Семинар 7.

Монохроматическая электромагнитная волна в металлическом волноводе

Волновод – это канал, имеющий резкие границы, вдоль которого распространяется электромагнитное излучение. Металлический волновод – это металлическая труба, произвольного сечения, пустая внутри или заполненная диэлектриком. На Рис.1 показаны металлические волноводы прямоугольного и круглого сечения.

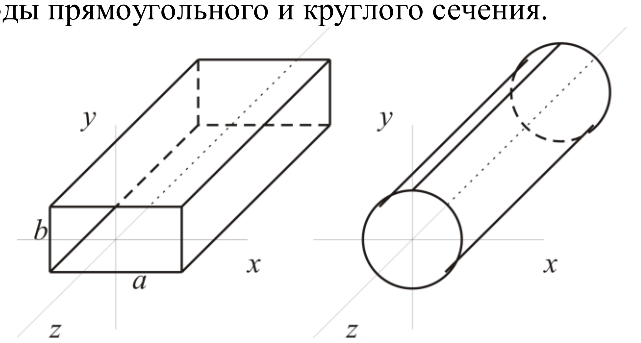

Рис.1

На Рис.1 направляющие волноводов параллельны оси z. У волновода прямоугольного сечения показаны размеры поперечного сечения a и b.

Будем рассматривать электромагнитную монохроматическую волну (волноводную моду) бегущую вдоль оси z. В этом случае электрическое и магнитное поле будем искать в следующем виде.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь β – волновое число волны в волноводе.

Будем считать, что внутри, металлические волноводы пустые. Соответственно уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме имеют вид.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{5}$$

Причем учтем, что волноводная мода распространяется, внутри волновода в пустом пространстве, где отсутствуют электрические заряды и токи. Если металлический волновод сделан из идеального проводника, то заряды и токи сосредоточены только на поверхности стенок волновода. Поэтому в уравнениях Максвелла (5) объемные токи и заряды надо положить равными нулю.

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0 \tag{6}$$

Подставим в уравнения (5) электромагнитное поле в виде бегущей волны (1). В результате система (5) принимает следующий вид.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + i\beta E_z = 0 \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y = i\omega B_x \\ i\beta E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + i\beta B_z = 0 \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - i\beta B_y = -\dfrac{i\omega}{c^2} E_x \\ i\beta B_x - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\dfrac{i\omega}{c^2} E_y \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = -\dfrac{i\omega}{c^2} E_z \end{cases} \qquad (7)$$

Поупражняемся в подстановке одних уравнений системы (7) в другие уравнения. Выразим из второго и третьего уравнений первой системы (7), проекции магнитного поля B_x, B_y. Подставим затем их в четвертое уравнение второй системы (7). Далее воспользуемся первым уравнением первой системы (7). В результате получим дифференциальное уравнение для проекции электрического поля E_z.

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) E_z = 0 \qquad (8)$$

Задача 1. Получить уравнение (8).

Уравнение (8) называется уравнением Гельмгольца. Так что проекция электрического поля E_z удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Совершенно аналогично, выражая проекции электрического поля E_x, E_y из второй системы (7), и подставляя их в четвертое уравнение первой системы, получим дифференциальное уравнение для проекции магнитного поля B_z.

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) B_z = 0 \qquad (9)$$

Задача 2. Получить уравнение (9).

Таким образом, проекция магнитного поля B_z тоже удовлетворяет уравнению Гельмгольца (9).

Далее взяв проекцию магнитного поля B_x из второго уравнения первой системы (7) подставим ее в третье уравнение второй системы (7). Затем, взяв проекцию магнитного поля B_y из третьего уравнения первой системы (7) подставим ее во второе уравнение второй системы (7). В результате получим следующие формулы для нахождения проекций электрического поля E_x, E_y.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) E_x = i\beta \dfrac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega \dfrac{\partial B_z}{\partial y}, \\ \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) E_y = i\beta \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - i\omega \dfrac{\partial B_z}{\partial x} \end{cases} \qquad (10)$$

Задача 3. Получить уравнение (10).

Аналогично, взяв проекцию электрического поля E_x из второго уравнения второй системы (7) подставим ее в третье уравнение первой системы (7). Затем, взяв проекцию электрического поля E_y из третьего уравнения второй системы (7) подставим ее во второе уравнение первой системы (7). В результате получим следующие формулы для нахождения проекций магнитного поля B_x, B_y.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\omega^2}{c^2}-\beta^2\right)B_x = i\beta\dfrac{\partial B_z}{\partial x}-\dfrac{i\omega}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \left(\dfrac{\omega^2}{c^2}-\beta^2\right)B_y = i\beta\dfrac{\partial B_z}{\partial y}+\dfrac{i\omega}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, задача нахождения электрического и магнитного поля в волноводной моде свелась к следующей математической задаче. Имеется два уравнения Гельмгольца (8) и (9) для проекции электрического поля E_z и проекции магнитного поля B_z. Решив эти уравнения Гельмгольца, найдем проекции E_z, B_z как функции координат *x* и *y*.

$$E_z = E_z(x,y), \quad B_z = B_z(x,y) \tag{12}$$

Теперь, зная проекции E_z, B_z, легко находим остальные проекции электрического поля E_x, E_y и магнитного поля B_x, B_y по формулам (10) и (11).

Заметим, что дифференциальные уравнения (8), (9), (10), (11) являются дифференциальными уравнениями в плоскости *xy*. Поэтому задача решения уравнений Максвелла сводится к 2-х мерной задаче.

Уравнения Гельмгольца (8) и (9) решаются в двухмерной области *D*, которая является поперечным сечением металлического волновода Рис.2.

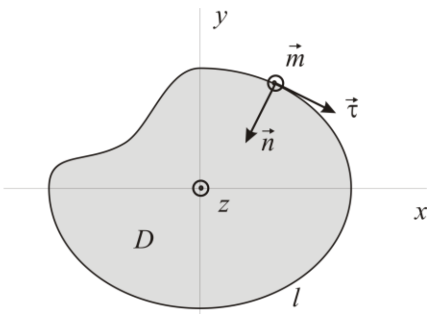

Рис.2

На Рис.2 показан контур *l*, который охватывает внутреннюю область волновода *D*. Контур *l* проходит по металлической поверхности волновода. В некоторой точке контура, на поверхности волновода, показана тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{\tau}, \vec{m}, \vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ является нормалью к поверхности проводника, и направлен из металлической оболочки волновода во внутреннюю область волновода. Векторы $\vec{\tau}, \vec{m}$ – это касательные векторы, касающиеся поверхности проводника. Вектор $\vec{m}$ направлен вдоль оси *z*. На Рис.2 вектор $\vec{m}$ и ось z направлена к наблюдателю, и обозначена кружками с точкой в середине.

Для нахождения определенного решения уравнений Гельмгольца (8), (9) в области *D* нужно знать граничные условия на контуре *l*. Граничные условия на контуре определяются граничными условиями для векторов электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ поля на поверхности проводника.

<u>Граничные условия на поверхности идеального проводника.</u>

В первом приближении будем считать, что проводник, из которого создан волновод, является идеальным проводником. Под идеальным проводником будем понимать такой проводник, в котором отсутствуют тепловые потери при протекании по нему электрического тока. Это предположение приводит к тому, что электрический ток протекает по поверхности проводника, электрический заряд находится на поверхности проводника, а электромагнитное поле в проводнике равно нулю.

На Рис. 3 показан небольшой плоский участок поверхности идеального проводника.

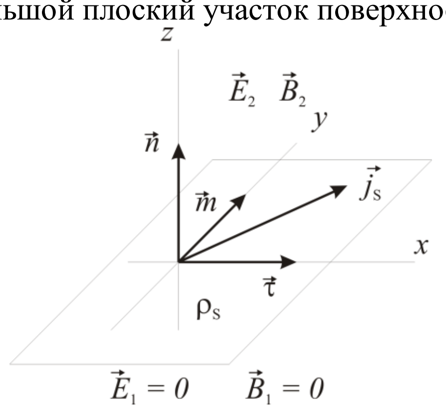

Рис.3

На Рис.3 показана система координат, где небольшой участок поверхности проводника лежит в плоскости xy. Полупространство с положительной координатой $z > 0$ заполнено воздухом, полупространство с отрицательной координатой $z < 0$ заполнено идеальным проводником. Электромагнитное поле внутри идеального проводника равно нулю $\vec{E}_1 = 0, \quad \vec{B}_1 = 0$. Электромагнитное поле с наружи проводника отлично от нуля $\vec{E}_2 \neq 0, \quad \vec{B}_2 \neq 0$.

На Рис.3 показаны три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{\tau}, \vec{m}, \vec{n}$, образующие правую тройку векторов. Вектор $\vec{n}$ является нормалью к поверхности проводника, направленный из проводника во внешнюю область. Векторы $\vec{\tau}, \vec{m}$ – это касательные векторы, касающиеся поверхности проводника.

На Рис.3 показан также вектор поверхностной плотности электрического тока $\vec{j}_S$. Символ ρ_S обозначает поверхностную плотность электрического заряда.

В учебниках по «Электродинамике» доказывается, что граничные условия для электрического и магнитного поля на границе раздела двух сред можно получить из уравнений Максвелла (2), записанных в интегральном виде. Эти граничные условия, на поверхности идеального проводника имеют следующий вид.

$$\begin{cases} E_{2\tau} = 0, \quad E_{2m} = 0, \quad E_{2n} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_S \\ B_{2\tau} = \mu_0 j_{S\,m}, \quad B_{2m} = -\mu_0 j_{S\,\tau}, \quad B_{2n} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

В любой точке контура Рис.2 граничные условия (13) принимают вид.

$$\begin{cases} E_{\tau} = 0, \quad E_{z} = 0, \quad E_{n} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_S \\ B_{\tau} = \mu_0 j_{S\,z}, \quad B_{z} = -\mu_0 j_{S\,\tau}, \quad B_{n} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Волноводные моды ТЕ и ТМ поляризаций.

Задача нахождения электромагнитного поля волноводной моды сводится к решению уравнений Гельмгольца (8) и (9) для проекций E_z, B_z электрического и магнитного поля, в области D, ограниченной контуром l. Полученные решения E_z, B_z затем подставляются в формулы (10) и (11) из которых находятся остальные проекции электрического $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{B}$.

Уравнения Гельмгольца (8) и (9) имеют определенные решения, если на контуре *l* заданы определенные граничные условия для проекций E_z, B_z. Эти граничные условия должны быть такими, чтобы найденные в результате электрическое и магнитное поле удовлетворяло граничным условиям (14) в каждой точке металлической поверхности волновода, через которую проходит контур *l*.

Поэтому главной задачей здесь является выбор «правильных» граничных условий на контуре *l* для проекций E_z, B_z.

Обратим внимание на то, что уравнения Гельмгольца (8) и (9) совершенно не зависимы друг от друга. В одном уравнении неизвестной функцией является проекция электрического поля E_z, а во втором проекция магнитного поля B_z. Поэтому возникает идея рассмотреть два случая, где за основу берется одно из уравнений Гельмгольца.

В первом случае берем за основу уравнение Гельмгольца (8), а проекцию магнитного поля на ось *z* полагаем равной нулю $B_z = 0$. Такую волноводную волну (моду) называют ТМ – волной.

Во втором случае берем за основу уравнение Гельмгольца (9), а проекцию электрического поля на ось *z* полагаем равной нулю $E_z = 0$. В этом случае волноводную моду называют ТЕ – волной.

Как показывает анализ дифференциальных уравнений (8), (9), (10), (11) и граничных условий (14), в металлическом волноводе с идеальными проводящими стенками, возможно существование двух независимых ТМ и ТЕ поляризаций у волны, бегущей вдоль волновода.

Это означает, что можно возбудить в волноводе одну волну ТМ поляризации, или одну волну ТЕ поляризации. Можно также возбудить две волны с разной поляризацией. Результирующая волна будет суперпозицией этих волн. Однако надо иметь в виду, что постоянные распространения $\beta_{\text{TM}}, \beta_{\text{TE}}$ у волн с разной поляризацией, вообще говоря, разные. Отсюда следует, что скорости волн (4) с разной поляризацией тоже разные. Поэтому здесь нет места обычной интерференции двух волн.

Рассмотрим волноводную моду, у которой проекция магнитного поля на ось *z* равна нулю, а проекция электрического поля на ось *z* отлична от нуля.

$$E_z \neq 0, \quad B_z = 0 \tag{15}$$

Волноводную моду с такой поляризацией называют ТМ – волной. То есть, волной с поперечным магнитным полем (transverse magnetic field). Другое название такой моды это Е – волна. То есть волна, у которой продольная составляющая электрического поля отлична от нуля.

В этом случае используем уравнение Гельмгольца (8) с соответствующим граничным условием на контуре *l*. Запишем это уравнение и граничное условие.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2\, E_z = 0, \qquad E_z\big|_l = 0 \\ g^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \end{cases} \tag{16}$$

Уравнения (10), (11) в этом случае примут вид.

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{i\beta}{g^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial x}, \\ E_y = \dfrac{i\beta}{g^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}, \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = -\dfrac{i\omega}{c^2 g^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}, \\ B_y = \dfrac{i\omega}{c^2 g^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \tag{17}$$

$$g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$$

Отметим, что из (17) вытекает перпендикулярность векторов электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ поля в ТМ волноводной моде. Действительно, скалярное произведение этих векторов равно нулю.

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = 0 \tag{18}$$

Задача 4. Получить уравнение (18).

Рассмотрим волноводную моду, у которой проекция электрического поля на ось *z* равна нулю, а проекция магнитного поля на ось *z* отлична от нуля.

$$E_z = 0, \quad B_z \neq 0 \tag{19}$$

Волноводную моду с такой поляризацией называют ТЕ – волной. То есть, волной с поперечным электрическим полем (transverse electric field). Другое название такой моды это Н – волна. То есть волна, у которой продольная составляющая магнитного поля отлична от нуля.

В этом случае используем уравнение Гельмгольца (9) с соответствующим граничным условием на контуре *l*. Запишем это уравнение и граничное условие.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + g^2 B_z = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial B_z}{\partial n}\right|_l = 0 \\ g^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \end{cases} \tag{20}$$

Уравнения (10), (11) в этом случае примут вид.

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{i\omega}{g^2}\dfrac{\partial B_z}{\partial y}, \\ E_y = -\dfrac{i\omega}{g^2}\dfrac{\partial B_z}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = \dfrac{i\beta}{g^2}\dfrac{\partial B_z}{\partial x}, \\ B_y = \dfrac{i\beta}{g^2}\dfrac{\partial B_z}{\partial y} \end{cases} \tag{21}$$

$$g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$$

Здесь, так же как и выше, надо отметить, что из формул (21) вытекает перпендикулярность векторов электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ поля в ТЕ волноводной моде. Действительно, легко проверить, что скалярное произведение этих векторов равно нулю.

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = 0 \tag{22}$$

Металлический волновод прямоугольного сечения, ТМ моды.

Рассмотрим металлический волновод прямоугольного сечения Рис.6. Систему координат выберем, так как показано на Рис.6.

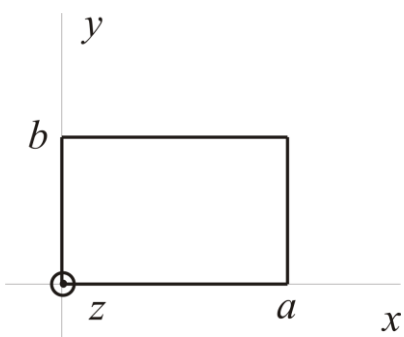

Рис.6

Рассмотрим сначала ТМ волноводные моды. Такую моду также называют Е – волной. Запишем уравнение Гельмгольца из системы уравнений (16) и граничные условия (16) для рассматриваемой конфигурации.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2 E_z = 0, \quad g^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \\ E_z(0,y) = 0, \quad E_z(a,y) = 0, \quad E_z(x,0) = 0, \quad E_z(x,b) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

Уравнение (23) решается методом разделения переменных, и результат имеет следующий вид.

$$\begin{cases} E_{z,nm}(x,y) = A_1 \sin\left(\dfrac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\dfrac{\pi m}{b} y\right), \\ g_{nm}^2 = \left(\dfrac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi m}{b}\right)^2, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{24}$$

Из уравнений (23) и (24) находим дисперсионное соотношение для моды E_{nm}.

$$\begin{gathered} \beta = \beta_{nm}(\omega) \\ \beta_{nm}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - g_{nm}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} - \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{25}$$

Волноводная мода ТМ поляризации для прямоугольного волновода обозначается буквой Е с двумя индексами E_{nm}. Из формулы (25) видно, что для заданной частоты ω могут существовать несколько ТМ мод с разными индексами, например E_{11}, E_{12}, E_{22}.

Если рассматривать заданную моду E_{nm}, то постоянная распространения β будет изменяться с изменением частоты ω по закону, определяемой формулой (25). Из формул (25) видно, что при некоторых частотах ω подкоренное выражение становиться отрицательным и данная волноводная мода E_{nm} на этой частоте распространяться по волноводу не может. Поэтому для каждой моды E_{nm} существует граничная частота, ниже которой данная мода существовать не может. Такие частоты называют частотой отсечки. Частоты отсечки можно найти, если приравнять подкоренное выражение (25) нулю. В результате получим для частот отсечки следующее выражение.

$$\omega_{nm} = c\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, \quad n, m = 1, 2, \dots \tag{26}$$

Перейдем к обычным частотам $f = \omega / 2\pi$ и запишем дисперсионные соотношения (25) в следующем виде.

$$\begin{gathered} \beta = \frac{2\pi}{c}\sqrt{f^2 - f_{nm}^2} \\ f_{nm} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{27}$$

Используя формулы (27) были построены дисперсионные соотношения Рис.7 для нескольких ТМ мод.

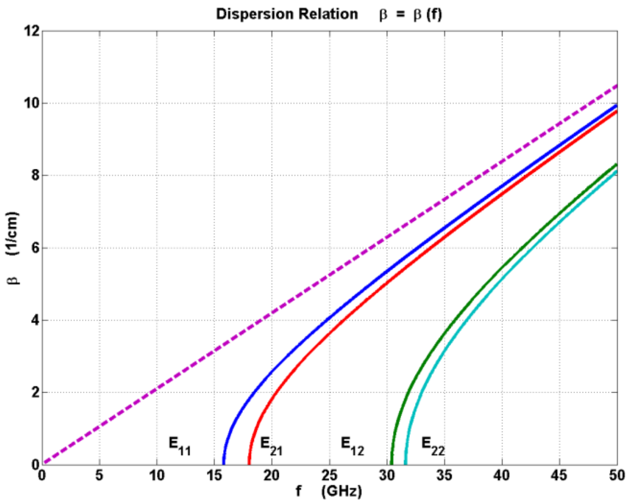

Рис.7

На Рис.7 показаны дисперсионные кривые для следующих ТМ мод - $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. Выбраны следующие размеры волновода $a = 3\,см,\ b = 1\,см$.

По формулам (17) и (24) находим остальные проекции электрического и магнитного поля в ТМ волноводной моде.

$$\begin{cases} E_x(x,y) = i\,\beta_{nm}\dfrac{\pi n}{a g_{nm}^2} A_1 \cos\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right), \\ E_y(x,y) = i\,\beta_{nm}\dfrac{\pi m}{b g_{nm}^2} A_1 \sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right), \\ E_z(x,y) = A_1 \sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right), \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} B_x(x,y) = -\dfrac{i\omega}{c^2}\dfrac{\pi m}{b g_{nm}^2} A_1 \sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right), \\ B_y(x,y) = \dfrac{i\omega}{c^2}\dfrac{\pi n}{a g_{nm}^2} A_1 \cos\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right), \\ B_z(x,y) = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Задача 5. Получить уравнение (28), (29).

Сделаем замечание по поводу записи электрического и магнитного поля в виде (1). Здесь представлена комплексная запись электромагнитного поля. Поэтому векторы $\vec{E}, \vec{B}$ в (1) являются комплексными векторами. Если ввести вещественные векторы $\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}$, то их связь с комплексными векторами будет иметь вид.

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{E}^*(\vec{r},t)\right), \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\left(\vec{B}(\vec{r},t) + \vec{B}^*(\vec{r},t)\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Если умножить векторы электрического $\vec{E}(x,y)$ и магнитного $\vec{B}(x,y)$ поля, заданные формулами (28), (29) на волновой множитель $e^{i(\beta z - \omega t)}$, то получится волноводная мода (1) в комплексном виде. Запишем эти поля в действительном виде.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(x,y,z,t) = -\beta_{nm}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1\cos\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\sin(\beta z-\omega t), \\ \tilde{E}_y(x,y,z,t) = -\beta_{nm}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\sin(\beta z-\omega t), \\ \tilde{E}_z(x,y,z,t) = A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\cos(\beta z-\omega t), \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(x,y,z,t) = \dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\sin(\beta z-\omega t), \\ \tilde{B}_y(x,y,z,t) = -\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1\cos\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\sin(\beta z-\omega t), \\ \tilde{B}_z(x,y,z,t) = 0 \end{cases} \tag{32}$$

Задача 6. Получить уравнение (31), (32).

Далее у действительных полей значок тильда не будем ставить. Рассмотрим поле в сечении с координатой $z=0$, в момент времени равный одной восьмой периода $t=T/8$. В этом случае из формул (31), (32) получим следующие поля.

$$\begin{cases} E_x(x,y,0,T/8) = \beta_{nm}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1\cos\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_y(x,y,0,T/8) = \beta_{nm}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_z(x,y,0,T/8) = A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} B_x(x,y,0,T/8) = -\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_y(x,y,0,T/8) = \dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1\cos\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_z(x,y,0,T/8) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Задача 7. Найти поверхностные заряды и токи в сечении z = 0, в момент времени t = T/8.

Поле на нижней границе $0 \le x \le a,\ y=0$ прямоугольного контура Рис.6 имеет следующий вид.

$$\begin{cases} E_x(x,0)=0, \\ E_y(x,0)=\beta_{nm}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_z(x,0)=0, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} B_x(x,0)=-\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_y(x,0)=0, \\ B_z(x,0)=0 \end{cases} \tag{36}$$

Граничные условия (14) для контура волновода Рис.2, применим для нижнего участка контура $0\le x\le a,\ y=0$.

$$\begin{cases} E_x=-E_\tau=0, \quad E_y=E_n=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_s, \quad E_z=0, \\ B_x=-B_\tau=-\mu_0 j_{s\,z}, \quad B_y=B_n=0, \quad B_z=\mu_0 j_{s\,x}=0 \end{cases} \tag{37}$$

Таким образом, на нижнем участке контура $0\le x\le a,\ y=0$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(x)=\beta_{nm}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(x)=\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{38}$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(x)=\varepsilon_0 B_n(x), \\ j_{s\,z}(x)=\dfrac{1}{\mu_0}B_\tau(x) \end{cases} \tag{39}$$

Самостоятельно найти поверхностные заряды и токи в других участках контура в сечении z = 0, в момент времени t = T/8.

Рассмотрим еще граничные условия на правом участке $x=a,\ 0\le y\le b$ контура волновода Рис.6. Из общих формул (33), (34) находим поля на этом участке.

$$
\begin{cases}
E_x(a,y)=\beta_{nm}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1(-1)^n\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\
E_y(a,y)=0, \\
E_z(a,y)=0,
\end{cases}
\tag{40}
$$

$$
\begin{cases}
B_x(a,y)=0, \\
B_y(a,y)=\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1(-1)^n\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\
B_z(a,y)=0
\end{cases}
\tag{41}
$$

Граничные условия (14) для контура волновода Рис.2, применим для правого участка контура $x=a,\,0\le y\le b$.

$$
\begin{cases}
E_x=-E_n=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_s, \quad E_y=-E_\tau=0, \quad E_z=0, \\
B_x=-B_n=0, \quad B_y=-B_\tau=-\mu_0 j_{s\,z}, \quad B_z=\mu_0 j_{s\,y}=0
\end{cases}
\tag{42}
$$

Таким образом, на правом участке контура $x=a,\,0\le y\le b$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$
\begin{cases}
E_n(y)=\beta_{nm}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\
B_\tau(y)=\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi n}{ag_{nm}^2}A_1(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi m}{b}y\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{cases}
\tag{43}
$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$
\begin{cases}
\rho_s(y)=\varepsilon_0 E_n(y), \\
j_{s\,z}(y)=\dfrac{1}{\mu_0}B_\tau(y)
\end{cases}
\tag{44}
$$

Аналогично другим участкам контура волновода, на верхнем участке контура $0\le x\le a,\; y=b$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$
\begin{cases}
E_n(x)=\beta_{nm}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)(-1)^{m+1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\
B_\tau(x)=\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\pi m}{bg_{nm}^2}A_1\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right)(-1)^{m+1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{cases}
\tag{45}
$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(x) = \varepsilon_0 E_n(x), \\ j_{s\,z}(x) = \dfrac{1}{\mu_0} B_\tau(x) \end{cases} \tag{46}$$

Аналогично на четвертом левом участке контура $x = 0,\ 0 \le y \le b$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(y) = \beta_{nm} \dfrac{\pi n}{a g_{nm}^2} A_1 \sin\left(\dfrac{\pi m}{b} y\right) \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(y) = \dfrac{\omega}{c^2} \dfrac{\pi n}{a g_{nm}^2} A_1 \sin\left(\dfrac{\pi m}{b} y\right) \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{47}$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(y) = \varepsilon_0 E_n(y), \\ j_{s\,z}(y) = \dfrac{1}{\mu_0} B_\tau(y) \end{cases} \tag{48}$$