Л1. Криволинейные интегралы первого-второго рода

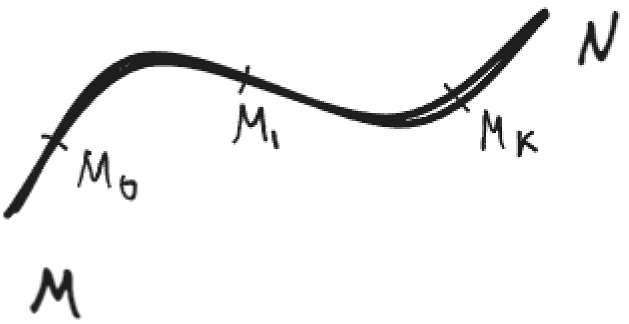
🚨🚨 *В материале могут быть опечатки и ошибки* 🚨🚨

Новоженов Павел
ЭН-26

Криволинейные интегралы первого второго рода являются обобщением определенного интеграла от функции одной переменной определенной на отрезке $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пусть нам задана в пространстве кривая Γ.



$$Пусть\ M \in \Gamma, f(M) - определена\ на\ \Gamma$$

Разобьем линию на участки:

$$M = M_o, M_1, M_k, M_n = N$$

$$\Delta S_k = |M_k M_{k+1}|, \quad P_k \in |M_k, M_{k+1}|$$

$$\sigma_n = \sum f(P_k)\Delta S_k$$

$Опр.$ Предел интегральной суммы σ_n при $\lambda \to 0$ называется криволинейным интегралом от функции f по кривой Γ

$$\lim \sum f(P_k)\Delta S_k = \int_\Gamma f(P)ds,\ ds - дифференциал\ длинны\ дуги\ кривой$$

Интеграл существует если функция является непрерывной на кривой и сама кривая является непрерывной или кусочно непрерывной.

Кривая называется гладкой если её можно представить в таком виде и $\phi,\ \psi,\ \lambda$ непрерывны и не равны нулю одновременно, и все их производные не равны нулю одновременно.

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \phi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \lambda(t)\vec{k}$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода

Интеграл первого рода обладает всеми свойствами определенного интеграла:

1. $$\int [c_1 f(M) + c_2 g(M)]ds = c_1 \int f(M)ds + c_2 \int g(M)ds$$
2. $$\int_{\sum \Gamma_K} f(M)ds = \sum \int f(M)ds$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

> *"Вычисление интеграла зависит от способа задания кривой."*

Явное задание

$$\Gamma = y = y(x), a < x < b,\ ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

$$\int_\Gamma f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y(x)) * \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Параметрический вид

$$x = \phi(t), y = \psi(t), a < t < b, ds = \sqrt{(\phi'^2 + \psi'^2)}dt, dt > 0$$

$$\int_\Gamma f(x, y) = \int_a^b f(\phi, \psi) * \sqrt{(\phi'^2 + \psi'^2)}dt$$

Полярные координаты

$$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, ds = \sqrt{r^2 + r'^2}d\phi$$

Пространственный случай

$$x = \phi(t), y = \psi(t), z = \lambda(t), a < t < b$$

$$\int_\Gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\phi, \psi, \lambda)\sqrt{\phi^2, \psi^2, \lambda^2}dt$$

Физический смысл

Если Γ материальная кривая, а $\rho(M) - плотноть$, то масса:

$$m = \int_\Gamma \rho(M) ds, M(x, y, z)$$

А длинна дуги:

$$L = \int_\Gamma ds$$

Пример 1

$$\int_\Gamma xyds, \Gamma - \textit{верхняя часть окружности } x^2 + y^2 = 4$$

$$x = 2\cos(t), y = 2\sin(t), ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = 2dt$$

$$\int_\Gamma xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t 2\sin t 2dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) = -4$$

Криволинейный интеграл второго рода

Нужно переместить что-то под действием известной силы $\vec{F}(P)$. $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной кривой Γ в точке M_k. Найдем элементарную работу:

$$\Delta A_k = \vec{F}\vec{\tau} * \Delta S_k, \Delta S_k - \textit{длинна дуги}$$

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}\vec{\tau} * \Delta S_k) = \int_\Gamma (\vec{F}, \vec{\tau}) ds$$

Опр. Криволинейным интегралом второго рода от векторной функции $\vec{F}(M)$ по кривой Γ в направлении от точки M к точке N называется интеграл $int_\Gamma(\vec{F}, \vec{\tau})ds$.

Опр. Кривая называется положительно направленной, если направление кривой совпадает с увеличением параметра. Обратно отрицательно ориентированной.

При вычислении криволинейных интегралов второго рода важно учитывать направление кривой.

Опр. Криволинейным интегралом второго рода от векторной функции $\vec{F}$ по ориентированной кривой Γ называется криволинейный интеграл первого рода по кривой Γ от скалярного произведения $\vec{F}(M), \vec{\tau}(M)$.

$$\int_\Gamma (\vec{F}, \vec{\tau}) ds = \int_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_\Gamma [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода

Криволинейный интеграл второго рода обладает всеми свойствами криволинейного интеграла первого рода, но в отличие от интеграла первого рода, меняет знак при изменении ориентации кривой.

В общем случае криволинейный интеграл второго рода зависит от расположения начальных и конечных точек пути интегрирования и от формы пути. Для того чтобы интеграл не зависел от формы и пути интегрирования необходимо и достаточно чтобы криволинейный интеграл по любому контуру был равен нулю.

$$\oint(\vec{F}, d\vec{l}) = 0$$

Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по области и криволинейным интегралом второго рода по границе этой области.

$$\vec{F} = P(x,y) + Q(x,y)$$

$$\oint_{\Gamma+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Функции P и Q и их частные производные непрерывны в заданной области.

Доказательство

Докажем формулу Грина для правильной области.

Опр. Область называется **правильной в направлении** oy, если прямая проведённая через любую внутреннюю точку параллельно оси oy пересекает границу области в двух точках.

Опр. Область правильная в направлениях ox и oy называется **правильной**.

Любую неправильную область можно представить в виде суммы правильных, поэтому рассмотрим только случай правильной области.

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx$$

Найдем интегралы по контуру отдельно:

$$\int_a^b P(x, y_1(x))|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{DnC} Pdx = -\int_{CnD} Pdx$$

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int_{AmB} Pdx$$

$$\int_{BC} P(x,y)dx = \int_{AD} P(x,y)dx = 0$$

Сложим:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_{CnD} Pdx - \int_{AmB} Pdx - \int_{BC} P(x,y)dx - \int_{AD} P(x,y)$$

Получим:

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{\Gamma^+} Pdx$$

Аналогично:

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{\Gamma^+} Qdx$$

Сложив получим формулу Грина:

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy$$

Следствия из формулы Грина

Следствие 1: формулы площади

Из формулы Грина можно получить формулу для вычисления площади. Пусть $Q = 0$, а $P = y$. Тогда:

$$\iint_G dxdy = S_G = \oint P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Следствие 2: зависимость от формы пути

В общем случае криволинейный интеграл второго рода зависит от начальной и конечной точек интегрирования и пути интегрирования.

В односвязной области G условием независимости от формы пути является равенство:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \forall M \in G$$

Для областей общего вида условием независимости является равенство нулю циркуляции.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Пример 1

$$\Gamma : x = \phi(t), y = \psi(t), a < t < b$$

$$\int_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(\phi(t), \psi(t)) * \phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t)) * \psi'(t)]dt$$

Пример 2

$$\Gamma : x = \phi(t), y = \psi(t), z = \lambda(t) a < t < b$$

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z) = \ldots$$

$$\ldots = \int_a^b [P(\phi(t), \psi(t), \lambda(t)) * \phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t)\lambda(t)) * \psi'(t) + R(\phi(t), \psi(t), \lambda(t))\lambda'(t)]$$