30/4/21

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} = 0 \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi_1(x_1) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x_1) \end{cases} \text{ - нач. д.}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) u = 0$$

$u = u_1 + u_2$ $\qquad u_1$ = ф-ла какая-то

$$u_2 = \frac{t}{2\pi} \int\limits_{z_1^2+z_2^2=1} \frac{\varphi_2(x_1+tz_1)}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}\, ds = \frac{t}{2\pi} \int_{-1}^{1} \varphi_2(x_1+tz_1) \int_{-\sqrt{1-z_1^2}}^{\sqrt{1-z_1^2}} \frac{1}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}\, dz_2\, dz_1 =$$

$$\frac{dz_2}{\sqrt{1-z_1^2}\cdot\sqrt{1-\frac{z_2^2}{1-z_1^2}}}$$

$$= \frac{t}{2\pi} \int_{-1}^{1} \varphi_2(x_1+tz_1) \underbrace{\arcsin \frac{z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} \Bigg|_{-\sqrt{1-z_1^2}}^{\sqrt{1-z_1^2}}}_{\arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi} dz_1 = \frac{t}{2\pi} \cdot \pi \int_{-1}^{1} \varphi_2(x_1+tz_1)\, dz_1 =$$

$$= \big/\, x_1 + tz_1 := \xi \,\big/ = \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_2(\xi)\, d\xi$$

Т.о. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(\xi)\, d\xi\right) = \frac{\varphi_1(x_1+t) + \varphi_1(x_1-t)}{2}$

Уравнение теплопроводности

$n=1$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

Такая задача плохая — не для любых φ_1 и φ_2

φ_2 должна быть φ_1''

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, \quad t < 0$$

— тоже плохая, неразрешима

строится пример Адамара

$u_n = e^n e^{n(\alpha t + \beta x)}$ $\qquad$ Чтобы была равном сх, $\beta := i$

$u_n|_{t=0} = e^n |e^{n\beta x}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad$ т.е. $u_n = e^n e^{n(\alpha t + i\beta)}$

Ищем α: $\alpha n - (ni)^2 = 0 \Rightarrow n(\alpha + n) = 0 \Rightarrow \alpha = -n$

Т.о. $|u_n| = e^n e^{-n^2 t}$, при $t < 0$ $\Rightarrow$ $e^{n(1-nt)} \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0$

Нет равномерной зависимости

Т.е. начальная задача для ур-я теплопр: $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, \ t > 0$

Но и с единственностью тоже проблемы:

$u = u_1 - u_2$, u_1, u_2 – реш нач.з. $\Rightarrow$ u – реш $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$ (2)

Но $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_0^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$, где $a_0(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$

При $t=0$ $a_0^{(k)} = 0$, и получаем ненулевое реш-е начальной задачи (2)

Класс ф-ий, где всё ХОРОШО:

$$M = \{ u(t,x) \mid (t,x) \in \mathbb{R}^2_+, \ \forall T > 0 \sup_{\substack{t \in (0,T) \\ x \in \mathbb{R}}} |u(t,x)| < \infty \}$$

Теорема $\forall \varphi \in C(\mathbb{R})$: φ огр $\exists! \, u \in M$ – классич реш (1)

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \varphi(y)\, dy = \Big/ \frac{x-y}{\sqrt{2t}} := z \Big/ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \varphi(x - \sqrt{2t}\, z)\, dz$$

Пример $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = const \end{cases}$ – реш $u = const$

$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = 1 + x^2 \end{cases}$ – тут что-то говорили но я не успел

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \left(1 + (x - \sqrt{2t}\, z)^2\right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi} + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} (x^2 - 2\sqrt{2t}\, xz + 2tz^2)\, dz \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}\, x^2 + \sqrt{2\pi} \cdot 2t \right) = 1 + x^2 + 2t$$

$$2\sqrt{2t}\, x \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} z\, dz = 2\sqrt{2t}\, x \cdot \left(\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} z\, dz + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} z\, dz \right) =$$

$$= 2\sqrt{2t}\, x \cdot \left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} z\, dz + \int\limits_{\infty}^{0} e^{-\frac{v^2}{2}} v\, dv \right) = 0$$

$$2t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} z^2\, dz = 2t \cdot \sqrt{2\pi}$$

Теорема Тихонова

в задаче выше было так

$\forall \varphi \in C(\mathbb{R}): \varphi \simeq e^{\alpha|x|^2}$ $\exists!\, u \in M$ классич реш (1)

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \varphi(y)\,dy = \Big/ \frac{x-y}{\sqrt{2t}} := z \Big/ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \varphi(x - \sqrt{2t}\, z)\, dz$$

Общий случай:

Операторный подход

$$\begin{cases} u_t - \partial_x^2 u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(t,x) = \underline{e^{t\partial_x^2}} \varphi(x) = \varphi(x) + t\varphi''(x) + \frac{t^2 \varphi^{(4)}(x)}{2} + \ldots$$

это всё такой оператор

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} + u_x, \quad t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

Убираем младшие члены — пытаемся свести к виду

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(t,x) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

В волновых ур-ях использовали метод Дюамеля

Тут тоже

$u = u_1 + u_2$

$$\begin{cases} u_{1t} - u_{1xx} = 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{2t} - u_{2xx} = f(t,x) \\ u_2|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

это решается по ф-ле Пуассона. Определяем, что $\varphi \in M$ и решаем как в предыд. задачах

$v(t,x,s)$: $\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = f(s,x) \end{cases}$

$$u_2 = \int_0^t v(t-s, x, s)\, ds$$

$$(u_2)_t = \underbrace{v(0,x,t)}_{f(t,x)} + \int_0^t v_t\, ds$$

$$(u_2)_{xx} = \int_0^t v_{xx}\, ds$$

Правая часть тоже должна быть из M

Д/З №1 $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad t>0, \quad x>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \alpha u + \beta u_x|_{x=0} = 0 \end{cases}$

1) $\beta=0, \quad \alpha\neq 0$ (I кр. з.)
2) $\alpha=0, \quad \beta\neq 0$ (II кр. з)
3*) $\alpha\neq 0, \quad \beta\neq 0$

$\exists$ и $!$ → для 1)

через метод продолжения, как для волнового уравнения

(аудио)

№2 $\quad u_t - u_{xx} = 0$

Автомодельное решение $\quad u(t,x) = t^{\alpha} f\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$

обозн за перем

При каких α и β найдется