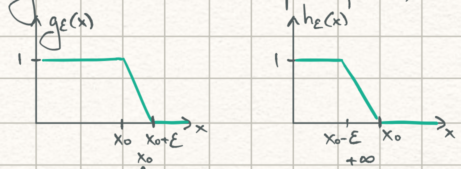
4.2. Свойства сходимостей

Теорема критерий слабой сходимости

$\xi_n \Rightarrow \xi \iff \forall g \in CB(\mathbb{R})$ (непр. огр.) вып-но $Eg(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} Eg(\xi)$

Дурацко-техническое :(

Д-во: $\Leftarrow$ Пусть x_0 — точка непр. $F_\xi(x)$, $\varepsilon>0$. Возьмём $g_\varepsilon(x)$, $h_\varepsilon(x)$:



Тогда $g_\varepsilon(x), h_\varepsilon(x) \in CB(\mathbb{R})$

$$F_{\xi_n}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} g(x)\,dF_{\xi_n}(x) \le \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)\,dF_\xi(x) \le F_\xi(x_0+\varepsilon)$$

$$F_{\xi_n}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} h(x)\,dF_{\xi_n}(x) \ge \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dF_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)\,dF_\xi(x) \ge F_\xi(x_0-\varepsilon)$$

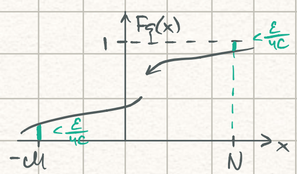
$$\Rightarrow F_\xi(x_0) \xleftarrow[\varepsilon\to0]{} F_\xi(x_0-\varepsilon) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_0) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_0) \le F_\xi(x_0+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} F_\xi(x_0)$$

$\Rightarrow$ Мн-во точек разрыва ф-ии $F_\xi(\cdot)$ не более, чем счётно (счётное объед-е конечных мн-в)

Пусть $g(x)\in CB(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists C>0: |g(x)|\le C$. Пусть $\varepsilon>0$

Возьмём $N, M>0$: $F_\xi(-M) < \frac{\varepsilon}{4C}$, $1-F_\xi(N) < \frac{\varepsilon}{4C}$

N, M - точки непр-ти $F_\xi(\cdot)$



Тогда для дост. больших $n\ge1$: $F_{\xi_n}(-M) < \frac{\varepsilon}{2C}$

$1-F_{\xi_n}(N) < \frac{\varepsilon}{2C}$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_{\xi_n}(x) - \int_{-M}^{N} g(x)\,dF_{\xi_n}(x)\right| \le C\cdot P(\xi_n \notin [-M,N)) < \varepsilon$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_\xi(x) - \int_{-M}^{N} g(x)\,dF_\xi(x)\right| \le C\cdot P(\xi\notin[-M,N)) < \varepsilon$$

Для $g(\cdot)$ опр-м $g_\varepsilon(\cdot)$ - кус. пост. ф-я такая, что $\sup_{x\in[-M,N]}|g_\varepsilon(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и скачки g_ε в точках непр-ти $F_\xi(\cdot)$

Тогда для дост. больших $n\ge1$: $\left|\int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)\,dF_{\xi_n}(x) - \int_{-M}^{N} g(x)\,dF_{\xi_n}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} P(\xi_n\in[-M,N]) \le \varepsilon$

$$\left|\int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)\,dF_\xi(x) - \int_{-M}^{N} g(x)\,dF_\xi(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} P(\xi\in[-M,N]) \le \varepsilon$$

$$\int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)\,dF_{\xi_n}(x) - \int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)\,dF_\xi(x) = \sum_{k=1}^{K} g(y_k)\left(F_{\xi_n}(y_k)-F_{\xi_n}(y_{k-1})\right) - \sum_{k=1}^{K} g(y_k)\left(F_\xi(y_k)-F_\xi(y_{k-1})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

в силу $\xi_n\Rightarrow\xi$

Ex Почему не берём разрывные: $g(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ 0, & x\ge x_0\end{cases}$ $\quad Eg(\xi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_{\xi_n}(x) = \int_{(-\infty,x_0)} 1\cdot dF_{\xi_n}(x) = P(\xi_n<x_0) = F_{\xi_n}(x_0)$

$F_{\xi_n}(x)\to F_\xi(x)$ — ерунда

Неогр. не берём, т.к. там расходиться будет

Лемма сходимость для непр. ф-й:

Пусть $g(x)\in C(\mathbb{R})$, $\xi_n \xrightarrow[\Rightarrow]{\text{пн},\,P} \xi$. Тогда $g(\xi_n) \xrightarrow[\Rightarrow]{\text{пн},\,P} g(\xi)$

Д-во: $\xrightarrow{\text{пн}}$: $\{\omega: \xi_n(\omega)\to\xi(\omega)\} \subseteq \{\omega: g(\xi_n(\omega))\to g(\xi(\omega))\} \Rightarrow 1 = P(\{\ldots\}) \le P(\{\ldots\}) \Rightarrow g(\xi_n)\xrightarrow{\text{пн}} g(\xi)$

$\xrightarrow{P}$: Пусть $g(\xi_n)\not\xrightarrow{P} g(\xi) \Rightarrow \exists\varepsilon>0$ $P(|g(\xi_n)-g(\xi)|\ge\varepsilon) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists n_k, \delta>0$ $P(|g(\xi_{n_k})-g(\xi)|\ge\varepsilon) \ge \delta$ ← противоречие

но! $\xi_{n_k}\xrightarrow{P}\xi \Rightarrow \exists k_m\to\infty: \xi_{n_{k_m}}\xrightarrow{\text{пн}}\xi \Rightarrow g(\xi_{n_{k_m}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} g(\xi)$ $\quad\Rightarrow g(\xi_n)\xrightarrow{P} g(\xi)$

$\Rightarrow$: $\forall h\in CB$ $Eh(\xi_n)\to Eh(\xi)$, а надо $Eh(g(\xi_n))\to Eh(g(\xi))$

$h\in CB(\mathbb{R})$, $g\in C(\mathbb{R}) \Rightarrow h(g(\cdot))\in CB(\mathbb{R})$ и ура!

Лемма сходимость и арифм. опер.

Для слабой не можем говорить о сумме с.в. (или ещё чём-то)

Пусть $\xi_n \xrightarrow[P]{\text{пн}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow[P]{\text{пн}} \eta \Rightarrow \xi_n \pm \eta_n \xrightarrow[P]{\text{пн}} \xi + \eta$, $\quad \xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow[P]{\text{пн}} \xi \cdot \eta$

Д-во: + $\xrightarrow{\text{пн}}$ $A = \{\omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}$ $\quad B\{\omega: \eta_n(\omega) \to \eta(\omega)\}$ $\quad P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$

$\xrightarrow{P}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\quad P(|\xi_n + \eta_n - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon) \leq P(|\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon) \leq$

$\leq P(\{|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq P(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Теорема Слуцкого:

Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} a$, $\eta_n \Rightarrow \eta$. Тогда $\xi_n + \eta_n \Rightarrow a + \eta$, $\quad \xi_n \cdot \eta_n \Rightarrow a\eta$

Д-во: + Можно считать, что $a = 0$ (иначе возьмём $\tilde{\eta}_n = \eta_n - a$, $\tilde{\eta} = \eta - a$)

Пусть x_0 – т. непр-ти $F_\eta(x)$. $\forall \varepsilon > 0$:

$F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) = P(\xi_n + \eta_n < x_0) = \underbrace{P(\xi_n + \eta_n < x_0, |\xi_n| < \varepsilon)}_{\leq P(\eta_n < x_0 + \varepsilon, |\xi_n| < \varepsilon)} + \underbrace{P(\xi_n + \eta_n < x_0, |\xi_n| \geq \varepsilon)}_{\leq P(|\xi_n| \geq \varepsilon)} \leq$

$\leq P(\eta_n < x_0 + \varepsilon) - \underbrace{P(\eta_n < x_0 + \varepsilon, |\xi_n| \geq \varepsilon)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{P(|\xi_n| \geq \varepsilon)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

$\exists \varepsilon_k \to 0$: $x_0 + \varepsilon_k$ точка непр. $F_\eta(x)$ $\forall k$

$\Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) \leq P(\eta < x_0 + \varepsilon_k) = F_\eta(x_0 + \varepsilon_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F_\eta(x_0)$ $\quad \leftarrow$ это была оценка сверху

Оценка снизу: $F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) = P(\xi_n + \eta_n < x_0) \geq P(\xi_n + \eta_n < x_0, |\xi_n| < \varepsilon)$ дальше как и сверху

Самая слабая метрика близости в каком-то смысле самая важная

Опр Посл-ть $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ – равномерно интегрируема, если $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{n\geq 1} E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N) = 0$

Зам 1 Если $E \sup |\xi_n| < \infty$, то ξ_n – РИ

из 2го д-ть можно

2 Если $\forall n$ $|\xi_n| \leq \eta$ п.н., $E\eta < \infty$, то ξ_n – РИ

Д-во: $E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N) \leq E(\eta; |\xi_n| \geq N) \leq E(\eta; \eta \geq N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

3 Если ξ_n – РИ, то $E|\xi_n| < \infty$ $\forall n$

Д-во: $E(|\xi_n|) = E(|\xi_n|; |\xi_n| < N) + E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N) < N + \varepsilon < \infty$

Теорема критерий сх-ти МО:

Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $E|\xi_n| < \infty$ $\forall n \geq 1$. Тогда след. утв-я эквив-ны:

1. ξ_n – РИ
2. $E|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $E|\xi| < \infty$
3. $E|\xi_n| \to E|\xi|$, $E|\xi| < \infty$

Д-во: $1 \Rightarrow 2$: Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \exists n_k \to \infty$ $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{пн}} \xi$

Тут моя лажа 2ое-то :С

$\Rightarrow$ по лемме Фату: $E\xi \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} E|\xi_n| \leq \sup\limits_{n\geq 1} E|\xi_n| \leq \sup\limits_{n\geq 1} E(|\xi_n|, |\xi_n| \geq N) + N < \infty$

$\forall \varepsilon > 0$ $\forall N > 0$: $E|\xi_n - \xi| = E(|\xi_n - \xi|; |\xi_n - \xi| < \varepsilon) + E(|\xi_n - \xi|; |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq$

$\leq \varepsilon \cdot P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) + E(|\xi_n|; |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) + E(|\xi|; |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq$

$\leq \varepsilon + \underbrace{E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N)}_{\leq \varepsilon \text{ выбором } N\ \forall n} + \underbrace{N \cdot P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)}_{\leq \varepsilon \text{ выбором } n \text{ при фикс. } N} + \underbrace{E(|\xi|; |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)}_{< \varepsilon \text{ выбором } n} \leq 4\varepsilon$

тоже просто техническое

$2 \Rightarrow 3$: $|E|\xi_n| - E|\xi|| \leq E|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$3 \Rightarrow 1$: Достаточно д-ть, что $\exists k > 0$: $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{n\geq k} E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N) = 0$, т.к. $E|\xi_n| < \infty$ $\forall n$

$E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N) = E|\xi_n| - E(|\xi_n|; |\xi_n| < N)$

$\forall \varepsilon > 0$: $E(|\xi_n|; |\xi_n| < N) \geq E(|\xi_n|; |\xi_n| < N; |\xi_n - \xi| < \varepsilon) \geq E(|\xi| - \varepsilon; |\xi_n| < N; |\xi_n - \xi| < \varepsilon) \geq$

$\geq E(|\xi|; |\xi| \leq N - \varepsilon; |\xi_n - \xi| < \varepsilon) - \varepsilon = E|\xi| - E(|\xi|; |\xi| > N - \varepsilon) - E(|\xi|; |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) - \varepsilon$

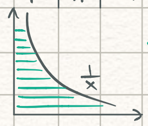
$$\Rightarrow E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N) \leq \underbrace{E|\xi_n| - E|\xi|}_{<\varepsilon \text{ выбором } n} + \underbrace{E(|\xi|; |\xi| > N-\varepsilon)}_{<\varepsilon \text{ выбором } N} + \underbrace{E(|\xi|; |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)}_{<\varepsilon \text{ выбором } n} + \varepsilon \leq 4\varepsilon$$

Контрпример

1

ξ_n	n	0
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$\xi_n \Rightarrow 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0$ $\quad E\xi_n = 1 \not\to 0 \Rightarrow$ не РИ



← тут интеграл расх. (это то, как можно интуитивно понять)

2

η_n	$-n$	0	n
P	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

$\eta_n \xrightarrow{P} 0$ $\quad E\eta_n = 0$ $\quad$ но! $E|\eta_n| = 1 \not\to 0 \Rightarrow \eta_n$ не РИ

Теорема Лебега:

Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $|\xi_n| \leq \eta$ $\forall n$, $E\eta < \infty$. Тогда $E\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi$

__Д-во:__ ξ_n – РИ $\Rightarrow E|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow |E\xi_n - E\xi| \leq E|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Зам в теореме Лебега достаточно $\xi_n \Rightarrow \xi$ $\quad$ но там новое д-во строить