

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}, t) = 0, & t < 0, \\ \rho(\vec{r}, t) \neq 0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0, & t < 0, \\ \vec{j}(\vec{r}, t) \neq 0, & t \geq 0 \end{cases}, \\
\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, & t < 0, \\ \vec{E}(\vec{r}, t) \neq 0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, & t < 0, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \neq 0, & t \geq 0 \end{cases}
\end{cases} \quad (5.2)$$

Граничными условиями задачи излучения являются следующие условия. На больших расстояниях от излучающей системы вектора электрического и магнитного поля должны стремиться к нулю. Эти граничные условия запишем в следующем виде.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow 0, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \rightarrow 0, \\ r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для решения поставленной задачи излучения удобно использовать дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов φ, \vec{A} с калибровкой Лоренца.

$$\begin{cases} \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \\ \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Электрическое и магнитное поле выражаются через электромагнитные потенциалы с помощью следующих формул.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{cases} \quad (5.5)$$

Используя связь (5.5) между электромагнитными потенциалами и векторами электрического и магнитного поля, можно написать следующие начальные и граничные условия для электромагнитных потенциалов. Так

начальные условия для электромагнитных потенциалов будут иметь следующий вид.

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = 0, & t < 0, \\ \varphi(\vec{r}, t) \neq 0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0, & t < 0, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) \neq 0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

Граничные условия для электромагнитных потенциалов записываются в следующем виде.

$$\varphi(\vec{r}, t) \rightarrow 0, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow 0, \quad (5.7)$$

$$r \rightarrow \infty$$

В математической физике доказывается, что решение системы уравнений (5.4) с начальными условиями (5.6) и граничными условиями (5.7) дается следующими интегральными соотношениями.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{R} dV', \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', \tau)}{R} dV', \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}', \quad \tau = t - R/c \end{aligned} \quad (5.8)$$

В формулах (5.8) обратим внимание на следующие моменты. Величина R равна расстоянию от точки, с координатами \vec{r} , в которой ищется электромагнитное поле до элемента объема dV' с координатами \vec{r}' . Под интегралом стоят плотность электрического заряда, и плотность тока излучающей системы в момент времени τ . Этот момент времени меньше момента времени t на величину R/c . Эта величина называется временем запаздывания.

$$t_{\text{delay}} = \frac{R}{c} \quad (5.9)$$

Благодаря этому электромагнитные потенциалы, определяемые формулами (5.8) называются запаздывающими потенциалами. Физическая

природа запаздывающих потенциалов связана с принципом причинности. Возмущение электромагнитного поля, зародившееся в точке \vec{r}' , двигаясь со скоростью c , достигнет точки \vec{r} спустя время запаздывания (5.9).

На Рис.38 это положение отражено в надписях на рисунке. Так электрическое и магнитное поля рассматриваются в момент времени t , а плотность заряда и плотность тока рассматриваются в более ранний момент времени τ .

2. Поле излучения в волновой зоне.

Рассмотрим запаздывающие потенциалы (5.8) на больших расстояниях от излучающей системы. Это означает, что в интегралах (5.8) должны выполняться условия.

$$r \gg r', \quad R \gg r' \quad (5.10)$$

Для решения поставленной задачи, удобно сначала выполнить преобразование Фурье по времени. Для каждой физической величины зависящей от времени выполним следующие преобразования Фурье.

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (5.13)$$

Подставляя соотношения (5.11), (5.12) в формулы (5.8) получаем уравнения для нахождения Фурье компонент запаздывающих потенциалов.

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_{\omega}(\vec{r}') \frac{e^{ikR}}{R} dV', \\ \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \frac{e^{ikR}}{R} dV', \\ k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Покажем, как было получено уравнение (5.14) для скалярного потенциала. Подставим выражение (5.11) для плотности заряда в формулу (5.8) для скалярного потенциала. В результате получим следующее выражение.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{R} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\omega}(\vec{r}') e^{-i\omega\tau} d\omega \right) dV' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_{\omega}(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV' \right) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (5.15)$$

Сравнивая формулу (5.15) с преобразованием Фурье (5.12) для скалярного потенциала, приходим к выводу, что выражение, стоящее в скобках во второй строчке формулы (5.15) является Фурье компонентой для скалярного потенциала. Утверждение доказано.

Формулы (5.5) для Фурье компонент электрического и магнитного поля принимают следующий вид.

$$\begin{cases} \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_{\omega}(\vec{r}) + i\omega \vec{A}_{\omega}(\vec{r}), \\ \vec{B}_{\omega}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \end{cases} \quad (5.16)$$

Теперь будем рассматривать формулы (5.14) и (5.16) на больших расстояниях от излучающей системы. Для этого разложим сферическую волну e^{ikR}/R , стоящую под интегралами в формуле (5.14), в ряд Тейлора по малой величине r'/r .

Вспомним, как выглядит разложение в ряд Тейлора функции нескольких переменных.

$$\begin{aligned} f(x+x', y+y', z+z') = & f(x, y, z) + \\ & + f_x(x, y, z)x' + f_y(x, y, z)y' + f_z(x, y, z)z' + \\ & + \frac{1}{2}f_{xx}(x, y, z)x'x' + \frac{1}{2}f_{yy}(x, y, z)y'y' + \frac{1}{2}f_{zz}(x, y, z)z'z' + \\ & + f_{xy}(x, y, z)x'y' + f_{yz}(x, y, z)y'z' + f_{zx}(x, y, z)z'x' + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Разложение (5.17) можно написать в более компактном виде.

$$\begin{aligned} f(\vec{r} + \vec{r}') = & f(\vec{r}) + \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\vec{r}) + \\ & + \frac{1}{2} \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(\vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если использовать векторный оператор набла ∇ , то выражение (5.18) можно записать еще короче.

$$\begin{aligned} f(\vec{r} + \vec{r}') = & f(\vec{r}) + (\vec{r}' \cdot \nabla) f(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \nabla)^2 f(\vec{r}) + \dots = \\ = & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (\vec{r}' \cdot \nabla)^l f(\vec{r}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Теперь используя формулу (5.19) напомним разложение в ряд Тейлора сферической волны.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-\vec{r}' \cdot \nabla)^l \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.20)$$

Здесь учтено выражение $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Запишем несколько членов ряда (5.20).

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikr}}{r} - \left\{ \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} (ikr - 1) \right\} \frac{e^{ikr}}{r} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{r'}{r^2} \right)^2 (ikr - 1) + \left(\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \right)^2 ((ikr)^2 - 3ikr + 3) \right\} \frac{e^{ikr}}{r} + \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

Волновой или дальней зоной назовем область, в которой выполняется условие.

$$kr \gg 1 \quad (5.22)$$

Учитывая связь волнового числа и длины волны излучения $k = 2\pi/\lambda$, можно сказать, что в волновой зоне выполняется также условие.

$$r \gg \lambda \quad (5.23)$$

Разложение (5.21) рассмотрим в волновой зоне. Используем условие (5.22) и запишем (5.21) в следующем виде.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikr}}{r} + \left(-ik \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{1}{2} \left(-ik \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} \right)^2 \frac{e^{ikr}}{r} + \dots \quad (5.24)$$

Введем единичный вектор \vec{n} в направлении вектора \vec{r} .

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.25)$$

Тогда разложение (5.24) можно записать в компактном виде.

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{e^{ikr}}{r} + (-ik \vec{r}' \cdot \vec{n}) \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{1}{2} (-ik \vec{r}' \cdot \vec{n})^2 \frac{e^{ikr}}{r} + \dots = \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + (-ik \vec{r}' \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} (-ik \vec{r}' \cdot \vec{n})^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \vec{r}' \cdot \vec{n}} = \frac{e^{ik(r - \vec{r}' \cdot \vec{n})}}{r} = \frac{e^{ik\bar{R}}}{r} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Таким образом, в волновой зоне сферическая волна может быть заменена следующим выражением.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ik\vec{R}\cdot\vec{n}}}{r} \quad (5.27)$$

Подставляем (5.27) в формулы (5.14) и получаем следующие выражения.

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V \rho_{\omega}(\vec{r}') e^{ik\vec{R}\cdot\vec{n}} dV', \\ \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') e^{ik\vec{R}\cdot\vec{n}} dV', \\ k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Найдем связь между Фурье компонентами скалярного и векторного потенциалов. Взяв калибровку Лоренца (5.4) и подставив туда преобразование Фурье (5.12), получим следующее уравнение.

$$\operatorname{div} \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) - \frac{i\omega}{c^2} \varphi_{\omega}(\vec{r}) = 0 \quad (5.29)$$

Возьмем векторный потенциал (5.28) и найдем дивергенцию от него.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} e^{ik\vec{R}\cdot\vec{n}} \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \right) dV' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\frac{\vec{n}}{r^2} + \frac{ik}{r} \left(\vec{n} + \vec{n} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} - \frac{\vec{r}'}{r} \right) \right) \cdot \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') e^{ik\vec{R}\cdot\vec{n}} dV' \end{aligned} \quad (5.30)$$

Теперь кроме условия волновой зоны (5.22), добавим условие.

$$\frac{r'}{r} \ll 1 \quad (5.31)$$

Это условие обозначает, что волновая зона находится на расстояниях много больших размеров излучающей системы. Учитывая условия (5.22) и (5.31) получаем упрощенное выражение для (5.30).

$$\operatorname{div} \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = ik\vec{n} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') e^{ik\vec{R}\cdot\vec{n}} dV' \quad (5.32)$$

Сравниваем выражение (5.32) с формулой (5.28) получаем следующее соотношение.

$$\operatorname{div} \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = i k \vec{n} \cdot \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \quad (5.33)$$

Легко показать, что ротор от Фурье компоненты векторного потенциала находится по аналогичной формуле.

$$\operatorname{rot} \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = i k \vec{n} \times \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \quad (5.34)$$

Точно также можно получить формулу для градиента Фурье компоненты скалярного потенциала.

$$\operatorname{grad} \varphi_{\omega}(\vec{r}) = i k \vec{n} \varphi_{\omega}(\vec{r}) \quad (5.35)$$

Используя формулы (5.29) и (5.33) находим связь между Фурье компонентами скалярного и векторного потенциалов.

$$\varphi_{\omega}(\vec{r}) = c \vec{n} \cdot \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \quad (5.36)$$

По формулам (5.16), (5.35) и (5.36) получаем выражение для Фурье компоненты электрического поля в волновой зоне.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad} \varphi_{\omega}(\vec{r}) + i \omega \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = \\ &= -i k \vec{n} \varphi_{\omega}(\vec{r}) + i \omega \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = \\ &= -i \omega \left(\vec{n} \left(\vec{n} \cdot \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \right) - \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \right) = \\ &= -i \omega \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Таким образом, Фурье компонента электрического поля выражается через Фурье компоненту векторного потенциала через двойное векторное произведение.

$$\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = -i \omega \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \right) \quad (5.38)$$

По формулам (5.16), (5.34) получаем выражение для Фурье компоненты магнитного поля в волновой зоне.

$$\begin{aligned}\vec{B}_\omega(\vec{r}) &= \text{rot } \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \\ &= ik\vec{n} \times \vec{A}_\omega(\vec{r})\end{aligned}\quad (5.39)$$

Таким образом, Фурье компонента магнитного поля выражается через Фурье компоненту векторного потенциала через векторное произведение.

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = ik\vec{n} \times \vec{A}_\omega(\vec{r}) \quad (5.40)$$

Сравнивая формулы (5.38) и (5.40) находим связь между Фурье компонентами электрического и магнитного поля в волновой зоне.

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = -c\vec{n} \times \vec{B}_\omega(\vec{r}) \quad (5.41)$$

Анализ формул (5.38), (5.40) и (5.41) показывает, что векторы \vec{n} , \vec{E}_ω и \vec{B}_ω образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов.

Теперь от Фурье компонент вернемся к величинам, зависящим от координат и времени. Подставим (5.41) в преобразование Фурье (5.13). В результате получим следующую связь между электрическим и магнитным полем в волновой зоне.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -c\vec{n} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (5.42)$$

Прежде чем переходить в формулах (5.38), (5.40) от Фурье компонент к величинам, зависящим от времени, вспомним, как выглядит производная по времени от преобразования Фурье.

$$\begin{cases} f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \dot{f}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega) f_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (5.43)$$

В формулах (5.43) точка над функцией означает производную по времени. Используя формулы (5.38), (5.40), а также формулы связанные с преобразованием Фурье (5.12), (5.13) и (5.43), получаем следующие выражения для электрического и магнитного поля в волновой зоне.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \right) \quad (5.44)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \quad (5.45)$$

Формулы (5.42), (5.44), (5.45) определяют электрическое и магнитное поле в волновой зоне. Как видно на Рис.39, электромагнитное поле в волновой зоне является поперечным полем, т.е. имеет поляризацию ТМЕ волны.

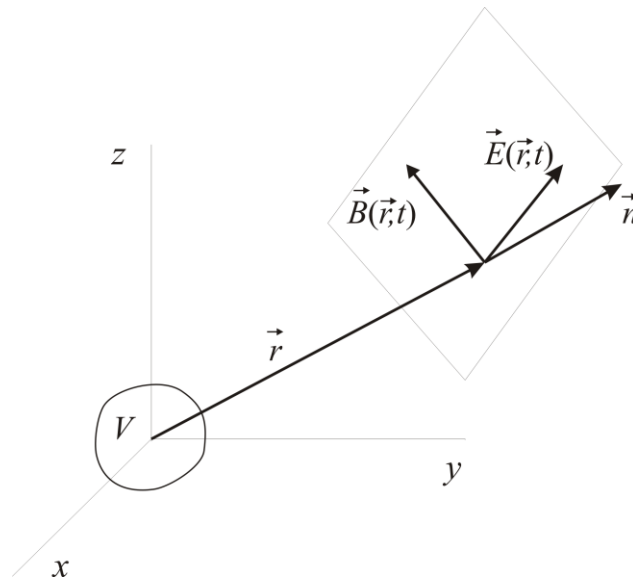


Рис.39 (5.2)

Найдем вектор Пойнтинга для поля излучения в волновой зоне. Используем формулы (5.42), (5.44) и (5.45).

$$\begin{aligned}
\vec{S}_p &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \\
&= -\frac{c}{\mu_0} (\vec{n} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{c}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{n} \times \vec{B}) = \\
&= \frac{c}{\mu_0} (\vec{n} (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{n} \cdot \vec{B})) = \frac{c}{\mu_0} \vec{n} \vec{B}^2
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Подставляя формулу (5.45) в формулу (5.42) находим выражение для вектора Пойнтинга в волновой зоне.

$$\vec{S}_p(\vec{r}, t) = \frac{1}{c \mu_0} \vec{n} \left(\vec{n} \times \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \right)^2 \tag{5.47}$$

Как видно из формулы (5.47) вектор Пойнтинга направлен вдоль вектора \vec{n} и пропорционален квадрату производной по времени от векторного потенциала в волновой зоне.

Как видно из формул (4.44) и (4.45) электрическое и магнитное поле, в волновой зоне определяются производной по времени от векторного потенциала $\dot{\vec{A}}$. Чтобы найти векторный потенциал, подставим выражение для Фурье компоненты векторного потенциала (4.28) в преобразование Фурье (5.12).

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{ik\vec{R} \cdot \vec{n}} dV' \right) e^{-i\omega t} d\omega = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega \left(t - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{n} \right)} d\omega \right) dV' = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{n} \right) dV'
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Таким образом, векторный потенциал в волновой зоне определяется следующей формулой.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{n} \right) dV' \tag{5.49}$$

3. Мультипольное разложение поля излучения в волновой зоне.

В формуле (5.49) плотность электрического тока разложим в ряд Тейлора по величине $\vec{r}' \cdot \vec{n} / c$.

$$\begin{aligned}
 \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{n}\right) &= \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{r}' \cdot \vec{n}\right) = \\
 &= \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) + \dot{\vec{j}}(\vec{r}', \tau_0) \frac{1}{c} (\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} \ddot{\vec{j}}(\vec{r}', \tau_0) \frac{1}{c^2} (\vec{r}' \cdot \vec{n})^2 + \dots = \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) (\vec{r}' \cdot \vec{n})^l \\
 \tau_0 &= t - \frac{r}{c}
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Подставим разложение (5.50) в формулу (5.49).

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) (\vec{r}' \cdot \vec{n})^l dV' = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) (\vec{r}' \cdot \vec{n})^l dV'
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Выражению (5.51) можно придать следующий вид.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \vec{M}^{i_1 i_2 \dots i_l}(\vec{r}', \tau_0) n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_l} \tag{5.52}$$

В формуле (5.52) введены тензоры мультипольных моментов.

$$\vec{M}^{i_1 i_2 \dots i_l}(\vec{r}', \tau_0) = \int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l} dV' \tag{5.53}$$

В формуле (5.52) по повторяющимся индексам проводится суммирование. Например, следующее выражение показывает, как осуществляется суммирование.

$$\vec{M}^{i_1 i_2} n_{i_1} n_{i_2} = \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \vec{M}^{i_1 i_2} n_{i_1} n_{i_2} \quad (5.54)$$

Таким образом, векторный потенциал в волновой зоне раскладывается в ряд по мультипольным моментам.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (5.55)$$

Подставляя разложение (5.55) в формулы (5.44), (5.45) для электрического и магнитного поля, получаем разложение электрического и магнитного поля в волновой зоне по мультипольным моментам.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{E}^{(2)}(\vec{r}, t) + \dots \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{B}^{(2)}(\vec{r}, t) + \dots \end{aligned} \quad (5.56)$$

Мультипольное разложение электромагнитного поля имеет практический смысл, если соответствующие ряды быстро сходятся. Это означает, что должны выполняться следующие соотношения.

$$|\vec{A}^{(1)}(\vec{r}, t)| \gg |\vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t)| \gg |\vec{A}^{(3)}(\vec{r}, t)| \gg \dots \quad (5.57)$$

Аналогичные соотношения должны выполняться и для разложения (5.50) плотности электрического тока. Оценим величину второго члена в разложении (5.50).

$$\left| \dot{\vec{j}}(\vec{r}', \tau_0) \frac{1}{c} (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \right| \approx \omega \left| \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) \right| \frac{r'}{c} = k r' \left| \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) \right| \quad (5.58)$$

При получении формулы (5.58) предполагалось, что плотность тока в излучающей системе колеблется с частотой ω . Таким образом, что бы второй

член в разложении (5.50) был много меньше первого члена необходимо выполнение следующего условия.

$$k r' \ll 1 \quad (5.59)$$

Это условие можно записать также в другом виде, используя длину волны излучения.

$$r' \ll \lambda \quad (5.60)$$

Таким образом, использовать мультипольное разложение можно, если размеры излучающей системы много меньше длины волны излучения.

Рассмотрим подробно первые два члена мультипольного разложения векторного потенциала (5.55).

4. Дипольное излучение.

Рассмотрим в разложении (5.55) векторного потенциала первый член.

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV' \quad (5.61)$$

Выразим плотность электрического тока через плотность электрического заряда с помощью уравнения непрерывности.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (5.62)$$

Затем рассмотрим следующий интеграл.

$$\int_V \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV' = - \int_V \vec{r}' \text{div } \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV' \quad (5.63)$$

Для преобразования второго интеграла в выражении (5.63) используем интегральное соотношение векторного анализа.

$$\int_V \vec{r} \operatorname{div} \vec{a} dV = - \int_V \vec{a} dV + \oint_S \vec{r} (\vec{a} \cdot d\vec{S}) \quad (5.64)$$

Подставляем формулу (5.64) в (5.63) и получаем следующее выражение.

$$\int_V \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV' = \int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV' - \oint_S \vec{r} (\vec{j}(\vec{r}', \tau_0) \cdot d\vec{S}) \quad (5.65)$$

Заметим что выбор объема V и поверхности S произволен. Если выбрать поверхность вне объема излучающей системы, то на поверхности плотность электрического тока будет равна нулю и интеграл по поверхности тоже будет равен нулю.

Таким образом, интеграл в формуле (5.61) преобразован к следующему виду.

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV' = \int_V \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV' \quad (5.66)$$

Далее вспоминаем выражение для дипольного электрического момента системы.

$$\vec{p}_e = \int_V \rho \vec{r} dV \quad (5.67)$$

Сравнивая формулы (5.66) и (5.67) получаем окончательное выражение для интеграла (5.65).

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV' = \dot{\vec{p}}_e(\tau_0) \quad (5.68)$$

Подставляем интеграл (5.68) в формулу (5.61) и получаем следующее выражение для векторного потенциала.

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}_e(\tau_0) \quad (5.69)$$

Таким образом, векторный потенциал в волновой зоне в дипольном приближении определяется формулой (5.69). Используя формулы (5.44),

(5.45) найдем выражения для электрического и магнитного поля в волновой зоне в дипольном приближении.

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \left(\ddot{\vec{p}}_e(\tau_0) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \quad (5.70)$$

$$\vec{B}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \left(\ddot{\vec{p}}_e(\tau_0) \times \vec{n} \right) \quad (5.71)$$

На Рис.40 показано взаимное расположение векторов электрического и магнитного поля в волновой зоне.

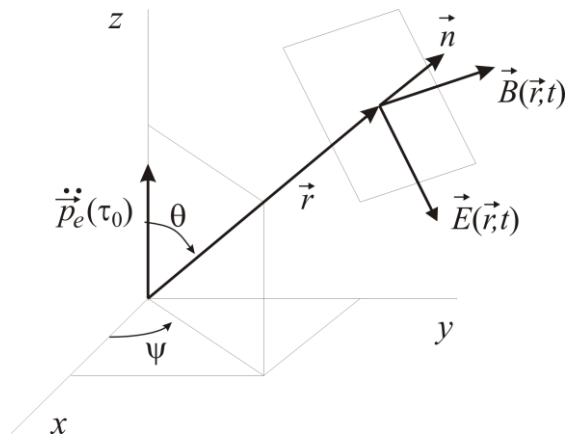


Рис.40 (5.3)

Теперь найдем вектор Пойнтинга в дипольном приближении.

$$\vec{S}_P^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{1}{r^2} \vec{n} \left(\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}_e(\tau_0) \right)^2 \quad (5.72)$$

Интенсивность излучения в дипольном приближении будет определяться формулой.

$$J^{(1)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\ddot{\vec{p}}_e^2(\tau_0)}{r^2} \sin^2 \theta \quad (5.73)$$

Здесь θ — угол между вектором $\ddot{\vec{p}}_e$ и вектором \vec{n} Рис.40.

5. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение.

Рассмотрим второе слагаемое в мультипольном разложении (5.55) векторного потенциала. Обычно первое слагаемое в разложении (5.55) много больше, чем следующие слагаемые и поэтому бывает достаточно рассмотреть дипольное излучение. Но бывают ситуации, когда необходимо учитывать следующие члены в мультипольном разложении. Например, если взять антенну в виде витка с током, то у такой излучающей системы электрический дипольный момент будет равен нулю. Поэтому мультипольное разложение (5.55) будет начинаться со второго члена.

Для получения этого члена поставим в формулу (4.49) второй член из разложения плотности тока (5.50).

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \int_V \dot{\vec{j}}(\vec{r}', \tau_0) (\vec{r}' \cdot \vec{n}) dV' \quad (5.74)$$

Используем следующую формулу векторного анализа.

$$\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{2} \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \frac{1}{2} (\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})) \quad (5.75)$$

В результате выражение (5.74) принимает следующий вид.

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) = & \frac{\mu_0}{8\pi c} \frac{1}{r} \int_V (\vec{r}' \times \dot{\vec{j}}(\vec{r}', \tau_0)) \times \vec{n} dV' + \\ & + \frac{\mu_0}{8\pi c} \frac{1}{r} \int_V (\dot{\vec{j}}(\vec{r}', \tau_0) (\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}' (\dot{\vec{j}}(\vec{r}', \tau_0) \cdot \vec{n})) dV' \end{aligned} \quad (5.76, 75)$$

Назовем первый член в формуле (5.76) векторным потенциалом магнитно-дипольного излучения, а второй член векторным потенциалом квадрупольного излучения. Это изобразим в виде следующего соотношения.

$$\vec{A}^{(2)} = \vec{A}_{m-d} + \vec{A}_q \quad (5.78)$$

Рассмотрим интеграл, описывающий магнитно-дипольное излучение. Вспомним выражение для магнитного дипольного момента системы.

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r} \times \vec{j}) dV \quad (5.79)$$

Сравнивая формулу (5.79) и первый интеграл (5.76) получаем следующее выражение.

$$\vec{A}_{m-d}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \dot{\vec{p}}_m(\tau_0) \times \vec{n} \quad (5.80, 76)$$

Таким образом, векторный потенциал, описывающий магнитно-дипольное излучение, определяется формулой (5.80).

Запишем формулу для векторного потенциала квадрупольного излучения.

$$\vec{A}_q(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{8\pi c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\vec{j}(\vec{r}', \tau_0)(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{j}(\vec{r}', \tau_0) \cdot \vec{n})) dV' \quad (5.81, 77)$$

В интеграле (5.81) надо от плотности тока перейти к плотности заряда, как это было проделано выше в формулах (5.62) – (5.66). Существует более быстрый способ получить тот же результат. Во-первых, вспомним, как связана плотность электрического тока с плотностью электрического заряда.

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (5.82)$$

Здесь \vec{v} – скорость зарядов в точке \vec{r} в момент времени t . Подставим (5.82) в (5.81) и запишем отдельно полученный интеграл.

$$\vec{b}(\tau_0) = \int_V \rho(\vec{r}', \tau_0) (\vec{v}(\vec{r}', \tau_0)(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{v}(\vec{r}', \tau_0) \cdot \vec{n})) dV' \quad (5.83)$$

В интеграле (5.83) переходим от непрерывного распределения заряда к сумме точечных зарядов находящихся в объеме V . В результате получаем следующую сумму.

$$\vec{b}(t) = \sum_i q_i \left(\vec{v}^{(i)}(t) (\vec{r}^{(i)}(t) \cdot \vec{n}) + \vec{r}^{(i)}(t) (\vec{v}^{(i)}(t) \cdot \vec{n}) \right) \quad (5.84)$$

Здесь q_i – точечный заряд, $\vec{r}^{(i)}$ – радиус-вектор точечного заряда, $\vec{v}^{(i)}$ – скорость точечного заряда. Кроме того, заметим, что скорость заряда есть производная по времени от радиус-вектора.

$$\vec{v}^{(i)}(t) = \dot{\vec{r}}^{(i)}(t) \quad (5.85)$$

Учтем соотношение (5.85) и запишем α - проекцию вектора \vec{b} .

$$b_\alpha(t) = \sum_i q_i \left(\dot{x}_\alpha^{(i)} (x_\beta^{(i)} \cdot n_\beta) + x_\alpha^{(i)} (\dot{x}_\beta^{(i)} \cdot n_\beta) \right) \quad (5.86)$$

В выражении (5.86) по повторяющемуся индексу β проводится суммирование. Производную по времени в формуле (5.86) можно вынести за знак суммы.

$$b_\alpha(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_i q_i x_\alpha^{(i)} x_\beta^{(i)} \right) n_\beta \quad (5.87)$$

Сумма, стоящая в выражении (5.87) называется тензором квадрупольного момента системы зарядов.

$$D_{\alpha\beta}(t) = \sum_i q_i x_\alpha^{(i)}(t) x_\beta^{(i)}(t) \quad (5.88)$$

Если вернуться к непрерывному распределению электрического заряда в излучающей системе, то сумма в формуле (5.88) заменится на интеграл.

$$D_{\alpha\beta}(t) = \int_V \rho(\vec{r}', t) x'_\alpha x'_\beta dV' \quad (5.89)$$

Таким образом, проекции вектора в формуле (5.87) можно записать в следующем виде.

$$b_\alpha(t) = \dot{D}_{\alpha\beta}(t) n_\beta \quad (5.90)$$

Обычно вводят вектор квадрупольного момента, проекции которого определяются следующей формулой.

$$D_{\alpha}(t) = D_{\alpha\beta}(t) n_{\beta} \quad (5.91)$$

После этого вектор \vec{b} выражается через вектор квадрупольного момента \vec{D} следующим соотношением.

$$\vec{b}(t) = \dot{\vec{D}}(t) \quad (5.92)$$

Подставляя (5.92) в формулу (5.81) получаем векторный потенциал квадрупольного излучения.

$$\vec{A}_q(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{8\pi c} \frac{1}{r} \ddot{\vec{D}}(\tau_0) \quad (5.81)$$

6. Симметричная система уравнений Максвелла.

Для придания системе уравнений Максвелла симметричного вида, можно наряду с плотность электрического заряда ρ и плотностью электрического тока \vec{j} , формально ввести плотность магнитного заряда ρ_m и плотность магнитного тока \vec{j}_m . Запишем систему уравнений Максвелл для электромагнитного поля в вакууме в следующем виде.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{D} = \rho, \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (5.82)$$

Здесь вектор индукции электрического поля \vec{D} и вектор напряженности магнитного поля \vec{H} связаны с напряженностью электрического поля \vec{E} и индукцией магнитного поля \vec{B} следующими соотношениями.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \quad (5.83)$$

Из системы (5.82) следует уравнение непрерывности для электрического тока.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (5.84)$$

Плотность магнитного заряда ρ_m и плотность магнитного тока \vec{j}_m вводим таким образом, что бы, во-первых, система уравнений Максвелла имела симметричный вид относительно замены электрических величин на магнитные величины, во-вторых, чтобы имело место уравнение непрерывности для магнитного тока.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0 \quad (5.85)$$

В результате получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} = \rho_m \end{cases} \quad (5.86)$$

В дальнейшем будем рассматривать монохроматические поля излучения. Поэтому зависимость всех физических величин в системе (5.86) от времени

будет определяться экспоненциальным множителем $\exp(-i\omega t)$. В этом случае система (5.86) принимает следующий вид.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{j}_m + i\omega \mu_0 \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} - i\omega \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \\ \operatorname{div} \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \rho_m \end{cases} \quad (5.87)$$

Симметричная система уравнений Максвелла (5.87) удобна для промежуточных расчетов. Обычно в конце вычислений в полученных формулах плотность магнитного заряда ρ_m и плотность магнитного тока \vec{j}_m полагают равной нулю.

7. Формулы Грина для скалярных полей.

Для получения формул электромагнитного поля произвольной системы излучателей, удобно использовать формулы Грина. Получим две формулы Грина для скалярных полей. Для этого вспомним теорему Гаусса-Остроградского. Эта теорема связывает значения векторного поля в объеме V со значениями этого же векторного поля на поверхности S , охватывающей данный объем Рис.8.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A}_n dS \quad (5.88)$$

Сделаем следующую замену. Выразим векторное поле \vec{A} через два скалярных поля u и v с помощью следующего соотношения.

$$\vec{A} = v \operatorname{grad} u = v \nabla u \quad (5.89)$$

Найдем дивергенцию вектора \vec{A} .

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u \quad (5.90)$$

Проекция вектора \vec{A} на нормаль \vec{n} к поверхности дается следующей формулой.

$$A_n = v \frac{\partial u}{\partial n} \quad (5.91)$$

Подставив соотношения (5.90), (5.91) в уравнение (5.88) получаем 1-ую формулу Грина для скалярных полей v и u .

$$\int_V (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) dV = \oint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (5.92)$$

В формуле (5.92) поменяем местами функции v и u .

$$\int_V (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dV = \oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS \quad (5.93)$$

Вычитаем из уравнения (5.93) уравнение (5.92) и в результате получаем 2-ую формулу Грина для скалярных полей v и u .

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \oint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (5.94)$$

Сделаем замечание о применимости рассмотренных формул.

Единственное требование это чтобы были непрерывны функции v , u и их частные производные как в объеме V так и на поверхности S .

8. Формулы Грина для векторных полей.

Теперь получим две формулы Грина для векторных полей. Для этого снова обратимся к теореме Гаусса-Остроградского (5.88). Векторное поле \vec{A}

выразим через два других векторных поля \vec{P} и \vec{Q} с помощью следующего соотношения.

$$\vec{A} = \vec{P} \times \text{rot } \vec{Q} \quad (5.95)$$

Найдем дивергенцию вектора \vec{A} . Воспользуемся следующей формулой векторного анализа.

$$\begin{aligned} \text{div } (\vec{a} \times \vec{b}) &= \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \\ &= \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b} \end{aligned} \quad (5.96)$$

Используем формулу (5.96) для нахождения дивергенции вектора \vec{A} . В результате получаем следующее выражение.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \text{div } (\vec{P} \times \text{rot } \vec{Q}) = \\ &= \text{rot } \vec{Q} \cdot \text{rot } \vec{P} - \vec{P} \cdot \text{rot rot } \vec{Q} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Проекция вектора \vec{A} на нормаль \vec{n} к поверхности дается следующей формулой.

$$A_n = \vec{A} \cdot \vec{n} = (\vec{P} \times \text{rot } \vec{Q}) \cdot \vec{n} \quad (5.98)$$

Подставив соотношения (5.97), (5.98) в уравнение (5.88) получаем 1-ую формулу Грина для векторных полей \vec{P} и \vec{Q} .

$$\int_V (\text{rot } \vec{Q} \cdot \text{rot } \vec{P} - \vec{P} \cdot \text{rot rot } \vec{Q}) dV = \oint_S (\vec{P} \times \text{rot } \vec{Q}) \cdot \vec{n} dS \quad (5.99)$$

В формуле (5.99) поменяем местами функции v и u .

$$\int_V (\text{rot } \vec{P} \cdot \text{rot } \vec{Q} - \vec{Q} \cdot \text{rot rot } \vec{P}) dV = \oint_S (\vec{Q} \times \text{rot } \vec{P}) \cdot \vec{n} dS \quad (5.100)$$

Вычитаем из уравнения (5.99) уравнение (5.100) и в результате получаем 2-ую формулу Грина для векторных полей \vec{P} и \vec{Q} .

$$\int_V (\vec{Q} \cdot \text{rot rot } \vec{P} - \vec{P} \cdot \text{rot rot } \vec{Q}) dV = \oint_S (\vec{P} \times \text{rot } \vec{Q} - \vec{Q} \times \text{rot } \vec{P}) \cdot \vec{n} dS \quad (5.101)$$

Сделаем замечание о применимости рассмотренных формул.

Единственное требование это чтобы были непрерывны векторные поля \vec{P} и \vec{Q} , и их частные производные как в объеме V так и на поверхности S .

Формулу Грина (5.94) для скалярных полей удобно применять в краевых задачах электростатики. Формулу Грина (5.101) для векторных полей удобно использовать при решении симметричной системы уравнений Максвелла (5.87).

9. Электромагнитное поле произвольной системы источников.

Найдем решение симметричной системы уравнений Максвелла (5.87) в объеме V ограниченном набором замкнутых поверхностей S_1, S_2, \dots, S_N Рис.41.

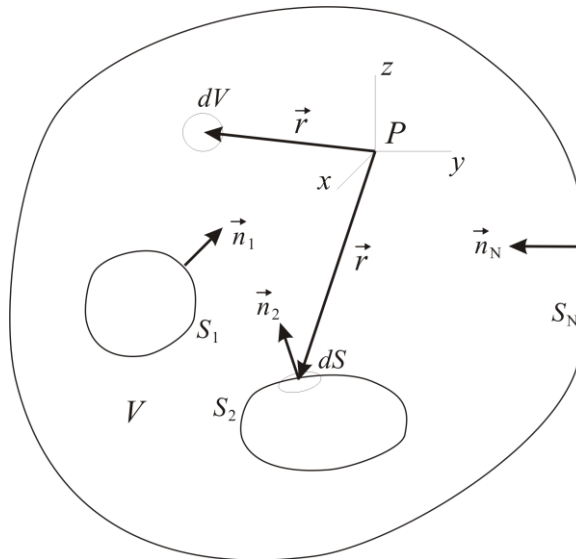


Рис.41 (5.4)

Используем формулу Грина (5.101) для областей указанных на Рис.41. В результате получим следующую формулу.

$$\int_V (\vec{Q} \cdot \text{rot rot } \vec{P} - \vec{P} \cdot \text{rot rot } \vec{Q}) dV = \oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} (\vec{Q} \times \text{rot } \vec{P} - \vec{P} \times \text{rot } \vec{Q}) \cdot \vec{n} dS \quad (5.102)$$

В формуле (5.102) интеграл по сумме поверхностей означает сумму интегралов по каждой поверхности.

$$\oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} dS = \oint_{S_1} dS + \oint_{S_2} dS + \dots + \oint_{S_N} dS \quad (5.103)$$

Отметим еще одну особенность формулы (5.102). При выводе формулы Грина (5.101) предполагалось, что вектор нормали к поверхности направлен из объема во внешнюю область Рис.8. На Рис.41 все векторы нормалей направлены внутрь объема. Это привело к тому, что поверхностные интегралы в формуле (5.102) и в формуле (5.101) имеют разные знаки.

В формуле (5.102) заменим векторы \vec{P} и \vec{Q} следующими выражениями.

$$\vec{Q} = \vec{a} \Psi, \quad \vec{P} = \vec{E}, \quad \Psi = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (5.104)$$

Здесь вектор \vec{E} – вектор электрического поля, \vec{a} – произвольный постоянный вектор. Вектор \vec{a} вводится для удобства расчетов, и в конце расчетов убирается. В качестве функции Ψ выбрана сферическая волна. Эта функция в начале координат $r=0$ имеет особенность. Поэтому в этой точке формула Грина (5.102) не применима. Поэтому изменим область V , исключив точку P Рис.41. Для этого окружим начало координат сферической поверхностью радиуса r_0 Рис.42. В конце расчетов этот радиус устремим к нулю $r_0 \rightarrow 0$.

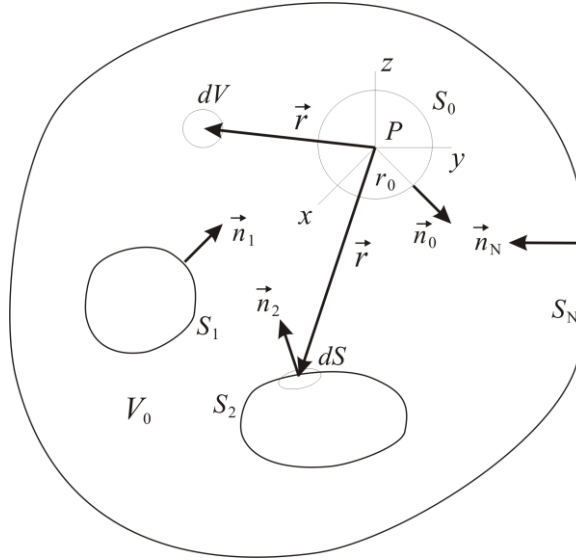


Рис.42 (5.5)

На Рис.42 видно, что область V Рис.41 теперь превратилась в область V_0 . Появилась также дополнительная сферическая поверхность S_0 радиуса r_0 . В конце расчетов радиус r_0 устремим к нулю, и область V_0 совпадет с областью V .

Подставим соотношения (5.104) в формулу Грина (5.102) с измененными областями интегрирования. В результате получим следующее уравнение.

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\Psi \vec{a} \cdot \text{rot rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot rot } (\Psi \vec{a})) dV = \\ = \oint_{S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_N} (\Psi \vec{a} \times \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \times \text{rot } (\Psi \vec{a})) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (5.105)$$

Преобразуем уравнение (5.105) воспользовавшись уравнениями Максвелла (5.87). Для удобства обозначим левый интеграл в уравнении (5.105) как J_1 , правый интеграл обозначим как J_2 . Рассмотрим подынтегральное выражение в интеграле J_1 .

Из уравнений Максвелла (5.87) получаем следующее выражение.

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\text{rot } \vec{j}_m + i\omega\mu_0 \vec{j} + k^2 \vec{E} \quad (5.106)$$

Выполнив операции векторного анализа, получаем еще одно выражение.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot}(\Psi \vec{a}) = \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi) + k^2 \Psi \vec{a} \quad (5.107)$$

Подставив (5.106) и (5.107) в интеграл J_1 , получаем интеграл J_1 в следующем виде.

$$J_1 = \int_{V_0} \left(i \omega \mu_0 \Psi \vec{a} \cdot \vec{j} - \Psi \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{j}_m - \vec{E} \cdot \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi) \right) dV \quad (5.108)$$

Преобразуем третий член в подынтегральном выражении (5.108). В результате получим следующую формулу.

$$\vec{E} \cdot \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi) = \operatorname{div}(\vec{E}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi)) - (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi) \operatorname{div} \vec{E} \quad (5.109)$$

Используем уравнение Максвелла.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (5.110)$$

В результате формула (5.109) принимает следующий вид.

$$\vec{E} \cdot \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi) = \operatorname{div}(\vec{E}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi)) - (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi) \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (5.111)$$

Преобразуем второй член в подынтегральном выражении (5.108). В результате получим следующую формулу.

$$\Psi \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{j}_m = \vec{a} \cdot \operatorname{rot}(\Psi \vec{j}_m) + \vec{a} \cdot (\vec{j}_m \times \operatorname{grad} \Psi) \quad (5.112)$$

Подставляем выражения (5.111), (5.112) в интеграл (5.108), и преобразуем его к следующему виду.

$$J_1 = \int_{V_0} \vec{a} \cdot \left(i \omega \mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \operatorname{grad} \Psi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \Psi \right) dV - \\ - \vec{a} \cdot \int_{V_0} \operatorname{rot}(\Psi \vec{j}_m) dV - \int_{V_0} \operatorname{div}(\vec{E}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi)) dV \quad (5.113)$$

Третий интеграл (5.113) преобразуем к поверхностному интегралу по теореме Гаусса-Остроградского (5.88).

$$\int_{V_0} \operatorname{div} (\vec{E} (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi)) dV = - \oint_{S_0+S_1+S_2+\dots+S_N} (\vec{E} \cdot \vec{n}) (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} \Psi) dS \quad (5.114)$$

Второй интеграл (5.113) преобразуем к поверхностному интегралу по следующей теореме векторного анализа.

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{A} dV = \oint_S (\vec{n} \times \vec{A}) dS \quad (5.115)$$

Формулу (5.115) называют формулой Стокса. В результате второй интеграл (5.113) принимает следующий вид.

$$\int_{V_0} \operatorname{rot} (\Psi \vec{j}_m) dV = - \oint_{S_0+S_1+S_2+\dots+S_N} \Psi (\vec{n} \times \vec{j}_m) dS \quad (5.116)$$

Объединяя формулы (5.113), (5.114), (5.116) получаем окончательное выражение для интеграла J_1 .

$$\begin{aligned} J_1 = & \vec{a} \cdot \int_{V_0} \left(i \omega \mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \operatorname{grad} \Psi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \Psi \right) dV + \\ & + \vec{a} \cdot \oint_{S_0+S_1+S_2+\dots+S_N} \left(\Psi (\vec{n} \times \vec{j}_m) + (\vec{E} \cdot \vec{n}) \operatorname{grad} \Psi \right) dS \end{aligned} \quad (5.117)$$

Рассмотрим второй член в подынтегральном выражении в интеграле J_2 . Выполним следующие преобразования, используя правила векторного анализа.

$$\begin{aligned} (\vec{E} \times \operatorname{rot} (\Psi \vec{a})) \cdot \vec{n} &= - (\vec{E} \times (\vec{a} \times \operatorname{grad} \Psi)) \cdot \vec{n} = \\ &= ((\vec{n} \times \vec{E}) \times \operatorname{grad} \Psi) \cdot \vec{a} \end{aligned} \quad (5.118)$$

Далее используем уравнение Максвелла.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{j}_m + i \omega \mu_0 \vec{H} \quad (5.119)$$

Рассмотрим первый член в подынтегральном выражении в интеграле J_2 . Выполним следующие преобразования, используя правила векторного анализа.

$$\begin{aligned} (\Psi \vec{a} \times \text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{n} &= -\Psi (\vec{a} \times \vec{j}_m) \cdot \vec{n} + i\omega\mu_0 \Psi (\vec{a} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} = \\ &= (\Psi (\vec{n} \times \vec{j}_m) - i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H})) \cdot \vec{a} \end{aligned} \quad (5.120)$$

Подставив формулы (5.118), (5.120) в (5.105) получаем окончательное выражение для интеграла J_2 .

$$J_2 = \vec{a} \cdot \oint_{S_0+S_1+S_2+\dots+S_N} (\Psi (\vec{n} \times \vec{j}_m) - i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) - (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi) dS \quad (5.121)$$

Приравниваем интеграл J_1 (5.117) к интегралу J_2 (5.121) и в результате уравнение (5.105) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \int_{V_0} \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{grad } \Psi \right) dV = \\ = -\vec{a} \cdot \oint_{S_0+S_1+S_2+\dots+S_N} (i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{grad } \Psi) dS \end{aligned} \quad (5.122)$$

В уравнении (5.122) вектор \vec{a} – произвольный постоянный вектор. Уравнение (5.122) имеет следующую структуру.

$$\vec{a} \cdot \vec{F}_1 = \vec{a} \cdot \vec{F}_2 \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = \vec{F}_2 \quad (5.123)$$

Учитывая (5.123) из уравнения (5.122) получаем следующее уравнение.

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{grad } \Psi \right) dV = \\ = - \oint_{S_0+S_1+S_2+\dots+S_N} (i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{grad } \Psi) dS \end{aligned} \quad (5.124)$$

Далее в уравнении (5.124) рассмотрим отдельно поверхностный интеграл по сферической поверхности S_0 . Обозначим этот интеграл как J_0 .

$$J_0 = \oint_{S_0} \left(i \omega \mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{grad } \Psi \right) dS \quad (5.125)$$

Найдем $\text{grad } \Psi$ на поверхности S_0 .

$$\text{grad } \Psi = \frac{d}{dr} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\vec{r}}{r} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \vec{n} \quad (5.126)$$

С учетом формулы (5.126) сумма двух последних членов в подынтегральном выражении (5.125) будет равна.

$$(\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{grad } \Psi = \vec{E} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.127)$$

При подстановке (5.127) в поверхностный интеграл надо положить $r = r_0$. Интегрирование по сферической поверхности S_0 удобно проводить в сферических координатах. В этом случае элемент поверхности dS будет связан с элементом телесного угла $d\Omega$ следующим соотношением.

$$dS = r_0^2 \sin \theta d\theta d\psi = r_0^2 d\Omega \quad (5.128)$$

В результате интеграл (5.125) примет следующий вид.

$$J_0 = i \omega \mu_0 r_0 e^{ikr_0} \oint_{S_0} (\vec{n} \times \vec{H}) d\Omega + (ikr_0 - 1) e^{ikr_0} \oint_{S_0} \vec{E} d\Omega \quad (5.129)$$

Второй интеграл в формуле (5.129) вычисляем по теореме о среднем.

$$\oint_{S_0} \vec{E}(r_0, \theta, \psi) d\Omega = \vec{E}(r_0, \bar{\theta}, \bar{\psi}) 4\pi \quad (5.130)$$

Здесь $\bar{\theta}, \bar{\psi}$ – сферические координаты некоторой точки на сферической поверхности S_0 . В пределе $r_0 \rightarrow 0$ поверхность S_0 сжимается в точку в начале координат. Поэтому интеграл (5.130) стремиться к следующему выражению.

$$\oint_{S_0} \vec{E}(r_0, \theta, \psi) d\Omega \rightarrow \vec{E}(\vec{r} = 0) 4\pi = 4\pi \vec{E}_p \quad (5.131)$$

Переходим к пределу $r_0 \rightarrow 0$ в интеграле (5.125) и в результате получаем следующее соотношение.

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} J_0 = -4\pi \vec{E}_P \quad (5.132)$$

Теперь переходим к пределу $r_0 \rightarrow 0$ в уравнении (5.124) и в результате получаем следующее интегральное уравнение.

$$\begin{aligned} \vec{E}_P = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{grad } \Psi \right) dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} \left(i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } \Psi \right) dS \end{aligned} \quad (5.133)$$

Обратим внимание на то, что теперь первый интеграл (5.133) снова вычисляется по всему объему V . Формула (5.133) позволяет вычислять вектор электрического поля \vec{E} в произвольной точке P внутри объема V .

Подведем итог. Исходным пунктом являлась формула Грина (5.102). Далее использовались подстановки (5.104). Затем, проведя ряд вычислений с учетом уравнений Максвелла, была получена формула (5.133) для вектора напряженности электрического поля \vec{E} .

Проведя аналогичные выкладки можно получить формулу для напряженности магнитного поля \vec{H} . Однако проще воспользоваться симметрией электрических и магнитных характеристик электромагнитного поля в симметричной системе уравнений Максвелла (5.87). Легко видеть, что система уравнений Максвелла (5.87) не меняется при следующих заменах.

$$\begin{cases} \vec{E} \rightarrow \vec{H}, & \vec{H} \rightarrow \vec{E}, \\ \vec{j} \rightarrow -\vec{j}_m, & \vec{j}_m \rightarrow -\vec{j}, \\ \rho \rightarrow -\rho_m, & \rho_m \rightarrow -\rho, \\ \varepsilon_0 \rightarrow -\mu_0, & \mu_0 \rightarrow -\varepsilon_0 \end{cases} \quad (5.134)$$

Проведя замену (5.134) в формуле (5.133) получаем уравнение для нахождения напряженности магнитного поля.

$$\begin{aligned}\vec{H}_P = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\epsilon_0 \Psi \vec{j}_m + \vec{j} \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho_m}{\mu_0} \text{grad } \Psi \right) dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} \left(-i\omega\epsilon_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } \Psi \right) dS\end{aligned}\quad (5.135)$$

10. Электромагнитное поле произвольной системы источников в бесконечном пространстве.

Как было показано выше, электромагнитное поле в произвольной точке P объема V ограниченного N поверхностями S_1, S_2, \dots, S_N Рис.41 определяется следующими формулами.

$$\left\{ \begin{aligned}\vec{E}_P = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{grad } \Psi \right) dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} \left(i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } \Psi \right) dS \\ \vec{H}_P = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\epsilon_0 \Psi \vec{j}_m + \vec{j} \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho_m}{\mu_0} \text{grad } \Psi \right) dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} \left(-i\omega\epsilon_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } \Psi \right) dS\end{aligned}\right.\quad (5.136)$$

В формулах (5.136) точка P фиксирована и находится в начале координат. Удобнее точку P сделать произвольной, а начало координат зафиксировать в некоторой точке O , как это показано на Рис.43.

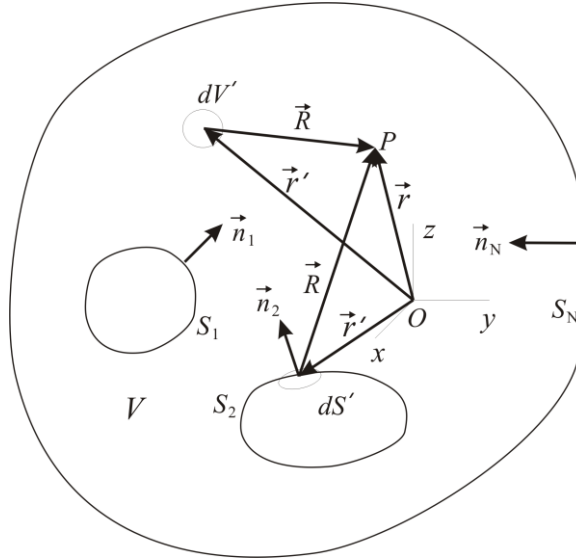


Рис.43 (5.6)

На Рис.43 видно, что теперь положение точки P определяется вектором \vec{r} . Положение элементов объема dV' и элементов поверхности dS' определяются векторами \vec{r}' . Из элементов объема dV' и элементов поверхности dS' в точку P проводятся векторы \vec{R} .

Если сравнить Рис.41 и Рис.43, то видно, что в формулах (5.136) проведена следующая замена переменных.

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad dV \rightarrow dV', \quad dS \rightarrow dS' \quad (5.137)$$

Поэтому формулы (5.136) имеют теперь следующий вид.

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{grad } \Psi \right) dV' + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} \left(i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } \Psi \right) dS' \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\varepsilon_0 \Psi \vec{j}_m + \vec{j} \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho_m}{\mu_0} \text{grad } \Psi \right) dV' + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_N} \left(-i\omega\varepsilon_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } \Psi \right) dS' \end{aligned} \right. \quad (5.138)$$

Сферическая волна Ψ в формулах (5.138) теперь определяется следующей формулой.

$$\Psi(\vec{r}') = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (5.139)$$

Теперь увеличим объем V до бесконечности. При этом внешняя поверхность S_N отодвинется на бесконечно большие расстояния. Анализ показывает, что для того чтобы, величины электрического и магнитного поля были конечными во всем пространстве, надо наложить следующие условия. Электрические заряды и токи источников поля должны находиться в ограниченной области пространства вблизи начала координат O Рис.43, или быстро уменьшаться по величине при удалении от начала координат. Внутренние поверхности S_1, S_2, \dots, S_{N-1} тоже должны находиться в ограниченной области пространства.

На Рис. 44 конечная область пространства, где плотность электрического заряда и плотность тока отличны от нуля, обозначена буквой V . Начало координат O выбрано внутри области V . Внешняя поверхность S_N отодвинута на бесконечно большие расстояния и на рисунке не обозначена.

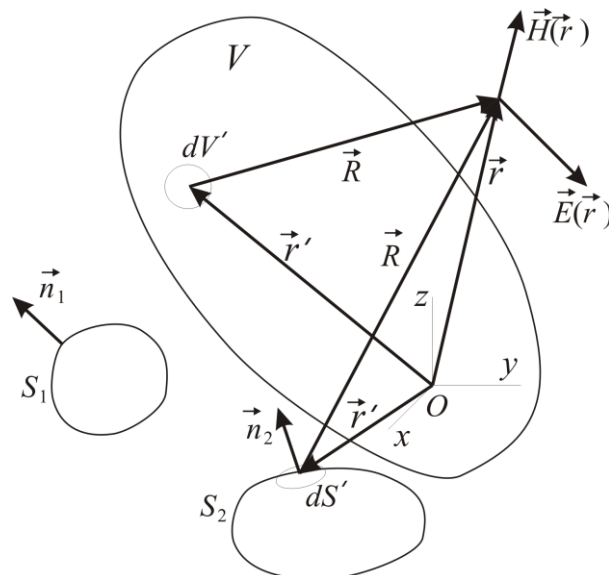


Рис.44 (5.7)

Напряженность электрического поля и напряженность магнитного поля в точке \vec{r} теперь определяются следующими формулами.

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{grad } \Psi \right) dV' + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_{N-1}} \left(i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } \Psi \right) dS' \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\varepsilon_0 \Psi \vec{j}_m + \vec{j} \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho_m}{\mu_0} \text{grad } \Psi \right) dV' + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2+\dots+S_{N-1}} \left(-i\omega\varepsilon_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } \Psi \right) dS' \end{aligned} \right. \quad (5.140)$$

В формулах (5.140) отсутствует интегрирование по внешней поверхности S_N . Это означает что при удалении поверхности на бесконечно большие расстояния следующие интегралы стремятся к нулю.

$$\left\{ \begin{aligned} \oint_{S_N} \left(i\omega\mu_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } \Psi \right) dS' &\rightarrow 0 \\ \oint_{S_N} \left(-i\omega\varepsilon_0 \Psi (\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } \Psi \right) dS' &\rightarrow 0 \end{aligned} \right. \quad (5.141)$$

$$R \rightarrow \infty$$

Анализ условий (5.141) показывает, что эти условия выполняются, если напряженность электрического и напряженность магнитного поля удовлетворяют на больших расстояниях следующим условиям.

$$\begin{aligned} E, H &\propto \frac{1}{r}, \quad r \rightarrow \infty, \\ \vec{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\vec{n} \times \vec{E}), \quad \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (\vec{H} \times \vec{n}), \\ \vec{n} &= \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \quad (5.142)$$

Эти условия называются условиями излучения. Поляризация электромагнитного поля на больших расстояниях оказывается точно такой же, как показано на Рис. 39. Напомним, что на Рис.39 показаны вектора электрического и магнитного поля в волновой зоне излучения.

11. Ближняя и дальняя зоны излучения.

Пусть излучающая система находится в ограниченном объеме V , как это показано на Рис.45.

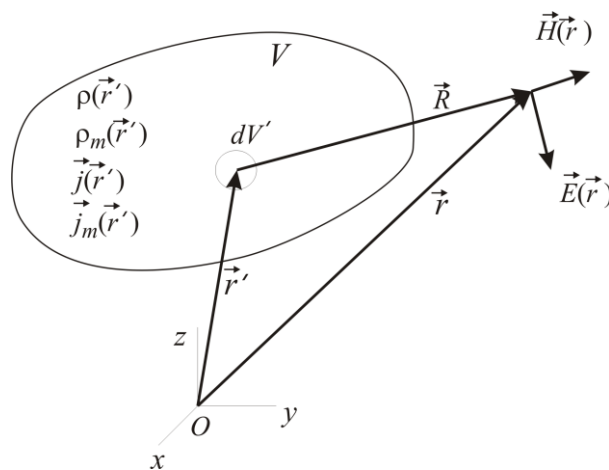


Рис.45 (5.8)

На Рис.45 отсутствуют поверхности $S_1, S_2, \dots S_{N-1}$. Это означает, что антенна находится в пустом пространстве, и ее не окружают препятствия, от поверхностей которых могли бы отражаться электромагнитные волны.

Напряженность электрического поля и напряженность магнитного поля в точке \vec{r} теперь определяются следующими формулами.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{grad } \Psi \right) dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\varepsilon_0 \Psi \vec{j}_m + \vec{j} \times \text{grad } \Psi + \frac{\rho_m}{\mu_0} \text{grad } \Psi \right) dV' \end{cases} \quad (5.143)$$

При рассмотрении излучения антенн, как правило, приходится иметь дело с токами текущими в антенне. Поэтому удобно в формулах (5.143) плотности электрического заряда и магнитного заряда выразить через соответствующие плотности токов.

Для этого воспользуемся уравнением непрерывности электрического тока (5.84) и уравнением непрерывности магнитного тока (5.85). Для монохроматических полей эти уравнения примут следующий вид.

$$\begin{cases} -i\omega\rho + \text{div } \vec{j} = 0 \\ -i\omega\rho_m + \text{div } \vec{j}_m = 0 \end{cases} \quad (5.144)$$

Берем плотность электрического заряда и магнитного заряда из формул (5.144) и подставляем в уравнения (5.143). В результате получаем следующие выражения.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\mu_0 \Psi \vec{j} - \vec{j}_m \times \text{grad } \Psi + \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \text{div } \vec{j} \text{grad } \Psi \right) dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(i\omega\varepsilon_0 \Psi \vec{j}_m + \vec{j} \times \text{grad } \Psi + \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{div } \vec{j}_m \text{grad } \Psi \right) dV' \end{cases} \quad (5.145)$$

Эти формулы можно изменить так, что бы вытащить токи из-под операции дифференцирования по координатам. Для этого воспользуемся следующей интегральной формулой векторного анализа.

$$\int_V \vec{b} \operatorname{div} \vec{a} dV = - \int_V (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} dV + \oint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{b} dS \quad (5.146)$$

Применим эту формулу для первого интеграла в формуле (5.145). В результате получим следующее выражение.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} \operatorname{grad} \Psi dV' = - \int_V (\vec{j} \cdot \nabla) \nabla \Psi dV' + \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) \nabla \Psi dS \quad (5.147)$$

В формуле (5.147) в качестве поверхности интегрирования S можно выбрать поверхность, охватывающую излучающую систему и лежащую вне излучающей системы. В этом случае токи на поверхности S будут равны нулю и поверхностный интеграл в (5.147) будет равен нулю. Аналогичное соотношение получается и для магнитного тока. В результате получаем следующие формулы для вычисления электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_V (k^2 \Psi \vec{j} + (\vec{j} \cdot \nabla) \nabla \Psi + i\omega\epsilon_0 (\vec{j}_m \times \nabla \Psi)) dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{i}{4\pi\omega\mu_0} \int_V (k^2 \Psi \vec{j}_m + (\vec{j}_m \cdot \nabla) \nabla \Psi - i\omega\mu_0 (\vec{j} \times \nabla \Psi)) dV' \end{cases} \quad (5.148)$$

Формулы (5.148) позволяют вычислить напряженность электрического и напряженность магнитного поля в любой точке пространства, как вблизи излучающей системы, так и на больших расстояниях.

Волновая зона или дальняя зона излучения определяются условиями (5.22) и (5.23), когда расстояния от излучающей системы много больше длины волны излучения $r \gg \lambda$ или $kr \gg 1$. Противоположное условие определяет ближнюю зону излучения $r \ll \lambda$ или $kr \ll 1$. Если характерные размеры излучающей системы определяются величиной $L = \sqrt[3]{V}$, то рассматриваемые

расстояния $r \geq L$. Другими словами, электромагнитное поле рассматривается вне излучающей системы. Поэтому в ближней зоне будут выполняться следующие условия.

$$k r \ll 1, \quad k r' \ll 1, \quad k R \ll 1 \quad (5.149)$$

Условие (5.149) означает, что сферическая волна Ψ может быть заменена более простой формулой.

$$\Psi = \frac{e^{i k R}}{R} \approx \frac{1}{R} \quad (5.150)$$

Оценим градиент от сферической волны.

$$\begin{aligned} \nabla \Psi &= \nabla \frac{1}{R} = \frac{\vec{R}}{R^3}, \\ \frac{1}{k} |\nabla \Psi| &= \frac{1}{k R^2} \gg \frac{1}{R} = \Psi \end{aligned} \quad (5.150)$$

Заметим, что при вычислении градиента от функции $1/R$ не поставлен знак минус, который обычно возникает при нахождении градиента от такого выражения. Дело в том, что в интегральных формулах (5.143), (5.148) градиент берется по переменной \vec{r}' . Градиент, вычисленный по переменной \vec{R} , будет иметь противоположный знак, потому что эти переменные связаны между собой следующим соотношением.

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \rightarrow \quad \nabla_R \Psi = -\nabla_{r'} \Psi \quad (5.151)$$

Кроме того, в соотношениях (5.150) указано, что градиент, от сферической волны деленный на волновое число много больше сферической волны. Это связано с условием ближней зоны (5.149).

Рассмотрим поле излучения в ближней зоне. Воспользуемся формулами (5.143) в которых уберем магнитные заряды и токи, а функцию Ψ заменим по формулам (5.150). В результате получим следующие соотношения.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{R}}{R^3} dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{j} \times \vec{R})}{R^3} dV' \end{cases} \quad (5.152)$$

Полученные формулы по форме совпадают с уравнениями электростатики и магнитостатики. Электрическое поле является решение уравнения Пуассона для заданного распределения электрического заряда в объеме V . Магнитное поле получено по формуле Био-Савара-Лапласа для постоянных токов, распределенных по объему V . Совпадение только по форме, потому что рассматриваются монохроматические поля, где существует зависимость от времени по закону синуса или косинуса.

Чтобы сравнить по величине электрическое и магнитное поле в ближней зоне удобнее воспользоваться формулами (5.148), где плотность электрического заряда выражена через плотность электрического тока.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_V \left(3 \frac{(\vec{j} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{j}}{R^3} \right) dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{j} \times \vec{R})}{R^3} dV' \end{cases} \quad (5.153)$$

Комплексный вектор плотности электрического тока представим в следующем виде.

$$\vec{j}(\vec{r}') = \vec{j}_0(\vec{r}') e^{i\alpha} \quad (5.154)$$

Здесь вектор \vec{j}_0 – действительный вектор. Тогда электрическое поле и магнитное поле можно изобразить в следующем виде.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = i e^{i\alpha} \vec{F}_1(\vec{r}), & \vec{H}(\vec{r}) = e^{i\alpha} \vec{F}_2(\vec{r}), \\ \vec{F}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_V \left(3 \frac{(\vec{j}_0 \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{j}_0}{R^3} \right) dV', \\ \vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{j}_0 \times \vec{R})}{R^3} dV' \end{cases} \quad (5.155)$$

Здесь самое главное, что векторные поля \vec{F}_1 и \vec{F}_2 являются действительными величинами. Используя это, найдем усредненный за один период колебания вектор Пойнтинга в ближней зоне.

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_p \rangle &= \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H}) = \\ &= \frac{1}{4} (i e^{i\alpha} \vec{F}_1 \times e^{-i\alpha} \vec{F}_2 - i e^{-i\alpha} \vec{F}_1 \times e^{i\alpha} \vec{F}_2) = \\ &= \frac{i}{4} (\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 - \vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.156)$$

Таким образом, поток энергии в ближней зоне равен нулю. Конечно, в ближней зоне вектор Пойнтинга отличен от нуля и колеблется с частотой 2ω . Однако средний поток энергии равен нулю.

В общем случае сравнивать величину электрического поля и магнитного поля по формулам (5.153) довольно сложно. Однако задачу можно упростить, если сделать следующее предположение.

$$L \ll r \ll \lambda \quad (5.157)$$

Здесь предполагается, что размеры излучающей системы не только много меньше длины волны излучения, но и меньше того расстояния, на котором оценивается величина электрического и магнитного поля. С учетом условия (5.157) величины электрического и магнитного поля можно оценить по следующим формулам.

$$\begin{cases} |E| \approx \frac{1}{4\pi\omega\epsilon_0} \frac{|j|V}{r^3} = \frac{1}{4\pi k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{|j|V}{r^3} \\ |H| \approx \frac{1}{4\pi} \frac{|j|V}{r^2} \end{cases} \quad (5.158)$$

Электрическое поле и магнитное поле имеют разные размерности, поэтому их надо сравнивать через комбинации, имеющие одинаковые размерности. Самый удобный способ сравнения это сравнение плотности электрической и плотности магнитной энергии.

Плотность энергии электромагнитного поля, усредненная за период колебания, определяется следующей формулой.

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \mu_0 |\vec{H}|^2 \right), \\ \langle w_e \rangle &= \frac{1}{4} \epsilon_0 |\vec{E}|^2, \quad \langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \mu_0 |\vec{H}|^2 \end{aligned} \quad (5.159)$$

Подставим величины электрического и магнитного поля (5.158) в формулы для плотности энергии (1.69). В результате получим следующие выражения.

$$\begin{aligned} \langle w_e \rangle &= \frac{1}{4} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{\mu_0}{64\pi^2} \frac{|j|^2 V^2}{k^2 r^6} \\ \langle w_m \rangle &= \frac{1}{4} \mu_0 |\vec{H}|^2 = \frac{\mu_0}{64\pi^2} \frac{|j|^2 V^2}{r^4} \end{aligned} \quad (5.160)$$

Теперь найдем отношение плотности энергии магнитного поля к плотности энергии электрического поля. Результат будет следующим.

$$\frac{\langle w_m \rangle}{\langle w_e \rangle} = (k r)^2 \ll 1 \quad (5.161)$$

Таким образом, в ближней зоне магнитная часть энергии электромагнитного поля много меньше электрической части. Поэтому в

ближней зоне электромагнитное поле является в основном переменным электрическим полем.

Теперь рассмотрим электромагнитное поле в дальней зоне излучения. Возьмем формулы (5.148) где положим магнитные заряды и токи равными нулю. Далее вычислим векторные производные сферической волны, которые встречаются в формулах (5.148).

$$\begin{aligned}\nabla \Psi &= -\frac{\vec{R}}{R^2}(ikR-1)\Psi, \\ (j \cdot \nabla) \nabla \Psi &= \frac{\vec{j}}{R^2}(ikR-1)\Psi + \frac{(\vec{j} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^4}(-k^2R^2 - 3ikR + 3)\Psi\end{aligned}\quad (5.162)$$

После подстановки соотношений (5.162) в формулы (5.148) последние приобретают следующий вид.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_V \left(\frac{\vec{j}}{R^2}(k^2R^2 + ikR - 1) + \frac{(\vec{j} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^4}(-k^2R^2 - 3ikR + 3) \right) \Psi dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{R} \times \vec{j})}{R^2}(ikR - 1)\Psi dV' \end{cases}\quad (5.163)$$

Заметим, что формулы (5.163) позволяют вычислить электрическое и магнитное поле в любой точке пространства. Применим эти формулы в дальней зоне излучения. Напомним, что в дальней зоне излучения выполняются следующие условия.

$$\begin{aligned}kr &\gg 1, \quad r \gg r', \\ R &\gg r', \quad kR \gg 1\end{aligned}\quad (5.164)$$

Используя условия (5.164), в интегралах (5.163) заменим R на r , и оставим самые большие по величине слагаемые. Сферическую волну Ψ в интегралах (5.163) преобразуем, как это было сделано в (5.26), в следующее выражение.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\vec{r}' \cdot \vec{n}}\quad (5.165)$$

В результате получим выражение для электрического и магнитного поля в дальней зоне излучения.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i\omega}{4\pi c} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V ((\vec{n} \times \vec{j}) \times \vec{n}) e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'} dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{i\omega}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V (\vec{n} \times \vec{j}) e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'} dV' \end{cases} \quad (5.166)$$

Здесь \vec{n} – единичный вектор, направленный вдоль вектора \vec{r} . Единичный вектор \vec{n} не зависит от переменной интегрирования \vec{r}' , и поэтому может быть вынесен из интегралов. Это позволяет просто связать вектора напряженности электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\vec{H}(\vec{r}) \times \vec{n}) \\ \vec{H}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r})) \end{cases} \quad (5.167)$$

Кроме того, из (5.166) видно, что величина электрического и магнитного поля пропорциональны $1/r$.

$$E \propto \frac{1}{r}, \quad H \propto \frac{1}{r}, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.168)$$

Соотношения (5.167) и (5.168) полностью совпадают с условиями излучения (5.142). Это означает, что вычисления были выполнены корректно.

Поляризация электромагнитного поля в дальней зоне излучения показана на Рис. 39. На Рис.39 видно, что вектор электрического поля и вектор магнитного поля перпендикулярны единичному вектору \vec{n} , поэтому электрическое и магнитное поле являются поперечными волнами. Напомним, что волны такого типа называются ТЕМ волнами.

Сравним величину электрического и магнитного поля в дальней зоне излучения. Сравнение проведем через плотность энергии (5.159). Используя формулы (5.167) получим следующее соотношение.

$$\begin{aligned}
 |\vec{E}|^2 &= \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} (\vec{H} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}^* \times \vec{n}) = \\
 &= \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \vec{H}^* \cdot (\vec{n} \times (\vec{H} \times \vec{n})) = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \vec{H}^* \cdot (\vec{H} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{H})) = \\
 &= \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \vec{H}^* \cdot \vec{H} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} |\vec{H}|^2
 \end{aligned} \tag{5.169}$$

По формулам (5.159) найдем плотность энергии электрического поля и плотность энергии магнитного поля.

$$\begin{aligned}
 \langle w_e \rangle &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} |\vec{H}|^2 = \frac{1}{4} \mu_0 |\vec{H}|^2, \\
 \langle w_m \rangle &= \frac{1}{4} \mu_0 |\vec{H}|^2
 \end{aligned} \tag{5.170}$$

Из формул (5.170) видно, что плотность энергии электрического поля и плотность энергии магнитного поля в дальней зоне излучения равны друг другу. Другими словами вклад электрического поля и магнитного поля в энергию излучения в дальней зоне одинаков.

12. Излучение линейных антенн.

Часто в качестве излучающих систем используются линейные антенны. Линейная антенна представляет собой металлический провод свернутый определенным образом и подключенный к генератору. Провод является геометрически одномерным объектом, поэтому объемные интегралы, рассмотренные выше в линейных антеннах, превращаются в одномерные интегралы вдоль провода. На Рис.46 показана линейная антенна L .

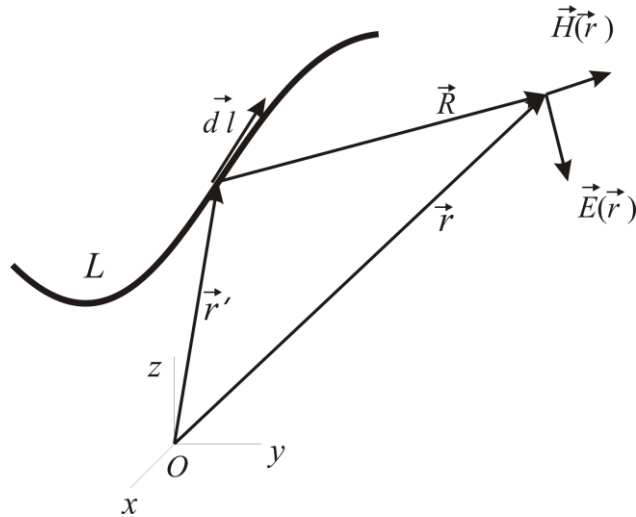


Рис.46 (5.9)

Учитывая, что вектор плотности тока направлен вдоль линейной антенны, переход от объемного интеграла к линейному интегралу осуществляется с помощью следующей замены.

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' \rightarrow \int_L I(\vec{r}') d\vec{l} = \int_L \vec{l}_0(\vec{r}') I(\vec{r}') dl \quad (5.171)$$

Здесь \vec{l}_0 – единичный касательный вектор к линейной антенне L .

Применим формулу (5.163) к линейной антенне Рис.46. В результате получим формулу для нахождения электрического и магнитного поля излучения линейной антенны в произвольной точке \vec{r} .

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_V \left(\frac{\vec{l}_0}{R^2} (k^2 R^2 + ikR - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\vec{l}_0 \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^4} (-k^2 R^2 - 3ikR + 3) \right) \Psi I(\vec{r}') dl \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{R} \times \vec{l}_0)}{R^2} (ikR - 1) \Psi I(\vec{r}') dl \end{aligned} \right. \quad (5.172)$$

Формулы (5.172) позволяют вычислять поле излучения линейной антенны, как в ближней зоне излучения, так и в дальней зоне излучения.

В дальнейшем будем рассматривать линейные антенны в виде прямолинейного отрезка длиной l Рис.47.

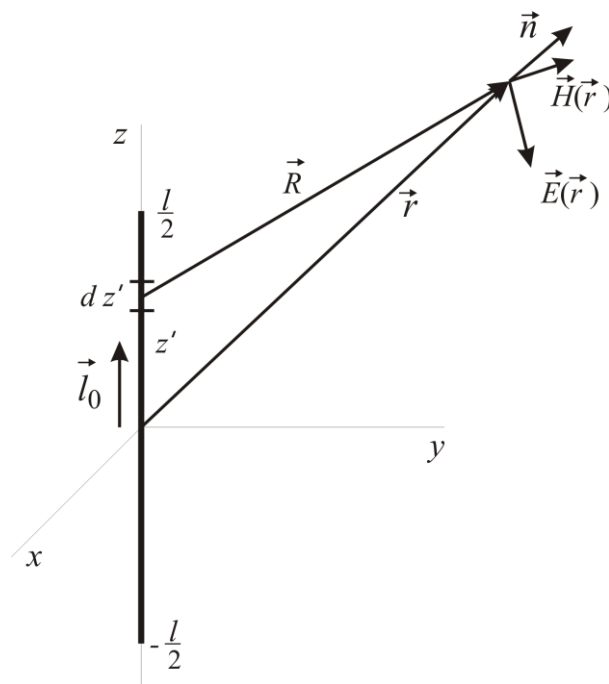


Рис.47 (5.10)

Как видно на Рис.47 векторы \vec{r}' и \vec{R} теперь будут определяться следующими формулами.

$$\vec{r}' = \vec{l}_0 z', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (5.173)$$

Для антенны на Рис.47 формулы (7.172) примут следующий вид.

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\vec{l}_0}{R^2} (k^2 R^2 + i k R - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\vec{l}_0 \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^4} (-k^2 R^2 - 3 i k R + 3) \right) \Psi I(z') dz' \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(\vec{R} \times \vec{l}_0)}{R^2} (i k R - 1) \Psi I(z') dz' \end{aligned} \right. \quad (5.174)$$

Формулы (5.174) позволяют вычислять поле излучения линейной антенны Рис.47 на любом расстоянии от антенны.

Для нахождения электрического и магнитного поля в дальней зоне излучения линейной антенны удобно сразу воспользоваться формулами (5.165). В результате получаем следующие выражения.

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{i\omega}{4\pi c} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{e^{ikr}}{r} \left((\vec{n} \times \vec{l}_0) \times \vec{n} \right) A(\theta) \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{i\omega}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{n} \times \vec{l}_0) A(\theta) \\ A(\theta) &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z') e^{-ik\vec{n}\vec{l}_0 z'} dz' \end{aligned} \right. \quad (5.175)$$

Здесь угол θ – угол между единичными векторами \vec{l}_0 и \vec{n} .

$$\vec{l}_0 \cdot \vec{n} = \cos \theta \quad (5.176)$$

В дальней зоне излучения векторы электрического и магнитного поля (5.175) связаны между собой соотношениями (5.167).

13. Коэффициент направленного действия антенны.

Найдем вектор Пойнтинга в дальней зоне излучения линейной антенны. Используем следующую формулу для нахождения вектора Пойнтинга, усредненного за период колебания.

$$\langle \vec{S}_p \rangle = \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H}) \quad (5.177)$$

Подставляем в формулу (5.177) соотношения (5.167). В результате получаем следующее выражение.

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_p \rangle &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} ((\vec{H} \times \vec{n}) \times \vec{H}^* + (\vec{H}^* \times \vec{n}) \times \vec{H}) = \\ &= \vec{n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |\vec{H}|^2 \end{aligned} \quad (5.178)$$

Подставляем в формулу (5.178) выражение для магнитного поля (5.175). В результате получаем следующее выражение для вектора Пойнтинга.

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_p \rangle &= \vec{n} \frac{1}{8\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\Phi(\theta)}{r^2} \\ \Phi(\theta) &= \sin^2 \theta |A(\theta)|^2 \end{aligned} \quad (5.179)$$

Здесь $\Phi(\theta)$ – функция диаграммы направленности антенны по излучаемой мощности. Рассмотрим поток энергии излучения антенной в заданном телесном угле $\Delta\Omega$, как показано на Рис.48.

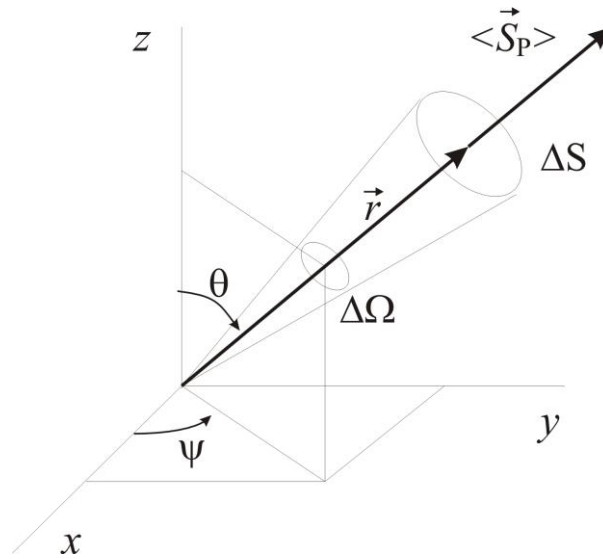


Рис.48 (5.11)

За время Δt через площадку ΔS проходит энергия излучения ΔW равная следующей величине.

$$\Delta W = \left| \langle \vec{S}_p \rangle \right| \Delta S \Delta t \quad (5.180)$$

Между телесным углом $\Delta \Omega$ и площадкой ΔS на Рис.48 существует следующая связь.

$$\Delta S = r^2 \Delta \Omega \quad (5.181)$$

Из формул (5.180), (5.181) получаем мощность излучения в телесном угле $\Delta \Omega$.

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \left| \langle \vec{S}_p \rangle \right| r^2 \Delta \Omega \quad (5.182)$$

Наконец находим мощность излучения в данном направлении в единицу телесного угла.

$$P(\theta, \psi) = \left| \langle \vec{S}_p \rangle \right| r^2 \quad (5.183)$$

В формуле учтена возможная зависимость мощности излучения от сферических углов θ и ψ .

Определяем безразмерную величину $g(\theta, \psi)$ – коэффициент направленного действия антенны, по следующей формуле.

$$g(\theta, \psi) = \frac{P(\theta, \psi)}{P_{cp}},$$

$$P_{cp} = \frac{1}{4\pi} \int P(\theta, \psi) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P(\theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi \quad (5.184)$$

Коэффициент направленного действия антенны (directive gain) КНД показывает распределение мощности излучения антенны по различным направлениям излучения.

В формуле (5.184) P_{cp} – среднее значение мощности излучения антенны, усредненной по полному телесному углу.

Подставляя вектор Пойнтинга (5.179) в формулу для мощности излучения (5.183) получаем следующее выражение.

$$P(\theta, \psi) = \frac{1}{8\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \Phi(\theta) \quad (5.185)$$

Заметим, что в формуле (5.185) функция диаграммы направленности излучения Φ не зависит от сферического угла ψ . Это связано с цилиндрической симметрией поле излучения антенны, показанной на Рис.47. В общем случае функция диаграммы направленности излучения Φ зависит от двух сферических углов. Подставляя (5.185) в (5.184) получаем удобную формулу для расчета КНД.

$$g(\theta, \psi) = \frac{4\pi \Phi(\theta, \psi)}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi}, \quad (5.186)$$

Для примера, найдем коэффициент направленного действия антенны для изотропного излучателя. Для изотропного излучателя функция диаграммы направленности излучения Φ не зависит от сферических углов. Поэтому функцию Φ можно вынести из-под интеграла (5.186). Оставшийся интеграл будет равен полному телесному углу 4π . Таким образом, КНД изотропного излучателя равен единице.

$$g(\theta, \psi) = 1 \quad (5.187)$$

14. Излучение элементарного диполя.

Обратимся к формулам (7.174) для поля линейной антенны в виде прямолинейного отрезка, показанной на Рис.47. Пусть размеры антенны будут много меньше длины волны излучения.

$$l \ll \lambda, \quad kl \ll 1 \quad (5.188)$$

Антенна, для которой выполняются условия (5.188) называется элементарным диполем или элементарным вибратором. Условия (5.188) означают, что электрический ток в формулах (7.174) не зависит от координаты, и может быть вынесен из-под интегралов. Кроме того, будем рассматривать поле элементарного диполя на расстояниях много больших размеров диполя.

$$l \ll r \quad (5.189)$$

Заметим, что условие (5.189) не означает, что поле рассматривается в дальней зоне излучения. Напомним, что для дальней зоны должно выполняться в первую очередь условие $r \gg \lambda$.

Таким образом, если выполняются условия (5.188), (5.189) то из формул (5.174) получаем выражения для поля элементарного диполя в следующем виде.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} Il \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{\vec{l}_0}{r^2} (k^2 r^2 + ikr - 1) + \frac{(\vec{l}_0 \cdot \vec{n})\vec{n}}{r^2} (-k^2 r^2 - 3ikr + 3) \right) \\ \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} Il \frac{e^{ikr}}{r} \frac{(\vec{n} \times \vec{l}_0)}{r} (ikr - 1) \end{cases} \quad (5.190)$$

Укажем три области излучения, которые описываются формулами (5.190).

$$1. \quad \begin{cases} \text{Ближняя зона излучения} \\ r' \ll r \ll \lambda \end{cases} \quad (1.191)$$

$$2. \quad \begin{cases} \text{Промежуточная зона излучения} \\ r \approx \lambda, \quad r \gg r' \end{cases} \quad (1.192)$$

$$3. \quad \begin{cases} \text{Дальняя зона излучения} \\ r \gg \lambda, \quad r \gg r' \end{cases} \quad (1.193)$$

Запишем электрическое и магнитное поле элементарного диполя в действительном виде. Комплексный ток представим в виде $I = I_0 \exp(i\alpha)$.

Далее, умножим формулы (5.190) на временной множитель $\exp(-i\omega t)$ и выделим действительную часть электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} \tilde{E}(\vec{r}, t) = \frac{I_0 l}{4\pi\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(-(\vec{l}_0(k^2 r^2 - 1) + (\vec{l}_0 \cdot \vec{n})\vec{n}(-k^2 r^2 + 3)) \sin(kr - \omega t + \alpha) + \right. \\ \left. + (\vec{l}_0(-kr) + (\vec{l}_0 \cdot \vec{n})\vec{n}(3kr)) \cos(kr - \omega t + \alpha) \right) \\ \tilde{H}(\vec{r}, t) = \frac{I_0 l}{4\pi} \frac{1}{r^2} \left(-(\vec{n} \times \vec{l}_0)kr \sin(kr - \omega t + \alpha) - (\vec{n} \times \vec{l}_0) \cos(kr - \omega t + \alpha) \right) \end{cases} \quad (5.194)$$

С помощью формул (5.194) построим линии электрического поля в плоскости xz . Учтем, что для единичных векторов \vec{l}_0 и \vec{n} выполняются следующие соотношения Рис.47, Рис.48.

$$\begin{aligned} l_{0x} = 0, \quad l_{0z} = 1, \quad n_x = \sin \theta, \quad n_z = \cos \theta, \\ \vec{l}_0 \cdot \vec{n} = \cos \theta \end{aligned} \quad (5.195)$$

Для удобства положим $\alpha = -\pi/2$, и будем рассматривать следующие моменты времени $\omega t = 2\pi m$. В результате для проекций электрического поля получим следующие формулы.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(\vec{r}, t) = \frac{I_0 l}{4\pi\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left((\cos\theta \sin\theta (-k^2 r^2 + 3)) \cos(kr) + \right. \\ \left. + (\cos\theta \sin\theta (3kr)) \sin(kr) \right) \\ \tilde{E}_z(\vec{r}, t) = \frac{I_0 l}{4\pi\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(((k^2 r^2 - 1) + \cos^2\theta (-k^2 r^2 + 3)) \cos(kr) + \right. \\ \left. + ((-kr) + \cos^2\theta (3kr)) \sin(kr) \right) \end{cases} \quad (5.196)$$

Линии электрического поля можно построить, если решить следующее дифференциальное уравнение линии векторного поля.

$$\frac{dx}{\tilde{E}_x(x, z)} = \frac{dz}{\tilde{E}_z(x, z)} \quad (5.197)$$

На Рис.49 показана картина линий электрического поля элементарного диполя в плоскости xz , полученная при численном решении уравнений (5.196) и (5.197). Для численного решения задачи и графического представления результатов была написана программа на C++ и реализована в среде Microsoft Visual C++.

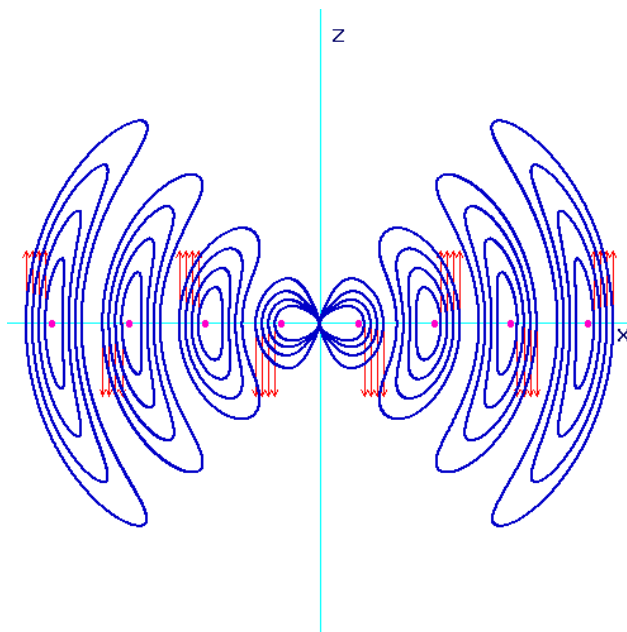


Рис.49 (5.12)

Вычисления проводились в безразмерных координатах, волновое число полагалась равным единице $k = 1$. Расстояния по оси x между центрами групп линий, точки на Рис.49, равны π . Причем обход линий в группах чередуется, в одной группе направление линий соответствует обходу по часовой стрелке, а в соседней группе против часовой стрелки и т.д.

Форма линий магнитного поля находится очень просто. Из формулы (5.194) видно, что во всех точках пространства вектор магнитного поля перпендикулярен векторам \vec{l}_0 и \vec{n} . Отсюда следует, что линии магнитного поля элементарного диполя это концентрические окружности с общей осью Oz . Например, если рассматривать линии магнитного поля в плоскости xz , то окружности будут группироваться в кольца. Причем обход линий в кольцах чередуется, в одном кольце направление линий соответствует обходу по часовой стрелке, а в соседнем кольце против часовой стрелки и т.д.

На Рис.50 показана картина линий магнитного поля элементарного диполя в плоскости xz .

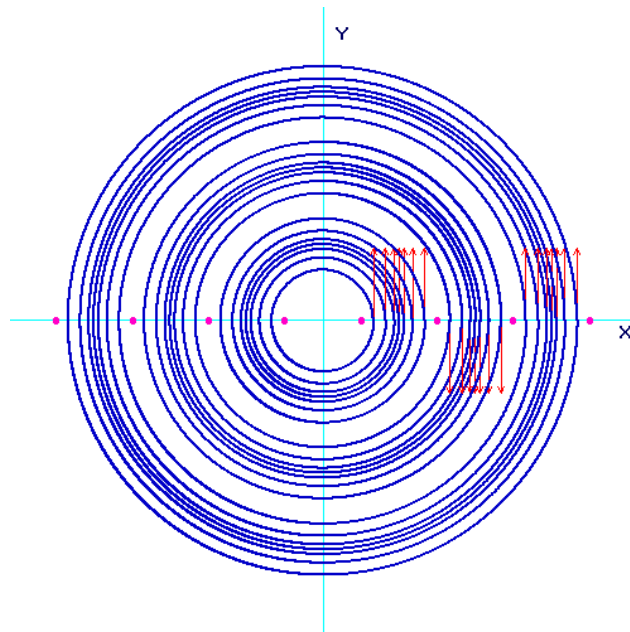


Рис.50 (5.13)

На Рис.51 показана картина линий электрического и магнитного поля элементарного диполя в пространстве. Показаны 8 линий электрического поля и 3 линии магнитного поля.

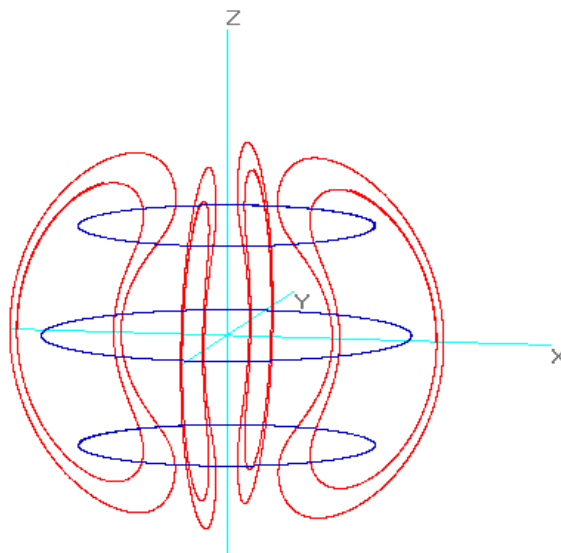


Рис.51 (5.14)

Используя формулы (1.194) найдем поле излучения в действительной форме в дальней зоне. Результат будет следующим.

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Il\omega\mu_0}{4\pi} \left((\vec{l}_0 \times \vec{n}) \times \vec{n} \right) \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} \\ \tilde{\vec{H}}(\vec{r}, t) = \frac{Il\omega}{4\pi c} (\vec{l}_0 \times \vec{n}) \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} \end{cases} \quad (5.198)$$

Сравним формулы (5.198) с формулами (5.70), (5.71) для поля излучающей системы в дипольном приближении. Эти формулы полностью совпадают. Поэтому оправдано название линейной антенны – элементарный диполь. Сравнение этих формул позволяет получить выражение электрического дипольного момента для рассматриваемой антенны.

$$\vec{p}_e(t) = -\vec{l}_0 \frac{Il}{\omega} \cos(\omega t) \quad (5.199)$$

Теперь найдем КНД элементарного диполя. Вычислим амплитуду излучения антенны по формуле (5.175). С учетом условий (5.188) получаем следующее значение амплитуды.

$$A(\theta) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z') e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{l}_0 z'} dz' = Il \quad (5.200)$$

По формуле (5.179) находим функцию диаграммы направленности излучения антенны.

$$\Phi(\theta) = \sin^2 \theta |A(\theta)|^2 = |I|^2 l^2 \sin^2 \theta \quad (5.201)$$

По формуле (5.186) получаем КНД элементарного диполя.

$$\begin{aligned}
 g(\theta, \psi) &= \frac{4\pi \Phi(\theta, \psi)}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi} = \\
 &= \frac{4\pi \sin^2 \theta}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\psi} = \frac{4\pi \sin^2 \theta}{8\pi/3} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{5.202}$$

Таким образом, коэффициент направленного действия антенны для элементарного диполя определяется следующей формулой.

$$g(\theta, \psi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \tag{5.203}$$

15. Диаграмма направленности излучения антенны.

Диаграмма направленности излучения антенны строится по коэффициенту направленного действия антенны КНД. Диаграмма направленности – это поверхность, уравнение которой определяется КНД. В сферической системе координат это уравнение имеет следующий вид.

$$r = g(\theta, \psi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \tag{5.204}$$

В декартовой системе координат уравнение поверхности диаграммы направленности определяется следующими уравнениями.

$$\begin{cases} x = g(\theta, \psi) \sin \theta \cos \psi, \\ y = g(\theta, \psi) \sin \theta \sin \psi, \\ z = g(\theta, \psi) \cos \theta, \end{cases} \tag{5.205}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

На Рис.52 показан элемент поверхности диаграммы направленности излучения.

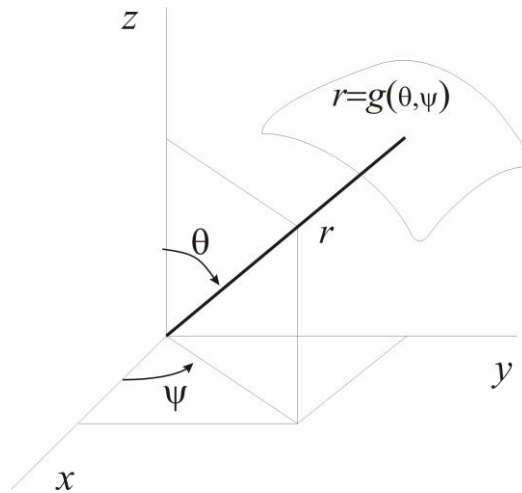


Рис.52 (5.15)

Физический смысл КНД состоит в том, что величина КНД $g(\theta, \psi)$, или радиус r на диаграмме направленности, определяют относительную мощность излучения антенны в направлении, заданном углами θ, ψ .

Рисовать диаграмму направленности в пространстве довольно сложно. Поэтому чаще всего рисуют сечение диаграммы направленности в некоторой плоскости. Для примера, рассмотрим диаграмму направленности излучения в плоскости xz . В этом случае диаграмма направленности излучения будет линией, уравнение которой будет определяться формулой.

$$r = g(\theta, \psi = 0), \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (5.206)$$

В декартовых координатах это уравнение будет иметь следующий вид.

$$\begin{cases} x = g(\theta) \sin \theta, \\ z = g(\theta) \cos \theta, \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (5.207)$$

На Рис.53 показан элемент диаграммы направленности в плоскости xz .

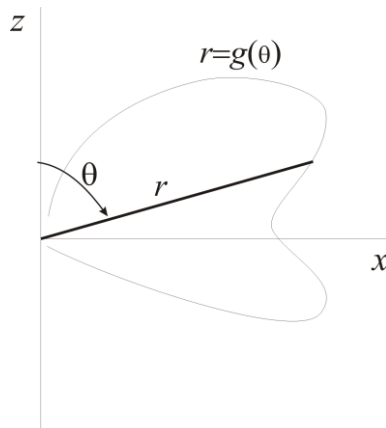


Рис.53 (5.16)

Для примера, нарисуем диаграмму направленности излучения элементарного диполя. КНД элементарного диполя определяется формулой (5.203). Уравнение диаграммы направленности в плоскости xz будет иметь следующий вид.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \sin^3 \theta, \\ z = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos \theta, \end{cases} \quad (5.208)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

На Рис.54 показана диаграмма направленности излучения элементарного диполя в плоскости xz . Для расчетов диаграмм направленности использовался пакет MATLAB.

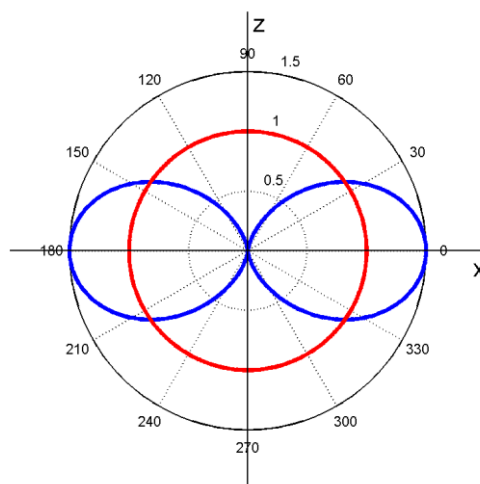


Рис.54 (5.17)

На Рис.54 кроме диаграммы направленности излучения элементарного диполя, показана диаграмма направленности изотропного излучателя, которая имеет вид окружности радиуса 1.

16. Линейная антенна в режиме стоячей волны.

Рассмотрим линейную антенну, размеры которой сравнимы или больше длины волны излучения. В этом случае величина тока $I(z)$ текущего в антенне будет зависеть от координаты z . Причем вид функции $I(z)$ будет определяться способом возбуждения тока в антенне.

Закон распределения тока вдоль антенны обычно неизвестен. Точное определение тока в антенне является задачей, которая должна решаться при заданной приложенной к антенне ЭДС, исходя из следующих условий: искомое поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла; удовлетворять граничным условиям на поверхности антенны; на больших расстояниях от

антенны должно выполняться условие излучения. Строгое решение данной задачи встречает большие математические трудности.

Эту задачу обычно упрощают, разделив ее на две части: внутреннюю и внешнюю. Внешняя задача – это расчет поля излучения антенны по заданному распределению тока в антенне.

Внутренняя задача состоит в определении распределения ток в антенне без учета излучения. Решается краевая задача о вынужденных колебаниях электромагнитного поля в антенне при заданной приложенной к антенне ЭДС. Эта задача решается приближенными методами, выбираемыми в зависимости от конкретных условий. Например, часто используют синусоидальное распределение тока вдоль линейных антенн, исходя из некоторой аналогии между линейной антенной и разомкнутой на конце длинной двухпроводной линией.

Рассмотрим режим стоячей волны. Представим антенну в виде одиночного прямого провода с возбуждением в центре и отсутствием каких-либо нагрузок на концах Рис.55.

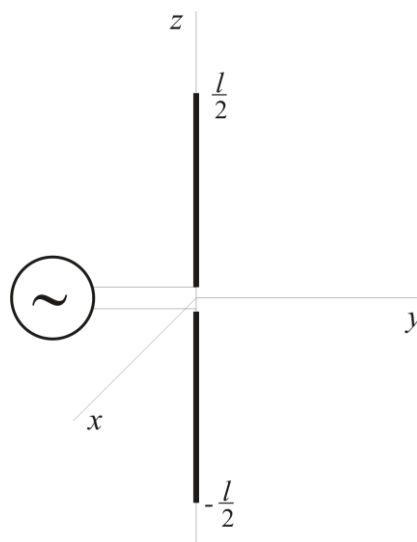


Рис.55 (5.18)

Будем считать, что условия возбуждения тока антенны таковы, что распределение тока в проводнике l имеет вид стоячей волны.

$$I(z) = I_0 \cos(kz - \alpha) \quad (5.209)$$

Вспомним, что стоячая волна возникает при сложении двух одинаковых волн бегущий на встречу друг к другу. Напишем ток (5.206) в действительном виде, где для простоты будем считать, что амплитуда тока I_0 действительной величиной.

$$\begin{aligned} I(z, t) &= I_0 \cos(kz - \alpha) e^{-i\omega t}, \\ \tilde{I}(z, t) &= I_0 \cos(kz - \alpha) \cos(\omega t) = \\ &= \frac{I_0}{2} \cos(kz - \omega t - \alpha) + \frac{I_0}{2} \cos(kz + \omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (5.210)$$

Последнее выражение в (5.210) означает, что ток равен сумме двух монохроматических волн с амплитудами и бегущими на встречу друг другу. Таким образом, действительно форма записи тока (5.209) соответствует распределению тока в виде стоячей волны.

Рассмотрим условия, когда на концах антенны будут находиться узловые точки стоячей волны. Это соответствует тому, что в любой момент времени на концах антенны величина тока будет равна нулю. Поэтому должно выполняться следующее условие.

$$\cos\left(\pm k \frac{l}{2} - \alpha\right) = 0 \quad (5.211)$$

Условиям (5.211) соответствуют следующие значения для волнового числа k и фазы α .

$$\begin{aligned} k &= \frac{\pi n}{l}, \quad \alpha = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ k &= \frac{\pi n}{l}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (5.212)$$

Вспоминая, что волновое число и длина волны излучения связаны соотношением $k = 2\pi/\lambda$, условие существования стоячей волны в антенне.

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (5.213)$$

Поэтому для реализации режима стоячей волны, длина антенны должна равняться целому числу полуволн излучения. Таким образом, в режиме стоячей волны, распределение тока вдоль антенны имеет следующий вид.

$$I(z) = I_0 \begin{cases} \cos \frac{\pi n}{l} z, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \sin \frac{\pi n}{l} z, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.214)$$

Найдем КНД линейной антенны в режиме стоячей волны. Вычислим амплитуду излучения антенны $A(\theta)$ по формуле (5.175). Затем по формуле (5.179) находим функцию диаграммы направленности излучения.

$$\Phi(\theta) = \frac{4 I_0^2}{k^2} \begin{cases} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.215)$$

Усреднение функции диаграммы $\Phi(\theta)$ по полному телесному углу выполняем в пакете MATLAB. В результате получаем следующие КНД в режиме стоячей волны.

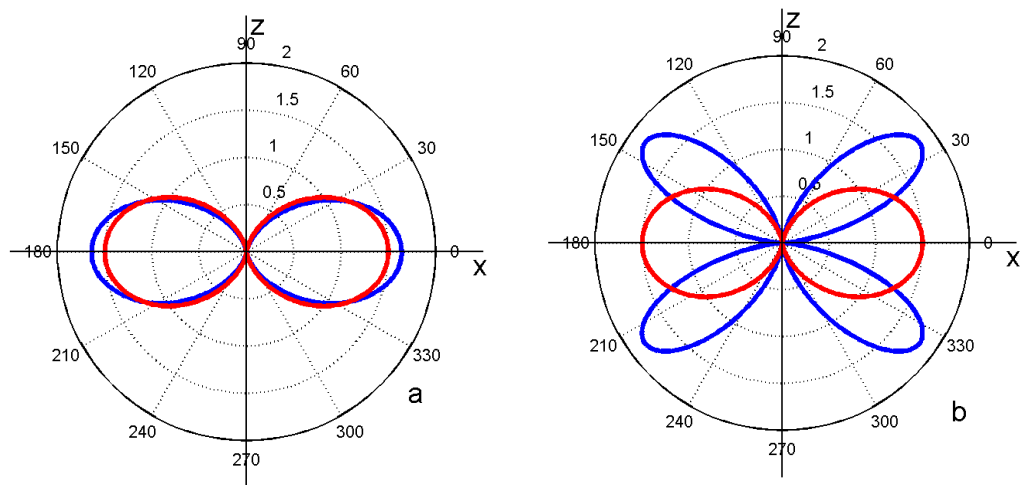
$$g(\theta) = 1.64 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2, \quad n = 1, \quad l = \frac{\lambda}{2} \quad (5.216)$$

$$g(\theta) = 1.28 \left[\frac{\sin(\pi \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2, \quad n=2, \quad l=\lambda \quad (5.217)$$

$$g(\theta) = 1.14 \left[\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2, \quad n=3, \quad l=\frac{3\lambda}{2} \quad (5.218)$$

$$g(\theta) = 1.05 \left[\frac{\sin(2\pi \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2, \quad n=4, \quad l=2\lambda \quad (5.219)$$

На Рис.56а, b, с, d показаны диаграммы направленности излучения линейной антенны в режиме стоячей волны в плоскости xz . Для сравнения на рисунках показана так же диаграмма направленности элементарного дипольного излучателя



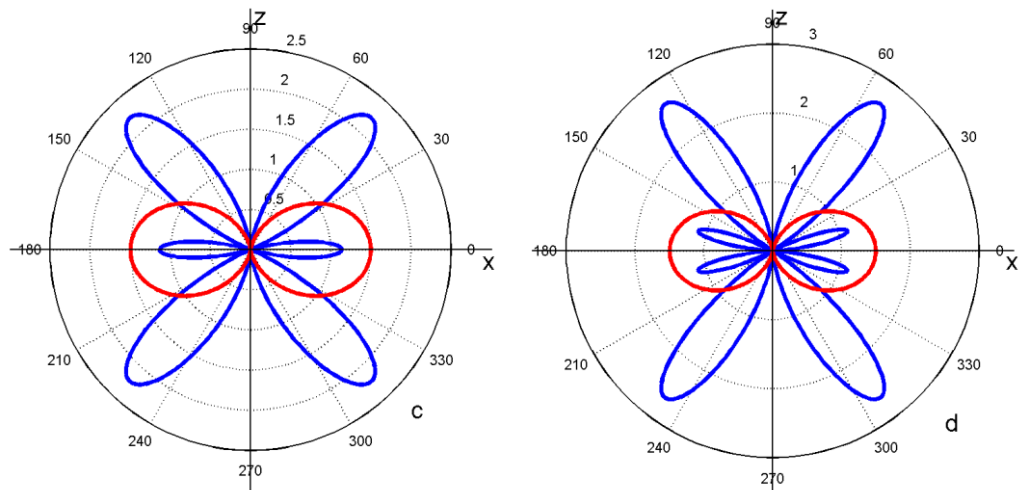


Рис.56 (5.19)

На Рис.56а длина антенны равна половине длины излучения $l = \lambda/2$. Такую антенну называют полуволновый вибратор. На следующих рисунках выбраны соответственно следующие длины антенн $l = \lambda$, $l = 3\lambda/2$, $l = 2\lambda$.

16. Линейная антенна в режиме бегущей волны.

Антенна Бевереджа (Beverage antenna) или, как ее еще называют, антенна бегущей волны, широко используется в профессиональной радиосвязи. На Рис.57 схематично показано устройство такой антенны.

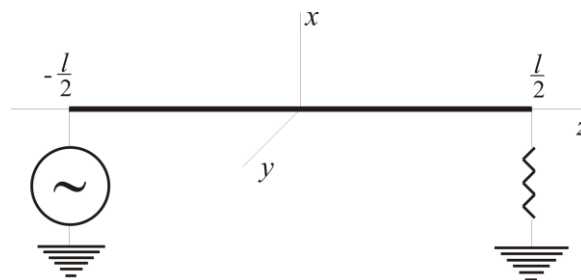


Рис.57 (5.20)

Если подобрать соответствующим образом нагрузку, то по линейной антенне побежит монохроматическая волна без отражения от концов антенны.

$$I(z) = I_0 e^{ikz} \quad (5.220)$$

Если умножить (5.220) на временной множитель $\exp(-i\omega t)$ и перейти к действительному виду, то получится следующее выражение для тока текущего по антенне.

$$I(z, t) = I_0 \cos(kz - \omega t) \quad (5.221)$$

Таким образом, запись тока в виде (5.220) соответствует монохроматической волне бегущей вдоль оси z в положительную сторону.

Подставим выражение для тока (5.220) в формулу для амплитуды излучения (5.200). В результате получим следующее выражение.

$$A(\theta) = I_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{ik(1-\cos\theta)z'} dz' = \frac{2I_0}{k} \frac{\sin\left(\frac{kl}{2}(1-\cos\theta)\right)}{(1-\cos\theta)} \quad (5.222)$$

Функция направленности излучения в этом случае будет иметь следующий вид.

$$\Phi(\theta) = \frac{4I_0^2}{k^2} \sin^2 \theta \left(\frac{\sin\left(\frac{kl}{2}(1-\cos\theta)\right)}{(1-\cos\theta)} \right)^2 \quad (5.223)$$

Как видно из формулы (5.223) коэффициент направленного действия антенны сильно зависит от отношения длины антенны к длине волны излучения. Приведем выражения КНД для нескольких таких отношений.

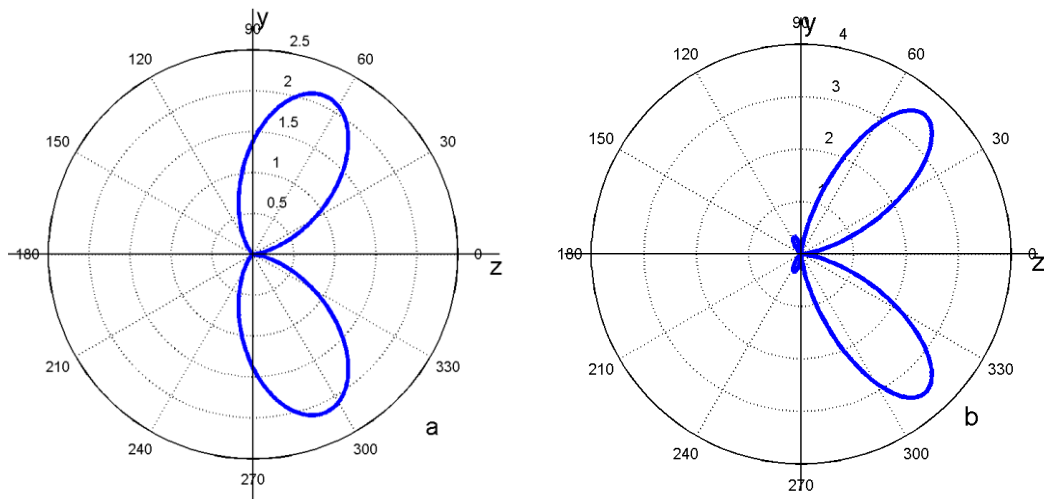
$$g(\theta) = 1.39 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos\theta)\right)}{(1 - \cos\theta)} \sin\theta \right)^2, \quad l = \frac{\lambda}{2} \quad (5.224)$$

$$g(\theta) = 0.95 \left(\frac{\sin(\pi(1 - \cos\theta))}{(1 - \cos\theta)} \sin\theta \right)^2, \quad l = \lambda \quad (5.225)$$

$$g(\theta) = 0.80 \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}(1 - \cos\theta)\right)}{(1 - \cos\theta)} \sin\theta \right)^2, \quad l = \frac{3\lambda}{2} \quad (5.226)$$

$$g(\theta) = 0.47 \left(\frac{\sin(9\pi(1 - \cos\theta))}{(1 - \cos\theta)} \sin\theta \right)^2, \quad l = 9\lambda \quad (5.227)$$

На Рис.58а, b, с, d показаны диаграммы направленности излучения линейной антенны в режиме бегущей волны в плоскости yz.



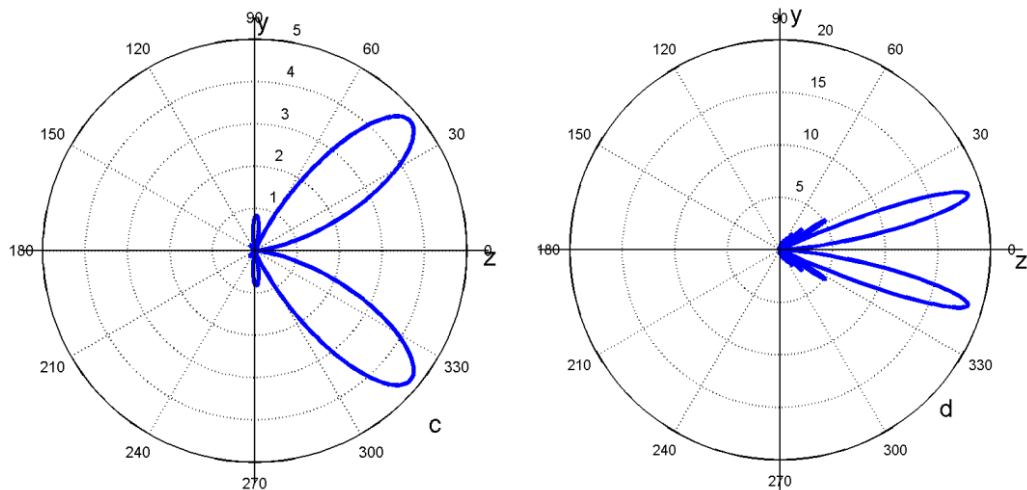


Рис.58 (5.21)

На Рис.58а длина антенны равна половине длины излучения $l = \lambda/2$. На следующих рисунках выбраны соответственно следующие длины антенн $l = \lambda$, $l = 3\lambda/2$, $l = 9\lambda$. С увеличением длины антенны диаграмма направленности излучения становится все более острой и наклоняется к оси антенне z .

17. Излучение системы линейных антенн.

Рассмотрим систему N линейных антенн. Каждая m -я антенна будет характеризоваться длиной l_m , распределением тока I_m , расположением в пространстве \vec{r}_m и ориентацией в пространстве \vec{l}_{0m} , как это показано на Рис.59.

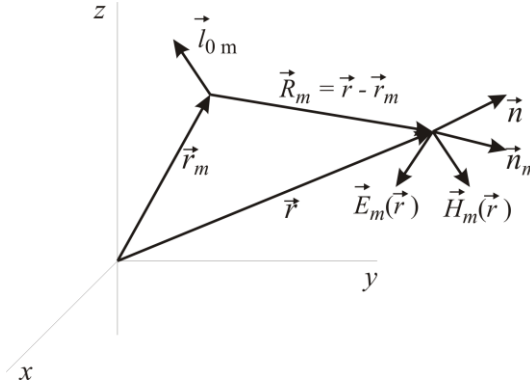


Рис.59 (5.22)

Будем искать поле излучения в дальней зоне. Используя принцип суперпозиции, найдем электрическое и магнитное поле в точке \vec{r} как векторную сумму полей, создаваемых отдельной линейной m -ой антенной.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^N \vec{E}_m(\vec{r}), \quad \vec{H}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^N \vec{H}_m(\vec{r}) \quad (5.228)$$

Используем формулы (5.175) для электрического и магнитного поля линейной антенны в дальней зоне, получаем следующую формулу для поля создаваемого m -ой антенной.

$$\begin{cases} \vec{H}_m(\vec{r}) = \frac{i\omega}{4\pi c} \frac{e^{ikR_m}}{R_m} (\vec{n}_m \times \vec{l}_{0m}) A_m(\theta) \\ \vec{E}_m(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\vec{H}_m(\vec{r}) \times \vec{n}_m) \end{cases} \quad (5.229)$$

Теперь в принципе можно рассчитать по формулам (5.228) и (5.229) поле излучения в дальней зоне для любой самой сложной системы линейных антенн. Однако на практике стараются конструировать сложную антенну из одинаковых линейных антенн, расположенных по определенному закону в пространстве.

18. Система одинаковых, параллельных полуволновых вибраторов.

Рассмотрим систему N одинаковых линейных антенн, параллельных оси z , как это показано на Рис.60.

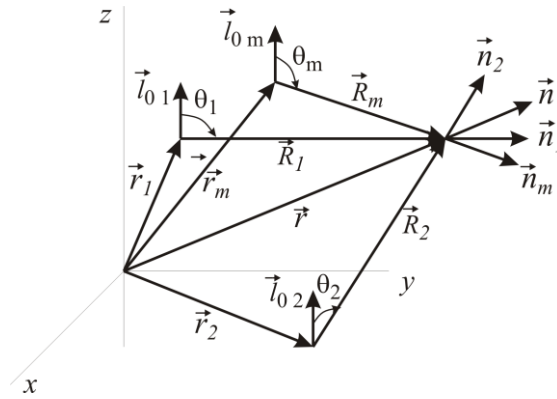


Рис.60 (5.23)

Так как электромагнитное поле рассматривается в дальней зоне излучения, то имеют место следующие условия.

$$r \gg r_1, r_2, \dots, r_N \quad (5.230)$$

Условия (5.230) вместе с параллельностью линейных антенн позволяют записать следующие соотношения.

$$\begin{aligned} \vec{l}_{01} &= \vec{l}_{02} = \dots = \vec{l}_{0N} = \vec{l}_0, \\ \theta_1 &= \theta_2 = \dots = \theta_N = \theta, \\ \vec{n}_1 &= \vec{n}_2 = \dots = \vec{n}_N = \vec{n}, \\ R_1 &= R_2 = \dots = R_N = r, \\ k R_m &= k r - k \vec{n} \cdot \vec{r}_m \end{aligned} \quad (5.231)$$

Далее будем рассматривать ситуацию, когда токи во всех антеннах имеют одинаковую амплитуду, а отличаются только фазами. Поэтому токи в антеннах будут определяться следующей формулой.

$$I_m(z) = I(z) e^{i\varphi_m}, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (5.232)$$

Амплитуды излучения тогда примут следующий вид.

$$A_m(\theta) = A(\theta) e^{i\varphi_m}$$

$$A(\theta) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z) e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{l}_0 z} dz \quad (5.233)$$

Подставляя магнитное поле из формул (5.229) в сумму (5.228) и учитывая соотношения (5.231), (5.232), (5.233) получаем следующее выражение для магнитного поля системы линейных антенн.

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \sum_{m=1}^N \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikR_m}}{R_m} (\vec{n}_m \times \vec{l}_{0m}) A_m(\theta) = \\ &= \frac{ik}{4\pi} \sum_{m=1}^N \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}_m} (\vec{n} \times \vec{l}_0) A(\theta) e^{i\varphi_m} = \\ &= \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{n} \times \vec{l}_0) A(\theta) \sum_{m=1}^N e^{i(\varphi_m - k\vec{n}\cdot\vec{r}_m)} \end{aligned} \quad (5.234)$$

Подставляя электрическое поле из формул (5.229) в сумму (5.228) получаем следующее выражение для электрического поля системы линейных антенн.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \sum_{m=1}^N \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\vec{H}_m(\vec{r}) \times \vec{n}_m) = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_{m=1}^N (\vec{H}_m(\vec{r}) \times \vec{n}) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\sum_{m=1}^N \vec{H}_m(\vec{r}) \right) \times \vec{n} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H}(\vec{r}) \times \vec{n} \end{aligned} \quad (5.235)$$

Объединяя формулы (5.234) и (5.235) получаем электрическое и магнитное поле системы одинаковых параллельных линейных антенн.

$$\begin{aligned}
\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{n} \times \vec{l}_0) A(\theta, \psi), \\
\vec{E}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H}(\vec{r}) \times \vec{n}, \\
A(\theta, \psi) &= A(\theta) \sum_{m=1}^N e^{i(\varphi_m - k \vec{n} \cdot \vec{r}_m)}
\end{aligned} \tag{5.234}$$

Как видно из формул (5.234) структура электромагнитного поля системы линейных антенн в дальней зоне совпадает со структурой поля для одной линейной антенны. Поэтому все формулы для расчета КНД системы антенн, будут такими же, как и для одной антенны. Отличие только в амплитуде излучения $A(\theta, \psi)$ и связанной с ней функции диаграммы направленности $\Phi(\theta, \psi)$.

$$\Phi(\theta, \psi) = \sin^2 \theta |A(\theta, \psi)|^2 \tag{5.235}$$

Амплитуда излучения системы антенн $A(\theta, \psi)$ равна произведению амплитуды излучения одной антенны $A(\theta)$ умноженной на структурный множитель $S(\theta, \psi)$.

$$A(\theta, \psi) = A(\theta) S(\theta, \psi) \tag{5.236}$$

Структурный множитель системы антенн определяется следующей формулой.

$$S(\theta, \psi) = \sum_{m=1}^N e^{i(\varphi_m - k \vec{n} \cdot \vec{r}_m)} \tag{5.237}$$

Формулы (5.235), (5.236), (5.237) можно записать следующим образом.

$$\Phi(\theta, \psi) = \Phi(\theta) |S(\theta, \psi)|^2 \tag{5.238}$$

Здесь $\Phi(\theta)$ – функция диаграммы направленности одной линейной антенны.

Будем считать, что все линейные антенны являются полуволновыми вибраторами, т.е. длина каждой антенны равна половине длины волны излучения $l = \lambda/2$. Поэтому, используя соотношения (5.215), для функции $\Phi(\theta)$ получаем следующую формулу.

$$\Phi(\theta) = \frac{4 I_0^2}{k^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (5.239)$$

18. Система полуволновых вибраторов на оси z .

Пусть N полуволновых вибраторов располагаются на оси z на одинаковых расстояниях d , как это показано на Рис.61.

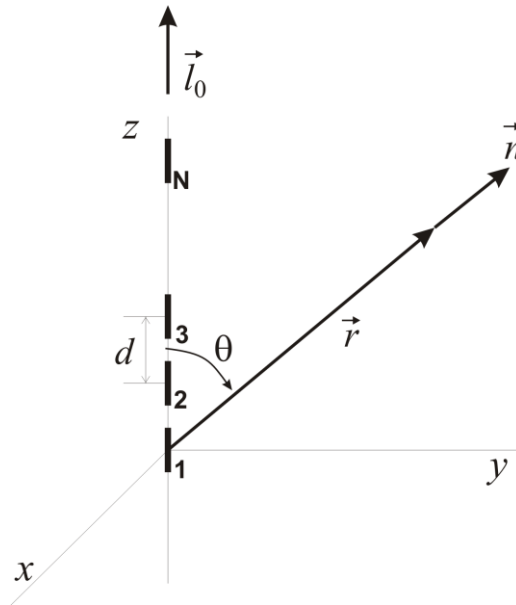


Рис.61 (5.24)

В этом случае положение центров вибраторов будет определяться следующими векторами.

$$\vec{r}_m = \vec{l}_0 (m-1)d, \quad m=1, 2, \dots, N \quad (5.240)$$

Предположим, что сдвиг по фазе между токами в соседних вибраторах является постоянной величиной φ . Тогда фазы токов вибраторов будут определяться следующей формулой.

$$\varphi_m = (m-1)\varphi, \quad m=1, 2, \dots, N \quad (5.241)$$

Теперь подставим выражения (5.240), (5.241) в формулу (5.237), и вычислим структурный множитель системы вибраторов.

$$S(\theta, \psi) = \sum_{m=1}^N e^{i(\varphi - kd \cos \theta)(m-1)} \quad (5.242)$$

Сумма в формуле (5.242) является суммой геометрической прогрессии со знаменателем q равным следующему выражению.

$$q = e^{i(\varphi - kd \cos \theta)} \quad (5.243)$$

Вычисляем сумму геометрической прогрессии (5.242) по известным формулам.

$$\begin{aligned} S(\theta, \psi) &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \\ &= \frac{1 - q^N}{1 - q} = q^{\frac{N-1}{2}} \frac{q^{\frac{N}{2}} - q^{\frac{N}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (5.244)$$

Поставляем (5.243) в формулу (5.244) и используем формулы Эйлера. В результате получаем следующее выражение для структурного множителя.

$$\begin{aligned} S(\theta, \psi) &= e^{-i\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)(N-1)} \frac{e^{i\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)N} - e^{-i\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)N}}{e^{i\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)}} = \\ &= e^{-i\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)(N-1)} \frac{\sin\left(\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)N\right)}{\sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (5.245)$$

Подставляем структурный множитель (5.245) в формулы (5.238), (5.239), и находим функцию диаграммы направленности для системы полуволновых вибраторов на оси z .

$$\Phi(\theta, \psi) = \frac{4 I_0^2}{k^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{k d}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right) N\right)}{\sin\left(\frac{k d}{2} \cos \theta - \frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad (5.246)$$

Используя формулу (5.246) с помощью пакета MATLAB вычислим КНД системы полуволновых вибраторов, и построим диаграммы направленности излучения в плоскости xz .

На Рис.62а, б показаны диаграммы направленности излучения системы двух вибраторов $N = 2$ для следующих режимов излучения. На Рис.62а расстояние между центрами вибраторов равно $d = \lambda/2$, а сдвиг по фазе у токов вибраторов равен $\varphi = 0$. На Рис.62б эти величины соответственно равны следующим значениям $d = \lambda$, $\varphi = 0$.

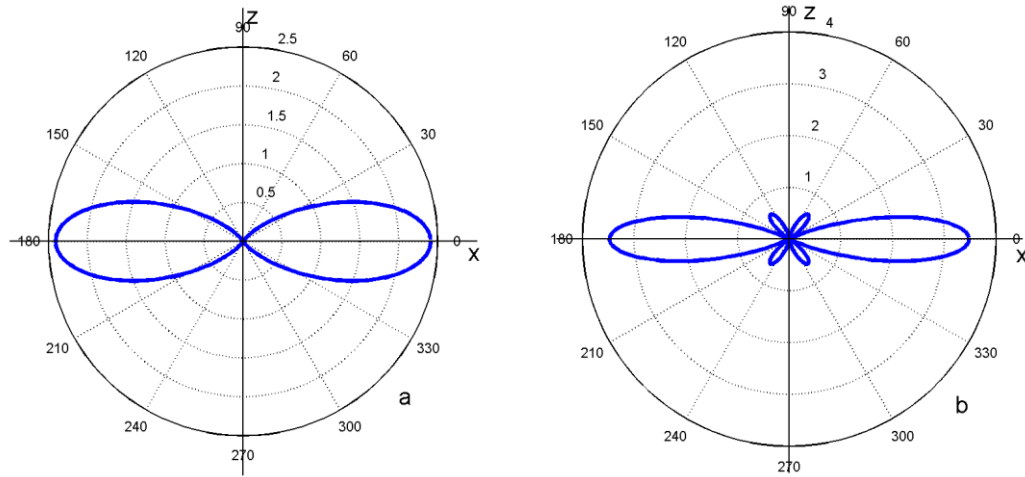


Рис.62 (5.25)

На Рис.62а, б видно, что с увеличением расстояния между вибраторами диаграммы направленности излучения становится более острой.

На Рис.63а, б показаны диаграммы направленности излучения системы двух вибраторов $N=2$, у которых токи колеблются в противофазе. На Рис.63а выбраны следующие значения параметров такой антенны $d = \lambda/2$, $\varphi = \pi$. На Рис.63б эти величины соответственно равны следующим значениям $d = \lambda$, $\varphi = \pi$.

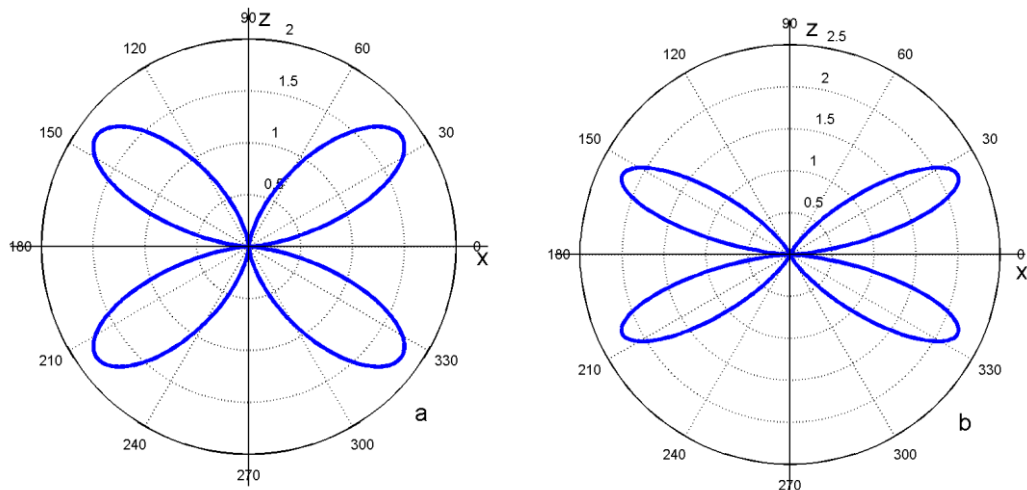


Рис.63 (5.26)

На Рис.63а, б видно, что появились два главных лепестка излучения. Далее, с увеличением расстояния между вибраторами лепестки диаграммы направленности излучения становятся более острыми, и более наклоненными к оси x .

На Рис.64а, б показаны диаграммы направленности излучения системы двух вибраторов $N=2$, у которых токи колеблются со сдвигом по фазе на четверть периода колебания. На Рис.64а выбраны следующие значения параметров такой антенны $d = \lambda/2$, $\varphi = \pi/2$. На Рис.64б эти величины соответственно равны следующим значениям $d = \lambda$, $\varphi = \pi/2$.

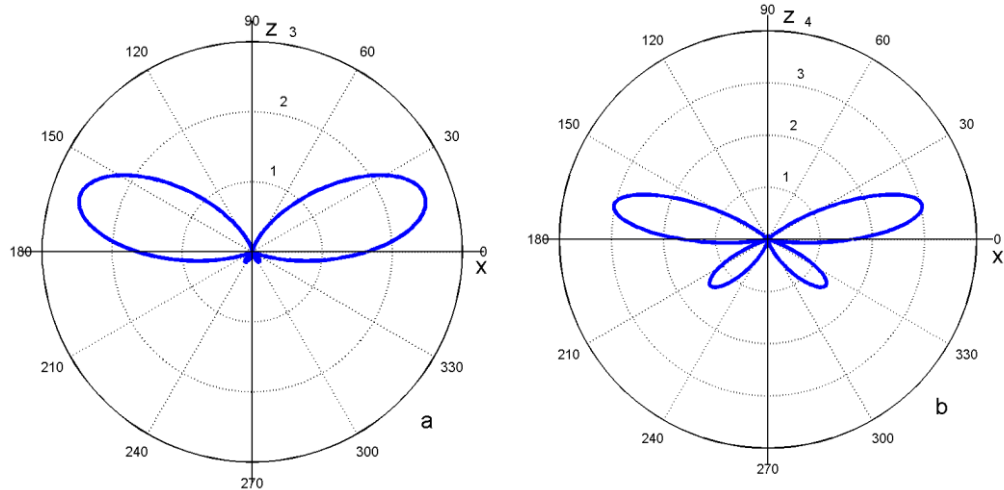


Рис.64 (5.27)

На Рис.64а, б видно, что главный лепесток излучения расположен не симметрично относительно оси x . Далее, с увеличением расстояния между вибраторами лепестки диаграммы направленности излучения становится более острыми, и более наклоненными к оси x .

На Рис.65а, б показаны диаграммы направленности излучения системы из большого числа вибраторов $N > 2$. На Рис.65а выбраны следующие значения параметров такой антенны $N=5$, $d=\lambda$, $\varphi=0$. На Рис.64б эти величины соответственно равны следующим значениям $N=12$, $d=2\lambda$, $\varphi=\pi/2$.

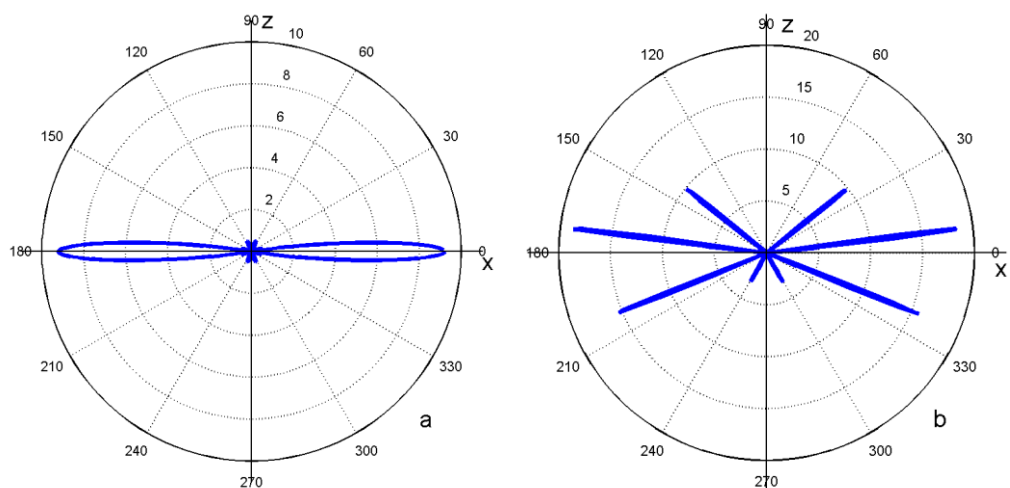


Рис.65 (5.28)

На Рис.65а, б видно, что лепестки диаграммы направленности излучения очень сильно обостряются с увеличением числа полуволновых вибраторов в сложной антенне.

Так как все вибраторы находятся на оси z , то рассматриваемая сложная антенна обладает цилиндрической симметрией относительно оси z . Поэтому излучение такой антенной происходит одинаково во всех направления перпендикулярно оси z . Эта симметрия видна на всех диаграммах направленности, приведенных выше. Лепестки диаграммы направленности симметричны относительно положительного и отрицательного направления вдоль оси x .

19. Система полуволновых вибраторов на оси x .

Пусть N полуволновых вибраторов располагаются на оси x на одинаковых расстояниях d , как это показано на Рис.66.

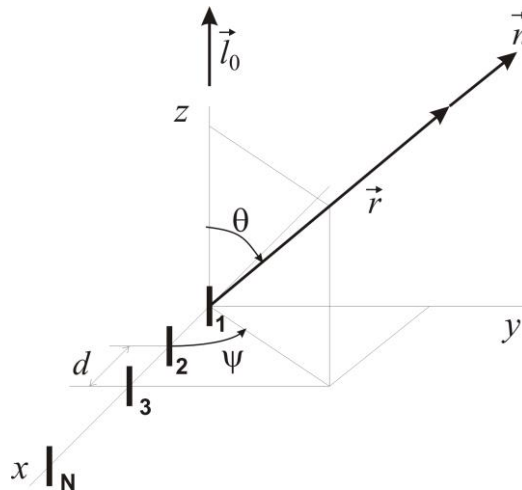


Рис.66 (5.29)

Для вибраторов на Рис.66 положение центров вибраторов будет определяться следующими векторами.

$$\vec{r}_m = \vec{i} (m-1) d, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (5.247)$$

Здесь вектор \vec{i} – единичный вектор, направленный вдоль оси x . В этом случае скалярное произведение векторов и будет равно следующему выражению.

$$\vec{r}_m \cdot \vec{n} = (m-1) d \sin \theta \cos \psi \quad (5.248)$$

Предположим, что сдвиг по фазе между токами в соседних вибраторах является постоянной величиной φ . Тогда фазы токов вибраторов будут определяться следующей формулой.

$$\varphi_m = (m-1) \varphi, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (5.249)$$

Теперь подставим выражения (5.248), (5.249) в формулу (5.237), и вычислим структурный множитель системы вибраторов.

$$S(\theta, \psi) = \sum_{m=1}^N e^{i(\varphi - k d \sin \theta \cos \psi)(m-1)} \quad (5.250)$$

Сравнение формул (5.250) и (5.242) позволяют сразу же получить выражение для структурного множителя и функции диаграммы направленности, рассматриваемой сложной антенны. Результат будет следующим.

$$\Phi(\theta, \psi) = \frac{4 I_0^2}{k^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{k d}{2} \sin \theta \cos \psi - \frac{\varphi}{2}\right) N\right)}{\sin\left(\frac{k d}{2} \sin \theta \cos \psi - \frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad (5.251)$$

Используя формулу (5.251) с помощью пакета MATLAB вычислим КНД системы полуволновых вибраторов, расположенных на оси x , и построим диаграммы направленности излучения.

Рассматриваемая сложная антенна не является симметричной относительно оси z . Это проявляется в несимметричности диаграмм направленности излучения такой антенны. Продемонстрируем это на следующем рисунке.

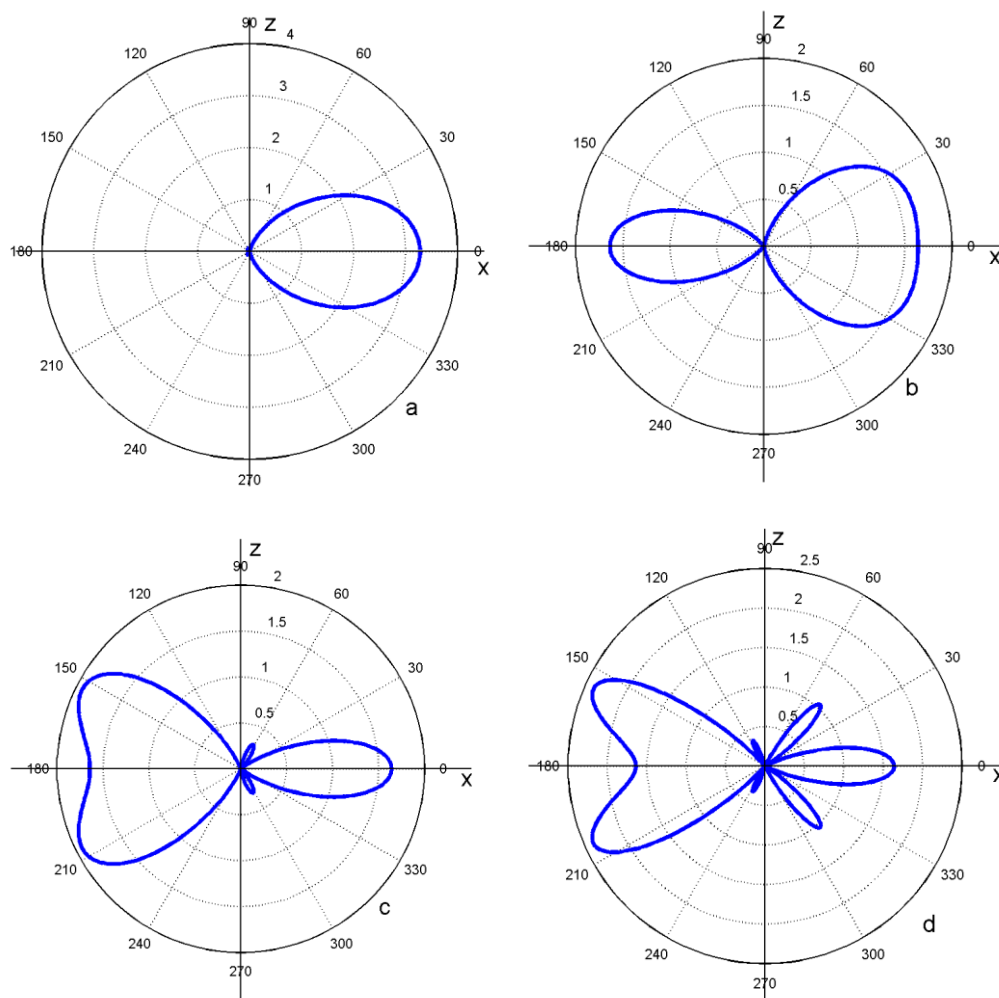


Рис.67 (5.30)

На Рис.67а, b, c, d показаны диаграммы направленности излучения системы двух вибраторов $N = 2$, у которых токи колеблются со сдвигом по

фазе на четверть периода колебания. На Рис.67а выбраны следующие значения параметров такой антенны $d = \lambda/4$, $\varphi = \pi/2$. На Рис.67b эти величины соответственно равны следующим значениям $d = \lambda/2$, $\varphi = \pi/2$. На Рис.67c эти величины соответственно равны следующим значениям $d = \lambda$, $\varphi = \pi/2$. На Рис.67d эти величины соответственно равны следующим значениям $d = 2\lambda$, $\varphi = \pi/2$.

На Рис.68а, b показаны диаграммы направленности излучения системы тех же самых двух вибраторов, что и на Рис.67 а, b, только в другой плоскости, а именно в ху.

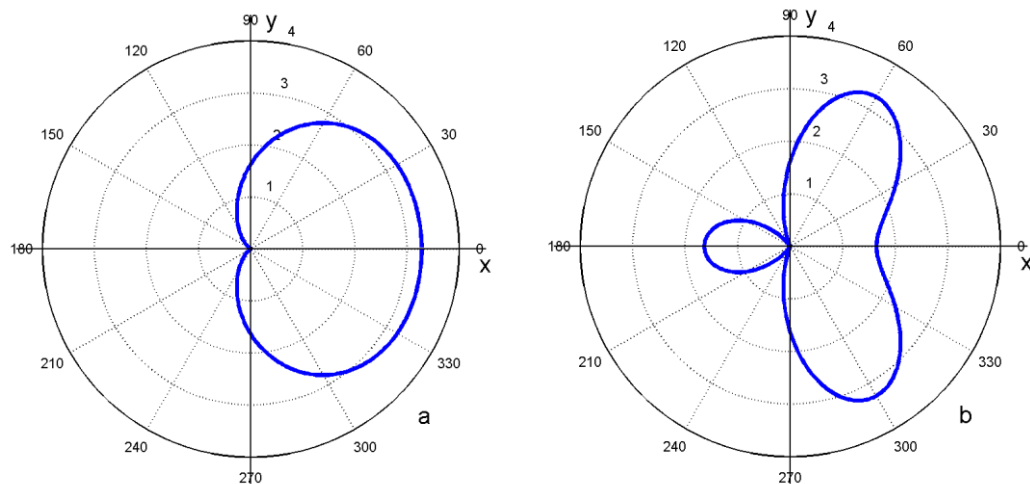


Рис.68 (5.31)

Таким образом, выбирая нужное расположение полуволновых вибраторов, и выбирая нужный сдвиг по фазе между токами в соседних вибраторах, можно получить нужные диаграммы направленности излучения сложной антенны.

