ГЛАВА 1

Электромагнитное поле.

1. Определение электромагнитного поля.

С физической точки зрения, электромагнитное поле (electromagnetic field) есть совокупность двух физических величин - напряженности электрического поля $\vec{E}$ (electric field strength) и магнитной индукции $\vec{B}$ (magnetic induction). С математической точки зрения, электромагнитное поле – это совокупность двух векторных полей $\left\{\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)\right\}$, электрического и магнитного соответственно.

В каждый момент времени *t* в данной точке пространства $\vec{r}$ электромагнитное поле изображается двумя векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$. На Рис.1 в заданный момент времени *t* в некоторой точке пространства показаны векторы электромагнитного поля, а также линии этих полей.

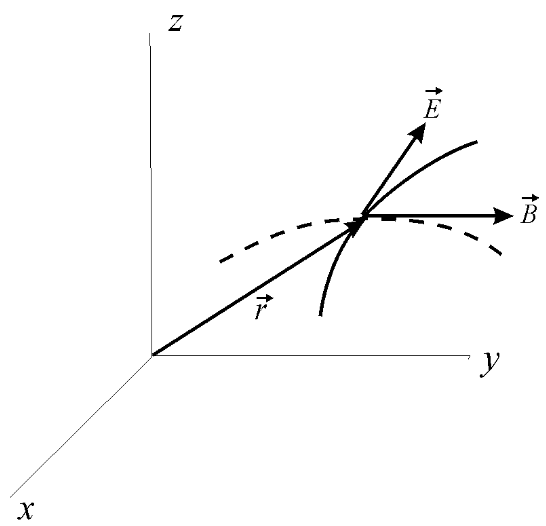

Рис. 1

Сплошная линия на рисунке – это линия электрического поля. Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ направлен по касательной к этой линии. Соответственно, штрихованная линия – это линия магнитного поля. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен по касательной к этой линии.

2. Источники электромагнитного поля.

Рассмотрим, каким образом можно создать электромагнитное поле, какие нужно предпринять действия, что бы в некоторой области пространства в заданный момент времени появилось электромагнитное поле. Другими словами выясним, что является источником электромагнитного поля. Можно выделить четыре источника электромагнитного поля.

1). Первый источник – это электрические заряды. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что если в некоторой области пространства находятся электрические заряды q, то вокруг зарядов существует электрическое поле $\vec{E}$, которое уменьшается при удалении от зарядов. Математическим выражением этого закона является следующее уравнение:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1.1}$$

Здесь ρ - плотность электрического заряда (charge density), а ε_0 – электрическая постоянная (electric constant). Если известна плотность ρ распределения заряда в некотором объеме V, то заряд q в этом объеме находится путем интегрирования по объему.

$$q = \int_V \rho(\vec{r})\,dV \tag{1.2}$$

Структура дифференциального уравнения (1.1) следующая. В правой части находится источник поля – плотность электрического заряда ρ. В левой части находится создаваемое поле – электрическое поле $\vec{E}$. Это векторное поле входит в выражение для дивергенции поля (divergence). Наличие дивергенции говорит об определенных свойствах векторного поля. Эти свойства векторного поля рассмотрим позже.

Заметим, что из уравнения (1.2), при некоторых условиях, можно получить закон Кулона (Шарль Огюст де Кулон 1785г.).

Таким образом, источником электрического поля являются электрические заряды.

2). Второй источник – это электрический ток. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что при протекании электрического тока I по проводникам, вокруг проводников возникает магнитное поле $\vec{B}$, которое убывает при удалении от проводников с током. Математическим выражением этого закона является следующее уравнение:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{j}$ - плотность электрического тока (current density), а μ_0 – магнитная постоянная (magnetic constant). Если известен вектор плотности электрического тока $\vec{j}$ на поверхности S, то электрический ток I, протекающий через эту поверхность находится путем интегрирования по этой поверхности.

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j_n dS \tag{1.4}$$

Здесь $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$, где $\vec{n}$ - единичный вектор к поверхности.

Структура дифференциального уравнения (1.3) следующая. В правой части находится источник поля – плотность электрического тока $\vec{j}$. В левой части находится создаваемое поле – магнитное поле $\vec{B}$. Это векторное поле входит в выражение для ротора поля (rotor). Наличие ротора говорит об определенных свойствах векторного поля, о вихревом характере поля. Эти свойства векторного поля будут рассмотрены позже.

Из уравнения (1.3), при соответствующих дополнительных условиях, можно получить закон Био-Савара – Лапласа (Жан Батист Био, Феликс Савара, Пьер Симон Лаплас 1820г.).

Таким образом, источником магнитного поля является электрический ток.

3). Третий источник – это переменное магнитное поле. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что если в некоторой области пространства существует переменное магнитное поле, то в этой области пространства появляется электрическое поле вихревого характера. Математическим выражением этого закона является следующее уравнение:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.5}$$

По сути дела, это есть закон электромагнитной индукции, записанный в виде дифференциального уравнения (Майкл Фарадей 1831г.).

Структура дифференциального уравнения (1.5) следующая. В правой части находится источник поля – производная магнитного поля $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$. В левой части находится создаваемое поле – электрическое поле $\vec{E}$. Это векторное поле входит в выражение для ротора поля, что говорит о вихревом характере электрического поля.

Таким образом, источником вихревого электрического поля является переменное магнитное поле.

4). Четвертый источник – это переменное электрическое поле. Теоретические исследования показали, что если в некоторой области пространства существует переменное электрическое поле, то в этой области пространства появляется магнитное поле вихревого характера. Это теоретическое предсказание было затем, подтверждено экспериментально, в виде наблюдения электромагнитных волн. Математическим выражением этого закона является следующее уравнение:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.6}$$

Здесь c – скорость света в вакууме. Этот закон был предсказан Джеймсом Клерком Максвеллом в 1864 году.

Структура дифференциального уравнения (1.6) следующая. В правой части находится источник поля – производная электрическое поля по времени $\partial \vec{E} / \partial t \neq 0$. В левой части находится создаваемое поле – электрическое поле $\vec{B}$. Это векторное поле входит в выражение для ротора поля, что говорит о вихревом характере магнитного поля.

Таким образом, источником вихревого магнитного поля является переменное электрическое поле.

Максвелл также объединил уравнения (1.3) и (1.6) в одно уравнение, которое имеет следующий вид.

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.7}$$

В правой стороне уравнения (1.7) находятся два источника вихревого магнитного поля - плотность электрического тока и производная электрического поля по времени. В левой стороне уравнения (1.7), под знаком ротора, находится суммарное магнитное поле, созданное двумя источниками.

3. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Рассмотренные выше уравнения (1.1), (1.5) и (1.7) являются основными уравнениями для описания электромагнитных явлений. Максвелл к этим уравнениям добавил еще одно уравнение.

Экспериментальные и теоретические исследования свойств магнитного поля показали, что вектор магнитной индукции $\vec{B}$ удовлетворяет теореме Гаусса (Карл Фридрих Гаусс 1831г.). Эта теорема может быть представлена в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{1.8}$$

Уравнения (1.1), (1.5), (1.7) и (1.8) в том виде, в котором они приведены выше, были получены Максвеллом в 1864 году. Максвелл объединил эти уравнения в систему, которую теперь называют системой уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.9}$$

Рассмотрим структуру уравнений Максвелла в системе (1.9). В левой части этих уравнений находятся дивергенции и роторы электрического и магнитного полей, а в правой части находятся источники соответствующих полей.

Наличие дивергенции (divergence) или ротора (rotor) говорит о разной природе векторного поля. Если ротор поля отличен от нуля, то такое поле вихревое (rotational field, vortex field), в противном случае это безвихревое поле (irrotational field). Вихревое поле имеет замкнутые линии поля, похожие на вихри. Если $\operatorname{rot}\vec{N} = \vec{M}$, то линии поля $\vec{N}$ образуют вихрь Рис.2, с направлением вращения по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора $\vec{M}$.

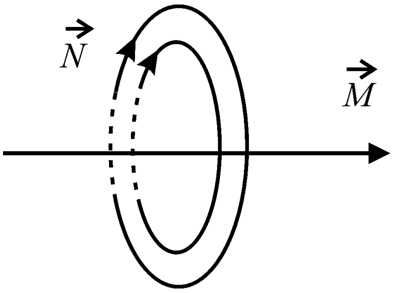

Рис. **2**

Если дивергенция поля равна нулю, то такое поле соленоидальное (solenoidal field), в противном случае несоленоидальное (non-solenoidal field). Линии несоленоидального поля $\vec{A}$ начинаются в истоках там где $\operatorname{div}\vec{A} > 0$, и кончаются в стоках там где $\operatorname{div}\vec{A} < 0$, как показано на Рис. 3

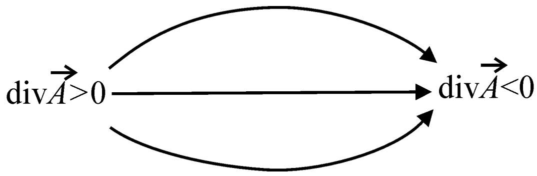

Рис. 3

Рассмотрим физический смысл каждого из уравнений Максвелла, входящих в систему (1.9).

Первое уравнение в системе уравнений Максвелла (1.9) означает, что источником несоленоидального электрического поля $\vec{E}$ является электрические заряды с плотностью ρ. Положительные электрические заряды являются истоками электрического поля, а отрицательные заряды являются стоками.

Второе уравнение в системе уравнений Максвелла (1.9) означает, что источником вихревого электрического поля $\vec{E}$ является переменное магнитное поле $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$. Это уравнение является математическим выражением закона электромагнитной индукции Фарадея.

Третье уравнение в системе уравнений Максвелла (1.9) означает, что магнитное поле $\vec{B}$ является соленоидальным полем. Поскольку в правой стороне этого уравнения стоит ноль, то у магнитного поля отсутствуют истоки и стоки. Другими словами отсутствуют положительные и отрицательные магнитные заряды. Если бы в природе существовали магнитные заряды, то в правой стороне третьего уравнения Максвелла стояла бы плотность магнитного заряда. В XX веке проводилось множество исследований по поиску магнитных зарядов. Однако все эти попытки оказались безуспешными. Поэтому третье уравнение Максвелла (1.9) можно также рассматривать как математическую формулировку экспериментального факта – в природе не существуют магнитные заряды.

Четвертое уравнение в системе уравнений Максвелла (1.9) означает, что источником вихревого магнитного поля $\vec{B}$ может служить как электрический ток с плотностью $\vec{j}$, так и переменное электрическое поле $\partial\vec{E}/\partial t \neq 0$. Так как второй член в правой стороне этого уравнения имеет размерность плотности электрического тока, то Максвелл назвал этот член плотностью тока смещения.

$$\vec{j}_{dis} = \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{1.10}$$

В уравнении (1.10) учтена связь между электрической постоянной ε_0 и магнитной постоянной μ_0. Эта связь имеет следующий вид:

$$\varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{1.11}$$

Таким образом, линии магнитного поля всегда замкнуты, а линии электрического поля могут быть как замкнутыми линиями, так и незамкнутыми. Если электрические поле создается электрическими зарядами, то линии поля незамкнуты, они начинаются и кончаются на электрических зарядах. Такие электрические поля существуют, например, в электростатике. Если же электрическое поле создается переменным магнитным полем, то линии электрического поля это замкнутые вихревые линии. Такого типа электрические поля присутствуют в электромагнитных волнах. Если рассматривать поле вблизи излучающей антенны, то здесь присутствуют электрические поля обоих типов.

4. Скалярные и векторные поля.

При изучении электромагнитного поля удобно использовать формулы и теоремы векторного анализа. Поэтому рассмотрим основные соотношения этого раздела математики.

Основными объектами векторного анализа являются скалярные и векторные поля. Скалярное поле (scalar field) это скалярная функция $f(x,y,z)$, аргументами которой являются координаты точки пространства. В каждой точке пространства $M(x,y,z)$ Рис.4 скалярное поле имеет некоторое значение, определяемое величиной функции $f(x,y,z)$. Если скалярное поле меняется со временем, то время t будет входить в скалярную функцию как параметр $f(\vec{r},t) = f(x,y,z,t)$.

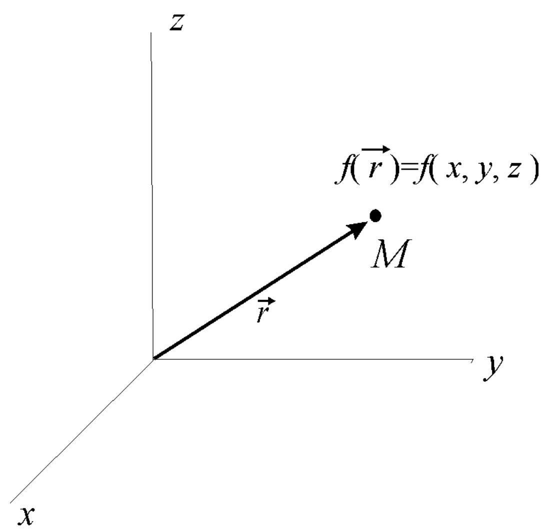

Рис. 4

Векторное поле (vector field) это векторная функция $\vec{A}(x, y, z)$, аргументами которой являются координаты точки пространства. В каждой точке пространства векторное поле характеризуется тремя скалярными функциями, проекциями на координатные оси $\vec{A}(\vec{r}) = \left(A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)\right)$. В каждой точке пространства $M(x,y,z)$ Рис.5 векторное поле изображается вектором, имеющим определенное направление и длину.

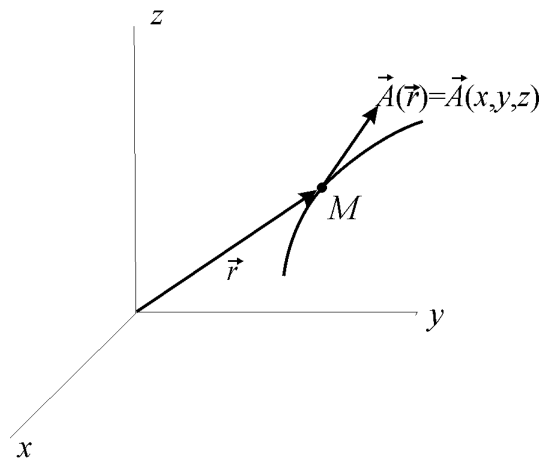

Рис. 5

Векторное поле удобно изображать с помощью линий этого поля (field line). Линии поля проводятся так, чтобы в каждой точке $M(x,y,z)$ вектор поля должен быть направлен по касательной к этой линии, смотри Рис.5. Линии поля удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)} \tag{1.12}$$

Решив систему (1.12) можно найти уравнение линии поля, проходящей через заданную точку пространства. Если векторное поле меняется со временем, то время t будет входить в векторную функцию как параметр $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$.

Векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ определяется тремя проекциями $A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})$. Значения этих проекций зависит от системы координат. В декартовой системе координат единичными ортами являются векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные вдоль осей *x*, *y*, *z*. Поэтому в декартовой системе координат векторное поле можно записать следующим образом:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \left(A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})\right) = \vec{i}\,A_x(\vec{r}) + \vec{j}\,A_y(\vec{r}) + \vec{k}\,A_z(\vec{r}) \qquad (1.13)$$

При решении задач электродинамики часто приходится использовать цилиндрическую и сферическую системы координат. На Рис.6 показаны элементы цилиндрической системы координат.

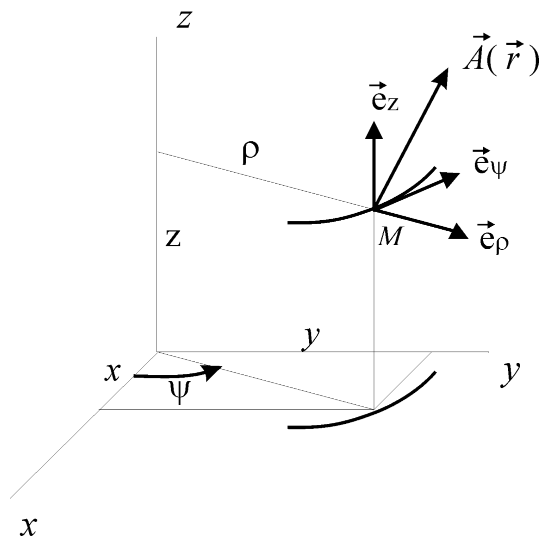

Рис. 6

Положение в пространстве точки *M* можно описать тремя величинами (x, y, z)- декартовыми координатами, или тремя величинами (ρ, ψ, z)- цилиндрическими координатами. Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки *M* определяется следующими формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\psi \\ y = \rho\sin\psi \\ z = z \end{cases} \qquad (1.14)$$

Из точки *M* Рис.6 выходят три взаимно перпендикулярные единичные векторы $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$ - орты цилиндрической системы координат. Спроектировав векторное поле $\vec{A}$ на орты цилиндрической системы координат, получим три проекции векторного поля $A_\rho(\vec{r}), A_\psi(\vec{r}), A_z(\vec{r})$. Теперь вместо разложения (1.13) по ортам декартовой системы координат, можно написать разложение векторного поля по ортам цилиндрической системы координат.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \left(A_\rho(\vec{r}), A_\psi(\vec{r}), A_z(\vec{r})\right) = \vec{e}_\rho A_\rho(\rho, \psi, z) + \vec{e}_\psi A_\psi(\rho, \psi, z) + \vec{e}_z A_z(\rho, \psi, z) \qquad (1.15)$$

Связь между проекциями векторного поля в декартовой системе координат и цилиндрической системе координат определяется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} A_\rho = \cos\psi\ A_x + \sin\psi\ A_y \\ A_\psi = -\sin\psi\ A_x + \cos\psi\ A_y \\ A_z = A_z \end{cases} \qquad (1.16)$$

Рассмотрим сферическую систему координат. На Рис.7 показаны элементы сферической системы координат. Положение в пространстве точки *M* теперь описывается тремя величинами (r, θ, ψ) – сферическими координатами. Связь между декартовыми и сферическими координатами точки *M* определяется следующими формулами:

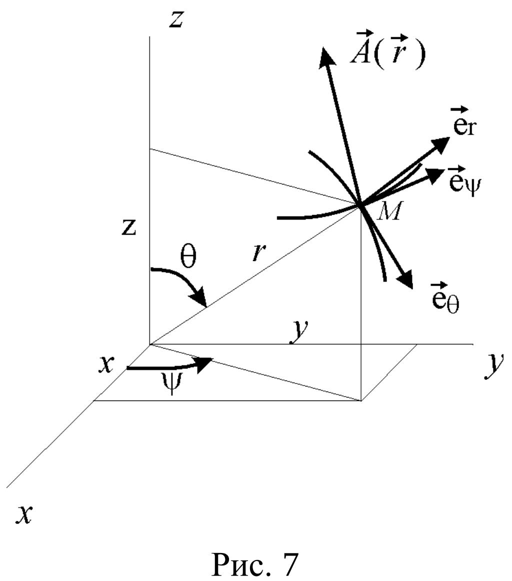

Рис. 7

Разложение векторного поля по ортам сферической системы координат будет иметь следующий вид:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \left(A_r(\vec{r}), A_\theta(\vec{r}), A_\psi(\vec{r})\right) = \vec{e}_r\, A_r(r,\theta,\psi) + \vec{e}_\theta\, A_\theta(r,\theta,\psi) + \vec{e}_\psi\, A_\psi(r,\theta,\psi) \qquad (1.17)$$

Связь между проекциями векторного поля в декартовой системе координат и сферической системе координат определяется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} A_r = \sin\theta\cos\psi\; A_x + \sin\theta\sin\psi\; A_y + \cos\theta\; A_z \\ A_r = \cos\theta\cos\psi\; A_x + \cos\theta\sin\psi\; A_y - \sin\theta\; A_z \\ A_\psi = -\sin\psi\; A_x + \cos\psi\; A_y \end{cases} \qquad (1.18)$$

5. Оператор набла, градиент, дивергенции и ротор.

При изучении уравнений Максвелла (1.9) удобно использовать векторный дифференциальный оператор набла ∇. В декартовых координатах этот оператор имеет следующий вид:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.19)$$

С помощью оператора набла из скалярного поля *f* можно получить векторное поле $\vec{A}$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r}) \qquad (1.20)$$

Выражение, стоящее в правой части уравнения (1.20) называют градиентом функции *f* (gradient). Подставляя выражение (1.19) в уравнение (1.20) получаем выражение для градиента в декартовых координатах.

$$\text{grad } f = \nabla f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.21}$$

Таким образом, что бы из скалярной функции получить градиент надо умножить оператор набла слева на функцию.

С помощью оператора набла можно из векторного поля $\vec{A}$ получить скалярное поле g. Для этого надо скалярно умножить оператор набла слева на вектор $\vec{A}$.

$$g(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) \tag{1.22}$$

Полученное выражение называют дивергенцией вектора $\vec{A}$. В декартовых координатах дивергенция имеет следующий вид:

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.22}$$

С помощью оператора набла можно из векторного поля $\vec{N}$ получить векторное поле $\vec{M}$. Для этого надо использовать векторное произведение оператора набла слева на вектор $\vec{N}$.

$$\vec{M}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{N}(\vec{r}) \tag{1.23}$$

Полученное выражение называют ротором вектора $\vec{N}$. В декартовых координатах ротор можно записать с помощью следующего определителя:

$$\text{rot } \vec{N} = \nabla \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \tag{1.24}$$

Определитель, стоящий в уравнении (1.24) надо раскрывать по первой строчки определителя. В результате получаем выражение, из которого можно найти проекции ротора на координатные оси.

$$\text{rot } \vec{N} = \vec{i}\left(\frac{\partial N_z}{\partial y} - \frac{\partial N_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial N_x}{\partial z} - \frac{\partial N_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial N_y}{\partial x} - \frac{\partial N_x}{\partial y}\right) \tag{1.25}$$

6. Использование оператора набла.

Использование оператора набла позволяет упростить нахождение градиента, дивергенции и ротора от сложных выражений. Покажем это на некоторых примерах. При использовании оператора набла надо помнить о следующих моментах:

Во-первых, оператор набла является дифференциальным оператором, поэтому он должен всегда располагаться слева от функции, на которую действует.

Во-вторых, к оператору набла применимы все правила дифференцирования.

В-третьих, оператор набла вектор, поэтому к нему применимы все свойства алгебры векторов.

Найдем градиент от произведения двух скалярных функций. Вычисления будем проводить по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f\,g) &= \nabla(f\,g) = \nabla_f(f\,g) + \nabla_g(f\,g) = \\ &= g(\nabla f) + f(\nabla g) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g \end{aligned} \qquad (1.26)$$

Здесь выражение ∇_f означает, что оператор набла действует на функцию f, а функция g в этом случае является постоянным множителем. В этом примере использовались свойства оператора набла как оператора дифференцирования.

Рассмотрим пример, в котором используются векторные свойства оператора набла. Найдем ротор от ротора векторной функции. Вычисления будем проводить по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} &= \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{A} = \\ &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} \end{aligned} \qquad (1.27)$$

Здесь использована формула векторной алгебры для двойного векторного произведения.

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (1.28)$$

Кроме того, скалярное произведение $\nabla \cdot \nabla$ дает оператор Лапласа Δ. Оператор Лапласа в декартовых координатах имеет следующий вид:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.29}$$

Операторы градиента, дивергенции, ротора и оператор Лапласа были даны в декартовой системе координат. Запишем эти операторы в цилиндрической и сферической системах координат.

В цилиндрической системе координат действия этих операторов определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} f = \nabla f = \vec{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \vec{e}_\psi \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \psi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\
&\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\psi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\psi\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \psi} \right) \\
&\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Отметим некоторые особенности при получении формул (1.30). Из первой формулы (1.30) видно, что в цилиндрической системе координат оператор набла имеет следующий вид:

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\psi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \psi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.31}$$

С другой стороны вектор $\vec{A}$ в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

$$\vec{A} = \vec{e}_\rho A_\rho + \vec{e}_\psi A_\psi + \vec{e}_z A_z \tag{1.32}$$

Попробуем получить вторую формулу (1.30) для дивергенции вектора $\vec{A}$. Как видно из этой формулы, дивергенция равна скалярному произведению оператора набла на вектор $\vec{A}$. Сначала выполним формально операцию скалярного произведения. Как известно, скалярное произведение двух векторов можно найти по следующей формуле:

$$\begin{aligned}&\vec{a}=\vec{e}_\rho\, a_\rho+\vec{e}_\psi\, a_\psi+\vec{e}_z\, a_z, \quad \vec{b}=\vec{e}_\rho\, b_\rho+\vec{e}_\psi\, b_\psi+\vec{e}_z\, b_z,\\ &\vec{a}\cdot\vec{b}=a_\rho b_\rho+a_\psi b_\psi+a_z b_z\end{aligned} \tag{1.33}$$

Получим дивергенцию вектора $\vec{A}$ с помощью формул (1.31), (1.32) и (1.33) . В результате придем к следующему выражению:

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial}{\partial\rho}A_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\psi}A_\psi+\frac{\partial}{\partial z}A_z=\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.34}$$

Полученное выражение (1.34) отличается от выражения для дивергенции в формулах (1.30). Ошибка возникла из-за того, что действие оператора набла на вектор $\vec{A}$ было выполнено некорректно. Дело в том, что оператор набла действует не только на проекции вектора A_ρ, A_ψ, A_z, но так же и на орты $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$ цилиндрической системы координат. Корректное вычисление должно проводиться по следующей схеме:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\left(\vec{e}_\rho\, A_\rho+\vec{e}_\psi\, A_\psi+\vec{e}_z\, A_z\right)=\\ &=\left(\nabla\cdot\vec{e}_\rho\right)A_\rho+\vec{e}_\rho\cdot\left(\nabla A_\rho\right)+\left(\nabla\cdot\vec{e}_\psi\right)A_\psi+\vec{e}_\psi\cdot\left(\nabla A_\psi\right)+\left(\nabla\cdot\vec{e}_z\right)A_z+\vec{e}_z\cdot\left(\nabla A_z\right)\end{aligned} \tag{1.35}$$

Вычислим отдельные члены формулы (1.35). Для этого найдем производные от орт цилиндрической системы координат $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$ по цилиндрическим координатам.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho}=0, \quad \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\psi}=\vec{e}_\psi, \quad \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\vec{e}_\psi}{\partial\rho}=0, \quad \frac{\partial\vec{e}_\psi}{\partial\psi}=-\vec{e}_\rho, \quad \frac{\partial\vec{e}_\psi}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\rho}=0, \quad \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\psi}=0, \quad \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial z}=0,\end{aligned} \tag{1.36}$$

Отсюда получаем правила действия оператора набла на орты цилиндрической системы координат.

$$\nabla\cdot\vec{e}_\rho=\frac{1}{\rho},\quad \nabla\cdot\vec{e}_\psi=0,\quad \nabla\cdot\vec{e}_z=0 \tag{1.37}$$

Далее, используя явный вид оператора набла в цилиндрической системе координат (1.31), находим следующие выражения:

$$\vec{e}_\rho\cdot\left(\nabla A_\rho\right)=\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho},\quad \vec{e}_\psi\cdot\left(\nabla A_\psi\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi},\quad \vec{e}_z\cdot\left(\nabla A_z\right)=\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.38}$$

Затем подставим соотношения (1.37) и (1.38) в формулу (1.35) и получим правильное выражение для дивергенции вектора в цилиндрической системе координат.

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{\rho}A_\rho+\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.39}$$

В сферической системе координат действия операторов градиента, дивергенции, ротора и Лапласа определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad}\, f=\nabla f=\vec{e}_r\frac{\partial f}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\vec{e}_\psi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\psi}\\
&\mathrm{div}\,\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}\\
&\mathrm{rot}\,\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_r\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\psi\right)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\psi}\right)+\\
&\qquad\vec{e}_\theta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\psi\right)\right)+\vec{e}_\psi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\\
&\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2}
\end{aligned} \tag{1 .40}$$

7. Безвихревые, потенциальные и соленоидальные поля.

Если ротор векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ равен нулю, то поле является безвихревым полем. Безвихревое поля является также потенциальным полем. Дело в том, что векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ называется потенциальным (potential field), если оно представимо как градиент некоторого скалярного поля $f(\vec{r})$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\, f(\vec{r}) \tag{1.41}$$

Скалярное поле $f(\vec{r})$ в этом случае называют скалярным потенциалом (scalar potential). С другой стороны, можно показать, что ротор градиента любого скалярного поля всегда равен нулю.

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f(\vec{r}) = 0 \tag{1.42}$$

Отсюда получаем, что ротор потенциального поля (1.41) равен нулю.

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0 \tag{1.43}$$

Если дивергенция векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ равна нулю, то поле является соленоидальным полем. Соленоидальное поле можно всегда представить как ротор некоторого векторного поля $\vec{P}(\vec{r})$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{P}(\vec{r}) \tag{1.44}$$

Это возможно благодаря тому что, для любого векторного поля дивергенция ротора всегда равна нулю.

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{P}(\vec{r}) = 0 \tag{1.45}$$

Векторное поле $\vec{P}(\vec{r})$ в этом случае называют векторным потенциалом (vector potential).

В векторном анализе доказывается, что любое векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ можно представить в виде суммы потенциального поля $\vec{A}_1(\vec{r})$ и соленоидального поля $\vec{A}_2(\vec{r})$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_1(\vec{r}) + \vec{A}_2(\vec{r}), \quad \mathrm{rot}\,\vec{A}_1(\vec{r}) = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{A}_2(\vec{r}) = 0 \tag{1.46}$$

Потенциальное поле $\vec{A}_1(\vec{r})$ определяется скалярным потенциалом $f(\vec{r})$, а соленоидальное поле $\vec{A}_2(\vec{r})$ определяется векторным потенциалом $\vec{P}(\vec{r})$.

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \mathrm{grad}\, f(\vec{r}), \quad \vec{A}_2(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{P}(\vec{r}) \tag{1.47}$$

Поэтому любое векторное поле можно выразить через скалярный и векторный потенциалы.

Если для соленоидального поля $\vec{A}_2(\vec{r})$ выполняется условие $\mathrm{rot}\,\vec{A}_2(\vec{r}) \neq 0$, то поле $\vec{A}_2(\vec{r})$ будет как соленоидальным, так и вихревым одновременно.

Рассмотрим также важный случай векторного поля, для которого выполняются следующие условия:

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0, \quad \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0 \tag{1.48}$$

Условия (1.48) означают, что поле $\vec{A}(\vec{r})$ является как соленоидальным, так и безвихревым. Поэтому поле можно выразить через градиент скалярного потенциала (1.41). Подставляем соотношение (1.41) в первое уравнение (1.48) , и получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} &\mathrm{div\,grad}\, f(\vec{r}) = \nabla \cdot \nabla\, f(\vec{r}) = \Delta\, f(\vec{r}) = 0, \\ &\Delta\, f(\vec{r}) = 0 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Полученное уравнение (1.49) называется уравнением Лапласа, а скалярное поле $f(\vec{r})$ называется гармоническим полем (harmonic field).

8. Интегральные теоремы векторного анализа.

Приведем некоторые интегральные теоремы векторного анализа.

Рассмотрим некоторый объем пространства *V*, и замкнутую поверхность *S*, содержащую этот объем Рис.8.

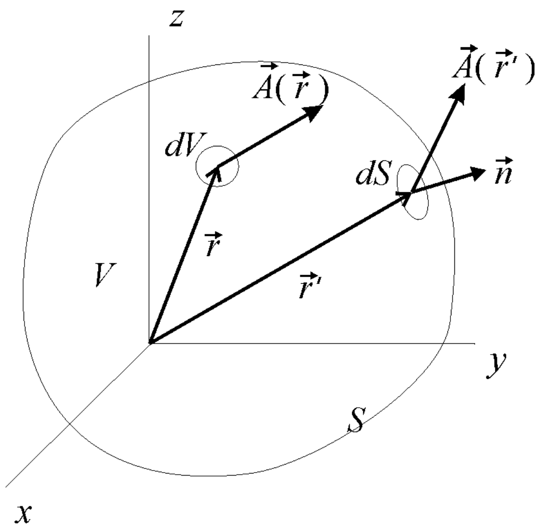

Рис. 8

На Рис.8 показан элемент объема *dV*, радиус вектор $\vec{r}$ этого элемента объема, вектор поля $\vec{A}(\vec{r})$, выходящий из элемента объема. На Рис.8 показан также элемент поверхности dS, радиус вектор $\vec{r}'$ элемента поверхности, единичный вектор нормали к поверхности $\vec{n}$, вектор поля $\vec{A}(\vec{r}')$, выходящий из элемента поверхности.

Если векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ непрерывно вместе со своими частными производными в объеме *V* и на поверхности *S*, то имеет место теорема Гаусса - Остроградского. Эта теорема записывается в виде следующего интегрального соотношения:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})\,dV = \oint_S \vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{S} \qquad (1.50)$$

В левой стороне формулы находится интеграл по объему V от дивергенции вектора $\vec{A}$. В правой части находится интеграл по замкнутой поверхности S. Под интегралом стоит скалярное произведение вектора $\vec{A}$ на вектор элемента поверхности $d\vec{S}$. Вектор элемента поверхности определяется как произведение вектора нормали на элемент поверхности.

$$d\vec{S} = \vec{n}\,dS \tag{1.51}$$

Скалярное произведение вектора $\vec{A}$ на единичный вектор $\vec{n}$ равняется проекции A_n вектора на вектор $\vec{n}$.

$$\vec{A}\cdot\vec{n} = A_n \tag{1.52}$$

Используя соотношение (1.52) теореме Гаусса – Остроградского можно придать следующий вид:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})\,dV = \oint_S A_n(\vec{r}\,')\cdot dS \tag{1.53}$$

Введем понятие потока вектора $\vec{A}$ через поверхность S. На Рис.9 показана поверхность S, элемент поверхности dS, нормаль $\vec{n}$ к внешней стороне поверхности. Векторное поле в точках поверхности изображается вектором $\vec{A}(\vec{r})$.

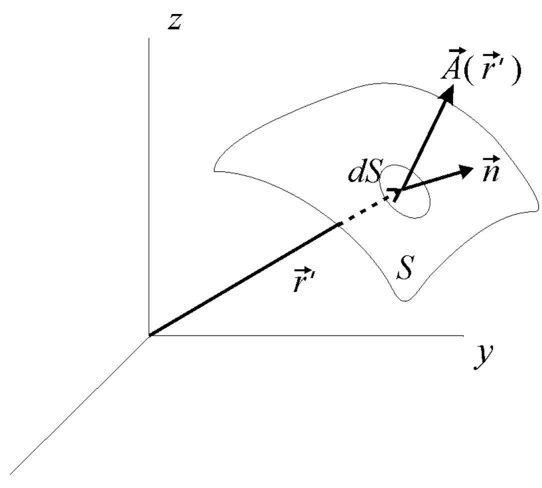

Рис. 9

Поток вектора Φ_A через поверхность (flux of vector) определяется следующим поверхностным интегралом:

$$\Phi_A = \int_S \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{S} = \int_S A_n(\vec{r}\,') \cdot dS \tag{1.54}$$

Поэтому теорему Гаусса – Остроградского можно сформулировать следующим образом. Интеграл по объему V от дивергенции вектора $\vec{A}$ равняется потоку этого вектора через замкнутую поверхность S, охватывающую объем V.

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})\,dV = \Phi_A \tag{1.55}$$

Рассмотрим некоторую поверхность S, натянутую на замкнутый контур L Рис.10. На рисунке показан вектор элемента контура $d\vec{l}$, радиус вектор $\vec{r}$ этого элемента контура, вектор поля $\vec{A}(\vec{r})$ выходящий из точки контура. На Рис.10 показан также элемент поверхности dS, радиус вектор $\vec{r}\,'$ элемента поверхности, единичный вектор нормали к поверхности $\vec{n}$, вектор поля $\vec{A}(\vec{r}\,')$ выходящий из точки поверхности

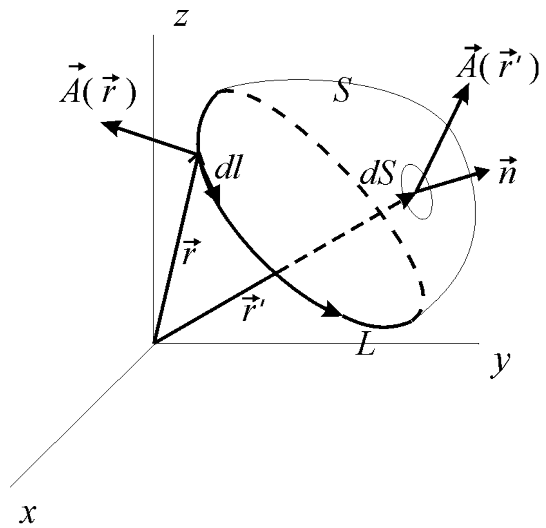

Рис. 10

Если векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ непрерывно вместе со своими частными производными на поверхности *S* и на контуре *L*, то имеет место теорема Стокса. Эта теорема записывается в виде следующего интегрального соотношения

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{l} \tag{1.56}$$

В левой стороне формулы (1.56) находится поток ротора векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ через поверхность *S*. В правой части находится интеграл по замкнутому контуру *L*. Под интегралом стоит скалярное произведение вектора $\vec{A}$ в точках контура на вектор элемента контура $d\vec{l}$. Этот интеграл называют циркуляцией вектора C_A по замкнутому контуру (circulation of vector).

$$C_A = \oint_L \vec{A}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{l} \tag{1.57}$$

Поэтому теорему Стокса можно сформулировать следующим образом. Поток ротора векторного поля через поверхность, натянутую на контур равен циркуляции векторного поля по этому контуру.

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = C_A \tag{1.58}$$

9. Система уравнений Максвелла в интегральной форме.

Система уравнений Максвелла (1.9) имеет вид системы дифференциальных уравнений в частных производных. Если использовать теорему Гаусса – Остроградского (1.50), (1.55) и теорему Стокса (1.56), (1.58), то систему уравнений Максвелла можно записать в виде интегральных уравнений.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла (1.1). Интегрируем обе части уравнения (1.1) по объему *V*.

$$\int_V \mathrm{div}\vec{E}(\vec{r})\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,dV \qquad (1.59)$$

Интеграл в левой стороне уравнения (1.59) равняется по теореме Гаусса - Остроградского (1.50) потоку напряженности электрического поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность *S*, охватывающую объем *V*. Интеграл в правой стороне уравнения (1.59) равняется электрическому заряду *q* в объеме *V*, формула (1.2). В результате уравнение (1.59) преобразуется в следующее интегральное уравнение.

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}q \qquad (1.60)$$

Уравнение (1.60) это первое интегральное уравнение Максвелла. Это уравнение означает следующее. Поток напряженности электрического поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность *S* равняется электрическому заряду *q* внутри этой поверхности, деленному на ε_0.

Рассмотрим второе уравнение Максвелла (1.5). Интегрируем обе части уравнения (1.5) по некоторой незамкнутой поверхности *S*.

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (1.61)$$

Учитывая, операции интегрирования по поверхности и взятие производной по времени являются независимыми операциями, второй интеграл (1.61) можно преобразовать следующим образом.

$$\int_S \frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \frac{d}{d\,t}\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} \qquad (1.62)$$

Первый интеграл в (1.61), по теореме Стокса, превращается в циркуляцию вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, по контуру *L*, на который натянута поверхность *S*.

В результате уравнение (1.61) превращается в следующее интегральное уравнение.

$$\oint\limits_L \vec{E}(\vec{r}\,',t)\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{d\,t}\int\limits_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} \tag{1.63}$$

Уравнение (1.63) это второе интегральное уравнение Максвелла. Это уравнение означает следующее. Циркуляция вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, по контуру *L*, на который натянута поверхность *S*, равна производной по времени от потока вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через поверхности *S*, со знаком минус.

Уравнение (1.63) можно записать и в другом виде. Во-первых, первый интеграл в (1.63), являясь циркуляцией вектора напряженности электрического поля в контуре *L*, равен электродвижущей силой (ЭДС) *e*, действующей в этом контуре. Интеграл в правой стороне уравнения (1.63) является потоком вектора магнитной индукции через поверхность *S*, и согласно формуле (1.54) может быть обозначен как Φ_B. В результате уравнение (1.63) можно записать в следующем виде.

$$e = -\frac{d\Phi_B}{d\,t} \tag{1.64}$$

Таким образом, формула (1.64) является математическим выражением закона электромагнитной индукции Фарадея. Изменение потока вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через поверхность *S* натянутую на контур *L* вызывает появление ЭДС *e* в контуре *L*.

Рассмотрим третье уравнение Максвелла (1.8). С этим уравнением поступим также как с первым уравнением Максвелла (1.1). Проинтегрируем левую и правую часть уравнения (1.8) по объему *V* и применим теорему Гаусса-Остроградского. В результате получим следующее уравнение.

$$\oint\limits_S \vec{B}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = 0 \tag{1.65}$$

Уравнение (1.65) это третье интегральное уравнение Максвелла. Это уравнение означает следующее. Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через произвольную замкнутую поверхность *S* равен нулю. Это означает что, сколько линий магнитного поля входит в замкнутую поверхность *S*, столько же линий выходит из этой поверхности. Значит, внутри поверхности *S* не существуют ни истоки, ни стоки магнитного поля. Другими словами магнитное поле – это соленоидальное поле.

Рассмотрим четвертое уравнение Максвелла (1.7). Интегрируем обе части уравнения (1.7) по некоторой незамкнутой поверхности *S*.

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c^2}\int_S \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (1.66)$$

В уравнении (1.66) первый и третий интегралы преобразуются аналогично тому, как было получено уравнение (1.63). Второй интеграл, согласно формуле (1.4), является электрическим током *I*, текущим через поверхность *S*. В результате уравнение (1.66) принимает следующий вид.

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}\,',t)\cdot d\vec{l} = \mu_0\, I + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} \qquad (1.67)$$

Уравнение (1.67) это четвертое интегральное уравнение Максвелла. Это уравнение означает следующее. Циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по произвольному контуру *L* отлична от нуля в двух случаях. Во-первых, течет электрический ток *I*, который охватывается контуром L. Во-вторых, если поток напряженности электрического поля $\vec{E}$ через поверхность *S*, натянутую на контур *L*, меняется со временем.

Уравнения (1.60), (1.63), (1.65) и (1.67) образуют систему уравнений Максвелла в интегральной форме.

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}q, \\ \oint_L \vec{E}(\vec{r}\,',t)\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{d\,t}\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}\,, \\ \oint_S \vec{B}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = 0, \\ \oint_L \vec{B}(\vec{r}\,',t)\cdot d\vec{l} = \mu_0\,I + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{d\,t}\int_S \vec{E}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}\,. \end{cases} \qquad (1.68)$$

10. Обнаружение и измерение электромагнитного поля.

Обнаружить электромагнитное поле, и измерить напряженность $\vec{E}$ и индукцию $\vec{B}$ этого поля, можно благодаря воздействию последнего на электрические заряды. Воздействие определяется следующей силой

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}\right) \qquad (1.69)$$

Здесь q – величина заряда, $\vec{\mathrm{v}}$ – скорость заряда. Измеряя величину заряда, скорость заряда и силу, действующую на заряд, можно в принципе найти вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Рассмотрим два примера.

<u>Первый пример</u>. Пусть магнитное поле равно нулю

$$\vec{E}\neq 0,\quad \vec{B}=0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = q\,\vec{E} \qquad (1.70)$$

Тогда сила определяется электрическим полем. Если заряд положительный, то направление силы совпадает с направлением вектора $\vec{E}$. На Рис.11а показан этот случай.

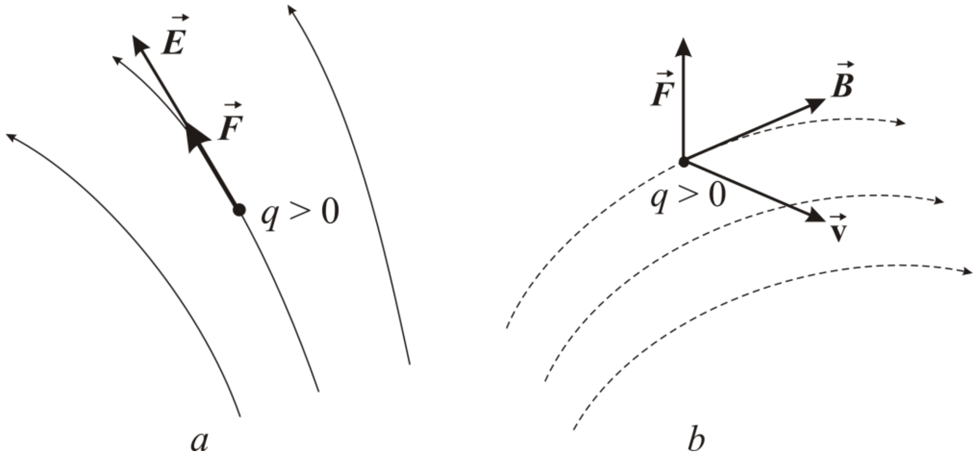

Рис.11

Если заряд отрицательный, то направление силы и напряженности электрического поля имеют противоположные направления.

Второй пример. Пусть теперь электрическое поле равно нулю

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B} \neq 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{1.71}$$

Тогда сила называется силой Лоренца, и если заряд положительный, то направление силы определяется по правилу векторного произведения (правило левой руки). На Рис.11b показан этот случай.

Для измерения магнитного поля можно использовать также взаимодействие электрического тока с магнитным полем. Если по проводнику длиной l протекает электрический ток I, то со стороны магнитного поля $\vec{B}$ на проводник будет действовать сила Ампера $\vec{F}_A$.

$$\vec{F}_A = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{1.72}$$

Заметим, что сила Ампера может быть получена из силы Лоренца (1.71), если учесть, что сила Ампера складывается из сил Лоренца, действующих на каждый движущийся заряд в проводнике, по которому течет электрический ток.

Для измерения переменного магнитного поля можно также использовать закон электромагнитной индукции (1.64).

11. Уравнения Максвелла в системе единиц СИ.

Физические величины, описывающие электромагнитные взаимодействия, при измерении получают некоторые численные значения. Эти значения зависят от системы единиц, в которых выражается данная физическая величина. В электродинамики используются две системы единиц: система единиц СИ и гауссова система единиц. Причем в этих системах единиц не, только физические величины имеют разное числовое значение, но и уравнения электродинамики имеют разную форму записи.

Система уравнений Максвелла (1.9), рассмотренная выше, записана в системе СИ. Запишем эту систему, немного изменив последнее уравнение.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.73}$$

В последнем уравнении Максвелла системы (1.73) учтена связь между электрической постоянной ε_0 и магнитной постоянной μ_0. Эта связь имеет следующий вид:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{1.74}$$

Здесь c = 2.997925·10^8 м/с – скорость света в вакууме. В системе СИ магнитная постоянная μ_0 – это заданная величина, равная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Г/м (Генри на метр). Международное обозначение этой размерности – H/m.

Электрическая постоянная ε_0 определяется из формулы (1.74) и имеет значение ε_0 = 8.854185·10^{-12} Ф/м (Фарада на метр). Международное обозначение этой размерности – F/m.

В системе уравнений Максвелла (1.73) электрическое и магнитное поля имеют следующую размерность в системе единиц СИ.

Напряженность электрического поля E измеряется в В/м (Вольт на метр). Международное обозначение этой размерности – V/m.

Магнитная индукция B измеряется в Т (Тесла). Международное обозначение этой размерности – T.

В системе уравнений Максвелла присутствуют также плотность электрического заряда ρ и плотность электрического тока j. В системе единиц СИ эти физические величины имеют следующие размерности.

Плотность электрического заряда ρ измеряется в Кл/м^3 (Кулон на метр в кубе). Международное обозначение этой размерности – C/m^3.

Плотность электрического тока j измеряется в А/м^2, (Ампер на метр в квадрате). Международное обозначение этой размерности – A/m^2.

В формуле (1.69) для силы, действующей на электрический заряд со стороны электромагнитного поля, присутствуют еще две физические величины - электрический заряд q и сила F.

Ниже размерности этих величин и некоторых других собраны в таблицу 1.

Таблица 1. Размерности некоторых физических величин в системе единиц СИ.

Физическая величина	Симво л	Размерность (Русское	Размерность (Международное

		название)	название)
Длина	l	м	m
Масса	m	кг	kg
Время	t	с	S
Сила	F	Н (ньютон)	N
Работ, энергия	A, W	Дж (джоуль)	J
Электрический заряд	q	Кл (кулон)	C
Объемная плотность заряда	ρ	Кл/м^3	C/m^3
Сила тока	I	А (ампер)	A
Плотность тока	j	А/м^2	A/m^2
Потенциал, напряжение	U	В (вольт)	V
Напряженность электрического поля	E	В/м	V/m
Магнитная индукция	B	Т (тесла)	T

12. Уравнения Максвелла в системе единиц Гаусса.

В мировой литературе по электродинамике, как правило, используется система единиц СИ. Но в научной литературе и в учебниках еще встречается системе единиц Гаусса. Гауссова система единиц удобна при теоретических исследованиях электромагнитных процессов. Дело в том, что в основе этой системы единиц лежат три фундаментальные единицы: единица длины – сантиметр, единица массы – грамм, единица времени – секунда. Поэтому гауссову систему единиц называют также системой единиц СГС. Единицы всех остальных физических величин выражаются через эти три основные единицы. Это приводит к тому, что уравнения электродинамики в гауссовой системе единиц имеют достаточно простой вид.

Однако у системы единиц Гаусса есть свои недостатки.

Во-первых, единицы многих физических величин электродинамики имеют очень запутанный вид, так электрический ток в гауссовой системе единиц имеет размерность см$^{3/2}$г$^{1/2}$с$^{-2}$, а разность потенциалов см$^{1/2}$г$^{1/2}$с$^{-1}$. Такие размерности не удобны для чтения и запоминания. Поэтому вводят упрощенную запись размерности, так размерность тока – СГС$_I$, размерность заряда – СГС$_q$, размерность потенциала – СГС$_V$, и.т.д.

Во-вторых, на практике ток измеряют в амперах (А), а разность потенциалов в вольтах (В). Поэтому если работать в гауссовой системе единиц, то после теоретических расчетов для перехода к измерениям, необходимо все физические величины перевести в систему СИ, токи в амперы, потенциалы в вольты и.т.д. Если же изначально проводить вычисления в системе СИ, то эти дополнительные преобразования выполнять не надо.

Покажем, как меняется запись основных соотношений электродинамики при переходе от системы единиц СИ к системе единиц Гаусса.

Так система уравнений Максвелла (1.73) в гауссовой системе единиц будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.75}$$

В системе (1.75) присутствует одна физическая константа c – скорость света в вакууме. В системе (1.73) присутствует две физические константы ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. В первом и четвертом уравнениях системы (1.75) присутствует множитель 4π . Этот множитель введен в систему уравнений Максвелла для того, чтобы основные законы электричества и магнетизма имели как можно более простой вид.

Так закон Кулона в гауссовой системе единиц имеет следующий вид:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.76}$$

Здесь q_1, q_2 - величины двух точечных зарядов, r - расстояние между зарядами, F - сила взаимодействия между зарядами.

Закон Кулона в системе единиц СИ будет иметь следующий вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.77}$$

Закон Био–Савара–Лапласа для магнитного поля тока, текущего по длинному прямому проводнику, в гауссовой системе единиц имеет следующий вид:

$$B = \frac{1}{c}\frac{2I}{r} \tag{1.78}$$

Здесь I – величина электрического тока, r - расстояние от проводника до точки, где ищется магнитное поле, B – магнитное поле, созданное током.

Этот же закон в системе единиц СИ будет иметь следующий вид:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r} \tag{1.79}$$

Сделаем замечание об использовании скорости сета c в системе СИ и в гауссовой системе единиц. Если рассматриваются уравнения Максвелла или уравнения, вытекающие из уравнений Максвелла, в системе СИ, то скорость света надо положить равной следующей величине:

$$c = 2.997925 \cdot 10^{8} \text{ м/с}$$

Если рассматриваются уравнения электродинамики в гауссовой системе единиц, то скорость света будет равна.

$$c = 2.997925 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

В таблице 2 показана размерность рассматриваемых физических величин в гауссовой системе единиц и в системе СИ, и связь между этими системами.

Таблица 2. Размерности физических величин в систем Гаусса и СИ.

Физическая величина	СГС	СИ	Связь между системами единиц
длина l	см	м	1 м = 10^2 см
масса m	г	кг	1 кг = 10^3 г
сила F	дин (дина)	Н (ньютон)	1 Н = 10^5 дин
работа, энергия A, W	эрг (эрг)	Дж (джоуль)	1 Дж = 10^7 эрг
заряд q	СГС$_q$	Кл (кулон)	1 Кл = $3 \cdot 10^9$ СГС$_q$
плотность заряда ρ	СГС$_\rho$	Кл/м^3	1 Кл/м^3 = $3 \cdot 10^3$ СГС$_\rho$
электрический ток I	СГС$_I$	А (ампер)	1 А = $3 \cdot 10^9$ СГС$_I$
плотность тока j	СГС$_j$	А/м^2	1 А/м^2 = $3 \cdot 10^5$ СГС$_j$
потенциал,	СГС$_\varphi$	В	1 В = $0.33 \cdot 10^{-2}$

напряжение φ		(вольт)	$СГС_{\varphi}$
напряженность электрического поля *E*	$СГС_E$	В/м	1 В/м = $0.33 \cdot 10^{-4}$ $СГС_E$
магнитная индукция *B*	Гс (гаусс)	Т (тесла)	1 Т = 10^4 Гс

Контрольные вопросы.

1. Что является первым источником электромагнитного поля. Как выглядит соответствующее уравнение Максвелла.
2. Какую размерность имеют напряженность электрического поля и объемная плотность электрического заряда.
3. Что является вторым источником электромагнитного поля. Как выглядит соответствующее уравнение Максвелла.
4. Какую размерность имеют индукция магнитного поля и объемная плотность электрического тока.

5. Что является третьим источником электромагнитного поля. Как выглядит соответствующее уравнение Максвелла.
6. Что является четвертым источником электромагнитного поля. Как выглядит соответствующее уравнение Максвелла.
7. Какой вид имеет система уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме в дифференциальной форме.
8. Какой оператор векторного анализа используется для описания вихревых полей. Как выглядит такой оператор в декартовой системе координат.
9. Какой оператор векторного анализа используется для описания соленоидальных полей. Как выглядит такой оператор в декартовой системе координат.
10. Какое дифференциальное уравнение позволяет вычислить линии векторного поля.
11. Какие направления в пространстве имеют базовые орты цилиндрической системы координат.
12. Какие направления в пространстве имеют базовые орты сферической системы координат.
13. Как применяется оператор набла для записи основных операторов векторного анализа – градиента, дивергенции и ротора.
14. Какие операторы векторного анализа позволяют из скалярного поля получить векторное поле, из векторного поля получить скалярное поле, из векторного поля получить другое векторное поле.
15. Какой вид имеют основные операторы дифференциального анализа в цилиндрической системе координат.
16. Какой вид имеют основные операторы дифференциального анализа в сферической системе координат.
17. Какие математические выражения определяют безвихревые и потенциальные поля.

18. Какие математические выражения определяют соленоидальные поля.
19. Каким дифференциальным уравнениям удовлетворяют гармонические поля.
20. Основные интегральные соотношения векторного анализа. Теорема Гаусса – Остроградского, теорема Стокса.
21. Математическое выражение потока вектора через заданную поверхность.
22. Математическое выражение циркуляции вектора вдоль заданного контура.
23. Какой вид имеет система уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме в интегральной форме.
24. Какое интегральное уравнение Максвелла соответствует закону индукции Фарадея.
25. Как определяется сила, действующая на движущийся заряд со стороны электрического поля.
26. Форма записи уравнений Максвелла в системе единиц СИ. Размерности физических величин, входящих в уравнения Максвелла.
27. Нахождение заряда в данном объеме через плотность заряда. Нахождение тока через данную поверхность через плотность тока.
28. Закон Кулона в Гауссовой системе единиц и системе единиц СИ. Размерности физических величин, входящих в закон.
29. Закон Био-Савара-Лапласа в гауссовой системе единиц и системе единиц СИ. Размерности физических величин, входящих в закон.
30. Форма записи уравнений Максвелла в системе единиц Гаусса. Размерности физических величин, входящих в уравнения Максвелла.