Л4. Элементы теории поля

🚨🚨 *В материале могут быть опечатки и ошибки* 🚨🚨

Новоженов Павел
ЭН-26

Пусть G некоторая пространственная область.

Если в каждой точке M принадлежащей G задано скалярное либо векторная величина, то говорят что в области G **скалярное или векторное поле**.

Если значения величин не зависят от времени, то такое поле называется стационарным.

Для математического моделирования полей вводятся системы координат.

$$u(x, y, z) - \textit{задает скалярное поле}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\} - \textit{ задает векторное поле}$$

Оператор ∇

Для вычисления числовых векторных характеристик полей удобно применять векторно-дифференциальные оператор ∇.

$$\nabla = \nabla_x \vec{i} + \nabla_y \vec{j} + \nabla_z \vec{k}$$

При применении оператора набла к функции задающей поле надо учитывать как свойства вектора так и частных производных. Всегда оператор набла ставится после величины, которая в данный момент считается постоянной, и перед величиной, считающейся переменной.

Градиент

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Дивергенция

$$(\nabla \vec{F}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = div\vec{F}$$

Дивергенция ротора всегда равна нулю.

$$div(rot\vec{F}) = 0$$

Доказывается алгебраически, но муторно, поэтому не приводим. Нужно расписать определитель и все станет ясно.

Ротор

$$[\nabla, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ротор градиента всегда равен нулю.

$$[\nabla, \nabla u] = 0 - \text{ как произведение коллинеарных векторов}$$

Формула Стокса в векторной форме

$$\iint_S (rotF, \vec{n})dS = \oint_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r})$$

Формула Гаусса-Остроградского в векторной форме

$$\oiint_S (\vec{F}, \vec{n}) = \iiint_G (div\vec{F})dxdydz$$

Потенциальное векторное поле

Опр. Векторное поле $\vec{F}(M),\ M \in G$ называется потенциальным если в каждой точке M выполняется равенство:

$$\vec{F} = \mathrm{grad} u$$

Тогда $u(x, u, z)$ называется потенциалом.

Свойства

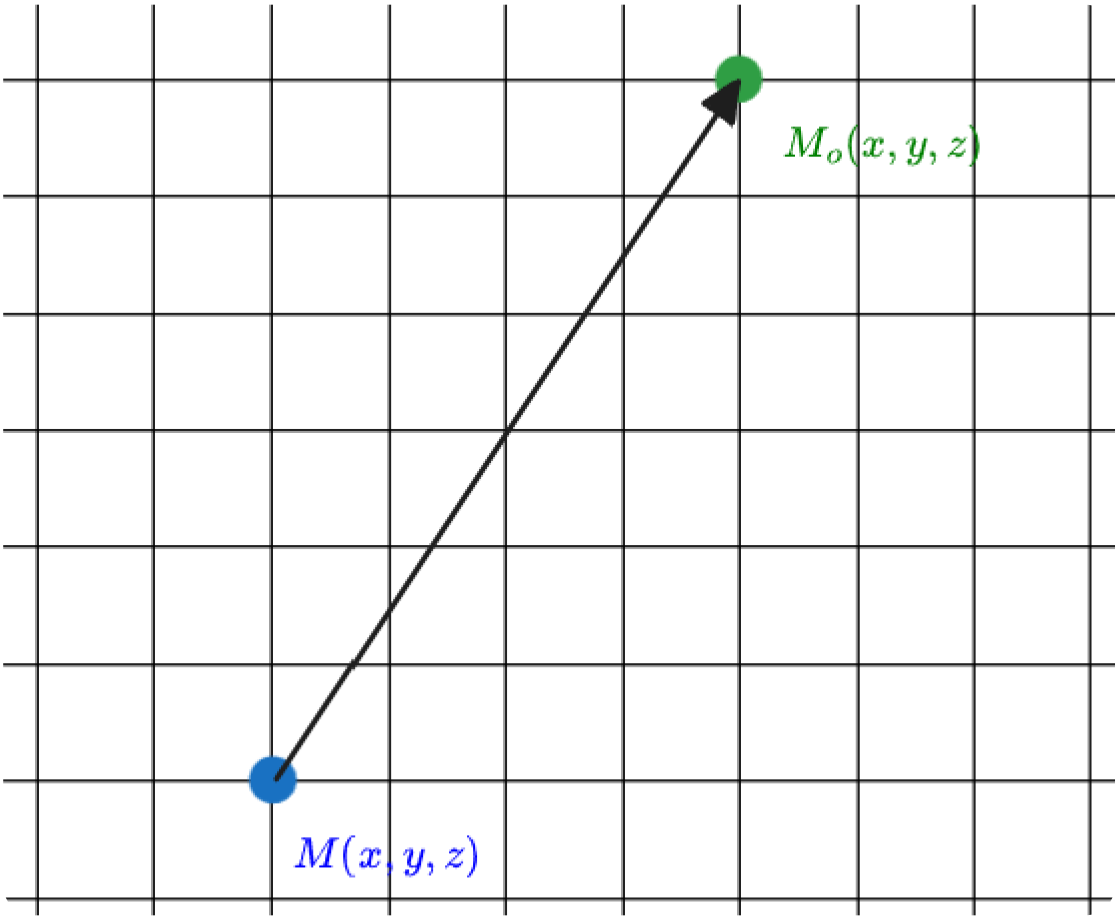
Свойство 1.

Потенциал $u(x, y, z)$ определяется с точностью до постоянной

Доказательство очевидно.

Свойство 2.

Работа поля не зависит от пути, а зависит от положения начальной и конечной точек пути.



$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$A = \int_{M_oM} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{M_oM} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \; (1)$$

Перейдем к параметру, через который можно выразить кривую интегрирования. Получим:

$$\int_{M_oM} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\varphi' + \frac{\partial u}{\partial y}\psi' + \frac{\partial u}{\partial z}\lambda' \right) dt = u(M) - u(M_o)$$

Свойство 3

Работа по замкнутому контуру (циркуляция) для потенциального поля равна нулю.

Следует из свойства 2.

Критерии потенциальности поля

Для того, чтобы поле $\vec{F}$ было потенциальным необходимо и достаточно чтобы циркуляция вектора $\vec{F}$ по любому контуру была равна нулю.

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{l}) = 0 - \textit{условие потенциальности}$$

Необходимость: если поле потенциальное, то циркуляция равна нулю. Это свойство 3.

Достаточность: пусть $\oint_\Gamma(\vec{F}, d\vec{r}) = 0$. В этом случае интеграл $\int_\Gamma(\vec{F}, d\vec{r})$ не зависит от формы пути. То есть интеграл является функцией верхнего предела, точка $M(x, y, z)$ при фиксированном нижнем пределе $M_o(x_o, y_o, z_o)$.

$$u(x, y, z) = \int_{M_o}^{M} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

.

Тогда мы должны доказать, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ и так далее.

$$u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \ldots$$

$$\ldots = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P(x, y, z)dx = P(\hat{x}, y, z),\ \hat{x} \in (x, x + \Delta x)$$

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = P(\hat{x}, y, z)$$

$$\textit{При}\ \Delta x \to 0 : \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z)$$

Аналогично для остальных.

Соленоидельные

Опр. Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным, если:

$$div\vec{F}(M) = 0, \forall M$$

.

Свойства

Свойство 1

Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю.

$$\oint_S (\vec{F}, \vec{n}) = 0$$

Доказательство:

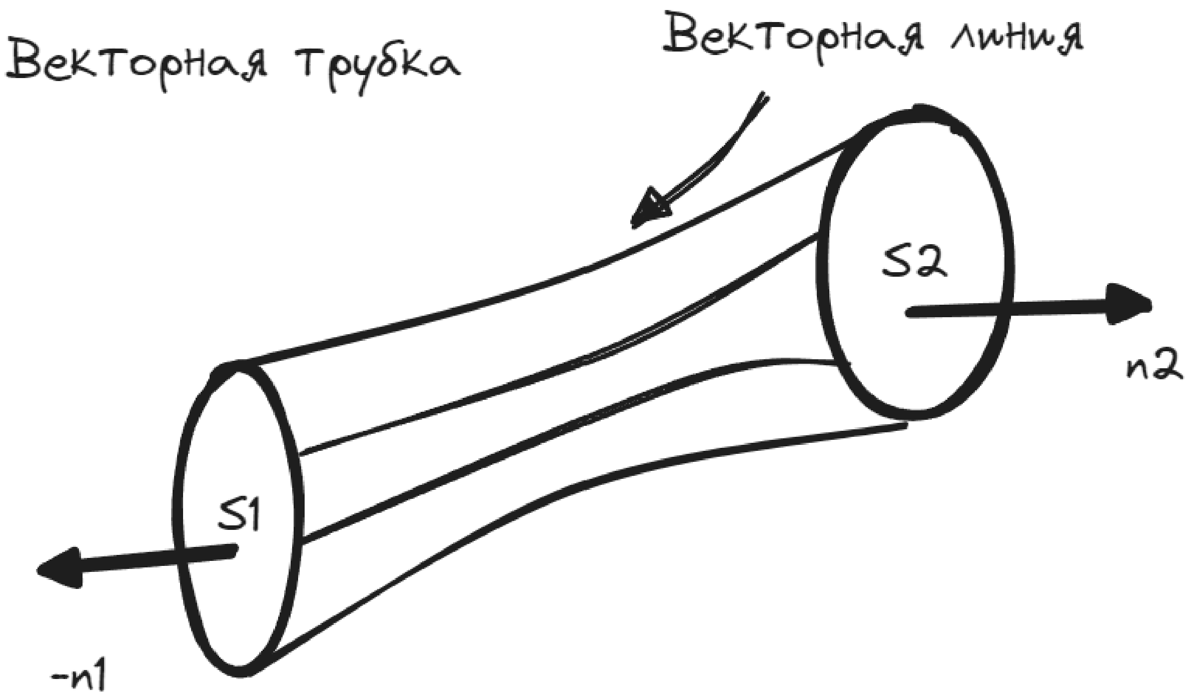
$$\oint_S (\vec{F}, \vec{n}) = \iint div\vec{F}dxdydz$$

Свойство 2

Поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность не зависит от формы поверхности, а зависит только от формы контура, на которую опирается поверхность.

Свойства соленоидального поля

Опр. Кривая называется векторной линией, если касательная к кривой совпадает с направлением вектора поля.



Пусть задано поле $\vec{F}$, так что $div\,\vec{F}(M) = 0,\ \forall M \in G$.

Потоки векторного поля по сечению трубки являются постоянными. Поток через поперечное сечение называется интенсивностью

$$\iint_{S_1} (\vec{F}_1, \vec{n}_1)dx = \iint_{S_2} (\vec{F}_2, \vec{n}_2)ds$$

> В соленоидальном поле векторные линии не кончаются. Они либо замкнутые, либо заканчиваются на границе G.

Если поле является и потенциальным и соленоидальным, то оно называется лапласовым полем. Потому что условия можно сжать до одного:

$$\begin{cases} \vec{F} = grad\,\varphi \\ div\vec{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta\vec{F} = 0$$

Применение потенциальности поля в односвязной области

Если в односвязной области выполняется равенство $rot\,\vec{F} = 0$, то векторное поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ является потенциальным, то есть

$$\vec{F} = grad\ u,\ где\ u(x,y,z) = \iint_{(x_o,y_o,z_o)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

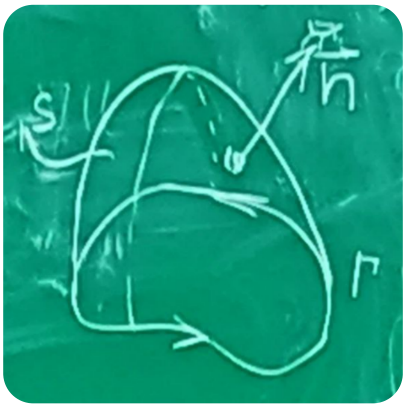
Доказательство

Необходимость

Пусть $\vec{F} = grad\ u$. Тогда

$$rot\ \vec{F} = \nabla \times \nabla u = 0,\ тк\ векторы\ коллинеарны$$

Достаточность:



Пусть $rot\ \vec{F}(M) = 0, \forall M \in G$. Берем произвольный контур в G, натягиваем на неё любую поверхность.

$$\oint_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \iint (rot\ \vec{F}, \vec{n}) des$$

Из равенства следует, что интеграл не зависит от пути интегрирования. То есть является функцией верхнего предела.

Пример

Доказать, что поле потенциально и найти его потенциал.

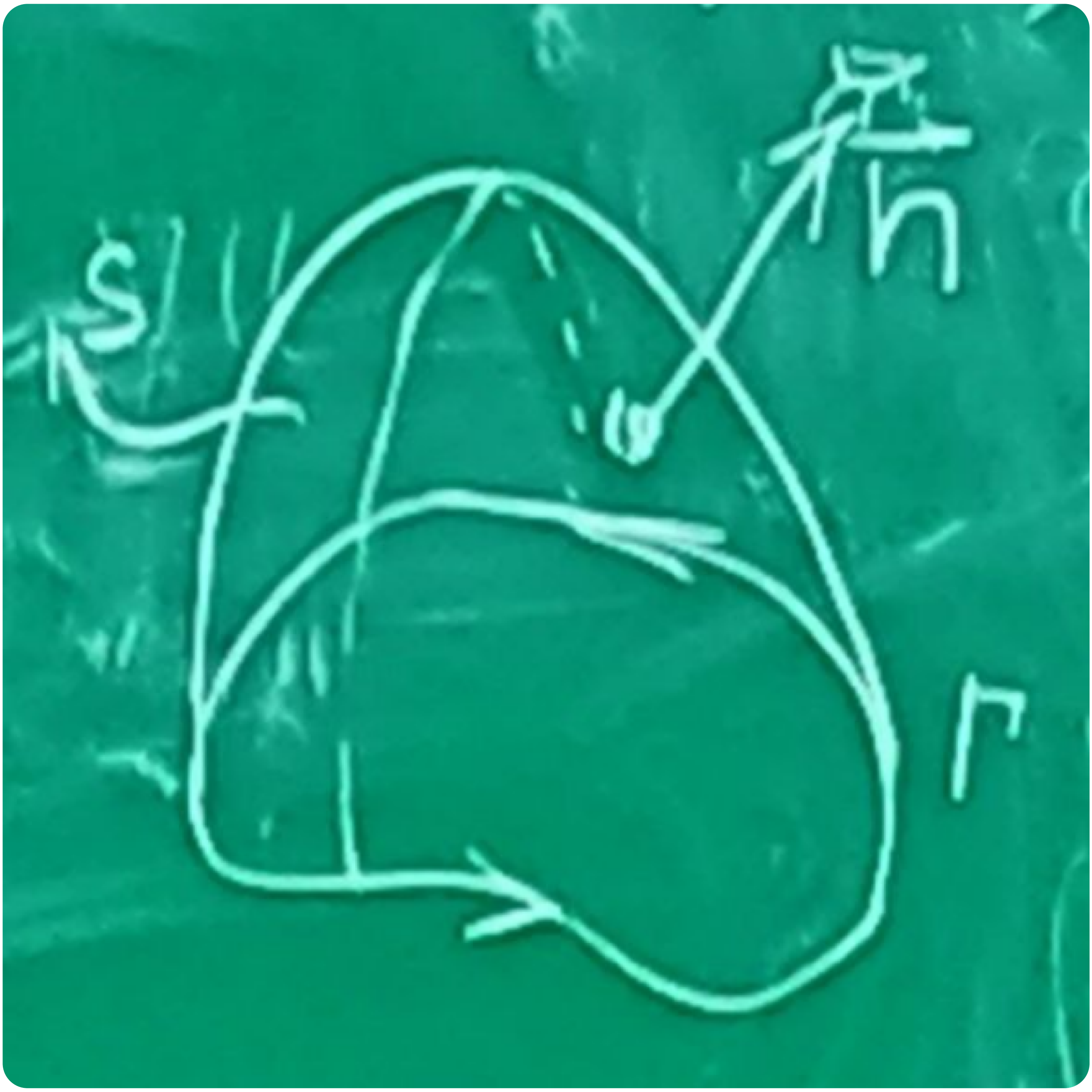
$$\vec{F} = (2xy+5)\vec{i} + x^2\vec{j}$$

$$rot\vec{F} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial y}(2xy+5) + \frac{\partial}{\partial x}x^2\right) = 0$$

Значит поле потенциально.

$$u(x,y) = \int_{M_o}^{M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$M_0M = M_0M_1 + M_1M$$



$$u(x,y) = \int_{M_o}^{M} (2xy + 5dx) + x^2dy = \int_{M_o}^{M_1} 2xy + 5dx + x^2dy + \int_{M_1}^{M} 2xy + 5dx + x^2dy = \ldots$$

$$\ldots = \int_0^{\hat{x}} 5dx + \int_0^{\hat{y}} x^2dy = 5\hat{x}\hat{x}^2\hat{y} + C$$

$$\boxed{u(x,y) = 5x + x^2y + C}$$