12/2/21

Напом

Теорема Соболева I

$W_2^\ell(\mathbb{R}^n)$, $\ell > \frac{n}{2}$

$\Rightarrow W_2^\ell(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$ т.е. $W_2^\ell(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$ и $\exists c>0 : \forall u \in W_2^\ell(\mathbb{R}^n)$ $|u(x)| \le c \|u, W_2^\ell(\mathbb{R}^n)\|$

$\hat{u}(\xi) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi$

Теорема Соболева II

$W_2^\ell(\mathbb{R}^n)$, $\ell > \frac{n}{2} + m$

$\Rightarrow W_2^\ell(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^m(\mathbb{R}^n)$

Д-во также, как I т. Соболева. упр ■

Теорема

$W_p^\ell(\mathbb{R}^n)$, $\ell > \frac{n}{p}$, $1 \le p < \infty$

$\Rightarrow W_p^\ell(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$

без док-ва

Теорема о продолжении

$G \subset \mathbb{R}^n$ – огр. обл., ∂G класса C^ℓ

$\Rightarrow \forall G \Subset \mathbb{R}^n$ – обл. $\exists \Pi : W_2^\ell(G) \longrightarrow \mathring{W}_2^\ell(G')$ – лин. непр. оператор : $\bar{G} \subset G'$, $\forall x \in G$ $\forall u \in W_2^\ell(G)$ $\Pi u(x) = u(x)$

Напом $\mathring{W}_p^\ell(G)$ – пополнение $C_0^\infty(G)$ по норме $W_p^\ell(G)$

$C_0^\infty(G)$ ВП в $L_2(G)$, но не плотно в $W_2^\ell(G)$

$G = \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathring{W}_p^\ell(G) = W_p^\ell(G)$

$G \ne \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathring{W}_p^\ell(G) \subset W_p^\ell(G)$

Следствие

$G \subset \mathbb{R}^n$ – огр. обл., ∂G класса C^ℓ

$\Rightarrow C^\infty(\bar{G})$ ВП в $W_2^\ell(G) \leftrightarrow W_2^\ell(\bar{G})$

Т.е. $\forall u(x)\in W_2^l(G)\ \exists\{u^m(x)\}_1^\infty\subset C^\infty(\overline{G}):\ \|u-u^m, W_2^l(G)\|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$

<u>Д-во</u> (идея) $\Pi u(x)\in \mathring{W}_2^l(G')$. $\exists\{v^m(x)\}_1^\infty\subset C_0^\infty(G')$. $\|v^m-\Pi u, \mathring{W}_2^l(G)\|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$ ■

Теорема Соболева III

$W_2^l(G)$, G – огр. обл., ∂G класса C^l — в теор-ах I и II было $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$
- $l>\frac{n}{2} \Rightarrow W_2^l(G)\hookrightarrow C(\overline{G})$
- $l>\frac{n}{2}+m \Rightarrow W_2^l(G)\hookrightarrow C^m(\overline{G})$

<u>Док-во</u> через теорему о продолжении

$$\overline{u}(x)=\begin{cases}\Pi u(x), & x\in G'\\ 0, & x\notin G'\end{cases}\in W_2^l(G')$$

Теорема Реллиха — книга Демиденко стр 1–3

$G\subset\mathbb{R}^n$ – огр. обл.

$\Rightarrow \mathring{W}_2^l(G)\hookrightarrow \mathring{W}_2^{l-1}(G)$ – вполне непр. вложение — т.е. $\forall M\subset \mathring{W}_2^l(G)$ – огр. мн-во относительно компактно в $\mathring{W}_2^{l-1}(G)$

<u>Напом</u> $W_2^0(G)=L_2(G)$

Следствие

$G\subset\mathbb{R}^n$ – огр. обл., ∂G класса C^l

$\Rightarrow W_2^l(G)\hookrightarrow W_2^{l-1}(G)$ – вполне непр.

Рассматриваем $G\subset\mathbb{R}^n$ – огр. обл., ∂G класса C^1

Знаем, что:

$\forall G'\subset\mathbb{R}^n:\ \overline{G}\subset G'\quad \exists\,\Pi: W_2^1(G)\longrightarrow \mathring{W}_2^1(G')$ – лин. непр. оператор – оператор продолжения

$$\begin{cases}u_t+au_x=f(t,x)\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\in C^1\end{cases}$$

$f\equiv 0 \Rightarrow u(t,x)=\varphi(x-at)$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1 \in C^3 \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2 \in C^2 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

не получалось понизить требования к классу функций.

В волновых ур-ях ещё хуже.

$$\begin{cases} L_m(D_x)\, u = f, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n \\ B_j u|_S = \varphi_j, \quad S \subseteq \partial G \end{cases}$$

В "классике" мы отождествляем ф-ии, отличающиеся на мн-ве меры 0

В теории Соболева всё круче

Будем рассматривать $S \subset \overline{G}$ — $(n-1)$-мерное многообразие

S может быть всей границей, её частью или лежать внутри G

Теорема | $u \in C^1(\overline{G})$, $S \subset \overline{G}$ — $(n-1)$-мерн. многообр

$\Rightarrow \|u, L_2(S)\| \leq c\, \|u, W_2^1(G)\|$

Лемма | $u \in C^1(\overline{G})$, $S \subset \overline{G}$ — $(n-1)$-мерн. многообр

$\Rightarrow \|u, L_2(S)\| \leq c\, \|\nabla u, L_2(G)\|$

Д-во $\quad G \subset Q = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 < x_j < d\}$ — куб

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \overline{G} \\ 0, & x \notin \overline{G} \end{cases} \in C_0^1(G)$$

$$\|u, L_2(S)\| \leq \sum_{j=1}^{N} \|u, L_2(S_j)\|, \quad S \subset \bigcup_1^N S_j$$

где $S_1, \dots, S_N$ — "простое" покрытие, т.е. эл-ты, у которых одна координата является гладкой функцией остальных

$S_j: \; x_j = \varphi(\underbrace{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n}_{:= x'})$

$$\overline{u}(x', \varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} \overline{u}_\xi(x', \xi)\, d\xi$$

$$\|\overline{u}, L_2(S_j)\|^2 = \int_{S_j} |\overline{u}(x)|^2 dS = \int_{G_j} |\overline{u}(x', \varphi(x'))|^2 \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}\, dx'$$

$$G_j = \Pr S_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

$$|\overline{u}(x', \varphi(x'))| \leq \int_0^{\varphi(x')} |\overline{u}_\xi(x', \xi)\, d\xi \overset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} \left(\int_0^{\varphi(x')} d\xi\right)^{1/2} \left(\int_0^{\varphi(x')} |\overline{u}(x', \xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$\overset{\text{куб } Q}{\leq} \sqrt{d} \left(\int_0^{\varphi(x')} |\overline{u}_\xi(x', \xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \leq \sqrt{d} \left(\int_0^{d} |\overline{u}_\xi(x', \xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

Т.о. $\|\bar{u}, L_2(S_j)\|^2 \le c \int\limits_{Q'} |\bar{u}(x', \varphi(x')|^2 dx' \le cd \int\limits_{Q'} \int\limits_0^d |\bar{u}_\xi(x', \xi)|^2 d\xi\, dx'$

$= cd\, \|\bar{u}_{x_n}, L_2(Q)\|^2$ $\qquad Q' = [0,d]^{n-1} \times 0$

(n-1)-мерный куб

А $\|u, L_2(S)\| \le \sum\limits_1^N \|u, L_2(S_j)\| = \sum\limits_1^N \|\bar{u}, L_2(S_j)\| \le N\sqrt{cd}\, \|\nabla u, L_2(G)\|$

$\|\nabla u, L_2(G)\| = \|u, W_2^1(G)\|$ ■

Д-во теоремы

$u \in C^1(\bar{G})$, $\Pi : C^1(G) \longrightarrow C_0^1(G')$

$\|\Pi u, L_2(S)\| \le c\, \|\nabla \Pi u, L_2(G')\| \le \tilde{c}\, \|\Pi u, W_2^1(G')\| \le \tilde{c}\, \|\Pi\|\, \|u, W_2^1(G)\|$ ■

Знаем, что $\forall u \in W_2^1(G)\ \exists \{u^m\}_1^\infty \subset C^1(\bar{G}) : \|u - u^m, W_2^1(G)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow$

аппроксимирует

$\Leftrightarrow \|u^m - u^{m+k}, W_2^1(G)\| \xrightarrow[\substack{m\to\infty \\ k\in\mathbb{N}}]{} 0$

$\|u^m - u^{m+k}, L_2(S)\| \le c\, \|u^m - u^{m+k}, W_2^1(G)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Т.е. $\{u^m|_S\}_1^\infty$ сходится в $L_2(S)$ $\Rightarrow \exists v(x') \in L_2(S) : \|u^m - v, L_2(S)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$v(x') = u|_S$ – СЛЕД ф-ии $u \in W_2^1(G)$ на S

Упр корректность – не зависит от выбора нормы