$$(1)\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$(2)\ u(t,x) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_2(\eta)d\eta$$

Теорема 1:
$\forall \varphi_1 \in C^2(\mathbb{R})$ $\forall \varphi_2 \in C^1(\mathbb{R})$ $\exists!$ реш-е з. Коши (1), оно предст. в виде (2).

Теорема 2:
Реш-е $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ м.б. предст. в виде $u(t,x) = F_1(x+at) + F_2(x-at)$, где $F_{1,2} \in C^2$

Были слова про ф-лу Даламбера

Д-во: Пойдём по схеме $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}} = 0$. Но сначала немного воспоминаний:

вспоминаем

$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + \ldots = f$

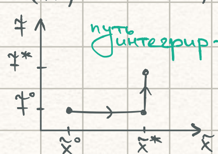
$\begin{cases} \tilde{x} = \varphi_1(x,y) \\ \tilde{y} = \varphi_2(x,y) \end{cases}$ J - невыр. $\qquad \begin{cases} \varphi_{1x} - \lambda_1\varphi_{1y} = 0 \\ \varphi_{2x} - \lambda_2\varphi_{2y} = 0 \end{cases} \qquad \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{y}} + \ldots = \tilde{f}$

a,b,c - const $\quad a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 \longrightarrow \eta_1^2 - \eta_2^2 = (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 + \eta_2) \rightarrow s_1s_2$,
где $s_1 = \eta_1 - \eta_2$ $\quad s_2 = \eta_1 + \eta_2$ $\quad$ вот до такого назаменялись

$A(\xi) = \xi_1^2 - a^2\xi_2^2 = (\xi_1 - a\xi_2)(\xi_1 + a\xi_2) = s_1s_2$, где $s_{1,2} = \xi_1 \pm a\xi_2$

$\xi = Ts \qquad \xi_1 = \frac{s_1 + s_2}{2} \qquad \xi_2 = \frac{s_2 - s_1}{2a} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2a & 1/2a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = T^*\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2a \\ 1/2 & 1/2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{t} = \frac{at - x}{2a} \qquad \tilde{x} = \frac{at + x}{2a}$



$\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}(\tilde{t},\tilde{x}) \equiv 0 \Rightarrow$ можем интегрировать

$\int_{\tilde{x}^\circ}^{\tilde{x}^*} \tilde{u}_{\tilde{t}\xi}(\tilde{t},\xi)d\xi = 0 \longrightarrow \tilde{u}_{\tilde{t}}(\tilde{t},\tilde{x}^*) - \tilde{u}_{\tilde{t}}(\tilde{t},\tilde{x}) = 0$

Ещё раз проинтегрировав, получим:

$\tilde{u}(\tilde{t}^*,\tilde{x}^*) - \underbrace{\tilde{u}(\tilde{t}^\circ,\tilde{x}^*)}_{\Phi_1(\tilde{x}^*)} - \underbrace{\tilde{u}(\tilde{t}^*,\tilde{x}^\circ)}_{\Phi_2(\tilde{t}^*)} + \underbrace{\tilde{u}(\tilde{t}^\circ,\tilde{x}^\circ)}_{const} = 0$

$\Rightarrow \tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x}) = \Phi_1(\tilde{x}) + \Phi_2(\tilde{t}) + c$

F_1, F_2 должны быть такими, что $u|_{t=0} \equiv \varphi_1(x)$, $u_t|_{t=0} \equiv \varphi_2(x)$

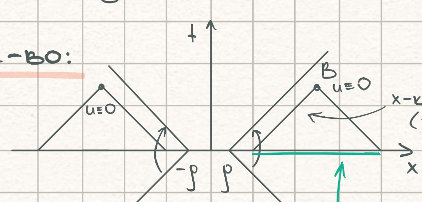
Зам $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ $\quad |u(t,x)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}}|\varphi_1(z)| + T\sup_{z\in\mathbb{R}}|\varphi_2(z)|$ $\quad$ т.е. реш-е з.К. непр. завис. от

Получается з.К. поставлена корректно

$\tau = at \qquad a \equiv 1 \qquad \tilde{u}_{\tau\tau} - \tilde{u}_{xx} = 0$ $\qquad$ Дальше там ф-ла Даламбера пригодится

Теорема 3:
$\varphi_1 \in C^2$, $\varphi_2 \in C^1$ – финитные, т.е. $\exists \rho > 0: \varphi_1(x) \equiv 0 \ \ \varphi_2(x) \equiv 0$ при $|x| \ge \rho$
$\Rightarrow$ реш-е з.К. $u(t) \equiv 0$ при $|x| \ge \rho + a|t| = \rho + |t|$

Д-во:



данные Коши в т. B опр-ся данными Коши на отрезке

можно методом пристального взгляда

$t > 0$

$u(t,x) = \underbrace{\frac{\varphi_1(x+t) + \varphi_2(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_2(\eta)d\eta}_{0 \text{ в т. } B}$

$x + at = c_1 \qquad x - at = c_2$

Теорема 4 (закон сохранения для колебания струны)

$a \equiv 1$. $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi_2 \in C^1(\mathbb{R})$ — финитные

$$\Rightarrow \quad E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\underbrace{u_t^2(t,x)}_{\text{кинетич.}} + \underbrace{a^2u_x^2(t,x)}_{\text{потенциальн.}}]dx \equiv E(0)$$

не зависит от t!

интеграл энергии

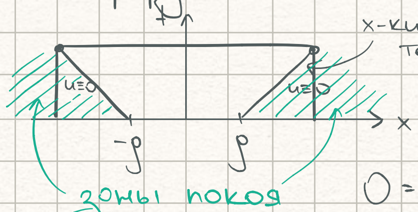
Д-во: $t^* > 0 \quad E(t^*) = E(0)$

$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) \equiv 0 \quad | \cdot u_t(t,x) \quad \longrightarrow \quad u_{tt}u_t - u_{xx}u_t \equiv 0$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2) - \frac{\partial}{\partial x}(u_xu_t) + \underbrace{u_xu_{tx}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_x^2)} \equiv 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_t^2 - u_x^2] - \frac{\partial}{\partial x}(u_xu_t) \equiv 0$$

Интегрируем по области:



х-ки из предп. теоремы

$\exists \rho > 0 \quad \varphi_1(x) \equiv 0 \quad |x| \geq \rho$
$\qquad\qquad \varphi_2(x) \equiv 0$

Интегрируем по: $\Pi = [0, t^*] \times [-\rho - t^*, \rho + t^*]$

$$0 = \iint_{\Pi} \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2 + u_x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(u_xu_t)\right]dxdt =$$

$$= \int_{\partial\Pi} \frac{1}{2}[\cos(\nu,t)(u_t^2 + u_x^2) - \cos(\nu,x)u_xu_t]dS = \underbrace{\int_{\Gamma_н}}_{\text{низ}} + \overset{=0}{\int_{\Gamma_{пр}}} + \underbrace{\int_{\Gamma_в}}_{\text{верх}} + \overset{=0}{\int_{\Gamma_л}}$$

т.к. зоны покоя

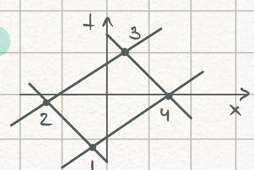
самые интересн.

$$\int_{\Gamma_н} = \int_{-\rho-t^*}^{\rho+t^*} -\frac{1}{2}[u_t^2 + u_x^2]dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[u_t^2(0,x) + u_x^2(0,x)]dx$$

$$\int_{\Gamma_в}\frac{1}{2}[u_t^2 + u_x^2]dx = \frac{1}{2}\int_{-\rho-t^*}^{\rho+t^*}[u_t^2(t^*,x) + u_x^2(t^*,x)]dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[(u_t^2(t^*,x) + u_x^2(t^*,x)]dx$$

$$\Rightarrow 0 = E(0) - E(t^*)$$

Упр



$a > 0 \quad u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$

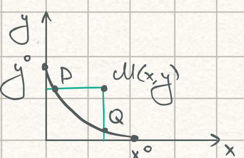
4 х-ки для ур-я кол-я струны
любое его реш-е

$u|_{(1)} + u|_{(3)} = u|_{(2)} + u|_{(4)}$

$x + at = c'$
$x - at = c''$ х-ки

кажется, в этом упр-е

$$(1)\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \\ u|_S = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \varphi_2(x) \end{cases}$$



$S = \{(x,y) \mid y = \mu(x)\}$

$\mu_x'(x) < 0$ на $[0, x^\circ]$

$x = c', \quad y = c''$

$\Phi(x,y) = y - \mu(x) = 0$

$\exists u_x|_S = v_0(x), \quad u_y|_S = w_0(x)$

$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} -\mu_x'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$

$u|_S = u(x, \mu(x)) = \varphi_1(x)$. Диф-ем: $u_x|_S + u_y \cdot \mu_x'|_S = \varphi_1'(x)$

$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = [u_x\cos(\nu,x) + u_y\cos(\nu,y)]\Big|_{\{y=\mu(x)\}} = \varphi_2(x)$

из этих найдём u_x, u_y

Дальше будет параллель с теоремой Пикара. Вспомним идею д-ва:

воспоминания

$\begin{cases} y_t = f(t,y) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$ Предположим, что есть реш-е: $\begin{cases} y_t(t) \equiv f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Проинтегрируем его: $y(t) - y_0 = \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$

Теперь рассмотрим такое интегральн. ур-е: $y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$

К нему легко применить метод последоват. приближений:

$y^0(t) = y_0 \qquad y^{(k)}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y^{(k-1)}(s))ds$

Тогда пред. ф-я и есть реш-е, ура!

В общем, идея у след. теоремы тоже будет: предп., что есть реш-е, проинтегрируем и успех.

самая важная в курсе,
а я пропущу