23/4/21

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad n=3$$

$$u(t,x) = F(t,|x|) := F(t,\rho)$$

Только при $n=3$ $\quad (\rho F)_{tt} - (\rho F)_{\rho\rho} = 0$

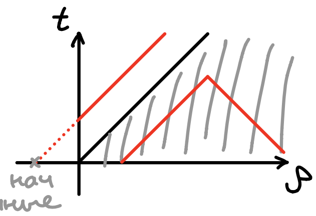
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0, & n=3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$u(t,x) = f(t,\rho)$$

это уже не з.К., а краевая задача!

(непонял почему)

$$\begin{cases} (\rho f)_{tt} - (\rho f)_{\rho\rho} = 0, & t>0,\ \rho>0 \\ (\rho f)|_{t=0} = \rho\varphi_1(\rho) := \tilde{\varphi}_1(\rho) \\ (\rho f)_t|_{t=0} = \rho\varphi_2(\rho) := \tilde{\varphi}_2(\rho) \end{cases}$$



$\rho > t \iff$

$\iff \rho - t > 0$ $\quad$ **

* тут нач данные не знаем

$$(1)\quad \rho f = \frac{\tilde{\varphi}_1(\rho+t) + \tilde{\varphi}_1(\rho-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\rho-t}^{\rho+t} \tilde{\varphi}_2(\eta)\,d\eta$$ — ф-ла Даламбера

это найти не сможем, т.к. $\circledast$

$$\text{(**)} \quad \rho - t \geq 0 \qquad \rho f = \frac{\tilde{\varphi}_1(\rho+t) + \tilde{\varphi}_1(\rho-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\rho-t}^{\rho+t} \tilde{\varphi}_2(\eta)\,d\eta$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{y_1 y_1} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi_1(y_1) \\ v_t|_{t=0} = \varphi_2(y_1) \end{cases} \qquad v(t,y_1) = \frac{\varphi_1(t+y) + \varphi_1(t-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{y_1-t}^{y_1+t} \varphi_2(\eta)\,d\eta$$

$$\begin{cases} (\rho f)_{tt} - (\rho f)_{rr} = 0, & t>0,\ \rho>0 \\ (\rho f)|_{t=0} = \rho\varphi_1(\rho) := \tilde{\varphi}_1(\rho) \\ (\rho f)_t|_{t=0} = \rho\varphi_2(\rho) := \tilde{\varphi}_2(\rho) \\ (\rho f)|_{\rho=0} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}_1(\rho) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(\rho), & \rho \geq 0 \\ ?, & \rho < 0 \end{cases} \qquad \overline{\varphi}_2(\rho) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_2(\rho), & \rho \geq 0 \\ ?, & \rho < 0 \end{cases}$$

— метод продолжения

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{\rho\rho} = 0, & t>0,\ \rho>0 \\ v|_{t=0} = \overline{\varphi}_1(\rho) \\ v_t|_{t=0} = \overline{\varphi}_2(\rho) \\ v|_{\rho=0} = 0 \end{cases} \quad ★$$

$$v(t,\rho) = \frac{\overline{\varphi}_1(\rho+t) + \overline{\varphi}_1(\rho-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\rho-t}^{\rho+t} \overline{\varphi}_2(\eta)\,d\eta$$

$\rho>0$:
$$v(t,\rho) = \frac{\widetilde{\varphi}_1(\rho+t) + \overline{\varphi}_1(\rho-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\rho-t}^{0} \overline{\varphi}_2(\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\rho+t} \widetilde{\varphi}_2(\eta)\,d\eta$$

обращаем внимание, где волна, а где крышка над φ

Интересен случай $\rho-t<0$ ($\rho-t\geqslant 0$ рассмотрен в (1))

★ $$v(t,\rho)\Big|_{\rho=0} = \frac{\widetilde{\varphi}_1(t) + \overline{\varphi}_1(-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{0} \overline{\varphi}_2(\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} \widetilde{\varphi}_2(\eta)\,d\eta = 0$$

$$\underline{\widetilde{\varphi}_1(t) + \overline{\varphi}_2(-t) = 0}$$

$\hookrightarrow \Rightarrow \overline{\varphi}_2(-t) = -\widetilde{\varphi}_1(t)$

$\widetilde{\varphi}_1$ продолжаем на $\mathbb{R}^{<0}$ нечетным образом

$$\overline{\varphi}_1(\rho) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_1(\rho), & \rho\geqslant 0 \\ -\widetilde{\varphi}_1(-\rho), & \rho<0 \end{cases}$$

и
$$\int\limits_{-t}^{0} \overline{\varphi}_2(\eta)\,d\eta + \int\limits_{0}^{t} \widetilde{\varphi}_2(\eta)\,d\eta = 0$$

$$\int\limits_{-t}^{0} \overline{\varphi}_2(\eta)\,d\eta + \int\limits_{-t}^{0} \widetilde{\varphi}_2(-\tau)\,d\tau = 0$$

$$\int\limits_{-t}^{0} \left(\overline{\varphi}_2(\eta) + \widetilde{\varphi}_2(-\eta)\right)d\eta = 0 \quad \forall t \Rightarrow$$

тоже нечет продолжение

$$\overline{\varphi}_2(\rho) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_2(\rho), & \rho\geqslant 0 \\ -\widetilde{\varphi}_2(-\rho), & \rho<0 \end{cases}$$

Т.о. :
$$v(t,\rho) = \frac{\widetilde{\varphi}_1(\rho+t) - \widetilde{\varphi}_1(t-\rho)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{\rho-t}^{0} \widetilde{\varphi}_2(-\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\rho+t} \widetilde{\varphi}_2(\eta)\,d\eta$$

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{(|x|+t)\,\varphi_1(|x|+t) + (|x|-t)\,\varphi_1(|x|-t)}{2|x|} + \dfrac{1}{2|x|}\displaystyle\int\limits_{|x|-t}^{|x|+t} \eta\,\varphi_2(\eta)\,d\eta, & |x|\geqslant t \\ \dfrac{(|x|+t)\,\varphi_1(|x|+t) + (|x|-t)\,\varphi_1(t-|x|)}{2|x|} + \dfrac{1}{2|x|}\displaystyle\int\limits_{|x|-t}^{0} \eta\,\varphi_2(-\eta)\,d\eta + \\ \quad + \dfrac{1}{2|x|}\displaystyle\int\limits_{0}^{|x|+t} \eta\,\varphi_2(\eta)\,d\eta, & |x|<t \end{cases}$$

№ 12.37 (7)

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y} \\ u|_{t=0} = e^{3x+4y} \\ u_t|_{t=0} = e^{3x+4y} \end{cases}$$

$$\Delta e^{3x+4y} = 25 e^{3x+4y} = (9+16) e^{3x+4y}$$

$$\begin{cases} \Delta u_{tt} = \Delta^2 u + 25 e^{3x+4y} \\ \Delta u|_{t=0} = 25 e^{3x+4y} \\ \Delta u_t|_{t=0} = 25 e^{3x+4y} \end{cases} \quad (1)$$

Изнач задача $|\cdot 25$: $\begin{cases} (25u)_{tt} = \Delta(25u) + 25 e^{3x+4y} \\ (25u)|_{t=0} = 25 e^{3x+4y} \\ (25u)_t|_{t=0} = 25 e^{3x+4y} \end{cases} \quad (2)$

(1) и (2) имеют вид $\begin{cases} v_{tt} = \Delta v + 25 e^{3x+4y} \\ v|_{t=0} = 25 e^{3x+4y} \\ v_t|_{t=0} = 25 e^{3x+4y} \end{cases}$

Реш-е этой задачи единственно $\Rightarrow$ $\Delta u = 25 u$

Исходная задача: $\begin{cases} u_{tt} = 25u + e^{3x+4y} \\ u|_{t=0} = e^{3x+4y} \\ u_t|_{t=0} = e^{3x+4y} \end{cases}$

$\lambda^2 = 25, \quad \lambda = \pm 5$

$u = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-5t} + u_{\text{частн}}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = e^{3x+4y} \\ 5c_1 - 5c_2 = e^{3x+4y} \end{cases}$$

Возьмем $u_{\text{частн}}$: $u_ч|_{t=0} = u_{ч\,t}|_{t=0} = 0$

Т.е. $\begin{cases} c_1 = \frac{6}{10} e^{3x+4y} \\ c_2 = \frac{4}{10} e^{3x+4y} \end{cases}$

$\varphi_1 = e^{-5t}$

$\varphi_2 = \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{10}$ – ЛНЗ функ

$\int \varphi_2 \cdot f \, ds$ – частное реш

$$e^{3x+4y} \int \varphi_2(t-s, x, y)\, ds$$

$$\varphi_2 = \frac{e^{5t} + e^{-5t}}{(5-(-5))} \Rightarrow \frac{e^{3x+4y}}{10} \int_0^t \left(e^{5(t-s)} - e^{-5(t-s)}\right) ds =$$

$$= \frac{e^{3x+4y}}{10} \left(e^{5t} t - t e^{-5t} - e^{5t} + 1 - e^{5t} + 1\right) = \frac{e^{3x+4y}}{50} \left(t(e^{5t} - e^{-5t}) - (e^{5t} + e^{-5t} + 2)\right)$$

№ 12.37 (8) $\cos(bx + cy)$

№ 12.38 (б)

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = x_1 x_2 \end{cases}$$

$$u(t,x) = D_t\left(\frac{t}{2\pi}\int\limits_{|z|<1}\frac{\varphi_1(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz\right) + \frac{t}{2\pi}\int\limits_{|z|<1}\frac{\varphi_2(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz$$

$$u(t,x) = \frac{t}{2\pi}\int\limits_{|z|<1}\frac{(x_1+tz_1)(x_2+tx_2)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz = \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{(x_1+t\rho\cos\varphi)(x_2+t\rho\sin\varphi)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\,d\varphi\,d\rho$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{x_1x_1} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x_1) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x_1,x_2) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

реш

Методом спуска получить ф-у. Даламбера из ф-лы Пуассона