Теорема
Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, g, f - борел., тогда $g(\xi) \perp\!\!\!\perp f(\eta)$

Д-во: $P(g(\xi) \in B_1, f(\eta) \in B_2) = P(\xi \in g^{-1}(B_1), \eta \in f^{-1}(B_2)) \overset{\text{нез}}{=} P(\xi \in g^{-1}(B_1)) P(\eta \in f^{-1}(B_2)) =$
$= P(g(\xi) \in B_1) P(f(\eta) \in B_2)$ $\quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

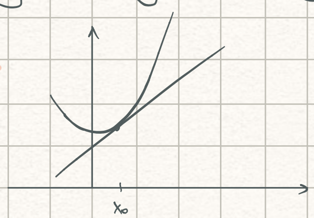
Утв $E(g(\xi) f(\eta)) = Eg(\xi) Ef(\eta)$

Теорема нер-во Коши-Буняковского:
Пусть $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$, тогда $|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2}\sqrt{E\eta^2}$.
Рав-во достигается только если $\exists a \in \mathbb{R}$ $\quad \xi = a\eta$

Д-во: $x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq p(x) = E(x\xi + \eta)^2 = E[x^2\xi^2 + 2x\xi\eta + \eta^2] = x^2 E\xi^2 + 2x E\xi\eta + E\eta^2 =$
$D = 4(E\xi\eta)^2 - 4E\xi^2 E\eta^2 \leq 0$
Если $D = 0 \Rightarrow \exists x_0 : p(x_0) = 0 \Rightarrow E(x_0\xi + \eta)^2 = 0 \Rightarrow x_0\xi + \eta = 0$ п.н.
В другую сторону к $D = 0$ подставить просто и ура!

Теорема нер-во Йенсена:
Пусть $g(x)$ выпуклая (вниз), $E|g(\xi)| < \infty$, $E|\xi| < \infty$. Тогда $Eg(\xi) \geq g(E\xi)$

Д-во:



$\forall x_0 \; \exists c : g(x) \geq g(x_0) + c(x - x_0) \quad \forall x$
$x_0 = E\xi \quad \exists c : g(x) \geq g(E\xi) + c(x - E\xi) \quad \forall x$
$\Rightarrow g(\xi) \geq g(E\xi) + c(\xi - E\xi)$
$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$

3.4. Дисперсия

Опр Дисперсия $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$, если $E\xi^2 < \infty$

Опр Стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{D\xi}$

Св-ва дисперсии:

1. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

Д-во: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

2. $D\xi \geq 0$ $\qquad \Rightarrow E\xi^2 \geq (E\xi)^2$

3. $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi \in I_c$

Д-во: $\Leftarrow$ очевидно
$\Rightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Rightarrow (\xi - E\xi)^2 = 0$ п.н. $\Rightarrow \xi = E\xi$ п.н. $\Rightarrow \xi \in I_{E\xi}$

4. $D(c\xi) = c^2 D\xi$
$D(\xi + c) = D\xi$

5 Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$. Тогда $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

Д-во: $D(\xi \pm \eta) = E((\xi - E\xi) \pm (\eta - E\eta))^2 = E(\xi - E\xi)^2 \pm 2E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] + E(\eta - E\eta)^2 = D\xi + D\eta \pm$
$\pm 2E\underbrace{(\xi - E\xi)}_{=0}E\underbrace{(\eta - E\eta)}_{=0} = D\xi + D\eta$

6 $D\xi = \min\limits_{a \in \mathbb{R}} E(\xi - a)^2$

Д-во: $E(\xi - a)^2 = E(\xi \pm E\xi - a)^2 = \overset{= D\xi}{E(\xi - E\xi)^2} + 2\overset{=0}{E(\xi - E\xi)}\overset{=c}{(E\xi - a)} + \overset{\geq 0}{(E\xi - a)^2} \geq D\xi$

7 Классическое нер-во Чебышёва:
Пусть $E\xi^2 < \infty$. Тогда $\forall x > 0 \quad P(|\xi - E\xi| \geq x) \leq \dfrac{D\xi}{x^2}$

Д-во: $P(|\xi - E\xi| \geq x) = P((\xi - E\xi)^2 \geq x^2) \underset{\text{нер-во Маркова}}{\leq} \dfrac{E(\xi - E\xi)^2}{x^2} = \dfrac{D\xi}{x^2}$

Ex вычисления $D\xi$:

1 $\xi \in B_p$: $E\xi = p$

$\xi - E\xi$	$-p$	$1-p$
P	$1-p$	p

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$

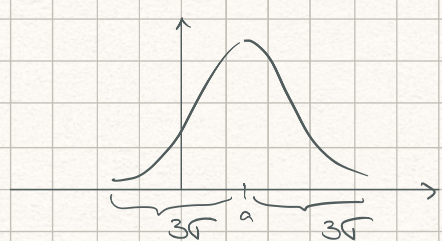
$(\xi - E\xi)^2$	p^2	$(1-p)^2$
P	$1-p$	p

А можно считать нормально: $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

2 $\xi \in B_{n,p}$ $\quad \xi \overset{d}{=} S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad X_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$ — независ.

$D\xi = DS_n = D(X_1 + \ldots + X_n) = DX_1 + \ldots + DX_n = np(1-p)$

3 $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ $\quad E\xi = a \quad \eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1} \quad \xi = \sigma\eta + a \Rightarrow D\xi = \sigma^2 D\eta = \sigma^2$
$D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = E\eta^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \underbrace{\dfrac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$



3.5. Коэффициент корреляции

Опр Ковариация $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)]$, если $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$

Св-ва: 1 $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0$

2 Обратного нет.

Д-во: $\xi \in N_{0,1}$, $\eta = \xi^2$. $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi(\xi^2 - \overset{!}{E\xi^2})) = E\xi^3 - \overset{=0}{E\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$ из неч., но надо ещё п-ть абс сх-ть

3 $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$

4 $\mathrm{Cov}(\xi, \xi) = D\xi \geq 0$
$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathrm{Cov}(\eta, \xi)$
$\mathrm{Cov}(a\xi_1 + b\xi_2, \eta) = a\,\mathrm{Cov}(\xi_1, \eta) + b\,\mathrm{Cov}(\xi_2, \eta)$

5. $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + \sum_{i \neq j} Cov(\xi_i, \xi_j)$

Д-во: $\xi_k' = \xi_k - E\xi_k \quad D\xi_k = D\xi_k'$

$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1' + \ldots + \xi_n') = E(\xi_1' + \ldots + \xi_n')^2 = E\left[\sum_{k=1}^{n} (\xi_k')^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i' \xi_j'\right] =$

$= \sum_{k=1}^{n} D\xi_k' + \sum_{i \neq j} Cov(\xi_i', \xi_j') \overset{6}{=} \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + \sum_{i \neq j} Cov(\xi_i, \xi_j)$

6. $Cov(a + \xi, \eta) = Cov(\xi, \eta)$

Опр Коэф-т корреляции: $\rho(\xi, \eta) = \dfrac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \, D\eta}}$

cos угла ~ ρ

скал. пр-е – Cov

Св-ва: 1. $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$

Д-во: $\rho(\xi, \eta) = \dfrac{E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2}} \leq 1$ по нер-ву Коши-Бун.

2. $|\rho(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$ п.н.

Д-во: $\Rightarrow \quad \xi - E\xi = c(\eta - E\eta) \qquad \xi = a\eta + b$ п.н.

3. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \rho(\xi, \eta) = 0$, но $\rho(\xi, \eta) = 0 \not\Rightarrow \xi \perp\!\!\!\perp \eta$