Опр $S = \{\Phi(x) = 0\}$ наз. характеристикой или х-тер. пов-тью, если $L_m^\circ(x, \nabla\Phi(x)) \equiv 0$ при $x \in S$

Теорема 2:
Если S – х-тер. для (1) для $L_m(x, D_x)$ $\Rightarrow$ зK (2) не явл. одн-но разреш. $\forall f, u^\circ, \dots, u^{m-1}$ даже если они из C^∞

Ex характеристич. пов-тей:

1 $x = (t, z)$ $\quad u_t - a^2 u_{zz} = 0$ $\quad S = \{\Phi(t,z) = 0\}$ $\quad \nabla\Phi|_S \neq 0$

fix (t_0, z°) $\quad \nabla\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_t \\ \Phi_z\end{pmatrix}$

1) $\Phi_t(t_0, z^\circ) \neq 0$, $\Phi(t,z) = 0$ $\qquad \exists!\ \alpha(z):\ t = \alpha(z)$ $\sim$ $\tilde\Phi = t - \alpha(z) = 0$

$L_m^\circ(x, \nabla\tilde\Phi(x)) \equiv 0$ $\Rightarrow$ $L_2^\circ(t, z, \xi_1, \xi_2) = -a^2\xi_2^2$

$\nabla\tilde\Phi = \begin{pmatrix}1 \\ -\alpha_z'(z)\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $-a^2(\alpha_z(z))^2 \equiv 0|_S$ $\sim$ $\alpha(z) = \text{const}$

$\Rightarrow$ наши х-ческ. кривые (не все) $\boxed{t = c}$

2) $\Phi_t(t_0, z^\circ) = 0$ $\Rightarrow$ $\Phi_z(t_0, z^\circ) \neq 0$, $\Phi(t,z) = 0$ $\qquad \nabla\tilde\Phi = \begin{pmatrix}-\beta_t(t) \\ 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists\beta(t):\ z = \beta(t)$ $\sim$ $\tilde\Phi(t,z) = z - \beta(t) = 0$

$L_2^\circ(t, z, \nabla\tilde\Phi(t,z)) \equiv 0$ $\quad z = \beta(t)$ $\quad -a^2 1^2 \not\equiv 0$ $\quad$ невозможно $\Rightarrow$ до этого все х-ки наши

Упр $u_t - a^2\Delta_z u = 0$. Д-ть, что все х-ки опис. ур-ем $t = \text{const}$ $\quad$ т.е. в многомерном тоже

2 $u_{tt} + u_{zz} = 0$ $\quad x = (t, z)$ $\qquad$ на самом деле нет х-к!

$L_2(D_t, D_z) = L_2^\circ(D_t, D_z) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$L_2^\circ(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2$ $\qquad S = \{\Phi(t,z) = 0\}$ $\quad \nabla\Phi|_S = 0$ $\quad \nabla\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_t \\ \Phi_z\end{pmatrix} \neq 0$

$L_2^\circ(\nabla\Phi) = (\Phi_t)^2 + (\Phi_z)^2 \equiv 0$ на S $\qquad$ противоречие $\Rightarrow$ нет таких

Упр $\Delta_x u = 0$. Д-ть, что х-терист. пов-тей нет.

3 Для ур-я колеб-я струны: $u_{tt} - u_{zz} = 0$

Возьмём $\Phi(t,z) = \alpha(t - t_0) + \beta(z - z_0) = 0$, $\quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$ $\qquad \nabla\Phi = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$

$L_2^\circ(D_1, D_2) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\qquad L_2^\circ(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - \xi_2^2$

$L_2^\circ(\Phi_t, \Phi_z) = \begin{matrix}\alpha^2 + \beta^2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\beta = \alpha \text{ и } \beta = -\alpha}$

Есть ли ещё? Надо рассм-ть 2 случая: 1) $\Phi_t(t_0, z^\circ) \neq 0$ $\quad$ 2) $\Phi_z(t_0, z^\circ) \neq 0$

4 $x = (t, z) \in \mathbb{R}^n$ $\quad u_{tt} - \Delta_z u = 0$, $\quad n \geq 3$

1) $\nu_0(t - t_0) + \sum_j^{n-1} \nu_j(z_j - z_j^\circ) = 1$

2) конус: $(t - t_0)^2 - \sum_j^{n-1}(z_j - z_j^\circ)^2 = 0$

1) $\nabla\Phi = \begin{pmatrix}\nu_0 \\ \vdots \\ \nu_{n-1}\end{pmatrix}$ $\qquad$ ← надо понять когда $L_2^\circ(\nabla\Phi) \equiv 0$

$L_2^\circ(D_t, D_z) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}$ $\qquad L_2^\circ(\xi_0 \dots \xi_{n-1}) = \xi_0^2 - \sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2$ $\quad$ подст. ∇ и ура!

$\Rightarrow \boxed{\nu_0^2 - \sum_{j=1}^{n-1}\nu_j^2 = 0}$

„конус смотрим без пипочки“

2) $\nabla\Phi = \begin{pmatrix}2(t - t_0) \\ -2(z_1 - z_1^\circ) \\ \vdots \\ -2(z_{n-1} - z_{n-1}^\circ)\end{pmatrix}$ $\quad \nabla\Phi|_S \neq 0$ $\qquad L_2^\circ(\nabla\Phi) = 4(t - t_0)^2 - 4\sum(z_j - z_j^\circ)^2 \equiv 0$ на S

на конусе получается!

$$L_m(x, D_x) = \underbrace{\left[\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D_x^\alpha\right]}_{L_m^\circ(x D_x)} + \sum_{|\alpha|\le m-1} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

$L_m^\circ(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ $\quad S = \{x : \Phi(x) = 0\}$ $\quad \nabla\Phi|_S = 0$

$x : \Phi(x) = 0$ $\quad L_m^\circ(x, \nabla\Phi(x)) \equiv 0$ (помним, что не в обл-ти, а на пов-ти)

$x^\circ \in S$ fix. $\Phi(x) = 0$ – ур-е пов-ти. Для опр-сти: $\frac{\partial}{\partial x_n}\Phi(x^\circ) \ne 0$, тогда

локально S: $x_n = g(x')$, где $x' = (x_1 \dots x_{n-1})$ $\Rightarrow x'$ бегает в обл-ти

$\tilde\Phi(x) = \underbrace{x_n - g(x') = 0}_{\text{это } S}$ $\quad \nabla\tilde\Phi = \begin{pmatrix} -g_{x_1}(x') \\ \vdots \\ -g_{x_{n-1}}(x') \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow L_m^\circ(x, \nabla\tilde\Phi(x)) \overset{\text{на } S}{\equiv} 0 \Rightarrow \sum a_\alpha(x)(\nabla\tilde\Phi(x))^\alpha \equiv 0$ при $x_n = g(x')$ т.е. на S

$\sum a_\alpha(x)(-g_{x_1}(x'))^{\alpha_1} \times \dots \times (-g_{x_{n-1}}(x'))^{\alpha_{n-1}} \equiv 0$ ← говорит нам решать дифф. ур.

$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha'|} a_\alpha(x', g(x'))(g_{x_1}(x'))^{\alpha_1} \dots (g_{x_{n-1}}(x'))^{\alpha_{n-1}} = 0$ $\quad m \ge 2$ $\quad x' \in B(x_0', \varepsilon)$

↑ такие решали на посл. лекциях 2го курса

$F(x', \nabla_{x'} g) = 0$ $\quad$ очень сложная задача!

$$(3)\ \begin{cases} L_m^\circ(x, \nabla\Phi(x))|_{x=F^{-1}(y)} D_{y_1}^m \tilde u + \sum\limits_{\substack{|\beta|\le m \\ \beta_1 \le m-1}} \tilde a_\beta(y) D_y^m \tilde u = f(F^{-1}(y)) \\ \tilde u|_{y_1=0} = v^0(y') \\ D_{y_1}\tilde u|_{y_1=0} = v'(y') \\ \vdots \\ D_{y_1}^{m-1}\tilde u|_{y_1=0} = v^{m-1}(y') \end{cases}$$

$$y = (y_1 \underbrace{y_2 \dots y_m}_{y'})$$

Если $L_m^\circ(x, \nabla\Phi(x)) \ne 0$, сведём (3) к:

$$\star\ \begin{cases} D_{y_1}^m \tilde u + \sum\limits_{\substack{|\beta|\le m \\ \beta_1 \le m-1}} b_\beta(y) D_y^\beta \tilde u = g(y) \\ D_{y_1}^{k-1}\tilde u|_{y_1=0} = v^{k-1}(y') \quad k = 1, \dots, m \end{cases}$$

Теорема Коши – Ковалевской

В нктр окр. $y^\circ = (0, \underbrace{y_1^\circ, \dots, y_{n-1}^\circ}_{y_0'})$ $\quad b_\beta(y), g(y)$ – аналит.,

в нктр окр. y_0': $\quad v^0(y'), \dots, v^{m-1}(y')$ – аналит.

$\Rightarrow \exists$ окр. $B(y^\circ, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ $\quad \exists!$ аналит. в $B(y^\circ, \varepsilon)$ ф-я $\tilde u(y)$ явл. реш-ем зк $\star$

Без д-ва!