Семинар 4.

Электромагнитная волна в кабеле.

Рассмотрим длинную линию в виде коаксиального кабеля, где двумя проводами являются внутренний и внешний цилиндры Рис.1.

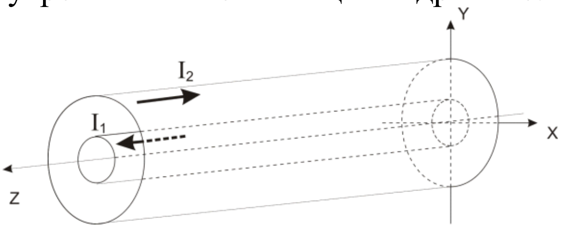

Рис.1.

Внутренний цилиндр называют также жилой, а внешний цилиндр называют оплеткой. Распространение электромагнитной волны возможно в такой передающей системе, когда выполняются следующие условия. В любом сечении кабеля $z = z_0$ и в любой момент времени $t = t_0$ заряды на жиле и оплетке одинаковые по величине, но разные по знаку, а токи текущие внутри кабеля и по внешнему цилиндру одинаковы и противоположно направлены. Отметим, что эти условия устанавливаются автоматически, когда кабель подключают к излучающему устройству (например, генератору).

Так как коаксиальный кабель обладает цилиндрической симметрией, то удобно перейти в цилиндрическую систему координат. На Рис.2 показано сечение коаксиального кабеля. Ось z направлена к нам, радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны r_1, r_2. Произвольная точка между цилиндрами определяется тремя цилиндрическими координатами r, ψ, z. Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами этой точки имеет вид.

$$\begin{cases} x = r\cos\psi, \\ y = r\sin\psi, \\ z = z. \end{cases} \tag{6.31}$$

На Рис.2 из рассматриваемой точки выходят три взаимно-перпендикулярные единичных вектора $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$, эти векторы называют ортами. Единичный вектор $\vec{e}_z$ направлен к нам, вдоль оси z, и поэтому невиден.

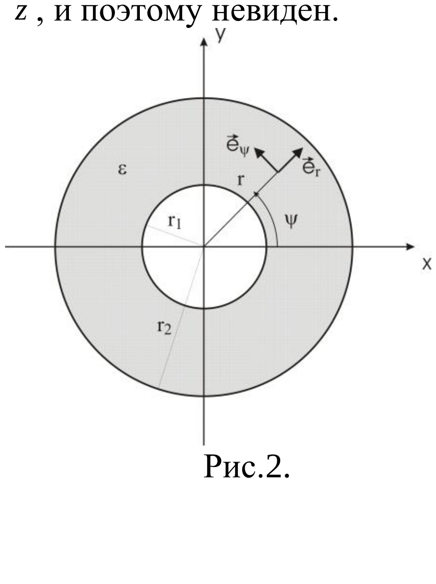

Рис.2.

Любой вектор $\vec{A}$ можно разложить по любым трем взаимно-перпендикулярным векторам. Поэтому такое разложение можно выполнить или по тройке единичных векторов $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ декартовой системы координат, или по тройке векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$ цилиндрической системы координат. В результате разложение вектора будет иметь вид.

$$\vec{A} = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z = \vec{e}_r A_r + \vec{e}_\psi A_\psi + \vec{e}_z A_z \tag{6.32}$$

Таким образом, вектор может характеризоваться тремя проекциями или на орты декартовой системы координат или на орты цилиндрической системы координат.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_x,\ A_y,\ A_z), \\ \vec{A} &= (A_r,\ A_\psi,\ A_z) \end{aligned} \tag{6.33}$$

Волна, бегущая по кабелю, имеет отличные от нуля векторы электрического $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{B}$ только внутри кабеля, в пространстве между цилиндрами $r_1 < r < r_2$. Внутри внутреннего цилиндра и снаружи внешнего цилиндра электромагнитное поле равно нулю.

Если волна, бегущая по кабелю, является монохроматической волной с частотой ω, то электрическое и магнитное поле в такой волне ищутся в следующем виде.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь ω – циклическая частота, β - продольное волновое число, которое связано с длиной волны λ соотношением.

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Фазовая скорость такой волны определяется следующей формулой.

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}.$$

Строгий анализ распространения волны в двухпроводной линии с учетом граничных условий на поверхности двух металлических проводов показывает, что волна является поперечной волной $E_z = 0, B_z = 0$. Далее, в силу цилиндрической симметрии вектор электрического поля и вектор магнитного поля содержат по одной проекции, которые являются функциями только радиуса.

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y) &= \left(E_r(r),\quad 0,\quad 0\right), \\ \vec{B}(x,y) &= \left(0,\quad B_\psi(r),\quad 0\right). \end{aligned}$$

Задача 1.

Исходя из уравнений Максвелла, записанных в цилиндрической системе координат, получить уравнения для нахождения полей $E_r(r), B_\psi(r)$.

Приведем формулы, для вычисления градиента, дивергенции и ротора в цилиндрической системе координат.

$$\operatorname{grad} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\psi \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \psi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \tag{6.34}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{6.35}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\psi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\psi\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \psi}\right) \tag{6.36}$$

В пространстве между цилиндрами $r_1 < r < r_2$ отсутствуют электрические заряды и токи $\rho = 0,\ \vec{j} = 0$. Поэтому система уравнений Максвелла для этой области имеет следующий вид.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = +\dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь ε – диэлектрическая проницаемость пластика между жилой и оплеткой кабеля. Для монохроматической волны (6.1), которую мы рассматриваем, уравнение Максвелла, записанные в виде (1.9), <u>абсолютно правильные</u>.

Диэлектрическая проницаемость, вообще говоря, зависит от частоты $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Это явление называют частотной или временной дисперсией. Если рассматривать электромагнитный импульс, то он является суперпозицией монохроматических волн (6.1) с разными частотами в интервале $\omega_0 - \Delta\omega < \sigma < \omega_0 + \Delta\omega$. Для описания распространения импульса по кабелю, вид уравнений Максвелла (1.9), пришлось бы изменить.

Берем выражения для электрического и магнитного поля в виде (61) и подставим в уравнения (1.9). Причем будем учитывать выражения (6.35), (6.36) для дивергенции и ротора в цилиндрической системе координат. Кроме того, производные по координате z и времени t легко вычисляются по следующему правилу.

$$\frac{\partial}{\partial z} = i\beta, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \tag{0}$$

Из уравнения $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ получаем следующее выражение.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{d r}\left(rE_r\right) = 0 \tag{1}$$

Из уравнения $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ получаем следующее выражение.

$$i\beta E_r = i\omega B_\psi \tag{2}$$

Из уравнения $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ получаем тождество $0 = 0$.
Из уравнения $\operatorname{rot} \vec{B} = \left(\varepsilon/c^2\right)\left(\partial \vec{E}/\partial t\right)$ получаем два выражения.

$$-i\beta B_\psi = -\frac{\varepsilon}{c^2} i\omega E_r, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{d r}\left(rB_\psi\right) = 0 \tag{3}$$

Используя выражение для фазовой скорости $v_f = \omega/\beta$, из (2) и (3) получаем.

$$\begin{cases} E_r = v_f \, B_\psi \\ B_\psi = \dfrac{\varepsilon}{c^2} v_f \, E_r \end{cases} \tag{4}$$

Из системы (4) находим выражение для фазовой скорости монохроматической волны, бегущей вдоль кабеля.

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5}$$

Окончательно, из (2), (3), (4) получаем систему уравнения для вычисления электрического и магнитного поля $E_r(r),\ B_\psi(r)$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{d\,r}\left(rE_r\right) = 0, \quad \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{d\,r}\left(rB_\psi\right) = 0 \\ E_r = v_f \, B_\psi \end{cases} \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения для электрического и магнитного поля оказались одинаковыми по форме, отсюда и зависимость от радиуса оказывается одинаковой.

$$E_r = \frac{C_1}{r}, \quad B_\psi = \frac{C_2}{r}, \quad C_1 = v_f \, C_2 \tag{7}$$

Решение (7) зависит от одной произвольной константы C_1, поскольку вторая константа C_2 выражается через первую.

<u>**Задача 2**</u>.

Найти связь между скалярным и векторным потенциалом и их связь с электрическим и магнитным полем в монохроматической волне, бегущей вдоль кабеля.

Используем общие соотношения для выражения электрического $\vec{E}(\vec{r},t)$ и магнитного $\vec{B}(\vec{r},t)$ поля через скалярный $\varphi(\vec{r},t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$ потенциал.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \end{cases} \tag{8}$$

Ищем скалярный и векторный потенциал в виде монохроматической волны, бегущей вдоль кабеля, аналогично выражению (6.1).

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r},t) &= \varphi(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \vec{A}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)}. \end{aligned} \tag{9}$$

В силу цилиндрической симметрии амплитуды в волнах (9) зависят только от радиуса.

$$\varphi(x,y) = \varphi(r), \quad \vec{A}(x,y) = \vec{A}(r) \tag{10}$$

Кроме того можно показать, что векторный потенциал содержит только продольную составляющую.

$$\vec{A}(x, y) = \left(0, \quad 0, \quad A_z(r)\right) \tag{11}$$

Из выражений для градиента (6.34) и ротора (6.36), с учетом правила дифференцирования по координате z и времени t (0), систему (8) можно представить в следующем виде.

Из уравнения $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$ получаем два соотношения.

$$E_r = -\frac{d\,\varphi}{d\,r}, \quad 0 = -i\beta\,\varphi + i\omega\,A_z \tag{12}$$

Из уравнения $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ получаем следующее выражение.

$$B_\psi = -\frac{d\,A_z}{d\,r} \tag{13}$$

Пусть в начале кабеля $z = 0$, в момент $t = 0$ между цилиндрами приложено напряжение $U = U_0$. Это напряжение свяжем с электрическим полем (12) в кабеле.

$$U_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr \tag{14}$$

Подставляем (7) в (14) и получаем связь между напряжением и константой C_1.

$$U_0 = C_1 \ln\frac{r_2}{r_1} \tag{15}$$

Напряжение между проводами в любом сечении z и в любой момент времени t будет определяться формулой.

$$U(z,t) = U_0 e^{i(\beta z - \omega t)}, \tag{16}$$

Замечание. Поскольку напряжение является действительной величиной $\tilde{U}$, а комплексная форма U (16) применяется для математического удобства, то запишем формулу (16) в действительном виде.

$$\tilde{U}(z,t) = U_0 \cos\left(\beta z - \omega t\right) \tag{17}$$

Поэтому вдоль кабеля кроме электромагнитной волны бежит монохроматическая волна напряжения.

Задача 3.

Найти связь между током текущим по поверхности металлических цилиндров и напряжением между цилиндрами.

Поверхностные токи и поверхностные заряды определяются через граничные условия для электрического и магнитного поля на поверхности идеального проводника Рис.71.

Здесь на поверхности идеального проводника изображены три взаимно перпендикулярные единичные векторы, один нормальный вектор $\vec{n}$ и два касательных вектора $\vec{\tau}, \vec{m}$, векторы $(\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{m})$ образуют правую тройку векторов. Нормальный вектор направлен из металла во внешнее пространство, в вакуум (в диэлектрик).

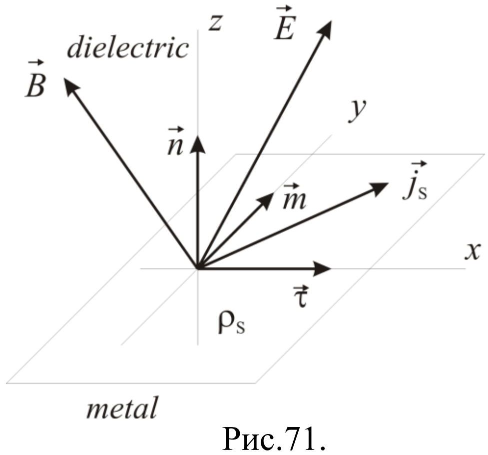

Рис.71.

Идеальность проводника означает, что внутри металла электромагнитное поле равно нулю $\vec{E} = 0,\ \vec{B} = 0$. Вне проводника на его поверхности выполняются следующие граничные условия.

$$\begin{aligned} &E_\tau = 0, \quad E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \\ &B_n = 0, \quad B_\tau = \mu_0\, j_{s\,m} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Здесь ρ_s – поверхностная плотность электрического заряда, $j_{s\,m}$ - проекция вектора поверхностной плотности тока $\vec{j}_s$ на вектор $\vec{m}$. Для кабеля единичные векторы на поверхностях металлических цилиндров показаны в сечении $z = const$ кабеля на Рис3.

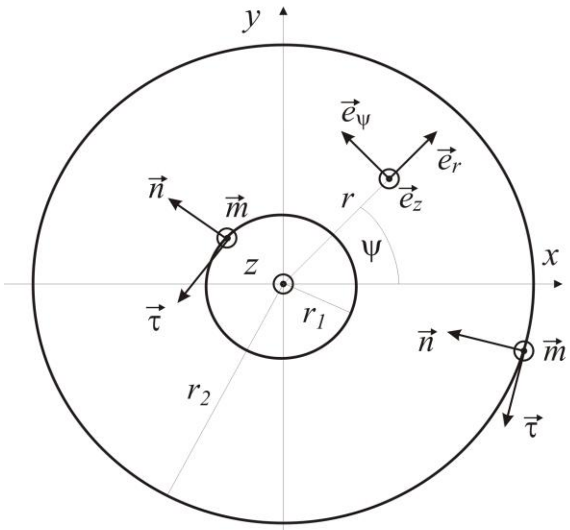

Рис.3.

Рассмотрим точки на поверхности внутреннего цилиндра $r = r_1$. Заметим, что совпадают следующие орты $\vec{e}_m = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\tau = \vec{e}_\psi$. Поэтому, из граничного условия (6.16) получаем плотность поверхностного тока.

$$j_{s\,z} = \frac{1}{\mu_0} B_\psi \tag{18}$$

Для магнитного поля берем формулу (7), и получаем следующее соотношение.

$$j_{s\,z} = \frac{1}{\mu_0} \frac{C_2}{r_1} \tag{19}$$

Вспоминая связь между константами C_1 и C_2, а также формулу (15) получаем выражение.

$$j_{s\,z} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r_1} \tag{20}$$

Теперь найдем ток I_1, текущий по поверхности внутреннего цилиндра.

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint\limits_{l_1} j_{s\,z} dl = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r_1} \oint\limits_{l_1} dl = \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r_1} 2\pi r_1 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим точки на поверхности внешнего цилиндра $r = r_2$. Заметим, что теперь между ортами имеются следующие соотношения $\vec{e}_m = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\tau = -\vec{e}_\psi$. Поэтому, из граничного условия (6.16) получаем плотность поверхностного тока.

$$j_{s\,z} = -\frac{1}{\mu_0} B_\psi \tag{22}$$

Для магнитного поля берем формулу (7), и получаем следующее соотношение.

$$j_{s\,z} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{C_2}{r_2} \tag{23}$$

Вспоминая связь между константами C_1 и C_2, а также формулу (15) получаем выражение.

$$j_{s\,z} = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r_2} \tag{24}$$

Теперь найдем ток I_{12}, текущий по поверхности внешнего цилиндра.

$$I_2 = \oint_{l_2} j_{sz} dl = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0}\frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r_2}\oint_{l_2} dl =$$
$$= -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0}\frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r_2}2\pi r_2 = -\frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0}\frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{25}$$

Сравнивая формулы (21) и (25) видим, что токи, текущие по поверхности внутреннего цилиндра и внешнего цилиндра равны по величине, но противоположны по направлению.

$$I_2 = -I_1 \tag{26}$$

Пусть через сечение кабеля $z=0$, в момент $t=0$ по внутреннему цилиндру течет ток $I_0 = I_1$. Величина этого тока определяется следующей формулой.

$$I_0 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0}\frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{27}$$

Ток текущий по поверхности внутреннего цилиндра через любое сечение z и в любой момент времени t будет определяться формулой.

$$I(z,t) = I_0 e^{i(\beta z - \omega t)}, \tag{28}$$

Замечание. Поскольку ток является действительной величиной $\tilde{I}$, а комплексная форма I (28) применяется для математического удобства, то запишем формулу (28) в действительном виде.

$$\tilde{I}(z,t) = I_0 \cos(\beta z - \omega t) \tag{29}$$

Поэтому вдоль кабеля кроме электромагнитной волны бежит монохроматическая волна тока, а также волна напряжения.

Задача 4.

Выразить электрическое и магнитное поле в сечении кабеля z через напряжение U_0 и ток I_0.

Используем полученные выше формулы (7), (15), (27). Выражаем электрическое и магнитное поле через напряжение U_0.

$$E_r(r) = \frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}, \qquad B_\psi(r) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r} \tag{30}$$

Выражаем электрическое и магнитное поле через ток I_0.

$$E_r(r) = \frac{c\mu_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} I_0 \frac{1}{r}, \qquad B_\psi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \frac{1}{r} \tag{31}$$