ГЛАВА 2

Общие соотношения электромагнитного поля.

1. Закон сохранения электрического заряда.

Пусть в объеме *V* электрический заряд распределен с плотностью ρ. Тогда величина заряда *q* в объеме *V* будет определяться следующим интегралом.

$$q = \int_V \rho(\vec{r})\, dV \tag{2.1}$$

Если через поверхность *S*, охватывающую объем *V* существует поток зарядов с плотностью тока $\vec{j}$, то электрический ток *I*, вытекающий из объема *V* через поверхность *S* будет определяться следующим интегралом.

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j_n dS \tag{2.2}$$

Благодаря току *I*, вытекающему из объема *V* электрический заряд в объеме будет уменьшаться. Если выполняется закон сохранения электрического заряда, то математическим выражением этого закона является следующие уравнение.

$$I = -\frac{dq}{dt} \tag{2.3}$$

Подставим формулы (2.1) и (2.2) в уравнение (2.3). В результате получим следующее уравнение.

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV \tag{2.4}$$

Первый интеграл в (2.4) преобразуем в объемный интеграл с помощью теоремы Гаусса-Остроградского. Во втором интеграле операцию дифференцирования по времени внесем под знак интеграла, т.к. операции дифференцирования по времени и интегрирования по координатам являются независимыми операциями. В результате получим следующее уравнение.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{2.5}$$

Переносим второй интеграл в (2.5) налево и объединяем оба интеграла в один интеграл. В результате получаем следующее выражение.

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \tag{2.6}$$

Поскольку в уравнении (2.6) объем интегрирования является произвольным объемом, то это означает, что подынтегральное выражение равно нулю. Отсюда получаем уравнение.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \tag{2.7}$$

Это уравнение называется уравнение непрерывности электрического тока. В основе этого уравнения лежит закон сохранения электрического заряда.

Уравнение непрерывности (2.7) можно получить непосредственно из системы уравнении Максвелла (1.73). Для этого возьмем производную по времени от обеих сторон первого уравнения системы (1.73). Далее найдем дивергенцию от обеих сторон четвертого уравнения системы (1.73). В результате получим следующую систему двух уравнений.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \operatorname{div} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{2.8}$$

Так как для любого векторного поля дивергенция ротора равна нулю (1.45), то левая сторона второго уравнения (2.8) будет равняться нулю. Далее умножаем первое уравнение (2.8) на электрическую постоянную ε_0. Второе уравнение делим на магнитную постоянную μ_0. После этого складываем полученные уравнения и в результате получаем уравнение непрерывности (2.7).

2. Работа электрического поля.

Пусть на движущийся заряд q действует электрическое поле $\vec{E}$ с силой $\vec{F}$.

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.9}$$

Пусть скорость заряда равна $\vec{\mathrm{v}}$, тогда за время Δt перемещение заряда будет равно.

$$\Delta\vec{r} = \vec{\mathrm{v}}\Delta \mathrm{t} \tag{2.10}$$

Тогда работа силы $\vec{F}$ будет определяться следующим выражением.

$$\Delta A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = q\vec{E}\cdot\vec{\mathrm{v}}\Delta \mathrm{t} \tag{2.11}$$

Работа в единицу времени, или мощность будет определяться формулой.

$$P = q\vec{E}\cdot\vec{\mathrm{v}} \tag{2.12}$$

Движения зарядов приводит к появлению электрического тока. Формула, связывающая плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$ имеет следующий вид.

$$\vec{j} = \rho\vec{\mathrm{v}} \tag{2.13}$$

Найдем мощность, выделяемую при совершении работы электрического поля над зарядом Δq находящимся в элементе объема ΔV.

$$\Delta q = \rho\Delta V \tag{2.14}$$

Используя формулы (2.12), (2.13) и (2.14) получим мощность, выделяемую в объеме ΔV .

$$\Delta P = \vec{E} \cdot \vec{j}\,\Delta V \tag{2.15}$$

В формуле (2.15) поделим левую и правую стороны на элемент объема, в результате полущим следующее выражение.

$$\frac{\Delta P}{\Delta V} = \vec{E} \cdot \vec{j} \tag{2.16}$$

Полученное выражение (2.16) определяет $\Delta P / \Delta V$ - работу, совершаемую электрическим полем над зарядами в единицу времени в единице объема.

3. <u>Работа магнитного поля</u>.

Магнитное $\vec{B}$ поле действует на движущийся заряд q с силой Лоренца.

$$\vec{F}_{Л} = q\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}\right) \tag{2.17}$$

Работа, совершаемая силой Лоренца над движущимся зарядом, за время Δt будет равна.

$$\Delta A = \vec{F}_{Л} \cdot \vec{\mathrm{v}}\Delta \mathrm{t} \tag{2.18}$$

Подставляем силу Лоренца из (2.17) в выражение для работы (2.18) и получаем следующее выражение.

$$\Delta A = q\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{\mathrm{v}}\Delta \mathrm{t} = q\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{v}}\right) \cdot \vec{B}\Delta \mathrm{t} = 0 \tag{2.19}$$

В выражении (2.19) было использовано свойство циклической перестановки в смешенном произведении векторов.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \tag{2.20}$$

Кроме того, в (2.19) было использовано известное свойство векторного произведения векторов. Векторное произведение любого вектора самого на себя рано нулю.

Таким образом, магнитное поле работу над электрическими зарядами не совершает. Причина заключается в том, что сила Лоренца перпендикулярна к скорости заряда, а значит и к перемещению заряда.

$$\vec{F}_Л \perp \vec{v}, \qquad \vec{F}_Л \perp \Delta\vec{r}$$

Поэтому работа силы Лоренца над электрическими зарядами равна нулю. Другими словами магнитное поле непосредственно при действии на заряды работы не совершает.

Однако если имеется переменное магнитное поле, то оно является источником вихревого электрического поля, второе уравнение Максвелла в системе (1.73). Появившееся электрическое поле уже может совершать работу над движущимися зарядами.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \to \vec{E} \to A \neq 0$$

Таким образом, переменное магнитное поле, через созданное им электрическое поле, может совершать работу над движущимися зарядами.

4. <u>Уравнение баланса энергии электромагнитного поля</u>.

Возьмем систему уравнений Максвелла (1.73) и умножим скалярно второе уравнение на вектор магнитной индукции $\vec{B}$, а четвертое уравнение на вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{B}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{E}\cdot\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{2.21}$$

Далее в системе (2.21) вычтем второе уравнение из четвертого уравнения. В результате получим следующее выражение.

$$\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} = \mu\;\;\vec{E}\cdot\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{2.22}$$

Чтобы вычислить выражение в левой стороне уравнения (2.22) вычислим сначала следующее выражение.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) &= \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \nabla_E\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \nabla_B\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \\ &= \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Сравнивая формулу (2.23) с левой стороной уравнения (2.22), видим, что в левой стороне уравнения (2.22) стоит дивергенция от векторного произведения векторов электрического и магнитного поля.

Разберемся с правой стороной уравнения (2.22). Найдем производную от квадрата напряженности электрического поля.

$$\frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E}) = 2\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{2.24}$$

Теперь, используя выражения (2.23) и (2.24) запишем уравнение (2.22) в следующем виде.

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) = \vec{E}\cdot\vec{j} + \operatorname{div}\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) \tag{2.25}$$

Введем следующие обозначения.

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \tag{2.26}$$

Здесь w – плотность энергии электромагнитного поля. Плотность энергии имеет размерность Дж/м^3. Если известна плотность w распределения энергии электромагнитного поля в некотором объеме V, то энергия электромагнитного поля W в этом объеме находится путем интегрирования по объему.

$$W = \int_V w(\vec{r})\, dV \tag{2.27}$$

Сделаем следующее обозначение.

$$\vec{S}_P = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}) \tag{2.28}$$

Вектор $\vec{S}_P$ имеет размерность Дж/м^2/с, и называется вектором Пойнтинга. Физический смысл вектора Пойнтинга состоит в том, что это есть вектор плотности потока энергии. Другими словами, вектор Пойнтинга показывает какая энергия переноситься через единицу поверхности в единицу времени.

Подставляем выражения (2.27) и (2.28) в уравнение (2.25). В результате получаем следующее уравнение.

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \vec{j} + \operatorname{div} \vec{S}_P \tag{2.29}$$

Уравнение (2.29) называется уравнением баланса энергии электромагнитного поля.

Проинтегрируем уравнение (2.29) по объему V. При этом учтем выражение (2.26) для энергии электромагнитного поля W в объеме V. Кроме того, применим теорему Гаусса-Остроградского к третьему члену уравнения (2.29). В результате уравнение баланса энергии электромагнитного поля будет иметь следующий вид.

$$-\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j}\, dV + \oint_S \vec{S}_P \cdot d\vec{S} \qquad (2.30)$$

Уравнение (2.30) имеет следующий физический смысл. Производная по времени в левой стороне уравнения, обозначает уменьшение энергии электромагнитного поля *W* в объеме *V* в единицу времени. Справа в уравнении стоят два члена, которые описывают процессы, за счет которых уменьшается энергия электромагнитного поля.

Во-первых, часть энергии идет на работу электрического поля над движущимися зарядами в объеме *V*. Мощность *P*, выделяемая при этом в объеме *V* будет равна.

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j}\, dV \qquad (2.31)$$

Во-вторых, часть энергии уносится через поверхность *S*, окружающую этот объем в виде электромагнитного излучения. Поток энергии Φ_W через эту поверхность будет равен.

$$\Phi_W = \oint_S \vec{S}_P \cdot d\vec{S} \qquad (2.32)$$

Теперь с учетом выражений (2.30), (2.31) и (2.32) уравнение баланса энергии электромагнитного поля можно записать в следующем виде.

$$-\frac{dW}{dt} = P + \Phi_W \qquad (2.33)$$

Уравнения (2.29) и (2.33) можно рассматривать как математические выражения закона сохранения энергии электромагнитного поля.

5. Уравнения Максвелла в декартовых координатах.

Посмотрим на систему уравнений Максвелла (1.73). Если заданы заряды и токи, то система уравнений Максвелла – это система дифференциальных уравнений в частных производных для нахождения электрического и магнитного полей.

Учитывая, что напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ и магнитная индукция $\vec{B}(\vec{r},t)$ – это векторные поля, то имеется шесть неизвестных функций.

$$\left\{E_x(\vec{r},t),\, E_y(\vec{r},t),\, E_z(\vec{r},t),\, B_x(\vec{r},t),\, B_y(\vec{r},t),\, B_z(\vec{r},t)\right\}. \tag{2.34}$$

Посмотрим сколько в системе (1.73) имеется дифференциальных уравнений.

Рассмотрим первое уравнение в системе (1.73).

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.35}$$

В декартовых координатах это уравнение имеет следующий вид.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.36}$$

Рассмотрим второе уравнение в системе (1.73).

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.37}$$

Это дифференциальное уравнение является векторным уравнением. Поэтому его надо записать в проекциях на оси декартовых координат. В результате такого проектирования получим систему трех уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \tag{2.38}$$

Рассмотрим третье уравнение в системе (1.73).

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{2.39}$$

В декартовых координатах это уравнение имеет следующий вид.

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{2.40}$$

Наконец рассмотрим последнее, четвертое уравнение в системе (1.73).

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.41}$$

Это дифференциальное векторное уравнением записываем в проекциях на оси декартовых координат. В результате получаем систему трех уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \, j_x + \mu_0 \, \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \, j_y + \mu_0 \, \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \, j_z + \mu_0 \, \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \tag{2.42}$$

Таким образом, система уравнений Максвелла (1.73) после записывания ее в декартовых координатах превратилась в систему восьми дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=-\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial x}+\dfrac{\partial B_y}{\partial y}+\dfrac{\partial B_z}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial y}-\dfrac{\partial B_y}{\partial z}=\mu_0 j_x+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z}-\dfrac{\partial B_z}{\partial x}=\mu_0 j_y+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x}-\dfrac{\partial B_x}{\partial y}=\mu_0 j_z+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \qquad (2.43)$$

Следовательно, имеется 8 дифференциальных уравнений (2.43) для нахождения 6-ти неизвестных функций (2.34). Уравнений оказалось больше, чем неизвестных функций. Это означает, что между уравнениями существует связь, и при определенных математических преобразованиях число уравнений можно уменьшить.

Для этой цели вводят электромагнитные потенциалы.

6. Скалярный и векторный электромагнитные потенциалы.

Вместо векторов электрического и магнитно поля $\left\{\vec{E}(\vec{r},t),\, \vec{B}(\vec{r},t)\right\}$, вводят вспомогательные поля $\left\{\vec{A}(\vec{r},t),\, \varphi(\vec{r},t)\right\}$. Векторное поле $\vec{A}(\vec{r},t)$ называется векторным потенциалом, а скалярное поле $\varphi(\vec{r},t)$ скалярным потенциалом. Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ и вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$, выражаются через векторный потенциал $\vec{A}$ и скалярный потенциал φ следующим образом.

$$\begin{cases} \vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A} \end{cases} \qquad (2.44)$$

Это преобразование позволяет уменьшить число уравнений в системе уравнений Максвелла. Запишем еще раз систему уравнений Максвелла.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{2.45}$$

Подставим преобразование (2.44) во второе уравнение системы (2.45). В результате придем к следующему соотношению.

$$\operatorname{rot}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} \tag{2.46}$$

Раскроем скобки в уравнении (2.46).

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} \tag{2.47}$$

Известно, что ротор градиента любого скалярного поля всегда равен нулю (1.42). Поэтому уравнение (2.47) превращается в тождество 0 = 0.

Таким образом, подстановка (2.44) второе уравнение системы (2.45) превращает в тождество. Другими словами это уравнение выполняется автоматически, и его не нужно рассматривать дальше.

Подставим преобразование (2.44) в третье уравнение системы (2.45). В результате придем к следующему соотношению.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0 \tag{2.48}$$

Так для любого векторного поля дивергенция ротора равна нулю (1.45), уравнение (2.48) превращается в тождество 0 = 0.

Поэтому, и третье уравнение автоматически выполняется подстановкой (2.44), и его не нужно рассматривать дальше.

Таким образом, подстановка (2.44) позволила убрать из системы уравнений Максвелла (2.45) второе и третье уравнения. В оставшиеся два уравнения подставим (2.44) . В результате получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi - \dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \mu_0\,\vec{j} - \dfrac{1}{c^2}\operatorname{grad}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{2.49}$$

Здесь учтена связь между диэлектрической проницаемостью вакуума ε_0 и магнитной проницаемостью вакуума μ_0.

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Вспомним, что выражение $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$ равно следующему выражению:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi\ , \tag{2.50}$$

где Δ оператор Лапласа.

Выражение $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$ раскрывается следующей формулой:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}\ . \tag{2.51}$$

С учетом соотношений (2.50), (2.51) система уравнений (2.49) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\,\vec{j} \end{cases} . \tag{2.52}$$

В системе (2.52) имеется одно скалярное уравнение и одно векторное уравнение. Поэтому система (2.52) является системой 4-х дифференциальных уравнений. Для четырех неизвестных функций.

$$\{A_x(\vec{r},t),\ A_y(\vec{r},t),\ A_z(\vec{r},t),\ \varphi(\vec{r},t)\ \} \qquad (2.53\ )$$

7. Градиентная инвариантность электромагнитного поля.

Соотношения (2.44), связывающие поля $\vec{E}, \vec{B}$ и электромагнитные потенциалы $\varphi, \vec{A}$, допускают некоторый произвол в выборе потенциалов. Рассмотрим два набора электромагнитных потенциалов $\varphi_1, \vec{A}_1$ и $\varphi_2, \vec{A}_2$. Пусть эти потенциалы связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{cases} \vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \mathrm{grad}\ f, \\ \varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases} \qquad (2.54)$$

где f - произвольная функция координат и времени. Тогда, легко показать, что поля $\vec{E}, \vec{B}$ найденные с помощью потенциалов $\varphi_1, \vec{A}_1$ и поля найденные с помощью потенциалов $\varphi_2, \vec{A}_2$ полностью совпадают. Другими словами, изменение электромагнитных потенциалов $\varphi, \vec{A}$ по формулам (2.54) не приводит к изменению векторов $\vec{E}, \vec{B}$ электромагнитного поля. Такое поведение полей называется градиентной или калибровочной инвариантностью.

Эта неоднозначность в выборе электромагнитных потенциалов позволяет накладывать на потенциалы дополнительные условия. Такие дополнительные условия называются калибровками. Наиболее популярны две калибровки – калибровка Лоренца и калибровка Кулона. Калибровка Лоренца имеет следующий вид:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (2.55)$$

Если подставить условие (2.55) в систему (2.52), эта система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad (2.56)$$

Калибровка Кулона задается следующим условием:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0\ . \qquad (2.57)$$

Если подставить условие (2.57) в систему (2.52), эта система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c^2}\operatorname{grad}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\vec{j}\,. \\ \operatorname{div}\vec{A} = 0 \end{cases} \qquad (2.58)$$

Подведем итог. Основными уравнениями электродинамики являются уравнения Максвелла (2.45) для полей $\vec{E}, \vec{B}$. Поля $\vec{E}, \vec{B}$ являются физическими величинами, которые могут быть измерены на практике. Электромагнитные потенциалы $\varphi, \vec{A}$ являются вспомогательными математическими величинами, и не имеют прямого физического смысла. Это приводит к тому, что одну задачу электродинамики можно описывать разными уравнениями для потенциалов $\varphi, \vec{A}$, и соответственно разными значениями этих потенциалов. Однако если затем перейти от потенциалов $\varphi, \vec{A}$ к полям $\vec{E}, \vec{B}$, то результат будет однозначным.

Пусть решается некоторая задача электродинамики с помощью уравнений Максвелла (2.45). В результате решения находятся поля $\vec{E}, \vec{B}$. Туже самую задачу можно решить с помощью уравнений (2.56) (калибровка Лоренца), или с помощью уравнений (2.58) (калибровка Кулона) для потенциалов $\varphi, \vec{A}$. При этом в этих двух случаях получаются, вообще говоря, разные решения для потенциалов $\varphi, \vec{A}$. Однако, если перейти от потенциалов $\varphi, \vec{A}$ к полям $\vec{E}, \vec{B}$, то результат будет одинаковым.

Таким образом, не важно, какой калибровкой пользоваться для решения задачи, конечный результат будет один и тот же. Все дело в удобстве решения. В одном случае удобней пользоваться калибровкой Лоренца, в другом случае калибровкой Кулона.

8. Векторные потенциалы Герца.

При рассмотрении излучения антенн и распространения электромагнитных волн вдоль направляющих поверхностей удобно использовать векторные потенциалы Герца.

Будем предполагать, что система источников электромагнитного поля электрически нейтральна, т.е. выполняется условие:

$$\int_V \rho \, dV = 0 \quad , \tag{2.59}$$

где V–объем занимаемый системой источников поля. Закон сохранения электрического заряда имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad (2.60)$$

Условие электрической нейтральности (2.59) и закон сохранения заряда (2.60) будут тождественно выполняться, если ввести вектор электрической поляризации $\vec{P}$ и вектор намагниченности $\vec{M}$ следующим образом.

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} \qquad (2.61)$$

Здесь векторы $\vec{P}, \vec{M}$ отличны от нуля в объеме занятом источниками электромагнитного поля и обращаются в ноль вне этого объема. Векторы $\vec{P}, \vec{M}$ определяются соотношениями (15) неоднозначно. Действительно замена

$$\vec{P} \to \vec{P} + \operatorname{rot} \vec{a}, \quad \vec{M} \to \vec{M} + grad\ f - \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}\ , \qquad (2.62)$$

где $\vec{a},\ f$ – произвольный вектор и скаляр, не изменяет физических величин $\rho, \vec{j}$ в соотношении (2.62). Неоднозначность можно устранить, если придать векторам $\vec{P}, \vec{M}$ определенный физический смысл. Будем считать, что $\vec{P}$ – электрический дипольный момент единицы объема, а $\vec{M}$ – магнитный дипольный момент единицы объема. Если обозначить через $d\vec{p}_e$ - электрический дипольный момент элемента объема dV, а черед $d\vec{p}_m$ - магнитный дипольный момент элемента объема dV, то имеют место следующие соотношения:

$$d\,\vec{p}_e = \vec{P}\ dV, \quad d\,\vec{p}_m = \vec{M}\ dV \qquad (2.63)$$

Электрический дипольный момент и магнитный дипольный момент системы источников будут равны соответствующим интегралам.

$$\vec{p}_e = \int\limits_V \vec{P}\, dV, \quad \vec{p}_m = \int\limits_V \vec{M}\, dV \tag{2.64}$$

С другой стороны, электрический дипольный момент и магнитный дипольный момент системы выражаются через заряды и токи системы следующим образом:

$$\vec{p}_e = \int\limits_V \rho \vec{r}\, dV, \quad \vec{p}_m = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\vec{r} \times \vec{j}\right) dV \tag{2.65}$$

Теперь соотношения (2.63), (2.64), (2.65) определяют вектор электрической поляризации и намагниченности однозначно.

Рассмотрим систему, которая характеризуется вектором электрической поляризации $\vec{P}$, а вектор намагниченности этой системы равен нулю $\vec{M} = 0$. В этом случае соотношения (2.61) примут вид:

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{2.66}$$

Далее удобно использовать уравнения (2.56) для электромагнитных потенциалов с калибровкой Лоренца. Подставим плотность заряда и плотность тока (2.66) в уравнения (2.56) и перепишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta \varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div} \vec{P}, \\ \Delta \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{2.67}$$

Чтобы выполнялась калибровка Лоренца, удобно ввести электрический векторный потенциал Герца $\vec{\Pi}^e$ с помощью соотношений:

$$\varphi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}^e, \quad \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \tag{2.68}$$

В этом случае калибровка Лоренца, третье уравнение системы (2.67), выполняется тождественно. Подстановка выражений (2.68) для скалярного и векторного потенциалов $\varphi, \vec{A}$ в первое и второе уравнение системы (2.67) , приводит к одному и тому же уравнению следующего вида:

$$\Delta\vec{\Pi}^e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P} \qquad (2.69)$$

Используя соотношения (2.44) и (2.68) получаем формулы, позволяющие находить электрическое и магнитное поле $\vec{E}, \vec{B}$ через электрический вектор Герца $\vec{\Pi}^e$.

$$\begin{cases} \vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}^e - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{\Pi}^e}{\partial t^2}, \\ \vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\operatorname{rot}\dfrac{\partial\vec{\Pi}^e}{\partial t} \end{cases} \qquad (2.70)$$

Теперь рассмотрим систему, которая характеризуется вектором намагниченности $\vec{M}$, а вектор электрической поляризации этой системы равен нулю $\vec{P} = 0$. В этом случае соотношения (2.61) примут вид:

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = \operatorname{rot}\vec{M} \qquad (2.71)$$

Другими словами рассматривается система, у которой плотность электрического заряда равна нулю, но плотность тока отлична от нуля. Например, замкнутый проводник, по которому течет ток. В этом случае закон сохранения заряда (2.60) выполняется, и принимает следующий вид:

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0 \qquad (2.72)$$

Далее удобно использовать уравнения (2.58) для электромагнитных потенциалов с калибровкой Кулона. Подставим плотность заряда и плотность тока (2.71) в уравнения (2.58) и перепишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c^2}\,\mathrm{grad}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\, rot\,\vec{M} \\ \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \end{cases} \qquad (2.73)$$

Для упрощения системы уравнений (2.73) вводят магнитный векторный потенциал Герца $\vec{\Pi}^m$ с помощью соотношений:

$$\varphi = 0, \quad \vec{A} = rot\,\vec{\Pi}^m \qquad (2.74)$$

В этом случае калибровка Кулона, третье уравнение системы (2.73), выполняется тождественно. Подстановка выражений (2.74) для скалярного и векторного потенциалов $\varphi, \vec{A}$ в первое и второе уравнение системы (2.73) , приводит к одному уравнению следующего вида:

$$\Delta\vec{\Pi}^m - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^m}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{M} \qquad (2.75)$$

Используя соотношения (2.44) и (2.75) получаем формулы, позволяющие находить электрическое и магнитное поле $\vec{E}, \vec{B}$ через магнитный вектор Герца $\vec{\Pi}^m$.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\mathrm{rot}\dfrac{\partial\vec{\Pi}^m}{\partial t}, \\ \vec{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{\Pi}^m \end{cases} \qquad (2.76)$$

Таким образом, электрический вектор и магнитный вектор Герца удовлетворяют уравнениям (2.69) и (2.75), которые имеют одинаковую структуру. Поэтому для решения этих уравнений могут применяться одинаковые методы решения. Более того, если рассматривается поле излучения вне источников, то векторы электрической поляризации и намагниченности равны нулю вне источников $\vec{P} = 0, \vec{M} = 0$. В этом случае уравнения (2.69) и (2.75) принимают вид волнового уравнения:

$$\Delta\vec{\Pi}^{e,m} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^{e,m}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.77}$$

Поэтому векторы Герца в уравнении (2.77) выглядят совершенно одинаково. Однако электрический $\vec{\Pi}^e$ и магнитный $\vec{\Pi}^m$ векторы Герца имеют разную геометрическую природу. Во-первых, источником для электрического вектора Герца $\vec{\Pi}^e$ служит вектор электрической поляризации $\vec{P}$ (2.69). Вектор электрической поляризации является полярным вектором, поэтому электрический вектор Герца тоже является полярным вектором. Источником для магнитного вектора Герца $\vec{\Pi}^m$ служит вектор намагниченности $\vec{M}$ (2.75). Вектор намагниченности является аксиальным вектором, поэтому магнитный вектор Герца тоже является аксиальным вектором.

Во-вторых, любое векторное поле $\vec{E}$ или $\vec{B}$ можно представить в виде суммы двух полей. Одно поле является потенциальным полем, а второе поле соленоидальным полем. Так, например электрическое поле в общем случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \\ &\operatorname{rot}\vec{E}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{E}_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.78}$$

В соотношениях (2.78) ротор первого поля $\vec{E}_1$ равен нулю. Поэтому это векторное поле $\vec{E}_1$ можно выразить через градиент скалярного поля ψ.

$$\vec{E}_1 = \operatorname{grad}\psi \tag{2.79}$$

Отсюда название – потенциальное поле. Далее, в формулах (2.78) дивергенция второго поля $\vec{E}_2$ равна нулю. Поэтому это векторное поле $\vec{E}_2$ можно выразить через ротор другого векторного поля $\vec{N}$.

$$\vec{E}_2 = \operatorname{rot}\vec{N} \tag{2.80}$$

В векторном анализе поле, у которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным полем. Поэтому второе поле $\vec{E}_2$ – это соленоидальное поле. Как правило, ротор соленоидального поля отличен от нуля, но бывают и исключения. Если одновременно дивергенция и ротор вектора $\vec{Q}$ равны нулю:

$$\operatorname{div}\vec{Q}=0, \quad \operatorname{rot}\vec{Q}=0 \quad , \tag{2.81}$$

то поле $\vec{Q}$ называют гармоническим полем. Будем считать, что ротор поля $\vec{E}_2$ отличен от нуля:

$$\operatorname{rot}\vec{E}_2 \neq 0 \tag{2.82}$$

В этом случае поле называется $\vec{E}_2$ вихревым полем.

Таким образом, электромагнитное поле состоит, в общем случае, из потенциальных поле и вихревых полей. Из формул (2.76) видно, что магнитный векторный потенциал Герца определяет только вихревые поля, так как дивергенция всех векторов, характеризующих поле, точно равна нулю. Напротив, электрический векторный потенциал Герца (2.70) определяет, как потенциальные, так и вихревые поля.

Поэтому электрический вектор Герца и магнитный вектор Герца служат для определения электромагнитных полей разной структуры и разной природы.

9. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в веществе.

Чтобы описать электромагнитное поле в веществе надо сделать некоторые предположения об электромагнитной структуре вещества. В самом общем случае заряды и токи можно разделить на заряды и токи, принадлежащие веществу, т.е. связанные заряды и токи, и внешние заряды и токи, т.е.

сторонние заряды и токи. После такого разделения уравнения Максвелла примут вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{св} + \rho\right), \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_{св} + \vec{j}\right) + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{37}$$

Здесь $\rho_{св}$, $\vec{j}_{св}$ – плотность заряда и тока связанных зарядов, а ρ, $\vec{j}$ – внешних зарядов. Для связанных зарядов и внешних зарядов имеет место закон сохранения заряда:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho_{св}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_{св} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \end{gathered} \tag{38}$$

Будем предполагать, что вещество электрически нейтрально, т.е. выполняется условие:

$$\int\limits_{V} \rho_{св}\, dV = 0 \quad , \tag{39}$$

где V–объем занимаемый веществом. Условие электрической нейтральности (39) и закон сохранения заряда (38) будут тождественно выполняться, если ввести вектор электрической поляризации $\vec{P}$ и вектор намагниченности $\vec{M}$ аналогично формулам (15):

$$\rho_{св} = -\operatorname{div}\vec{P}, \quad \vec{j}_{св} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{M} \tag{40}$$

Здесь векторы $\vec{P}, \vec{M}$ отличны от нуля в объеме занятом веществом и обращаются в ноль вне этого объема. Также как и в формулах (15-19), будем считать, что $\vec{P}$ – электрический дипольный момент единицы объема, а $\vec{M}$ – магнитный дипольный момент единицы объема.

Физический смысл вектора электрической поляризации $\vec{P}$ состоит в том, что он описывает электрическую поляризацию вещества. Аналогично, физический смысл вектора намагниченности $\vec{M}$ состоит в том, что он описывает магнитную поляризацию вещества.

Часто вместо векторов $\vec{P}, \vec{M}$ бывает удобно ввести два других вектора $\vec{D}, \vec{H}$. Это вектор электрической индукции $\vec{D}$, и вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$. Связь между векторами поляризации $\vec{P}, \vec{M}$ и векторами $\vec{D}, \vec{H}$ имеет следующий вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{41}$$

После подстановки формул (40), (41) в систему уравнений Максвелла (37), эта система принимает вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{42}$$

В системе уравнений (42) присутствуют четыре неизвестных вектора $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$. Поэтому, чтобы система уравнений Максвелла (42) была полной, необходимо иметь дополнительные уравнения, связывающие эти векторы. Эти дополнительные уравнения называют материальными уравнениями.

Чтобы получить материальные уравнения нужно знать механизм поляризации вещества. Поскольку имеется огромное число веществ с разными типами поляризации, то существует множество механизмов поляризации. Однако во многих случаях эту задачу помогает решить введение двух физических характеристик вещества – диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ.

Материальные уравнения в этом случае могут быть представлены в следующем виде.

$$
\begin{aligned}
D_n(\vec{r},t) &= \varepsilon_0 \sum_{m=1}^{3} \int_0^{\infty} dt' \int_V dV' \hat{\varepsilon}_{nm}(\vec{r}\,',t') E_m(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') \\
B_n(\vec{r},t) &= \mu_0 \sum_{m=1}^{3} \int_0^{\infty} dt' \int_V dV' \hat{\mu}_{nm}(\vec{r}\,',t') H_m(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')
\end{aligned}
\qquad (43)
$$

Материальные уравнения (43) позволяют учесть большое число механизмов поляризации вещества. Эти механизмы отражены в структуре функций $\hat{\varepsilon}_{nm}(\vec{r},t), \hat{\mu}_{nm}(\vec{r},t)$, стоящих под интегралами (43).

Зависимость этих функций от координат позволяет рассматривать такое явление поляризации как пространственную дисперсию, что важно для электродинамики плазмы. Зависимость от времени позволяет учитывать частотную дисперсию при распространении электромагнитных волн разной частоты в диэлектрических средах. Наличие двух индексов у функций $\hat{\varepsilon}_{nm}, \hat{\mu}_{nm}$ отражает тензорный характер этих функций, и позволяет рассматривать электромагнитные поля в анизотропных средах.

Обычно материальные уравнения (43) используют следующим образом. Все поля раскладывают по плоским монохроматическим волнам.

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}(\vec{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_z\,\hat{\vec{E}}(\vec{k},\omega)\,\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right],\\
&\vec{D}(\vec{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_z\,\hat{\vec{D}}(\vec{k},\omega)\,\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right],\\
&\vec{B}(\vec{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_z\,\hat{\vec{B}}(\vec{k},\omega)\,\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right],\\
&\vec{H}(\vec{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,k_z\,\hat{\vec{H}}(\vec{k},\omega)\,\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right].
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Здесь ω - циклическая частота, $\vec{k}$ - волновой вектор. С точки зрения интегралов Фурье, соотношения (44) являются разложением сигналов в интегралы Фурье, т.е. разложением по временной переменной и по трем пространственным переменным. Поэтому комплексные векторные функции

$$\hat{\vec{E}}(\vec{k},\omega),\quad \hat{\vec{D}}(\vec{k},\omega),\quad \hat{\vec{B}}(\vec{k},\omega),\quad \hat{\vec{H}}(\vec{k},\omega)$$

являются Фурье - компонентами электромагнитных полей и находятся с помощью обратных преобразований Фурье.

$$
\begin{aligned}
&\hat{\vec{E}}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,z\,\vec{E}(\vec{r},t)\,\exp\left[-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right],\\
&\hat{\vec{D}}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,z\,\vec{D}(\vec{r},t)\,\exp\left[-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right],\\
&\hat{\vec{B}}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,z\,\vec{B}(\vec{r},t)\,\exp\left[-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right],\\
&\hat{\vec{H}}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\,z\,\vec{H}(\vec{r},t)\,\exp\left[-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right].
\end{aligned}
\tag{45}
$$

После подстановки разложений (44) в материальные уравнения (43), получаем соотношения для амплитуд плоских монохроматических волн:

$$\hat{D}_n(\vec{k},\omega) = \varepsilon_0 \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{nm}(\vec{k},\omega)\,\hat{E}_m(\vec{k},\omega),$$
$$\hat{B}_n(\vec{k},\omega) = \mu_0 \sum_{m=1}^{3} \mu_{nm}(\vec{k},\omega)\,\hat{H}_m(\vec{k},\omega)\,. \qquad (46)$$

Здесь $\varepsilon_{nm}(\vec{k},\omega), \mu_{nm}(\vec{k},\omega)$ - тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, определяются следующими интегральными соотношениями:

$$\varepsilon_{nm}(\vec{k},\omega) = \int_0^{+\infty} d\,t \int_{-\infty}^{+\infty} d\,x \int_{-\infty}^{+\infty} d\,y \int_{-\infty}^{+\infty} d\,z\,\hat{\varepsilon}_{nm}(\vec{r},t)\,\exp\left[-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right],$$
$$\mu_{nm}(\vec{k},\omega) = \int_0^{+\infty} d\,t \int_{-\infty}^{+\infty} d\,x \int_{-\infty}^{+\infty} d\,y \int_{-\infty}^{+\infty} d\,z\,\mu_{nm}(\vec{r},t)\,\exp\left[-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)\right]. \qquad (47)$$

Если среда изотропная и не учитывается пространственная дисперсия, то материальные уравнения (46) принимают следующий вид:

$$\hat{\hat{D}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\varepsilon(\omega)\,\hat{\hat{E}}(\vec{r},\omega),$$
$$\hat{\hat{B}}(\vec{r},\omega) = \mu_0\mu(\omega)\,\hat{\hat{H}}(\vec{r},\omega)\,. \qquad (48)$$

Здесь функции частоты $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ называют диэлектрической и магнитной проницаемостью вещества. Если при определенных условиях можно пренебречь зависимостью проницаемостей от частоты, то материальные уравнения (48) можно написать не только для Фурье компонент, но и для полей:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\varepsilon\,\vec{E}(\vec{r},t),$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0\mu\,\vec{H}(\vec{r},t)\,. \qquad (49)$$

В частности, если рассматривается электростатика или магнитостатика, то материальные уравнения (49) принимают вид:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\varepsilon\,\vec{E}(\vec{r}),$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\mu\,\vec{H}(\vec{r})\,. \qquad (50)$$

Таким образом, электромагнитное поле в веществе описывается системой уравнений Максвелла (42) с учетом соответствующих материальных уравнений. Материальные уравнения могут иметь разный вид, как это видно из формул (43), (46), (48), (49) и (50).

10. Электромагнитные потенциалы поля в веществе.

В системе уравнений Максвелла (42) для электромагнитного поля в веществе электрическое и магнитное поле $\vec{E}, \vec{B}$ выразим через электромагнитные потенциалы $\varphi, \vec{A}$ с помощью соотношений (2). В этом случае второе и третье уравнения в системе уравнений Максвелла (42) будут удовлетворяться тождественно. Останутся два уравнения:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{51}$$

Уравнения (51) невозможно записать через электромагнитные потенциалы $\varphi, \vec{A}$, потому что в этих уравнения не присутствуют напряженность электрического поля $\vec{E}$ и магнитная индукция $\vec{B}$. В системе уравнений (51) присутствуют вектор электрической индукции $\vec{D}$ и вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$, которые можно связать с векторами $\vec{E}, \vec{B}$ с помощью материальных уравнений.

В общем случае эта связь довольно сложная. Для иллюстрации ограничимся одним важным случаем. Будем считать, что вещество изотропное и можно пренебречь пространственной дисперсией. В этом случае поляризационные свойства вещества можно описать с помощью диэлектрической и магнитной проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ (48).

Будем предполагать, что все поля со временем меняются по гармоническому закону:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \\ \vec{D}(\vec{r},t) = \vec{D}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \\ \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \\ \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \\ \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \\ \varphi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\; . \end{cases} \tag{52}$$

В этом случае уравнения (51) примут вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} - i\omega \vec{D}\, . \end{cases} \tag{53}$$

Векторы $\vec{D}, \vec{H}$ и векторы $\vec{E}, \vec{B}$ связаны друг с другом следующими материальными уравнениями:

$$\begin{gathered} \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega)\, \vec{E}(\vec{r}), \\ \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \mu(\omega)\, \vec{H}(\vec{r})\, . \end{gathered} \tag{54}$$

Соотношения (2) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi + i\omega \vec{A}, \\ \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \end{cases} \tag{55}$$

Подставляя (54), (55) в систему (53), получаем систему уравнений для электромагнитных потенциалов $\varphi, \vec{A}$:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - i\omega \operatorname{div} \vec{A} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho, \\ \Delta \vec{A} + \dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{A} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} - i\dfrac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\varphi\right) = -\mu_0\,\mu\,\vec{j} \end{cases} \quad (56)$$

Систему уравнений (56) для потенциалов $\varphi, \vec{A}$ в веществе полезно сравнить с системой (7) для тех же потенциалов в вакууме.

Дальнейшее упрощение уравнений (56) будет связано с выбором калибровки. Если взять калибровку Лоренца (9) для гармонических полей, то она будет иметь вид:

$$\operatorname{div}\vec{A} - i\frac{\omega}{c^2}\varphi = 0 \quad (57)$$

Легко видеть, что калибровка Лоренца (57) не упрощает систему уравнений (56). Поэтому калибровку Лоренца изменим следующим образом:

$$\operatorname{div}\vec{A} - i\frac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\varphi = 0 \quad (58)$$

В вакууме диэлектрическая и магнитная проницаемости равны единице ε=1, μ=1, поэтому формула (58) переходит в формулу (57). Теперь подстановка калибровки Лоренца (58) в систему (56) упрощает последнюю. После преобразований система (56) принимает вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho, \\ \Delta\vec{A} + \dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{A} = -\mu_0\,\mu\,\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{A} - i\dfrac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\varphi = 0\,. \end{cases} \quad (59)$$

Эту систему полезно сравнить с системой (10) для поля в вакууме.

Теперь рассмотрим калибровку Кулона (11) $\operatorname{div}\vec{A}=0$. Примени ее без изменений к системе уравнений (56). Система уравнений (56) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho, \\ \Delta\vec{A}+\dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{A}+i\dfrac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\operatorname{grad}\varphi = -\mu_0\,\mu\,\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{A}=0\,. \end{cases} \qquad (60)$$

Эту систему полезно сравнить с системой (12) для поля в вакууме.

Таким образом, для описания гармонических полей в веществе имеем две системы уравнений, систему (59) с калибровкой Лоренца и систему (60) с калибровкой Кулона.

11. Векторные потенциалы Герца поля в веществе.

Потенциалы Герца удобно применять для описания излучения источников, которые можно характеризовать вектором электрической поляризации $\vec{P}$ или вектором намагниченности $\vec{M}$. Заметим, что для описания поляризации вещества тоже вводятся векторы $\vec{P},\vec{M}$, но те векторы имеют отношение к связанным зарядам. В данном же случае речь идет векторах $\vec{P},\vec{M}$, которые связаны с внешними по отношению к веществу зарядами, т.е. зарядами источников излучения. Будем предполагать, что источники излучения электрически нейтральны, т.е. выполняется условие (13):

$$\int\limits_V \rho\, dV = 0\ .$$

Закон сохранения заряда для внешних зарядов (38), для гармонических полей, будет иметь вид:

$$\operatorname{div} \vec{j} - i\omega\rho = 0 \tag{61}$$

Условие электрической нейтральности и закон сохранения заряда (61) будут тождественно выполняться, если ввести вектор электрической поляризации $\vec{P}$ и вектор намагниченности $\vec{M}$ следующим образом.

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j} = -i\omega\vec{P} + \operatorname{rot}\vec{M} \tag{62}$$

Здесь векторы $\vec{P}, \vec{M}$ отличны от нуля в объеме занятом источниками электромагнитного поля и обращаются в ноль вне этого объема.

Рассмотрим систему, которая характеризуется вектором электрической поляризации $\vec{P}$, а вектор намагниченности этой системы равен нулю $\vec{M} = 0$. В этом случае соотношения (62) примут вид:

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j} = -i\omega\vec{P} \tag{63}$$

Далее удобно использовать уравнения (59) для электромагнитных потенциалов с калибровкой Лоренца. Подставим плотность заряда и плотность тока (63) в уравнения (59) и перепишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\varphi = \dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\operatorname{div}\vec{P}, \\ \Delta\vec{A} + \dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{A} = i\omega\mu_0\mu\vec{P}, \\ \operatorname{div}\vec{A} - i\dfrac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\varphi = 0\,. \end{cases} \tag{64}$$

Чтобы выполнялась калибровка Лоренца, удобно ввести электрический векторный потенциал Герца $\vec{\Pi}^e$ с помощью соотношений:

$$\varphi = -\operatorname{div}\vec{\Pi}^e, \quad \vec{A} = -i\frac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\vec{\Pi}^e \tag{65}$$

В этом случае калибровка Лоренца, т.е. третье уравнение системы (64), выполняется тождественно. Подстановка выражений (65) для скалярного и векторного потенциалов $\varphi, \vec{A}$ в первое и второе уравнение системы (64) , приводит к одному и тому же уравнению следующего вида:

$$\Delta\vec{\Pi}^e + \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{\Pi}^e = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\vec{P} \tag{66}$$

Используя соотношения (55) и (65) получаем формулы, позволяющие находить электрическое и магнитное поле $\vec{E}, \vec{B}$ через электрический вектор Герца $\vec{\Pi}^e$.

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{grad div}\,\vec{\Pi}^e + \dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{\Pi}^e, \\ \vec{B} = -i\dfrac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\,\text{rot}\,\vec{\Pi}^e \end{cases} \tag{67}$$

Теперь рассмотрим систему, которая характеризуется вектором намагниченности $\vec{M}$, а вектор электрической поляризации этой системы равен нулю $\vec{P} = 0$. В этом случае соотношения (62) примут вид:

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = \text{rot}\,\vec{M} \tag{68}$$

Далее удобно использовать уравнения (60) для электромагнитных потенциалов с калибровкой Кулона. Подставим плотность заряда и плотность тока (68) в уравнения (60) и перепишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \Delta\vec{A} + \dfrac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{A} + i\dfrac{\omega\varepsilon\mu}{c^2}\,\text{grad}\,\varphi = -\mu_0\,\mu\,\text{rot}\,\vec{M}, \\ \text{div}\,\vec{A} = 0\,. \end{cases} \tag{69}$$

Для упрощения системы уравнений (69) вводят магнитный векторный потенциал Герца $\vec{\Pi}^m$ с помощью соотношений:

$$\varphi = 0, \quad \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{\Pi}^m \tag{70}$$

В этом случае калибровка Кулона, т.е. третье уравнение системы (27), выполняется тождественно. Подстановка выражений (70) для скалярного и векторного потенциалов $\varphi, \vec{A}$ в первое и второе уравнение системы (69) , приводит к одному уравнению следующего вида:

$$\Delta \vec{\Pi}^m + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} \vec{\Pi}^m = -\mu_0 \mu \, \vec{M} \tag{71}$$

Используя соотношения (55) и (70) получаем формулы, позволяющие находить электрическое и магнитное поле $\vec{E}, \vec{B}$ через магнитный вектор Герца $\vec{\Pi}^m$.

$$\begin{cases} \vec{E} = i\omega \operatorname{rot} \vec{\Pi}^m, \\ \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}^m \end{cases} \tag{72}$$

Контрольные вопросы.

1. Уравнение непрерывности электрического тока в дифференциальной форме.
2. Уравнение непрерывности электрического тока в интегральной форме.
3. Формулы для работы, совершаемой электрическим полем над электрическим током.
4. Мощность, выделяемая в единицы объема при протекании электрического тока.
5. Формулы для работы, совершаемой магнитным полем над электрическим током.
6. Уравнение баланса энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме.
7. Уравнение баланса энергии электромагнитного поля в интегральной форме.
8. Уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ в декартовых координатах.
9. Формула для потока электромагнитной энергии через заданную поверхность S.
10. Формула для вектора Пойнтинга, размерность вектора Пойнтинга.
11. Формула для плотности энергии электромагнитного поля, размерность плотности энергии электромагнитного поля.

12. Мощность, выделяемая в заданном объеме V при протекании электрического тока.
13. Формулы, определяющие связь между скалярным потенциалом, векторным потенциалом и векторами электрического поля, магнитного поля.
14. Система дифференциальных уравнений для скалярного потенциала и векторного потенциала.
15. Формулы для скалярного потенциала и векторного потенциала, отражающие свойство градиентной инвариантности электромагнитного поля.
16. Дифференциальное уравнение для электромагнитных потенциалов, определяющее калибровку Лоренца.
17. Дифференциальное уравнение для электромагнитных потенциалов, определяющее калибровку Кулона.
18. Система уравнений Максвелла для электромагнитных потенциалов, удовлетворяющих калибровке Лоренца.
19. Система уравнений Максвелла для электромагнитных потенциалов, удовлетворяющих калибровке Кулона.
20. Формулы, определяющие связь между электрическим диполем, магнитным диполем и вектором электрической поляризации и вектором намагниченности.
21. Формулы, определяющие связь между электромагнитными потенциалами и векторным электрическим потенциалом Герца.
22. Дифференциальное уравнение для векторного электрического потенциала Герца.
23. Формулы, определяющие связь между электрическим поле, магнитным полем и векторным электрическим потенциалом Герца.

24. Формулы, определяющие связь между электромагнитными потенциалами и векторным магнитным потенциалом Герца.
25. Дифференциальное уравнение для векторного магнитного потенциала Герца.
26. Формулы, определяющие связь между электрическим поле, магнитным полем и векторным магнитным потенциалом Герца.
27. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в веществе, выраженная через связанные заряды и токи.
28. Формулы, выражающие связь между связанными зарядами и токами, с одной стороны, и вектором электрической поляризации и вектором намагниченности, с другой стороны.
29. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в веществе, записанная для полей $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$. Указать размерность каждого поля.
30. Формулы связи между векторами электромагнитно поля в веществе для монохроматического излучения, для изотропного вещества, без учета пространственной дисперсии.