$\sigma(\eta) = \{\{\omega : \eta(\omega) \in A\},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ - σ-алг., порожд. с.в. η

$\sigma(\bar\eta) = \{\{\omega : \bar\eta(\omega) \in A\},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$

$E(\xi|\eta) = E(\xi|\sigma(\eta)) \qquad E(\xi|\bar\eta) = E(\xi|\sigma(\bar\eta))$

$P(\xi \in (0,\infty)|A) = \dfrac{P(\{\xi \in (0,\infty)\} \cap A)}{P(A) > 0} \qquad P(\xi \in B|A) = \dfrac{P(\{\xi \in B\} \cap A)}{P(A)}$

$\boxed{E(\xi|A) = \dfrac{E(\xi \mathbb{1}_A)}{P(A)}}$, $P(A) > 0$

Лемма УМО для а.н.р.

Пусть (ξ, η) имеет а.н.р. : $E|\xi| < \infty$. Тогда: $E(\xi|\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}} x \cdot \dfrac{f_{\xi,\eta}(x,\eta)}{f_\eta(\eta)} dx$ ← ф-ла Байеса

← апостериорная плотность

Д-во: $\hat\xi(\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}} x \cdot \dfrac{f_{\xi,\eta}(x,\eta)}{f_\eta(\eta)} dx \sim \sigma(\eta)$

Надо:

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad E(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\eta \in A\}}) = E(\hat\xi(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta\in A\}})$

$E(\hat\xi(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta \in A\}}) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x \cdot \mathbb{1}_{\{y \in A\}} \cdot f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int\limits_{y\in\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y\in A\}} \int\limits_{x\in\mathbb{R}} x \cdot f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy =$

$= \int\limits_{y\in\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y\in A\}} f_\eta(y) \int\limits_{x\in\mathbb{R}} x \cdot \dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y\in A\}} f_\eta(y) \cdot \hat\xi(y)dy = E(\hat\xi(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta\in A\}})$

Лемма УМО для дискр.:

Пусть $E|\xi| < \infty$, η имеет дискр. распр-е. Тогда: $E(\xi|\eta) = E(\xi|\eta = a_k)$, если $\eta = a_k$, $k = 1, 2, \dots$

$E(\xi|\eta = a_k) = \dfrac{E(\xi; \eta = a_k)}{P(\eta = a_k)} = \dfrac{E(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\eta = a_k\}})}{P(\eta = a_k)}$

Д-во: $\hat\xi(a_k) \overset{def}{=} E(\xi|\eta = a_k) \qquad \hat\xi(\eta) \sim \sigma(\eta)$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad E(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\eta\in A\}}) = \sum\limits_{k: a_k \in A} E(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\eta = a_k\}}) = \sum\limits_{k: a_k\in A} E(\xi|\eta = a_k) \cdot P(\eta = a_k) = \sum\limits_{k: a_k \in A} \hat\xi(a_k) \cdot P(\eta = a_k) =$

$= E(\hat\xi(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta\in A\}})$

Немного поговорим о многомерном нормальном:

$\xi \in N_{\bar 0, I} \qquad \bar\eta : A\bar\xi + b \in N_{\bar b, AA^T}$

- $\bar\eta = N_{\bar b, diag(\sigma_k)} \Leftrightarrow \eta_i$ - незав.
- $\bar\eta \in N_{\bar b, \Sigma}$: $A\bar\eta + \bar d \in N_{A\bar b + \bar d, A\Sigma A^T}$

Теорема УМО для $N_{\bar b, \Sigma}$

Пусть $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}) \in N_{\bar 0, \Sigma}$, $\Sigma = \Sigma^T > 0$. Тогда

$E(\xi_{n+1}|\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum\limits_{k=1}^n c_k \cdot \xi_k$ п.н., где c_k - ед. реш. СЛУ $E\xi_{n+1} \cdot \xi_i = \sum\limits_{k=1}^n c_k E\xi_k \cdot \xi_i$, $i = 1, \dots, n$

Д-во: $\bar\xi_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \quad \Sigma_n = Cov(\bar\xi_n) \qquad E\xi_{n+1} \cdot \bar\xi_n = \Sigma_n \cdot \bar c$

$\zeta_{n+1} = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k)^T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ -c_1 & \dots & -c_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \zeta_{n+1} \in N_{**}$

$E\xi_i(\xi_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k) = E\xi_i \cdot \xi_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^n c_k E\xi_i \cdot \xi_k = 0 \qquad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \xi_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k \perp \xi_1, \dots, \xi_n$

$E(\xi_{n+1}|\xi_1, \dots, \xi_n) = E(\xi_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k|\xi_1, \dots, \xi_n) + E(\sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k|\xi_1, \dots, \xi_n) = \underbrace{E(\xi_{n+1} - \sum c_k\xi_k)}_{=0} + \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k =$

$= \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k$ п.н.

Основная часть лекции закончилась

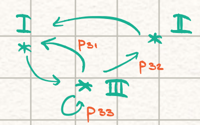
5. Случайные процессы

Опр Случайным процессом наз. отображ-е: $X_t(\omega): T \times \Omega \to \mathbb{R}$ X_t – с.в. $\forall t \in T$

Обычно $T = \mathbb{N}$ – дискр. время $T = \mathbb{R}_+$ – непр. время

Ex Дискретное время:

1 Цепь Маркова
(будущее не завис. от прошлого
при фикс. настоящем)



состояния любые (счётное кол-во)

$p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1$

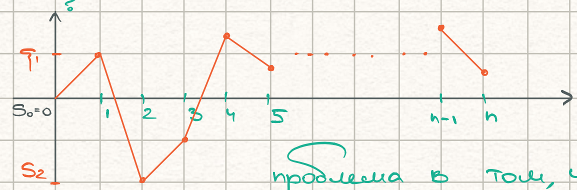
2 Ветвящийся процесс

$\xi_1 \in F$

ξ_{11}, ξ_{12} – н.о.р. $\in F$

штуки порождают другие как-то

3 Случайное блуждание
$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, ξ_i – н.о.р.



помним про ЦПТ и ЗБЧ

проблема в том, что не знаем, как обойдём и не разоримся ли по дороге

Непрерывное:

4 Винеровский процесс
приближает случайное блуждание
вообще фрактал и нигде не дифф-м

гифка в википедии класс

5 Пуассоновский процесс