23.04.21

$$(1)\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cos(t|\xi|)\, \hat{\varphi}_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{\varphi}_2(\xi)\, d\xi = u_1(t,x) + u_2(t,x)$$

$$u(t,x) = \frac{\varphi_1(x+t) - \varphi_1(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varphi_2(\xi)\, d\xi \qquad n = 1$$

Нужно упростить и сместить.

Будем рассм-ть для $n=3$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{\varphi}_2(\xi)\, d\xi \qquad \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^3)$$

Лемма. $n=3$ $\underbrace{\int_{|z|=1} e^{i\xi z}\, dS_z}_{I(\xi)} = \frac{\sin|\xi|}{|\xi|}$ ← обл-т сфер. симм-й

$$I(\xi) \xrightarrow[\xi \to 0]{} I(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} dS_z$$

Док-во

При $\xi \neq 0$ $\quad \xi', \xi \,/\, |\xi'| = |\xi| \Longrightarrow I(\xi) = I(\xi')$

симм-ия отн-о сферы

$\exists S$ - ортог. матр. $(SS^T = E)$: $\xi' = S\xi$

$|z| = 1 \Rightarrow |Sz| = 1$

$$I(\xi') = \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} e^{i(S\xi z)}\, dS_z = \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} e^{i\xi S^T z}\, dS_z = \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} e^{iy}\, dS$$

$y = S^T z$ $\qquad J = 1$

Интеграл $I(\xi)$ обладает осевой симметрией

$$\xi' = \begin{pmatrix} |\xi| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi \Rightarrow |\xi'| = |\xi|$$

$z_1 = \cos\theta_1 \qquad 0 \le \theta_1 \le \pi$

$z_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \qquad 0 \le \theta_2 < 2\pi$

$z_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2$

$$I(\xi) = I(\xi') = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|z|=1} e^{i|\xi| z} \, dS_z =$$

$\eta = \cos\theta_1$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{2\pi} e^{i|\xi|\cos\theta_1} \sin\theta_1 \, d\theta_1 \Big) d\theta_2 = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} e^{i|\xi|\cos\theta_1} \sin\theta_1 \, d\theta_1 =$$

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} e^{i|\xi|\eta} \, d\eta = \frac{1}{|\xi|} \sin|\xi|$$

Вернемся к $u_2(t,x)$:

$$u_2(t,x) = \frac{t}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi} \frac{\sin(t|\xi|)}{t|\xi|} \hat{\varphi}_2(\xi) \, d\xi =$$

$$\frac{t}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi} \Big(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|z|=1} e^{it\xi z} \, dS_z \Big) \hat{\varphi}_2(\xi) \, d\xi$$

было 6 $\int$ → стало 8

$$\overset{\text{т. Фуб.}}{=} \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{i(x+tz)\xi} \hat{\varphi}_2(\xi) \, d\xi \, dS_z =$$

обратн. преобр. Фурье

$$= \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|z|=1} \varphi_2(x+tz) \, dS_z$$

Гипотеза: $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ (чтобы инт-л был из C^2)

Теорема 2. Если $n=3$ и $\varphi_1 \equiv 0$ $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ то

$* \quad u(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|z|=1} \varphi_2(x+tz)\,dS$ – класс. реш. З.К.(1)

(с помощью ф-ы Г.О.)

Следствие. $n=3$, $\varphi_1 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int\limits_{|z|=1} \varphi_1(x+tz)\,d\xi\right] +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|z|=1} \varphi_2(x+tz)\,dS_z$$ – ф-ла Кирхгофа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right) = \cos(t|\xi|)$$

Следствие 2. $n=3$ $\varphi_1 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда ф-ла Кирхгофа: $u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-y|=t} \varphi_1(y)\,dS_y\right] + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-y|=t} \varphi_2(y)\,dS_y$

Следствие 3. $n=3$: $\forall (t_0, x^0) \in \mathbb{R}^4_+$ supp φ_1 и supp φ_2 компактны $\exists [t_1, t_2]$: $u(t,x) \equiv 0$ при $t \notin [t_1, t_2]$

$n=2$

$u(t, x_1, x_2)$ – реш-е $\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) u(t, x_1, x_2) \equiv 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u(t, x_1, x_2) \equiv 0$$

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_j} \equiv 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi_1(x_1, x_2) \\ u_t\big|_{t=0} = \varphi_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$u_2(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|z|=1} \varphi_2(x_1 + tz, x_2 + tz)\, ds$$

$$u_2(t, x_1, x_2) = \frac{t}{2\pi} \int\limits_{z_1^2 + z_2^2 < 1} \varphi(x_1 + tz_1, x_2 + tz_2) \sqrt{1 + f_{z_1}^2 + f_{z_2}^2}\, dz$$

Теорема 3. $n = 2$ $\varphi_1 \geqslant 0$ $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^4)$

Следствие. $n = 2$ $\varphi_1 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\left(\int\limits_{z_1^2 + z_2^2 < 1} \frac{\varphi_1(x_1 + tz_1, x_2 + tz_2)}{\sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}}\, dz_1\right) dz_2\right) + *$$