Л3. Теорема Стокса и Формула Остроградского-Гаусса

🚨🚨 *В материале могут быть опечатки и ошибки* 🚨🚨

Новоженов Павел
ЭН-26

Теорема Стокса

Пусть S - гладкая поверхность, ограниченная замкнутой кривой Γ, ориентирована нормалью $\vec{n}$. Если функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ непрерывные на $S + \Gamma$ вместе с частными производными первого порядка этих функции, то справедлива формула Стокса.

$$\iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \cos(\angle(\vec{n}, x)) + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \cos(\angle(\vec{n}, y)) + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \cos(\angle(\vec{n}, z))]ds = \ldots$$

$$\ldots = \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy]ds = \ldots$$

$$\ldots = \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz \; (3)$$

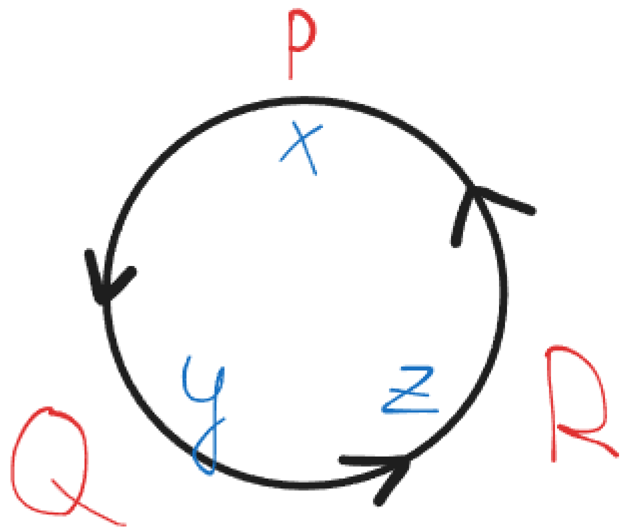
Обход вектора нормали и обход контура должны быть согласованны: из конца вектора нормали обход контура должен быть виден против часовой стрелки.

Доказательство

$$\oint_\Gamma R(x, y, z)dx = \oint_{\Gamma_1} P(x, y, z(x, y))dx = -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} dxdy = -\iint (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial y})dxdy = \ldots$$

$$\ldots = -\iint (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial y}) \cos(\angle(\vec{n}, x))ds = -\iint \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\angle(\vec{n}, x)) - \frac{\partial P}{\partial z}\cos(\angle(\vec{n}, y)) = \ldots$$

$$\ldots = \iint [\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\angle(\vec{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\angle(\vec{n}, x))]ds \; (5)$$



$$\oint_\Gamma Q(x,y,z)dy = \iint_\Gamma [\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\angle(\vec{n},x) - \frac{\partial P}{\partial z}\cos(\angle(\vec{n},z))]ds$$

$$\oint_\Gamma Q(x,y,z)dy = \iint_\Gamma [\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\angle(\vec{n},x) - \frac{\partial P}{\partial z}\cos(\angle(\vec{n},z))]ds$$

$$\iint_S (rot\vec{F},\vec{n})ds = \oint(\vec{F},\vec{n}) \ (6)$$

Поток ротора векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S равен циркуляции этого поля по кривой ограничивающей S.

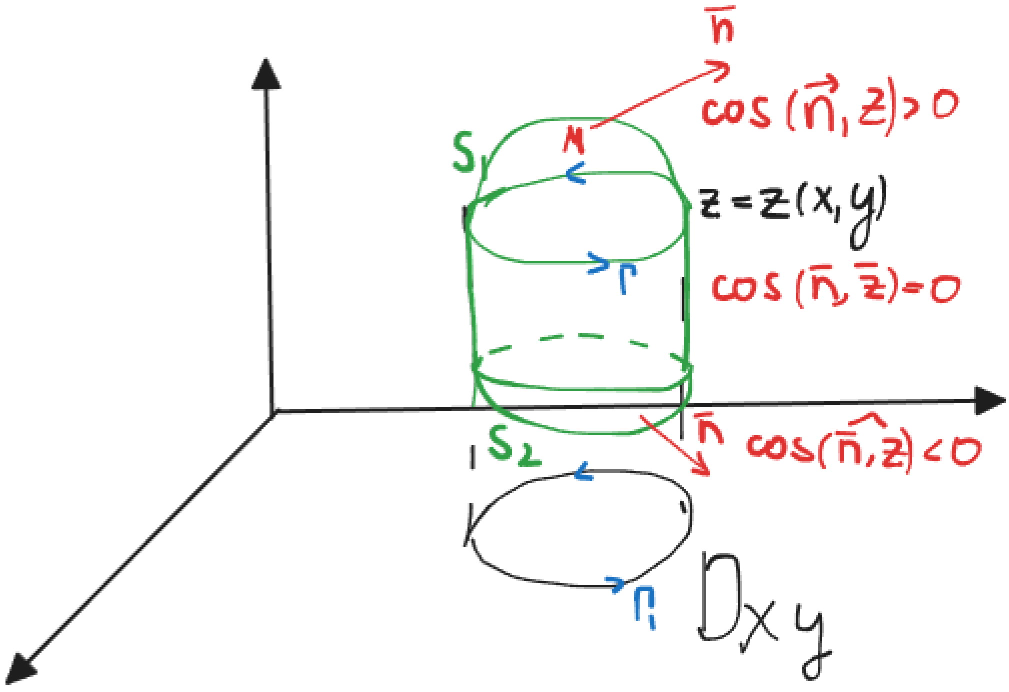
Формула Остраградского-Гаусса

Пусть S замкнутая гладкая поверхность ориентирована с помощью внешней нормали. Функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны на $G+S$ вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$

$$\oiint[P\cos(\angle(\vec{n},x)) + Q\cos(\angle(\vec{n},y)) + R\cos(\angle(\vec{n},z))]ds = \oiint Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_G (\frac{\partial P}{\partial x} +$$

Довольно часто на практике при вычислении потока векторного поля через незамкнутую поверхность поверхность замыкают, применяют формулу Гаусса, а потом находят поток через исходную поверхностью.

Доказательство



$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{D_{xy}} (\int \frac{\partial R}{\partial z} dz) dxdy = \iint_{D_{xy}} (R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)))dxdy = \ldots$$

$$\ldots = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint R(x,y,z_1(x,y))dxdy = \ldots$$

$$\ldots = \iint_{S_1} R(x,y,z_2(x,y)) \cos(\angle(\vec{n}, z))ds + \iint_{S_2} R(x,y,z_1(x,y)) \cos(\angle(\vec{n}, z))ds$$

$$\iint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_S R(x,y,z) \cos(\angle(\vec{n}, z))ds$$

Аналогично для других функций