# Л2. Поверхностные интегралы I и II рода

🚨🚨 *В материале могут быть опечатки и ошибки* 🚨🚨

*Новоженов Павел*
*ЭН-26*

---

# Поверхности

*Опр.* **Поверхность** - образ замкнутой области $\overline{D}$ в результате её непрерывного отображения по некоторому закону.

## Способы задания

### Явное задание

$$z = z(x, y), \ (x, y) \in D$$

### Параметрическое задание

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), (u, v) \in D_{uv} \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

### Векторное задание

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

### Неявное задание

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

# Нормальный вектор

Мы предполагаем, что все поверхности являются гладкими - в каждой точке поверхности есть касательная плоскость.

Нормальный вектор можно представить как вектор перпендикулярный двум касательным векторам к плоскости.

Математически нормальный вектор может быть направлен в две стороны. Задание направления вектора называется ориентацией поверхности. С того момента, как мы задали направление нормали, у поверхности есть внешняя и внутренняя сторона.

В векторном задании нормальный вектор $\vec{n}$ определяется так:

$$\vec{N} = [\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}]$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|N|}$$

$$\vec{n} = \pm(-|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}|, -|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|, 1)$$

Нормаль можно определить и используя градиент:

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

$$\vec{n} = \frac{grad\Phi}{|grad\Phi|}$$

# Интеграл по поверхности I рода

Пусть задана некоторая поверхность $S$. Разобьём поверхность на $n$ частей.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k$$

Пусть $f(M) = f(x, y)$:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(M)\Delta S_k,\ \Delta S_k - \textit{площадь части поверхности}$$

*Опр.* Предел интегральной суммы $\sigma_n$ при $\lambda \to 0$ называется поверхностным интегралом I рода от функции $f(M)$ по поверхности $S$

## Свойства

Обладает всеми свойствами определенного интеграла: линейность, аддитивность.

## Физический смысл

Можно использовать для нахождения площади, заряда, массы, момента инерции плоских фигур.

## Вычисление

Способ вычисления зависит от способа задания поверхности.

## Явное задание

$$S: z = z(x,y),\ (x,y) \in D, D - \textit{проекция } S \textit{ на } xOy$$

$$ds = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy$$

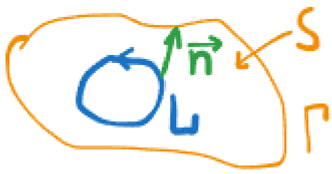
$$\iint_S f(M) ds = \iint_D f(M) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy$$

## Параметрическое задание

$$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), (u,v) \in D_{uv} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$$ds = [r_u', r_v'] dudv$$

# Поверхностные интегралы II рода




Пусть задана гладкая поверхность $S$, ограниченная контуром $\Gamma$.

$$\vec{n}(M) - \textit{нормаль к поверхности}$$

$$\vec{n}(M) = \cos(\angle(\vec{n}, x))\vec{i} + \cos(\angle(\vec{n}, y))\vec{j} + \cos(\angle(\vec{n}, z))\vec{k}$$

$$\angle(\vec{n}, x) = \alpha;\ \angle(\vec{n}, y) = \beta;\ \angle(\vec{n}, z) = \gamma$$

*Опр.* Если нормаль при движении по любому контуру, не пересекающему границу, нормаль приходит в исходное положение, поверхность называется двусторонней.

Иначе поверхность называется односторонней. Мы будем изучать только односторонние поверхности.

Для двухсторонних поверхностей можно задать ориентацию - направление нормали. Ориентированную поверхность мы будем обозначать $S^*$, где $*\ \textit{может быть}\ +\ \textit{или}\ -$.

Пусть в каждой точке поверхности задан вектор $F(M)$.

*Опр.* Поверхностный интеграл первого рода от функции $f(M) = \vec{F}(M)\vec{n}(M)$ называется поверхностным интегралом второго рода от функции $\vec{F}(M)$ по ориентированной поверхности $S^*$.

$$\iint_{S^*} (\vec{F}, d\vec{S}) = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS$$

$$\iint_{S^*}[P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy] = \iint_{S}[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\,\mathrm{co}$$

## Свойства поверхностного интеграла второго рода

Обладает всеми свойствами поверхностного интеграла первого рода.

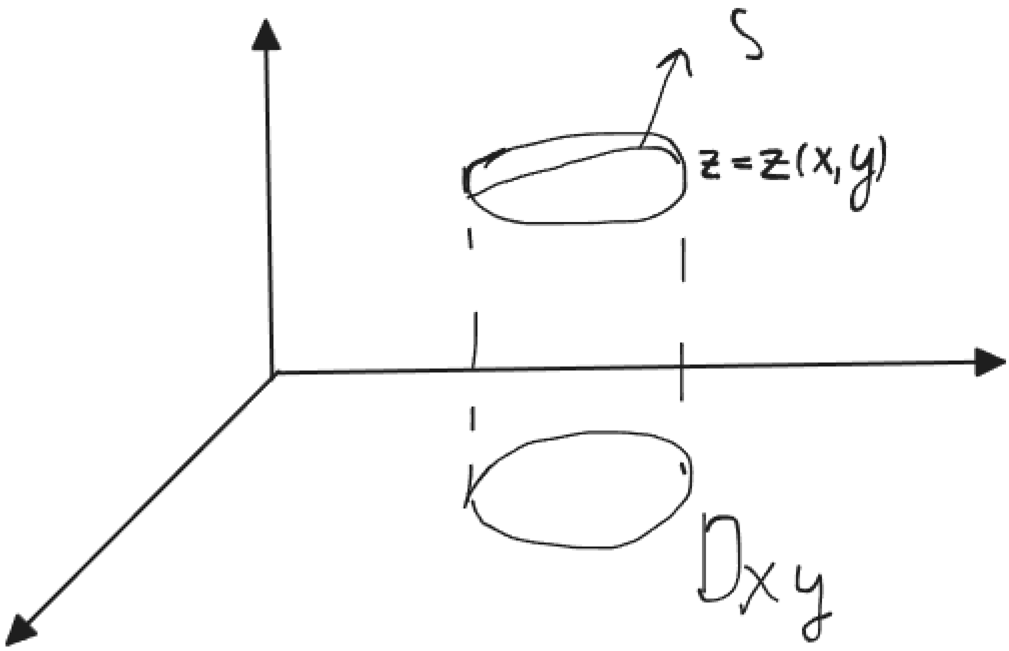
Но меняет знак при изменении ориентации.

## Способы вычисления поверхностного интеграла второго рода

### По определению

$$\iint_{S^*}(\vec{F},\vec{n})ds = \iint_{S}(\vec{F},\vec{n})ds$$

### По проекции на координатной плоскости




$$\iint_S R(x,y)dxdy = \begin{cases} \iint_{D_xy} R(x,y,z)dxdy, & \cos(\angle(\vec{n},z)) > 0 \\ -\iint_{D_xy} R(x,y,z)dxdy, & \cos(\angle(\vec{n},z)) < 0 \\ 0, & \cos(\angle(\vec{n},z)) > 0 \end{cases}$$

## Механический смысл

Поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\vec{F}(M)$ называется потоком векторного поля

# Пример 1

$$\int_S (z+1)dxdy$$

$S$ - внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\leq 0$.

Внешняя нормаль к сфере :

$$\vec{n}=\{\frac{x}{R};\frac{y}{R};\frac{z}{R}\}$$

$$\iint_S (z+1)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(\sqrt{R^2-x^2-y^2}+1)=-\iint_{D_{\rho\phi}}=\ldots$$

$$\ldots=-\iint(\sqrt{R^2-\rho^2}+1)\rho d\rho d\phi=\ldots$$

$$\ldots=-\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho d\phi+\pi r^2$$