9.04.21

$n=3$ $G\subset\mathbb{R}^3$ - огр-я обл-ть, ∂G - кл. C^2, связная

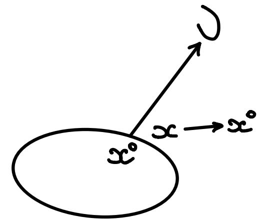
$D^+\begin{cases}\Delta u=0 & x\in G\\ u\big|_{\partial G}=\varphi_1(x) & x\in\partial G\end{cases}$ - внутр. з. Дирихле

$D^-\begin{cases}\Delta u=0 & x\in G\\ u\big|_{\partial G}=\varphi_2(x) & x\in\partial G\\ u(x)\to 0, & |x|\to\infty\end{cases}$ - внешн. з. Дирихле

$N^+\begin{cases}\Delta u=0 & x\in G\\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G}=\varphi_3(x) & x\in\partial G\end{cases}$ $u\in C^2$

$N^-\begin{cases}\Delta u=0 & x\in G\\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G}=\varphi_4(x) & x\in\partial G\\ u(x)\to 0, & |x|\to\infty\end{cases}$

$u\in C^2(G)\cap C(\overline{G})$



$\frac{\partial u}{\partial \nu}$ - правильная норм-я производная (опр. в прошлой лекции)

для N^+ $u\in C^2(G)\cap C(\overline{G})$: $\exists$ прав. норм. произв. на ∂G

для N^- $u\in C^2(G_1)\cap C(\overline{G}_1)$: $\exists$ прав. норм. произв. на ∂G

$G_1=\mathbb{R}^3\setminus\overline{G}$

$$P_1(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\alpha(y)\frac{1}{|x-y|}\,dS \qquad \alpha\in C(\partial G)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \beta(y) \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) ds \qquad \beta \in C(\partial G)$$

Из прошлой лекции:

Теорема 3. $x^0 \in \partial G \Rightarrow$

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in G}} P_2(x) = P_2^+(x^0) \Rightarrow P_2^+(x^0) = P_2(x^0) - \frac{\beta(x^0)}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \notin \overline{G}}} P_2(x) = P_2^-(x^0) \Rightarrow P_2^-(x^0) = P_2(x^0) + \frac{\beta(x^0)}{2}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) ds \Big|_{x=x^0} := \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0)\right]$$

$$\lim_{x \to x^0} \frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x)\right)^+$$

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in G, \text{ по нор. } \nu(x^0)}} \frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x)\right)^- \quad \text{идем извне}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0)\right] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|} ds \Big|_{x=x^0}$$

Теорема (о скачках производной)

$$x^0 \in \partial G \Rightarrow \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x)\right)^+ &= \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0)\right] + \frac{\alpha(x^0)}{2} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x)\right)^- &= \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0)\right] - \frac{\alpha(x^0)}{2} \end{aligned}$$

$x \in G_2$

и пределы равномерные отн-о x^0.

Алгоритм метод потенциалов.

Будем решать все 4 з. одновременно.

Ищем реш-е з. D^+ в виде $u(x)-P_2(x)$. По т.

3 получим (взяв предел)

$$\forall x \in \partial G \Rightarrow P_2(x) - \frac{\beta(x)}{2} \equiv \varphi_1(x)$$

D^+ $$\beta(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G} \beta(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|} ds = -2\varphi_1(x)$$

$$\varphi_1(x) = \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G} \beta(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|} ds}_{A_1\beta} - \frac{\beta(x)}{2}$$

D^- $u(x) = f_2(x)$, $\beta \in C(\partial G)$

$$\forall x \in \partial G \quad P_2(x) + \frac{\beta(x)}{2} \equiv \varphi_2(x)$$

$$\beta(x) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G} \beta(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} ds}_{A_1\beta} = 2\varphi_2(x)$$

N^+ $$\forall x \in \partial G: \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x)\right] + \frac{\alpha(x)}{2} \equiv \varphi_3(x)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G} \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-y|} ds + \frac{\alpha(x)}{2} = \varphi_3(x)$$

$$\alpha(x) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-y|} ds}_{A_2\alpha} = 2\varphi_3(x)$$

N^- $u(x) = P_1(x)$ $x \in G_1$

$$\alpha(x) - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G} \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-y|} ds}_{A_2\alpha} = -2\varphi_4(x)$$

Видно, что $A_2 = A_1^*$: $\langle A_2 \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \underset{= A_1}{A_2^*} \beta \rangle$ в $H = L_2(\partial G)$

D^+: $\beta - A_1 \beta = -2\varphi_1$

N^-: $\alpha - A_1^* \alpha = -2\varphi_4$

$A_1 : L_2(\partial G) \longrightarrow L_2(\partial G)$ - вп непр

либо эти ур-я разрешимы $\forall$ пр-й части, либо однородные ур-я имеют одно и тоже конечное число ЛНЗ реш-й.

Однородные ур-я имеют только тривиальные реш-е.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)^- \equiv 0 \\ \Delta P_1 = 0 \\ P_1(x) \to 0, |x| \to \infty \end{cases} \quad \varphi_4 \equiv 0$$

P_1 - реш-е внешней з. Неймана вне области ($\overline{G_1}$)

$\updownarrow$ все по т. ед-ти

$$\begin{cases} P_1\big|_{\partial G} \equiv 0 \\ \Delta P_1(x) \equiv 0 \end{cases} \quad P_1(x) \equiv 0 \text{ - внутри тоже}$$

$\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x) \equiv 0$

$0 \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x)\right]_- + \frac{\alpha(x)}{2}$ - изнутри так

$0 \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x)\right] - \frac{\alpha(x)}{2}$ - извне так

Если реш. $\beta - A_1\beta = 0$ есть, то получается ровно 1 реш-е по 1 т. Фредгольма.

Теорема 5. а) $\forall \varphi_1 \in C(\partial G)$ $\exists!$ клас. реш. D^+

$u(x) = P_2(x)$

б) $\forall \varphi_4 \in C(\partial G)$ $\exists!$ клас. реш. N^-

$u(x) = P_1(x)$

Теорема 6. а) $\forall \varphi_2 \in C(\partial G)$ $\exists!$ клас. реш. D^-

$u(x) = P_2(x) + \frac{C}{|x - x^0|}$ $\quad x^0 \in G$

а) $\forall \varphi_3 \in C(\partial G)$: $\int\limits_G \varphi_3(y)\,ds = 0$

$\exists!$ клас. реш. N^+

$u(x) = P_1(x) + const$

D^-: $\beta + A_1\beta = 2\varphi_2$ $\qquad$ $\beta + A_1\beta = 0$

N^+: $\alpha + A_1^*\alpha = 2\varphi_3$ $\qquad$ $\alpha + A_1^*\alpha = 0$

– имеют ровно по 1 ЛНЗ реш.