Л5.Числовые ряды

🚨🚨 *В материале могут быть опечатки и ошибки* 🚨🚨

Новоженов Павел
ЭН-26

Опр. Выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_k = 1^\infty a_k$ называется числовым рядом.

Числа $a_1,\ a_2, \ldots$ являются членами числовой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

a_k - общий член ряда (часто обозначается с индексом n).

Числа a_1, a_2 и тд, являются членами ряда.

Опр. Сумма первых n членов ряда называется n-ной частичной суммой ряда.
$S_n = a_1, a_2, \ldots, a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Составляется последовательность частичных сумм.

Опр. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм, то он называется суммой ряда.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

А сам ряд называется сходящимся. Если такой предел равен плюс минус бесконечности или не существует ряд называется расходящимся.

Опр. Остаток числового ряда

$$a_1 + a_2 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} - \ \textit{остаток ряда}$$

> И ряд, и остаток ряда сходятся и расходятся одновременно.

Частичная сумма остатка ряда отличается на некоторое число от частичной суммы исходного ряда. Отбрасывание конечного числа слагаемых в ряде не влияет на сходимость ряда, но изменяют его сумму.

Пример

Например:

$$\sum_{k=1}^{n}$$

Получим последовательность $S = 1, 0, 1, 0, 1, 0$. Предела нет, ряд расходится.

Пример

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{(k+1)k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1$$

Пример

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{\infty}$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \infty$$

Свойства сходящихся рядов

Пусть даны два сходящихся ряда $\sum a_k$, $\sum b_k$. Тогда ряды $\sum \alpha a_k$ и $\sum \beta b_k$, $\sum (a_k \pm b_k)$ сходятся и справедливы равенства:

$$\sum \alpha a_k = \alpha \sum a_k$$

$$\sum \beta b_k = \beta \sum b_k$$

$$\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$$

Критерий Вейерштрасса сходимости числовых рядов

Для того, чтобы числовой ряд сходился $\sum a_k$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon \ \exists N(\varepsilon)$ такое чтобы выполнялось неравенство:

$$|a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots a_{k+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon, \ n > N, P = 1, 2, 3$$

У сходящего числового ряда $\lim_{a \to \infty} a_k = 0$. Тогда ряд МОЖЕТ сходиться. Иначе ряд сразу расходится.