12/3/21

$$\begin{cases} u_{tt} + au = f(t) \\ u|_{t=\alpha} = 0 \\ u|_{t=\beta} = 0 \end{cases}, \quad f(t) \in L_2(\alpha, \beta)$$

$u_{tt} + au = 0$

$\lambda^2 + a = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{-a}$:

- $a > 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{a}$

$$u = c_1 \cos\sqrt{a}t + c_2 \sin\sqrt{a}t$$

$$u|_{t=\alpha} = c_1 \cos\alpha\sqrt{a} + c_2 \sin\alpha\sqrt{a}$$
$$u|_{t=\beta} = c_1 \cos\beta\sqrt{a} + c_2 \sin\beta\sqrt{a}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\sqrt{a} & \sin\alpha\sqrt{a} \\ \cos\beta\sqrt{a} & \sin\beta\sqrt{a} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0 \Rightarrow u_1 = \sin\sqrt{a}t$

$c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \cos\sqrt{a}t$

$c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0 \Rightarrow$?

$$u_1 \perp f, \quad u = cu_1 + \int_\alpha^t \varphi_2(t-s) f(s)\,ds$$

$$\begin{cases} u_{tt} = f(t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{t=3} = 0 \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1) \\ 2, & t \in (1,2) \\ \alpha, & t \in (2,3) \end{cases}$$

Обобщенное реш: $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,3)$: $\displaystyle\int_0^3 u_{tt} v\,dt = \int_0^3 f v\,dt \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,3)$

$$\ast \qquad u_t v\Big|_0^3 - \int_0^3 u_t v_t\,dt = -\int_0^3 u_t v_t\,dt$$

Старый метод с прошлого семинара, то там будет 6 констант :

Если заменять $f(t)$ на $\displaystyle\int_0^t f'(s)\,ds = \frac{d}{dt}\int_0^t f(s)\,ds = \frac{d}{dt}\left(\int_0^1 ds + 2\int_1^2 ds + \alpha\int_2^3 ds\right)$

2 из них получим из гр. усл, еще 2 — из непр, а оставшиеся две получим:

$$u_{tt}=\begin{cases}1, & t\in(0,1)\\ 2, & t\in(1,2)\\ \alpha, & t\in(2,3)\end{cases} \Rightarrow \quad u(t)=\begin{cases}c_1+c_2t+t^2/2, & t\in(0,1)\\ c_3+c_4t+t^2, & t\in(1,2)\\ c_5+c_6t+\frac{\alpha t^2}{2}, & t\in(2,3)\end{cases}$$

$$u|_{t=0}=c_1=0$$

$$u|_{t=3}=c_5+3c_6+\frac{9\alpha}{2}=0 \Rightarrow c_5=-3c_6-\frac{9\alpha}{2}$$

$$u(t)=\begin{cases}c_2t+t^2/2, & t\in(0,1)\\ c_3+c_4t+t^2, & t\in(1,2)\\ -3c_6-\frac{9\alpha}{2}+c_6t+\frac{\alpha t^2}{2}, & t\in(2,3)\end{cases}$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,3)\hookrightarrow C[0,3]$$

$$u|_{t=1}=c_2+\frac{1}{2}=c_3+c_4+1 \Rightarrow c_2=c_3+c_4+\frac{1}{2}$$

$$u|_{t=2}=c_3+2c_4+4=-3c_6-\frac{9\alpha}{2}+2c_6+2\alpha \Rightarrow c_3=-c_6-2c_4-4-\frac{5\alpha}{2}$$

Т.е. $c_2=-c_6-c_4-\frac{7}{2}-\frac{5\alpha}{2}$

$$u(t)=\begin{cases}\left(-c_6-\frac{5\alpha}{2}-c_4-\frac{7}{2}\right)t+\frac{t^2}{2}:=at+\frac{t^2}{2}, & t\in(0,1)\\ -c_6-2c_4-4-\frac{5\alpha}{2}+c_4t+t^2, & t\in(1,2)\\ -3c_6-\frac{9\alpha}{2}+c_6t+\frac{\alpha t^2}{2}, & t\in(2,3)\end{cases}$$

$$\int_0^1(a+t)v_t\,dt+\int_1^2(c_4+2t)v_t\,dt+\int_2^3(c_6+\alpha t)v_t\,dt=$$

$$=(a+t)v\Big|_0^1-\int_0^1 v\,dt+(c_4+2t)v\Big|_1^2-2\int_1^2 v\,dt+(c_6+\alpha t)v\Big|_2^3-\alpha\int_2^3 v\,dt=$$

$$=v(1)(a+1-c_4-2)+v(2)(c_4+4-c_6-2\alpha)-\int_0^3 fv\,dt\overset{*}{=}-\int_0^3 fv\,dt$$

$$v(1)(a-c_4-1)+v(2)(c_4+4-c_6-2\alpha)=0$$

v произвольн $\Rightarrow \begin{cases}a-c_4-1=0\\ c_4+4-c_6-2\alpha=0\end{cases}$

$$\begin{cases}-2c_4-c_6-\frac{5\alpha}{2}-\frac{9}{2}=0\\ c_4+4-c_6-2\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_6=-2c_4-\frac{5\alpha}{2}-\frac{9}{2}\\ 4+3c_4+\frac{5\alpha}{2}+\frac{9}{2}=0\end{cases}$$

Т.о. $c_4=-\frac{3}{2}-\frac{5\alpha}{2}-\frac{4}{3}$

$c_6=3+\frac{5\alpha}{3}+\frac{8}{3}-\frac{5\alpha}{2}-\frac{9}{2}$

Нашли u!

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & |x|<1 \\ u\big|_{|x|=1}=0 \end{cases}, \quad f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<\frac{1}{2} \\ 0, & |x|\in(\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

Разрешимость будет, док-ли в начале пары

$$\int\limits_{|x|<1} \Delta u\cdot v\,dx = \int\limits_{|x|<1} fv\,dx$$

$$\|$$

$$\int\limits_{|x|=1} \nabla u v\cdot\vec{n}\,ds - \int\limits_{|x|=1} \nabla u\cdot\nabla v\,dx$$

$$u,v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(|x|<1) \Rightarrow \int\limits_{|x|<1}\nabla u\cdot\nabla v\,dx = -\int\limits_{|x|<1} fv\,dx$$

$$\Delta u = \begin{cases} 1, & 0<|x|<\frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}<|x|<1 \end{cases}, \quad \Delta u = \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 u_{\rho\rho}+\rho u_\rho + u_{\theta\theta}) = \begin{cases} 1, & \rho<\frac{1}{2} \\ 0, & \rho>\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u = P(\rho)\Phi(\Theta)$$

$$\rho := e^r, \quad P(\rho)=P(e^r)=\widehat{P}(r)$$

т.е. $\rho^2 u_{\rho\rho}+\rho u_\rho = \rho^2 P''(\rho)+\rho P'(\rho)$

$$\widehat{P}(r) = \begin{cases} c_3 + c_4\ln\rho + \frac{1}{4}\rho^2 \\ c_1 + c_2\ln\rho \end{cases} \overset{\text{т.к. нет особенности в 0}}{=} \begin{cases} c_3 + \frac{1}{4}\rho^2 \\ c_1 + c_2\ln\rho \end{cases}$$

Тут т. вложения не работает по x, но работает по ρ, т.к. $u\in L_2$ и $\frac{\partial u}{\partial\rho}\in L_2$

c_1 из-за этого (почему-то) равно 0 $\Rightarrow u(\rho)=\begin{cases} \\ c_2\ln\rho\end{cases}$

$c_3+\frac{1}{16}=c_2\ln\frac{1}{2}$ — по т. о влож. в т. $\frac{1}{2}$ непр.

т.е. $u(\rho)=\begin{cases} c_2\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\rho^2, & \rho\in(0,\frac{1}{2}) \\ c_2\ln\rho, & \rho\in(\frac{1}{2},1)\end{cases}$

$$\int\limits_{|x|<1}\nabla u\nabla v\,dx = \int\limits_{|x|<\frac{1}{2}}\nabla u\nabla v\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}<|x|<1}\nabla u\nabla v\,dx = \underset{\text{изнутри } C_{\frac{1}{2}}}{\int\limits_{|x|=\frac{1}{2}}}(\nabla u\cdot v,\vec{n})\,ds - \int\limits_{|x|<\frac{1}{2}}\overset{=1}{\Delta u}\,v\,dx -$$

$$\|$$

$$-\int\limits_{|x|<1} fv\,dx$$

$$\underbrace{-\int\limits_{|x|=\frac{1}{2}} (\nabla u\cdot v, n)\, ds + \overbrace{\int\limits_{|x|=1} (\nabla u\cdot v, n)\, ds}^{=0}}_{\int\limits_{\partial(C_1\setminus C_{\frac12})} (\nabla u\cdot v, n)\, ds} - \int\limits_{\frac12<|x|<1} \overbrace{\Delta u}^{\equiv 0} v\, dx = -\int\limits_{|x|<1} fv\, dx + *$$

сферуш $C_{\frac{1}{2}}$

AAAAAAA

решение есть
и единственно