$G \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(x) \in L_{loc}(G)$ 5/2/21

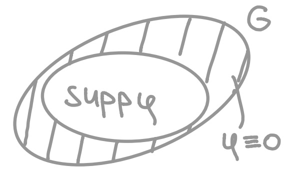
<u>Опр</u> $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $v(x) \in L_{loc}(G)$: $\forall \varphi \in C_0^\infty(G)$

$$\int_G u(x) D_x^\alpha \varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G v(x)\varphi(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ $v(x)$ – **ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ** $D_x^\alpha u(x)$

Если $u \in C^l(G)$, то по ф-ле Гаусса-Остр.

$$\int_G u(x) D_x^\alpha \varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G D_x^\alpha u(x)\varphi(x)\,dx$$



Т.е. $\operatorname{supp}\varphi \subset G$

<u>Лемма</u> дю Буа-Реймонда

$u \in L_{loc}(G)$, $u = 0$ ПВ в G $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_G u(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G)$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u \in C^2(G) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

– ур-е колеб. струны

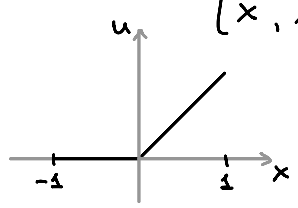
$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$$

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\eta)\,d\eta$$

$\varphi \in C^2(G)$, $\psi \in C^1(G)$. А если $\varphi \notin C^2(G)$, то уже появляется необх в обобщенных производных

↳ Вполне реальная ситуация

<u>Пример</u> $u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ $\quad G = (-1, 1)$



в 0 без разницы что

$$\int_{-1}^{1} u\varphi'\,dx = \int_0^1 x\varphi'\,dx = x\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi\,dx =$$

$$= 0 - \int_0^1 \varphi\,dx = (-1)\int_0^1 v\varphi\,dx + \overbrace{(-1)\int_{-1}^0 v\varphi\,dx}^{=0}$$

↳ $x|_0 = 0$, $\varphi(x)|_1 = 0$ т.к. $\varphi \in C_0^\infty(-1,1) \Rightarrow \varphi(1) = 0$

Т.о. $v = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (-1,0) \end{cases}$

Найдем вторую обобщ. производную как произв. первой обобщ. произв.

$$\int_{-1}^{1} v(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{0}^{1}\varphi'(x)\,dx = \varphi(1)-\varphi(0) = -\varphi(0)$$

Обобщ. произв. $w(x)$ такая, что: $(-1)\int_{-1}^{1} w(x)\varphi(x)\,dx$

$\varphi(x) := x\psi(x),\ \psi\in C_0^\infty(-1,1)$

$$-\int_{-1}^{1} w(x)\cdot x\cdot\psi(x)\,dx = 0 \overset{\text{лемма дБ-Р}}{\Longrightarrow} w(x)\cdot x = 0 \text{ пв} \Rightarrow w(x)=0 \text{ пв}$$

Т.е. получаем $-\varphi(0)=0$, однако φ произвольная.

Далеко не у всех $\varphi\in C_0^\infty(-1,1)$ $\varphi(0)=0$ $\Rightarrow$ второй произв. не сущ-ет.

<u>Пример</u> $G=\{|x|<\frac{1}{2}\}\subset\mathbb{R}^2$ $\quad u(x)=\frac{1}{|x|^2}$ – не локально суммир. т.к. $n=1$, а порядок особенности в 0 (внутр. т.) есть 2
не можем говорить об обобщ. произв.

Рассмотрим $u(x)=\frac{1}{|x|^{1/3}}\in L_{loc}(G)$

$$\int_{|x|<\frac12}\frac{1}{|x|^{1/3}}D_{x_1}\varphi\,dx = *$$

<u>Напом</u> $\int_G D_{x_j}v(x)\,dx = \int_{\partial G} v\cdot\cos(\nu,x_j)\,ds$ – ф-ла Гаусса-Остроград.
ν – внешняя нормаль

Но из-за особенности внутри области она не работает.

$$* = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon<|x|<\frac12}\frac{1}{|x|^{1/3}}D_{x_1}\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon<|x|<\frac12}D_{x_1}\left(\frac{1}{|x|^{\frac13}}\varphi\right)dx - \int_{\varepsilon<|x|<\frac12}D_{x_1}\frac{1}{|x|^{\frac13}}\cdot\varphi\,dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon<|x|<\frac12}D_{x_1}\left(\frac{1}{|x|^{\frac13}}\varphi\right)dx + \int_{\varepsilon<|x|<\frac12}\frac13\cdot\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2)^{7/6}}\cdot\varphi\,dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\underbrace{\int_{|x|=\frac12}\frac{1}{|x|^{1/3}}\varphi\cos(\nu,x_1)\,dx}_{=0 \text{ т.к. } \varphi|_{|x|=\frac12}\equiv0} + \int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|^{1/3}}\varphi\cos(\nu,x_1)\,dx + \int_{\varepsilon<|x|<\frac12}\frac13\cdot\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2)^{7/6}}\cdot\varphi\,dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\underbrace{\int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|^{1/3}}\varphi\cos(\nu,x_1)dx}_{\le C\int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|^{1/3}}ds = C\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon^{1/3}}d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0} + \int\limits_{\varepsilon<|x|<\frac12} \frac{1}{3}\cdot\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2)^{7/6}}\cdot\varphi\, dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<\frac12}\frac13\cdot\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2)^{7/6}}\cdot\varphi\,dx =$$

(тут уже нет особенности) $= \int\limits_{|x|<\frac12} \frac13 x_1 (x_1^2+x_2^2)^{-\frac76}\varphi\, dx$

Порядок особенности меньше 2 $\Rightarrow$ обобщ. произв. сущ-ет.

Т.о. обобщ. произв. есть $\frac13 x_1(x_1^2+x_2^2)^{-\frac76}$

<u>Пример</u> $G = \{|x|<\frac12\} \subset \mathbb{R}^2$

$u(x) = \frac{1}{|x|} \in L_{loc}(G)$ (даже $L_1(G)$)

$$\int\limits_G \frac{1}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<\frac12}\frac{1}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\, dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\underbrace{\int\limits_{\varepsilon<|x|<\frac12}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x|}\varphi\right)dx}_{} - \int\limits_{\varepsilon<|x|<\frac12}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x|}\cdot\varphi\, dx\right)$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\int\limits_{|x|=\frac12}\frac{1}{|x|}\varphi\cos(\tilde\nu,x_j)\,ds}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|}\varphi\cos(\nu,x_j)\,ds}_{\text{огранич}} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\varphi\cdot\cos(\nu,x_j)\underbrace{\varepsilon}_{\text{якобиан}}\, d\theta = \int_0^{2\pi}\varphi\cdot\cos(\nu,x_j)\,d\theta$$

доделать

Сузим класс $\varphi(x) = |x|^{2p}\psi(x)$ или $x_1\psi(x)$, где $\psi\in C_0^\infty$

стр72 1абвгд...