12/3/21

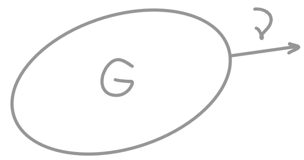
Теорема 5 Фредгольма для задачи Неймана

- Либо з. Неймана разрешима $\forall f \in L_2(G)$
- Либо сущ-ет конечное число ЛНЗ решений однородн. задачи $u_1, \dots, u_n$ ----

Новая тема?

$G \subset \mathbb{R}^n$ - огр, ∂G - кус.-гладк.

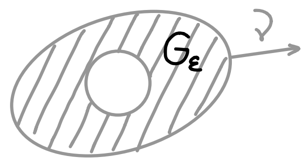
Теорема 1 (Интегральная формула Грина)



$u(x) \in C^2(\overline{G})$

$$\Rightarrow \forall x \in G \quad u(x) = \int_G \mathcal{E}_n(x-y)\, \Delta u(y)\, dy - \int_{\partial G} \left(\mathcal{E}_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{E}_n(x-y) \right) ds$$

Схема док-ва: $G_\varepsilon := G \setminus B(x, \varepsilon)$



Напом Обычная ф. Грина:

$$\int_G \left(v(y)\, \Delta u(y) - u(y)\, \Delta v(y) \right) dy = \int_{\partial G} \left(v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right) ds$$

$$v \Delta u - u \Delta v = v(\operatorname{div} \nabla u) - u(\operatorname{div} \nabla v) =$$

$$= \operatorname{div}(v \nabla u) - \langle \nabla v, \nabla u \rangle - \operatorname{div}(u \nabla v) + \langle \nabla v, \nabla u \rangle =$$

$$= \operatorname{div}(v \nabla u - u \nabla v)$$

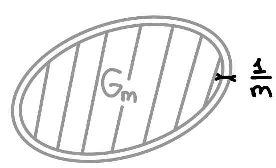
Напом ф. Гаусса-Остроградского:

$$\int_G \operatorname{div} u \; dS = \int_{\partial G} \langle u, \nu \rangle\, ds$$

Т.о. $$\int_G (v \Delta u - u \Delta v)\, dy = \int_G \operatorname{div}(v \nabla u - u \nabla v)\, dy =$$

$$= \int_{\partial G} \langle v \nabla u - u \nabla v, \nu \rangle\, ds$$

m с рисунка: $\forall m$ для G_m вып. ф-ла Грина.



$$\int_{\partial G} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds \xleftarrow[m \to \infty]{} \int_{\partial G_m} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds = \int_{G_m} (v \Delta u - u \Delta v)\, dy \xrightarrow[m \to \infty]{} \int_G (v \Delta u - u \Delta v)\, dy \quad \blacksquare$$

Достаточно требовать $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$: $\Delta u, \Delta v \in C(\overline{G})$

$v(y) = \mathcal{E}_n(x-y)$ в G_2

$$\int\limits_{\partial G} \left(\mathcal{E}_n(x-y)\, \Delta u(y) - u(y)\, \Delta \mathcal{E}_n(x-y) \right) dy = \int\limits_{\partial G_\varepsilon} \left(\mathcal{E}_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{E}_n(x-y) \right) ds$$

$\partial G_\varepsilon \to \partial G \cup \{|x-y| = \varepsilon\}$

Функция Грина

$$(7) \begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in G \\ u\big|_{\partial G} = \varphi(x') \end{cases}$$

$G \subset \mathbb{R}^n$ – огр, ∂G – кус-гл

$g(y,x)$, $y \in \overline{G}$, $x \in G$ – ФУНКЦИЯ ГРИНА задачи Дирихле (7) в области G, если

① $g(y,x) = \hat{g}(y,x) - \mathcal{E}_n(x-y)$, где $\forall x \in G$, fix x :

$\hat{g}(y,x) \in C^1(\overline{G})$, $\Delta_y \hat{g}(y,x) \overset{G}{\equiv} 0$

② $\forall x \in G$, fix x $\quad g\big|_{y \in \partial G} \equiv 0$

$$\begin{cases} \Delta_y \hat{g} = 0, & y \in G \\ \hat{g}(y,x) - \mathcal{E}_n(x-y) = 0, & y \in \partial G \end{cases}$$

Теорема 2 | $f \in C(\overline{G})$, $\varphi \in C(\partial G)$
Сущ-ет классическое реш (7) $u(x) \in C^1(\overline{G})$
Сущ-ет ф-ия Гр. $g(y,x) = \hat{g}(y,x) - \mathcal{E}_n(x-y)$: $\hat{g} \in C^1(\overline{G})$

$$\Rightarrow u(x) = -\int\limits_G g(y,x) f(y)\, dy - \int\limits_{\partial G} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} g(y,x)\, \varphi(y) \right) ds$$

Напом Г-О $\quad \displaystyle\int\limits_G D_{y_j} u(y)\, dy = \int\limits_{\partial G} u(y) \cos(\nu, y_j)\, ds$