2/4/21

$n=3$ $\quad G\subset\mathbb{R}^3$ – огр, $\quad \partial G$ – класса C^2, связн.

$$G_1 := \mathbb{R}^3\setminus\overline{G}$$

$D^+ \begin{cases}\Delta u = 0, & x\in G\\ u|_{\partial G} = \varphi_1\end{cases}$ $\quad$ $u\in C^2(G)\cap C(\overline{G})$

классич. реш-е

$u\in C^2(G_1)\cap C(\overline{G_1})$ $\quad$ $D^- \begin{cases}\Delta u = 0, & x\in G_1\\ u|_{\partial G} = \varphi_2\\ u(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0\end{cases}$

$N^+ \begin{cases}\Delta u = 0, & x\in G\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial G} = \varphi_3\end{cases}$ $\quad (*)\quad$ $N^- \begin{cases}\Delta u = 0, & x\in G_1\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial G} = \varphi_4\\ u(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0\end{cases}$

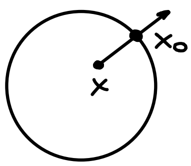
$n\geqslant 3$ $\quad \begin{cases}\Delta u = 0, & |x|>r\\ u|_{|x|=r} = \varphi\\ u(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0\end{cases} \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{\sigma_n r}\int\limits_{|y|=r}\varphi(y)\,\frac{|x|^2-r^2}{|x-y|^2}\,dy$

Теорема 1 | $u(x)$ – гарм вне области $G\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$,
$u(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow |u(x)|\leqslant\frac{c}{|x|^{n-1}},\quad x\notin G \quad |x|\geqslant r$$
$$|\nabla u(x)|\leqslant\frac{c}{|x|^{n-1}}$$

$u(x)$ имеет **ПРАВИЛЬНУЮ НОРМАЛЬНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ** на ∂G, если

① $\forall x^0\in\partial G$, $\nu(x^0)$ – норм к ∂G



$$\lim_{\substack{x\to x_0 \text{ по норм.}\\ x\in G}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) = \varphi(x^0),\qquad \varphi\in C(\partial G)$$

② Указанный предел равномерен отн $x^0\in\partial G$

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x^0\in\partial G\quad |x-x^0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)-\varphi(x^0)\right|<\varepsilon$

$(*)$ У N^+ и N^- следующие усл-я на u:

N^+ $\quad u\in C^2(G)\cap C(\overline{G})$: $\exists\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial G}$ – правильная норм произв

N^- $\quad u\in C^2(G_1)\cap C(\overline{G_1})$: $\exists\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial G}$ – правильная норм. произв.

Теорема 2 а | Классич реш-е D^+ сущ-ет

$\Rightarrow$ оно единственно

б | Классич реш-е D^- сущ-ет

$\Rightarrow$ оно единственно

в| Классич реш-е N^+ сущ-ет

=> оно определяется с точностью до аддитивности

г| Классич реш-е N^- сущ-ет

=> оно единственно

Д-во а) следует из принципа максимума

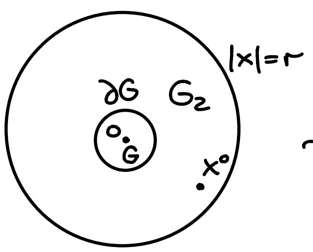
б) ↯ $u_1 \not\equiv u_2$ — реш-я D^- => $u = u_1 - u_2$ — реш-е

задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in G_1 \\ u|_{\partial G} = 0 \\ u(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \end{cases}$, причем $u(x) \not\equiv 0$

$\exists x^0 \in G_1 : u(x^0) = 0$. $\exists r \gg 1 : |x^0| < r$

$G_2 := G_1 \cap \{|x|<r\}$. G_2 - огр => по пр. максимума

$$|u(x^0)| \le \max_{x\in\partial G_2} |u(x)|$$

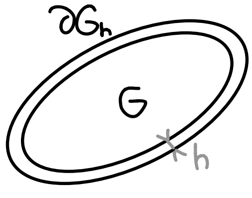


$\partial G_2 = \partial G \cup \partial\{|x|<r\}$, $u|_{\partial G} = 0$ => $|u(x^0)| \le \max_{|x|=r} |u(x)|$

$\max_{|x|\le r} |u(x)| \le \frac{C}{r^{n-2}}$ => $|u(x^0)| \le \frac{C}{r^{n-2}}$.

$x^0 \in G_1$ => $r \to \infty$ ⟶ $u(x^0) \equiv 0$ ↯ □

в) u_1, u_2 - реш. $u = u_1 - u_2$ $\Delta u(x) \equiv 0$



$0 \equiv \Delta u \cdot u = \operatorname{div}(\nabla u)\cdot u = \operatorname{div}(\nabla u \cdot u) - |\nabla u|^2$

$\int\limits_{G_h} |\nabla u|^2 dx = \int\limits_{\partial G_h} \frac{\partial u}{\partial \nu} u\, ds \xrightarrow[h\to 0]{} \int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu} u\, ds = 0$ т.к. $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G} = 0$

Т.о. $|\nabla u| \equiv 0$ => $u(x) = const$ □

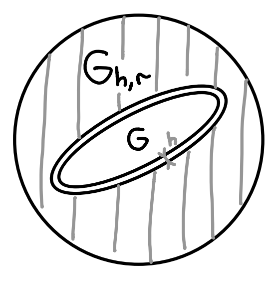
г) ↯ $u_1 \not\equiv u_2$ - реш, $u = u_1 - u_2$ - реш $\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in G_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G} = 0 \\ u(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \end{cases}$

$\exists x^0 \in G : u(x^0) \ne 0$ т.к. $u \not\equiv 0$

$\exists r \gg 1 : |x^0| < r$

$G_{h,r}$ как на картинке

$G_{h,r} \xrightarrow[h\to 0,\, r\to\infty]{} G_1$



Подставим $u(x)$ в $\Delta u = 0$:

$$\operatorname{div}(\nabla u \cdot u) \equiv |\nabla u|^2$$

$$\int\limits_{G_{h,r}} |\nabla u(x)|^2 dx = \left| \int\limits_{\partial G_{h,r}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u \, ds \right| \xrightarrow[h \to 0]{} \left| \int\limits_{|x|=r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u \, ds \right| + \underset{\hookrightarrow \int_{\partial G} \dots}{0} \leq$$

$$\leq \int\limits_{|x|=r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| |u| \, ds \leq \frac{\tilde{C}}{r^3} \int\limits_{|x|=r} ds \leq \frac{\tilde{\tilde{C}}}{r}$$

$$\int\limits_{G_1 \cap \{|x|<r\}} |\nabla u|^2 dx \longrightarrow \int\limits_{G_1} |\nabla u(x)|^2 dx = 0$$

$$\nabla u(x) \equiv 0 \implies u(x) \equiv \text{const}$$

$$u(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0 \implies u(x) \equiv 0 \quad \lightning \quad \blacksquare$$

Метод потенциалов

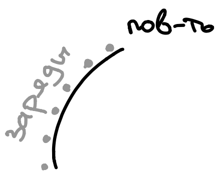
$n = 3$

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ — $P_1(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \alpha(y) \frac{1}{|x-y|} ds,$

где $\alpha \in C(\partial G)$

ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ — $P_2(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \beta(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) ds$

где $\beta \in C(\partial G)$



Простой слой:

α - плотность зарядов

P_1 - потенциал эл. поля

Двойной слой

β - плотность зарядов

P_2 - потенциал эл. поля

<u>Замечание</u> $\frac{1}{4\pi |x-y|} = -\mathcal{E}_3(x-y)$

<u>Лемма 1</u> $P_1 \in C(\mathbb{R}^3)$

<u>Лемма 2</u> $P_2 \in C(\partial G)$

<u>Лемма 3</u> $\Delta P_1(x) \equiv 0, \quad \Delta P_2(x) \equiv 0$ при $x \notin \partial G$

<u>Напом</u> $\Delta \mathcal{E}_3(x) \underset{|x| \neq 0}{\equiv} 0$

Напом Интегр. Гаусса: $\int\limits_{\partial G} \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{E}_n(x-y)\, ds = \begin{cases} 1, & x \in G \\ 1/2, & x \in \partial G \\ 0, & x \notin \overline{G} \end{cases}$

Теорема 3 о предельном поведении потенциала двойного слоя

$\alpha, \beta \in C(\partial G)$, $x^0 \in \partial G$

$\lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \in G}} P_2(x) = P_2^+(x^0)$

$\Rightarrow P_2^+(x^0) = P_2(x^0) - \frac{\beta(x^0)}{2}$

$\alpha, \beta \in C(\partial G)$, $x^0 \in \partial G$

$\lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \notin \overline{G}}} P_2(x) = P_2^-(x^0)$

$\Rightarrow P_2^-(x^0) = P_2(x^0) + \frac{\beta(x^0)}{2}$

$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) ds \Bigg|_{x=x^0}$ — это не производная по нормали от $P_1(x)$!

Обозн $\left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x_0) \right] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) ds \Bigg|_{x=x^0}$

Обозн $\lim\limits_{\substack{x \in G \\ x \to x^0 \text{ по норм.}}} \frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x) := \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x) \right)^+$, $\lim\limits_{\substack{x \notin \overline{G} \\ x \to x^0 \text{ по норм.}}} \frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x) := \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x) \right)^-$

Теорема 4 $x^0 \in \partial G$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0) \right)^+ = \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0) \right] + \frac{\alpha(x^0)}{2}$

$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0) \right)^- = \left[\frac{\partial}{\partial \nu} P_1(x^0) \right] - \frac{\alpha(x^0)}{2}$

Пределы равномерны отн. x^0.