Была задачка про единств-ть. По аналогии с лекциями
все ещё на доом (но стоит всё же...)

20.16. (5)

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x \\ u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi t}{2} \end{cases}$$

Надо сначала привести к $u|_x = 0$

т.е. хотим: $u = v + w$: $\quad v_x|_{x=0} = 0 = v|_{x=\frac{\pi}{2}}$

$w_x|_{x=0} = t \qquad w|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t/2$

Можно взять $\omega = xt$, $u = v + xt$

$$v_{tt} + 2v_t + \cancel{2x} = v_{xx} + 8v + \cancel{8xt} + \cancel{2x} - \cancel{8xt} + \cos 3x$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + 2v_t - 8v = \cos 3x \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0 \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

вот теперь можно и Дюамеля

$$\begin{cases} h_{tt} - h_{xx} + 2h_t - 8h = 0 \\ h|_{t=0} = 0, \quad h_t|_{t=0} = \cos 3x \\ h_x|_{x=0} = 0, \quad h|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

здесь могло быть s

если бы прав. часть зависела от t

$$\longrightarrow h(t, x, s)$$

$$v(t,x) = \int_0^t h(t-s, x, s)\,ds$$

I $\quad h = T(t)X(x)$

$$\frac{T''}{T} + \frac{2T'}{T} - 8 = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{const}$$

вообще с минусом просто удобнее

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{и} \quad T'' + 2T' - 8T + \lambda T = 0$$

II $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \quad X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ — з. Ш-Л

$\tau^2 + \lambda = 0 \qquad$ а) $\lambda = 0$: $\quad X = c_1 x + c_2 \qquad$ не подходит

$$X'(0) = c_1 = 0$$

$$X(\tfrac{\pi}{2}) = c_2 = 0$$

b) $\lambda < 0$: тут тоже не будет нетрив. реш.

c) $\lambda > 0$: $X = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$X = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x$

$X(\frac{\pi}{2}) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0$

$\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, 1 \dots$

$\sqrt{\lambda_k} = 1 + 2k$

$\Rightarrow X_k(x) = c_k \cos(1+2k)x$

$c_k: \int_0^{\pi/2} (X_k(x))^2 dx = 1$

Для ортонорм-ти:

$$\int_0^{\pi/2} c_k^2 \cos^2(1+2k)x\,dx = 1$$

$$c_k^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2(1+2k)x}{2} dx$$

$$c_k^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin 2(1+2k)x}{4(1+2k)}\Big|_0^{\pi/2}\right) = 1$$

$$c_k^2 = \frac{4}{\pi} \qquad c_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$X_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(1+2k)x$

$$T_k'' + 2T_k' - 8T_k + (1+2k)^2 T = 0$$

$$\tau^2 + 2\tau + ((1+2k)^2 - 8) = 0$$

$$(\tau+1)^2 + (\underbrace{4k + 4k^2 - 8}) = 0$$

↳ неск. сит. в завис-ти от k

a) $k = 0$: $\tau + 1 \pm 2\sqrt{2} = 0 \longrightarrow \tau_0 = -1 \pm 2\sqrt{2}$

b) $k = 1$: $\tau_{1,2} = -1$

c) $k = 2, 3, \dots$: $\tau = -1 \pm 2i\sqrt{k^2 + k - 2}$

Тогда: $T_0(t) = c_{10} e^{(-1+2\sqrt{2})t} + c_{20} e^{(-1-2\sqrt{2})t} =$

$$= e^{-t}(c_{10} e^{2\sqrt{2}t} + c_{20} e^{-2\sqrt{2}t})$$

$$T_1(t) = e^{-t}(c_{11} + c_{21} t)$$

$$\underset{k\geq 2}{T_k(t)} = e^{-t}(c_{1k} \cos 2\sqrt{k^2+k-2}\,t + c_{2k} \sin 2\sqrt{k^2+k-2}\,t)$$

III $h(t, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$

$$h|_{t=0} = 0 = (c_{10} + c_{20}) X_0(x) + c_{11} X_1(x) + \sum_{k\geq 2} c_{1k} X_k(x)$$

$$c_{10} + c_{20} = 0 \qquad c_{11} = 0, \quad c_{1k} = 0 \quad (k \geq 2)$$

$$h = c_{10} e^{-t}\left(e^{2\sqrt{2}t} - e^{-2\sqrt{2}t}\right) X_0(x) + e^{-t}\cdot c_{12} t X_1(x) + \sum_{k\geq 2} e^{-t}\left(c_{2k} \sin 2\sqrt{k^2+k-2}\, t\right) X_k(x)$$

$$h_t|_{t=0} = \cos 3x = \underbrace{c_{10} e^{-t}\left((2\sqrt{2}-1)e^{2\sqrt{2}t} + (2\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}t}\right)\Big|_{t=0}}_{c_{10} 4\sqrt{2}} \cdot X_0(x) + c_{12} X_1(x) + \sum_{k\geq 2} c_{2k}\cdot 2\sqrt{k^2+k-2}\cdot X_k(x)$$

$$\cos 3x = c_{10} 4\sqrt{2}\, \underbrace{X_0(x)}_{= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x} + c_{12} \underbrace{X_1(x)}_{= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 3x} + \sum_{k\geq 2} c_{2k} 2\sqrt{k^2+k-2}\cdot \underbrace{X_k(x)}_{= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(1+2k)x}$$

$$\Rightarrow c_{10} = 0, \quad c_{2k} = 0, \quad c_{12} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow h(t,x,s) = \cancel{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\cdot e^{-t}\cdot t\cdot \cancel{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}\cos 3x = e^{-t}\cdot t\cdot \cos 3x$$

$$v(t,x) = \int_0^t e^{-(t-s)}(t-s)\,ds\cdot \cos 3x$$

$$u(t,x) = v(t,x) + xt$$

ого, мы успели решить целую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + \beta u_x + \gamma u = 0 & 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi_1, \quad u_t|_{t=0} = \varphi_2 \\ u|_{x=0} = 0 = u|_{x=l} \end{cases}$$

Общий вид шага I:

$$u = T(t)X(x) \qquad \frac{T''}{T} - \frac{X''}{X} + \frac{\alpha T'}{T} + \beta\frac{X'}{X} + \gamma = 0$$

$$\frac{T''}{T} + \alpha\frac{T'}{T} + \gamma = \frac{X''}{X} + \beta\frac{X'}{X} = -\lambda$$

там ещё какие-то противности были в конце

Д/з:

1. Д-ть единств-ть: $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma u = f(t,x), \; \gamma \neq 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \\ u|_{x=0} = \mu_1(t) \quad u|_{x=1} = \mu_2(t) \end{cases}$
2. 20.41 (1)
3. 20.45 (5) ← вроде метод Фурье