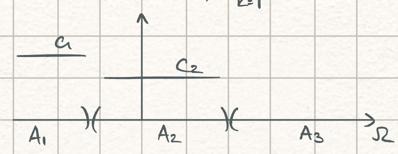
3. Числовые характеристики распределения

3.1. Математическое ожидание

$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$ — мат. ожидание

Опр Простая сл. в. $\xi(\omega)=\sum_{k=1}^N c_k 1_{A_k}(\omega)$, где $N\in\mathbb{N}$, $c_k\in\mathbb{R}$, $\bigcup_{k=1}^N A_k=\Omega$, $A_i\cap A_j=\varnothing\ \forall i\neq j$,

$1_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$ — индикатор



простые ⇕ ступенчатые

Опр Мат. ожидание для простых с.в.: $E\xi=\sum_{k=1}^N c_k P(A_k)$

Св-ва:
1. $Ec=c$
2. $E\alpha\xi=\alpha E\xi \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$ — однородность
3. $\xi\le\eta \Rightarrow E\xi\le E\eta$
4. $|E\xi|\le E|\xi|$ — нер-во Δ-ка   можно из (3) д-ть
5. $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$ — аддитивность

Д-во: $\xi=\sum_{k=1}^N c_k 1_{A_k}$ $\quad\eta=\sum_{n=1}^M d_k 1_{B_n}$ $\quad\xi+\eta=\sum_{k,n}(c_k+d_n)1_{A_k\cap B_n}$

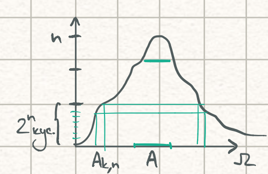
$E(\xi+\eta)=\sum_{k,n}(c_k+d_n)P(A_k\cap B_n)=\sum_{k=1}^N\sum_{n=1}^M c_k P(A_k\cap B_n)+\sum\sum d_n P(A_k\cap B_n)=$

$=\sum_k c_k\sum_n P(A_k\cap B_n)+\ldots \overset{\cap B_n=\Omega}{=} \sum_n c_k P(A_k)+\sum_n d_n P(B_n)=E\xi+E\eta$

Опр $E(\xi;B)=\int_B\xi(\omega)P(d\omega)=\int_\Omega\xi(\omega)1_B(\omega)P(d\omega)$

Лемма о приближении с.в. простыми с.в.:
$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ посл-ть простых ξ_n: $\forall\omega\in\Omega$ $\quad\xi_n(\omega)\nearrow_{n\to\infty}\xi(\omega)$ (сходится, возрастая)

Д-во: $\xi_n(\omega)=\begin{cases}0, & \underbrace{\xi(\omega)\ge n}_{A}\\ \frac{k}{2^n}, & \underbrace{\xi(\omega)\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)}_{A_{k,n}}\end{cases}$, $k=0,\ldots,n2^n-1$



всего $n\cdot 2^n$ кус.

$\xi_n(\omega)\ge\xi_{n,1}(\omega)\ge\xi_{n,2}(\omega)\ge\ldots\quad\forall\omega\ \forall n$

Разбивается не по обл-ти опр-я, а по обл-ти знач-й — ключевое место

$\forall\omega\in\Omega\quad|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\le\frac{1}{2^n}$

Осталось понять, явл. ли $\xi_n(\omega)$ сл. в.:

$\xi_n(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^n}1\{A_{k,n}\}$ — простая с.в., т.к. $A_{k,n}$ измеримы (т.к. ξ — с.в.)

Лемма о единственности предела

Пусть $\xi>0$, $\xi_n\nearrow_{n\to\infty}\xi$ $\quad\eta_k\nearrow_{k\to\infty}\xi$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}E\xi_n=\lim_{k\to\infty}E\eta_k$

Д-во: $\forall n\ge1$ $\quad E\xi_n\le\lim_{k\to\infty}E\eta_k$ ← для начала это покажем   ← если $\xi_n-\eta_k\le\varepsilon$ $1=1$, иначе 0

$\xi_n-\eta_k=(\xi_n-\eta_k)1\{\xi_n-\eta_k<\varepsilon\}+(\xi_n-\eta_k)1\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\}<\varepsilon+(\xi_n-\eta_k)1\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\}$

$E(\xi_n-\eta_k)\le E\varepsilon+E((\xi_n-\eta_k)1\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\})\le\varepsilon+E(\xi_n 1\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\})\le$

$\le\varepsilon+c_n E 1\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\}=\varepsilon+c_n P(\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon)$

$\Rightarrow E\xi_n\le\varepsilon+c_n P(\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon)+E\eta_k$

вот с этой частью осторожно. где лажа

$B_k=\{\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon\}$ $\quad B_k\supset B_{k+1}\supset B_{k+2}\supset\ldots$

$\bigcap_{k=1}^\infty B_k=\varnothing$, т.к. $\forall\omega\in\Omega\ \exists K:\ \forall k\ge K\quad\eta_k(\omega)-\xi>-\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow B_k\subset\{\xi_n-\xi>\frac{\varepsilon}{2}\}=\varnothing\quad\forall k\ge K$

$\lim\limits_{k\to\infty} P(B_k)=0 \qquad E\xi_n \le \varepsilon + c_n \underbrace{P(\xi_n-\eta_k\ge\varepsilon)}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} + E\eta_k \to \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$

$\Rightarrow E\xi_n \le \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$, аналогично получим $E\eta_k \le \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$

$\downarrow n\to\infty \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow k\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \le \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k \qquad \lim E\eta_k \le \lim E\xi_n \qquad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$

Опр Мат. ожидание: Если $\xi\ge0$ $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$, где $\xi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \xi$ — простые с.в.

$\xi=\xi^+-\xi^-$, $\quad \xi^+=\max\{0,\xi\}$, $\quad \xi^-=\max\{0,-\xi\}$

$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, если $E|\xi| = E\xi^+ + E\xi^- < \infty$

Св-ва

1. $E\alpha\xi = \alpha E\xi \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$
2. $\xi\le\eta \Rightarrow E\xi\le E\eta$
3. $|E\xi|\le E|\xi|$
4. $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$, $\quad E(|\xi|+|\eta|)<\infty$
5. $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \quad A_i\cap A_j=\varnothing \ \forall i\ne j \quad E|\xi|<\infty \ : \ E(\xi;A)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} E(\xi;A_k)$ — счёт. аддит. интегралов

Д-во: $A\cap B=\varnothing \quad E(\xi;A\cup B)=E\xi\mathbb{1}_{A\cup B}=E\xi(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B)=E(\xi;A)+E(\xi;B)$

Пусть $\xi\ge0$. Д-м, что если A_n: $P(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, то $E(\xi,A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$B_m=\{\xi\ge m\} \quad P(\overline{B_m})\xrightarrow[m\to\infty]{}1 \quad P(B_m)\xrightarrow[m\to\infty]{}0$

$\forall\varepsilon>0 \ \exists M \ \forall m\ge M \ P(B_m)<\varepsilon$

$E(\xi;A_n)=E(\xi;A_n\cap B_m)+E(\xi;A_n\cap\overline{B_m}) \le$

$\xi_m \underset{m\to\infty}{\nearrow}\xi \qquad \xi\ge\xi\mathbb{1}_{\overline{B_m}}\ge\xi_m\mathbb{1}_{\overline{B_m}} \qquad (\xi_m \underset{m\to\infty}{\nearrow}\xi)$

$\Rightarrow E\xi\ge E\xi\mathbb{1}_{\overline{B_m}}\ge E\xi_m\mathbb{1}_{\overline{B_m}}\xrightarrow[m\to\infty]{}E\xi \qquad \Rightarrow E\xi\mathbb{1}_{B_m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$

$\le E(\xi;B_m)+\underbrace{m\cdot P(A_n)}_{\downarrow n\to\infty \atop 0} \qquad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}E(\xi;A_n)\le \underbrace{E(\xi;B_m)}_{m\to\infty \ \to 0} \quad \forall m$

$\Rightarrow E(\xi,A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad\qquad \xi=\xi^+-\xi^-$

$E(\xi;A)-E(\xi;\bigcup\limits_{k=1}^{N}A_k)=E(\xi;\bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty}A_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$P(\bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty}A_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ т.к. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)=P(A)<\infty$

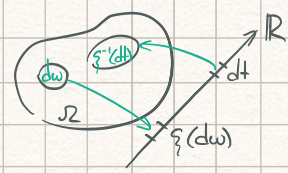
$\Rightarrow E(\xi;A)-\sum\limits_{k=1}^{N}E(\xi;A_k)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$

Зам МО по распр-ю

$\xi \mapsto P_\xi(B)=P(\xi\in B)$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\qquad \int\limits_{\mathbb{R}} g(t)P_\xi(\omega t)$

$E\xi=\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)P(d\omega)=[\xi(\omega)=t]=\int\limits_{B}tP(\xi^{-1}(dt))=\int\limits_{\mathbb{R}}tP_\xi(dt)$

это не д-во и нормального не будет



$E\xi=\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)P(d\omega)=\int\limits_{\mathbb{R}}tP_\xi(dt)$