$u(x) = \ln x$

$u, v \in L_{loc}(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} u\varphi' dx = -\int_{-1}^{1} v\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1)$$

$\Rightarrow$ v - обобщ. произв.

Явл-ся ли u локально суммир-й?

$$\int_0^1 |\ln|x|| dx = -\int_0^1 \ln x \, dx = -\left(\int_0^\varepsilon \ln x \, dx + \int_\varepsilon^1 \ln x \, dx\right)$$

$$\underset{\shortparallel}{} x\ln x \big|_\varepsilon^1 - (1-\varepsilon) = 0 - \varepsilon \ln \varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\delta}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{\delta+1}}} = \lim_{x\to 0} -x = 0 \qquad \delta > 0$$

$$|\ln|x|| \leq c \cdot \frac{1}{|x|^\delta}, \quad \delta > 0$$

$\Rightarrow$ лок. сумм-ма

$\Rightarrow$ можем $\int$ считать

$$\int_{-1}^{1} \ln|x| \, d\varphi = \int_0^1 \ln x \, d\varphi + \int_{-1}^{0} \ln(-x) \, d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \ln x \, d\varphi + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \ln(-x) \, d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\varphi \ln x \big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{\varphi}{x} dx + \ln(-x)\varphi \big|_{-1}^{-\varepsilon} - \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi}{x} dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\underline{-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon + \varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon} - \left(\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi}{x} dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi}{x} dx \right) \Big] =$$

$$\ln\varepsilon(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) = \ln\varepsilon \int_\varepsilon^{-\varepsilon} \varphi'(x) dx \leq$$

$$\leq 2\varepsilon \cdot c \cdot \ln\varepsilon \to 0$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi}{x}dx + \int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\varphi}{x}dx\right] \overset{\exists \lim ?}{=} -\int_{-1}^{1} v(x)\varphi dx$$

Хотим исп-ть т. Лебега, усл-я нужны:

Пусть $\varphi = x\psi$ $\quad \psi \in C_0^\infty$ смотрим более узкий класс ф-й

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1}\psi\cdot \chi_{\{(-1,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,1)\}}(x)dx = \int_{-1}^{1}\psi(x)dx =$$

$$\chi_{(-1,1)} \overset{\varepsilon\to 0}{\equiv} 1$$

$$= -\int_{-1}^{1} v x\psi dx$$

а тут всё сломалось вот

$$\int_{-1}^{1}\psi(1-vx)dx = 0$$

по лемме Дюбуа-Реймона

$$1 - vx = 0$$

$\Rightarrow v = \frac{1}{x} \notin L_{loc} \Rightarrow$ против-е с тем, что $v \in L_{loc}$

$u(x) = \frac{1}{|x|}$, $n=2$ $\qquad A = \{\|x\| < \frac{1}{2}\}$

про лок. сумм-ть: $\qquad \varphi \in C_0^\infty(A)$

$$\int_A \frac{1}{|x|}dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r}\cdot r dr d\theta$$

произв-ю ищем:

$$\int_A u\varphi' dx = \int_A \frac{\varphi_{x_1}}{|x|}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A\setminus B_\varepsilon}\frac{\varphi_{x_1}}{|x|}dx =$$

$$B_\varepsilon = \{\varepsilon < |x| < \tfrac{1}{2}\}$$

тут нормаль в другую стор.

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\underbrace{\int_{|x|=\frac{1}{2}}\frac{\varphi}{|x|}\cdot\cos(\nu,x_1)ds}_{=0} - \int_{|x|=\varepsilon}\frac{\varphi}{|x|}\nu_1 ds +$$

нормаль

по границе типа

потому что тут φ-финитная

$\cos(\nu, x_1) = \nu_1$

$$+\int\limits_{A\setminus B_\varepsilon} \varphi \cdot \frac{x_1}{|x|^3}\,dx \Big]$$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ $\quad \left(\frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}\right)_{x_1} = \frac{-2x_1}{2|x|^3} = \frac{-x_1}{|x|^3}$

$$J = \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\varphi}{|x|} \nu_1\,ds \leqslant \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\varphi}{\varepsilon}\,ds = \frac{1}{\varepsilon} K\varepsilon = K \neq 0 \quad :c$$

как бы могли посчитать

дл. окр-ти

$$J + \int\limits_{A\setminus B_\varepsilon} \varphi \frac{x_1}{|x|^3}\,dx \overset{?}{=} -\int\limits_A v\varphi\,dx$$

а этот будет вообще считаться

Будет ли $\frac{x_1}{|x|^3}$ лок. сумм-мой

$$\int\limits_{B_\varepsilon} \frac{|x_1|}{|x|^3}\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{r|\cos\theta|}{r^3}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{|\cos\theta|}{r}\,dr\,d\theta \geqslant$$

предп., что суммир.:

$$\geqslant \int_0^{\varepsilon}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{r}\,dr\,d\theta = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{r}\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\right]dr = -\sqrt{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{dr}{r}$$

$\Rightarrow$ сумм-ти нет!

$$\varphi = |x|^2\varphi$$

$$J = \int\limits_{|x|=\varepsilon} |x|\varphi\nu_1\,ds \leqslant \varepsilon\cdot\varepsilon\cdot K \to 0$$

$$\int\limits_{A\setminus B_\varepsilon} \frac{x_1\varphi}{|x|}\,dx \qquad \int\limits_A \frac{x_1}{|x|}\varphi\,dx \overset{?}{=} -\int\limits_A v|x|^2\varphi\,dx$$

Пусть $\exists v$ - лок. сумм. $v = -\frac{x_1}{|x|^3}$, но мы её уже смотрели, а она не лок. сумм.

Ну, в общем, всё плохо :c
(J не занулялся)

Д/з: • д-ть, что $u(x) = \ln|x| \in W_n^1(|x| < \frac{1}{2})$,
где $n = 2$

надо: $u(x) \in L_n(|x| < \frac{1}{2})$

$\exists D_{x_j} u(x) \in L_n(|x| < \frac{1}{2})$

• найти реш-е и иссл-ть его

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \ x > 0 \\ u|_{t=0} = -x^2 \\ u_t|_{t=0} = 2x \\ u|_{x=0} = t^2 \end{cases}$$

из C_2 или огр. или что или как

где-то ф-лу Даламбера исп-ть?