26/2/21

$f \in L_2(G)$, $\varphi = 0$. $u \in \mathring{W}_2^1(G)$ – ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ З. ДИРИХЛЕ

т.е. задачи (2) $\begin{cases} L_2(x, D_x)u = f(x), & x \in G \\ u|_{\partial G} = \varphi(x'), & x' \in \partial G \end{cases}$, если $\forall v \in \mathring{W}_2^1(G)$

$$\int_G (k \langle \nabla u, \nabla v \rangle + auv)\, dx = -\int_G fv\, dx$$

Теорема 1 | $f \in L_2(G)$, $\varphi = 0$, $x' \in \overline{G}$

$\Rightarrow \exists! u$ – обобщ. реш з. Дирихле (2), $\|u, \mathring{W}_2^1(G)\| \leq c\|f, L_2(G)\|$

Д-во от сюда вплоть до черты

Теорема Рисса

| H – гильб. пр-во, ℓ – линейно-непр. функционал на H

$\Rightarrow \exists! F \in H : \forall f \in H \quad \ell(f) = \langle F, f \rangle$

Напом $\mathring{W}_2^1(G) \subset W_2^1(G)$

$$\sqrt{\int_G |\nabla u|^2 dx} \sim \|u, L_2(G)\| + \sum_i \|D_{x_i} u, L_2(G)\|$$

$$\int_G \sum_{i=1}^n (D_{x_j} u D_{x_j} v)\, dx = \langle u, v \rangle_{\mathring{W}_2^1}$$

$$\int_G (k \langle \nabla u, \nabla v \rangle + auv)\, dx = \int_G \Big(k \sum_{j=1}^n (D_{x_j} u D_{x_j} v) + auv\Big) dx := [u, v]$$

– ск. произв.

(Линейность и симметричность очевидны, $[u,u] \geq 0$ т.к $a \geq 0$, $k \geq k_0 > 0$)

Св-во $\sqrt{[u,u]}$ эквив. $\sqrt{\int_G |\nabla u|^2 dx}$

Д-во $[u,u] \leq \int_G \big(k_{max} \cdot |\nabla u|^2 + a_{max}|u|^2\big)\, dx \leq \int_G \big(|\nabla u|^2 + |u|^2\big) dx \leq$

$\leq$ /нер-во Стеклова/ $\leq \tilde{c}\, \|u, \mathring{W}_2^1\|^2$

Оценка снизу очевидна ■

Т.о. рассматривать будем следующую гильб. структуру для $\mathring{W}_2^1(G)$, $a \geq 0$:

$$[u, v] = \int_G \Big(k \sum_{j=1}^n (D_{x_j} u D_{x_j} v) + auv\Big) dx \qquad (4)$$

Норма: $\sqrt{[u,u]} \sim \|u, \mathring{W}_2^1(G)\|$

↳ кореневькое и сложно считается, но очень полезное

Можем переформулировать опр. обобщ. реш (2):

$f \in L_2(G)$, $\varphi = 0$. $u \in \mathring{W}_2^1(G)$ – обобщ. реш. (2), если $\forall v \in \mathring{W}_2^1(G)$

$$[u,v] = -\int_G f v \, dx$$

Хотим использовать т. Рисса. Функц-ал линеен, но непрерывен ли?

Линейный функц-ал непрерывен <=> ограничен

$$\ell(v) = -\int_G f v \, dx$$

где-то тут нерво Стеклова

$$|\ell(v)| \leq \int_G |f||v| \, dx \leq \|f, L_2(G)\| \|v, L_2(G)\| \leq \underbrace{\hat{C}(G) \|f, L_2(G)\|}_{\text{const}} \sqrt{[v,v]}$$

v произв. $\Rightarrow$ $\|\ell\| \leq \hat{C}(G) \|f, L_2(G)\|$ $\Rightarrow$ ℓ огр $\Rightarrow$ ℓ непр.

Т.о. по т. Рисса $\exists F \in \mathring{W}_2^1(G)$: $-\int_G f v \, dx = [F, v]$ $\forall v$

Еще раз переформулируем опр. обобщ. реш (2):

$f \in L_2(G)$, $\varphi = 0$. $u \in \mathring{W}_2^1(G)$ – обобщ. реш. (2), если $\forall v \in \mathring{W}_2^1(G)$

$$[u,v] = [F,v]$$

т.е. $[u-F, v] = 0$, т.е. $u = F$

Сразу получаем сущ-е и единственность

Оценка: $\sqrt{[u,u]} = \sqrt{[F,F]} = \|\ell\| \leq \hat{C}(G) \|f, L_2(G)\|$

Теорема 1 доказана ■

$f \in L_2(G)$, $\psi = 0$. $u \in W_2^1(G)$ – ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ З. НЕЙМАНА

т.е. задачи (3) $\begin{cases} \operatorname{div}(k \nabla u) - au = f, & x \in G \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial G} = \psi \end{cases}$, если $\forall v \in W_2^1(G)$

$$\int_G (k \langle \nabla u, \nabla v \rangle + auv) \, dx = -\int_G f v \, dx$$

Замечание В силу нулевых кр. условий интегр. соотн. в опр-ях обобщ решений I (2) и II (3) задач одинаковые.
Но не забываем, что пр-ва разные $\begin{pmatrix} \text{I} - \mathring{W}_2^1 \\ \text{II} - W_2^1 \end{pmatrix}$

Теорема 2 | $f \in L_2(G)$, $\varphi = 0$, $a(x) \geq a_0 > 0$, $x \in \overline{G}$

$\Rightarrow \exists!\, u$ — обобщ. реш. з. Неймана (3),

$$\|u, W_2^1(G)\| \leq c\, \|f, L_2(G)\|$$

Д-во

$$\int_G \big(k\langle \nabla u, \nabla v\rangle + auv\big)\, dx := [u,v] \quad \text{— ск. произв.}$$

(Линейность и симметричность очевидны, $[u,u] \geq 0$ т.к $a \geq 0$, $k \geq k_0 > 0$)

Св-во $\sqrt{[u,u]}$ эквив. $\|u, W_2^1(G)\|$

Д-во $[u,u] \leq \int_G \big(k_{max} \cdot |\nabla u|^2 + a_{max}|u|^2\big)\, dx \leq \int_G \big(|\nabla u|^2 + |u|^2\big) dx \leq$

$$\tilde{c}\, \|u, \overset{\circ}{W}{}_2^1\|^2$$

Оценка снизу очевидна ■

Т.о. $u \in W_2^1(G)$ — обобщ. реш (3), если $\forall v \in W_2^1(G)$

$$[u,v] = -\int_G fv\, dx$$

Далее, аналогично случаю з. Дирихле, по т. Рисса получим, что

$$\ell(v) = -\int_G fv\, dx$$

$a \geq a_0 > 0$, т.к. $c(a)$, и

и $c(a) \xrightarrow[a \to 0]{} \infty$

$$\|u, W_2^1(G)\| \leq \|\ell\| \leq c\, \|f, L_2(G)\| \quad ■$$

Пример 1 $\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in G \\ u|_{\partial G} = 0 \end{cases}$ — з. Дир. с ур-ем Пуассона

$k \equiv 1$, $a \equiv 0$ $\Rightarrow \exists!\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ — об. реш, и есть оценка $\|u, \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)\| \leq c\, \|f, L_2(G)\|$

Пример 2 $\begin{cases} \Delta u - \varepsilon u = f(x) & x \in G, \quad \varepsilon > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & f \in L_2(G) \end{cases}$

$k \equiv 1$, $a \equiv \varepsilon > 0$ $\Rightarrow \exists!\, u \in W_2^1(G)$ — об. реш., и есть оценка $\|u, W_2^1(G)\| \leq c\, \|f, L_2(G)\|$