9/4/21

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \\ u|_{x=0} = \varphi_1(t,y) \\ u_x|_{x=0} = \varphi_2(t,y) \end{cases}$$

e^{x+iy} – хотим такое реш, но чтобы была посл-ть, рассмотрим $e^{n(x+iy)}$

$\varphi_{1n}(y) = u_n|_{x=0}$ $\qquad |\varphi_{1n}(y)| = |u_n||_{x=0} = |e^{niy}| = 1$

лучше

$\varphi_{2n}(y) = (u_n)_x|_{x=0}$ $\qquad |\varphi_{2n}(y)| = |(u_n)_x||_{x=0} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Не очень

Домн. u_n на const(n): $|u_n| = |e^{-\sqrt{n}} e^{n(x+iy)}| = e^{-\sqrt{n}+nx}$

$|\varphi_{1n}(y)| = |u_n||_{x=0} = |e^{niy}| e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

$|\varphi_{2n}(y)| = |(u_n)_x||_{x=0} = n e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

Это всё – пример Адамара

Но $|u_n| = e^{-\sqrt{n}+nx} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \infty$

Нет непр. завис. от нач. данных.
Задача некорректна

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = 0, \quad n=3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Ф-ла Киркхгофа (будет на экз.):

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi} \int_{|z|=1} \varphi(x+tz)\, ds, \quad \varphi \in C^2$$

↳ вектор

$$u_t = \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} \varphi(x+tz)\, ds + \frac{t}{4\pi} \int_{|z|=1} \sum_{j=1}^{3} \varphi'_{x_j} z_j\, ds$$

$$u_{tt} = \frac{2}{4\pi} \int_{|z|=1} \sum_{j=1}^{3} \varphi'_{x_j} z_j\, ds + \frac{t}{4\pi} \int_{|z|=1} \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varphi''_{x_j x_k} z_j z_k\, ds$$

$$* \int_{|z|<1} D_{z_j} u \cdot v\, dz = \int_{|z|=1} u v z_j\, ds - \int_{|z|<1} u D_{z_j} v\, ds \Rightarrow \int_{|z|<1} D_{z_j}(uv)\, dz = \int_{|z|=1} u v z_j\, ds$$

будем подставлять $v \equiv 1$

$$\int\limits_{|z|=1} \sum_{j=1}^{3} \varphi'_{x_j} z_j \, ds = t \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{|z|<1} \varphi_{x_j} \cdot x_j \, dz$$

$$\int\limits \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varphi''_{x_j x_k} z_j z_k \, ds = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{|z|=1} \sum_{j=1}^{3} \varphi''_{x_j x_k} z_j z_k \, ds = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{|z|<1} \underline{\varphi''_{x_k x_k} \, dz}$$

т.к. $\frac{\partial z_j}{\partial z_k} \neq 0 \iff j=k$

$$+ t \sum_{j=1}^{3} \int \underbrace{\varphi'''_{x_j x_k x_k}}_{= \frac{1}{t} \varphi'''_{x_k x_k z_j}} z_j \, dz = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{|z|<1} \varphi''_{x_k x_k} dz + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \Big(\underbrace{\int\limits_{|z|=1} \varphi''_{x_k x_k} (z_j)^2 ds -}_{\text{в } \circledast \ v := z_j}$$

т.к. $\varphi_{z_j} = \varphi_{x_j} \cdot t$

$$- \int\limits_{|z|<1} \varphi''_{x_k x_k} dz \Big) = \sum_{k=1}^{3} \Big(\int\limits_{|z|=1} \varphi''_{x_k x_k} ds - 3 \int\limits_{|z|<1} \varphi''_{x_k x_k} dz \Big)$$

Короче всё ок, все сократится и что-то получим

Т.о. $\frac{t}{4\pi} \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{|z|=1} \varphi''_{x_k x_k} ds$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} = 0, & n=3, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = x_1 x_2 x_3 := \varphi(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|z|=1} (x_1 + z_1 t)(x_2 + z_2 t)(x_3 + z_3 t) \, ds = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|z|=1} (x_1 x_2 x_3 + x_1 z_2 x_3 t +$$

$$+ z_1 x_2 x_3 t + x_1 x_2 z_3 t + z_1 z_2 x_3 t^2 + z_1 x_2 z_3 t^2 + x_1 z_2 z_3 t^2 + z_1 z_2 z_3 t^3) ds$$

$$= \Big/ \int\limits_{|z|=1} ds = 4\pi \Big/ = t x_1 x_2 x_3 + \frac{t}{4\pi} \cdot 0 = t x_1 x_2 x_3$$

$\int\limits_{|z|<1} D_{z_2}(u) dz = \int\limits_{|z|=1} u \cdot z_2 \, ds$, для $x_i x_j z_k t$ $u = 1$; для $x_i z_j z_k t^2$ $u = z_j$; для $z_i z_j z_k t^3$ $u = z_i z_j$; $D_{z_k}(u) = 0$ во всех с

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

полиномы

<u>Напом</u> Преобр. Фурье $v(x) \in S$

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} v(x)\, dx$$

$$\widehat{D_{x_j} v}(\xi) = i\xi_j \hat{v}(\xi)$$

$$\widehat{D^2_{x_j} v}(\xi) = (i\xi_j)^2 \hat{v}(\xi) = -\xi_j^2 \hat{v}(\xi)$$

$$\widehat{\sum_{j=1}^{n} D^2_{x_j} v}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{v}(\xi) = \widehat{\Delta^k v}(\xi) \quad *$$

Т.е. эквив-ая задача: $\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}_1(x) \\ \hat{u}_t|_{t=0} = \hat{\varphi}_2(x) \end{cases}$

Мы "спрятали" переменные в интеграле, получили одну переменную, т.е. обыкновенные диф. ур-е

Хар. полином: $\lambda^2 + |\xi|^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm|\xi|$

Т.о. $\hat{u}(t,\xi) = c_1 \cos|\xi|t + c_2 \sin|\xi|t$

$\hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}_1(\xi) \implies c_1 = \hat{\varphi}_1$

$\hat{u}_t|_{t=0} = \hat{\varphi}_2(\xi) \implies c_2 = \dfrac{\hat{\varphi}_2}{|\xi|}$

Чтобы узнать, сможем ли сделать обратн. преобр. Фурье, разложим $\hat{u}$ в ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(|\xi|t)^{2k}}{(2k)!} \hat{\varphi}_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(|\xi|t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{\hat{\varphi}_2}{|\xi|} \overset{*}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\Delta^k \varphi_1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\Delta^k \varphi_2} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Считаем, что φ_1 и φ_2 – бесконечно-диф, уходящ. на 0 на ∞, тогда
например, финитные

получаем $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Delta^k \varphi_1 \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \varphi_2 \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Если φ_1, φ_2 – полиномы, то ряды – конечные суммы и реш-я – полиномы.

Б 12.29 не факт

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = g(t) f(x) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

гармонические

Применим ко всему лаплас, раз уж гармонические:

$$\begin{cases} \Delta u_{tt} - \Delta\Delta u = 0 \\ \Delta u|_{t=0} = 0 \\ \Delta u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

– решаем отн Δu

$\Delta u = 0$ в силу единств. реш. корректной з. Коши

Т.о. исходная задача: $\begin{cases} u_{tt} = g(t) f(x) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$

$$u(t,x) = \underbrace{c_1 + c_2 t}_{\text{фунд. реш}} + \int_0^t \underbrace{(t-s)}_{\varphi\text{-ция}} g(s) f(x)\, ds$$

$c_1 = u_0(x)$, $c_2 = u_1(x)$

Владимиров 12.30, 12.4

{ фото