Семинар 6.

Телеграфные уравнения для волны бегущей вдоль кабеля.

Рассматриваем длинную двухпроводную линию, частный случай коаксиальный кабель, Рис.1.

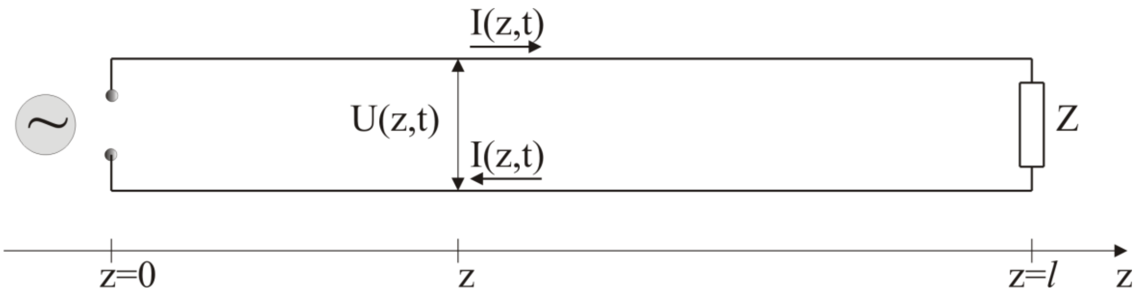

Рис.1.

Напряжение между проводами, и ток, текущий по проводам, когда по линии бежит монохроматическая электромагнитная волна, тоже являются монохроматическими волнами.

$$I(z,t)=I_0e^{i(\beta z-\omega t)},\quad U(z,t)=U_0e^{i(\beta z-\omega t)} \tag{1}$$

Если вдоль линии бежит волна, которая не обязательно является монохроматической волной, например импульс, то ток и напряжение в такой волне, можно получить, используя разложение в интеграл Фурье.

$$I(z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(\omega)e^{i(\beta z-\omega t)}d\omega,\quad U(z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}U_0(w)e^{i(\beta z-\omega t)}d\omega \tag{2}$$

Другой подход, для нахождения зависимости тока $I(z,t)$ и напряжения $U(z,t)$ от координаты z и времени t, состоит в следующем. Написать дифференциальные уравнения в частных производных для тока и напряжения, и решать его с определенными начальными и граничными условиями.

Такие уравнения называются телеграфными уравнениями.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial z}+\overline{L}\dfrac{\partial I}{\partial t}+\overline{R}\,I=0,\\[2mm] \dfrac{\partial I}{\partial z}+\overline{C}\dfrac{\partial U}{\partial t}=0\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\overline{L},\overline{C},\overline{R}$ – погонные индуктивность линии, емкость линии, и сопротивление линии. Далее будем говорить о двухпроводной линии в виде кабеля. Тогда на Рис.1 нижний провод можно считать жилой кабеля, а верхний провод оплеткой кабеля.

Дисперсионное соотношение для кабеля имеет вид.

$$\beta=\frac{\omega}{v_f},\quad v_f=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{4}$$

В формуле (4) волновое число это действительная величина. Поэтому волны (1), (2) бегут в кабеле без потерь. На языке телеграфных уравнений, это означает что сопротивления линии равно нулю $\overline{R}=0$.

В этом случае описание волн с помощью формул (1), (2) или системы уравнений (3) будет тождественным.

Если же учитывать потери на джоулево тепло, постоянная распространения будет комплексным числом.

$$\beta = \beta_0 + i\alpha, \quad \beta_0 = \frac{\omega}{v_f} \tag{5}$$

Коэффициент затухания α волны в кабеле, можно найти при решении уравнений Максвелла в кабеле с учетом распределения токов в приповерхностном слое жилы и оплетки. Это сложная электродинамическая задача.

Поэтому проще решать телеграфные уравнения, в которых сопротивление линии $\bar{R}$ находится из эксперимента.

Подведем итог. Погонную индуктивность и погонную емкость, берем из теории кабеля без потерь.

$$\bar{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}, \quad \bar{C} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{6}$$

Погонное сопротивление берем из эксперимента.

Задача 1.

Найти решение телеграфных уравнений для волны, бегущей вдоль кабеля без потерь, и определить параметры этой волны.

Вначале рассмотрим волну в идеальном кабеле, и положим в уравнениях (3) погонное сопротивление равным нулю $\bar{R} = 0$. Далее будем предполагать монохроматическую зависимость напряжения и тока от времени.

$$\begin{cases} U(z,t) = U(z)e^{-i\omega t}, \\ I(z,t) = I(z)e^{-i\omega t} \end{cases} \tag{7}$$

Подставляем (7) в формулы (3), и получаем следующие уравнения.

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dz} - i\omega\bar{L}I = 0, \\ \dfrac{dI}{dz} - i\omega\bar{C}U = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Подставляем одно уравнение в системе (8) в другое. В результате получаем следующее дифференциальное уравнение для напряжения.

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \omega^2\bar{C}\bar{L}U = 0 \tag{9}$$

Аналогично получается дифференциальное уравнение для тока.

$$\frac{d^2I}{dz^2} + \omega^2\bar{C}\bar{L}I = 0 \tag{10}$$

Общим решением уравнений (9), (10) являются следующие выражения.

$$\begin{cases} U(z) = U_+e^{i\beta z} + U_-e^{-i\beta z}, \\ I(z) = I_+e^{i\beta z} + I_-e^{-i\beta z}, \\ \beta = \omega\sqrt{\bar{C}\bar{L}} \end{cases} \tag{11}$$

Постоянные амплитуды напряжения $U_\pm$ и тока $I_\pm$ связываются друг с другом с помощью уравнений (8). В результате получаются следующие соотношения.

$$I_+ = \frac{\omega \bar{C}}{\beta} U_+ = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} U_+, \quad I_- = -\frac{\omega \bar{C}}{\beta} U_- = -\sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} U_- \tag{12}$$

Объединяя формулы (7), (10) и (12) получаем решение телеграфных уравнений в виде бегущих монохроматических волн напряжения и тока.

$$\begin{cases} U(z,t) = U_+ e^{i(\beta z - \omega t)} + U_- e^{-i(\beta z + \omega t)}, \\ I(z,t) = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} U_+ e^{i(\beta z - \omega t)} - \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} U_- e^{-i(\beta z + \omega t)} \end{cases} \tag{13}$$

Монохроматическая волна с амплитудой U_+ бежит в положительную сторону оси *z*, а волна с амплитудой U_- бежит в отрицательную сторону оси *z*. Дисперсионное соотношение для этих волн имеет следующий вид.

$$\beta = \omega \sqrt{\bar{C}\,\bar{L}} \tag{14}$$

Подставим значения погонной емкости и погонной индуктивности из формул (6) в формулу (14). В результате поучим следующее выражение.

$$\beta = \omega \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \tag{15}$$

Отсюда получаем фазовую скорость для волн напряжения и тока.

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{16}$$

Эта фазовая скорость совпадает с фазовой скоростью монохроматической волны в идеальном кабеле (4).

Интересно, сравнить формулы (12) с аналогичной формулой, полученной на пошлом семинаре.

$$I_0 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{17}$$

Подстановка погонной емкости и индуктивности (6) в (12) дает формулу (17). Таким образом, получаем важное соотношение.

$$\sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{18}$$

Дело в том, что одной из характеристик кабеля является его волновое сопротивление Z_0, которое находится из выражения.

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} \tag{19}$$

Таким образом, получаем формулу для нахождения волнового сопротивления кабеля.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{C}}} = \frac{c\mu_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1} = 60 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1} \; (Ом) \tag{20}$$

Как видно из формулы (20), волновое сопротивление зависит от радиусов жилы и оплетки, и от диэлектрической проницаемости прослойки между цилиндрами.

Для примера, для кабеля $\varepsilon = 1.8, r_1 = 1\,мм,\ r_2 = 3\,мм$ получаем.

$$Z_0 = 49.2\,Ом$$

Задача 2.

Найти решение телеграфных уравнений для волны, бегущей вдоль кабеля без потерь, с заданной нагрузкой на одном конце.

Рассмотрим кабельную линию Рис.1, ограниченную с одного конца. Пусть на расстоянии $z = l$ кабель обрезан и нагружен на сопротивление нагрузки $Z_н$. На нагрузке выполняется закон Ома.

$$U(l,t) = Z_н\, I(l,t) \tag{21}$$

На решение (13) накладываем граничное условие (21).

$$U_+ e^{i(\beta l - \omega t)} + U_- e^{-i(\beta l + \omega t)} = Z_н \left(\frac{U_+}{Z_0} e^{i(\beta l - \omega t)} - \frac{U_-}{Z_0} e^{-i(\beta l + \omega t)} \right) \tag{22}$$

Проводим преобразование

$$U_- e^{-i(\beta l + \omega t)} \left(1 + \frac{Z_н}{Z_0} \right) = U_+ e^{i(\beta l - \omega t)} \left(\frac{Z_н}{Z_0} - 1 \right) \tag{23}$$

В результате получаем следующее отношение амплитуд отраженной и падающей волны.

$$\frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_н - Z_0}{Z_н + Z_0} e^{i2\beta l}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\overline{L}}{\overline{C}}} \tag{24}$$

Здесь Z_0 – волновое сопротивление кабельной линии. Если выполняется условие $Z_н = Z_0$, то в линии нет отраженной волны. Такой режим называют режимом бегущей волны.

Задача 3.

Найти решение телеграфных уравнений для волны, бегущей вдоль кабеля с потерями, и определить параметры этой волны.

Теперь в телеграфных уравнениях (3) учтем член с погонным сопротивлением, т.е. учтем наличие потерь в кабельной линии. Будем искать решение телеграфных уравнений (3) в виде монохроматической волны с затуханием вдоль оси *z*.

$$\begin{cases} U(z,t) = U_+ e^{i(pz - \omega t)}, \\ I(z,t) = I_+ e^{i(pz - \omega t)} \end{cases} \tag{25}$$

В формулах (25), постоянная распространения *p* является, вообще говоря, комплексным числом. Подставляем формулы (25) в телеграфные уравнения (3). В результате получаем следующую систему алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} i\,pU - i\omega \overline{L}\, I + \overline{R}\, I = 0, \\ i\,p I - i\omega \overline{C}\, U = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Из системы (26) получаем следующее уравнение.

$$p^2 = \omega^2 \overline{C}\,\overline{L} + i\,\overline{R}\,\omega\,\overline{C} \tag{27}$$

Постоянную распространения p разбиваем на действительную и мнимую части.

$$\begin{aligned} &p = \beta + i\,\alpha, \\ &\beta > 0, \quad \alpha > 0 \end{aligned} \tag{28}$$

После подстановки (28) в (27), и простых преобразований, получаем следующие выражения.

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\omega^2 \overline{C}\,\overline{L}\right)^2 + \left(\overline{R}\,\omega\,\overline{C}\right)^2} + \omega^2 \overline{C}\,\overline{L}\right)}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\omega^2 \overline{C}\,\overline{L}\right)^2 + \left(\overline{R}\,\omega\,\overline{C}\right)^2} - \omega^2 \overline{C}\,\overline{L}\right)} \end{aligned} \tag{29}$$

Если потери в линии малы, то чаще всего выполняется следующее условие.

$$\overline{R} << \omega\,\overline{L} \tag{30}$$

Условие (30) позволяет упростить формулы (29). В результате получаем более простые выражения.

$$\begin{aligned} \beta &= \omega\sqrt{\overline{C}\,\overline{L}}, \\ \alpha &= \frac{\overline{R}}{2\omega\,\overline{L}} \end{aligned} \tag{31}$$

Первое уравнение в (23) определяет действительную часть β постоянной распространения p. Она совпадает с постоянной распространения (14). Мнимая часть α постоянной распространения называется коэффициентом затухания. После подстановки выражения (28) в уравнения (25), последние принимают следующий вид.

$$\begin{cases} U(z,t) = U_+\, e^{-\alpha z}\, e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ I(z,t) = I_+\, e^{-\alpha z}\, e^{i(\beta z - \omega t)} \end{cases} \tag{32}$$

Найдем отношение напряжений и токов в волнах (32) в двух точках на оси z, отстоящих на расстоянии l.

$$\left|\frac{U(l,t)}{U(0,t)}\right| = e^{-\alpha l}, \quad \left|\frac{I(l,t)}{I(0,t)}\right| = e^{-\alpha l} \tag{33}$$

Как видно из формул (33) величины напряжений и токов уменьшаются в $e^{-\alpha l}$ раз. Это отношение может быть измерено, а значит, может быть найден коэффициент затухания α. Затем по формуле (31) может быть определено погонное сопротивление $\overline{R}$.