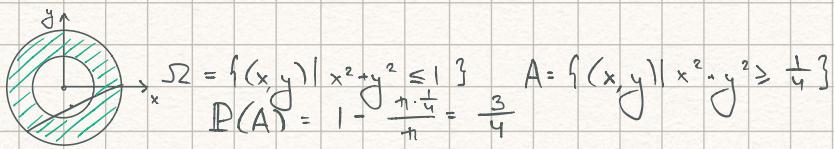
Из единичн. окр-ти случайно выбирается хорда



$$A = \{\text{длина хорды} \leq \frac{2\pi}{3}\} = \{d \in [0, \frac{2\pi}{3}]\} \quad P(A) = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} = \frac{2}{3}$$



$$h \in [0, 1] \quad A = \{h \in [\frac{1}{2}, 1]\} \quad P(A) = \frac{1}{2}$$



да!

Какое из событий лучше? (неважно)

Надо говорить, согласно какому распределению

1.4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Опред. Мн-во $F \subseteq 2^\Omega$ наз. Γ -алгеброй, если:

$$F_1: \emptyset \in F$$

$$F_2: \forall A \in F \quad \bar{A} \in F$$

$$F_3: \forall A_1, A_2, \dots \in F \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

СВ-ва:

$$1. \emptyset \in F$$

$$\text{Д-во: } \emptyset \in \Omega \setminus \Omega \in F$$

$$2. \forall A_1, \dots, A_N \in F \quad \bigcup_{i=1}^N A_i \in F$$

$$\text{Д-во: } A_1, A_2, \dots, A_N, \emptyset, \emptyset, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^N A_i = \bigcup_{i=1}^N A_i \cup \emptyset \cup \dots \in F$$

$$3. \forall A_1, A_2, \dots \in F \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

$$\text{Д-во: } \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \forall i=1, 2, \dots \bar{A}_i \in F (F_2) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in F \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

Формула двойственности:

$$\forall B_1, B_2, \dots \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i$$

$$\text{Д-во: } A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A \quad A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \in B$$

$$\text{Нечт} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Leftrightarrow \exists i=1, \dots \quad x \notin B_i \Leftrightarrow \forall i=1, \dots \quad x \in \bar{B}_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i$$

$$\text{Ex} \quad 1. \Omega = \{1, 2\} \quad F_1 = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$F_2 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$2. \Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad F_1 = 2^{\Omega}$$

$$F_2 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$F_3 = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}\}$$

$$3. \Omega = \mathbb{R} \quad F_1 = 2^{\Omega}$$

$$F_2 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$F_3 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Опред. $\mathcal{B}(\Omega)$ — Боресквская Γ -алгебра — наим. Γ -алгебра, содержащая все открытым множ.

Опред. $\mathbb{P}: F \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$1) \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$2) \forall A \in F \quad \mathbb{P}(A) \geq 0$$

$$3) \forall A_1, A_2, \dots \in F \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset : \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

счит. addit.

C_b-ba: 1 $P(\emptyset) = 0$

Д-бо: $A_1 = \emptyset, A_2 = \emptyset, \dots \quad \sum P(\emptyset) = P(\cup A_i) = P(\emptyset)$

$$\sum P(\emptyset) = P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

2. $\forall A_1, \dots, A_n \in F: A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

Д-бо: $A_1, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$

$$P(\cup A_i \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = \sum P(A_i) + 0 + 0 + \dots = \sum P(A_i)$$

3. $\forall A \in F \quad P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Д-бо: $\Omega = A \cup \bar{A} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

4. $\forall A, B \in F \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Д-бо: $A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad (B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) \\ P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B) \end{cases} \rightarrow \text{отсюда находим нужное } P(A \cup B)$$

5. $\forall A \subseteq B \quad A, B \in F \quad P(A) \leq P(B)$

Д-бо: $B = A \cup B \setminus A \quad P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$