30.04.21

§ 6.3 Уравнение теплопроводности.

$u_t - \Delta u = 0$

$u = u(t,x) \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

$n=1 \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$ кош. з.

Если $\varphi(x) \equiv 0 \qquad u(t,x) = a_0(t) + a_1(t)x^2 + a_2(t)x^4 + \dots$,

где $a_0 \in C^\infty (t \geq 0) \qquad a_0(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

$Q = (0,T) \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^n$ - огр. обл

цилиндр

$(2) \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (t,x) \in Q \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{S_{бок}} = \psi(t,x') & x' \in \partial G \end{cases}$ - 1я кр. з.

$S_{бок} = (0,T) \times \partial G \qquad S_{нижн} = \{(0,x) : x \in G\}$

$S = \bar{S}_{бок} \cup \bar{S}_н$

Теорема 1 (принцип max). Пусть $u(t,x) \in C(\bar{Q})$ - кл. реш. (2). Тогда $u(t,x)$ достигает max(min) на S.

Док-во.

Пусть $M = \max\limits_{Q} u(t,x)$, $m = \max\limits_{S} u(t,x)$

В таком случае $M = m$.

От противного.

Пусть $\exists (t_0, x^0) \in (0,T) \times G : M = u(t_0, x^0)$

Введём $v(t,x) = u(t,x) + \frac{(M-m)}{2(\mathrm{diam}\, G)^2} |x - x^0|^2$

$V(t_0, x^0) = u(t_0, x^0) = M$

$v(t,x)\big|_S \le m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M$ (т.к. $M > m$)

(t', x') – $\max v(t,x)$ $x' \in G$, $t' \in [0,T]$

1) $t' < T$ $V_t(t', x') = 0$, т.к. точка max, то

$V_{x_j x_j}(t', x') \le 0$

2) $t' = T$ т.к. max $V_t(t', x') \ge 0$ $V_{x_j x_j}(t', x') \le 0$

В обоих случаях получаем $V_t(t', x') -$

$- \sum V_{x_j x_j}(t', x') \ge 0$

$V_t(t,x) - \Delta V(t,x) = -\frac{(M-m)n}{(\mathrm{diam}\, t)^2} < 0$ ↯

$M \ngtr m \Rightarrow M = m$ •

Следствие. Если кл. реш. $u \in C(\overline{Q})$ сущ., то оно единств.

Док-во.

Пусть $\exists u_1(t,x), u_2(t,x)$ $u_1(t,x) \not\equiv u_2(t,x)$.

$u = u_1 - u_2 \not\equiv 0$ при $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. По принципу max такого быть не может. •

$$(3) \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & t > 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$T > 0$

$\mathcal{M}_T$ – мн-во функций $u(t,x)$: $\sup\limits_{t \in (0,T)} |u(t,x)| < \infty$

$\mathcal{M}$ - мн-во функций $u(t,x)$, $(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$:
$\forall T>0$ $u(t,x)\in\mathcal{M}_T$ (огр. в $\forall$ полосе)

Теорема 2. $u(t,x)\in C(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)\cap\mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ - кл-е реш-е (3) $\Rightarrow$ оно единств.

Док-во.

От противного.

Пусть $\exists u_1(t,x), u_2(t,x)\in C\cap\mathcal{M}$.

$u_1(t,x)\not\equiv u_2(t,x)$

$u=u_1-u_2\not\equiv 0\in C\cap\mathcal{M}$ - кл. реш. з. вида

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

$\exists(t_0,x^0)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$: $u(t_0,x^0)=\alpha\neq 0$

Зафиксируем $T>t_0$

$u(t,x)\in\mathcal{M}_T$: $\sup\limits_{(0,T)\in\mathbb{R}^{n+1}_+}|u(t,x)|\le C<\infty$.

$\forall\rho>0$ $V^{\pm}(t,x)=u(t,x)\pm\frac{C}{\rho^2}(2nt+|x|^2)$

$D_t-\sum D^2_{x_j}$

$$\begin{cases} V^+_t-\Delta V^+=0\\ V^+\big|_{t=0}=\frac{C}{\rho^2}|x|^2\geqslant 0\\ V^+\big|_{|x|=\rho}=u\big|_{|x|=\rho}+\frac{C}{\rho^2}2nt+C\end{cases}$$

$-C\le u\le C$

$\Rightarrow u\big|_{|x|=\rho}\geqslant -C$ $\quad\frac{C}{\rho^2}2nt\geqslant 0$ $\Rightarrow V^+\big|_{|x|=\rho}\geqslant 0$

$Q = (0,T) \times \{|x| < \rho\}$

$t \in (0,T) \quad |x| < \rho \quad v^+(t,x) \geqslant 0$

$u(t,x) \geqslant -\frac{c}{\rho^2}(2nt + |x|^2)$

Аналогично для v^-:

$$\begin{cases} v^-_t - \Delta v^- = 0 \\ v^-\big|_{t=0} = -\frac{c}{\rho^2}|x|^2 \leqslant 0 \\ v^-\big|_{|x|=\rho} = u\big|_{|x|=\rho} - \frac{c}{\rho^2} 2nt - c \leqslant 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ из принципа max $t \in (0,T)$, $|x| < \rho$

$v^-(t,x) \leqslant 0 \Rightarrow u(t,x) \leqslant \frac{c}{\rho^2}(2nt + |x|^2)$

$|u(t,x)| \leqslant \frac{c}{\rho^2}(2nt + |x|^2) \quad \rho > |x^0| \quad (t_0, x^0) \in Q$

$u(t_0, x^0) = \alpha \neq 0 : \ |\alpha| < \frac{c}{\rho^2}(2nt + |x^0|^2)$

При $\rho \to \infty$ $|\alpha| \leqslant 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ч.т.д.

•

Теорема 3. $\forall \varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ - огр. $\exists!$ клас. реш.

(3) $u(t,x) \in C(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+) \cap M(\mathbb{R}^{n+1}_+)$

Док-во.

Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\begin{cases} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}\big|_{t=0} = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$

Решение этой задачи: $\hat{u}(t,x) = e^{-t|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$

Можно применить обр. оператор Фурье:

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \qquad (4)$$

$u_t - \Delta u(t,x) = 0 \qquad \varphi \equiv 1$

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi}\, e^{-t|\xi|^2}\,\varphi(y)\,dy\,d\xi \overset{\text{т. Фубини}}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi}\, e^{-t|\xi|^2}\,\varphi(y)\,d\xi\right)dy$$

(подгоним под ф-лу $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm izs}\, e^{-\frac{|s|^2}{2}}\,ds = e^{-\frac{|z|^2}{2}}$)

Замена $s_k = \sqrt{2t}\,\xi_k$

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\overbrace{\tfrac{(x-y)}{\sqrt{2t}}}^{z}s}\, e^{-\frac{|s|^2}{2}}\,ds\right)dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi t^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\, e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy \qquad (5)$$

(4) ~ (5) $\qquad \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|z|^2}{2}}\,dz = 1\right)$

Если $\varphi \equiv 1$, то $u(t,x) \equiv 1$

$\frac{x-y}{\sqrt{2t}} = z \qquad y = x - \sqrt{2t}\,z \Rightarrow$

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-\sqrt{2}tz)\, e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz$$

(4) ~ (5) ~ (6) при $t \to 0 \qquad u(t,x) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \varphi(x)$ •