Семинар 1.

Элементы векторного анализа.

Векторный оператор набла ∇.

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ - в декартовых координатах.

$\mathbf{grad} f = \nabla f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}$ - градиент (вектор) скалярного поля $f = f(x, y, z)$.

1) $f = xy, \quad (x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0), \quad \nabla f = ?$ - нарисовать в декартовых осях.

$$\nabla f = (y, x, 0), \quad \nabla f_0 = (0, 1, 0)$$

2) $f = xyz, \quad (x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0), \quad \nabla f = ?$ - нарисовать в декартовых осях.

$$\nabla f = (yz, xz, xy), \quad \nabla f_0 = (0, 0, 1)$$

$\mathbf{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ - дивергенция (скаляр) векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$.

1) $\vec{a} = \vec{i}x^2y - \vec{j}xy^2 + \vec{k}2, \quad (x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1), \quad \nabla \cdot \vec{a} = ?$ - найти, нарисовать вектор $\vec{a}$.

$$\nabla \cdot \vec{a} = 2xy - 2xy + 0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{a}_0 = 0$$

2) $\vec{a} = (xz, yx, x^2), \quad (x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0), \quad \nabla \cdot \vec{a} = ?$ - найти, нарисовать вектор $\vec{a}$.

$$\nabla \cdot \vec{a} = z + x + 0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{a}_0 = 1$$

$\mathbf{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$ - ротор (вектор) векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$.

$$\mathbf{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

1) $\vec{a} = \vec{i}xy + \vec{j}yz + \vec{k}zx, \quad (x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0), \quad \nabla \times \vec{a} = ?$ - найти, нарисовать векторы.

$$\mathbf{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \vec{i}(0 - y) + \vec{j}(0 - z) + \vec{k}(0 - x) \qquad \nabla \times \vec{a}_0 = -\vec{i} - \vec{k}, \quad \vec{a}_0 = \vec{i}$$

2) $\vec{a} = (x, y, z), \quad (x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 1), \quad \nabla \times \vec{a} = ?$ - найти, нарисовать векторы.

$$\mathbf{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \vec{i}(0 - 0) + \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(0 - 0) \qquad \nabla \times \vec{a}_0 = 0, \quad \vec{a}_0 = \vec{k}$$

$\vec r=\vec i\,x+\vec j\,y+\vec k\,z,\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - радиус – вектор.

1) **grad** $r=\nabla r=\vec i\,\dfrac{\partial r}{\partial x}+\vec j\,\dfrac{\partial r}{\partial y}+\vec k\,\dfrac{\partial r}{\partial z}$ - найти градиент радиуса – вектора

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dots,\quad \nabla r=\frac{\vec i\,x+\vec j\,y+\vec k\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\vec r}{r}=\vec n$$ - единичный вектор.

2) **div** $\vec r=\nabla\cdot\vec r=\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial a_y}{\partial y}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ - найти дивергенцию радиуса - вектора

$$\nabla\cdot\vec r=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

3) **rot** $\vec r=\nabla\times\vec r$ - найти ротор радиуса - вектора

$$\nabla\times\vec r=\vec i\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)+\vec j\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\vec k\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)=\vec i\,0+\vec j\,0+\vec k\,0=0$$

$f=f(r)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ - скалярное поле, зависит от длины радиуса – вектора.

1) **grad** $f(r)=\nabla f(r)=\dfrac{d\,f}{d\,r}\nabla r$ - найти градиент скалярного поля $f(r)$.

$$\nabla f(r)=\frac{d\,f}{d\,r}\nabla r=\frac{d\,f}{d\,r}\frac{\vec r}{r}=\frac{d\,f}{d\,r}\vec n$$

$\vec a=\vec a(r)=\vec a(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ - векторное поле, зависит от длины радиуса – вектора.

2) **div** $\vec a(r)=\nabla\cdot\vec a(r)=\nabla r\cdot\dfrac{d\,\vec a}{d\,r}$ - найти дивергенцию векторного поля $\vec a(r)$.

$$\nabla\cdot\vec a(r)=\nabla r\cdot\frac{d\,\vec a}{d\,r}=\frac{\vec r}{r}\cdot\frac{d\,\vec a}{d\,r}=\vec n\cdot\frac{d\,\vec a}{d\,r}$$

3) **rot** $\vec a(r)=\nabla\times\vec a(r)=\nabla r\times\dfrac{d\,\vec a}{d\,r}$ - найти ротор векторного поля $\vec a(r)$.

$$\nabla\times\vec a(r)=\nabla r\times\frac{d\,\vec a}{d\,r}=\frac{\vec r}{r}\times\frac{d\,\vec a}{d\,r}=\vec n\times\frac{d\,\vec a}{d\,r}$$

$f(\vec r)g(\vec r),\quad f(\vec r)\vec a(\vec r)$ - произведение полей, скалярных, векторных.

1) $\mathbf{grad}\,(fg) = \nabla(fg) = \nabla_f(fg) + \nabla_g(fg)$ - найти градиент произведения полей

$$\nabla(fg) = \nabla_f(fg) + \nabla_g(fg) = (\nabla f)g + (\nabla g)f = g\,\mathbf{grad}\,f + f\,\mathbf{grad}\,g$$

2) $\mathbf{div}\,(f\vec a) = \nabla\cdot(f\vec a) = \nabla_f\cdot(f\vec a) + \nabla_a\cdot(f\vec a)$ - найти дивергенцию произведения полей.

$$\nabla_f\cdot(f\vec a) + \nabla_a\cdot(f\vec a) = (\nabla f)\cdot\vec a + (\nabla\cdot\vec a)f = (\mathbf{grad}\,f)\cdot\vec a + (\mathbf{div}\,\vec a)f = \vec a\cdot\mathbf{grad}\,f + f\,\mathbf{div}\,\vec a$$

3) $\mathbf{rot}\,(f\vec a) = \nabla\times(f\vec a) = \nabla_f\times(f\vec a) + \nabla_a\times(f\vec a)$ - найти ротор произведения полей.

$$\nabla_f\times(f\vec a) + \nabla_a\times(f\vec a) = (\nabla f)\times\vec a + (\nabla\times\vec a)f = (\mathbf{grad}\,f)\times\vec a + (\mathbf{rot}\,\vec a)f = -\vec a\times\mathbf{grad}\,f + f\,\mathbf{rot}\,\vec a$$

$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r},\quad \vec E = -\mathbf{grad}\,\varphi$ - электрическое поле точечного заряда

1) $\varphi = \dfrac{1}{r},\quad E = -\mathbf{grad}\,\varphi$ - найти электрическое поле.

$$E = -\mathbf{grad}\frac{1}{r} = -\nabla\frac{1}{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\vec r}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\vec r}{r} = \frac{\vec r}{r^3}$$

$\mathbf{div}\,\vec E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$ - плотность электрического заряда

2) $E = \dfrac{\vec r}{r^3},\quad \mathbf{div}\,\vec E = \nabla\cdot\dfrac{\vec r}{r^3}$ - найти дивергенцию электрического поля (плотность заряда).

$$\nabla\cdot\frac{\vec r}{r^3} = \left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\cdot\vec r + (\nabla\cdot\vec r)\frac{1}{r^3} = -3\frac{1}{r^4}\frac{\vec r}{r}\cdot\vec r + 3\frac{1}{r^3} = 0$$

Векторные операторы второго порядка.

1) $\mathbf{div}(\mathbf{grad}\,f) = \nabla\cdot\nabla f = (\nabla\cdot\nabla)f = \nabla^2 f = \Delta f$ - оператор Лапласа.

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,f) = \nabla\times\nabla f = (\nabla\times\nabla)f = 0$ - ротор съедает градиент.

3) $\mathbf{div}(\mathbf{rot}\,\vec a) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec a) = (\nabla\times\nabla)\cdot\vec a = 0$ - дивергенция съедает ротор.