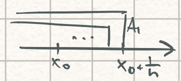
То, чего не хватало в прошлой лекции:

Св-во:

Ч $F_\xi(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} F_\xi(x) = P(\xi\le x_0)$ $\qquad P(\xi=x)=F(x+0)-F(x)$

Д-во: $x_n = x_0+\frac{1}{n}$ $\qquad A_n=\{\xi<x_0+\frac{1}{n}\}$ $\qquad A_1\supseteq A_2\supseteq\dots$ $\qquad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\{\xi\le x_0\}$



$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_0+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P(\bigcap^{\infty} A_n) = P(\xi\le x_0)$

$\{\xi=x\}=\{\xi\le x\}\setminus\{\xi<x\} \Rightarrow P(\xi=x)=P(\xi\le x)-P(\xi<x)$

Опр Сл.в. ξ имеет смешанное распр-е, если $\exists \xi_1$ – дискр., ξ_2 – а.н.р., ξ_3 – синг.
$p_1,p_2,p_3\in[0,1)$ $\quad \sum\limits_{i=1}^{3} p_i=1$

$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad P_\xi(B)=p_1P_{\xi_1}(B)+p_2P_{\xi_2}(B)+p_3P_{\xi_3}(B)$

$F_\xi(x)=P(\xi<x)=P(\{\omega:\xi(\omega)\in(-\infty,x)\})=P_\xi((-\infty,x))$

$F_\xi(x)=\sum\limits_{i=1}^{3} p_iF_{\xi_i}(x)$

Продолжаем:

Бернулли:

Ex • $\Omega=\{О, Р\}$ ($\frac12$, $\frac12$) $\qquad \xi(\omega)=\begin{cases}0, & \omega=О\\ 1, & \omega=Р\end{cases}$ $\qquad \xi\in B_{1/2}$

• 10^5 людей страхуем $\qquad$ У – p $\qquad$ Н – $(1-p)$ $\qquad \xi(\omega)=\begin{cases}0, & \text{если „кто-то умер"}\\ 1, & \text{иначе}\end{cases}$
$|\Omega| = 2^{10^5}$ $\qquad$ {„кто-то умер"} $=\{S_n\ge 1\}$
$\xi\in B_{P(S_n=0)=q^{10^5}}$

• $\langle\Omega, F, P\rangle$ $\qquad \xi(\omega)=\mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$ $\qquad \xi\in B_{P(A)}$

$p=P(\xi=1)=P(\{\omega:\omega\in A\})=P(A)$

Опр Сл.в. ξ имеет биномиальное распр-е, т.е. $\xi\in B_{n,p}$ $\quad n\ge1$ $\quad p\in[0,1]$, если:
$P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $\qquad k=0,\dots,n$

Ex Схема Бернулли
$\xi(\omega)=5\in B_{5,1}$ – неинтересно :c
$\xi(\omega)=S_n(\omega)$ – кол-во успехов в первых n испыт-х.

гд. **Опр** Сл.в. ξ имеет геометрическое распр-е, т.е. $\xi\in G_p$, $p\in[0,1]$, если
$P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,\dots$

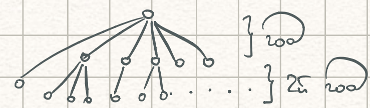
Ex Схема Бернулли $\qquad \xi(\omega)$ = Номер 1го успешного испыт-я

Св-во нестарения:
$\forall n,k\ge1$ $\quad P(\xi>n+k\mid\xi>k)=P(\xi>n)$ $\qquad$ когда ждать успеха? столько же, сколько с самого начала

Д-во: $P(\xi>n)=P(\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty}\{\xi=k\})=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}P(\xi=k)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)}=(1-p)^n$

$$P(\xi>n+k \mid \xi>k) = \frac{P(\{\xi>n+k\}\cap\{\xi>k\})}{P(\xi>k)} = \frac{P(\xi>n+k)}{P(\xi>k)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^k} = (1-p)^n$$

Ex Сколько людей заражу за год/два
Распр-е должно быть одно.
Σ случ. кол-ва случ. величин
(св-во геом. распр-я)



$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$, ура, всё ок! Для биномиального тоже надо бы

Опр Сл.в. ξ имеет распр-е Пуассона, т.е. $\xi \in \Pi_\lambda$, $\lambda>0$, если
$P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,\dots$

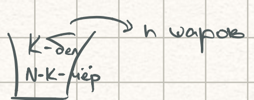
кол-во клиентов, ктр пришли за время t

Ex $P(\xi=10) = \frac{\lambda^{10}}{10!}e^{-\lambda}$

$$\sum_{k=0} P(\xi=k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

Опр Сл.в. ξ имеет гипергеометрич. распр-е, т.е. $\xi \in HG_{N,K,n}$, $N\ge1$, $K\le N$, $n\le N$, если
$P(\xi=k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$ $k=0,\dots,\min\{K,n\}$

Ex



$P(k\text{ белых}) = ?$

Ф-ии строим:

ξ	0	1	5
P	1/6	1/6	2/3

$F_\xi(x) = P(\xi<x)$

Абсолютно непрерывные распред-я:

Опр Равномерное распр-е: $\xi \in U_{a,b}$, $-\infty<a<b<\infty$, если
$$f_\xi(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$F_\xi(x) = P(\xi<x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

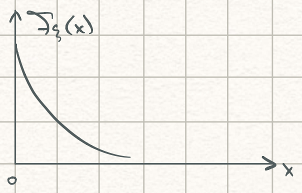
везде можно ставить =

Ex Геом. вероятность на $\Omega=[a,b]$: если $\xi\in U_{0,1}$ $\eta = a\xi+b \in U_{b,a+b}$, $a>0$

Д-во: $F_\eta(x) = P(\eta<x) = P(a\xi+b<x) = P\left(\xi<\frac{x-b}{a}\right) = \begin{cases}0, & \frac{x-b}{a}\le 0\\ \frac{x-b}{a}, & \frac{x-b}{a}\in[0,1]\\ 1, & \frac{x-b}{a}\ge 1\end{cases} = \begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 1, & x\ge b\end{cases}$

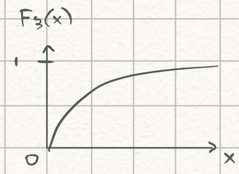
↑ можно, т.к. однозначно задаёт распр-е

Опр Показательное (экспоненциальное) распр-е:
$\xi\in E_\alpha$, $\alpha>0$, если $f_\xi(x) = \begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$



$$P(\xi \in (-1,0)) = \int_{-1}^{0} f_\xi(x)\,dx = 0$$

время прихода
след. клиента



$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\alpha x}, & x>0 \end{cases}$$

Св-во нестарения:

$\forall x,y>0 \quad P(\xi>x+y \mid \xi>x) = P(\xi>y)$

Д-во: $P(\xi>x) = \int_{x}^{\infty} f_\xi(t)\,dt = \int_{x}^{\infty} \alpha e^{-\alpha t}\,dt = -e^{-\alpha t}\Big|_x^{\infty} = e^{-\alpha x}$

$$P(\xi>x+y \mid \xi>x) = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} = P(\xi>y)$$