# ГЛАВА 3

## Плоские монохроматические волны.

### 1. Использование комплексных чисел для описания электромагнитных волн.

Благодаря линейности уравнений Максвелла физические величины, входящие в уравнение Максвелла можно представить в комплексном виде. Действительно, пусть напряженность электрического поля $\vec{E}$, индукция магнитного поля $\vec{B}$, плотность электрического тока $\vec{j}$ и плотность электрического заряда ρ являются комплексными величинами и удовлетворяют системе уравнений Максвелла.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда комплексно сопряженные величины $\vec{E}^*, \vec{B}^*, \vec{j}^*, \rho^*$ тоже будут удовлетворять уравнениям Максвелла.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E}^* = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho^* \\ \operatorname{rot} \vec{E}^* = -\dfrac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B}^* = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B}^* = \mu_0 \vec{j}^* + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}^*}{\partial t} \end{cases} \tag{3.2}$$

Из комплексных величин легко выделить действительную часть и мнимую часть, используя следующие формулы

$$
\begin{aligned}
&z = a + i b, \quad z^{*} = a - i b, \\
&a = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + z^{*}\right), \\
&b = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\left(z - z^{*}\right)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

В дальнейшем действительные электромагнитные поля будем обозначать значком тильда. Используя формулы (3.3) найдем действительные значения физических величин.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\vec{E}} = \frac{1}{2}\left(\vec{E} + \vec{E}^{*}\right), \quad \tilde{\vec{B}} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} + \vec{B}^{*}\right), \\
&\tilde{\vec{j}} = \frac{1}{2}\left(j + \vec{j}^{*}\right), \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{2}\left(\rho + \rho^{*}\right)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Складывая уравнения Максвелла в системах (3.1) и (3.2) получаем систему уравнений Максвелла для действительных полей.

$$
\begin{cases}
\operatorname{div} \tilde{\vec{E}} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\rho} \\
\operatorname{rot} \tilde{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \tilde{\vec{B}} = 0 \\
\operatorname{rot} \tilde{\vec{B}} = \mu_0 \tilde{\vec{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t}
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

Системы уравнений Максвелла (3.1), (3.2) и (3.5) имеют совершенно одинаковый вид. Поэтому в дальнейшем записывая систему уравнений Максвелла, не будем специально указывать, в каком виде берутся векторы электромагнитного поля в действительном или в комплексном виде. Поскольку подставлять электромагнитные поля в систему уравнений Максвелла можно в любом виде.

Векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ будем обозначать как действительные поля так и комплексные, если это не вызывает путаницы. Если же нужно одновременно рассматривать как действительные поля, так и комплексные поля, тогда действительные поля будем обозначать $\tilde{\vec{E}}$ и $\tilde{\vec{B}}$.

## 2. Комплексные векторы.

Поскольку электромагнитное поле представляется в виде комплексных векторных полей $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{B}(\vec{r},t)$, то надо определить, что понимается под комплексным вектором.

Комплексным вектором $\vec{c}$ является совокупность двух действительных векторов $\vec{a},\vec{b}$, связанных следующим соотношением.

$$\vec{c}=\vec{a}+i\vec{b} \tag{3.6}$$

Проекциями комплексного вектора $\vec{c}$ будут комплексные числа.

$$\begin{aligned} &\vec{a}=(a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b}=(b_x, b_y, b_z), \\ &\vec{c}=(a_x+ib_x,\ a_y+ib_y,\ a_z+ib_z) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Обычное комплексное число может быть записано в алгебраической форме, в показательной форме и тригонометрической форме.

$$c=a+ib, \quad c=|c|e^{i\alpha}, \quad c=|c|\cos\alpha+i|c|\sin\alpha \tag{3.8}$$

Здесь модуль комплексного числа $|c|$ и фаза комплексного числа $\alpha$ находятся по формулам.

$$|c|=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\alpha=\frac{a}{|c|}, \quad \sin\alpha=\frac{b}{|c|} \tag{3.9}$$

Модуль комплексного числа $|c|$ удобно вычислять также по следующей формуле.

$$|c|^2 = cc^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \tag{3.10}$$

С другой стороны, длину действительного вектора $|\vec{a}|$ можно вычислять через скалярное произведение с помощью следующей формулы.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{3.11}$$

Теперь обобщим формулы (3.10) и 3.11 на комплексный вектор $\vec{c}$. Определим длину комплексного вектора $|\vec{c}|$ по следующей формуле.

$$\begin{gathered} |\vec{c}|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c}^* = (\vec{a}+i\vec{b})\cdot(\vec{a}-i\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + i\vec{b}\cdot\vec{a} - i\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}, \\ |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \end{gathered} \tag{3.12}$$

Таким образом, для вычисления длины комплексного вектора $\vec{c}$ будем использовать формулы (3.12).

Комплексный вектор $\vec{c}$ не имеет определенного направления, если направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не совпадают. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в одну сторону, то можно считать, что комплексный вектор $\vec{c}$ направлен в туже сторону. Пусть направление векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется единичным вектором $\vec{e}$. В этом случае комплексный вектор будет представлен в следующем виде.

$$\begin{gathered} \vec{a} = \vec{e}\,a, \quad \vec{b} = \vec{e}\,b, \\ \vec{c} = \vec{e}\,(a+ib) = \vec{e}\,|\vec{c}|\,e^{i\alpha} \end{gathered} \tag{3.13}$$

Если обозначить действительный вектор $\vec{e}\,|\vec{c}| = \vec{A}$, то тогда комплексный вектор примет вид.

$$\vec{c} = \vec{A}e^{i\alpha}, \quad |\vec{c}| = |\vec{A}| \tag{3.14}$$

<u>3. Плоская монохроматическая волна.</u>

Предположим, что электрическое поле $\vec{E}$ имеет вид плоской волны бегущей вдоль оси *z* в положительную сторону, со скоростью v. В этом случае электрическое поле можно записать в следующем виде.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{f}(z - \mathrm{v}t) \tag{3.15}$$

Здесь $\vec{f}(\xi)$ - некоторая векторная функция. Формула (3.15) легко обобщается на случай движения плоской волны вдоль произвольного направления, определяемого единичным вектором $\vec{n}$.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{f}(\vec{n}\cdot\vec{r} - \mathrm{v}t) \tag{3.16}$$

В выражении (3.16) скалярное произведение расписывается следующим образом.

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = n_x\, x + n_y\, y + n_z\, z \tag{3.17}$$

Плоская монохроматическая волна, бегущая вдоль *z* оси описывается следующим выражением.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}\cos\left(k\left(z - \mathrm{v}t\right) + \alpha\right) \tag{3.18}$$

Здесь $\vec{A}$ - постоянный вектор, а $k$ – волновое число, связанное с длиной волны $\lambda$ следующим соотношением.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.19}$$

Волновое число $k$, умноженное на скорость волны v равняется циклической частоте $\omega$.

$$\omega = \mathrm{v}k \tag{3.20}$$

С учетом выражения (3.20) плоская монохроматическая волна (3.18) примет следующий вид.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}\cos(k\,z - \omega\,t + \alpha) \tag{3.21}$$

Формула (3.21) легко обобщается на случай плоской монохроматической волны, бегущей в произвольном направлении $\vec{n}$.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t + \alpha) \tag{3.22}$$

Здесь $\vec{k}$ - волновой вектор, направленный вдоль направления распространения волны, и равный по величине волновому числу *k*.

$$\vec{k} = \vec{n}\,k \tag{3.23}$$

Плоскую монохроматическую волну (3.21) удобно представить в комплексном виде.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t)} \tag{3.24}$$

Здесь $\vec{E}_0$- постоянный комплексный вектор. Допустим, что этот вектор можно представить в следующем виде:

$$\vec{E}_0 = \vec{A}e^{i\alpha} \tag{3.25}$$

где $\vec{A}$– действительный вектор, аналогично случаю (3.14). Тогда получим Действительную часть $\tilde{\vec{E}}$ плоской монохроматической волны $\vec{E}$ (3.24) в следующем виде.

$$\begin{aligned}
&\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t + \alpha)},\\
&\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{E}^*(\vec{r},t)\right),\\
&\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{A}\frac{1}{2}\left(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t + \alpha)} + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t + \alpha)}\right),\\
&\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{A}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t + \alpha)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Полученная в действительном виде плоская монохроматическая волна полностью совпадает с волной (3.22). При получении формул (3.26) использовались формулы Эйлера. Напомним, как выглядят эти формулы.

$$
\begin{aligned}
&e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta, \\
&\cos\beta = \frac{1}{2}\left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right), \\
&\sin\beta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Наконец заметим, что выражение в скобках в экспоненте (3.24) называется фазой плоской волны, которую обозначим следующим образом.

$$
\psi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t \tag{3.28}
$$

При рассмотрении плоской монохроматической волны появились новые физические величины. Длина воны $\lambda$, волновое число $k$, циклическая частота $\omega$. Период колебаний $T$ и частота колебаний $\nu$ связаны с циклической частотой следующими соотношениями.

$$
\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.29}
$$

Эти физические величины в системе единиц СИ имеют следующие размерности.

$$
[\lambda] = \textit{м}, \quad [k] = \textit{м}^{-1}, \quad [T] = \textit{с}, \quad [\nu] = \textit{Гц}, \quad [\omega] = \textit{рад}/\textit{с}
$$

Введем еще некоторые характеристики плоской монохроматической волны.

Во-первых, это дисперсионное соотношение. Дисперсионным соотношением называется уравнение, связывающее циклическую частоту и волновое число. Причем уравнение может выражать зависимость частоты от волнового числа или зависимость волнового числа от частоты.

$$\omega = \omega(k), \quad k = k(\omega) \tag{3.30}$$

Во-вторых, это фазовая скорость. Фазовая скорость плоской монохроматической волны определяется следующим соотношением.

$$\mathrm{v}_p = \frac{\omega}{k} \tag{3.31}$$

Скорость v, которая встречалась в формулах (3.18), (3.20) является фазовой скоростью. Название этой скорости связано со следующим свойством плоской монохроматической волны. Если задать определенное значение фазе $\psi$ волны (3.28), то это значение фазы будет распространяться в пространстве в направлении волнового вектора $\vec{k}$ с фазовой скоростью (3.31). Поэтому можно сказать, что фазовая скорость это скорость движения фазы в пространстве. Так как фаза это не материальный объект, то в некоторых случаях фазовая скорость может быть больше скорости света.

В-третьих, это групповая скорость. Групповую скорость определим с помощью следующего соотношения.

$$\mathrm{v}_g = \frac{d\,\omega}{d\,k} \tag{3.32}$$

Групповая скорость - это скорость электромагнитного импульса, группы волн. Группа волн это суперпозиция монохроматических волн с частотами близкими к несущей частоте $\omega_0$. Поэтому говорить о групповой скорости монохроматической волны не имеет смысла, групповая скорость относится не одной монохроматической волне, а к группе волн.

## 4. Электрический импульс.

Создадим электрический импульс, взяв суперпозицию плоских монохроматических волн (3.24) двигающихся вдоль оси $z$ с частотами близкими к несущей частоте $\omega_0$.

$$\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}(\omega) e^{i(k(\omega)z - \omega t)} d\omega \tag{3.33}$$

Комплексная амплитуда $\vec{A}(\omega)$ отлична от нуля в узком интервале частот.

$$\vec{A}(\omega) = \begin{cases} \neq 0, & \omega \in [\omega_0 - \Delta\omega, \quad \omega_0 + \Delta\omega], \\ = 0, & \omega \notin [\omega_0 - \Delta\omega, \quad \omega_0 + \Delta\omega] \end{cases} \tag{3.34}$$
$$\Delta\omega << \omega_0$$

В выражении (3.33) предполагается, что имеется частотная дисперсия, и волновое число $k$ зависит от частоты $\omega$ по заданному закону.

$$k = k(\omega) \tag{3.35}$$

Разложим дисперсионное соотношение (3.35) в ряд Тейлора вблизи несущей частоты $\omega_0$.

$$k = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \cdots \tag{3.36}$$

Ограничимся двумя членами ряда Тейлора (3.36).

$$\begin{gathered} k = k_o + (\omega - \omega_0)/\mathrm{v}_g \\ k_0 = k(\omega_0), \quad \frac{dk}{d\omega} = \mathrm{v}_g \end{gathered} \tag{3.37}$$

Подставим дисперсионное соотношение (3.37) в интеграл (3.33) и проведем перегруппировку членов в экспоненте.

$$\vec{E}(z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{A}(\omega)e^{i\left(\left(k_o+(\omega-\omega_0)/\mathrm{v}_g\right)z-\omega t\right)}d\omega = \\ = e^{i(k_o z-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{A}(\omega)e^{i\left(z/\mathrm{v}_g-t\right)(\omega-\omega_0)}d\omega \qquad (3.38)$$

В качестве примера, комплексную амплитуду $\vec{A}(\omega)$ выберем, в соответствии с требованием (3.34), в следующем виде.

$$\vec{A}(\omega)=\vec{e}\,A_0\,e^{-(\omega-\omega_0)^2/(\Delta\omega)^2} \qquad (3.39)$$

Подставим (3.39) в интеграл (3.38) и сделаем замену переменной интегрирования.

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}\,A_0\,e^{i(k_o z-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\omega-\omega_0)^2/(\Delta\omega)^2}\,e^{i\left(z/\mathrm{v}_g-t\right)(\omega-\omega_0)}d\omega= \\ =\vec{e}\,A_0\,e^{i(k_o z-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\xi/\Delta\omega)^2}\,e^{i\left(z/\mathrm{v}_g-t\right)\xi}d\xi \qquad (3.40)$$

Для вычисления последнего интеграла в (3.40) воспользуемся справочником интегралов.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\xi/a)^2+ib\,\xi}\,d\xi=a\sqrt{\pi}e^{-a^2b^2/4} \qquad (3.41)$$

Используя (3.41) из (3.40) можно получить выражение для электрического импульса. Это импульс запишем в следующем виде.

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}\,f(z-\mathrm{v}_g\,t)\,e^{i(k_o z-\omega_0 t)} \qquad (3.42)$$

Здесь функция $f$ имеет вид распределения Гаусса.

$$f(z-\mathrm{v}_g\,t)=A_0\Delta\omega\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{(\Delta\omega)^2\left(z-\mathrm{v}_g\,t\right)^2}{4\mathrm{v}_g^2}\right) \qquad (3.43)$$

Максимальное значение функции $f$ достигается в точке.

$$z = \mathrm{v}_g\, t \tag{3.44}$$

Это означает, что максимум импульса, или вершина группы волн движется вдоль оси $z$ с постоянной скоростью, равной групповой скорости $\mathrm{v}_g$.

## 5. Плоская монохроматическая электромагнитная волна.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла (3.1). Будем рассматривать свободное пространство, без зарядов и токов. Поэтому в уравнениях (3.1) положим равными нулю плотность электрического заряда и плотность электрического тока.

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0 \tag{3.45}$$

В этом случае уравнения Максвелла (3.1) примут следующий вид.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{3.46}$$

Будем искать решение системы (3.46) в виде плоских монохроматических волн.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t\right)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t\right)} \end{cases} \tag{3.47}$$

Удобно в уравнениях (3.47) фазу заменить символом $\psi$, как в выражении (3.28).

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\psi} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i\psi} \end{cases} \tag{3.48}$$

Отметим одну особенность плоских монохроматических волн (3.47), (3.48). Взятие дивергенции, ротора и производной по времени для плоских волн (3.47) сводятся к алгебраическим операциям умножения.

Найдем производную по времени от вектора напряженности электрического поля.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_0 e^{i\psi} = \vec{E}_0 e^{i\psi}\, i\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\,\omega)\,\vec{E}_0 e^{i\psi} \tag{3.49}$$

Таким образом, операция дифференцирования по времени свелась к следующей операции умножения.

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\,\omega \tag{3.50}$$

Найдем дивергенцию  вектора напряженности электрического поля.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \mathrm{div}\left(\vec{E}_0 e^{i\psi}\right) = \left(\nabla e^{i\psi}\right)\cdot \vec{E}_0 = (e^{i\psi} i \nabla\psi)\cdot \vec{E}_0 \tag{3.51}$$

Найдем градиент  фазы $\psi$.

$$\nabla\psi = \nabla\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t\right) = \nabla\left(k_x\, x + k_y\, y + k_z\, z - \omega\, t\right) = \vec{k} \tag{3.52}$$

Подставим (3.52) в уравнение (3.51). В результате получим следующее выражение.

$$\mathrm{div}\vec{E} = (i\,\vec{k})\cdot \vec{E}_0\, e^{i\psi} \tag{3.53}$$

Таким образом, операция нахождения дивергенции  плоской монохроматической волны свелась к следующей операции скалярного умножения.

$$\mathrm{div} = \left(i\,\vec{k}\right)\cdot \tag{3.54}$$

Найдем ротор  вектора напряженности электрического поля.

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \mathrm{rot}\left(\vec{E}_0 e^{i\psi}\right) = \left(\nabla e^{i\psi}\right) \times \vec{E}_0 = (e^{i\psi} i \nabla\psi) \times \vec{E}_0 \qquad (3.55)$$

Подставляя градиент фазы ψ (3.52) в уравнение (2.51) получаем следующее выражение.

$$\mathrm{rot}\vec{E} = (i\vec{k}) \times \vec{E}_0 \, e^{i\psi} \qquad (3.56)$$

Таким образом, операция нахождения ротора плоской монохроматической волны свелась к следующей операции векторного умножения.

$$\mathrm{rot} = \left(i\vec{k}\right) \times \qquad (3.57)$$

Рассмотренные преобразования (3.49) – (3.57) можно применять также и к вектору магнитной индукции.

Теперь подставим электрическое и магнитное поле в виде плоских волн (3.48) в систему уравнений Максвелла (3.36). При этом будем учитывать правила (3.50), (3.54) и (3.57). В результате получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \, e^{i\psi} = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{E}_0 \, e^{i\psi} = i\omega \vec{B}_0 \, e^{i\psi} \\ i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 \, e^{i\psi} = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{B}_0 \, e^{i\psi} = -\mu_0 \varepsilon_0 i \omega \vec{E}_0 \, e^{i\psi} \end{cases} \qquad (3.58)$$

В системе уравнений (3.58) поделим все члены на мнимую единицу и экспоненту. В результате получим систему алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\mu_0 \varepsilon_0 \, \omega \vec{E}_0 \end{cases} \qquad (3.59)$$

Таким образом, подстановка плоских волн (3.47), (3.48) в систему дифференциальных уравнений Максвелла приводит к системе алгебраических уравнений. Поэтому анализировать свойства плоских монохроматических электромагнитных волн достаточно просто.

Выразим магнитное поле из второго уравнения системы (3.59) и подставим в левую сторону четвертого уравнения системы (3.59). В результате получим следующее выражение.

$$\vec{k} \times \left( \vec{k} \times \vec{E}_0 \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0 \qquad (3.60)$$

Здесь учтена связь между электрической постоянной $\varepsilon_0$ и магнитной постоянной $\mu_0$.

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Вычисляем двойное векторное произведение по известной формуле векторной алгебры. В результате получим выражение.

$$\vec{k}\left( \vec{k} \cdot \vec{E}_0 \right) - \vec{E}_0 \left( \vec{k} \cdot \vec{k} \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0 \qquad (3.61)$$

Из первого уравнения системы (3.59) следует, что первый член в уравнении (3.61) равен нулю. Скалярное произведение вектора $\vec{k}$ самого на себя равняется квадрату длины этого вектора $k^2$. Окончательно уравнение (3.61) принимает следующий вид.

$$\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}_0 = 0 \qquad (3.62)$$

Приравнивая скобку в (3.62) получаем дисперсионное соотношение для плоской монохроматической электромагнитной волны.

$$\omega = c\,k \qquad (3.63)$$

Найдем фазовую и групповую скорости, используя дисперсионное соотношение (3.63)

$$\mathrm{v}_p = \frac{\omega}{k} = c, \quad \mathrm{v}_g = \frac{d\,\omega}{d\,k} = c \tag{3.64}$$

Таким образом, у плоской монохроматической волны, распространяющейся в пустом пространстве, фазовая и групповая скорости совпадают и равны скорости света в вакууме.

Равенство фазовой и группой скорости является следствием линейности дисперсионного соотношения (3.63). Такое распространение волны называют бездисперсионным распространением, так как фазовая скорость не зависит от частоты.

Если бы дисперсионное соотношение было бы нелинейной функцией, то фазовая скорость уже бы не равнялась групповой скорости. В этом случае говорят о дисперсии скорости волны, так как фазовая скорость теперь будет зависеть от частоты.

## 6. Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны.

Теперь разберем поляризацию плоской монохроматической волны. Под поляризацией понимают направление векторов электрического и магнитного полей в пространстве. В связи с этим отметим, что постоянные векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ в формулах (3.47), (3.48) для плоской монохроматической электромагнитной волны являются комплексными векторами, и поэтому, не имеют определенного направления в пространстве.

Запишем комплексные векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ через действительные векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_1$, и $\vec{b}_2$.

$$\vec{E}_0 = \vec{a}_1 + i\,\vec{a}_2, \quad \vec{B}_0 = \vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2 \tag{3.65}$$

Подставим поля (3.65) в три первых уравнения системы (3.59) и выделим действительные и мнимые члены.

$$\begin{cases} \vec{k}\cdot\vec{a}_1 + i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2 = 0 \\ \vec{k}\times\vec{a}_1 + i\,\vec{k}\times a_2 = \omega\,\vec{b}_1 + i\,\omega\,\vec{b}_2 \\ \vec{k}\cdot\vec{b}_1 + i\,\vec{k}\cdot\vec{b}_2 = 0 \end{cases} \tag{3.66}$$

В уравнениях системы (3.66) приравниваем отдельно действительные и мнимые части в правых и левых сторонах уравнений. В результате получаем две независимые системы уравнений для действительных векторов. Одну систему для векторов $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, которые являются действительными частями векторов $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, другую для векторов $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$, которые являются мнимыми частями векторов $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$.

$$\begin{cases} \vec{k}\cdot\vec{a}_1 = 0 \\ \vec{k}\times\vec{a}_1 = \omega\,\vec{b}_1, \\ \vec{k}\cdot\vec{b}_1 = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} \vec{k}\cdot\vec{a}_2 = 0 \\ \vec{k}\times\vec{a}_2 = \omega\,\vec{b}_2 \\ \vec{k}\cdot\vec{b}_2 = 0 \end{cases} \quad (2) \tag{3.67}$$

Две системы алгебраических уравнений (3.67) абсолютно идентичны. Поэтому результаты, полученные для векторов $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ в той же мере применимы к векторам $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$.

В первой системе (3.67) равны нулю скалярные произведения волнового вектора $\vec{k}$ и векторов $\vec{a}_1, \vec{b}_1$. Это означает, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ перпендикулярны к волновому вектору. Аналогично из второй системы (3.67) это относится к векторам $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$.

$$\vec{k}\perp\vec{a}_1, \quad \vec{k}\perp\vec{b}_1,$$
$$\vec{k}\perp\vec{a}_2, \quad \vec{k}\perp\vec{b}_2$$

Из второго уравнения первой системы (3.67) выразим вектор $\vec{b}_1$, а из второго уравнения второй системы выразим вектор $\vec{b}_2$.

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{a}_2 \tag{3.68}$$

Из уравнения (3.68) следует, что вектор $\vec{b}_1$ перпендикулярен как к волновому вектору $\vec{k}$, так и к вектору $\vec{a}_1$. Аналогично вектор $\vec{b}_2$ перпендикулярен как к волновому вектору $\vec{k}$, так и к вектору $\vec{a}_2$.

Таким образом, уравнения (3.67) и (3.68) показывают, что векторы $\vec{k}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов. То же самое, можно сказать и о тройке векторов $\vec{k}$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$, эти три вектора тоже образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов. Если направить волновой вектор $\vec{k}$ вдоль оси *z*, то векторы $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$, будут лежать в плоскости *xy*, как это показано на Рис.12.

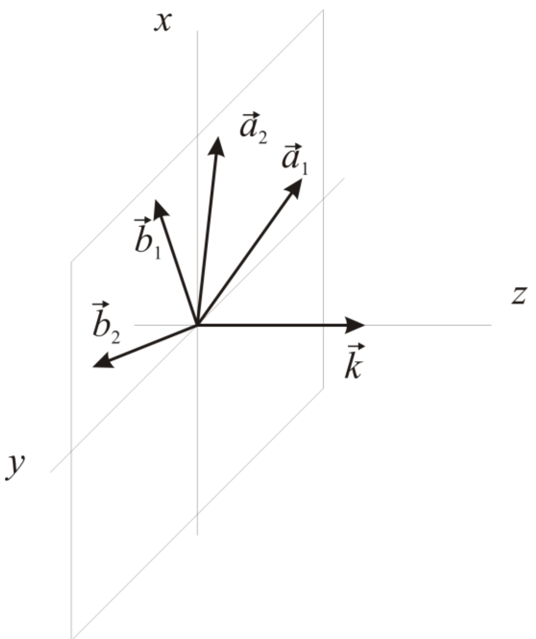


Рис.12 (3.1)

На Рис.13 показан та же картина только в плоскости xy, где ось z направлена к нам.

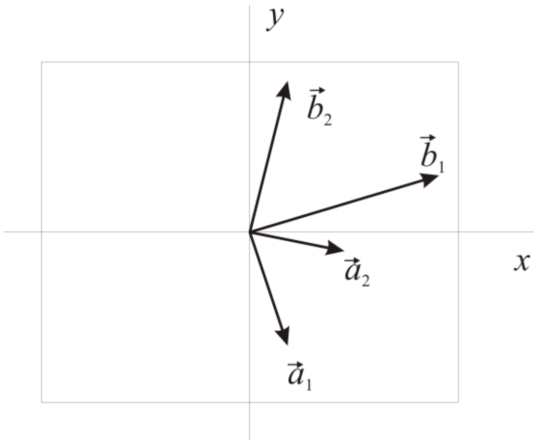


Рис.13 (3.2)

На Рис.13 видно, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ перпендикулярны друг другу, точно также и векторы $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$ перпендикулярны друг другу. Из векторного произведения (3.68) и дисперсионного соотношения (3.63) найдем связь между длинами векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$.

$$b_1 = \frac{1}{c} a_1 \tag{3.69}$$

Такое же соотношение имеется между длинами векторов $\vec{a}_2$ и $\vec{b}_2$.

$$b_2 = \frac{1}{c} a_2 \tag{3.70}$$

Чтобы выяснить, куда направлен вектор напряженности электрического поля, надо записать электрическое поле в действительном виде. Подставим (3.65) в (3.47) и учтем, что плоская монохроматическая волна бежит вдоль оси $z$. В результате получим следующее выражение.

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) = \vec{E}_0\, e^{i(kz-\omega t)} = (\vec{a}_1 + i\,\vec{a}_2) e^{i(kz-\omega t)} = \\ = \vec{a}_1\, e^{i(kz-\omega t)} + \vec{a}_2\, e^{i(kz-\omega t+\pi/2)} \end{aligned} \tag{3.71}$$

В формуле (3.71) использована формула Эйлера.

$$e^{i\,\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i \tag{3.72}$$

Из формулы (3.71), взяв действительную часть комплексного вектора $\vec{E}(z,t)$, получаем вектор напряженности электрического поля в действительном виде.

$$\tilde{\tilde{\vec{E}}}(z,t)=\vec{a}_1\cos(k\,z-\omega\,t)-\vec{a}_2\sin(k\,z-\omega\,t) \tag{3.73}$$

Аналогичное выражение получается для вектора магнитной индукции.

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}(z,t)=\vec{b}_1\cos(k\,z-\omega\,t)-\vec{b}_2\sin(k\,z-\omega\,t) \tag{3.74}$$

Так как векторы $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$ лежат в плоскости *xy*, то из формул (3.73) и (3.74) следует, что вектора электрического поля и магнитного поля тоже лежат в плоскости *xy*.

Теперь выясним, как расположены векторы $\tilde{\tilde{\vec{E}}}(z,t)$, $\tilde{\tilde{\vec{B}}}(z,t)$ относительно друг друга. Найдем векторное произведение волнового вектора $\vec{k}$ на вектор напряженности электрического поля $\tilde{\tilde{\vec{E}}}(z,t)$. При вычислении воспользуемся формулой (3.68) для векторов $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, и аналогичной формулой для векторов $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$.

$$\begin{aligned}\vec{k}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}(z,t)&=\vec{k}\times\vec{a}_1\cos(k\,z-\omega\,t)-\vec{k}\times\vec{a}_2\sin(k\,z-\omega\,t)=\\&=\omega\,\vec{b}_1\cos(k\,z-\omega\,t)-\omega\,\vec{b}_2\sin(k\,z-\omega\,t)\end{aligned} \tag{3.75}$$

Сравнивая полученное выражение (3.75) с формулой (3.74) получаем искомое соотношение.

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}(z,t)=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}(z,t) \tag{3.76}$$

Векторное произведение (3.76) показывает, что векторы $\vec{\tilde{E}}(z,t)$, $\vec{\tilde{B}}(z,t)$ перпендикулярны друг другу. Более того, из соотношения (3.76) следует, что векторы $\vec{k}$, $\vec{\tilde{E}}(z,t)$, $\vec{\tilde{B}}(z,t)$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов, аналогично тройкам векторов $\vec{k}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ и $\vec{k}$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$.

Из векторного произведения (3.76) и дисперсионного соотношения (3.63) получаем связь между длинами векторов $\vec{\tilde{E}}(z,t)$, $\vec{\tilde{B}}(z,t)$.

$$\tilde{B}(z,t) = \frac{1}{c}\tilde{E}(z,t) \qquad (3.77)$$

Заметим, что соотношение (3.77) аналогично соотношениям (3.69) и (3.70).

Сделаем замечание о терминологии при описании электромагнитных волн. Как показал анализ, у плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси z , отсутствуют проекции электрического и магнитного поля на ось z. То есть, векторы электрического и магнитного поля перпендикулярны направлению распространения волны. Такие волны называют поперечными волнами. Поэтому электромагнитная плоская монохроматическая волна, распространяющаяся в пустом пространстве – это поперечная волна.

Существует аббревиатура для обозначения волн с такой поляризацией. Такие волны обозначают как TEM – волны. То есть это означает, что имеется поперечное электрическое поле (transverse electric field), и поперечное магнитное поле (transverse magnetic field). Таким образом, TEM – волны, распространяющиеся вдоль оси z, имеют проекции векторов электрического и магнитного поля на эту ось равные нулю.

$$E_z = 0, \quad B_z = 0 \tag{3.78}$$

Из формул (3.73), (3.74) видно, что поляризация плоской монохроматической волны определяется векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ выражаются через векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ с помощью уравнений (3.67). Рассмотрим два случая.

Первый случай – линейная поляризация плоской монохроматической волны. Положим вектор $\vec{a}_2$ равным нулю $\vec{a}_2 = 0$. Отсюда следует, что вектор $\vec{b}_2$ тоже равен нулю $\vec{b}_2 = 0$. В этом случае из формул (3.73), (3.74) получаем следующие выражения для электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(z,t) = \vec{a}_1 \cos(k\,z - \omega\,t) \\ \tilde{\vec{B}}(z,t) = \vec{b}_1 \cos(k\,z - \omega\,t) \end{cases} \tag{3.79}$$

Если вектор $\vec{a}_1$ направлен вдоль оси *x*, то вектор $\vec{b}_1$ будет направлен вдоль оси *y*. В этом случае электрическое поле будет направлено вдоль оси *x*, а магнитное поле вдоль оси *y*. Поэтому система (3.79) в проекциях будет иметь следующий вид.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(z,t) = a_{1x} \cos(k\,z - \omega\,t) \\ \tilde{B}_y(z,t) = \dfrac{1}{c} a_{1x} \cos(k\,z - \omega\,t) \end{cases} \tag{3.80}$$

Если рассматривать поле в плоскости $z = 0$, то получится следующее выражение для электрического и магнитно поля.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(0,t) = a_{1x} \cos(\omega\,t) \\ \tilde{B}_y(0,t) = \dfrac{1}{c} a_{1x} \cos(\omega\,t) \end{cases} \tag{3.81}$$

Таким образом, вектор электрического поля колеблется вдоль оси *x*, вектор магнитного поля вдоль оси *y*. Такую поляризацию волны называют линейной поляризацией. Эта ситуация показана на Рис.14.

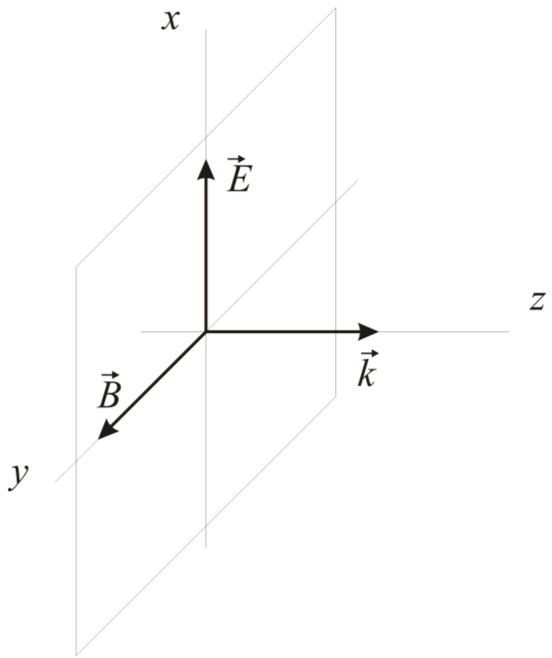


Рис.14 (3.3)

Второй случай – эллиптическая поляризация плоской монохроматической волны. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ отличны от нуля, и перпендикулярны друг другу. Выберем направление вектора $\vec{a}_1$ вдоль оси *x*, тогда вектор $\vec{a}_2$ будет направлен вдоль оси *y*. В результате из уравнения (3.73) получим следующие проекции вектора электрического поля на оси *x* и *y*.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(z,t) = a_{1x}\cos(kz - \omega t), \\ \tilde{E}_y(z,t) = -a_{2y}\sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{3.82}$$

Из уравнений (3.68), (3.69), (3.70), (3.74) получим выражения для проекций вектора магнитного поля на оси *x* и *y*.

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(z,t) = -b_{2x}\sin\left(k\,z-\omega\,t\right) = \dfrac{1}{c}a_{2y}\sin\left(k\,z-\omega\,t\right), \\ \tilde{B}_y(z,t) = b_{1y}\cos\left(k\,z-\omega\,t\right) = \dfrac{1}{c}a_{1x}\cos\left(k\,z-\omega\,t\right). \end{cases} \tag{3.83}$$

Рассмотрим электрическое и магнитное поле в плоскости $z = 0$. В результате из уравнений (3.82), (3.83) получим следующие соотношения.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(0,t) = a_{1x}\cos\left(\omega\,t\right), \\ \tilde{E}_y(0,t) = a_{2y}\sin\left(\omega\,t\right) \end{cases} \tag{3.84}$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(0,t) = -\dfrac{1}{c}a_{2y}\sin\left(\omega\,t\right), \\ \tilde{B}_y(0,t) = \dfrac{1}{c}a_{1x}\cos\left(\omega\,t\right). \end{cases} \tag{3.85}$$

Из системы уравнений (3.84) легко получить уравнение эллипса в проекциях вектора напряженности электрического поля.

$$\frac{\tilde{E}_x^2}{a_1^2} + \frac{\tilde{E}_y^2}{a_2^2} = 1 \tag{3.86}$$

Анализ формул (3.84) и (3.86) показывает, что конец вектора напряженности электрического поля $\tilde{\vec{E}}(0,t)$ в плоскости $z = 0$ со временем движется по эллиптической траектории. Полуоси эллипса равны соответственно $a_1$ и $a_2$. Вращение вектора $\tilde{\vec{E}}(0,t)$ происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца волнового вектора $\vec{k}$.

Аналогично из системы уравнений (3.85) можно получить уравнение эллипса в проекциях вектора индукции магнитного поля.

$$\frac{\tilde{B}_x^2}{a_1^2/c^2} + \frac{\tilde{B}_y^2}{a_2^2/c^2} = 1 \tag{3.87}$$

Все, что было сказано о движении вектора напряженности электрического поля $\tilde{\tilde{\vec{E}}}(0,t)$ в плоскости $z = 0$, в полной мере относится и к вектору индукции магнитного поля $\tilde{\tilde{\vec{B}}}(0,t)$. Надо только помнить, что концы векторов электрического и магнитного поля, движутся по разным эллипсам, и что векторы $\tilde{\tilde{\vec{E}}}(0,t)$ и $\tilde{\tilde{\vec{B}}}(0,t)$ всегда перпендикулярны друг другу. На Рис.15 показано положение векторов $\tilde{\tilde{\vec{E}}}(0,t)$ и $\tilde{\tilde{\vec{B}}}(0,t)$ в некоторый момент времени.

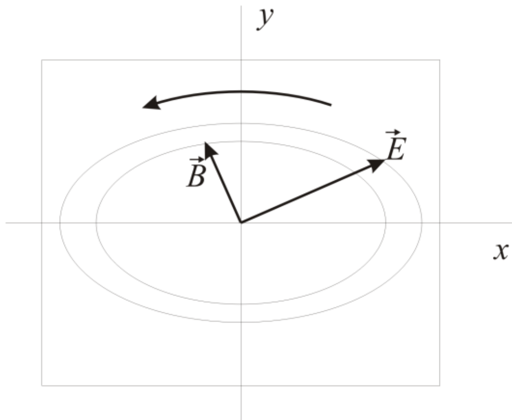


Рис.15 (3.4)

7. Вектор Пойнтинга монохроматического поля.

Вектор Пойнтинга – это вектор плотности потока энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга определяется следующей формулой.

$$\vec{S}_P = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \qquad (3.88)$$

В формуле (3.88) $\vec{E}$ и $\vec{B}$ – это действительные векторные поля. Поэтому если рассматриваются поля в комплексном виде, то прежде чем подставить их в формулу (3.88) необходимо эти поля представить в действительном виде.

Будем рассматривать монохроматические поля. В комплексном виде эти поля будут иметь следующий вид.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \end{cases} \tag{3.89}$$

Поля (3.89) представим в действительном виде.

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{2}\left(\vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r})\, e^{i\omega t}\right) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{2}\left(\vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + \vec{B}^*(\vec{r})\, e^{i\omega t}\right) \end{cases} \tag{3.90}$$

Подставляем поля (3.90) в формулу для вектора Пойнтинга (3.88). Получаем следующее соотношение.

$$\begin{aligned} \vec{S}_P &= \frac{1}{4\mu_0}\left(\vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r})\, e^{i\omega t}\right)\times\left(\vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + \vec{B}^*(\vec{r})\, e^{i\omega t}\right) = \\ &= \frac{1}{4\mu_0}\left(\vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\, e^{-i2\omega t} + \vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r}) + \right. \\ &\qquad \left. + \vec{E}^*(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\, e^{-i2\omega t}\right) \end{aligned} \tag{3.91}$$

В формуле (3.91) есть члены, которые от времени не зависят, а есть члены, которые меняются по закону синуса или косинуса с частотой 2ω. Если частота колебаний достаточно высокая, то обычные приборы типа вольтметра, амперметра эти колебания не отслеживают, а измеряют усредненные характеристики. Поэтому обычно энергетические характеристики электромагнитного поля усредняют по времени за один период колебания.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.92}$$

Процедура усреднения некоторой функции времени $f(t)$ за период колебания $T$ состоит в вычислении следующего интеграла.

$$< f > = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad (3.93)$$

Если функция $g$ не зависит от времени, то усредненное значение совпадает с самой функцией.

$$< g > = g \qquad (3.94)$$

Рассмотрим усреднение комплексной экспоненты в формуле (3.91).

$$\begin{aligned} < e^{i2\omega t} > &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\omega t}\,dt = \frac{1}{i2\omega T} e^{i2\omega t}\Big|_0^T = \\ &= \frac{1}{i2\omega T}\left(e^{i2\omega T} - 1\right) \end{aligned} \qquad (3.95)$$

Используем соотношение (3.92) и формулу Эйлера. В результате получаем значение экспоненты в формуле (3.95).

$$e^{i2\omega T} = e^{i4\pi} = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1 \qquad (3.96)$$

Подставляем (3.96) в формулу (3.95) и находим, что среднее значение комплексной экспоненты равно нулю.

$$< e^{i2\omega t} > = 0 \qquad (3.97)$$

Взяв комплексное сопряжение от обеих частей уравнения (3.97) получаем аналогичное соотношение для среднего значения комплексно сопряженной экспоненты.

$$< e^{-i2\omega t} > = 0 \qquad (3.98)$$

Теперь производим усреднение вектора Пойнтинга в формуле (3.91), учитывая, что усреднять надо только функции, зависящие от времени.

$$\begin{aligned} < \vec{S}_P > = \frac{1}{4\mu_0}\Big(&\vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}) < e^{-i2\omega t} > + \vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r}) + \\ &+ \vec{E}^*(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}) < e^{-i2\omega t} > \Big) \end{aligned} \qquad (3.99)$$

Далее учитываем соотношения (3.97), (3.98). В результате получаем формулу для среднего значения вектора Пойнтинга для монохроматического поля.

$$< \vec{S}_P > = \frac{1}{4\mu_0}\left(\vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\right) \qquad (3.100)$$

8. Вектор Пойнтинга плоской монохроматической волны.

Найдем усредненный вектор Пойнтинга для плоской монохроматической волны. Для этого воспользуемся формулой (3.100), где поля $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{B}(\vec{r})$, с учетом выражения (3.47), запишем в следующем виде.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{cases} \qquad (3.101)$$

Подставляем формулы (3.101) в уравнение (3.100) и получаем следующее соотношение.

$$< \vec{S}_P > = \frac{1}{4\mu_0}\left(\vec{E}_0\times\vec{B}_0^* + \vec{E}_0^*\times\vec{B}_0\right) \qquad (3.102)$$

Из системы уравнений (3.59) выразим вектор магнитного поля плоской монохроматической волны через вектор электрического поля.

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0 \qquad (3.103)$$

Подстановка формулы (3.103) в уравнение (3.102) дает следующее соотношение.

$$< \vec{S}_P > = \frac{1}{4\mu_0\omega}\left(\vec{E}_0 \times \vec{k} \times \vec{E}_0^* + \vec{E}_0^* \times \vec{k} \times \vec{E}_0\right) =$$
$$\frac{1}{4\mu_0\omega}\left(\vec{k}\left(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*\right) - \vec{E}_0^*\left(\vec{k} \cdot \vec{E}_0\right) + \vec{k}\left(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*\right) - \vec{E}_0\left(\vec{k} \cdot \vec{E}_0^*\right)\right) \quad (3.104)$$

Учитываем поперечность плоской монохроматической волны.

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0^* = 0 \quad (4.105)$$

Далее учитываем определение длины комплексного вектора (3.12).

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* = |\vec{E}_0|^2 \quad (4.106)$$

Подставляем формулы (4.105) и (4.106) в уравнение (3.104) получаем следующее выражение для среднего значения вектора Пойнтинга плоской монохроматической волны.

$$< \vec{S}_P > = \frac{1}{2\mu_0\omega}\vec{k}\,|\vec{E}_0|^2 \quad (4.107)$$

Из формулы (4.107) видно, что вектор Пойнтинга направлен вдоль волнового вектора $\vec{k}$.

Вспомним связь (3.23) между волновым вектором $\vec{k}$, волновым числом $k$ единичным вектором $\vec{n}$ вдоль направления распространения плоской монохроматической волны.

$$\vec{k} = \vec{n}\,k$$

Далее учтем дисперсионное соотношение (3.63) для плоской монохроматической волны.

$$\omega = c\,k$$

Наконец, учтем связь между электрической $\varepsilon_0$ и магнитной $\mu_0$ постоянными.

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

В результате формула (3.107) приобретаем следующий вид.

$$< \vec{S}_P > = \frac{c\varepsilon_0}{2} \vec{n} \, | \vec{E}_0 |^2 \qquad (3.108)$$

Интенсивностью волны $J$ называют величину усредненного вектора Пойнтинга.

$$J = \left| < \vec{S}_P > \right| \qquad (3.109)$$

Подставляя формул (3.108) в уравнение (3.109) получаем выражение для интенсивности плоской монохроматической волны.

$$J = c \frac{\varepsilon_0 \, | \vec{E}_0 |^2}{2} \qquad (3.110)$$

## 9. Плотность энергии плоской монохроматической волны.

Плотность энергии – это энергия электромагнитного поля в единице объема. Плотность энергии определяется следующей формулой.

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \qquad (3.111)$$

В формуле (3.111), как и в любых энергетических соотношениях $\vec{E}$ и $\vec{B}$ – это действительные векторные поля. Поэтому в (3.111) подставим векторы электрического и магнитного поля в действительном виде из соотношений (3.90). Кроме того, учтем, что квадрат длины вектора можно найти через скалярное произведение.

$$E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}, \quad B^2 = \vec{B} \cdot \vec{B}$$

С учетом сказанного выражение (3.111) для плотности энергии можно представить в следующем виде.

$$w=\frac{\varepsilon_0}{8}\left(\vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}+\vec{E}^*(\vec{r})\,e^{i\omega t}\right)\cdot\left(\vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}+\vec{E}^*(\vec{r})\,e^{i\omega t}\right)+ \\ +\frac{1}{8\mu_0}\left(\vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}+\vec{B}^*(\vec{r})\,e^{i\omega t}\right)\cdot\left(\vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}+\vec{B}^*(\vec{r})\,e^{i\omega t}\right) \qquad (3.112)$$

Раскрываем скобки в формуле (3.112).

$$w=\frac{\varepsilon_0}{8}\left(\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})e^{-i2\omega t}+2\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})+\vec{E}^*(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})\,e^{-i2\omega t}\right)+ \\ +\frac{1}{8\mu_0}\left(\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})e^{-i2\omega t}+2\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{B}^*(\vec{r})+\vec{B}^*(\vec{r})\cdot\vec{B}^*(\vec{r})\,e^{-i2\omega t}\right) \qquad (3.113)$$

Теперь усредняем плотность энергии плоской монохроматической волны за один период колебаний. Применяем к формуле (3.113) те же соотношения, что и при нахождении среднего значения вектора Пойнтинга. В результате получаем следующее выражение для среднего значения плотности энергии.

$$<w>=\frac{\varepsilon_0}{4}\left(\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})\right)+\frac{1}{4\mu_0}\left(\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{B}^*(\vec{r})\right) \qquad (3.114)$$

Подставляем формулы (3.101) для полей $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{B}(\vec{r})$ в уравнение (3.114). В результате получаем следующее выражение.

$$<w>=\frac{\varepsilon_0}{4}|\,\vec{E}_0\,|^2+\frac{1}{4\mu_0}|\,\vec{B}_0\,|^2 \qquad (3.115)$$

Во втором члене (3.115) магнитное поле выразим через электрическое поле с помощью формулы (3.103).

$$|\,\vec{B}_0\,|^2=\frac{1}{\omega^2}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)\cdot\left(\vec{k}\times\vec{E}_0^*\right)=\frac{1}{\omega^2}\left(\vec{E}_0\times\vec{k}\times\vec{E}_0^*\right)\cdot\vec{k} \qquad (3.116)$$

При получении уравнения (3116) использовано свойство циклической перестановки для смешанного произведения векторов.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} \tag{3.117}$$

Далее двойное векторное произведение в уравнении (3.116) расписываем по известному правилу.

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \tag{3.118}$$

Используя формулу (3.118) преобразуем выражение (3.116) для магнитного поля.

$$|\vec{B}_0|^2=\frac{1}{\omega^2}\left(\vec{k}\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right)-\vec{E}_0^*\left(\vec{E}_0\cdot\vec{k}\right)\right)\cdot\vec{k}=\frac{1}{\omega^2}\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right) \tag{3.119}$$

Далее формулу (3.119) можно записать в виде.

$$|\vec{B}_0|^2=\frac{k^2}{\omega^2}|\vec{E}_0|^2 \tag{3.120}$$

Учитывая дисперсионное соотношение (3.63), получаем окончательное выражение для квадрата магнитного поля.

$$|\vec{B}_0|^2=\frac{1}{c^2}|\vec{E}_0|^2 \tag{3.121}$$

Подставляем формулу (3.121) в выражение для плотности энергии (3.115). В результате получаем следующее соотношение.

$$<w>=\frac{\varepsilon_0}{4}|\vec{E}_0|^2+\frac{1}{4\mu_0 c}|\vec{E}_0|^2 \tag{3.122}$$

В формуле (3.122) учтем связь между электрической $\varepsilon_0$ и магнитной $\mu_0$ постоянными. Окончательно получаем выражение для среднего значения плотности энергии плоской монохроматической волны.

$$<w>=\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}_0|^2 \tag{3.123}$$

Сравнивая формулу (3.110) для интенсивности волны и формулу (3.123) для средней плотности энергии волны, получаем следующую связь между этими характеристиками плоской монохроматической волны.

$$J = c < w > \tag{3.124}$$

10. Амплитуда электрического поля плоской монохроматической волны.

Рассмотрим электрическое поле в плоской монохроматической волне.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t\right)} \tag{3.125}$$

Пусть волна имеет линейную поляризацию. Тогда комплексный вектор $\vec{E}_0$ можно представить в следующем виде.

$$\vec{E}_0 = \vec{e}\, A e^{i\psi_0} \tag{3.126}$$

Здесь $\vec{e}$ – единичный вектор поляризации, $A$ - амплитуда электрического поля, положительная действительная величина $A > 0$, и $\psi_0$ – начальная фаза волны.

Подставляем (3.126) в формулу для электрического поля (3.125) выделяем действительную часть и получаем электрическое поле в действительном виде.

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\vec{e}\, A e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t+\psi_0\right)}\right) = \vec{e}\, A\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t+\psi_0\right) \tag{3.127}$$

Таким образом, вектор электрического поля плоской монохроматической волны в действительном виде определяется следующей формулой.

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{e}\, A\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t+\psi_0\right) \tag{3.128}$$

Из формулы (3.128) видно, что амплитуда волны равна максимальному значению величины электрического поля.

$$A = \max \tilde{E}(\vec{r},t) \tag{3.129}$$

Учитывая связь (3.103) между электрическим и магнитным полем плоской монохроматической волны, можно показать, что амплитуда магнитного поля будет равна величине $A/c$. Поэтому максимальное значение магнитного поля будет определяться следующим соотношением.

$$\frac{1}{c}A = \max \tilde{B}(\vec{r},t) \tag{3.130}$$

Выразим интенсивность волны через амплитуду волны. Возьмем формулу (3.110) для интенсивности волны и подставим туда соотношение (3.126). В результате получим следующее выражение.

$$\begin{aligned} J &= \frac{c\varepsilon_0}{2}|\vec{E}_0|^2 = \frac{c\varepsilon_0}{2}\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right) = \\ &= \frac{c\varepsilon_0}{2}\left(\vec{e}\,Ae^{i\psi_0}\cdot\vec{e}\,Ae^{-i\psi_0}\right) = \frac{c\varepsilon_0}{2}A^2 \end{aligned} \tag{3.131}$$

Таким образом, интенсивность плоской монохроматической волны пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля.

Рассмотрим перенос энергии плоской монохроматической волной через плоскую поверхность площадью $S$, как показано на Рис.16.

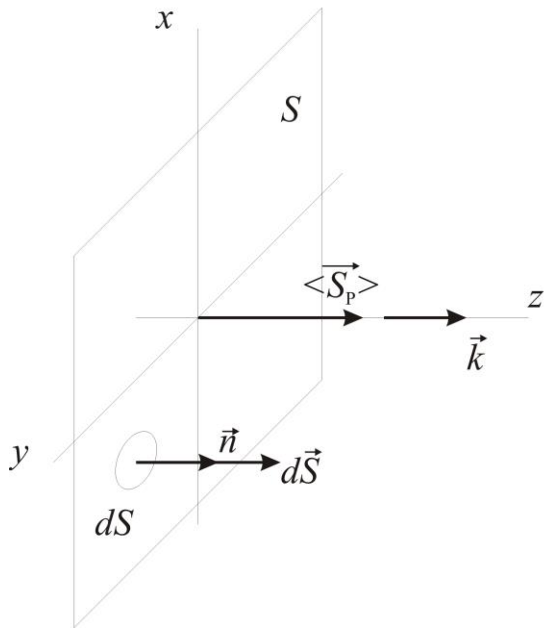


Рис.16 (3.5)

На Рис.16 показан вектор Пойнтинга $<\vec{S}_P>$ и волновой вектор $\vec{k}$. В плоской монохроматической волне направления этих векторов совпадает (4.107). На Рис.16 также показан вектор элемента поверхности $d\vec{S}$, который связан с единичным вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности и элементом поверхности *dS*, следующим соотношением.

$$d\vec{S} = \vec{n}\, s\, S \tag{3.132}$$

Поток энергии *P* через поверхность *S* определяется следующим поверхностным интегралом.

$$P = \int\limits_S <\vec{S}_P> \cdot d\vec{S} \tag{3.133}$$

Так как в приведенном примере вектор Пойнтинга и вектор элемента поверхности параллельны друг другу, то скалярное произведение в интеграле расписывается следующим образом.

$$<\vec{S}_P>\cdot d\vec{S} = \left|<\vec{S}_P>\right| dS = J\,dS \qquad (1.134)$$

Поэтому интеграл (1.133) принимает следующий вид.

$$P = \int_S J\,dS = J\int_S dS = J\,S \qquad (1.135)$$

Интенсивность волны $J$ в плоскости перпендикулярной распространению волны, постоянная величина. Напомним что в плоской волне величины электрического и магнитного поля постоянны в плоскости перпендикулярной к направлению распространения волны.  Поэтому интенсивность $J$ можно вынести за знак интеграла (1.135). В результате получаем следующее выражение.

$$P = J\,S \qquad (1.136)$$

Таким образом, поток энергии (мощность излучения) равна интенсивности волны умноженной на площадь, через которую переносится электромагнитная энергия.

Если использовать выражение (3.131), то можно связать поток энергии с амплитудой волны.

$$P = \frac{c\,\varepsilon_0\,S}{2}A^2 \qquad (1.137)$$

Зная мощность излучения $P$, по формуле (1.137) можно найти амплитуду волны $A$.

$$A = \sqrt{\frac{2P}{c\,\varepsilon_0\,S}} \qquad (1.138)$$

Например, если поток энергии через поверхность $S = 1$ м$^2$ равен $P = 1$ Вт, то амплитуда волны будет равна $A = 27$ В/м.