3.6. Матрица ковариации

$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \qquad \Xi = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{1m} \\ \xi_{n1} & \xi_{nm} \end{bmatrix}$

Опр МО в $\mathbb{R}^n$: $E\bar{\xi} = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)^T$, $E|\xi_i| < \infty \ \forall i$

$$E\Xi = \begin{pmatrix} E\xi_{11} & \cdots & E\xi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E\xi_{n1} & \cdots & E\xi_{nm} \end{pmatrix}, \quad E|\xi_{ij}| < \infty \ \forall i,j$$

Св-ва:
1. $E(A\bar{\xi} + B\bar{\eta}) = AE\bar{\xi} + BE\bar{\eta}$
2. Ξ, H: $\forall i,j,k,l$ $\xi_{ij} \perp \eta_{kl}$. Тогда: $E(\Xi \cdot H) = E\Xi \cdot EH$

Опр Матрица ковариации:

$$Cov(\bar{\xi}) = E[(\bar{\xi} - E\bar{\xi})(\bar{\xi} - E\bar{\xi})^T] = E\begin{bmatrix} (\xi_1 - E\xi_1)^2 & \cdots & (\xi_1 - E\xi_1)(\xi_n - E\xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\xi_n - E\xi_n)(\xi_1 - E\xi_1) & \cdots & (\xi_n - E\xi_n)^2 \end{bmatrix}$$

$$[Cov(\bar{\xi})]_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$$

Св-ва:
1. $Cov(\bar{\xi} + \bar{a}) = Cov(\bar{\xi})$
2. $Cov(A\bar{\xi}) = ACov(\bar{\xi})A^T$
3. $\bar{\xi} \perp \bar{\eta} \Rightarrow Cov(\bar{\xi} + \bar{\eta}) = Cov(\bar{\xi}) + Cov(\bar{\eta})$

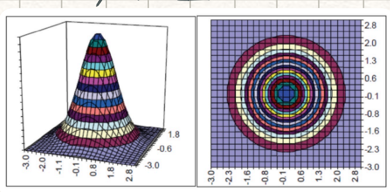
Д-во ч/з D

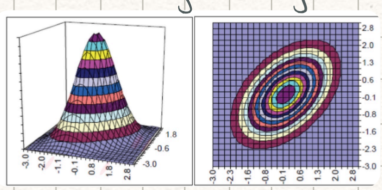
3.7. Многомерное нормальное распределение

Опр Многомерное нормальное распр-е: $\bar{\xi} \in N_{\bar{a}, \Sigma}$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \Sigma^T > 0$, если:

$$f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{(\bar{x}-\bar{a})^T \Sigma^{-1} (\bar{x}-\bar{a})}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ex $n = 2$ $\quad a = (0,0)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{a} = (0,0)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0{,}75$





Теорема о линейном преобразовании для $N_{\bar{a}, \Sigma}$

Пусть $\bar{\xi} \in N_{\bar{0}, I}$, $A: \det A \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$. $\bar{\eta} = A\bar{\xi} + b$. Тогда: $\eta \in N_{b, AA^T}$

Д-во: $P(\bar{\eta} \in B) = P(A\bar{\xi} + b \in B) = P(\bar{\xi} \in A^{-1}(B - b)) = \int\limits_{A^{-1}(B-b)} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^T x}{2}} d\bar{x} =$

$= \Big/ \bar{x} = A^{-1}(\bar{u} - b) \Big/ = \int\limits_B (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{u} - b)^T (AA^T)^{-1} (\bar{u} - b)} |\det A^{-1}| d\bar{u} \qquad |\det A^{-1}| = \frac{1}{\sqrt{\det A^T A}}$

Следствие:

Пусть $\bar{\xi} \in N_{\bar{a}, \Sigma}$. $Cov(\xi_i, \xi_j) = 0 \ \forall i \neq j \Leftrightarrow \xi_i \perp \xi_j \ \forall i,j$

Д-во: $\Rightarrow$ $Cov(\xi_i, \xi_j) = 0 \Rightarrow \Sigma = diag(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \Rightarrow f_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_1}{2\sigma_1^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{x_n}{2\sigma_n^2}} =$

$= f_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$

Следствие:

Если $\bar{\xi} \in N_{\bar{0}, I} \Rightarrow \bar{\eta} = Q\bar{\xi} \in N_{\bar{0}, I}$, если $Q^T = Q^{-1}$

Контрпример.

1. $\bar{\xi} = (\eta, \eta)$, $\eta \in N_{0,1}$

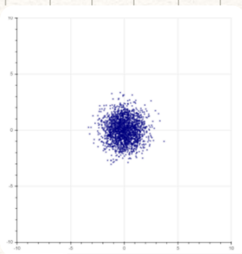
   ↳ вырожд. $\Rightarrow$ не многомерн. норм. вект.

2. $\bar{\xi} = (\eta, \nu\eta)$, $\eta \in N_{0,1}$ $\perp\!\!\!\perp$

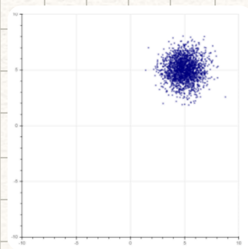
ν	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

— тут невыр., но не многомерн.

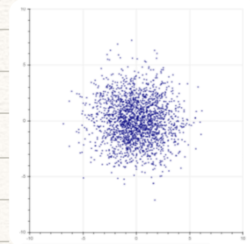
Ex $a = (0,0)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



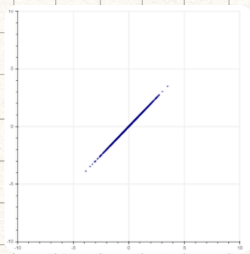
$a = (5,5)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



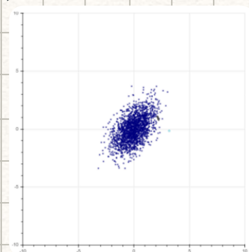
$a = (0,0)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



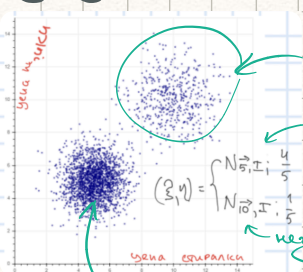
$a = (0,0)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



$a = (0,0)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$



Связь (зависимость) м/у с.в.:



тут кризисы

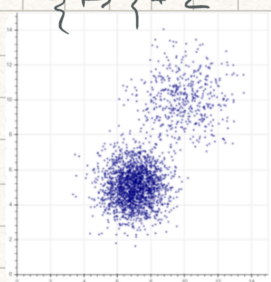
нез

нез

тут их нет

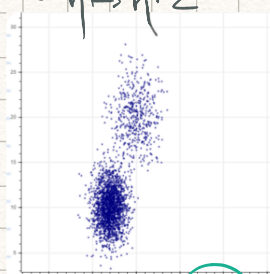
а вот (ξ, η) уже как бы зависимы, но только от кризиса

• $\xi \mapsto \xi + 2$

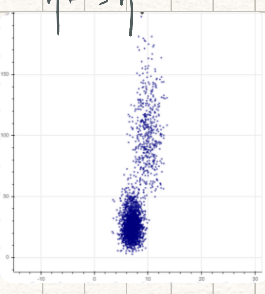


тут структура зависимости не меняется

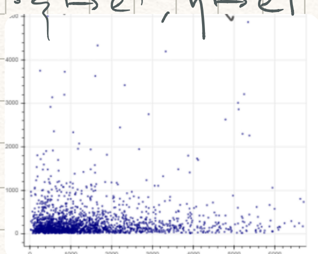
• $\eta \mapsto \eta \cdot 2$



• $\eta \mapsto \eta^2$



• $\xi \mapsto e^{\xi}$, $\eta \mapsto e^{\eta}$



← Даже тут структура завис-ти не меняется, хоть её и не видно уже.

Возникает логичный вопрос, можно ли эту зависимость изменить?

Так вот можно, в след. параграфе поймём как.

3.8. Копулы (Copula - Couple)

Опр Пусть $u_1, \dots, u_n$ имеют $U_{0,1}$. **Копулой** наз. $C(u_1, \dots, u_n) = F_{\bar{u}}(\bar{u}) \cdot P(U_1 < u_1, \dots, U_n < u_n)$, $\bar{u} \in [0,1]^n$

Теорема Sklar:

$\forall$ с.в. ξ $\exists$ копула $C(u_1, \dots, u_n)$: $F_{\xi}(\bar{x}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_n}(x_n))$

Если все $F_{\xi_i}(\cdot) \in C(\mathbb{R})$, то C - единственна

Д-во: (в непр. случае) Пусть $F_{\xi_i} \in C(\mathbb{R})$

$F_{\xi}(\bar{x}) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(F_{\xi_1}(\xi_1) \leq F(x_1), \dots, F_{\xi_n}(\xi_n) \leq F(x_n)) =$

$= C(F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_n}(x_n))$, где $C(u_1, \dots, u_n) = P(\underbrace{F_{\xi_1}(\xi_1)}_{\in U_{0,1}} < u_1, \dots, \underbrace{F_{\xi_n}(\xi_n)}_{\in U_{0,1}} < u_n)$

Range $F_{\xi_i} = [0,1] \longrightarrow$ единств-ть

Ex копул ($n=2$)

1. $U_1 \perp\!\!\!\perp U_2$, $U_1, U_2 \in U_{0,1}$ $\quad C(u,v) = P(U_1 < u, U_2 < v) = P(U_1 < u) P(U_2 < v) = uv$, $u, v \in [0,1]$

2. $U_1 = U_2$, $U_1, U_2 \in U_{0,1}$ $\quad C(u,v) = P(U_1 < u, U_2 < v) = P(U_1 < u, U_1 < v) = \min\{u, v\}$

3. $U_1 = 1 - U_2$, $U_1 \in U_{0,1}$ $\quad C(u,v) = P(1 - U_2 < u, U_2 < v) = \max\{u + v - 1, 0\}$