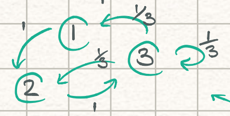
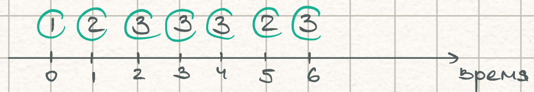
Цепи Маркова





← просто состояния м/у ктр можно как-то переходить

Опр Посл-ть с.в. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ наз. **цепью Маркова**, если $\forall n\geq 1$ $\forall i_0, i_1, \dots, i_n \in \{1,2,3,\dots\}$ — т.е. счётное число сост-й, но мы смотрим для конечного

$$P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

← т.е. на прошлые состояния всё равно

Опр Цепь Маркова наз. **однородной**, если $P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$ не завис. от n

Опр $p_{ij} := P(X_1 = j \mid X_0 = i)$ — вероятность перехода из i в j

$p_{ij}(n) := P(X_n = j \mid X_0 = i)$ — вероятность перехода из i в j за n шагов

$\pi_i^0 = P(X_0 = i)$ $\qquad$ $\pi_i^n = P(X_n = i)$ $\qquad$ $i,j \in \{1,2,\dots\}$

Опр Состояние наз. **поглощающим**, если из него нельзя перейти ни в какое сост-е

$$\pi_j^1 = P(X_1 = j) = \sum_i P(X_1 = j \mid X_0 = i)\cdot P(X_0 = i) = \sum_i p_{ij}\,\pi_i^0$$

$$\pi^0 = \begin{pmatrix}\pi_1^0\\ \vdots \\ \pi_N^0\end{pmatrix} \qquad \pi^1 = \begin{pmatrix}\pi_1^1\\ \vdots \\ \pi_N^1\end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & p_{NN}\end{pmatrix} \qquad \pi^1 = P^T\cdot\pi^0$$

$$\pi_j^n = P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)\cdot P(X_{n-1} = i) = \sum_i p_{ij}\,\pi_i^{n-1} \qquad \pi^n = P^T\pi^{n-1} = \dots = (P^T)^n\cdot\pi^0$$

$$\pi_j^n = P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j \mid X_0 = i)\,P(X_0 = i) = \sum_i p_{ij}(n)\,\pi_i^0 \quad\Rightarrow\quad P^n = (p_{ij}(n))_{ij}$$

Теорема эргодическая:

Пусть цепь Маркова с конечн. числом сост-й N и $\exists n_0 \geq 1$: $p_{ij}(n_0) > 0$ $\forall i,j \in \{1,\dots,N\}$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$ (т.е. не завис. от i) $i,j \in \{1,\dots,N\}$ и при этом π явл-ся единств. реш-ем $\pi = P^T\pi$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$

Зам 1) $\pi^0 = \pi$ $\quad \approx \pi_1\cdot 10^6$ в 1м сост. $\quad \approx \pi_2\cdot 10^6$ во 2м сост.

$\pi^1 = P^T\cdot\pi^0 = P^T\cdot\pi = \pi$ ← стационарность для случ. процессов

$\pi^n = P^T\pi$

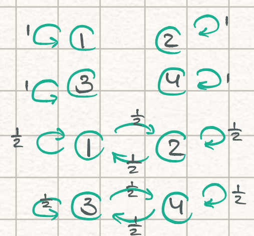
2) $$\pi_j^n = P(X_n = j) = \sum P(X_n = j \mid X_0 = i)\cdot P(X_0 = i) = \sum_i \underbrace{p_{ij}(n)}_{\xrightarrow{n\to\infty} p_j}\cdot\pi_i^0 \longrightarrow \sum_i \pi_j\,\pi_i^0 = \pi_j\sum_i^N \pi_i^0 = \pi_j$$

Опр $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{1N} \\ p_{N1} & p_{NN}\end{pmatrix}$ $\quad \sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$ — **стохастическая матрица** $\quad (P-E)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

Опр **Разложимые** цепи Маркова:

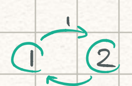
$$P = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 & \\ \frac12 & \frac12 & & \\ & & \frac12 & \frac12 \\ 0 & & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}$$

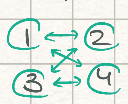


Опр **Периодические** цепи Маркова

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$



из 1:
1 ш. 2
2 ш. 1
3 ш. 2
4 ш. 1



$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \to \dots$$

Зам Эргодическая теорема для неразложимых и непериодич.

Д-во эргодической теоремы:

$p_{ij}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_j$ $\qquad \mathcal{M}_k = \max\limits_i p_{ik}(n) \qquad m_k = \min\limits_i p_{ik}(n)$

$p_{ij}(n+1) = \sum\limits_{k=1}^{N} p_{ik} \cdot p_{kj}(n) \Rightarrow$

$m_j(n) \leqslant m_j(n) \sum\limits_{k=1}^{N} p_{ik} \leqslant p_{ij}(n+1) \leqslant \mathcal{M}_j(n) \cdot \sum\limits_{k=1}^{N} p_{ik} = \mathcal{M}_j(n)$

$m_j(n) \leqslant m_j(n+1) \leqslant \mathcal{M}_j(n+1) \leqslant \mathcal{M}_j(n) \Rightarrow \mathcal{M}_j(n) \searrow,\ m_j(n) \nearrow$

$\exists i,k:$ $\mathcal{M}_j(n+n_0) = p_{ij}(n+n_0) = \sum\limits_{\ell} p_{i\ell}(n_0) \cdot p_{\ell j}(n)$

$m_j(n+n_0) = p_{kj}(n+n_0) = \sum\limits_{\ell} p_{k\ell}(n_0) \cdot p_{\ell j}(n)$

$A = \{\ell \mid p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0) \geqslant 0\} \neq \varnothing$

$B = \{\ell \mid p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0) < 0\}$

$\mathcal{M}_j(n+n_0) - m_j(n+n_0) = \sum\limits_{\ell} [p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0)] \cdot p_{\ell j}(n) =$

$= \sum\limits_{\ell\in A} [p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0)] p_{\ell j}(n) + \sum\limits_{\ell \in B} [p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0)] p_{\ell j}(n) \leqslant$

$\leqslant \mathcal{M}_j(n) \sum\limits_{\ell\in A} [p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0)] + m_j(n) \sum\limits_{\ell\in B} [p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0)] = (\mathcal{M}_j(n) - m_j(n)) \overbrace{\sum\limits_{\ell\in A} [p_{i\ell}(n_0) - p_{\ell j}(n_0)]}^{d_{ik}}$

$\sum\limits_{\ell\in A} + \sum\limits_{\ell\in B} = \sum\limits_{\ell=1}^{N} [p_{i\ell}(n_0) - p_{k\ell}(n_0)] = 1 - 1 = 0$

$\sup\limits_{ik} d_{ik} \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{N} p_{i\ell}(n_0) - \sum\limits_{\ell\in A} p_{k\ell}(n_0) = 1 - \sum\limits_{\ell\in A} p_{k\ell}(n_0) < 1$

$\mathcal{M}_j(n+n_0) - m_j(n+n_0) \leqslant \sup\limits_{ik} d_{ik} \cdot (\mathcal{M}_j(n) - m_j(n)) \Rightarrow \mathcal{M}_j(n) - m_j(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{M}_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \lim\limits_{n\to\infty} m_j(n) =: \pi_j$

$p_{ij}(n+1) = \sum\limits_{k=1}^{N} p_{ik}(n) \cdot p_{kj} \qquad \sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}(n) = 1$

$\downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n\to\infty$

$\pi_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \pi_k \cdot p_{kj} \qquad \sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$

$\Rightarrow \bar{\pi} = P^T \bar{\pi}$

Единств-ть: Пусть $\bar{\pi}^*$: $\bar{\pi}^* = (P^T)^n \bar{\pi}^*$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} \pi_k^* = 1$

$\pi_k^* = \sum\limits_{\ell=1}^{N} p_{\ell k}(n) \cdot \pi_\ell^*$

$\downarrow n\to\infty$

$\pi_k^* = \sum\limits_{\ell=1}^{N} \pi_k \cdot \pi_\ell^* = \pi_k \sum\limits_{\ell=1}^{N} \pi_\ell^* = \pi_k$