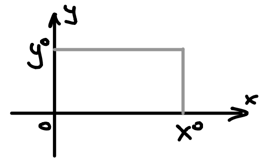
5/11/20

Напом Гиперболические ур-я

$$(9)\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \\ u\big|_{x=0} = \varphi_1(y) \\ u\big|_{y=0} = \varphi_2(x) \end{cases} \qquad (x,y)\in\Pi = (0,x^0)\times(0,y^0)$$

Задача Гурса



Это не задача Коши, но всё равно решение единственно и зависит непрерывно.

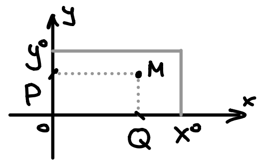
Теорема 3 $\forall a,b,c\in C(\overline{\Pi})\quad \forall f\in C(\overline{\Pi})\quad \forall\varphi_1\in C^1[0,y^0]\quad \forall\varphi_2\in C^1[0,x^0]$

$\exists!\ u(x,y)\in C^1(\overline{\Pi})\ :\ \exists u_{xy}, u_{yx}\in C(\overline{\Pi})$ — реш. (9)

Следствие Решение (9) непрерывно зависит от нач данных Гурса

Д-во теоремы

$$u_{xy}(x,y) + a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) \equiv f(x,y)$$



Проинт. тождество по QM и MP.

$$\int_0^y u_{x\eta}\,d\eta \equiv \int_0^y \left(f(x,\eta) - au_x - bu_\eta - cu\right)d\eta$$

$$\int_0^x u_{\xi y}\,d\xi \equiv \int_0^x \left(f(\xi,y) - au_\xi - bu_y - cu\right)d\xi$$

Применим ф-лу Ньютона-Лейбница и получим

$$\begin{cases} u_x(x,y) - D_x\varphi_2(x) \equiv \int_0^y \left(f(x,\eta) - au_x - bu_\eta - cu\right)d\eta \\ u_y(x,y) - D_y\varphi_1(y) \equiv \int_0^x \left(f(\xi,y) - au_\xi - bu_y - cu\right)d\xi \\ u(x,y) - \varphi_2(x) \equiv \int_0^y u_\eta(x,\eta)\,d\eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) \equiv \varphi_2(x) + \int\limits_0^y u_\eta(x,\eta)\,d\eta \\ u_x(x,y) \equiv D_x\varphi_2(x) \int\limits_0^y (f(x,\eta) - au_x - bu_\eta - cu)\,d\eta \\ u_y(x,y) \equiv D_y\varphi_1(y) + \int\limits_0^x f(\xi,y) - au_\xi - bu_y - cu)\,d\xi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ u_x \\ u_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$(10)\begin{cases} u(x,y) \equiv \varphi_2(x) + \int\limits_0^y u_\eta(x,\eta)\,d\eta \\ v(x,y) \equiv D_x\varphi_2(x) \int\limits_0^y (f(x,\eta) - au_x - bu_\eta - cu)\,d\eta \\ w(x,y) \equiv D_y\varphi_1(y) + \int\limits_0^x f(\xi,y) - au_\xi - bu_y - cu)\,d\xi \end{cases}$$

очень похоже на прошлую лекцию, только тут проще! (нижние пределы — нули)

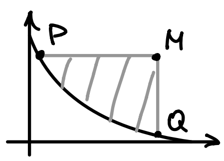
Упр (9) <=> (10), $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} \in C(\overline{\Pi})$ ■

аналогично прошлой лекц.

Замеч $\exists v_y, w_x \in C(\overline{\Pi}) \Rightarrow \exists u_{xy}, u_{yx} \in C(\overline{\Pi}) \Rightarrow u_{xy} = u_{yx}$

Теорема 4 Задача Гурса (9) поставлена корректно

Напом



$$(1)\begin{cases} L_2 u = f \\ u|_S = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \varphi_2(x) \end{cases}$$

✳

§6 Понятия корректности краевых задач для ур-ий с частными производными

$$(1)\begin{cases} L_m(x, D_x)\,u = f(x), \quad x \in G \\ B_j(x, D_x)\,u\,\big|_\Gamma = \varphi_j(x'), \quad x' \in \Gamma \subseteq \partial G, \quad j = \overline{1,r} \end{cases}$$

Опр Краевая задача (1) КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕНА, если

1. $\exists\, u(x) \in U$ – реш $\forall (f, \varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \Phi$
2. решение единственно
3. $u(x)$ непрерывно зависит от $(f, \varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \Phi$

Примеры ① з. Коши (1) из §5

$\mathcal{U} = \{u(x,y) \in C^1(\overline{\Delta}) \mid \exists\, u_{xy}, u_{yx} \in C(\overline{\Delta})\}$

$\Phi = \{(f, \varphi_1, \dots, \varphi_r) \mid f \in C(\overline{\Delta}),\ \varphi_1 \in C^1[0,x^0],\ \varphi_2 \in C[0,x^0]\}$

② з. Гурса (9) из §5

$\mathcal{U} = \{u(x,y) \in C^1(\overline{\Pi}) \mid \exists\, u_{xy}, u_{yx} \in C(\overline{\Pi})\}$

$\Phi = \{(f, \varphi_1, \varphi_2) \mid f \in C(\overline{\Pi}),\ \varphi_1 \in C^1[0,y^0],\ \varphi_2 \in C^1[0,x^0]\}$

③ $\begin{cases} u_{tt} + u_{yy} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(y) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(y) \end{cases}$ – ур-е Лапласа, $t>0$, $y \in \mathbb{R}$, $x=(t,y)$

$\mathcal{U}$ – аналит. ф-ии

$\Phi = \{(f, \varphi_1, \varphi_2) \mid f \equiv 0;\ \varphi_1, \varphi_2 \text{ – аналит.}\}$

по т. Коши-Ковалевской $\forall \varphi_1, \varphi_2\ \exists!\ u(x,t)$ аналит. решение

т.е. ① и ② из опр-я корректности

но нет ③... По примеру Адамара получим, что непр зависимости нет, задача некорректна

Напом Пример Адамара

$$u^k(t,y) = e^{-\sqrt{k}} e^{kt+iky}, \quad k=1,2,3$$

$$u^k|_{t=0} = e^{-\sqrt{k}} e^{iky} = \varphi_1^k(y)$$

$$u^k_t|_{t=0} = k e^{-\sqrt{k}} e^{iky} = \varphi_2^k(y)$$

Т.е. $u^k(t,y)$ – реш-е ур-е Лапласа $\forall k$

$$|\varphi_1^k(y)| \equiv e^{-\sqrt{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$|\varphi_2^k(y)| \equiv k e^{-\sqrt{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$|u^k(t,y)| = e^{-\sqrt{k}} e^{kt} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

④ $u_t - u_{yy} = 0$ — ур-е теплопроводности $\qquad x = (t, y)$

Все характеристики этого ур-я : $\{t = \text{const}\}$

$$\begin{cases} u_t - u_{yy} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(y) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(y) \end{cases}$$ — плохая з. Коши (на характеристике)

А рассмотрим

$$* \begin{cases} u_t - u_{yy} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(y) \end{cases}$$ — з. Коши – Дирихле / начальная з. / "з. Коши"

- U – аналит. ф-ии

$\varphi(y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{y^2}}$ $\quad \nexists\, u \in U$ – реш $(*)$ при таком $\varphi(y)$ — хотя $\varphi(y)$ и аналитическая

ЗНАМЕНИТЫЙ ПРИМЕР КОВАЛЕВСКОЙ — КОНКУРС

- U – достаточно гладкие ф-ии

Φ – (гладкие) непр. огр. ф-ии

<u>Напом</u> $\quad u(t,x) \Rightarrow \hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} u(t,y)\, dy$ — преобр. Фурье

$v(t,x) \Rightarrow \check{v}(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} v(t,\xi)\, d\xi$ — обратное преобр. Фурье

$\check{\hat{u}}(t,y) \equiv u(t,y)$

$\hat{u}_t + \xi^2 \hat{u} = 0$ $\quad$ ← чуть-чуть что-то пропустил...

реш: $\hat{u}(t,\xi) = e^{-t\xi^2} \hat{u}(0,\xi) = e^{-t\xi^2} \hat{\varphi}(\xi)$

$u(t,y) = \check{\hat{u}}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} e^{-t\xi^2} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$

реш $(*)$, но единственно ли оно?

Найдем решение дуриком

$$u(t,y) = a_0(t) + a_1(t)y^2 + a_2(t)y^4 + a_3(t)y^6 + \dots$$

Предположим, наши $\{a_i(t)\}$: ряд равном сх-ся, он почленно диф-ем по t и дважды по y

Тогда $u_t(t,y) \equiv u_{yy}(t,y)$

$$a_0'(t) + a_1'(t)y^2 + a_2'(t)y^4 + a_3'(t)y^6 + \dots \equiv 2a_1(t) + 4\cdot 3\, a_2(t)y^2 + 6\cdot 5\, a_3(t)y^4 + \dots$$

Ряды сходятся $\Rightarrow$ коэф-ы совпадают: $a_0'(t) \equiv 2a_1(t) \Leftrightarrow a_1(t) = \frac{a_0'(t)}{2}$

$$a_1'(t) \equiv 12 a_2(t) \Leftrightarrow a_2(t) = \frac{a_1'(t)}{4\cdot 3} = \frac{a''(t)}{4\cdot 3\cdot 2} = \frac{a''(t)}{4!}$$

$$\vdots$$

$$a_k(t) \equiv \frac{a_0^{(k)}(t)}{(2k)!}, \quad k \geq 0$$

Если подставить ещё в $u|_{t=0} = \varphi(y)$, то

$$a_0(0) + a_1(0)y^2 + a_2(0)y^4 + \dots \equiv 0 \Leftrightarrow \forall k \ \ a_k(0) = 0$$

Но $a_k(0) \equiv \frac{a_0^{(k)}(0)}{(2k)!}$, т.е. $\forall k \ \ a_0^{(k)}(0) = 0$

$$a_0(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \in D^\infty(0), \text{ но } \notin A(0)$$

<u>Замечание</u> $f \in A(D) \Rightarrow f \in C^\infty(D)$, но $f \in C^\infty(D) \not\Rightarrow f \in A(D)$

КОНКУРС

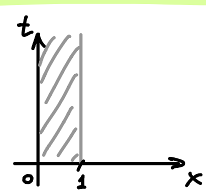
док-ть, что с такой $a_0(t)$ ряд будет равном. сх. и бесконечно-диф.

Т.о. получим, что реш * не единственно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ задача, опять же, некорректна

(6)
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{yy} = 0, & t > 0, \quad x \in (0,1) \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

– ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ



Теорема 1

$\varphi_1 \in C^3[0,1] \qquad \varphi_2 \in C^2[0,1]$

$\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$

$\varphi_1''(0) = \varphi_1''(1) = 0$

$\varphi_2'(0) = \varphi_2'(1) = 0$

$\Rightarrow \exists!\, u \in C^2(\overline{\Pi})$ – реш I кр. з в полуполосе