Ex 2 $n=2,\ m=2$ $L_2(x,D_x)u = f(x)$ $S=\{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma=0\}$ $\nabla\Phi(x)=(\alpha,\beta)^T$ $\nu=\pm\frac{\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|}$

$L_2(x,D_x)u=f(x)$

$u|_S = u^0(x),\ x\in S$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha u_{x_1}+\beta u_{x_2})|_S = u'(x),\ x\in S}$

Введём х-кое ур-е для (1). Но сначала:

Гл. часть — $L_m^0(x,D_x)=\sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)D_x^\alpha$. в этих терминах введём х.ур.

Опр $L_m^0(x,\xi)=\sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, $x\in G$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ — х-теристич. многочлен для $L_m(x,D_x)$ для (1)

$L_m^0(x,\xi)=0$ — х-тер. ур-е

Теорема:

S — ил. C^m — рег. пов-ть, прох. ч/з $x^0\in G$ => $\exists$ окр. $B(x^0,\varepsilon)$ $\exists$ невыр. преобр. $y=F(x)$

з.К (2) в перем. y эквив. св-ся к з.К:

$$(3)\ \begin{cases} L_m^0(x,\nabla\Phi(x))|_{x=F^{-1}(y)} D_{y_1}^m\tilde u + \sum\limits_{\substack{|\beta|\le m\\ \beta_1\le m-1}} \tilde a_\beta(y) D_y^\beta \tilde u = f(F^{-1}(y)) \\ \tilde u|_{y_1=0}=v^0(y') \\ D_{y_1}\tilde u|_{y_1=0} = v'(y') \\ \vdots \\ D_{y_1}^{m-1}\tilde u|_{y_1=0} = v^{m-1}(y') \end{cases}$$

$y=(y_1\underbrace{y_2\ldots y_m}_{y'})$

Д-во: $\nabla\Phi(x^0)\ne 0$ $D_{x_1}\Phi(x^0)\ne 0$ $D_{x_1}\Phi(x)\ne 0$ $x\approx x^0$

Замена: $(4)\begin{cases} y_1=\Phi(x) \\ y_j = x_j,\ j\ge 2\end{cases}$ невырожд. преобр-е $\sim y=F(x)$

$x'=(x_2,\ldots,x_n)$

$u(x)\in C^m$ $u(F^{-1}(y))\overset{def}{=}\tilde u(y)$ => $u(x)\equiv\tilde u(F(x))\equiv\tilde u(\Phi(x),x')$ ← преобр-ем:

$D_{x_1}u(x)\equiv D_{y_1}\tilde u|_{y=F(x)}\Phi_{x_1}(x)$

$D_{x_j}u(x)\equiv D_{y_1}\tilde u|_{y=F(x)}\Phi_{x_j}(x)+D_{y_j}\tilde u|_{y=F(x)}$ $j\ge 2$

при $m=2$ теперь:

$u(x)=u^0(x),\ x\in S \sim \tilde u|_{y_1=0}=v^0(y')$ ур-е пов-ти

$x^0\in S$

$\Phi(x)=0$ $\Phi(x_1)\ne 0$ $\sim x_1=\varphi(x')$

$x\in S$ $u^0(x)=u^0(\varphi(x'),x')=u^0(0,y')\overset{def}{=}v^0(y')$ => $D_{y_k}^{\ell}u^0(0,y')=D_{y_k}v(y')$ $k\ge 2$

ура, произв-е легко считать

$x\in S$

$\frac{\partial}{\partial\nu}u(x)=\sum\limits^n \nu_j D_{x_j}u(x)=(\nu_1\Phi_{x_1}+\nu_2\Phi_{x_2}+\ldots+\nu_n\Phi_{x_n})[D_{y_1}\tilde u|_{y=F(x)}]+\sum\limits_{k\ge 2}\nu_k D_{y_k}\tilde u|_{y=F(x)}=$

$=\langle\nu,\nabla\Phi(x)\rangle D_{y_1}\tilde u|_{y=F(x)}+\sum\limits_{k\ge 2}\nu_k D_{y_k}\tilde u|_{y=F(x)}$

при $x\in S$ должно вып-ся: $\frac{\partial}{\partial\nu}u(x)=u'(x)=u'(\varphi(x'),x')$

$\Phi(x)=0$ $x_1=\varphi(x')$ вспомним, что $y=F(x)$: =>

$\underbrace{\langle\nu,\nabla\Phi(F^{-1}(y))\rangle}_{\ne 0} D_{y_1}\tilde u|_{y_1=0}+\sum\limits_{k\ge 2}\nu_k D_{y_k}\tilde u|_{y_1=0}=u'(\varphi(y'),y')$

=> можно поделить

=> $D_{y_1}\tilde u|_{y_1=0}=v'(y')$ Остальные дальше считаются аналогично

$$D^2_{x_1} u(x) = [D^2_{y_1} \tilde{u}|_{y=F(x)}] (\Phi_{x_1}(x))^2 + D_{y_1} \tilde{u}|_{y=F(x)} \Phi_{x_1 x_1}(x)$$

$k \geq 2$

$$D^2_{x_1 x_k} u(x) \equiv [D^2_{y_1} \tilde{u}|_{y=F(x)}] \Phi_{x_1}(x) \Phi_{x_k}(x) + D^2_{y_1 y_k} \tilde{u}\, \Phi_{x_1}(x) + D_{y_1} \tilde{u}|_{y=F(x)} \Phi_{x_1 x_k}(x)$$

$$D^2_{x_j x_k} u(x) \equiv [D^2_{y_1} \tilde{u}|_{y=F(x)}] \Phi_{x_j}(x) \Phi_{x_k}(x) + \ldots$$ нам вообще только старшие важны

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha_x u(x) \equiv [\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) (\nabla\Phi(x))^\alpha][D^2_{y_1} \tilde{u}|_{y=F(x)}] + \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ 0 \leq \beta_1 \leq 1}} b_\beta(x) D^\beta_y \tilde{u}|_{y=F(x)} = f(x)$$

$$\{[L^\circ_2(x, \nabla\Phi(x))]|_{x=F^{-1}(y)}\} D^2_{y_1} \tilde{u} + \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ 0 \leq \beta_1 \leq 1}} b_\beta(F^{-1}(y)) D^\beta_y \tilde{u} = f(F^{-1}(y))$$

Дальше сами...

(2) ~ (3) $\begin{cases} [L^\circ_m(x, \nabla\Phi(x))|_{x=F^{-1}(y)}] D^m_{y_1} \tilde{u} + \ldots = f(F^{-1}(y)) \\ D^k_{y_1} \tilde{u}|_{y_1=0} = v^k(y') \qquad k = 0, \ldots, m-1 \end{cases}$ 1189

Опр $S = \{\Phi(x) = 0\}$ наз. **характеристикой** или **х-тер. пов-тью**, если $L^\circ_m(x, \nabla\Phi(x)) \equiv 0$ при $x \in S$

Теорема 2:
Если S – х-тер. для (1) (для $L_m(x, D_x)$) $\Rightarrow$ з.К (2) не явл. одн-но разреш. $\forall f, u^0, \ldots, u^{m-1}$ даже если они из C^∞