Из ДЗ: $\begin{cases} u_{tt} = f(t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{t=1} = 0 \end{cases}$, $f = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/3) \\ \alpha, & t \in (1/3, 1] \end{cases} \in L_2[0,1]$

$$\int_0^1 u_{tt} v \, dt = \int_0^1 f v \, dt \qquad \forall v \in C_0^\infty$$

$$u_t v \Big|_0^1 - \int_0^1 u_t v_t \, dt = \int_0^1 f v \, dt \quad ,$$

Если $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, то $\int_0^1 u_t v_t \, dt = -\int_0^1 v f \, dt$

при этом u тоже будет из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 & , \ t \in [0, 1/3) \\ \alpha \frac{t^2}{2} + \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2 & , \ t \in (1/3, 1] \end{cases}$$ – проинтегрировали $u_{tt} = f$

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \Rightarrow$ $u(0) = C_2 = 0$, $u(1) = \frac{\alpha}{2} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 0$ $\Rightarrow$ $C_2 = 0$, $\tilde{C}_2 = -\frac{\alpha}{2} - \tilde{C}_1$

$u(t) \in W_2^1(0,1) \hookrightarrow C[0,1] \Rightarrow u(\frac{1}{3} - 0) = u(\frac{1}{3} + 0)$:

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{3} C_1 = \alpha \cdot \frac{1}{18} - \frac{2}{3} \tilde{C}_1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + 6C_1 = \alpha - 12\tilde{C}_1 - 9\alpha$$

$$C_1 = \frac{1}{6}\left(-1 - 12\tilde{C}_1 - 8\alpha\right) = -\frac{1}{6} - 2\tilde{C}_1 - \frac{4}{3}\alpha$$

$u \in C[0,1]$, но не факт, что $u \in C^1[0,1]$, поэтому считаем обобщ. (а не обычн.) u_t:

$$u_t = \begin{cases} t + C_1 \\ \alpha t + \tilde{C}_1 \end{cases} = \begin{cases} t - \alpha\frac{4}{3} - 2\tilde{C}_1 - \frac{1}{6} & , \ t \in [0, \frac{1}{3}) \\ \alpha t + \tilde{C}_1 & , \ t \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

Проверим, является ли это обобщ. произв.
(мы пока посчитали просто производные по областям диф-емости, предполагая, что это может быть обобщ. произв)

$$\int_0^{1/3} \left(t - \frac{4}{3}\alpha - 2\tilde{C}_1 - \frac{1}{6}\right) v_t \, dt + \int_{1/3}^1 v_t (\alpha t + \tilde{C}_1) \, dt = -\int_0^{1/3} v \, dt - \alpha \int_{1/3}^1 v \, dt$$

По частям:

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{4}{3}\alpha - 2\tilde{C}_1\right) v\left(\tfrac{1}{3}\right) - (\ldots) \overset{\to 0}{v(0)} - \int_0^{1/3} v \, dt + (\ldots) \overset{\to 0}{v(1)} - \left(\frac{\alpha}{3} + \tilde{C}_1\right) v\left(\tfrac{1}{3}\right) -$$

$$- \int_{1/3}^1 \alpha v \, dt = -\int_0^{1/3} v \, dt - \alpha \int_{1/3}^1 v \, dt$$

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{4}{3}\alpha - 2\widetilde{C}_1 - \frac{\alpha}{3} - \widetilde{C}_1\right) v\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$$

$$\frac{1}{6} - \frac{5}{3}\alpha - 3\widetilde{C}_1 = 0$$

$$\widetilde{C}_1 = \frac{1}{18} - \frac{5}{9}\alpha$$

Т.о. сможем выразить $u(t)$