5.03.21

Альтернативы Фредгольма.

$T: H \to H$, H - гильб. пр-во, T - лин. вп. непр. ($\forall M \subset H$ - огр. мн-во $\Rightarrow T(M)$ - относит. компакт. (т.е. из любой пос-ти можно выделить сх-юся подпосл-ть)

$(I-T)u = f$ $f \in H$ - 1е ур-е Фредгольма (1)

$(I-T^*)v = g$ $g \in H$ - 2-е ур-е Фредгольма (2)

Теорема Фредгольма 1. Уравнение 1 разрешимо $\forall f \in H \Leftrightarrow (I-T)u=0$ имеют только $u=0$ реш-е.

Теорема Фредгольма 2. Ур-е $(I-T)u=0$ и $(I-T^*)u=0$ имеют одинаковое конечное число ЛНЗ решений.

Теорема 3. Ур-е (1) разрешимо при $f \in H \Leftrightarrow$ $f \perp v_1, \dots, v_N$, где $\{v_i\}$ - все ЛНЗ реш-я $(I-T^*)v=0$

Хотим доказать

Теорема 4 (альтернатива Фредгольма)

Либо Кр. з. Дирихле имеет единственное обобщенное реш-е $u \in \mathring{W}_2^1(G)$ $\forall f \in L_2(G)$, либо однородная задача ($f=0$) имеет конечное число ЛНЗ решений $u_1, \ldots, u_N$. В этом случае задача разрешима при условии $f \perp u_1, \ldots, u_N$.

(Док-ва на экзамене не будет)

$a(x) \geqslant a_{min} \quad x \in \overline{G}$

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ - об. реш. з. Д при $f \in L_2(G)$

$$\int_G (k\langle\nabla u, \nabla v\rangle + auv)\, dx = -\int_G fv\, dx \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$$

$$\int_G (k\langle\nabla u, \nabla v\rangle + \underbrace{(a - a_{min} + 1)}_{\geqslant 1} uv)\, dx + (a_{min} - 1)\int_G uv\, dx =$$

$$= -\int_G fv\, dx$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1, W_2^1$ можно расм. как гильб. пр-во со ск-м пр-м

$$[u,v] = \int_G (k\langle\nabla u, \nabla u\rangle + (a - a_{min} - 1)uv)\, dx$$

$\|u\| = \sqrt{[u,u]}$

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ - об. реш. з. Д при $f \in L_2(G)$, если

$$[u,v] + (a_{min} - 1)\int_G uv\, dx = -\int_G fv\, dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$$

$$l_f(v) = \int_G fv\, dx \Longrightarrow |l_f(v)| \leq \|f, L_2(G)\| \cdot \|v, L_2(G)\| \leq C\|f, L_2(G)\|$$

$\cdot \|v, \overset{\circ}{W}{}_2^1\| \Rightarrow \quad \|\ell_f\| \leq C\|f, L_2(G)\|$

$\exists! \, F \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) : \ell_f(v) = [F, v] \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ и

$\|F, \overset{\circ}{W}{}_2^1\| \leq C\|f, L_2(G)\|$

$\exists$ линейный непр-й оператор $A_0 : L_2(G) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

$A_0 f = F$

Лемма. $A_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \longrightarrow \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ – вполне непр-й эрмитов оператор.

Док-во.

$\forall$ огр. $M \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \Rightarrow A(M)$ относ. компп. $\forall \{v^m\} \subset A_0(M) \Rightarrow \{v^{m_j}\}$ – сх-ся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ (стр 123)

$\{u^m\} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) : A_0 u^m = v^m$.

По т. Реллиха $\forall$ огр. мн-во в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ отн. компп-о в $L_2(G) \Rightarrow \exists \{u^{m_j}\}$ – сходящ-ся в $L_2(G) \Rightarrow$

$v^{m_j} = A_0 u^{m_j}$ вполне непр-ть док-на.

Эрмитовость: $\int_G f v \, dx = [A_0 f, v] \quad f, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$

$\quad \parallel$

$\int_G v f \, dx = [A_0 v, f] = [f, A_0 v]$

$[u, v] + (a_{min} - 1) \int_G u v \, dx = -[A_0 f, v] \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$

$[u, v] + (a_{min} - 1)[A_0 u, v] = -[A_0 f, v] \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

$[(u + (a_{min} - 1) A_0 u + A_0 f), v] = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

$u + (a_{min} - 1) A_0 u = \underbrace{-A_0 f}_{\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)}$

$T = -(a_{min}-1) A_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \longrightarrow \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ - вп. непр. эрм

$T^* = T \qquad F = -A_0 f$

$u + (a_{min} - 1) A_0 u = 0$

Разрешимость $\Leftrightarrow F \perp u_1, \ldots, u_N$

$\mathrm{Ker}(I - T^*) = \mathrm{Ker}(I - T)$

$[F, u_j] = 0 \sim -[A_0 f, u_j] = 0 \sim \int\limits_G f u_j \, dx = 0$

Пример 1.

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\big|_{\partial G} = 0 \end{cases} \quad \exists!\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$$

Пример 2

$$\begin{cases} \Delta u - \varepsilon u = f \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G} = 0 \end{cases} \quad \exists!\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$$

Пример 3.

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G} = 0 \end{cases}$$

§3 Классические решения эллиптических уравнений.

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & x \in G \subset \mathbb{R}^n \text{ - огр} \\ u\big|_{\partial G} = 0 \end{cases}$$

$\forall f \in L_2(G) \Rightarrow \exists!$ об. реш. $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(G) \Rightarrow u \in W^2_2(G)$

$n=2 \quad \Delta(\ln|x|) \equiv 0 \qquad x \neq 0$

$n \geq 3 \quad \Delta \dfrac{1}{|x|^{n-2}} \equiv 0 \qquad x \neq 0$

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2 \\ -\dfrac{1}{\sigma_n(n-2)} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \text{ - ф. реш. } \Delta$$

$$\sigma_n = \int\limits_{|x|=1} ds$$

$\Delta u = f(x) \qquad u_{ч.}(x) = \int\limits_G \mathcal{E}_n(x-y)\, f(y)\, dy$