$E(\xi|\eta)$:

Ex 1 $\xi \in N_{\eta,1}$ $\eta \in U_{0,1}$ $E(\xi|\eta) = \eta$ какая-то двойная рандомизация

2 Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.о.р. $\eta \in \{1, 2, 3, \dots\}$ $\xi = \sum_{k=1}^{\eta} \xi_k$ нез-ть не нужна

$E(\xi|\eta) = E(\sum_{k=1}^{\eta} \xi_k | \eta) = \eta \cdot E\xi_1$

3 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ - погода или $t°$ $E(\xi_5 | \xi_1, \dots, \xi_4)$ - тут непонятки

... позавчера вчера сегодня

3.9. Условное математическое ожидание

$\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ - вер. пр-во

$\mathcal{G}$ - σ-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Опр Пусть ξ - св. УМО св. ξ отн. σ-алг. $\mathcal{G}$ наз. такая $\hat{\xi}$, что:

1 $\hat{\xi} \sim \mathcal{G}$ в $\mathcal{G}$ содержится вся инф-ция, нужная, чтобы опр-ть $\hat{\xi}$

2 $\forall B \in \mathcal{G}$ $E(\xi \cdot 1\!\!1_B) = E(\hat{\xi} 1\!\!1_B)$

Обозначаем $\hat{\xi} = E(\xi|\mathcal{G})$ неконструктивное опр-е

Теорема о $\exists!$ УМО:

Если $E|\xi| < \infty$, то $\exists!$ $E(\xi|\mathcal{G})$ с точностью до мн-ва нулевой вер-ти.

Св-ва УМО:

Пусть $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$, $\mathcal{G}$ - σ-алгебра:

1 Если $\xi = a$ п.н., то $E(\xi|\mathcal{G}) = a$ п.н.

Д-во: $a \sim \mathcal{G}$ $\forall B \in \mathcal{G}$ $E(\xi \cdot 1\!\!1_B) = E(a \cdot 1\!\!1_B)$ $\Rightarrow$ $a = E(\xi|\mathcal{G})$ подходит под опр-е $\Rightarrow$ по т. единств-но

2 Если $\xi \sim \mathcal{G}$, то $E(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ п.н.

Д-во: $\xi \sim \mathcal{G}$, $\forall B \in \mathcal{G}$ $E(\xi \cdot 1\!\!1_B) = E(\xi \cdot 1\!\!1_B)$

3 Если $\xi \le \eta$ п.н., то $E(\xi|\mathcal{G}) \le E(\eta|\mathcal{G})$ п.н.

Д-во: $\hat{\xi} = E(\xi|\mathcal{G})$ $\hat{\eta} = E(\eta|\mathcal{G})$. $B = \{\hat{\xi} > \hat{\eta}\} \in \mathcal{G}$

$0 \ge E((\hat{\eta} - \hat{\xi}) 1\!\!1_B) = E((\eta - \xi) 1\!\!1_B) \ge 0$ $\Rightarrow$ $E((\hat{\eta} - \hat{\xi}) 1\!\!1_B) = 0$ $\Rightarrow$ $(\hat{\eta} - \hat{\xi}) 1\!\!1_B = 0$ п.н. $\Rightarrow P(B) = 0$

4 $E(a\xi + b\eta | \mathcal{G}) = aE(\xi|\mathcal{G}) + bE(\eta|\mathcal{G})$

Д-во: упр 1: $E(a\xi|\mathcal{G}) = aE(\xi|\mathcal{G})$

упр 2: $E(\xi + \eta|\mathcal{G}) = E(\xi|\mathcal{G}) + E(\eta|\mathcal{G})$

5 $|E(\xi|\mathcal{G})| \le E(|\xi| \,|\, \mathcal{G})$ п.н.

Д-во: $\xi \le |\xi|$ $\Rightarrow$ $E(\xi|\mathcal{G}) \le E(|\xi| \,|\, \mathcal{G})$ п.н.

$-\xi \le |\xi|$ $\quad$ $-E(\xi|\mathcal{G}) \le E(|\xi| \,|\, \mathcal{G})$ п.н.

6. $\mathbb{E}\mathbb{E}(\xi|G) = \mathbb{E}\xi$ аналог ФПВ

Д-во: Возьмём $B = \Omega$ $\quad \mathbb{E}\hat\xi = \mathbb{E}(\hat\xi\cdot 1_\Omega) = \mathbb{E}(\xi\cdot 1_\Omega) = \mathbb{E}\xi$

7. Если $\xi \perp G$ (т.е. $\forall B\in G$ $A\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P(B, \xi\in A) = P(B)\cdot P(\xi\in A)$), то $\mathbb{E}(\xi|G) = \mathbb{E}\xi$ п.н.

Д-во: $\mathbb{E}\xi \sim G$, $\forall B\in G$ $\mathbb{E}(\xi\cdot 1_B) = \mathbb{E}\xi\cdot \mathbb{E}1_B = \mathbb{E}(1_B\cdot \mathbb{E}\xi)$

8. Пусть $G_1 \subseteq G_2$ $\quad \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|G_1)|G_2] = \mathbb{E}(\xi|G_1)$
$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|G_2)|G_1] = \mathbb{E}(\xi|G_1)$

Д-во: 1) т.к. $\mathbb{E}(\xi|G_1)\sim G_2$
2) $\mathbb{E}(\xi|G_1)\sim G_1$ $\quad \forall B\in G_1$ $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|G_1)1_B) = \mathbb{E}(\xi 1_B) = /B\in G_2/ = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|G_2)1_B)$

9. Пусть $\eta\sim G$: $\mathbb{E}|\xi\eta|<\infty$ $\quad \mathbb{E}(\xi\eta|G) = \eta\,\mathbb{E}(\xi|G)$ п.н.

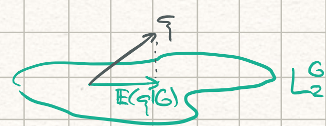
Д-во: $\hat\xi = \mathbb{E}(\xi|G)$ $\quad \hat\xi\sim G$ $\quad \eta\hat\xi\sim G$. Пусть $B_0\in G$, $\eta = 1_{B_0}$
$\forall B\in G$ $\quad \mathbb{E}(\xi\eta 1_B) = \mathbb{E}(\xi 1_{B_0\cap B}) = \mathbb{E}(\hat\xi 1_{B_0\cap B}) = \mathbb{E}(\hat\xi\eta 1_B)$
Пусть $\eta = \sum_{k=1}^{k} c_k 1_{B_k}$, тогда $\mathbb{E}(\xi\eta|G) = \eta\,\mathbb{E}(\xi|G)$ п.н.
$\forall\eta$ $\exists \eta_k \xrightarrow{пн} \eta$, η_k — простые $\quad |\eta_k|\le|\eta_{k+1}|\le\ldots\le|\eta|$
$\mathbb{E}(\xi\eta|G) \xleftarrow{L_2} \mathbb{E}(\xi\eta_k|G) = \eta_k \mathbb{E}(\xi|G) \xrightarrow{пн} \eta\,\mathbb{E}(\xi|G)$
$\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi\eta|G) - \mathbb{E}(\xi\eta_k|G)| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi(\eta-\eta_k)|G)| \le \mathbb{E}\mathbb{E}(|\xi|\cdot|\eta-\eta_k||G) = \overset{\le|\xi|2|\eta|}{\mathbb{E}|\xi|\cdot\underbrace{|\eta-\eta_k|}_{\to 0}} \longrightarrow 0$

тут были слова про т. Лебега

$\zeta_k \xrightarrow{пн} \zeta_1$ $\quad \zeta_k \xrightarrow{L_2} \zeta_2$ $\Rightarrow \zeta_k \xrightarrow{P} \zeta_2$ $\Rightarrow \zeta_{n_k} \xrightarrow{пн} \zeta_2$ $\Rightarrow \zeta_1 = \zeta_2$ п.н.

Опр $L_2 = \{\xi:\Omega\to\mathbb{R} : \mathbb{E}\xi^2<\infty\}$ — Гильбертово пр-во со скал. пр-ем $\langle\xi,\eta\rangle = \mathbb{E}\xi\eta$
$L_2^G = \{\xi:\Omega\to\mathbb{R} \mid \xi\sim G, \mathbb{E}\xi^2<\infty\}$ — замкн. подпр-во

Теорема УМО — ортопроекции
Пусть $\mathbb{E}\xi^2<\infty$. Тогда $\forall\eta\in L_2^G$ $\quad \langle\eta, \xi - \mathbb{E}(\xi|G)\rangle = 0$
$\min_{\eta\in L_2^G}\|\xi-\eta\|_2 = \|\xi - \mathbb{E}(\xi|G)\|_2$



кто-то так опр-т УМО

Д-во: $\forall\eta\in L_2^G$ $\quad \mathbb{E}(\eta(\xi - \mathbb{E}(\xi|G))) = \mathbb{E}(\eta\xi) - \mathbb{E}(\eta\,\mathbb{E}(\xi|G)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\mathbb{E}(\eta\xi|G) = 0$
$\hat\xi = \mathbb{E}(\xi|G)$
$\|\eta-\xi\|_2^2 = \|\eta-\hat\xi+\hat\xi-\xi\|_2^2 = \|\eta-\hat\xi\|^2 + 2\underbrace{\langle \overset{\in L_2^G}{\eta-\hat\xi}, \overset{\mathbb{E}(\xi|G)-\xi}{\hat\xi-\xi}\rangle}_{=0} + \|\hat\xi-\xi\|^2 = \|\eta-\hat\xi\|^2 + \|\hat\xi-\xi\|^2 \ge \|\hat\xi-\xi\|^2$

Хотим перейти от $\mathbb{E}(\xi|G)$ к $\mathbb{E}(\xi|\eta)$:
$\sigma(\eta) = \{\{\omega: \eta(\omega)\in A\}, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
$\sigma(\eta_1,\eta_2) = \{\{\omega: (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega))\in A\}, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$

Лемма:
Если $(\xi,\eta)\sim$ дискр. распр-е. $\quad \mathbb{E}(\xi|\eta) = \sum_k a_k P(\xi=a_k|\eta)$

но понять бы, что это за штука

$P(\xi=a_k|\eta) = \mathbb{E}(1_{\{\xi=a_k\}}|\eta)$