Воспоминания:

$x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) $\left[\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}\right] + \ldots = f(x)$, $\quad a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$, т.е. $A(x) = (a_{ij}(x))$ – симм. $\Rightarrow$ Sp вещ.

$y = \varphi(x) \qquad \sum\limits_{k,m=1}^{n} \tilde{a}_{km}(\varphi^{-1}(y))\, \tilde{u}_{y_k y_m} + \ldots = f(\varphi^{-1}(y))$

коэф-ты пост. $\to$ можно привести к канон. виду

n = 2

$a_{ij} \in C^2(G)$

из (1): $a(x)u_{x_1x_1} + 2b(x)u_{x_1x_2} + c(x)u_{x_2x_2} + \ldots = f(x)$ (5) $\quad A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix}$

Гиперболич. $\Rightarrow$ $A(x)$ невырожд., с.з. от 0 в разн. стороны

Запишем х-терист. многочлен:

$$\begin{vmatrix} a(x)-\lambda & b(x) \\ b(x) & c(x)-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a(x)+c(x))\lambda + a(x)c(x) - b^2(x) = 0$$

Обозн.: $\lambda_1(x) > 0$, $\lambda_2(x) < 0$

$\lambda_1(x)\lambda_2(x) = a(x)c(x) - b^2(x)$

$d(x) = b^2(x) - a(x)c(x) > 0$ ~ гиперболичность ур-я

Ex не по всей обл-ти гиперболичность:

$x_2 u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0 \qquad x_2 > 0$ – эллиптич. ур-е; $\quad x_2 < 0$ – гиперболич. ур-е

$\Rightarrow$ все привед-я к канон. виду локальны

Теорема 1:

(5) гиперболично в нктр окр-ти $x^\circ \in G$, $a, b, c \in C^2(G)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists B(x^\circ, \varepsilon)$ $\exists$ невыр. пр. $y = \varphi(x)$ такое, что ур-е (5) свод. к ур-ю:

(6) $\tilde{u}_{y_1y_2} + \underbrace{\ldots}_{\text{(мл. члены)}} = g(y)$

Следствие:

$y_1 = z_1 + z_2 \qquad y_2 = z_1 - z_2 \Rightarrow$ (6) свод. к ур-ю $v_{z_1z_1} - v_{z_2z_2} + \ldots = \tilde{g}(z)$

как раз канонич.

Поэтому (6) тоже иногда называют канонич.

Д-во: $\xi_1 = \eta_1 + \eta_2 \quad \xi_2 = \eta_1 - \eta_2 \quad \xi_1\xi_2 = \eta_1^2 - \eta_2^2 \quad \xi = S\eta \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Д-во Т1:

$a(x) := a_{11} \quad c(x) := a_{22}$ из (5)

$|a(x)| + |b(x)| + |c(x)| \neq 0$

Рассмотрим 2 случая:
1) $|a(x^\circ)| + |c(x^\circ)| \neq 0$
2) $|a(x^\circ)| + |c(x^\circ)| = 0$, $|b(x^\circ)| \neq 0$

$|a(x^0)| \neq 0 \Rightarrow$ не 0 и в нктр окр-ти (в силу непр-ти)

$\tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & & * \\ & \ddots & \\ * & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{a}_{kk} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \varphi^k_{x_i}(x)\, \varphi^k_{x_j}(x)$, $\quad y_k = \varphi^k(x_1 \dots x_n)$, $k = 1 \dots n$

$\tilde{A}(x) \equiv J(x) A(x) J^T(x)$

$\begin{cases} y_1 = \varphi^1(x) \\ y_2 = \varphi^2(x) \end{cases} \sim y = \varphi(x)$

Делаем замену пер-х:

$\tilde{a}(x)\, \tilde{u}_{y_1y_1}\big|_{y=\varphi(x)} + 2\tilde{b}(x)\, \tilde{u}_{y_1y_2}\big|_{y=\varphi(x)} + \tilde{c}(x)\, \tilde{u}_{y_2y_2}\big|_{y=\varphi(x)} + \dots = f(x)$

та самая: $\quad \tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{a}(x) & \tilde{b}(x) \\ \tilde{b}(x) & \tilde{c}(x) \end{pmatrix}$

Подобрать φ так, что:

1) $\tilde{a}(x) \equiv 0 \sim a(x)(\varphi^1_{x_1}(x))^2 + 2b(x)\, \varphi^1_{x_1}(x)\, \varphi^1_{x_2}(x) + \tilde{c}(x)(\varphi^1_{x_2}(x))^2 \equiv 0$

2) $\tilde{c}(x) \equiv 0 \sim a(x)(\varphi^2_{x_1}(x))^2 + 2b(x)\, \varphi^2_{x_1}(x)\, \varphi^2_{x_2}(x) + \tilde{c}(x)(\varphi^2_{x_2}(x))^2 \equiv 0$

$\underset{0\neq}{a(x)}(\varphi_{x_1})^2 + 2b(x)\, \varphi_{x_1}\varphi_{x_2} + c(x)(\varphi_{x_2})^2 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\varphi^2_{x_2} \neq 0}$ ← закрыв глаза

$a(x)\lambda^2 + 2b(x)\lambda + c(x) = 0 \qquad \lambda = \dfrac{-b(x) \pm \sqrt{d(x)}}{a(x)} \qquad d(x) > 0$

$a(x)(\lambda - \lambda_1(x))(\lambda - \lambda_2(x)) = 0 \qquad \Rightarrow$ вещ. к.

$\lambda = \dfrac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}}$

Возьмём $\lambda_1 : +$ $\quad \lambda_2 : -$. Наше ур-е тогда:

$a(x)(\varphi_{x_1} - \lambda_1 \varphi_{x_2})(\varphi_{x_1} - \lambda_2 \varphi_{x_2}) = 0$ $\qquad$ можно открыть глаза!

Просто добрались до красоты, пока глаза закрывали

$\varphi^1: \ \varphi^1_{x_1} - \underset{\in C^2}{\lambda_1(x)}\, \varphi^1_{x_2} = 0 \qquad \varphi^1|_{x_1 = x_1^0} = \alpha(x_2)$ ← если выбрали так, что м-ца Якоби невыр., то всё хорошо

$\varphi^2: \ \varphi^2_{x_1} - \underset{\in C^2}{\lambda_2(x)}\, \varphi^2_{x_2} = 0 \qquad \varphi^2|_{x_1 = x_1^0} = \beta(x_2)$

не совп.

$\Rightarrow$ З. решается

$\underset{0\neq}{2\tilde{b}(\varphi^{-1}(y))}\, \tilde{u}_{y_1y_2} + \dots = f(\varphi^{-1}(y))$

Реш-е будет класса C^2

Идея дальше: $\begin{pmatrix} \varphi^1_{x_1} & \varphi^1_{x_2} \\ \varphi^2_{x_1} & \varphi^2_{x_2} \end{pmatrix}$ $\qquad$ считаем Якобиан и чёт ещё, когда-нибудь успех!

Арифметическая задача осталась, чтобы мы дома работали!

2. $a(x)\xi_1^2 + 2b(x)\xi_1\xi_2 + c(x)\xi_2^2$ $\qquad$ Преобр-ем: $\xi_1 = \eta_1 + \eta_2 \quad \xi_2 = \eta_1 - \eta_2$

сведём к 1му пункту.

$D(x) < 0$ – эллипт., $\quad D(x) < 0$ – гипероб., $\quad D(x) = 0$ – параб.

2. Задача Коши для уравнений с частными производными.

$\left[\sum a_{ij}(x) u_{x_i x_j}\right] + \ldots = f(x)$ $\quad L_2(x, D_x) u = f(x) \quad \sim L_2^\circ(x, D_x) u +$ мл.чл. $= f(x)$

лин. опер-р: $L_2(x, D_x) = \sum a_{ij}(x) D^2_{x_i x_j} + \ldots$

$$L_2^\circ(x, D_x) = \sum_1^n a_{ij}(x) D^2_{x_i x_j}$$

(1) $\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u = f(x)$ — лин. ур. в ч.пр. пор. m $\sim L_m(x, D_x) u = f(x) \leftrightarrow L_m^\circ(x, D_x) u +$ мл.чл. $= f(x)$

$\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \quad x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$

$$L_m(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \qquad L_m^\circ(x, D_x) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

$x \in G \subseteq \mathbb{R}^n \quad x^\circ \in G \quad \Phi \in C^m \quad S$ - пов-ть с ур-ем $\Phi(x) = 0 \quad \nabla \Phi|_S \ne 0$

(такие пов-ти наз. регулярными)

$\nu = (\nu_1 \ldots \nu_n)$ — ед. вект. норм. к S.

Опер-р дифф-я по нормали к пов-ти: $\frac{\partial}{\partial \nu} u|_S = \sum_1^n \nu_j D_{x_j} u$

Теперь опр-м k-ю произв-ю: $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\Big|_S = \sum_{|\beta| = k} \frac{k!}{\beta!} \nu^\beta D_x^\beta$

$\nu^\beta = \nu_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{\beta_n}$

$\beta! = \beta_1! \ldots \beta_n!$

$D_x^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \ldots D_{x_n}^{\beta_n}$

3. Коши для (1):

$$(2) \begin{cases} L_m(x, D_x) u = f(x) \\ u(x) = u_0(x), \quad x \in S \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = u_1(x), \quad x \in S \\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}(x) = u_{m-1}(x), \quad x \in S \end{cases}$$

Ex 1 $\quad \begin{cases} \sum_1^n a_j(x) u_{x_j} + a_0(x) u = f(x) \\ u(x) = u_0(x) \quad x \in S \end{cases}$ $\quad$ если х-ки в $x^\circ \in S$ не касаются, то можно зад. обл., где $\exists!$ реш-е

$S = \{x : \Phi(x) = 0\}$ не касается х-к $\frac{dx_j}{ds} = a_j(x) \quad j = 1 \ldots n$

усл-е, что не касается

Восстанавливаем нормаль: $\nu = \pm \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}$ $\quad \Rightarrow \sum a_j(x^\circ) \Phi_{x_j}(x^\circ) \ne 0$