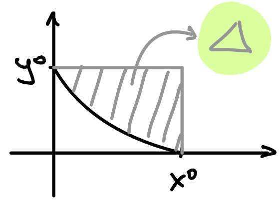
Напом $u_{xy} + a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = f(x,y)$

— канонический вид гиперболического ур-я II порядка

$S = \{y = \mu(x)\}$, $\mu'(x) < 0 \quad \forall x \in [0, x^0]$ — не касается хар-стик

$$(1)\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = f(x,y) \\ u\big|_S = \varphi_1(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \varphi_2(x) \end{cases}$$



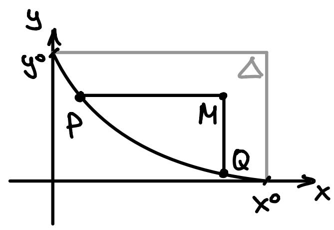
$$\Rightarrow \exists\, u_x\big|_S = V_0(x) \qquad u_y\big|_S = W_0(x)$$

Теорема 1 $\left| \begin{array}{l} a, b, c \in C(\overline{\Delta}), \quad \mu \in C^1[0, x^0], \quad \mu' < 0 \quad \forall x \in [0, x^0] \\ f \in C(\overline{\Delta}), \quad \varphi_1 \in C^1[0, x^0], \quad \varphi_2 \in C[0, x^0] \end{array} \right.$

$\Rightarrow \exists!\ u(x,y) \in C^1(\overline{\Delta}) : \exists\, u_{xy}, u_{yx} \in C(\overline{\Delta})$ — решение з. Коши

Замечание: см. док-во т. Пикара! Тут та же схема док-ва

Д-во: В т. Пикара было $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y\big|_{t=t_0} = y^0 \end{cases}$, $\quad y(t) = y^0 + \int\limits_{t^0}^{t} f(s, y(s))\,ds$



$$u_{xy}(x,y) \equiv f(x,y) - a(x,y)\,u_x(x,y) - b(x,y)\,u_y(x,y) - c(x,y)\,u(x,y)$$

далее аргументы будем опускать

Проинтегрируем тождество:

$$(2)\bullet \int\limits_{QM} u_{x\eta}\,d\eta = \int\limits_{\mu(x)}^{y} u_{x\eta}\,d\eta = u_x(x,y) - V_0(x)$$

$$\mathrel{\rotatebox{90}{$\equiv$}}$$

$$\int\limits_{\mu(x)}^{y} \big(f(x,\eta) - a u_x - b u_\eta - c u\big)\,d\eta$$

$$(3)\bullet \int\limits_{PM} u_{\xi y}\,d\xi = \int\limits_{\mu^{-1}(y)}^{x} u_{\xi y}\,d\xi = u_y(x,y) - W_0(\mu^{-1}(y))$$

$$\mathrel{\rotatebox{90}{$\equiv$}}$$

$$\int\limits_{\mu^{-1}(y)}^{x} \big(f(\xi,y) - a u_\xi - b u_y - c u\big)\,d\xi$$

$$(4)\bullet\ u(x,y) - \underbrace{\varphi_1(x)}_{u(Q)} \equiv \int\limits_{\mu(x)}^{y} u_\eta(x,\eta)\,d\eta$$ — из начального условия

Обозн $\quad v(x,y) := u_x(x,y)$
$w(x,y) := u_y(x,y)$
$u(x,y) = u(x,y)$

Запишем систему интегральных уравнений

$$(5)\begin{cases} v(x,y) = v_0(x) + \int\limits_{\mu(x)}^{y} \left(f(x,\eta) - av - bw - cu\right) d\eta \\ w(x,y) = w_0(\mu^{-1}(y)) + \int\limits_{\mu^{-1}(y)}^{x} \left(f(\xi,y) - av - bw - cu\right) d\xi \\ u(x,y) = \varphi_1(x) + \int\limits_{\mu(x)}^{y} w(x,\eta)\, d\eta \end{cases}$$

Д/з провести параллель с т. Пикара

Предположим, наши реш $\begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \in C(\bar{\Delta})$

Тогда $\exists\, u_x, u_y \in C(\bar{\Delta}) : u_x(x,y) \equiv v(x,y)$, $u_y(x,y) \equiv w(x,y)$

$$u(x,\eta) \equiv \varphi_1(\eta) + \int\limits_{\mu(x)}^{y} w(x,\eta)\, d\eta \implies u_y(x,y) \equiv w(x,y)$$

Упр
2 $\quad u$ — решение (1)

В т. Пикара далее пикарили: $\{y^{[k]}(t)\}$, $y^{[0]}(t) = y^0$

$$y^{[k]}(t) = y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y^{[k-1]}(s))\, ds, \quad k \geq 1$$

Тут: строим посл-ть вектор-функ $\begin{pmatrix} v^{[k]} \\ w^{[k]} \\ u^{[k]} \end{pmatrix}$, $(6_0)\begin{cases} v^{[0]}(x,y) = v_0(x) \\ w^{[0]}(x,y) = w_0(\mu^{-1}(y)) \\ u^{[0]}(x,y) = \varphi_1(x) \end{cases}$

$$(6_k)\begin{cases} v^{[k]}(x,y) = v_0(x) + \int\limits_{\mu(x)}^{y} \left(f - av^{[k-1]} - bw^{[k-1]} - cu^{[k-1]}\right) d\eta \\ w^{[k]}(x,y) = w_0(\mu^{-1}(y)) + \int\limits_{\mu^{-1}(y)}^{x} \left(f - av^{[k-1]} - bw^{[k-1]} - cu^{[k-1]}\right) d\xi \\ u^{[k]}(x,y) = \varphi_1(x) + \int\limits_{\mu(x)}^{y} w^{[k-1]}\, d\eta \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$\{(6_k)\}$ — аналог посл-ти Пикара. В т. Пикара мы получили оценку, и тут сейчас получим
из оценки — равномерную сходимость, и предел будет реш.

Лемма
$$K = \max_{\overline{\Delta}} (|a|+|b|+|c|)+1$$
$$d = \max \left\{ \max_{\overline{\Delta}} |f|, \max_{[0,x^0]} |\varphi_1|, \max_{[0,x^0]} |v_0|, \max_{[0,x_0]} |w_0| \right\}$$
$$\Rightarrow \left| v^{[m]}(x,y) - v^{[m-1]}(x,y) \right| \le d \frac{K^m (x+y)^m}{m!}$$
$$\left| w^{[m]}(x,y) - w^{[m-1]}(x,y) \right| \le d \frac{K^m (x+y)^m}{m!}$$
$$\left| u^{[m]}(x,y) - u^{[m-1]}(x,y) \right| \le d \frac{K^m (x+y)^m}{m!}$$

Д-во
$$\begin{matrix} v^{[0]} \le d & & v_0 \\ w^{[0]} \le d & \text{из опр-я} & w_0 \\ u^{[0]} \le d & & \varphi_1 \end{matrix}$$
$$v^{[1]}(x,y) - v^{[0]}(x,y) \equiv (\text{см } (6_0) \text{ и } (6_1)) \equiv \int_{\mu(x)}^{y} (f - av^{[0]} - bw^{[0]} - cu^{[0]}) d\eta$$
$$\left| v^{[1]}(x,y) - v^{[0]}(x,y) \right| \le \int_{\mu(x)}^{y} \left(|f| + |a||v^0| - |b||w^0| - |c||u^0| \right) d\eta \le$$
$$\le d \int_{\mu(x)}^{y} (1 + |a| + |b| + |c|) d\eta \le dK \int_{\mu(x)}^{y} d\eta \le$$
$$\le dK(x+y)$$

Для $m=1$ доказали. Для w и u аналогично.

Это была база индукции. Теперь шаг:
$$v^{[m+1]}(x,y) - v^{[m]}(x,y) \equiv \int_{\mu(x)}^{y} \left(a(v^{[m]} - v^{[m-1]}) - b(w^{[m]} - w^{[m-1]}) - c(u^{[m]} - u^{[m-1]}) \right) d\eta$$
$$\left| v^{[m+1]}(x,y) - v^{[m]}(x,y) \right| \le \int_{\mu(x)}^{y} \left(|a| \left| v^{[m]} - v^{[m-1]} \right| + |b| \left| w^{[m]} - w^{[m-1]} \right| + |c| \left| u^{[m]} - u^{[m-1]} \right| \right) d\eta$$
$$\le \int_{\mu(x)}^{y} \left(|a| \, dK^m \frac{(x+\eta)^m}{m!} + |b| \, dK^m \frac{(x+\eta)^m}{m!} + |c| \, dK^m \frac{(x+\eta)^m}{m!} \right) d\eta =$$
$$= \int_{\mu(x)}^{y} \left((|a|+|b|+|c|) \, dK^m \frac{(x+\eta)^m}{m!} \right) d\eta \le dK^{m+1} \int_{\mu(x)}^{y} \frac{(x+\eta)^m}{m!} d\eta$$
$$\le dK^{m+1} \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} \quad \square$$

Для $\{w^{[k]}\}$ и $\{u^{[k]}\}$ аналогично, т.е. ■

$$\begin{pmatrix} V^{[k]} \\ W^{[k]} \\ u^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{[k-1]} - V^{[k-1]} + V^{[k]} \\ W^{[k-1]} - W^{[k-1]} + W^{[k]} \\ u^{[k-1]} - u^{[k-1]} + u^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{[k-1]} \\ W^{[k-1]} \\ u^{[k-1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{[k]} - V^{[k-1]} \\ W^{[k]} - W^{[k-1]} \\ u^{[k]} - u^{[k-1]} \end{pmatrix} =$$

$= ($так же делаем с первым слагаемым, $\pm \begin{smallmatrix} V \\ W \\ u \end{smallmatrix}^{[k-2]}) =$

$$= \begin{pmatrix} V^{[0]} \\ W^{[0]} \\ u^{[0]} \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{k} \begin{pmatrix} V^{[m]} - V^{[m-1]} \\ W^{[m]} - W^{[m-1]} \\ u^{[m]} - u^{[m-1]} \end{pmatrix} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{pmatrix} V^{[0]} \\ W^{[0]} \\ u^{[0]} \end{pmatrix} + \sum_{m \geq 1} \begin{pmatrix} V^{[m]} - V^{[m-1]} \\ W^{[m]} - W^{[m-1]} \\ u^{[m]} - u^{[m-1]} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Док-во сходимости посл-ти $\{(6_k)\}$ равносильно док-ву сходимости ряда (7)

Для т. Вейерштрасса найдем мажорантный равномерно-сходящийся ряд

Из оценок из леммы получим оценку $(de^{K(x+y)})$ для v, w и u.

$$\sum_{m=0}^{k} \frac{K^m (x+y)^m}{m!} \xrightarrow{k\to\infty} e^{K(x+y)}$$

Т.о. из равном сх. ряда (7) получаем : $\exists \begin{pmatrix} v(x,y) \\ w(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix} \in C(\bar{\Delta})$:

$$u^{[k]} \overset{k\to\infty}{\rightrightarrows} u \qquad v^{[k]} \rightrightarrows v \qquad w^{[k]} \rightrightarrows w$$

. Равном. сх. позволяет переходить к пределу под знаком интеграла, и сохраняет непрерывность.

Т.о. $\forall (x,y) \in \Delta$

$$|u(x,y)| \leq de^{K(x+y)}$$

$$|u_x(x,y)| \leq de^{K(x+y)} \qquad (8)$$

$$|u_y(x,y)| \leq de^{K(x+y)}$$

□

Упр Доказать единственность, как в т. Пикара ■

Следствие Решение з. Коши (1) непрерывно зависит от f, φ_1, φ_2

Д-во Из оценки (8) в Δ $|u(x,y)| \leq de^{K(x+y)} \leq d \cdot q$

$$|V_0| \leq q_1 \cdot \left(\max_{[0,x_0]} |\varphi_{1_x}(x)| + \max_{[0,x_0]} |\varphi_0(x)|\right)$$

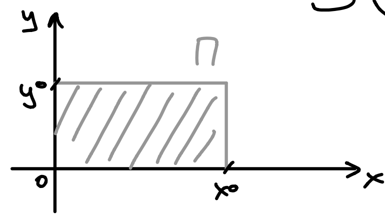
$$|W_0| \leq q_2 \cdot \left(\max_{[0,x_0]} |\varphi_{1_x}(x)| + \max_{[0,x_0]} |\varphi_0(x)|\right)$$

Оценки линейные $\Rightarrow$ зависимость непрерывна ■

Теорема З. Коши (1) поставлена корректно (в силу т.1 и её следствия)

$$(9)\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y) \\ u|_{y=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

— задача Гурса



Теорема 3 | $a, b, c \in C(\overline{\Pi})$, $f \in C(\overline{\Pi})$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\overline{\Pi})$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$

$\Rightarrow \exists!\ u \in C^1(\overline{\Pi}) : \exists\, u_{xy}, u_{yx} \in C(\overline{\Pi})$ — реш. з. Гурса (9)

Следствие ~

Теорема 4 з. Гурса корректна