Напом пропустил

⋮

Следствие $\{u^m\}$ сх-ся в $L_2(S)$ $\exists\, v(x') \in L_2(S)$: $\|u^m|_S - v, L_2(S)\| \to 0$

Конкурс $u \in W_2^1(G)$: $u|_{\partial G} = 0 \Rightarrow u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

через усреднения

Упрощ. случай (на понимание, не конкурс) $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u|_{x=\alpha} = u|_{x=\beta} = 0$

Св-во $u \in W_2^1(G)$

$\Rightarrow \|u|_{\partial G}, L_2(\partial G)\| \le c\,\|u, W_2^1(G)\|$

Д-во из опр. следа и Т.1

Теорема$_2$ Гаусса-Остроградского (обобщённая)

$G \subset \mathbb{R}^n$ – огр. обл, $n \ge 2$, ∂G класса C^1

$u, \omega \in W_2^1(G)$

$$\Rightarrow \int_G u\, D_{x_j}\omega\, dx = \int_{\partial G} u\omega \cos(\nu, x_j)\, ds - \int_G D_{x_j}u \cdot \omega\, dx,$$ где ν - внеш. норм. к ∂G

Д-во $\exists \{u^m\}_1^\infty \subset C^1(\bar G)$: $\|u^m - u, W_2^1(G)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$\exists \{\omega^k\}_1^\infty \subset C^1(\bar G)$: $\|\omega^k - \omega, W_2^1(G)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Значит $\|u^m - u, L_2(\partial G)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, $\|\omega^k - \omega, L_2(\partial G)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$$\int_G u^m D_{x_j}\omega^k\, dx = \int_{\partial G} u^m\omega^k \cos(\nu, x_j)\, dx - \int_G D_{x_j}u^m\, \omega^k\, dx$$ – это знаем

При $k\to\infty$, $m\to\infty$

$$\int_G u^m D_{x_j}\omega^k\, dx \longrightarrow \int_G u\, D_{x_j}\omega\, dx$$

$$\int_{\partial G} u^m\omega^k \cos(\nu, x_j)\, dx \longrightarrow \int_{\partial G} u\omega\cos(\nu, x_j)\, ds$$

$$\int_G D_{x_j}u^m\,\omega^k\, dx \longrightarrow \int_G D_{x_j}u \cdot \omega\, dx$$

Док-ем первую сходимость, остальные аналогично

$$\left| \int_G u^m D_{x_j}\omega^k\, dx - \int_G u\, D_{x_j}\omega\, dx \right| \xrightarrow[m,k\to\infty]{} 0,$$ т.к.

$$\int_G u^m D_{x_j} \omega^k \,dx = \int_G (u^m - u) D_{x_j} \omega^k \,dx + \int_G u D_{x_j} \omega^k \,dx$$

$$\left| \int_G (u^m - u) D_{x_j} \omega^k \,dx \right| \le \int_G |u^m - u| |D_{x_j} \omega^k| \,dx \overset{\text{нер-во Гельд.}}{\le}$$

$$\le \underbrace{\|u^m - u, L_2(G)\|}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0} \cdot \underbrace{\| D_{x_j} \omega^k, L_2(G)\|}_{\text{огранич.}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$$\int_G u D_{x_j} \omega^k \,dx = \int_G u D_{x_j} \omega \,dx + \underbrace{\int_G u (D_{x_j} \omega^k - D_{x_j} \omega) \,dx}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \text{ аналогично случаю выше}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_G u D_{x_j} \omega \,dx$$

Т.о. $\int_G u^m D_{x_j} \omega^k \,dx \longrightarrow \int_G u D_{x_j} \omega \,dx$

Остальные слагаемые аналогично ■

Следствие (Обобщенная формула Гаусса-Остроградского)

$u \in W_2^1(G)$

$\Rightarrow \int_G D_{x_j} u \,dx = \int_{\partial G} u \cdot \cos(\nu, x_j) \,ds$

Д-во В т.2 $\omega := 1$ ■

Следствие $u \in W_2^1(G)$, $\omega \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

$\Rightarrow \int_G u D_{x_j} \omega \,dx = - \int_G D_{x_j} u \cdot \omega \,dx$

Д-во $\int_{\partial G} u\omega \cos(\nu, x_j) = 0$ т.к. $\omega|_{\partial G} \equiv 0$ ■

Уравнения типа Соболева

Примеры $\Delta u_{tt} + u_{x_3x_3} = f$ — классическое уравнение Соболева

$\Delta u_{tt} + (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f$

§1 Обобщенные решения для эллиптических ур-ий II порядка

(1) $\operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x)$, $x \in \underset{\text{огр}}{G} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in C^1(\overline{G})$, $a \in C(\overline{G})$
∂G гладкая, $f \in L_2(G)$ — веществ.
$k(x) \geq k_0 > 0$ — тогда эллипт. ур-е
если внести div, получим:
$k(x)\Delta u + (\text{мл. чл.}) = f(x)$

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ
I краевая задача

(2) $\begin{cases} \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), & x \in G \\ u|_{\partial G} = \varphi(x'), & x' \in \partial G \end{cases}$ $f \in L_2(G)$

ЗАДАЧА НЕЙМАНА
II краевая задача

(3) $\begin{cases} \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), & x \in G \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G} = \psi(x'), & x' \in \partial G \end{cases}$ $f \in L_2(G)$

Рассмотрим (2) с $f \in C(G)$, $\varphi \in L_2(\partial G)$ или $C(\partial G)$, $u(x)$ - реш

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x) \equiv f(x) \quad \Big| \cdot v \in W_2^1(G), \int$$

$$\underbrace{\int_G \big(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)\big)v\,dx}_{} = \int_G fv\,dx$$

инт. по частям: (обобщ. ф-ла Г-О) $-\int_G \big(k(\nabla u, \nabla v) + auv\big)dx + \int_{\partial G} k\underbrace{\langle \nabla u, \nu\rangle}_{\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial G}} v\,ds$

$$-\int_G \big(k(\nabla u, \nabla v) + auv\big)dx + \int_{\partial G} k\langle \nabla u, \nu\rangle v\,ds = \int_G fv\,dx$$

Но что такое $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G}$? Обобщ. произв. на границе нет.

Чтобы исключить "непонятность", уберем инт-ал $\int_{\partial G} k\langle \nabla u, \nu\rangle v\,ds$, взяв $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ (2) —

$u \in W_2^1(G)$: $u|_{\partial G} = \varphi \in L_2(\partial G)$, $f \in L_2(G)$

$\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ (4) $\int_G \big(k\langle \nabla x, \nabla v\rangle + auv\big)dx = -\int_G fv\,dx$

Замеч. Обычно будем упрощать задачу, взяв $\varphi \equiv 0$

Тогда в опр. обобщ. реш. з. Дирихле и можно брать из $\mathring{W}_2^1(G)$

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПРИ НУЛЕВОМ КР. УСЛ.

$u \in \mathring{W}_2^1(G)$: $u|_{\partial G} = 0$, $f \in L_2(G)$

$$\forall v \in \mathring{W}_2^1(G) \qquad (4) \int_G (k\langle \nabla x, \nabla v\rangle + auv)\,dx = -\int_G fv\,dx$$

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА (3) —

$u \in W_2^1(G)$, $\varphi \in L_2(\partial G)$, $f \in L_2(G)$

$$\forall v \in W_2^1(G) \qquad (5) \int_G (k\langle \nabla x, \nabla v\rangle + auv)\,dx - \int_{\partial G} k\varphi v\,ds = -\int_G fv\,dx$$

Замеч. Обычно будем упрощать задачу, взяв $\varphi \equiv 0$

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ПРИ НУЛЕВОМ КР. УСЛ.

$u \in W_2^1(G)$, $\varphi = 0$, $f \in L_2(G)$

$$\forall v \in W_2^1(G) \qquad (4) \int_G (k\langle \nabla x, \nabla v\rangle + auv)\,dx = -\int_G fv\,dx$$