

2.5. Преобразование случайных величин

Зам. об измеримости преобр-я

Если ξ - с.в., $g(t)$ - борелевск. ф-я, то $\eta = g(\xi)$ - с.в.

Л-во: $g(t)$ - борел. $\Rightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \eta^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \ni \eta^{-1}(B) = \{\omega: \eta(\omega) \in B\} = \{\omega: g(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega: \xi(\omega) \in g^{-1}(B)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

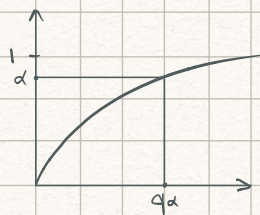
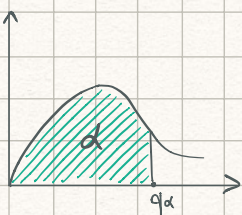
Теорема о лин. преобразовании абс. непр. распр-я

Пусть ξ имеет абс. непр. распр-е с $f_{\xi}(x)$. Тогда $\forall a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ с.в. η имеет а.н.р. с

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{|a|} f_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

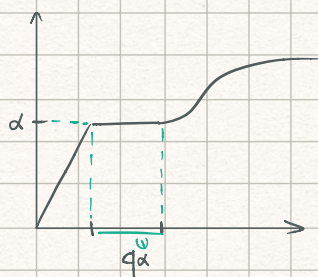
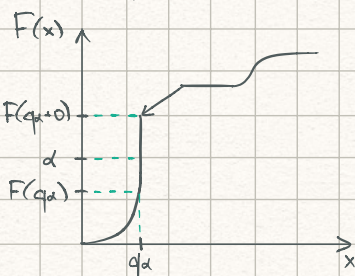
Л-во: Пусть $a > 0$. $F_{\eta}(x) = P(\eta \leq x) = P(a\xi + b \leq x) = P(\xi \leq \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_{\xi}(t) dt = \left| \frac{t = \frac{u-b}{a}}{dt = \frac{du}{a}} \right| =$
 $= \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_{\xi}\left(\frac{u-b}{a}\right) du = \int_{-\infty}^x f_{\eta}(u) du$

Опр. Квантилью Q_{α} абс. непр. монот. ф-ии распр-я уровня $\alpha \in [0, 1]$ наз. число $q_{\alpha} \in \mathbb{R}$: $F(q_{\alpha}) = \alpha$



Опр. Квантилью уровня $\alpha \in [0, 1]$ наз. любое число $q_{\alpha} \in \mathbb{R}$:
 $F(q_{\alpha}) \leq \alpha \quad F(q_{\alpha} + 0) \geq \alpha$

(общий случай)



Опр. Медиана: $\mu = q_{\frac{1}{2}}$

Опр. Мода - любой локальн. max плотности распр-я.

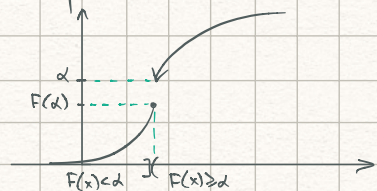
Теорема о линейн. преобр. квантилей:

1. Пусть q_{α} - квантиль уровня $\alpha \in [0, 1]$ для ξ . Тогда:

$$\forall a > 0, b \in \mathbb{R}$$

$aq_{\alpha} + b$ - квантиль уровня $\alpha \in [0, 1]$ для $\eta = a\xi + b$

2. $q_{\alpha} = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq \alpha\} = \sup\{x \in \mathbb{R}: F(x) < \alpha\}$



Д-во:

- $F_{\xi}(q_{\alpha}) = P(\xi < q_{\alpha}) = P(a\xi + b < aq_{\alpha} + b) = P(\eta < aq_{\alpha} + b) = F_{\eta}(aq_{\alpha} + b) \leq \alpha$
 $F_{\xi}(q_{\alpha} + 0) = P(\xi \leq q_{\alpha}) = P(a\xi + b \leq aq_{\alpha} + b) = P(\eta \leq aq_{\alpha} + b) = F_{\eta}(aq_{\alpha} + b + 0) \geq \alpha$
- $F(F^{-1}(\alpha)) \leq \alpha$ $F(F^{-1}(\alpha) + 0) \geq \alpha$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists x_{\varepsilon} : F(x_{\varepsilon}) \geq \alpha$ $F^{-1}(\alpha) + \varepsilon > x_{\varepsilon} \Rightarrow F(F^{-1}(\alpha) + \varepsilon) \geq F(x_{\varepsilon}) \geq \alpha$
 По опр-ю sup: $\forall \varepsilon > 0 \exists x_{\varepsilon} \in \mathbb{R} : F(x_{\varepsilon}) < \alpha : F^{-1}(\alpha) + \varepsilon > x_{\varepsilon}$
 $\Rightarrow F(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon) \geq F(x_{\varepsilon}) \geq \alpha$
 $\downarrow \varepsilon \rightarrow 0$
 $F(F^{-1}(\alpha) + 0) \geq \alpha$

Теорема о квантильном преобразовании:

- Пусть F_{ξ} - ф-я распр-я с.в. ξ . $U \in U_{0,1}$. Тогда $F_{\xi}^{-1}(U) \in F_{\xi}$
- Пусть F_{ξ} - непр.. Тогда $F_{\xi}(\xi) \in U_{0,1}$

Д-во: $F_{\xi}(x) = P(\xi < x)$ $F_{\xi}(\xi) \neq P(\xi < \xi) = 0$

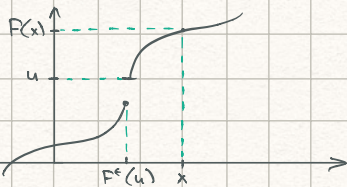
$\{U \leq F(x)\} \subseteq \{F_{\xi}^{-1}(U) < x\} \subseteq \{U \leq F(x)\}$

Покажем это от противного:

Пусть $F_{\xi}^{-1}(u) \geq x$ $\forall \varepsilon > 0 \exists x_{\varepsilon} : F(x_{\varepsilon}) < u$ и $F^{-1}(u) - \varepsilon < x_{\varepsilon}$
 $\Rightarrow x - \varepsilon \leq F^{-1}(u) - \varepsilon < x_{\varepsilon}$

$F(x - \varepsilon) = F(x_{\varepsilon}) < u \Rightarrow$ при $\varepsilon \rightarrow 0$: $F(x) < u$

$\Rightarrow \{F^{-1}(u) \geq x\} \subseteq \{F(x) \leq u\} \Rightarrow \{F(x) > u\} \subseteq \{F^{-1}(u) < x\}$



Тут надо что-то доделать (что?)

1. $P(U < F(x)) \leq P(F^{-1}(U) < x) \leq P(U \leq F(x))$
 $\quad \quad \quad F^{-1}(x) \quad \quad \quad F^{-1}(x) \quad \quad \quad F^{-1}(x)$

2. $P(F(\xi) < x) \stackrel{\text{нпр}}{=} P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) \stackrel{\text{нпр}}{=} x, \quad x \in [0, 1]$

эти упр-я сделать надо!

2.6. Многомерные распределения

Ех Кидаем 2 монеты:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Р	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Теперь скинем их так:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	$\frac{1}{2}$	0
Р	0	$\frac{1}{2}$



Теперь скинем иначе:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	0	$\frac{1}{2}$
Р	$\frac{1}{2}$	0



Общий случай:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	$\frac{1}{2} - p$	$\frac{1}{2}$
Р	$\frac{1}{2} - p$	p
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$p \in [0, \frac{1}{2}]$

Опр Случайный вектор — $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, если $\forall i \quad \xi_i$ — с.в.