Рано или поздно — какая-то ерунда. Просто предельные теоремы мало что дадут. Когда это $n\to\infty$ наступит?

4.4. Центральная предельная теорема

Теорема ЦПТ:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р., $0 < D\xi_1 < \infty$, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Тогда $\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \eta \in N_{0,1}$

Д-во: $\hat{\xi}_k = \xi_k - E\xi_k \quad E\hat{\xi}_k = 0 \quad E\hat{\xi}_k^2 = D\hat{\xi}_k = D\xi_k$

$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{n}} = \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}$:

поэтому дисперсия впрямь удобная штука

$$\varphi_{\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}}(t) = Ee^{it\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}} = Ee^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\hat{S}_n} = \left(Ee^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\hat{\xi}_1}\right)^n = \left[\varphi_{\hat{\xi}_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(1 + 0\cdot\frac{t}{\sqrt{n}} + (-1)D\xi_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n =$$
$$= e^{n\ln\left(1 - D\xi_1\cdot\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)} = e^{-D\xi_1\cdot\frac{t^2}{2} + o(1)} \longrightarrow e^{-D\xi_1\cdot\frac{t^2}{2}} \text{ — хар. ф-я } N_{0,D\xi_1}$$

Следствие:

В усл-ях ЦПТ: $\forall x < y \quad P\left(x < \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_{0,1}(y) - \Phi_{0,1}(x)$

равномерно по $x<y$ → можно послед-ти подставлять

Ex Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р. $E\xi_1 = 0.05$, $D\xi_1 = 64$.

Задача: найти $y_1(n), y_2(n)$: $P(y_1(n) < S_n < y_2(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0{,}9973$

Имеем: $P(y_1(n) < S_n < y_2(n)) = P\Big(\underbrace{\frac{y_1(n) - n(-0{,}05)}{8n}}_{a} < \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < \underbrace{\frac{y_2(n) + 0{,}05n}{8n}}_{=b}\Big)$

$$\int_a^b f_\eta(x)dx = \int_{-\infty}^b f_\eta(x)dx - \int_{-\infty}^a f_\eta(x)dx = F_\eta(b) - F_\eta(a) = \Phi_{0,1}(b) - \Phi_{0,1}(a) \overset{\text{надо}}{=} 0{,}9973$$

т.е. надо взять $a = -3$, $b = 3$

$\Rightarrow y_2(n) = -0{,}05n + 24\sqrt{n} \Rightarrow P(-0{,}05n - 24\sqrt{n} < S_n < -0{,}05n + 24\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0{,}9973$

Теорема Берри-Эссеена:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р. $D\xi_1 > 0$, $E|\xi_1|^3 < \infty$. Тогда $\exists C > 0$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < t\right) - \Phi_{0,1}(t)\right| \le C\cdot\frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n}} \qquad \forall n \ge 1$$

Зам Скорость $\frac{1}{\sqrt{n}}$ неулучшаемая

Д-во:

ξ_1	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

$E\xi_1 = 0 \quad E\xi_1^2 = 1 \quad E|\xi_1|^3 = 1$

кажется, ф-ла Стирлинга

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right) = P(S_n = 0) = /n\text{ — чёт}/ = C_n^{n/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left[\left(\frac{n/2}{e}\right)^n\left(2\pi\cdot\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \quad \text{т.е. } P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1))$$

$$\Rightarrow \sup_t \left|P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < t\right) - \Phi_{0,1}(t)\right| \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot(1 + o(1))$$

Зам $C \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}4$. Но есть ещё более точная оценка сверху.

$C \le 0{,}4847$. А вообще мы можем брать $C = 1/2$

Зам Сходимости по вероятности в ЦПТ нет. $\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \not\xrightarrow{P} N_{0,1}$ в общем случае

Д-во: упр. Нужен критерий Коши для $\xrightarrow{P}$

Пусть $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$

$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \not\xrightarrow{P} \eta \in N_{0,1} \Leftarrow \exists\varepsilon > 0 \;\exists\delta > 0 \;\forall N \in \mathbb{N} \;\exists n, m \ge N: \; P\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S_m}{\sqrt{m}}\right| \ge \varepsilon\right) \ge \delta$

Можно взять $n = 4m$

Теорема об оценке точности в теореме Пуассона:

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – н.о.р. $\in B_p$, $\eta \in \Pi_\lambda$, $\lambda = np$. Тогда $\sup\limits_{A \subseteq \mathbb{R}} |P(S_n \in A) - P(\eta \in A)| \leq np^2$

Д-во: Если S_n, η заданы на одном вер. пр-ве, то:

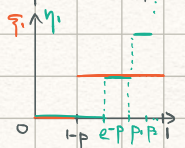
$$|P(S_n \in A) - P(\eta \in A)| = |P(S_n \in A, S_n = \eta) + P(S_n \in A, S_n \neq \eta) - P(\eta \in A, S_n = \eta)| =$$

$$= |P(S_n \in A, S_n \neq \eta) - P(\eta \in A, S_n \neq \eta)| \leq P(S_n \neq \eta) - P(\eta \in A, S_n \neq \eta)$$

Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $P = \lambda$, $U_1, \dots, U_n$ – н.о.р. точки из $[0,1]$

$$p_i = P(\Pi_p \leq i) = e^{-p}\left(1 + p + \dots + \frac{p^i}{i!}\right)$$

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & u_k \leq 1-p \\ 1, & u_k > 1-p \end{cases} \qquad \eta_k = \begin{cases} 0, & u_k < e^{-p} = p_0 \\ i, & u_k \in [p_{i-1}, p_i) \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$



$$P(\xi_1 \neq \eta_1) = [e^{-p} - (1-p)] + [1 - (e^{-p} + pe^{-p})] = p - pe^{-p} = p(1 - e^{-p}) \overset{\substack{1-p \leq e^{-p} \\ 1-e^{-p} \leq p}}{\leq} p^2$$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $\quad \xi_i \in B_p$ $\qquad \eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$, $\quad \eta_i \in \Pi_p$

$\qquad S_n \in B_{n,p}$ $\qquad\qquad \eta \in \Pi_{np}$

$$|P(S_n \in A) - P(\eta \in A)| \leq P(S_n \neq \eta) \overset{\text{хотя бы 1 разл.}}{\leq} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\xi_k \neq \eta_k\}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k \neq \eta_k) \leq np^2$$