

## ГЛАВА 6

### Распространения электромагнитных волн в длинных линиях.

#### 1. Электродинамическая теория длинных линий.

Одной из наиболее распространенной системой среди направляющих систем передачи электромагнитной энергии является длинная линия. Длинную линию можно реализовать или в виде двухпроводной линии или в виде коаксиального кабеля.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля в длинной линии. Пусть направляющая ось двухпроводной длинной линии совпадает с осью  $z$  Рис.69.

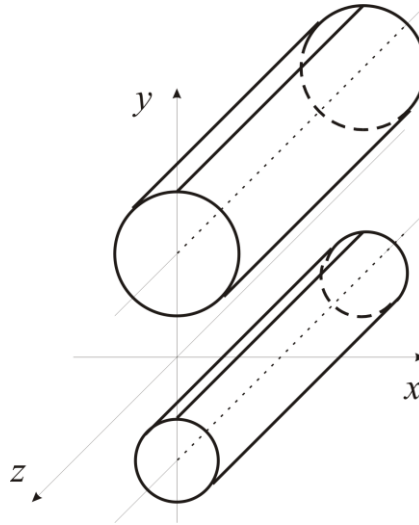


Рис.69.

Решение уравнений Максвелла будем искать в виде монохроматической волны, бегущей вдоль оси  $Oz$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Здесь  $\omega$  – циклическая частота,  $\beta$  - продольное волновое число, которое связано с длиной волны  $\lambda$  соотношением

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Удобно воспользоваться математическим аппаратом, который применяется для описания электромагнитных волн в волноводах, аппаратом векторных потенциалов

Герца. Возьмем электрический векторный потенциал Герца  $\vec{\Pi}^e(\vec{r}, t)$ , и представим его в виде бегущей волны аналогично формулам (1).

$$\vec{\Pi}^e(\vec{r}, t) = \vec{\Pi}^e(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (6.2)$$

Как известно, потенциал Герца в среде без дисперсии удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \vec{\Pi}^e - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} = 0, \quad (6.3)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\varepsilon, \mu$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Подставим (6.2) в уравнение (6.3), и получим двухмерное уравнение Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \vec{\Pi}^e(x, y) + (k^2 - \beta^2) \vec{\Pi}^e(x, y) &= 0, \\ \Delta_{\perp} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь  $\Delta_{\perp}$  - двухмерный оператор Лапласа,  $k$  – волновое число плоской монохроматической электромагнитной волны в среде. Как известно, электрическое и магнитное поле выражаются через электрический векторный потенциал Герца с помощью формул:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad}(\text{div} \vec{\Pi}^e) - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2}, \\ \vec{B} &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \text{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Поскольку рассматривается монохроматическое поле, то время в уравнениях (6.5) можно исключить.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad}(\text{div} \vec{\Pi}^e) + k^2 \vec{\Pi}^e, \\ \vec{B} &= -i \frac{\omega \varepsilon \mu}{c^2} \text{rot} \vec{\Pi}^e. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Далее вспомним, что волны в волноводах можно описать, используя лишь одну  $z$ -проекцию  $\Pi_z^e$  электрического векторного потенциала Герца. Поэтому в данной задаче, тоже оставим у векторного потенциала Герца одну  $z$ -проекцию.

$$\vec{\Pi}^e = (0, 0, \Pi_z^e) \quad (6.7)$$

Далее  $z$ -проекцию для простоты будем обозначать следующим образом  $\Pi_z^e = \Pi^e$ . Теперь запишем уравнения (6.6) в проекциях. При этом учтем поляризацию векторного потенциала Герца (6.7), и зависимость от координаты  $z$  (6.2). В результате получим:

$$\begin{aligned} E_x &= i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}, \quad E_y = i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial y}, \quad E_z = (k^2 - \beta^2) \Pi^e, \\ B_x &= -i \frac{\omega \varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \Pi^e}{\partial y}, \quad B_y = i \frac{\omega \varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}, \quad B_z = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Теперь вспомним некоторые свойства электромагнитных волн, распространяющихся в волноводах. Если посмотреть на формулы (6.8), то можно увидеть, что  $z$ -проекция электрического поля, вообще говоря, не равняется нулю  $E_z \neq 0$ . Это означает, что электрическое поле не является поперечным полем. В то время как магнитное поле - это поперечное поле, потому что его  $z$ -проекция равняется нулю  $B_z = 0$ . В теории волноводов волны с такой поляризацией называют волнами электрического типа  $E$  или  $TM$  - волнами.

Если бы одновременно были равны нулю  $z$ -проекции электрического и магнитного поля, то такая волна была бы поперечной электромагнитной волной  $TEM$ -типа. Напомним, что волной  $TEM$ -типа является плоская монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся в пустом пространстве. В волноводах  $z$ -проекция электрического поля не может обратиться в ноль из-за граничных условий на металлической поверхности волновода. Поэтому в волноводах не могут распространяться электромагнитные волны  $TEM$ -типа.

В двухпроводной линии оказывается возможным распространение поперечных электромагнитных волн, т.е. волн  $TEM$ -типа. Хотя граничные условия в волноводе и в двухпроводной линии одинаковые, структура волн совершенно разная. В волноводе

и в двухпроводной линии граничные условия - это условия на поверхности идеального проводника. Но в волноводе имеется только одна металлическая поверхность, а в длинной линии две такие поверхности, и это кардинальным образом меняет решение уравнений Максвелла.

И так, в двухпроводной линии будем искать электромагнитные волны *ТЕМ*-типа. Для этого в уравнениях (6.8) положим  $E_z = 0$ . Как видно из уравнений (6.8), это возможно, если продольное волновое число  $\beta$  будет равно.

$$\beta = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \quad (6.9)$$

Это соотношение называется дисперсионным уравнением. Мы предполагаем, что  $\epsilon$ ,  $\mu$  не зависят от частоты. Отсюда следует, что фазовая скорость волны не зависит от частоты.

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (6.10)$$

Поэтому вдоль длинной линии электромагнитные волны любой частоты распространяются с одинаковой скоростью. Говорят, что это бездисперсионное распространение волны. Отсюда вытекает важный вывод. Сигнал любой формы распространяется вдоль длинной линии без искажения своей формы, если не учитывать потери в длинной линии, и слабую зависимость материала среды от частоты.

Из формулы (6.8) можно найти скалярное произведение электрического и магнитного полей.

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x B_x + E_y B_y = 0 \quad (6.11)$$

Соотношение (6.11) означает, что векторы электрического и магнитного полей лежат в плоскости  $xy$  и перпендикулярны друг другу. Соответственно линии электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны Рис.70.

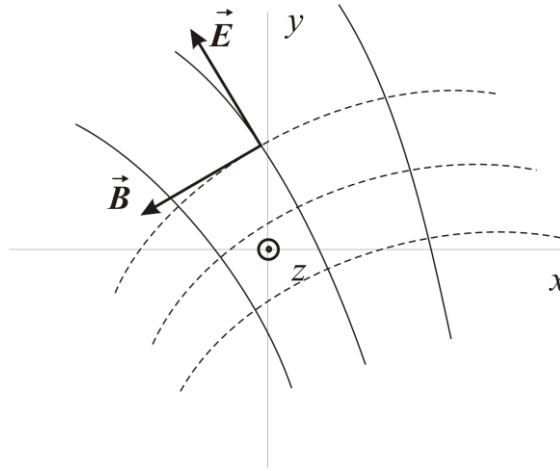


Рис.70.

Таким образом, чтобы вычислить электрическое и магнитное поле по формулам (6.8) надо найти потенциал Герца  $\Pi^e(x, y)$ . Потенциал Герца найдем, решив уравнение Гельмгольца (6.4). Это уравнение после учета условий (6.7), (6.9) примет вид.

$$\Delta_{\perp} \Pi^e(x, y) = 0 \quad (6.12)$$

Другими словами, уравнение Гельмгольца превратилось в уравнение Лапласа. Далее из формул (6.8) видно, что вектор электрического поля пропорционален градиенту потенциала Герца.

$$\begin{aligned} E_x &= i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}, \quad E_y = i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial y}, \quad E_z = 0, \\ \vec{E} &= i\beta \text{grad } \Pi^e \end{aligned} \quad (6.13)$$

Таким образом, проявляется аналогия с электростатикой. А именно, в электростатике для скалярного потенциала  $\varphi$  имеет место уравнение Лапласа.

$$\Delta \varphi = 0 \quad (6.14)$$

Электрическое поле в электростатике выражается через потенциал следующим образом.

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (6.15)$$

Поэтому для вычисления потенциала Герца можно использовать методы вычислений развитые для задач электростатики. Более того, если обозначить  $\varphi = -i\beta\Pi^e$ , то можно вместо потенциала Герца использовать электростатический потенциал.

Вернемся к уравнениям (6.13). Как известно градиент  $\text{grad } \Pi^e$  перпендикулярен к эквипотенциальным линиям потенциала Герца.

$$\Pi^e(x, y) = \text{const}$$

Это означает, что линии магнитного поля  $\vec{B}$  совпадают с эквипотенциальными линиями потенциала Герца, а линии электрического поля определяются вектором градиента потенциала Герца.

Чтобы получить определенное решение уравнения Лапласа (6.12) надо на потенциал Герца наложить граничные условия. Эти граничные условия найдем из граничных условий для полей  $E$  и  $B$  на поверхности идеального проводника Рис.71.

Здесь на поверхности идеального проводника изображены три взаимно перпендикулярные единичные векторы, один нормальный вектор  $\vec{n}$  и два касательных вектора  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{m}$ .

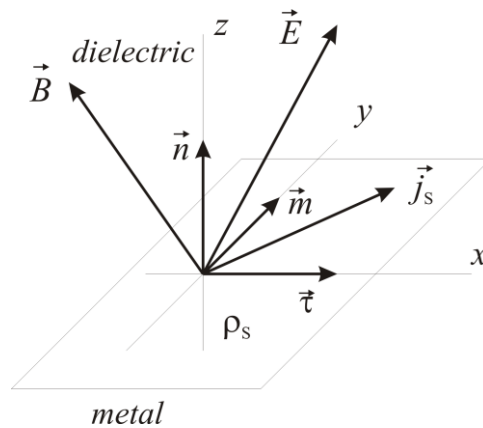


Рис.71.

Идеальность проводника означает, что внутри металла электромагнитное поле равно нулю  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{B} = 0$ . Вне проводника на его поверхности выполняются следующие граничные условия.

$$\begin{aligned} E_\tau &= 0, & E_n &= \frac{\rho_s}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \\ B_n &= 0, & B_\tau &= \mu_0 \mu j_{sm} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Здесь  $\rho_s$  – поверхностная плотность электрического заряда,  $j_{sm}$  – проекция вектора поверхностной плотности тока  $\vec{j}_s$  на ось  $m$ .

Изобразим сечение двухпроводной линии плоскостью  $z = \text{const}$  Рис.72.

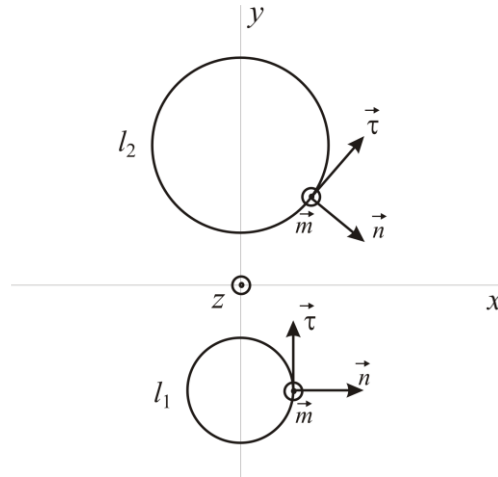


Рис.72.

На Рис.72 две металлические поверхности изображены в плоскости  $xy$  двумя контурами  $l_1, l_2$ . На двух металлических поверхностях изображены единичные векторы нормальный и касательный  $\vec{n}, \vec{\tau}$ . Второй касательный вектор  $\vec{m}$  направлен к нам. Исследуя соотношения (6.8), (6.13), приходим к следующему выводу. Для выполнения граничных условий  $E_\tau = 0, B_n = 0$  требуется наложить следующее условие на потенциал Герца.

$$\Pi^e|_l = \text{const} \quad (6.17)$$

Это означает, что на металлической поверхности, в каждой точке контура  $l$  потенциал Герца имеет постоянное значение. Рассмотрим два оставшихся граничных условия.

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad B_\tau = \mu_0 \mu j_{sm} \quad (6.18)$$

Граничные условия (6.18) позволяют найти поверхностный заряд и поверхностный ток на металлических поверхностях двухпроводной линии.

Возьмем отрезок двухпроводной линии длиной  $\Delta l$  в направлении оси  $z$ . Тогда заряд на первом проводе  $\Delta q_1$  и заряд на втором проводе  $\Delta q_2$  будут определяться интегралами:

$$\begin{aligned}\Delta q_1 &= \Delta l \int_{l_1} \rho_s dl = \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_1} E_n dl, \\ \Delta q_2 &= \Delta l \int_{l_2} \rho_s dl = \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_2} E_n dl .\end{aligned}\quad (6.19)$$

Токи, текущие вдоль оси  $Oz$  по этим двум проводам, будут определяться следующими интегралами:

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_{l_1} j_{sm} dl = \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_1} B_\tau dl, \\ J_2 &= \int_{l_2} j_{sm} dl = \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_2} B_\tau dl .\end{aligned}\quad (6.20)$$

Разберемся с величиной зарядов  $\Delta q_1$ ,  $\Delta q_2$  на проводах длинной линии. Для удобства перейдем к скалярному потенциалу. Во всей бесконечной области, исключая проводники, решаем уравнение Лапласа (6.14) для потенциала  $\varphi$ . На поверхностях двух проводников потенциал имеет постоянные значения равные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

$$\varphi|_{l_1} = \varphi_1, \quad \varphi|_{l_2} = \varphi_2 \quad (6.21)$$

Если потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на проводниках заданы, то задача имеет однозначное решение. Далее, зная скалярный потенциал, можно найти электрическое и магнитное поле по формулам (6.8). Эти формулы можно переписать через потенциал в следующем виде.

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = 0, \\ B_x &= \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad B_z = 0\end{aligned}\quad (6.22)$$



Затем по формулам (6.19) можно найти заряды на двух проводах длинной линии. В задачах обычной электростатики заряды на проводниках могут быть любыми. Но рассматриваемая здесь задача не является задачей электростатики. В данной задаче вдоль длинной линии распространяется электромагнитная волна. Эта волна переносит энергию. Для определения потока энергии вдоль длинной линии надо использовать вектор Пойнтинга.

Вектор Пойнтинга усредненный за период колебания определяется формулой.

$$\langle \vec{S}_p \rangle = \frac{1}{4\mu_0\mu} (\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B}) \quad (6.23)$$

Проекция вектора Пойнтинга на ось  $z$  будет равна.

$$\langle S_{pz} \rangle = \frac{1}{4\mu_0\mu} ((E_x B_y^* - E_y B_x^*) + (E_x^* B_y - E_y^* B_x)) \quad (6.24)$$

Подставляя (6.22) в (6.24) получаем.

$$\langle S_{pz} \rangle = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{2\mu_0 c} \left( \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 \right) \quad (6.25)$$

Если считать потенциал действительной величиной, то квадрат комплексного модуля в (6.25) можно заменить обычным квадратом.

$$\langle S_{pz} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (6.26)$$

Теперь чтобы найти поток энергии вдоль длинной линии надо вычислить интеграл по поверхности сечения  $z = const$ . Но поле отлично от нуля и на больших расстояниях от проводов линии. Поэтому надо интегрировать по бесконечной области. Поток энергии будет определяться следующим интегралом:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \langle S_{pz} \rangle. \quad (6.27)$$

Расчеты показывают, что для произвольных значений зарядов  $\Delta q_1$ ,  $\Delta q_2$ , поток энергии обращается в бесконечность. Это говорит о невозможности распространения такой волны вдоль длинной линии. И только в одном случае поток энергии,

вычисленный по формуле (6.27) является конечной величиной. Это случай когда заряды на двух проводах равны по абсолютному значению и противоположны по знаку:

$$\Delta q_2 = -\Delta q_1 \quad (6.28)$$

Далее, можно показать, что если заряды на проводах связаны соотношением (6.28), то по проводам текут одинаковые токи. На проводе, где заряд положительный ток течет по направлению оси  $z$ , а на проводе с отрицательным зарядом ток течет в противоположную сторону. Таким образом, если токи на проводах вычислять по формулам (6.20), то получим следующий результат

$$J_2 = -J_1 . \quad (5.29)$$

На Рис.73 показаны положительные заряды на нижнем проводе и отрицательные заряды на верхнем проводе.

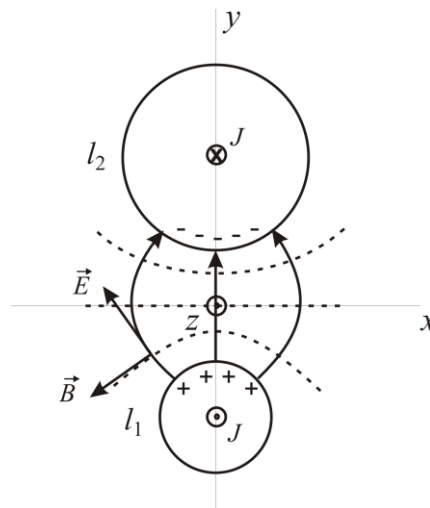


Рис.73.

Заряды располагаются на поверхности проводников. Сплошные линии электрического поля идут от нижнего провода к верхнему проводу. К поверхности металла линии электрического поля подходят по нормали. Пунктирные линии магнитного поля идут перпендикулярно линиям электрического поля. Около поверхности проводников эти линии идут по касательной. По нижнему проводу течет ток к нам, по верхнему проводу течет такой же ток от нас. Неточность Рис.73 состоит

в том, что в идеальном проводнике ток на самом деле течет по поверхности проводника.

Рассмотренная картина напоминает электростатику заряженных проводников и магнитостатику постоянных токов. Однако надо помнить, что эта аналогия не полная. Аналогия с электростатикой и магнитостатикой имеет место в данный момент времени в данном сечении  $z = \text{const}$  длинной линии. На самом деле все рассмотренные физические величины являются волнами, бегущими вдоль длинной линии. Это относится к напряженности электрического поля  $E$ , к индукции магнитного поля  $B$ , к потенциалу Герца  $\Pi^e$ , к скалярному потенциалу  $\varphi$ , к поверхностной плотности электрического заряда  $\rho_s$ , к поверхностной плотности тока  $j_{sm}$  и к току  $J$  текущему по поверхности проводов длинной линии. Все эти физические величины как функции координат и времени имеют вид.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \vec{\Pi}^e(\vec{r}, t) = \vec{\Pi}^e(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \varphi(\vec{r}, t) = \varphi(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \rho_s(\vec{r}, t) = \rho_s(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \vec{j}_{sm}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{sm}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ J(\vec{r}, t) = J(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \end{cases} \quad (6.30)$$

## 2. Электромагнитное поле в коаксиальном кабеле.

Далее рассмотрим длинную линию в виде коаксиального кабеля, где двумя проводами являются внутренний и внешний цилиндры Рис.74.

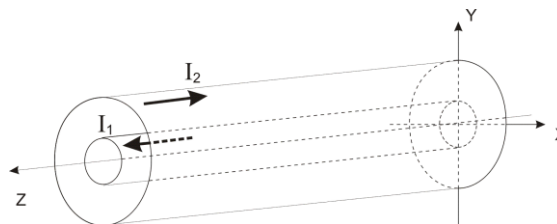


Рис.74.

Внутренний цилиндр называют также жилой, а внешний цилиндр называют оплеткой. Все, что было разобрано выше в общей электромагнитной теории длинных линий применимо к кабелю. Единственное отличие состоит в способе доказательства того, что заряды на жиле и оплетке одинаковые по величине, но разные по знаку, а токи текущие внутри кабеля и по внешнему цилиндру одинаковы и противоположно направлены.

В двухпроводной линии электромагнитное поле распределено по всему пространству около проводов. И там для доказательства использовалась конечность потока энергии вдоль длиной линии. Здесь же пространство, где находится электромагнитное поле, ограничено коаксиальными цилиндрами. Поэтому здесь при доказательстве можно использовать уравнения Максвелла в интегральной форме. Однако не важно, каким способом выполняется доказательство, результат будет один и тот же – все выводы рассмотренные выше применимы и к кабелю.

Так как коаксиальный кабель обладает цилиндрической симметрией, то удобно перейти в цилиндрическую систему координат. На Рис.75 показано сечение коаксиального кабеля. Ось  $z$  направлена к нам, радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны  $r_1$  и  $r_2$ . Произвольная точка между цилиндрами определяется тремя цилиндрическими координатами  $r, \psi, z$ . Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами этой точки имеет вид.

$$\begin{cases} x = r \cos \psi, \\ y = r \sin \psi, \\ z = z. \end{cases} \quad (6.31)$$

На Рис.75 из рассматриваемой точки выходят три взаимно-перпендикулярные единичных вектора  $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$ , эти векторы называют ортами. Единичный вектор  $\vec{e}_z$  направлен к нам, вдоль оси  $z$ , и поэтому невиден.

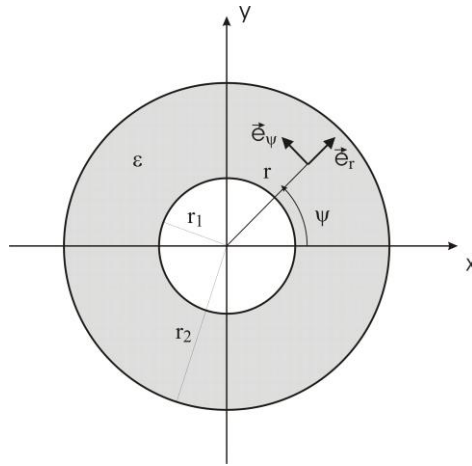


Рис.75.

Любой вектор  $\vec{A}$  можно разложить по любым трем взаимно-перпендикулярным векторам. Поэтому такое разложение можно выполнить или по тройке единичных векторов  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  декартовой системы координат, или по тройке векторов  $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$  цилиндрической системы координат. В результате разложение вектора будет иметь вид.

$$\vec{A} = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z = \vec{e}_r A_r + \vec{e}_\psi A_\psi + \vec{e}_z A_z \quad (6.32)$$

Таким образом, вектор может характеризоваться тремя проекциями или на орты декартовой системы координат или на орты цилиндрической системы координат.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_x, A_y, A_z), \\ \vec{A} &= (A_r, A_\psi, A_z) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Приведем формулы, по которым вычисляет градиент в цилиндрической системе координат.

$$\text{grad } f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\psi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (6.34)$$

Дивергенция в цилиндрических координатах будет иметь следующий вид.

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (6.35)$$

Для ротора в цилиндрических координатах существует следующая формула.

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{e}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\psi \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right) \quad (6.36)$$

Наконец, действие оператора Лапласа в цилиндрической системе координат определяется следующей формулой.

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (6.37)$$

Исследуем структуру электромагнитного поля в кабеле. Для этого, вначале необходимо найти потенциал Герца. Уравнение Лапласа (6.12) в цилиндрической системе координат примет вид.

$$\Delta_\perp \Pi^e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi^e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial \psi^2} = 0 \quad (6.38)$$

Учитывая цилиндрическую симметрию кабеля, переходим к выводу, что потенциал Герца не должен зависеть от угла  $\psi$ . Поэтому уравнение (6.38) упрощается.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \Pi^e}{dr} \right) = 0 \quad (6.39)$$

Решение уравнения (6.39) имеет простой вид.

$$\Pi^e(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (6.40)$$

Здесь  $C_1$ ,  $C_2$  произвольные константы, которые должны определяться из граничных условий.

Теперь найдем электрическое и магнитное поле в кабеле, используя формулы (6.6). В цилиндрической системе координат они примут вид.

$$\begin{aligned} E_r &= i\beta \frac{d \Pi^e}{dr}, & E_\psi &= 0, & E_z &= 0, \\ B_r &= 0, & B_\psi &= i \frac{\omega \varepsilon \mu}{c^2} \frac{d \Pi^e}{dr}, & B_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

При выводе формул (6.41) учитывалось, что для продольного волнового числа  $\beta$  справедливо соотношение.

$$\beta = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Как было показано выше, в длинных линиях между потенциалом Герца и скалярным потенциалом существует линейная связь.

$$\varphi = -i\beta\Pi^e$$

Поэтому дальше удобно излагать материал, используя скалярный потенциал вместо потенциала Герца. Вспомним, что скалярный потенциал в поперечном сечении кабеля удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому решение для скалярного потенциала будет иметь вид аналогичный формуле (6.40).

$$\varphi(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (6.42)$$

Далее, электрическое и магнитное поля будут выражаться через потенциал следующим образом.

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{d\varphi}{dr}, & E_\psi &= 0, & E_z &= 0, \\ B_r &= 0, & B_\psi &= -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{d\varphi}{dr}, & B_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

Подставляя (6.42) в (6.43) находим электрическое и магнитное поле.

$$E_r = -\frac{C_1}{r}, \quad B_\psi = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{C_1}{r}, \quad (6.44)$$

Найдем поверхностный заряд на внутреннем и внешнем цилиндрах кабеля по формулам (6.19). Находим заряд на внутреннем цилиндре.

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_1} E_n dl = \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_1} E_r dl = \\ &= \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_1} \left( -\frac{C_1}{r} \right) dl = \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \left( -\frac{C_1}{r_1} \right) \int_{l_1} dl = -2\pi \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon C_1 \end{aligned} \quad (6.45)$$

Здесь было учтено, что вектор нормали  $\vec{n}$  на поверхности внутреннего цилиндра направлен вдоль вектора  $\vec{e}_r$ , смотри Рис.72 и Рис.75.

Находим заряд на внешнем цилиндре.

$$\begin{aligned}\Delta q_2 &= \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_2} E_n dl = \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_2} (-E_r) dl = \\ &= \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \int_{l_2} \left( \frac{C_1}{r} \right) dl = \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon \left( \frac{C_1}{r_2} \right) \int_{l_2} dl = 2\pi \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon C_1\end{aligned}\quad (6.46)$$

Здесь мы учли, что вектор нормали  $\vec{n}$  на поверхности внешнего цилиндра направлен в противоположную сторону вектора  $\vec{e}_r$ , смотри Рис.72 и Рис.75.

Сравнивая формулы (6.45) и (6.46) находим, что заряды на жиле и оплетке кабеля равны по величине и противоположны по знаку. То есть, не прилагая специальных усилий, было доказано утверждение о равенстве зарядов на проводниках длинной линии, применительно к кабелю. Для доказательства использовались уравнения Максвелла и граничные условия на поверхности проводников.

Таким образом, на внутреннем цилиндре и внешнем цилиндре, на отрезке длинной  $\Delta l$  вдоль оси  $z$  находятся заряды.

$$\begin{aligned}\Delta q_1 &= \Delta q, \quad \Delta q_1 = -\Delta q, \\ \Delta q &= -2\pi \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon C_1\end{aligned}\quad (6.47)$$

Найдем поверхностный ток на внутреннем и внешнем цилиндрах кабеля по формулам (6.20). Находим ток, текущий по поверхности внутреннего цилиндра.

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_1} B_{\vec{\tau}} dl = \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_1} B_{\psi} dl = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_1} \left( -\frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{C_1}{r} \right) dl = \frac{1}{\mu_0 \mu} \left( -\frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{C_1}{r_1} \right) \int_{l_1} dl = -\frac{2\pi}{\mu_0 c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_1\end{aligned}\quad (6.48)$$

Здесь было учтено, что вектор касательной  $\vec{\tau}$  на поверхности внутреннего цилиндра направлен вдоль вектора  $\vec{e}_{\psi}$ , смотри Рис.72 и Рис.75.

Находим ток, текущий по поверхности внешнего цилиндра.



$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_2} B_\tau dl = \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_2} (-B_\psi) dl = \\
&= \frac{1}{\mu_0 \mu} \int_{l_2} \left( \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{C_1}{r} \right) dl = \frac{1}{\mu_0 \mu} \left( \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{C_1}{r_2} \right) \int_{l_2} dl = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_1
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Здесь мы учли, что вектор касательной  $\vec{\tau}$  на поверхности внешнего цилиндра направлен в сторону противоположную вектору  $\vec{e}_\psi$ , смотри Рис.72 и Рис.75.

Сравнивая формулы (6.48) и (6.49), находим, что доказано утверждение о равенстве величины токов текущих по двум проводам в длинной линии, и о противоположном направлении этих токов, применительно к кабелю.

Таким образом, по поверхности внутреннего и внешнего цилиндра текут следующие токи.

$$\begin{aligned}
I_1 &= I, \quad I_2 = -I, \\
I &= -\frac{2\pi}{\mu_0 c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_1
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Из формул (6.47) и (6.50) можно выразить неизвестную константу  $C_1$  через физические величины, которые можно задать или измерить. С помощью формулы (6.47) константу  $C_1$  можно выразить через поверхностный заряд  $\Delta q$ , а с помощью формулы (6.50) константу  $C_1$  можно выразить через поверхностный ток  $I$ .

На практике удобно задать ток, текущий по жиле и оплетке кабеля. Поэтому будем считать, что задан ток  $I$ . По формуле (6.50) находим константу  $C_1$ .

$$C_1 = -\frac{\mu_0 c}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} I \tag{6.51}$$

По формуле (6.47) находим поверхностный заряд.

$$\Delta q = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \Delta l I \tag{6.52}$$

По формуле (6.44) получаем выражения для электрического и магнитного поля.

$$E_r = \left( \frac{\mu_0 c}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right) \frac{I}{r}, \quad B_\psi = \left( \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \right) \frac{I}{r} \tag{6.53}$$

Далее отметим, что потенциал определяется по формуле (6.42), в которой содержится еще одна неизвестная константа  $C_2$ . Напомним, что физический смысл имеет разность потенциалов, в которой константа  $C_2$  исчезает. Действительно найденная с помощью (6.42) разность потенциалов имеет вид.

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -C_1 \ln \frac{r_2}{r_1} = \left( \frac{\mu_0 c}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) I \quad (6.54)$$

Иногда удобно электрическое поле в формулах (6.53) выразить через разность потенциалов  $U$ . Кроме того, в формулах выразим индукцию магнитного поля через напряженность магнитного поля.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad (6.55)$$

После подстановки выражений (6.54) и (6.55) в формулы (6.53) получаем следующие соотношения.

$$E_r = \frac{1}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} U, \quad H_\psi = \frac{1}{2\pi r} I, \quad B_\psi = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r} I \quad (6.56)$$

### 3. Поток энергии в коаксиальном кабеле.

В качестве решения уравнений Максвелла рассматривались монохроматические волны бегущие вдоль кабеля. Для этих волн было выбрано комплексное представление (6.30). Поэтому рассмотренные выше амплитуды электрического поля, магнитного поля, тока и напряжения являются, вообще говоря, комплексными величинами. В эксперименте измеряются действительные величины.

Покажем, как можно перейти от комплексных величин к действительным величинам. Действительные величины будем обозначать тильдой. Так для перечисленных выше волн действительные значения получаем по следующим формулам.

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{E}}(r, z, t) &= \frac{1}{2} (\vec{E}(r, z, t) + \vec{E}^*(r, z, t)) = \frac{1}{2} (\vec{E}(r) e^{i(\beta z - \omega t)} + \vec{E}^*(r) e^{-i(\beta z - \omega t)}), \\
\tilde{\vec{B}}(r, z, t) &= \frac{1}{2} (\vec{B}(r, z, t) + \vec{B}^*(r, z, t)) = \frac{1}{2} (\vec{B}(r) e^{i(\beta z - \omega t)} + \vec{B}^*(r) e^{-i(\beta z - \omega t)}), \\
\tilde{I}(z, t) &= \frac{1}{2} (I(z, t) + I^*(z, t)) = \frac{1}{2} (I e^{i(\beta z - \omega t)} + I^* e^{-i(\beta z - \omega t)}), \\
\tilde{U}(z, t) &= \frac{1}{2} (U(z, t) + U^*(z, t)) = \frac{1}{2} (U e^{i(\beta z - \omega t)} + U^* e^{-i(\beta z - \omega t)})
\end{aligned} \tag{6.57}$$

В частности, если амплитуда тока  $I$  будет действительной величиной, то действительными величинами будут также  $U$ ,  $\vec{E}(r)$  и  $\vec{B}(r)$ . В этом случае используем формулу Эйлера.

$$\cos(\beta z - \omega t) = \frac{1}{2} (e^{i(\beta z - \omega t)} + e^{-i(\beta z - \omega t)}) \tag{6.58}$$

Выражения для волн (6.57) упрощаются и принимают вид.

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{E}}(r, z, t) &= \vec{E}(r) \cos(\beta z - \omega t), \\
\tilde{\vec{B}}(r, z, t) &= \vec{B}(r) \cos(\beta z - \omega t), \\
\tilde{I}(z, t) &= I \cos(\beta z - \omega t), \\
\tilde{U}(z, t) &= U \cos(\beta z - \omega t)
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Для среды, у которой диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость не зависят от частоты, плотность потока энергии определяется вектором Пойнтинга, который находится по следующей формуле.

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0 \mu} \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{B}} \tag{6.60}$$

В формуле (6.60) электрическое и магнитное поле берутся в действительном виде. Подставим в формулу (6.60) поля в виде монохроматических волн (6.57) бегущих вдоль кабеля. В результате получим следующее выражение для вектора Пойнтинга.

$$\begin{aligned}
\vec{S}_p &= \frac{1}{4\mu_0 \mu} (\vec{E} e^{i(\beta z - \omega t)} + \vec{E}^* e^{-i(\beta z - \omega t)}) \times (\vec{B} e^{i(\beta z - \omega t)} + \vec{B}^* e^{-i(\beta z - \omega t)}) = \\
&= \frac{1}{4\mu_0 \mu} (\vec{E} \times \vec{B} e^{i2(\beta z - \omega t)} + \vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B}^* e^{-i2(\beta z - \omega t)})
\end{aligned} \tag{6.61}$$

В связи с большой частотой изменения полей со временем, величины связанные с энергетическими характеристиками, усредняют за один период колебания  $T$  по следующей формуле.

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (6.62)$$

Подставив в интеграл (6.62) вектор Пойнтинга (6.61) получаем вектор Пойнтинга усредненный за один период колебания электромагнитного поля.

$$\langle \vec{S}_p(r) \rangle = \frac{1}{4\mu_0\mu} (\vec{E}^*(r) \times \vec{B}(r) + \vec{E}(r) \times \vec{B}^*(r)) \quad (6.63)$$

Проекция вектора Пойнтинга на ось  $z$  в цилиндрической системе координат будет равна.

$$\langle S_{pz}(r) \rangle = \frac{1}{4\mu_0\mu} ((E_r(r)B_\psi^*(r) - E_\psi(r)B_r^*(r)) + (E_r^*(r)B_\psi(r) - E_\psi^*(r)B_r(r))) \quad (6.64)$$

С учетом поляризации поля в кабеле формула (6.64) примет вид.

$$\langle S_{pz}(r) \rangle = \frac{1}{4\mu_0\mu} (E_r(r)B_\psi^*(r) + E_r^*(r)B_\psi(r)) \quad (6.65)$$

Подставив явные выражения (6.53) для электрического и магнитного поля в формулу (6.65) получим следующее выражение для проекции вектора Пойнтинга.

$$\langle S_{pz}(r) \rangle = v \frac{\mu_0\mu}{8\pi^2} \frac{|I|^2}{r^2} \quad (6.66)$$

Здесь  $v$  - фазовая скорость монохроматической волны в кабеле.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Проинтегрировав проекцию вектора Пойнтинга на ось  $z$  по сечению кабеля, найдем поток энергии, распространяющийся вдоль кабеля.

$$P = \iint_S \langle S_{pz}(r) \rangle ds \quad (6.67)$$

Здесь  $S$  – область интегрирования, в данном случае это кольцо с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Интеграл (6.67) вычисляем в полярных координатах.

$$P = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr < S_{P_z} > = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr v \frac{\mu_0 \mu}{8\pi^2} \frac{|I|^2}{r^2} = v \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} |I|^2 \quad (6.68)$$

Если теперь воспользоваться формулой (6.54) для амплитуды напряжения  $U$ , то формула (6.68) примет совсем простой вид.

$$P = \frac{IU^*}{2} \quad (6.69)$$

Физический смысл потока энергии состоит в том, что  $P$  это энергия, переносимая волной через поперечное сечение кабеля в единицу времени. Размерность величины  $P$  есть Дж/с = Вт, т.е. имеет размерность мощности. С другой стороны произведение  $IU^*$  определяет мощность тока в электротехнике. Другими словами поток энергии переносимой волной вдоль кабеля можно найти, если измерить мощность тока в кабеле.

#### 4. Погонная емкость коаксиального кабеля.

Рассмотрим отрезок кабеля длиной  $\Delta l$ . Найдем заряд  $\Delta q_1$  на поверхности внутреннего цилиндра и заряд на поверхности внешнего цилиндра  $\Delta q_2$ . Для этого вначале найдем поверхностную плотность заряда с помощью граничных условий (6.18). Используя явный вид электрического поля (6.53) получаем следующий результат.

$$\begin{aligned} r = r_1, \quad \rho_{1s} &= \varepsilon_0 \varepsilon E_r(r_1) = \varepsilon_0 \varepsilon v \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_1} = \frac{1}{v 2\pi} \frac{I}{r_1}, \\ r = r_2, \quad \rho_{2s} &= -\varepsilon_0 \varepsilon E_r(r_2) = -\varepsilon_0 \varepsilon v \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_2} = -\frac{1}{v 2\pi} \frac{I}{r_2} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Так как поверхностные плотности заряда (6.70) являются постоянными величинами, заряды на цилиндрических поверхностях найдем, умножив плотность заряда на величину поверхности цилиндра.

$$\begin{aligned} r = r_1, \quad \Delta q_1 = \rho_{1s} \Delta S_1 &= \frac{1}{v} \frac{I}{2\pi r_1} \Delta l 2\pi r_1 = \frac{1}{v} I \Delta l, \\ r = r_2, \quad \Delta q_2 = \rho_{2s} \Delta S_2 &= -\frac{1}{v} \frac{I}{2\pi r_2} \Delta l 2\pi r_2 = -\frac{1}{v} I \Delta l \end{aligned} \quad (6.71)$$

Из формул (6.71) следует что, на внутреннем и внешнем цилиндрах отрезка кабеля находятся заряды одинаковые по величине и разные по знаку.

$$\Delta q_2 = -\Delta q_1 = -\frac{1}{v} I \Delta l \quad (6.72)$$

Таким образом, отрезок кабеля является заряженным цилиндрическим конденсатором, емкость которого  $\Delta C$  определяется следующим выражением.

$$\Delta C = \frac{\Delta q_1}{U} \quad (6.73)$$

Используя формулы (6.71) для заряда и формулу (6.54) для напряжения, находим емкость отрезка кабеля.

$$\Delta C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \Delta l \quad (6.74)$$

В дальнейшем нам понадобится погонная емкость кабеля  $\bar{C}$ , или емкость единицы длины кабеля. Погонная емкость кабеля определяется следующим выражением.

$$\bar{C} = \frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (6.75)$$

## 5. Плотность энергии электромагнитного поля в коаксиальном кабеле.

Электромагнитная волна в кабеле распространяется в пространстве между цилиндрами. Это пространство заполнено диэлектриком – полиэтиленом. Полиэтилен является немагнитной бездисперсионной средой. В такой среде плотность энергии электромагнитного поля определяется следующей формулой.

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \varepsilon \tilde{E}^2 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \tilde{B}^2 \right) \quad (6.76)$$

В формуле (6.76) электрическое и магнитное поле берутся в действительном виде. Подставим в формулу (6.76) поля в виде монохроматических волн (6.57) бегущих вдоль кабеля. В результате получим следующее выражение для плотности энергии электромагнитного поля.

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{8} \left( \vec{E} \cdot \vec{E} e^{i2(\beta z - \omega t)} + 2 \vec{E}^* \cdot \vec{E} + \vec{E}^* \cdot \vec{E}^* e^{-i2(\beta z - \omega t)} \right) + \frac{1}{8\mu_0 \mu} \left( \vec{B} \cdot \vec{B} e^{i2(\beta z - \omega t)} + 2 \vec{B}^* \cdot \vec{B} + \vec{B}^* \cdot \vec{B}^* e^{-i2(\beta z - \omega t)} \right) \quad (6.77)$$

Усредненная по времени за один период плотность энергии примет следующий вид.

$$\begin{aligned} \langle w(r) \rangle &= \frac{1}{4} \left( \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^*(r) \cdot \vec{E}(r) + \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B}^*(r) \cdot \vec{B}(r) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \varepsilon_0 \varepsilon |\vec{E}(r)|^2 + \frac{1}{\mu_0 \mu} |\vec{B}(r)|^2 \right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Из формулы (6.78) видно, что плотность энергии электромагнитной волны состоит из двух частей – плотности энергии электрического поля  $\langle w_e(r) \rangle$  и плотности энергии магнитного поля  $\langle w_m(r) \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle w(r) \rangle &= \langle w_e(r) \rangle + \langle w_m(r) \rangle, \\ \langle w_e(r) \rangle &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{4} |\vec{E}(r)|^2, \quad \langle w_m(r) \rangle = \frac{1}{4\mu_0 \mu} |\vec{B}(r)|^2 \end{aligned} \quad (6.79)$$

Учитывая поляризацию электромагнитного поля в кабеле (6.43), и явный вид электрического и магнитного полей (6.53), получаем следующие выражения плотностей энергии.

$$\begin{aligned}
\langle w_e(r) \rangle &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{4} |E_r(r)|^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{4} \left| v \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r} \right|^2 = \frac{\mu_0 \mu}{16\pi^2} \frac{|I|^2}{r^2}, \\
\langle w_e(r) \rangle &= \frac{1}{4\mu_0 \mu} |B_\psi(r)|^2 = \frac{1}{4\mu_0 \mu} \left| \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r} \right|^2 = \frac{\mu_0 \mu}{16\pi^2} \frac{|I|^2}{r^2}
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Сделаем некоторые выводы. Во-первых, из формул (6.80) следует, что электрическая и магнитная составляющие плотности энергии в кабеле равны друг другу. Во-вторых, из формулы (6.66) для проекции вектора Пойнтинга на ось кабеля  $\langle S_{pz}(r) \rangle$  и формул (6.79), (6.80) плотности энергии в кабеле  $\langle w(r) \rangle$ , следует следующее соотношение.

$$\langle S_{pz}(r) \rangle = v \langle w(r) \rangle \tag{6.81}$$

Здесь  $v$  – фазовая скорость волны в кабеле. Простое соотношение (6.81) устанавливает связь между средними значениями вектора Пойнтинга и плотностью энергии.

## 6. Погонная индуктивность коаксиального кабеля.

Найдем энергию магнитного поля  $\langle \Delta W_m \rangle$  на отрезке кабеля длиной  $\Delta l$ . Эту энергию найдем, проинтегрировав плотность энергии магнитного поля по объему между двумя цилиндрами отрезка кабеля. Интегрировать будем в цилиндрической системе координат.

$$\langle \Delta W_m \rangle = \iiint_V \langle w_m \rangle dV = \int_0^{\Delta l} dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr \langle w_m \rangle \tag{6.82}$$

Подставим в (6.82) явное выражение (6.80) для плотности магнитной энергии, в результате получим следующее выражение:

$$\langle \Delta W_m \rangle = \int_0^{\Delta l} dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr \frac{\mu_0 \mu}{16\pi^2} \frac{|I|^2}{r^2} = \frac{\Delta l \mu_0 \mu}{8\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} |I|^2 \tag{6.83}$$



Индуктивность  $\Delta L$  отрезка кабеля  $\Delta l$  найдем с помощью энергии магнитного поля на этом отрезке. Для этого напишем формулу аналогичную формуле, для энергии магнитного поля в катушке.

$$\langle \Delta W_m \rangle = \frac{\Delta L \langle \tilde{I}^2 \rangle}{2} \quad (6.84)$$

В формуле (6.84) электрический ток берется в действительном виде. Найдем квадрат тока, используя выражение (6.57) для волны тока бегущей вдоль кабеля.

$$\begin{aligned} \tilde{I}^2(z, t) &= \frac{1}{4} \left( I e^{i(\beta z - \omega t)} + I^* e^{-i(\beta z - \omega t)} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left( I^2 e^{i2(\beta z - \omega t)} + 2 I^* I + I^2 e^{-i2(\beta z - \omega t)} \right) \end{aligned} \quad (6.85)$$

При усреднении по времени за один период колебания, экспоненты в формуле (6.85) исчезают. Поэтому получаем следующее значение для среднего квадрата тока.

$$\langle \tilde{I}^2 \rangle = \frac{|I|^2}{2} \quad (6.86)$$

Теперь в формулу (6.84) подставим выражение (6.83) для энергии магнитного поля и выражение (6.86) для квадрата тока. В результате получаем следующую формулу для индуктивности отрезка кабеля.

$$\Delta L = \frac{\mu_0 \mu \Delta l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.87)$$

В дальнейшем нам понадобится погонная индуктивность кабеля  $\bar{L}$ , или индуктивность единицы длины кабеля. Погонная индуктивность кабеля определяется следующим выражением.

$$\bar{L} = \frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.88)$$

Теперь связь между напряжением  $U$  и током  $I$  в кабеле (6.54) можно выразить через погонную индуктивность следующим соотношением.

$$U = v \bar{L} I \quad (6.89)$$

## 7. Распространение импульса вдоль коаксиального кабеля.

Монохроматические волны (6.30) бегущие вдоль кабеля не имеют ни начала, ни конца во времени. Волна, которая имеет конечную длительность, т.е. имеет начало и конец, называется импульсом. Используя преобразование Фурье импульс можно разложить по монохроматическим волнам с разными частотами.

Вспомним интегральное преобразование Фурье. Пусть имеется сигнал  $f(t)$  конечной длительности  $\tau$ , тогда спектр сигнала  $F(\omega)$  определяется преобразованием Фурье.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6.90)$$

Преобразование (6.90) называется прямым преобразованием Фурье. Обратное преобразование Фурье определяется следующей формулой.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.91)$$

Пусть, например, сигнал имеет гауссов вид.

$$f(t) = \exp(-a^2 t^2) \quad (6.92)$$

Легко показать, что спектр такого сигнала имеет тоже гауссов вид.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right) \quad (6.93)$$

Если теперь волны всех физических величин в кабеле умножить на величину  $F(\omega)$ , то полученные волны тоже будут удовлетворять уравнениям Максвелла и всем граничным условиям, рассмотренным выше. Это связано с линейностью уравнений Максвелла и линейностью граничных условий. Далее любая суперпозиция таких волн с разными частотами, тоже будет решением уравнений Максвелла для кабеля.

Для примера, складывая волны напряжения с разными частотами, создадим новую волну напряжения в кабеле, которая будет определяться следующим интегралом.

$$U(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) U e^{i(\beta z - \omega t)} d\omega \quad (6.94)$$

Выясним структуру полученной волны напряжения. Вспомним, что волновое число  $\beta$  линейно связано с частотой  $\omega$  следующим соотношением:

$$\beta = \frac{\omega}{v} \quad (6.95)$$

Здесь  $v$  - фазовая скорость монохроматической волны. Подставляем (6.95) в интеграл (6.94). Учитываем, что напряжение  $U$  от частоты не зависит и его можно вынести за знак интеграла. В результате приходим к следующему выражению.

$$U(z, t) = U \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\left(\frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} d\omega = U \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)} d\omega \quad (6.96)$$

Сравнивая последний интеграл в выражении (6.96) с интегралом (6.91) находим окончательное выражение для новой волны напряжения.

$$U(z, t) = U f\left(\frac{z}{v} - t\right) \quad (6.97)$$

Полученная волна действительно является импульсом, движущимся вдоль оси  $Oz$  со скоростью  $v$ .

Все остальные волны преобразуются аналогичным образом.

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z, t) &= \vec{E}(r) f\left(\frac{z}{v} - t\right), \\ \vec{B}(r, z, t) &= \vec{B}(r) f\left(\frac{z}{v} - t\right) \\ I(z, t) &= I f\left(\frac{z}{v} - t\right) \\ U(z, t) &= U f\left(\frac{z}{v} - t\right) \end{aligned} \quad (6.98)$$

Отметим следующую особенность полученных импульсов. Эти импульсы распространяются вдоль кабеля без искажения формы. Такое распространение импульса называют бездисперсионным. Это связано с тем, что кабель предполагается

идеальным, в нем нет потерь, и диэлектрическая проницаемость среды в кабеле не зависит от частоты.

Таким образом, если по кабелю бежит монохроматическая электромагнитная волна, то это означает наличие следующих монохроматических волн:

$$\begin{cases} \vec{E}(r, z, t) = \vec{E}(r) e^{i(\beta z - \omega t)} \\ \vec{B}(r, z, t) = \vec{B}(r) e^{i(\beta z - \omega t)} \end{cases} \quad \begin{cases} I(z, t) = I e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ U(z, t) = U e^{i(\beta z - \omega t)} \end{cases} \quad (6.99)$$

Явный вид амплитуды электрического поля  $\vec{E}(r)$ , явный вид амплитуды магнитного поля  $\vec{B}(r)$ , связь их с амплитудой тока  $I$  и амплитудой напряжения  $U$  дается формулами (6.53) и (6.89). Объединим эти соотношения вместе в наиболее удобной форме.

$$E_r(r) = v \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r} I, \quad B_\psi(r) = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r} I, \quad U = v \bar{L} I \quad (6.100)$$

Здесь  $v$  – фазовая скорость, а  $\bar{L}$  – погонная индуктивность.

Если по кабелю бежит электромагнитный импульс, то это означает, что по кабелю одновременно бегут импульсы (6.98) электрического поля, магнитного поля, тока и напряжения. Амплитуды волн (6.98) по-прежнему определяются формулами (6.100).

Поэтому с формальной точки зрения, переход от монохроматической волны, бегущей по кабелю, к импульсу бегущему по кабелю сводится к замене экспоненты на функцию  $f(t)$ .

$$e^{i(\beta z - \omega t)} \rightarrow f\left(\frac{z}{v} - t\right) \quad (6.101)$$

Еще раз подчеркнем, что такой простой переход возможен только в идеальном кабеле без потерь с диэлектриком, без частотной дисперсии.

Соотношения (84) являются линейными относительно амплитуд  $E_r$ ,  $B_\psi$ ,  $I$ ,  $U$ . Поэтому формулы в выражениях (6.98) и (6.100) будут справедливы как для комплексных амплитуд, так и для действительных амплитуд.

Вектор Пойнтинга для импульса находим по общей формуле (6.60).

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{E}(r) \times \vec{B}(r) f^2\left(\frac{z}{v} - t\right) \quad (6.102)$$

Учитывая поляризацию волны в кабеле из (6.102) находим проекцию вектора Пойнтинга на ось  $z$ .

$$S_{Pz} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \tilde{E}_r(r) \tilde{B}_\psi(r) f^2 \left( \frac{z}{v} - t \right) \quad (6.103)$$

Подставляем формулы (6.100) для электрического и магнитного поля в (6.103), в результате получаем следующее выражение.

$$S_{Pz} = v \frac{\mu_0 \mu}{4\pi^2} \tilde{I}^2 \frac{1}{r^2} f^2 \left( \frac{z}{v} - t \right) \quad (6.104)$$

Плотность энергии для импульса находим по общей формуле (6.76).

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \varepsilon \tilde{E}^2 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \tilde{B}^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \varepsilon \tilde{E}_r^2(r) + \frac{1}{\mu_0 \mu} \tilde{B}_\psi^2 \right) f^2 \left( \frac{z}{v} - t \right) \quad (6.105)$$

Подставляем формулы (6.100) для электрического и магнитного поля в (6.105), в результате получаем следующее выражение.

$$w = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi^2} \tilde{I}^2 \frac{1}{r^2} f^2 \left( \frac{z}{v} - t \right) \quad (6.106)$$

Сравнивая формулы (6.104) и (6.106), приходим к выводу, что связь проекции вектора Пойнтинга и плотности энергии для электромагнитного импульса, такая же, как и для монохроматического излучения (6.81).

$$S_{Pz} = v w \quad (6.107)$$

Найдем энергию импульса. Для этого надо плотность энергии импульса (6.106) проинтегрировать по объему, занимаемому импульсом в пространстве.

$$W = \iint_S dS \int_{-\infty}^{\infty} dz w(r, z, t) \quad (6.108)$$

Здесь  $S$  – область в поперечном сечении кабеля - кольцо с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Интеграл (6.108) вычисляем в полярных координатах.

$$\begin{aligned}
W &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr \frac{\mu_0 \mu}{4\pi^2} \tilde{I}^2 \frac{1}{r^2} f^2\left(\frac{z}{v} - t\right) = \\
&= \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \tilde{I}^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2\left(\frac{z}{v} - t\right) dz = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \tilde{I}^2 \ln \frac{r_2}{r_1} v \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{6.109}$$

Учитывая связь между током и напряжением (6.89) и выражение для погонной индуктивности (6.88) энергию импульса преобразуем к следующему виду.

$$W = \tilde{I} \tilde{U} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\tau) d\tau \tag{6.110}$$

Интеграл в (6.110) имеет размерность времени, поэтому будем рассматривать его как некоторое эффективное время действия импульса.

$$T_{eff} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\tau) d\tau \tag{6.111}$$

Таким образом, энергия импульса будет определяться с помощью следующего соотношения.

$$W = \tilde{I} \tilde{U} T_{eff} \tag{6.112}$$

Выражение (6.112) похоже на соответствующую формулу электротехники для работы тока за время  $T_{eff}$ .

## 8. Телеграфные уравнения идеальной длинной линии.

Используя формулы (6.98) для произвольного импульса, распространяющегося вдоль кабеля, запишем электрическое и магнитное поле в следующем виде.

$$\begin{aligned}
\vec{E}(r, z, t) &= U(z, t) \frac{\vec{E}(r)}{U}, \\
\vec{B}(r, z, t) &= I(z, t) \frac{\vec{B}(r)}{I}
\end{aligned} \tag{6.113}$$

Введем обозначения для нормированного электрического и магнитного поля.

$$\vec{e}(r) = \frac{\vec{E}(r)}{U}, \quad \vec{b}(r) = \frac{\vec{B}(r)}{I} \quad (6.114)$$

Используя формулы (6.56) можно записать отличные от нуля компоненты нормированного электрического и магнитного поля.

$$e_r = \frac{1}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad b_\psi = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r} \quad (6.115)$$

Теперь формулы (6.113) примут следующий вид.

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z, t) &= U(z, t) \vec{e}(r), \\ \vec{B}(r, z, t) &= I(z, t) \vec{b}(r) \end{aligned} \quad (6.116)$$

Точно такие же формулы можно получить и для произвольной двухпроводной линии. В этом случае уравнения (6.116) будут иметь следующий вид.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= U(z, t) \vec{e}(x, y), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= I(z, t) \vec{b}(x, y) \end{aligned} \quad (6.117)$$

Теперь разберем свойства нормированного электрического и магнитного поля идеальной длинной линии. Под идеальной линией будем понимать такие линии, в которой отсутствуют потери на энергии на тепло. Металлические провода длиной линии предполагаются идеальными проводниками, в которых токи и заряды находятся только на поверхности проводников, а поле внутри проводника равно нулю.

В этом случае, электрическое и магнитное поле в длинной линии, являются поперечными полями, перпендикулярными друг другу. Такими же поперечными полями будет и нормированные поля. Уравнения, которым удовлетворяют нормированное электрическое  $\vec{e}(x, y)$  и нормированное магнитное поле  $\vec{b}(x, y)$  можно получить из уравнений (6.22).

$$\begin{aligned} e_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad e_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad e_z = 0, \\ b_x &= \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad b_y = -\frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad b_z = 0 \end{aligned} \quad (6.118)$$

Здесь скалярный потенциал  $\varphi = \varphi(x, y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (6.119)$$

Уравнение Лапласа решается при условии постоянства потенциала на двух контурах образованных сечением плоскости  $z=0$  двух проводов длинной линии.

$$\varphi(x, y)|_{l_1} = \varphi_1 = const, \quad \varphi(x, y)|_{l_2} = \varphi_2 = const \quad (6.120)$$

Чтобы электрическое и магнитное поле сделать нормированными налагается еще одно условие, разность потенциалов на контурах равняется единице.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 1 \quad (6.121)$$

Для коаксиального кабеля такое решение уравнения Лапласа легко получить из уравнения (6.42). В результате получаем следующее выражение для потенциала.

$$\varphi(r) = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r \quad (6.122)$$

После подстановки потенциала (6.122) в формулы (6.118) или в аналогичные формулы (6.43), получаем нормированные электрическое и магнитное поле (6.115), для коаксиального кабеля.

Для двухпроводной линии решение уравнения Лапласа (6.119) с граничными условиями (6.120), (6.121) является более сложной вычислительной задачей. Но в некоторых случаях и здесь можно получить аналитические формулы для нормированных полей.

Далее рассмотрим вектор Пойнтинга для полей записанных в виде (6.117). Будем считать, что величины в формулах (6.117) записаны в действительном виде. Тогда вектор Пойнтинга будет иметь следующий вид.

$$\begin{aligned} \vec{S}_p(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \left( \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) = \\ &= \frac{U(z, t) I(z, t)}{\mu_0 \mu} \left( \vec{e}(x, y) \times \vec{b}(x, y) \right) \end{aligned} \quad (6.123)$$



Проинтегрируем (6.123) по поперечному сечению  $D$  длинной линии. В результате получим поток энергии через поперечное сечение длинной линии. Используя формулы (6.69) и (6.112) для потока энергии вдоль кабеля, получаем следующее условие нормировки для нормированного электрического и магнитного поля.

$$\frac{1}{\mu_0 \mu} \int_D \vec{z}_0 \cdot (\vec{e}(x, y) \times \vec{b}(x, y)) dx dy = 1 \quad (6.124)$$

Здесь  $\vec{z}_0$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . Хотя формула (6.124) получена для кабеля, можно показать, что она применима и для двухпроводной линии.

Теперь получим дифференциальные уравнения для напряжений между двумя проводами длинной линии и токов, текущих по этим проводам. Обратимся к формулам (6.117) для электрического и магнитного поля в длинной линии. Для этих полей напишем два уравнения Максвелла. При этом будем предполагать, что вещество между проводами имеет постоянные диэлектрическую и магнитную проницаемости.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.125)$$

Подставляем выражения (6.117), для электрического и магнитного поля, в уравнения Максвелла (6.125). Получаем следующие соотношения.

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} U \times \vec{e}) + U \operatorname{rot} \vec{e} &= -\vec{b} \frac{\partial I}{\partial t}, \\ (\operatorname{grad} I \times \vec{b}) + I \operatorname{rot} \vec{b} &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \vec{e} \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.126)$$

Прямыми вычислениями можно показать, что ротор нормированного электрического и магнитного поля равен нулю, а градиент напряжения и тока направлен вдоль оси  $z$ . Другими словами имеют место следующие формулы.

$$\operatorname{rot} \vec{e} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{b} = 0, \quad \operatorname{grad} U = \vec{z}_0 \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \operatorname{grad} I = \vec{z}_0 \frac{\partial I}{\partial z} \quad (6.127)$$

Подставляем формулы (6.127) в уравнения (6.126) приводим их к следующему виду.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z}(\vec{z}_0 \times \vec{e}) &= -\frac{\partial I}{\partial t} \vec{b}, \\ \frac{\partial I}{\partial z}(\vec{z}_0 \times \vec{b}) &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \vec{e}\end{aligned}\quad (6.128)$$

Умножаем первое уравнение в системе (6.128) скалярно на вектор  $\vec{b}$ , а второе уравнение умножаем на вектор  $\vec{e}$ . Затем, оба уравнения в (6.128) интегрируем по поперечному сечению длинной линии. В результате получаем следующие уравнения.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} \int_D \vec{z}_0 \cdot (\vec{e} \times \vec{b}) dxdy &= -\frac{\partial I}{\partial t} \int_D \vec{b}^2 dxdy, \\ -\frac{\partial I}{\partial z} \int_D \vec{z}_0 \cdot (\vec{e} \times \vec{b}) dxdy &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \int_D \vec{e}^2 dxdy\end{aligned}\quad (6.129)$$

Интегралы в левой части уравнений (6.129) найдем с помощью нормировки (6.124). Интегралы в правых частях уравнений (6.129) обозначим следующим образом.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0 \mu} \int_D \vec{b}^2 dxdy &= \bar{L} \\ \varepsilon_0 \varepsilon \int_D \vec{e}^2 dxdy &= \bar{C}\end{aligned}\quad (6.130)$$

Если в качестве нормированных полей взять поля для кабеля (6.115), то простые расчеты показывают, что введенные в формулах (6.130) величины полностью совпадают с погонной индуктивностью и погонной емкостью, которые были получены выше для кабеля. Поэтому формулы (6.130) можно использовать для вычисления погонной индуктивности и погонной емкости для любой длинной линии.

Подставляя соотношения (6.124) и (6.130) в уравнения (6.129), получаем телеграфные уравнения для идеальной длинной линии.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{L} \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial z} + \bar{C} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \end{cases}\quad (6.131)$$

Уравнения (6.131) получены в предположении об отсутствии потерь в длинной линии. Если такие потери существуют, то картина распределения электромагнитного

поля вдоль длинной линии будет несколько иной. Во-первых, электромагнитная волна не будет теперь волной ТЕМ типа. Электрическое поле теперь будет иметь продольную составляющую  $E_z \neq 0$ . Во-вторых, электромагнитное поле будет проникать внутрь проводов, и теперь ток в проводниках будет не поверхностным током, а объемным током. Задача становится достаточно сложной.

### 9. Телеграфные уравнения длинной линии с потерями.

Как сказано выше, решение задачи о распространении электромагнитной волны вдоль длинной линии, с учетом потерь, становится достаточно сложной для точного описания. Однако, если потери небольшие, то можно получить приближенные телеграфные уравнения.

Приближение будет состоять в следующем. В пространстве между проводами продольная составляющая электрического поля много меньше поперечной составляющей  $e_z \ll |\vec{e}|$ . Учитывать эту составляющую будем только внутри проводников. Поэтому будем предполагать, что поле между проводниками такое, как и для идеальной длинной линии. Отличия коснулись только поля внутри проводников.

Поэтому внутри проводников ротор нормированного электрического поля теперь не будет равен нулю.

$$\text{rot } \vec{e} = \text{rot}_\perp (\vec{z}_0 e_z) \neq 0, \quad \vec{r} \in S_1, S_2 \quad (6.132)$$

Здесь  $S_1, S_2$  – поперечные сечения проводников. С учетом условия (6.132) вместо уравнений (6.129) получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} \int_D \vec{z}_0 \cdot (\vec{e} \times \vec{b}) dxdy + U \int_{S_1+S_2} \vec{b} \cdot \text{rot}_\perp (\vec{z}_0 e_z) dxdy = - \frac{\partial I}{\partial t} \int_D \vec{b}^2 dxdy, \\ - \frac{\partial I}{\partial z} \int_D \vec{z}_0 \cdot (\vec{e} \times \vec{b}) dxdy = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \int_D \vec{e}^2 dxdy \end{aligned} \quad (6.133)$$

Используя соотношения (6.124), (6.130), а, также переходя от нормированных полей к обычному электрическому и магнитному полю, получаем следующие уравнения.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{I \mu_0 \mu} \int_{S_1+S_2} \vec{B} \cdot \text{rot}_{\perp} (\vec{z}_0 E_z) d x d y = -\bar{L} \frac{\partial I}{\partial t}, \\ -\frac{\partial I}{\partial z} = \bar{C} \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.134)$$

Здесь выражение с ротором в плоскости  $x y$  распишем по известной формуле.

$$\vec{B} \cdot \text{rot}_{\perp} (\vec{z}_0 E_z) = \text{div}_{\perp} (\vec{z}_0 E_z \times \vec{B}) + \vec{z}_0 E_z \cdot \text{rot}_{\perp} \vec{B} \quad (6.135)$$

Интегрирование дивергенции по сечения проводов сводится к интегрированию по контурам, охватывающим провода по следующей формуле.

$$\int_{S_1+S_2} \text{div}_{\perp} (\vec{z}_0 E_z \times \vec{B}) d x d y = \oint_{l_1+l_2} \vec{n} \cdot (\vec{z}_0 E_z \times \vec{B}) d l \quad (6.136)$$

Но на контурах равняется нулю  $E_z$  в рассматриваемом приближении. Поэтому интеграл в уравнениях (6.134) принимает следующий вид.

$$J = \frac{1}{I \mu_0 \mu} \int_{S_1+S_2} \vec{B} \cdot \text{rot}_{\perp} (\vec{z}_0 E_z) d x d y = \frac{1}{I \mu_0 \mu} \int_{S_1+S_2} \vec{z}_0 E_z \cdot \text{rot}_{\perp} \vec{B} d x d y \quad (6.137)$$

Для расчета токов и поля в проводниках обычно рассматривают электромагнитное поле в квазистационарном приближении. В этом приближении уравнения Максвелла имеет следующий вид.

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{j}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (6.138)$$

Здесь  $\sigma$  – проводимость металла, из которого сделаны провода. Подставляем соотношения (6.138) в выражение для интеграла (6.137), и получаем следующую формулу.

$$J = \frac{1}{I} \int_{S_1+S_2} \frac{\vec{j}^2}{\sigma} d x d y = \frac{Q}{I} \quad (6.139)$$

Здесь через  $Q$  обозначена тепловая мощность, выделяемая на единицу длины в проводах длинной линии. Далее используем из электротехники формулу для тепловой мощности.

$$Q = \bar{R} I^2 \quad (6.140)$$

Здесь  $\bar{R}$  – погонное сопротивление длинной линии, сопротивление единицы длины длинной линии. Таки образом, погонное сопротивление длинной линии вычисляется по следующей формуле.

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{1}{I_0^2} \int_{s_1+s_2} \frac{\vec{j}^2}{\sigma} d x d y, \\ I_0 &= \int_{s_1} \vec{z}_0 \cdot \vec{j} d x d y \end{aligned} \quad (6.141)$$

Объединяя формулы (6.134), (6.139), (6.140) получаем телеграфные уравнения длинной линии с учетом потерь.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \bar{R} I = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial z} + \bar{C} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (6.142)$$

Иногда в телеграфные уравнения (6.142) добавляют еще один член. Дело в том, что если изоляция между проводами длинной линии не достаточно надежна, то могут существовать токи утечки. Получение это добавочно члена исходя из уравнений Максвелла достаточно сложно. Поэтому был придуман другой способ получения телеграфных уравнений.

Суть этого метода состоит в следующем. Если расстояние между проводами много меньше длины излучения, то потерями на излучение длинной линией можно пренебречь. Если же излучение не рассматривается, то уравнения Максвелла можно решать в квазистационарном приближении. Далее известно, что в квазистационарном приближении электрические схемы можно описывать с помощью уравнений Кирхгофа. Однако для применения квазистационарного приближения требуется, чтобы характерный размер электрической системы был много меньше длины волны

излучения. Поэтому длинная линия в целом не удовлетворяет условиям квазистационарного приближения.

И все же выход был найден. Если рассматривать отрезок длинной линии  $\Delta l$  много меньшей чем длина волны излучения  $\Delta l \ll \lambda$ , то для такого отрезка условия квазистационарного приближения будут выполняться. Значит, для этого отрезка можно применять уравнения Кирхгофа как для участка электрической цепи. Далее нужно выбрать правильную эквивалентную схему длинной линии. Обычно выбирается схема, показанная на Рис.76.

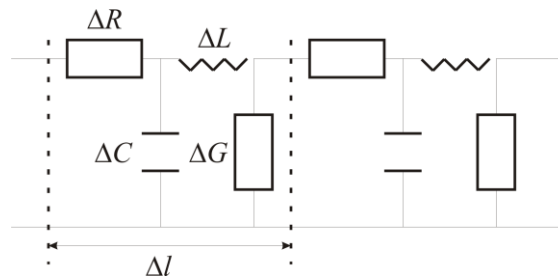


Рис.76.

Здесь  $\Delta R$  – сопротивление,  $\Delta L$  – индуктивность,  $\Delta C$  – емкость и  $\Delta G$  – проводимость утечки участка кабеля  $\Delta l$ . Далее для каждого элемента цепи  $\Delta l$  записываются уравнения Кирхгофа. Затем устремляют длину элемента цепи к нулю  $\Delta l \rightarrow 0$ . В результате получается следующая система телеграфных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \bar{R} I = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial z} + \bar{C} \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{G} U = 0 \end{cases} \quad (6.143)$$

Здесь  $\bar{G}$  – погонная проводимость утечки длинной линии.

#### 10. Решение телеграфных уравнений для коаксиального кабеля.

Чтобы решить задачу распространения электромагнитного сигнала вдоль длинной линии в приближении телеграфных уравнений нужно выполнить следующие действия.

Во-первых, электрическое и магнитное поле (6.117) считается поперечной ТЕМ-волной, и ищется в виде произведения напряжения  $U(z, t)$  и тока  $I(z, t)$  на нормированное электрическое поле  $\vec{e}(x, y)$  и нормированное магнитное поле  $\vec{b}(x, y)$ .

Во-вторых, нормированное электрическое  $\vec{e}(x, y)$  и магнитное поле  $\vec{b}(x, y)$  определяются при решении уравнений Максвелла (6.118), (6.119) и граничных условий (6.120), (6.121) для идеальной длинной линии.

В-третьих, зависимость напряжения  $U(z, t)$  и тока  $I(z, t)$  от координаты  $z$  и времени  $t$  находят, решая систему телеграфных уравнений (6.143).

В-четвертых, погонная емкость  $\bar{C}$  и погонная индуктивность  $\bar{L}$  вычисляются для идеальной длинной линии по формулам (6.130).

В-пятых, погонное сопротивление  $\bar{R}$  должно вычисляться по формуле (6.141). Однако, вычисление погонного сопротивления по формуле (6.141) требует знания распределения плотности тока внутри проводов длинной линии. Эта электродинамическая задача достаточно сложна. Поэтому погонное сопротивление длинной линии обычно получают из экспериментальных измерений. Как будет показано ниже, коэффициент затухания электромагнитного излучения в длинной линии связан с погонным сопротивлением. Поэтому, измеряя коэффициент затухания можно определить и погонное сопротивление.

Применим телеграфные уравнения для исследования распространения электромагнитного излучения вдоль коаксиального кабеля. Будем предполагать, что нет тока утечки между проводами. Поэтому будем использовать телеграфные уравнения в виде (6.142). Погонную емкость и погонную индуктивность кабеля будем вычислять по следующим формулам.

$$\bar{C} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad \bar{L} = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.144)$$

Погонное сопротивление  $\bar{R}$  будем считать заданной величиной.

Вначале рассмотрим волну в идеальном кабеле, и положим в уравнениях (6.142) погонное сопротивление равным нулю  $\bar{R} = 0$ . Далее будем предполагать монохроматическую зависимость напряжения и тока от времени.

$$\begin{cases} U(z, t) = U(z) e^{-i \omega t}, \\ I(z, t) = I(z) e^{-i \omega t} \end{cases} \quad (6.145)$$

Подставляем (6.30) в формулы (6.142), и получаем следующие уравнения.

$$\begin{cases} \frac{dU}{dz} - i \omega \bar{L} I = 0, \\ \frac{dI}{dz} - i \omega \bar{C} U = 0 \end{cases} \quad (6.146)$$

Подставляем одно уравнение в системе (6.146) в другое. В результате получаем следующее дифференциальное уравнение для напряжения.

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \omega^2 \bar{C} \bar{L} U = 0 \quad (6.147)$$

Аналогично получается дифференциальное уравнение для тока.

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + \omega^2 \bar{C} \bar{L} I = 0 \quad (6.148)$$

Общим решением уравнений (6.147), (6.148) являются следующие выражения.

$$\begin{cases} U(z) = U_+ e^{i \beta z} + U_- e^{-i \beta z}, \\ I(z) = I_+ e^{i \beta z} + I_- e^{-i \beta z}, \\ \beta = \omega \sqrt{\bar{C} \bar{L}} \end{cases} \quad (6.149)$$

Постоянные амплитуды напряжения  $U_{\pm}$  и тока  $I_{\pm}$  связываются друг с другом с помощью уравнений (6.146). В результате получаются следующие соотношения.

$$I_+ = \frac{\omega \bar{C}}{\beta} U_+ = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} U_+, \quad I_- = -\frac{\omega \bar{C}}{\beta} U_- = -\sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} U_- \quad (6.150)$$

Объединяя формулы (6.145), (6.149) и (6.150) получаем решение телеграфных уравнений в виде бегущих монохроматических волн напряжения и тока.



$$\begin{cases} U(z,t) = U_+ e^{i(\beta z - \omega t)} + U_- e^{-i(\beta z + \omega t)}, \\ I(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} U_+ e^{i(\beta z - \omega t)} - \sqrt{\frac{C}{L}} U_- e^{-i(\beta z + \omega t)} \end{cases} \quad (6.151)$$

Монохроматическая волна с амплитудой  $U_+$  бежит в положительную сторону оси  $z$ , а волна с амплитудой  $U_-$  бежит в отрицательную сторону оси  $z$ . Дисперсионное соотношение для этих волн имеет следующий вид.

$$\beta = \omega \sqrt{C L} \quad (6.152)$$

Подставим значения погонной емкости и погонной индуктивности из формул (6.144) в формулу (6.152). В результате получим следующее выражение.

$$\beta = \omega \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \quad (6.153)$$

Отсюда получаем фазовую скорость для волн напряжения и тока.

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (6.154)$$

Эта фазовая скорость совпадает с фазовой скоростью монохроматического излучения в идеальной длинной линии (6.10).

Рассмотрим кабельную линию, ограниченную с одного конца. Пусть на расстоянии  $z = l$  кабель обрезан и нагружен на сопротивление нагрузки  $Z_n$ . На нагрузке выполняется закон Ома.

$$U(l,t) = Z_n I(l,t) \quad (6.155)$$

На решение (6.151) накладываем граничное условие (6.155). В результате получаем следующее отношение амплитуд отраженной и падающей волны.

$$\frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0} e^{i2\beta l}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.156)$$

Здесь  $Z_0$  – волновое сопротивление кабельной линии. Если выполняется условие  $Z_n = Z_0$ , то в линии нет отраженной волны. Такой режим называют режимом бегущей волны.

Теперь в телеграфных уравнениях (6.142) учтем член с погонным сопротивлением, т.е. учтем наличие потерь в кабельной линии. Будем искать решение телеграфных уравнений (6.142) в виде монохроматической волны с затуханием вдоль оси  $z$ .

$$\begin{cases} U(z,t) = U_+ e^{i(pz - \omega t)}, \\ I(z,t) = I_+ e^{i(pz - \omega t)} \end{cases} \quad (6.157)$$

В формулах (6.157) постоянная распространения  $p$  является, вообще говоря, комплексным числом. Подставляем формулы (6.157) в телеграфные уравнения (6.142). В результате получаем следующую систему алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} i p U - i \omega \bar{L} I + \bar{R} I = 0, \\ i p I - i \omega \bar{C} U = 0 \end{cases} \quad (6.158)$$

Из системы (6.158) получаем следующее уравнение.

$$p^2 = \omega^2 \bar{C} \bar{L} + i R \omega \bar{C} \quad (6.159)$$

Постоянную распространения  $p$  разбиваем на действительную и мнимую части.

$$\begin{aligned} p &= \beta + i \alpha, \\ \beta &> 0, \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (6.160)$$

После подстановки (6.160) и простых преобразований, получаем следующие выражения.

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{(\omega^2 \bar{C} \bar{L})^2 + (R \omega \bar{C})^2} + \omega^2 \bar{C} \bar{L} \right)}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{(\omega^2 \bar{C} \bar{L})^2 + (R \omega \bar{C})^2} - \omega^2 \bar{C} \bar{L} \right)} \end{aligned} \quad (6.161)$$

Если потери в линии малы, то чаще всего выполняется следующее условие.

$$R \ll \omega \bar{L} \quad (6.162)$$

Условие (6.162) позволяет упростить формулы (6.161). В результате получаем более простые выражения.

$$\begin{aligned}\beta &= \omega \sqrt{\bar{C} \bar{L}}, \\ \alpha &= \frac{R}{2\omega \bar{L}}\end{aligned}\tag{6.163}$$

Первое уравнение в (6.163) определяет действительную часть  $\beta$  постоянной распространения  $p$ . Она совпадает с постоянной распространения (6.152). Мнимая часть  $\alpha$  постоянной распространения называется коэффициентом затухания. После подстановки выражения (6.160) в уравнения (6.157), последние принимают следующий вид.

$$\begin{cases} U(z, t) = U_+ e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ I(z, t) = I_+ e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} \end{cases}\tag{6.164}$$

Найдем отношение напряжений и токов в волнах (6.164) в двух точках на оси  $z$ , отстоящих на расстоянии  $l$ .

$$\left| \frac{U(l, t)}{U(0, t)} \right| = e^{-\alpha l}, \quad \left| \frac{I(l, t)}{I(0, t)} \right| = e^{-\alpha l}\tag{6.165}$$

Как видно из формул (6.165) величины напряжений и токов уменьшаются в  $e^{-\alpha l}$  раз. Это отношение может быть измерено, а значит, может быть найден коэффициент затухания  $\alpha$ . Затем по формуле (6.163) может быть определено погонное сопротивление  $\bar{R}$ .

### **Контрольные вопросы.**

1. В каком виде ищется электромагнитное поле волны, бегущей вдоль длинной линии.
2. Как выглядит уравнение Гельмгольца для электрического потенциала Герца, описывающего волну, бегущую вдоль длинной линии.
3. Как выражается электрическое и магнитное поле в длинной линии через электрический потенциал Герца.
4. Как доказывается перпендикулярность электрического и магнитного поля в длинной линии.

5. Как уравнение Гельмгольца для электрического потенциала Герца поля в длинной линии, превращается в уравнение Лапласа для потенциала Герца.
6. Как выглядят граничные условия для полей на поверхности идеального проводника в длинной линии.
7. Как выглядит граничное условие для электрического потенциала Герца на поверхности идеального проводника длинной линии.
8. Как выражается заряд на поверхности проводников в длинной линии через электрическое поле.
9. Как выражается ток в проводниках в длинной линии через магнитное поле.
10. Как выражаются проекции электрического и магнитного поля в длинной линии через скалярный потенциал.
11. Как выражается вектор Пойнтинга в длинной линии через скалярный потенциал.
12. Как доказывается равенство зарядов по абсолютному значению на двух проводниках длинной линии.
13. Как доказывается равенство токов по величине на двух проводниках длинной линии.
14. Какой математический вид имеет волна электрического тока, бегущая вдоль проводов длинной линии.
15. Какой вид имеет градиент и дивергенция в цилиндрической системе координат.
16. Как выглядит уравнение Лапласа для электрического потенциала Герца в цилиндрической системе координат.
17. Как выражаются проекции электрического и магнитного поля в кабеле через электрический потенциал Герца.
18. Как выражаются проекции электрического и магнитного поля в кабеле через скалярный потенциал.
19. Как связан заряд на проводниках длинной линии с током текущим по этим проводникам.
20. Как выражается вектор Пойнтинга в кабеле через ток текущий вдоль кабеля.
21. Как выглядит система телеграфных уравнений для идеальной длинной линии.

22. Как выглядит система телеграфных уравнений для длинной линии с потерями.
23. Как выводится погонная емкость кабеля.
24. Как выражается плотность энергии волны, бегущей вдоль кабеля через ток текущий в кабеле.
25. Как выводится погонная индуктивность кабеля.
26. Общее выражение для монохроматических волн тока и напряжения, являющихся решением телеграфных уравнений.
27. Связь между амплитудами тока и напряжения для монохроматических волн, бегущих в противоположных направлениях в длинной линии.
28. Связь фазовой скорости волны бегущей вдоль длинной линии с погонной емкостью и погонной индуктивностью линии.
29. Как отношение амплитуд отраженной и падающей волны в длинной линии зависит от волнового сопротивления линии.
30. Как вычисляются постоянная распространения и коэффициент затухания волны в длинной линии с потерями.