19.03.21

$v, u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$

$\Delta v, \Delta u \in C(\overline{G})$

$$\int_G (\underbrace{v(y)}_{=\tilde{g}(y,x)} \overbrace{\Delta u(y)}^{f(y)} - u(y) \overset{0}{\overset{\parallel}{\Delta v(y)}}) \, dy = \int_{\partial G} (v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \underbrace{u(y)}_{\varphi(y)} \frac{\partial v}{\partial \nu}) ds$$

$$0 = -\int_G g(y,x) f(y) \, dy + \int_{\partial G} g(y,x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds - \int_{\partial G} \varphi(y) \frac{\partial \tilde{g}(y,x)}{\partial \nu} ds$$

$$u(x) = \int_G \mathcal{E}_n(x-y) f(y) ds - \int_{\partial G} \mathcal{E}_n(x-y) \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) ds + \int_{\partial G} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \tilde{g}(y,x) - \mathcal{E}_n(x-y) \equiv 0 \\ y \in \partial G \end{matrix}}$$

Теорема 3. $f \in C^1(\overline{G}) \Rightarrow u(x) = \int_G \mathcal{E}_n(x-y) f(y) dy$ — $x \in G$

частное решение $\Delta u = f(x)$.

Док-во.

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial G} = \varphi(x) \quad x' \in \partial G \end{cases}$$

$$u(x) = \underset{\Delta v = 0}{\overset{}{\underset{\parallel}{v(x)}}} + \underbrace{\int_G \mathcal{E}_n(x-y) f(y) \, dy}_{\Delta u = f(x)}$$

для $n \geq 3$:

Можем продиф-ть под знаком интеграла (почему?)

$$D_{x_j} u(x) = \int_G \underbrace{D_{x_j}[\mathcal{E}_n(x-y)]}_{-D_{y_j} \mathcal{E}_n(x-y)} f(y) \, dy \overset{\text{г.о.}}{=} -\int_G \mathcal{E}_n(x-y) D_{y_j} f(y) dy +$$

$$+ \int_{\partial G} \mathcal{E}_n(x-y) f(y) \cos(\nu, y_j) ds$$

$$\Delta u(x) \equiv f(x) \qquad x\in G$$

по лемме Дюбуа Реймонда

$$\int_G [\Delta u(x) - f(x)]\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi\in C_0^\infty(G)$$

$$\int_G \Delta u(x)\varphi(x)\,dx \overset{?}{=} \int_G f(x)\varphi(x)\,dx$$

$\|$ по частям (г.о.) $\qquad\qquad \|$

$$\int_G u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(G)$$

?

$$\int_G\Big(\int_G \mathcal{E}_n(x-y) f(y)\,dy\Big)\Delta\varphi(y)\,dx = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\mathcal{E}_n(x-y) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \qquad G\times G$$

т. Фубини $\|$

$$\int_G f(y)\underbrace{\Big[\int_G \mathcal{E}_n(x-y)\Delta\varphi(x)\,dx\Big]}_{\varphi(y)\ \text{(по ф-ле из след-ия 1)}}dy = \int_G f(y)\varphi(y)\,dy$$

Теорема 4 (о среднем арифметическом)

Пусть u гарм. в G и $u\in C(\overline{G})$, $G = B(a,r)$

$$\Rightarrow u(a) = \frac{1}{\underbrace{\sigma_n r^{n-1}}_{S\ \text{сферы}}}\int_{|a-y|=r} u(y)\,ds$$

Лемма. u - гармоническая в G, $u\in C^1(\overline{G}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,ds = 0$$

Док-во.

$$\int_G \big(v(y)\overset{=0}{\Delta u(y)} - u(y)\overset{=0}{\Delta v(y)}\big)\,dy = \int_{\partial G}\Big(v(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\overset{=0}{\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)}\Big)\,ds$$

$v\equiv 1$ берем такую

$\bullet$

$G' = B(a, r')$, $0 < r' < r$ $u(x) = -\int\limits_{\partial G'} \mathcal{E}_n(x-y) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)ds}_{=0 \text{ при } x=a} +$

$+ \int\limits_{\partial G'} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{E}_n(x-y) ds$

$\partial G' = \{y : |y-a| = r'\}$

$n \geq 3$

$$\int\limits_{\partial G'} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{E}_n(x-y) ds = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int\limits_{|a-y|=r'} u(y) \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\bigg|_{r=r'} ds =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{|a-y|=r'} u(y) \frac{1}{r^{n-1}}\bigg|_{r=r'} ds$$

$$u(a) = \frac{1}{\sigma_n (r')^{n-2}} \int\limits_{|a-y|=r'} u(y) ds \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{непр-ть} \\ \text{на компакте}}]{r' \to r} \frac{1}{\sigma_n 2^{n-1}} \int\limits_{|a-y|=r} u(y) ds$$

Теорема 5 (Принцип max для гармон. ф-ции)

Пусть $u(x)$ - гармоническая в G, $u \in C^1(\overline{G})$: $u(x) \not\equiv const \Rightarrow u(x)$ не может достигать max(min) зн-я внутри G (или $\min\limits_{z \in \partial G} u(z) < u(x) < \max\limits_{z \in \partial(G)} u(z)$)

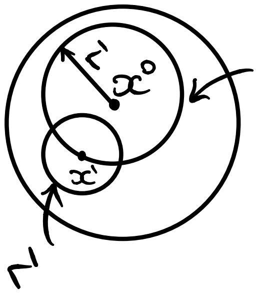
Док-во

$M = \max\limits_{x \in \overline{G}} u(x)$ $\forall u \in G$ $u(y) < M$

От противного 1. $\exists x^0 \in G : u(x^0) = M \Rightarrow \exists r > 0 :$ $\overline{B(x^0, r)} \subset G \Rightarrow u(x) \equiv M$ $\forall x \in B(x^0, r)$

От противного №2.

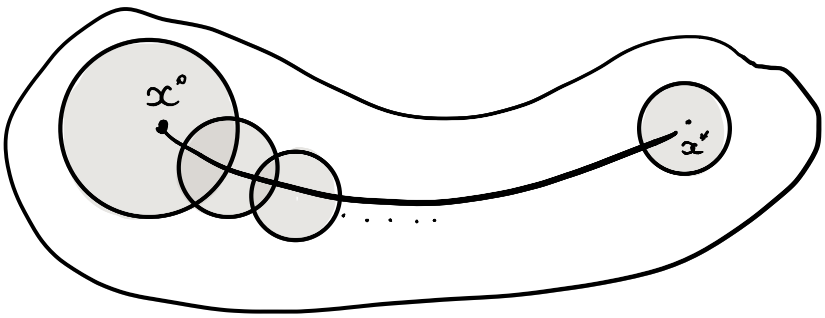
Пусть это неверно: $\exists x' \in B(x^0, r) : u(x') < M \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 :$ в $B(x', \varepsilon)$ $u(x) < M$ (в силу непр-ти)



$r' = |x^0 - x'|$

$$M = u(x^0) = \frac{1}{\sigma_n (r')^{n-1}} \int\limits_{|x^0-y|=r'} u(y)\,dy$$

$$\int\limits_{|x^0-y|=r'} \overset{\text{по адд-ти}}{=} \int\limits_{\Gamma'} + \int\limits_{\Gamma''} < M\mu(\Gamma') + M\mu(\Gamma'') = M(\mu(\Gamma') + \mu(\Gamma'')) < M\frac{1}{\sigma_n (r')^{n-1}} \cdot \sigma_n (r')^{n-1} = M$$



$\forall x^* \in G$

$\Rightarrow u(x^*) = M$

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial G} = \varphi \end{cases} \quad u \in C(\overline{G})$$

Опред-ся единственным образом!

От противного. Пусть $\exists\, u^1, u^2$ – реш-е. Тогда

$u(x) = u^1(x) - u^2(x) \not\equiv 0$ · решение $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial G} = 0 \end{cases}$

Из принципа max противоречие.

Теорема 6. $u(x)$ гарм. в G. Тогда $u(x) \in C^\infty(G)$

Док-во.

$x^0 \in G' = B(x^0, \frac{r}{2})$ $\quad \exists\, r > 0: B(x^0, r) \subset G$

Покажем $u(x) \in C^\infty(B(x^0, \frac{r}{2}))$ $\quad u \in C^2(\overline{B(x_0, r)})$

$$\forall x \in G' \quad u(x) = -\int\limits_{\partial B(x^0,r)} \mathcal{E}_n(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds + \int\limits_{\partial B(x^0,r)} u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{E}_n(x-y)\,ds$$