Семинар 3.

Магнитное поле постоянных токов (магнитостатика).

Система уравнений Максвелла

1) $$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Уравнения магнитостатики

2) $$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \rho = 0, \quad \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Плотность энергии магнитного поля

3) $$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) \quad \rightarrow \quad w = \frac{E^2}{2\mu_0} \quad \rightarrow \quad W = \int_V w(\vec{r})\, dV$$

Векторный потенциал.

4) $$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Калибровка векторного потенциала. Уравнение Пуассона (Лапласа).

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}, \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0 \ (\textit{калибровка})$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{A} = 0 \end{cases}$$

Граничные условия на границе раздела двух сред.

5) $$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 j_{S\,m} \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases}$$

$\vec{\tau}, \vec{m}, \vec{n}$ - правая тройка единичных взаимно перпендикулярных векторов.

$\vec{\tau}, \vec{m}$ - касательные векторы.

$\vec{n}$ - нормальный вектор, направлен из среды 1 в среду 2.

$\vec{j}_S$ - вектор поверхностной плотности электрического тока.

Задача 1

Цилиндрический проводник с током с цилиндрической полостью внутри (I).

В цилиндрическом слое размером $R_1 \le r \le R_2$ протекает ток вдоль проводника с плотностью $\vec{j}$. Дина проводника l. Найти –

1) Распределение векторного потенциала $A_z = A_z(r)$ в зависимости от радиуса r.

2) Найти распределение магнитного поля $B_\psi = B_\psi(r)$.

3) Найти плотность энергии магнитного поля в трех областях проводника w.

4) Найти магнитную энергию проводника с током W.

Вектор плотности тока имеет одну, отличную от нуля проекцию j_z вдоль проводника.

$$\vec{j} = \vec{e}_r j_r + \vec{e}_\psi j_\psi + \vec{e}_z j_z = \vec{e}_z j_z$$

Из уравнения Пуассон следует, что векторный потенциал, тоже имеет одну проекцию вдоль оси z.

$$\vec{A} = \vec{e}_r A_r + \vec{e}_\psi A_\psi + \vec{e}_z A_z = \vec{e}_z A_z$$

Магнитное поле поучим, записав ротор векторного потенциала в цилиндрических координатах.

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\psi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right)$$

Векторный потенциал имеет одну проекцию, которая в силу цилиндрической симметрии, зависит только от радиуса.

$$A_z = A_z(r)$$

Отсюда получаем формулу для магнитного поля

$$B_\psi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

Записываем уравнение Пуассона для векторного потенциала в цилиндрической системе координат.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_0 j_z$$

Учитывая цилиндрическую симметрию, перепишем это уравнение в следующем виде.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z}{dr}\right) = -\mu_0 j_z$$

Это уравнение имеет решение.

$$A_z = -\mu_0 j_z \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

Посмотрим на условие калибровки для векторного потенциала.

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

У векторного потенциал существует только одна проекция $A_z(r)$, которая зависит только от радиуса. Поэтому уравнение калибровки превращается в тождество.

$$0 + 0 + 0 = 0$$

Зная векторный потенциал, находим выражение для магнитного поля

$$B_\psi = \frac{\mu_0 j_z}{2} r + \frac{C_1}{r}$$

Получаем магнитное поле в трех областях

$$\begin{cases} B_\psi^I = \dfrac{C_1^I}{r}, & 0 \le r \le R_1 \\[2ex] B_\psi^{II} = \dfrac{\mu_0 j_z}{2} r + \dfrac{C_1^{II}}{r}, & R_1 \le r \le R_2 \\[2ex] B_\psi^{III} = \dfrac{C_1^{III}}{r}, & r \ge R_2 \end{cases}$$

Константы в этих формулах находятся из граничных условий на границе трех областей. Сначала отметим, что в первой области в точке $r=0$ поле обращается в бесконечность, что не имеет физического смысла. Поэтому имеем $C_1^I=0$.

На границе $r=R_1$ имеем следующее соотношение. Здесь учитывается непрерывность касательных составляющих магнитного поля.

$$B_\psi^I(R_1)=B_\psi^{II}(R_1),\quad 0=\frac{\mu_0 j_z}{2}R_1+\frac{C_1^{II}}{R_1}\quad\to\quad C_1^{II}=-\frac{\mu_0 j_z}{2}R_1^2$$

На границе $r=R_2$ получаем аналогичное соотношение.

$$B_\psi^{II}(R_2)=B_\psi^{III}(R_2),\quad \frac{\mu_0 j_z}{2}R_2+\frac{C_1^{II}}{R_2}=\frac{C_1^{III}}{R_2}\quad\to\quad C_1^{III}=\frac{\mu_0 j_z}{2}\left(R_2^2-R_1^2\right)$$

В результате формулы для магнитного поля принимают следующий вид.

$$\begin{cases} B_\psi^I=0, & 0\le r\le R_1\\ B_\psi^{II}=\dfrac{\mu_0 j_z}{2}\left(r-\dfrac{R_1^2}{r}\right), & R_1\le r\le R_2\\ B_\psi^{III}=\dfrac{\mu_0 j_z}{2}\left(R_2^2-R_1^2\right)\dfrac{1}{r}, & r\ge R_2\end{cases}$$

Отсюда находим плотность энергии электрического поля в трех областях.

$$\begin{cases} w^I=0, & 0\le r\le R_1\\ w^{II}=\dfrac{\left(B_\psi^{II}\right)^2}{2\mu_0}, & R_1\le r\le R_2\\ w^{III}=\dfrac{\left(B_\psi^{III}\right)^2}{2\mu_0}, & r\ge R_2\end{cases}$$

Находим энергию магнитного поля в трех областях, причем третья область над отрезком проводника уходит в бесконечность. Интегрируем в цилиндрических координатах.

$W=W_1+W_2+W_3$

$$W_1=\int\limits_{V_1}w^I(\vec r)\,dV\quad\to\quad W_1=0$$

$$W_2=\int\limits_{V_2}w^{II}(\vec r)\,dV\quad\to\quad W_2=\int\limits_{R_1}^{R_2}r\,dr\,r\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{l}dz\,w^{II}(r)\quad\to\quad W_2=2\pi l\int\limits_{R_1}^{R_2}r\,dr\,r\,w^{II}(r)$$

$$W_2=2\pi l\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 j_z}{2}\right)^2\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(r-\frac{R_1^2}{r}\right)^2 r\,dr$$

$$W_3=\int\limits_{V_3}w^{III}(\vec r)\,dV\quad\to\quad W_3=\int\limits_{R_2}^{\infty}r\,dr\,r\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{l}dz\,w^{III}(r)\quad\to\quad W_3=2\pi l\int\limits_{R_2}^{\infty}r\,dr\,r\,w^{II}(r)$$

$$W_3=2\pi l\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 j_z}{2}\right)^2\left(R_2^2-R_1^2\right)\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}r\,dr=\frac{\pi l\mu_0 j_z^2}{4}\left(R_2^2-R_1^2\right)\ln r\Big|_{R_2}^{\infty}=\infty$$

В третьей бесконечной области энергия магнитного поля получилась бесконечной – физически бессмысленный результат. Это произошло из-за того, что был выбран прямолинейный бесконечный проводник, из которого был вырезан отрезок длиной l.

Отсюда вывод о применимости полученных формул. Если реальная длина всего проводника равна $l_{проводник}$, то формулы применимы вблизи проводника, на расстояниях $r << l_{проводник}$.

Задача 2

Цилиндрический проводник с током с цилиндрической полостью внутри (II).

В цилиндрическом слое размером $R_1 \le r \le R_2$ протекает ток вдоль проводника с плотностью $\vec{j}$. Дина проводника l. Проводимость материала проводника равна σ. В отличие от задачи 1, где плотность тока j_z считалась заданной величиной, здесь считается заданной разность потенциалов U на концах отрезка l. Найти –

1) Распределение потенциала $\varphi = \varphi(z)$ вдоль ости z, вдоль проводника.
2) Найти распределение электрического поля $E_z = E_z(z)$.
3) Найти плотность тока j_z.
4) Найти ток I, текущий в проводнике.
5) Найти сопротивление отрезка проводника R.
3) Найти плотность энергии электрического поля в трех областях проводника w.
4) Найти электрическую энергию проводника с током W.

К уравнениям магнитостатики добавим уравнения электростатики. Кроме того, добавим к уравнениям Максвелла физический закон, который связывает ток и электрическое поле. Закон Ома.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad 0 \le z \le l, \quad R_1 \le r \le R_2$$

Вектор плотности тока имеет одну проекцию вдоль проводника j_z. Из закона Ома следует, что электрическое поле имеет тоже одну проекцию E_z. Запишем одно из уравнений электростатики.

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \vec{e}_\psi \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} - \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Из этого уравнения следует, что скалярный потенциал $\varphi(z)$ зависит только от переменной z. Пишем уравнение Лапласа для скалярного потенциала.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \le z \le l, \quad 0 \le r \le \infty$$

С учетом $\varphi = \varphi(z)$, это уравнение превращается в следующее.

$$\varphi = \varphi(z) \quad \to \quad \frac{d^2\varphi}{d\,z^2} = 0, \quad 0 \le z \le l$$

Решение уравнения Лапласа

$$\frac{d^2\varphi}{d\,z^2} = 0 \quad \to \quad \frac{d\varphi}{d\,z} = C_1 \quad \to \quad \varphi = C_1 z + C_2, \quad 0 \le z \le l$$

Используем граничные условия для скалярного потенциала

$$\varphi(0) = U, \quad \varphi(l) = 0,$$

Получаем для потенциала следующую формулу.

$$\varphi(z) = -\frac{U}{l}z + U, \qquad 0 \le z \le l \quad 0 \le r \le \infty$$

Проекция электрического поля будет равна

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{U}{l}, \qquad 0 \le z \le l \quad 0 \le r \le \infty$$

Получилось однородное электрическое поле во всех трех областях. Плотность ток находим из закона Ома

$$j_z = \sigma E_z = \frac{\sigma U}{l}, \qquad 0 \le z \le l \quad R_1 \le r \le R_2$$

Находим ток

$$I = j_z S = \frac{\sigma S}{l} U, \quad S = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

Находим сопротивление участка проводника из закона Ома в интегральной форме.

$$R = \frac{U}{I}, \quad R = \frac{l}{\sigma S}, \quad S = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

Так как электрическое поле $E_z = const$ постоянное во всех точках, плотность энергии электрического поля тоже везде равна одной и той же величине.

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \left(E_r^2 + E_\psi^2 + E_z^2\right)}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_x^2}{2} \quad \to \quad w = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2l^2}$$

Находим энергию электрического поля в трех областях, причем третья область над отрезком проводника уходит в бесконечность. Интегрируем в цилиндрических координатах.

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W_1 = \int_{V_1} w(\vec{r})\, dV \quad \to \quad W_1 = w\int_0^{R_1} r\, dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^l dz \quad \to \quad W_1 = 2\pi l \frac{R_1^2}{2} w$$

$$W_2 = \int_{V_2} w(\vec{r})\, dV \quad \to \quad W_2 = w\int_{R_1}^{R_2} r\, dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^l dz \quad \to \quad W_2 = 2\pi l \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2} w$$

$$W_3 = \int_{V_3} w(\vec{r})\, dV \quad \to \quad W_2 = w\int_{R_2}^{\infty} r\, dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^l dz \quad \to \quad W_3 = w 2\pi l \left.\frac{r^2}{2}\right|_{R_2}^{\infty} = \infty$$

В третьей бесконечной области энергия электрического поля получилась бесконечной – физически бессмысленный результат. Это произошло из-за того, что был выбран прямолинейный бесконечный проводник, из которого был вырезан отрезок длиной l.

Отсюда вывод о применимости полученных формул. Если реальная длина всего проводника равна $l_{проводник}$, то формулы применимы вблизи проводника, на расстояниях $r << l_{проводник}$.