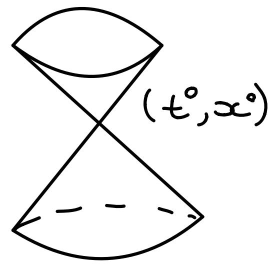
16.04.21

Глава 6. Энергетические уравнения.

§6.1. Энергетические оценки волнового уравнения.

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad u = u(t,x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases} \quad \circledast$$



$$\{(t,x) : |x - x^0|^2 - (t - t_0)^2 = 0\} \text{ — характ-я пов-ть}$$
$$\| $$
$$K(t_0, x^0)$$

$$K_-(t_0, x^0) = \{(t,x) \mid 0 < t < t_0,\ t_0 > 0,\ |x - x_0| < t_0 - t\}$$

Теорема 1. $u \in C^2(\overline{K_-}(t_0, x^0)) : u_{tt} - \Delta u \equiv 0 \implies$

$$\int\limits_{|x-x^0|<t^0-t} |\nabla u(t,x)|^2 dx \le \int\limits_{|x-x^0|} |\nabla u(0,x)|^2 dx \qquad (1)$$

$$\Delta u = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

— энергетическая оценка для волнового ур-я.

Док-во.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$, ∂G — кус-гл-я и $\forall u \in C^2(G)$:

$$\int\limits_G (u_{tt} - \Delta u) u_t \, dz = \left(z = (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}\right) = \int\limits_B (u_{tt} u_t - \Delta u u_t) dz$$

$$\circleddash \quad u_{tt} u_t = \frac{1}{2}(u_t^2)_t, \quad \Delta u u_t = \sum^n u_{x_i x_i} u_t = \sum^n (u_{x_i} u_t)_{x_i} -$$
$$- \sum u_{x_i} u_{x_i t} = \sum^n (u_{x_i} u_t)_{x_i} - \frac{1}{2} \sum (u_{x_i}^2)_t$$

$$\ominus \int\limits_G \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2 + \sum^n u_{x_i}^2\right) - \sum (u_{x_i} u_t)_{x_i}\right) dz \overset{\text{ф. Г.-О.}}{=}$$

$$= \int\limits_{\partial G} |\nabla u|^2 \cos(\nu, t) - \sum u_{x_i} u_t \cos(\nu, x_i)\, ds$$

(2) $$\int (u_{tt} - \Delta u)\, u_t\, dz = \int\limits_{\partial G} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \cos(\nu, t) - \sum u_{x_i} u_t \cos(\nu, x_i)\right) ds$$

Зафиксируем область: $G = K_-(t_0, x^0)$ $t_0 > 0$

$$\partial G = S_{верх} \cup S_{низ} \cup S_{бок}$$

$S_{верх} = \{ |x - x^0| < t_0 - t \}$ $S_{низ} = \{ |x - x^0| < t_0 \}$

$$S_{бок} = \{ |x - x^0| < t_0 - t,\ 0 < t < t_0 \}$$

$$0 = \int\limits_{S_{верх}} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\cos(\nu, t)}} - 0\right) dx - \int\limits_{S_{низ}} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - 0\right) dx + \int\limits_{бок} (\ \dots\ ) ds$$

$S_{бок}$: $\cos^2(\nu, t) = \sum^n \cos^2(\nu, x_i)$, т.к. $\underbrace{|x - x^0|^2 - (t_0 - t)^2}_{\varphi(t,x)} = 0$

$$\nu = \pm \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \qquad \nabla \varphi = \begin{pmatrix} -2(t - t_0) \\ 2(x_1 - x_1^0) \\ \vdots \\ 2(x_n - x_n^0) \end{pmatrix}$$

$$\cos^2(\nu, t) = \frac{4(t - t^0)}{|\nabla \varphi|^2} \qquad \cos^2(\nu, x_i) = \frac{\varphi(x_i - x_i^0)}{|\nabla \varphi|^2}$$

$$\cos^2(\nu, t) - \sum^n \cos^2(\nu, x_i) = \frac{4}{|\nabla \varphi|^2}\left((t - t^0)^2 - (x - x^0)^2\right)$$

$$\int\limits_{S_{бок}} \left(\frac{1}{2}\left(u_t^2 - \sum u_{x_i}^2\right) \cos(\nu, t) - \sum u_{x_i} u_t \cos(\nu, x_i)\right) ds = F$$

$$|f| \le |u_t| \sum |u_{x_i}| |\cos(\nu, x_i)| \overset{\text{К-Б}}{\le} |u_t| \left(\sum u_{x_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum \cos^2(\nu, x_i)\right)^{1/2} =$$

$$=|u_t|\cdot\left(\sum u_{x_i}^2\right)^{1/2}\cos(\nu,t)$$

$$F \geqslant \frac{1}{2}\cos(\nu,t)\left[\left(u_t^2+\sum u_{x_i}^2\right)-2|u_t|\cdot\left(\sum u_{x_i}^2\right)^{1/2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{S_{бок}} \geqslant 0$$

$$\int\limits_{S_{верх}} - \int\limits_{S_{нижн}} \leq 0 \quad \Rightarrow \int\limits_{S_{верх}} \leq \int\limits_{S_{нижн}}$$

Следствие 1. $u(t,x): u(0,x)=0 \quad |x-x^0|<t_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u(t,x)\equiv 0$ в $\overline{K}_-(t_0,x^0)$

Док-во.

$\forall t\in(0,t_0) \quad \nabla u(t,x)\equiv 0 \quad u(t,x)=\mathrm{const} \Rightarrow$
$\Rightarrow u(t,x)\equiv 0$

Следствие 2. Классическое реш-е з. Коши для волнового ур-я сущ-т $\Rightarrow$ оно единственно.

Док-во.

От противного.

Пусть $\exists u_1(t,x), u_2(t,x)$ $u_1(t,x)\not\equiv u_2(t,x)$.
$u=u_1-u_2\not\equiv 0$. Тогда

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 \\ u|_{t=0}=0 \\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} u(0,x)\equiv 0 \\ u|_{t=0}\equiv 0 \end{matrix} \Rightarrow \nabla u(0,x)\equiv 0$$

Возьмём $u(t^*, x^*) \neq 0 \Rightarrow \exists (t_0, x^0) : (t^*, x^*) \in$
$\in K_-(t_0, x^0) \Rightarrow \nabla u\big|_{(K_-)_H} \equiv 0$ ↯

•

Следствие 3. $u(t,x)$ - реш-е ⊛, $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \{|x| < r\}$
$\Rightarrow u(t,x) \equiv 0 \quad t > 0 \quad |x| \geq r + t$

Теорема 2. Пусть $u(t,x)$ - класс. реш-е з. Коши для $u_{tt} - \Delta u = 0$, $\operatorname{supp}\varphi_1$, $\operatorname{supp}\varphi_2 \subset \{|x| < r\}$.

Тогда $E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}[u_t^2(t,x) + \sum u_{x_i}^2(t,x)]\,dx \equiv E(0) \;\forall t$

← интеграл энергии

Док-во.

$S_{верх} = \{|x| < r + t^*\}$ $\quad \overline{Ц} = \{|x| = r + t^*, 0 \leq \tau \leq t^*\}$

$\partial Ц = S_{верх} \cup S_{нижн} \cup S_{бок}$

Из (2): $\quad 0 = \underbrace{\int\limits_{|x| < r + t^*} \frac{1}{2}|\nabla u(t^*, x)|^2 dx}_{верх} - \underbrace{\int\limits_{|x| < r + t} \frac{1}{2}|\nabla u(0, x)|^2 dx}_{нижн} + \underbrace{0}_{бок}$

т.к. реш. $\equiv 0$

•

§ 6.2. Задача Коши для волнового уравнения.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u_t\big|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

Теорема 1. $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists!$ кл. реш-е $u(t,x)$.

Док-во.

Пусть $\exists\, u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) \equiv 0$. Подействуем оператором Фурье.

$$\hat{v}(\xi) = Fv(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} v(y)\, dy \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}\big|_{t=0} = \hat{\varphi}_1(x) \\ \hat{u}_t\big|_{t=0} = \hat{\varphi}_2(x) \end{cases} \qquad \hat{u}(t,\xi) = \cos(t|\xi|)\,\hat{\varphi}_1(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\varphi}_2(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Применим обратный оператор Фурье:

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \cos(t|\xi|)\,\hat{\varphi}_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$