

Монохроматическая электромагнитная волна в металлическом волноводе.

Волновод – это канал, имеющий резкие границы, вдоль которого распространяется электромагнитное излучение. Металлический волновод – это металлическая труба, произвольного сечения, пустая внутри или заполненная диэлектриком. На Рис.2.1 показаны металлические волноводы прямоугольного и круглого сечения.

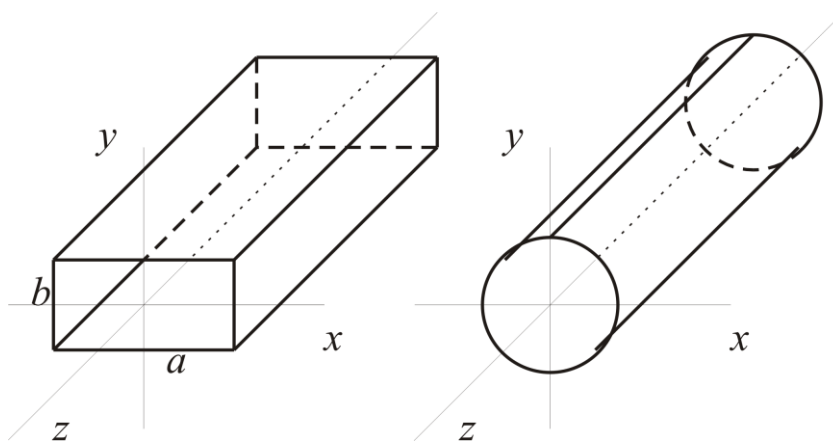


Рис.2.1

Волноводы прямоугольного и круглого сечения.

На Рис.2.1 направляющие волноводов параллельны оси z . У волновода прямоугольного сечения показаны размеры поперечного сечения a и b .

Будем рассматривать электромагнитную монохроматическую волну (волноводную моду) бегущую вдоль оси z . В этом случае электрическое и магнитное поле будем искать в следующем виде.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь β – волновое число волны в волноводе. Если знать постоянную распространения β , то можно найти длину волны излучения волноводной моды в волноводе.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.2)$$

Если задана частота излучения ω , то волновое число β можно найти из дисперсионного соотношения для данной волноводной моды.

$$\beta = \beta(\omega) \quad (2.3)$$

Дисперсионное соотношение (2.3) находится одновременно с нахождением решений уравнений Максвелла для электромагнитного поля (2.1) внутри волновода с заданными граничными условиями на поверхности волновода.

Если известно дисперсионное соотношение (2.3), то можно найти фазовую v_p и групповую v_g скорость волноводной моды.

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}, \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (2.4)$$

Сделаем замечание по поводу записи электрического и магнитного поля в виде (2.1). Здесь представлена комплексная запись электромагнитного поля. Поэтому векторы \vec{E} , \vec{B} в (2.1) являются комплексными векторами. Если ввести вещественные векторы $\tilde{\vec{E}}$, $\tilde{\vec{B}}$, то их связь с комплексными векторами будет иметь вид.

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{E}^*(\vec{r}, t) \right), \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \left(\vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{B}^*(\vec{r}, t) \right) \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла являются линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому решения уравнений Максвелла можно искать как в вещественном виде, так и в комплексном виде. Конечный результат будет одним и тем же. В дальнейшем векторы \vec{E} , \vec{B} будут обозначать как действительные так и комплексные векторы, если это не вызывает путаницы.

Будем считать, что внутри, металлические волноводы пустые. Соответственно уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме имеют вид.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Причем учтем, что волноводная мода распространяется, внутри волновода в пустом пространстве, где отсутствуют электрические заряды и токи. Если металлический волновод сделан из идеального проводника, то заряды и токи сосредоточены только на поверхности стенок волновода. Поэтому в уравнениях Максвелла (2.5) объемные токи и заряды надо положить равными нулю.

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0 \quad (2.6)$$

Подставим в уравнения (2.5) электромагнитное поле в виде бегущей волны (2.1). В результате система (2.5) принимает следующий вид.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + i\beta E_z = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y = i\omega B_x \\ i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + i\beta B_z = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - i\beta B_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x \\ i\beta B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_y \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_z \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Поупражняемся в подстановке одних уравнений системы (2.7) в другие уравнения. Выразим из второго и третьего уравнений первой системы (2.7), проекции магнитного поля B_x, B_y . Подставим затем их в четвертое уравнение второй системы (2.7). Далее воспользуемся первым уравнением первой системы (2.7). В результате получим дифференциальное уравнение для проекции электрического поля E_z .

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) E_z = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) называется уравнением Гельмгольца. Так что проекция электрического поля E_z удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Совершенно

аналогично, выражая проекции электрического поля E_x, E_y из второй системы (2.7), и подставляя их в четвертое уравнение первой системы, получим дифференциальное уравнение для проекции магнитного поля B_z .

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) B_z = 0 \quad (2.9)$$

Таким образом, проекция магнитного поля B_z тоже удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2.9).

Далее взяв проекцию магнитного поля B_x из второго уравнения первой системы (2.7) подставим ее в третье уравнение второй системы (2.7). Затем, взяв проекцию магнитного поля B_y из третьего уравнения первой системы (2.7) подставим ее во второе уравнение второй системы (2.7). В результате получим следующие формулы для нахождения проекций электрического поля E_x, E_y .

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) E_x = i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) E_y = i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{cases} \quad (2.10)$$

Аналогично, взяв проекцию электрического поля E_x из второго уравнения второй системы (2.7) подставим ее в третье уравнение первой системы (2.7). Затем, взяв проекцию электрического поля E_y из третьего уравнения второй системы (2.7) подставим ее во второе уравнение первой системы (2.7). В результате получим следующие формулы для нахождения проекций магнитного поля B_x, B_y .

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) B_x = i\beta \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) B_y = i\beta \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, задача нахождения электрического и магнитного поля в волноводной моде свелась к следующей математической задаче. Имеется два уравнения Гельмгольца (2.8) и (2.9) для проекции электрического поля E_z и проекции

магнитного поля B_z . Решив эти уравнения Гельмгольца, найдем проекции E_z , B_z как функции координат x и y .

$$E_z = E_z(x, y), \quad B_z = B_z(x, y) \quad (2.12)$$

Теперь, зная проекции E_z , B_z , легко находим остальные проекции электрического поля E_x , E_y и магнитного поля B_x , B_y по формулам (2.10) и (2.11).

Заметим, что дифференциальные уравнения (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) являются дифференциальными уравнениями в плоскости xy . Поэтому задача решения уравнений Максвелла в волноводе сводится к 2-х мерной задаче в плоскости сечения волновода.

Уравнения Гельмгольца (2.8) и (2.9) решаются в двумерной области D , которая является поперечным сечением металлического волновода Рис.2.2.

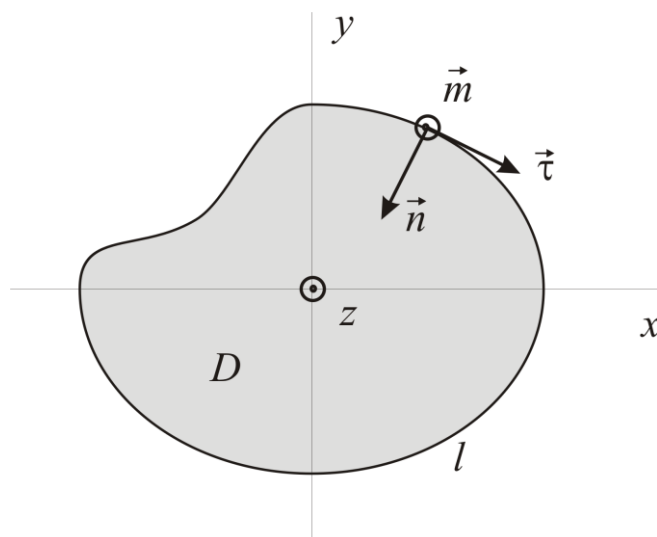


Рис.2.2

Область поперечного сечения металлического волновода.

На Рис.2.2 показан контур l , который охватывает внутреннюю область волновода D . Контур l проходит по металлической поверхности волновода. В некоторой точке контура, на поверхности волновода, показана тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{\tau}$, \vec{m} , \vec{n} . Вектор \vec{n} является нормалью к поверхности проводника, и направлен из металлической оболочки волновода во внутреннюю область волновода. Векторы $\vec{\tau}$, \vec{m} – это касательные векторы,

касающиеся поверхности проводника. Вектор \vec{m} направлен вдоль оси z . На Рис.2.2 вектор \vec{m} и ось z направлена к наблюдателю, и обозначена кружками с точкой в середине сечения волновода.

Для нахождения определенного решения уравнений Гельмгольца (2.8), (2.9) в области D нужно знать граничные условия на контуре l . Граничные условия на контуре определяются граничными условиями для векторов электрического \vec{E} и магнитного \vec{B} поля на поверхности проводника.

Граничные условия на поверхности идеального проводника.

В первом приближении будем считать, что проводник, из которого создан волновод, является идеальным проводником. Под идеальным проводником будем понимать такой проводник, в котором отсутствуют тепловые потери при протекании по нему электрического тока. Это предположение приводит к тому, что электрический ток протекает по поверхности проводника, электрический заряд находится на поверхности проводника, а электромагнитное поле в проводнике равно нулю.

На Рис. 2.3 показан небольшой плоский участок поверхности идеального проводника.

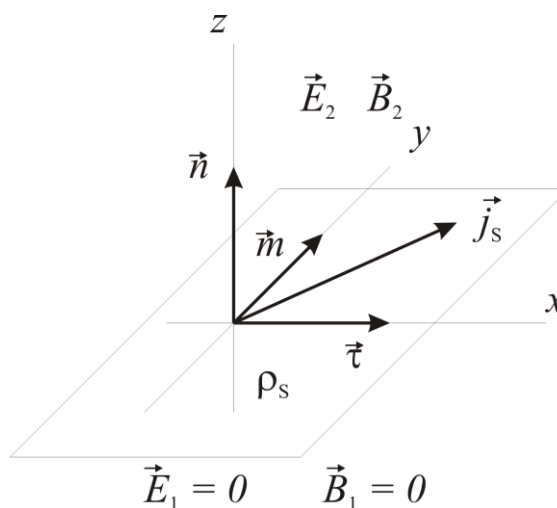


Рис.2.3

Плоская граница раздела идеального проводника и вакуума.

На Рис.2.3 показана система координат, где небольшой участок поверхности проводника лежит в плоскости xy . Полупространство с положительной координатой $z > 0$ заполнено воздухом, полупространство с отрицательной координатой $z < 0$ заполнено идеальным проводником. Электромагнитное поле внутри идеального проводника равно нулю $\vec{E}_1 = 0, \vec{B}_1 = 0$. Электромагнитное поле с наружи проводника отлично от нуля $\vec{E}_2 \neq 0, \vec{B}_2 \neq 0$.

На Рис.2.3 показаны три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{\tau}, \vec{m}, \vec{n}$, образующие правую тройку векторов. Вектор \vec{n} является нормалью к поверхности проводника, направленный из проводника во внешнюю область. Векторы $\vec{\tau}, \vec{m}$ – это касательные векторы, касающиеся поверхности проводника.

На Рис.2.3 показан также вектор поверхностной плотности электрического тока \vec{j}_s . Символ ρ_s обозначает поверхностную плотность электрического заряда.

В учебниках по Электродинамике доказывается, что граничные условия для электрического и магнитного поля на границе раздела двух сред можно получить из уравнений Максвелла (2.2), записанных в интегральном виде. Эти граничные условия, на поверхности идеального проводника имеют следующий вид.

$$\begin{cases} E_{2\tau} = 0, & E_{2m} = 0, & E_{2n} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_s \\ B_{2\tau} = \mu_0 j_{sm}, & B_{2m} = -\mu_0 j_{s\tau}, & B_{2n} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

В любой точке контура Рис.2.2 граничные условия (2.13) принимают вид.

$$\begin{cases} E_\tau = 0, & E_z = 0, & E_n = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_s \\ B_\tau = \mu_0 j_{sz}, & B_z = -\mu_0 j_{s\tau}, & B_n = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Волноводные моды ТЕ и ТМ поляризации.

Задача нахождения электромагнитного поля волноводной моды сводится к решению уравнений Гельмгольца (2.8) и (2.9) для проекций E_z, B_z электрического и

магнитного поля, в области D , ограниченной контуром l . Полученные решения E_z, B_z затем подставляются в формулы (2.10) и (2.11) из которых находятся остальные проекции электрического \vec{E} и магнитного поля \vec{B} .

Уравнения Гельмгольца (2.8) и (2.9) имеют определенные решения, если на контуре l заданы определенные граничные условия для проекций E_z, B_z . Эти граничные условия должны быть такими, чтобы найденные в результате электрическое и магнитное поле удовлетворяло граничным условиям (2.14) в каждой точке металлической поверхности волновода, через которую проходит контур l .

Поэтому главной задачей здесь является выбор правильных граничных условий на контуре l для проекций E_z, B_z .

Обратим внимание на то, что уравнения Гельмгольца (2.8) и (2.9) совершенно не зависимы друг от друга. В одном уравнении неизвестной функцией является проекция электрического поля E_z , а во втором проекция магнитного поля B_z . Поэтому возникает идея рассмотреть два случая, где за основу берется одно из уравнений Гельмгольца.

В первом случае берем за основу уравнение Гельмгольца (2.8), а проекцию магнитного поля на ось z полагаем равной нулю $B_z = 0$. Такую волноводную волну (моду) называют ТМ – волной (или E - волной).

Во втором случае берем за основу уравнение Гельмгольца (2.9), а проекцию электрического поля на ось z полагаем равной нулю $E_z = 0$. В этом случае волноводную моду называют ТЕ – волной (или H - волной).

Как показывает анализ дифференциальных уравнений (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) и граничных условий (2.14), в металлическом волноводе с идеальными проводящими стенками, возможно существование двух независимых электромагнитных волн ТМ и ТЕ поляризации, бегущих вдоль волновода.

Это означает, что можно возбудить в волноводе одну волну ТМ поляризации, или одну волну ТЕ поляризации. Можно также возбудить две волны с разной поляризацией. Результирующая волна будет суперпозицией этих волн. Однако надо иметь в виду, что постоянные распространения $\beta_{\text{ТМ}}, \beta_{\text{ТЕ}}$ у волн с разной поляризацией, вообще говоря, разные. Отсюда следует, что скорости волн (2.4) с

разной поляризацией тоже разные. Поэтому здесь нет места обычной интерференции двух волн.

Рассмотрим волноводную моду, у которой проекция магнитного поля на ось z равна нулю, а проекция электрического поля на ось z отлична от нуля.

$$E_z \neq 0, \quad B_z = 0 \quad (2.15)$$

Волноводную моду с такой поляризацией называют ТМ – волной. То есть, волной с поперечным магнитным полем (transverse magnetic field). Другое название такой моды это Е – волна. То есть волна, у которой продольная составляющая электрического поля отлична от нуля.

В этом случае используем уравнение Гельмгольца (2.8) с соответствующим граничным условием на контуре l . Запишем это уравнение и граничное условие.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2 E_z = 0, & E_z|_l = 0 \\ g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \end{cases} \quad (2.16)$$

Уравнения (2.10), (2.11) в этом случае примут вид.

$$\begin{cases} E_x = \frac{i\beta}{g^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & B_x = -\frac{i\omega}{c^2 g^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ E_y = \frac{i\beta}{g^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, & B_y = \frac{i\omega}{c^2 g^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$$

Отметим, что из (2.17) вытекает перпендикулярность векторов электрического \vec{E} и магнитного \vec{B} поля в ТМ волноводной моде. Действительно, скалярное произведение этих векторов равно нулю.

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = 0 \quad (2.18)$$

Рассмотрим волноводную моду, у которой проекция электрического поля на ось z равна нулю, а проекция магнитного поля на ось z отлична от нуля.

$$E_z = 0, \quad B_z \neq 0 \quad (2.19)$$

Волноводную моду с такой поляризацией называют ТЕ – волной. То есть, волной с поперечным электрическим полем (transverse electric field). Другое название

такой моды это Н – волна. То есть волна, у которой продольная составляющая магнитного поля отлична от нуля.

В этом случае используем уравнение Гельмгольца (2.9) с соответствующим граничным условием на контуре l . Запишем это уравнение и граничное условие.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + g^2 B_z = 0, & \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_l = 0 \\ g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \end{cases} \quad (2.20)$$

Уравнения (2.10), (2.11) в этом случае примут вид.

$$\begin{cases} E_x = \frac{i\omega}{g^2} \frac{\partial B_z}{\partial y}, & B_x = \frac{i\beta}{g^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \\ E_y = -\frac{i\omega}{g^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}, & B_y = \frac{i\beta}{g^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$$

Здесь, так же как и выше, надо отметить, что из формул (2.21) вытекает перпендикулярность векторов электрического \vec{E} и магнитного \vec{B} поля в ТЕ волноводной моде. Действительно, легко проверить, что скалярное произведение этих векторов равно нулю.

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = 0 \quad (2.22)$$

Нахождение волноводных мод с помощью потенциалов Герца.

Выше было показано, что системы уравнений (2.16), (2.17) и (2.20), (2.21) могут быть использованы для нахождения ТМ и ТЕ волноводных мод. Однако для описания электромагнитного излучения чаще применяется другой подход, основанный на использовании электрического и магнитного потенциалов Герца.

В теории электромагнитных полей доказывается, что для описания излучения можно ввести электрический $\vec{\Pi}^e$ и магнитный $\vec{\Pi}^m$ потенциалы Герца, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям, описывающим излучение, и связанные с электрическим и магнитным полем определенными соотношениями.

Так, для электрического $\vec{\Pi}^e$ потенциала Герца имеем следующие уравнения.

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\Pi}^e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \\ \begin{cases} \vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi}^e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2}, \\ \vec{B} = \frac{1}{c^2} \text{rot } \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь \vec{P} - вектор электрической поляризации излучающей системы.

Аналогично, для магнитного $\vec{\Pi}^m$ потенциала Герца имеем следующие уравнения.

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\Pi}^m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{M} \\ \begin{cases} \vec{E} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t}, \\ \vec{B} = \text{rot rot } \vec{\Pi}^m \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь \vec{M} - вектор магнитной поляризации излучающей системы.

Оказывается, что волноводные моды ТМ поляризации могут быть описаны электрическим $\vec{\Pi}^e$ потенциалом Герца, а моды ТЕ поляризации могут быть описаны магнитным $\vec{\Pi}^m$ потенциалом Герца.

Анализ показывает, что для описания волноводных мод вполне достаточно рассмотреть векторные потенциалы Герца с одной продольной составляющей.

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^e &= (0, 0, \Pi_z^e), \quad \Pi_z^e = \Pi^e \\ \vec{\Pi}^m &= (0, 0, \Pi_z^m), \quad \Pi_z^m = \Pi^m \end{aligned} \quad (2.25)$$

Электрическое и магнитное поле рассматривается в виде монохроматической волны бегущей вдоль волновода (2.1). В таком же виде будем рассматривать векторные потенциалы Герца.

$$\begin{aligned} \Pi^e(\vec{r}, t) &= \Pi^e(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \\ \Pi^m(\vec{r}, t) &= \Pi^m(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Рассмотрим описание волноводной ТМ моды с помощью электрического потенциала Герца. Подставляя формулы (2.26), (2.25) в уравнения (2.23) и полагая

отсутствие источников излучения внутри волновода $\vec{P} = 0$, получаем систему уравнений для описания электромагнитного поля ТМ волноводной моды.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial y^2} + g^2 \Pi^e = 0, \\ E_x = i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}, \quad E_y = i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial y}, \quad E_z = g^2 \Pi^e, \\ B_x = -\frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial \Pi^e}{\partial y}, \quad B_y = \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}, \quad B_z = 0 \\ g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \end{cases} \quad (2.27)$$

Из уравнений (2.27) видно, что электрический потенциал Герца в системе единиц СИ имеет размерность Вольт - метр.

$$[\Pi^e] = B \cdot m$$

Анализ граничных условий (2.14) на металлической поверхности волновода и системы уравнений (2.27), показывает, что для выполнения условий $E_\tau = 0$, $B_n = 0$, необходимо потребовать выполнения следующего условия.

$$\Pi^e|_l = 0 \quad (2.28)$$

Первое уравнение в системе (2.27) является уравнением Гельмгольца для электрического потенциала Герца. Это уравнение решается в области D Рис.2.2 с граничным условием (2.28) в каждой точке границы l .

Рассмотрим картину электромагнитного поля в плоскости xu . В этой плоскости будем рассматривать двумерные векторы электрического и магнитного поля.

$$\vec{E}^{(2)} = (E_x, E_y), \quad \vec{B}^{(2)} = (B_x, B_y) \quad (2.29)$$

Используя формулы (2.27) найдем скалярное произведение векторов электрического и магнитного поля.

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{B}^{(2)} &= E_x B_x + E_y B_y = \\ &= \frac{\omega \beta}{c^2} \left(\frac{\partial \Pi^e}{\partial x} \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} - \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Скалярное произведение (2.30) равно нулю. Это означает, что вектор электрического поля $\vec{E}^{(2)}$ перпендикулярен вектору магнитного поля $\vec{B}^{(2)}$. Поэтому

линии электрического поля и магнитного образуют семейство взаимно перпендикулярных линий.

Кроме того, из формул (2.27) видно, что вектор электрического поля $\vec{E}^{(2)}$ пропорционален градиенту электрического потенциала Герца Π^e .

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(2)} &= \left(i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}, i\beta \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} \right), \\ \vec{E}^{(2)} &= i\beta \text{grad } \Pi^e\end{aligned}\quad (2.31)$$

Отсюда приходим к выводу, что линиями магнитного поля $\vec{B}^{(2)}$ являются эквипотенциальные линии.

$$\Pi^e(x, y) = \text{const}$$

Линии электрического поля определяются градиентом к этим эквипотенциальным линиям. На Рис.2.4 показано семейство линий электрического и магнитного поля в поперечном сечении волновода.

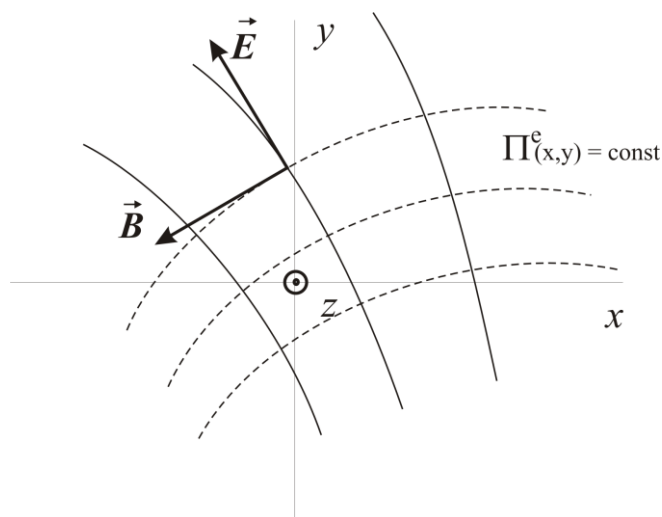


Рис.2.4

Семейства взаимно-перпендикулярных линий электрического и магнитного поля ТМ поляризации в сечении волновода.

На Рис.2.4 линии электрического поля обозначаются сплошными линиями, а линии магнитного поля обозначаются пунктирными линиями.

Рассмотрим описание волноводной ТЕ моды с помощью магнитного потенциала Герца. Подставляя формулы (2.26), (2.25) в уравнения (2.24) и полагая

отсутствие источников излучения внутри волновода $\vec{M} = 0$, получаем систему уравнений для описания электромагнитного поля ТЕ волноводной моды.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial y^2} + g^2 \Pi^m = 0, \\ E_x = i\omega \frac{\partial \Pi^m}{\partial y}, \quad E_y = -i\omega \frac{\partial \Pi^m}{\partial x}, \quad E_z = 0, \\ B_x = i\beta \frac{\partial \Pi^m}{\partial x}, \quad B_y = i\beta \frac{\partial \Pi^m}{\partial y}, \quad B_z = g^2 \Pi^m \\ g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \end{cases} \quad (2.32)$$

Из уравнений (2.32) видно, что магнитный потенциал Герца в системе единиц СИ имеет размерность Тесла – метр в квадрате.

$$[\Pi^m] = Tл \cdot м^2$$

Анализ граничных условий (2.14) на металлической поверхности волновода и системы уравнений (2.32), показывает, что для выполнения условий $E_\tau = 0$, $B_n = 0$, необходимо потребовать выполнения следующего условия.

$$\left. \frac{\partial \Pi^m}{\partial n} \right|_l = 0 \quad (2.33)$$

Первое уравнение в системе (2.32) является уравнением Гельмгольца для магнитного потенциала Герца. Это уравнение решается в области D Рис.2.2 с граничным условием (2.33) в каждой точке границы l .

Используя формулы (2.32) найдем скалярное произведение векторов электрического и магнитного поля в плоскости xy .

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{B}^{(2)} &= E_x B_x + E_y B_y = \\ &= -\omega \beta \left(\frac{\partial \Pi^m}{\partial y} \frac{\partial \Pi^m}{\partial x} - \frac{\partial \Pi^m}{\partial x} \frac{\partial \Pi^m}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Скалярное произведение (2.34) равно нулю. Это означает, что вектор электрического поля $\vec{E}^{(2)}$ перпендикулярен вектору магнитного поля $\vec{B}^{(2)}$. Поэтому линии электрического поля и магнитного образуют семейство взаимно перпендикулярных линий.

Кроме того, из формул (2.32) видно, что вектор магнитного поля $\vec{B}^{(2)}$ пропорционален градиенту магнитного потенциала Герца Π^m .

$$\vec{B}^{(2)} = \left(i\beta \frac{\partial \Pi^m}{\partial x}, i\beta \frac{\partial \Pi^m}{\partial y} \right), \quad (2.35)$$

$$\vec{B}^{(2)} = i\beta \text{grad } \Pi^m$$

Отсюда приходим к выводу, что линиями электрического поля $\vec{E}^{(2)}$ являются эквипотенциальные линии.

$$\Pi^m(x, y) = \text{const} \quad (2.36)$$

Линии магнитного поля определяются градиентом к этим эквипотенциальным линиям. На Рис.2.5 показано семейство линий электрического и магнитного поля в поперечном сечении волновода.

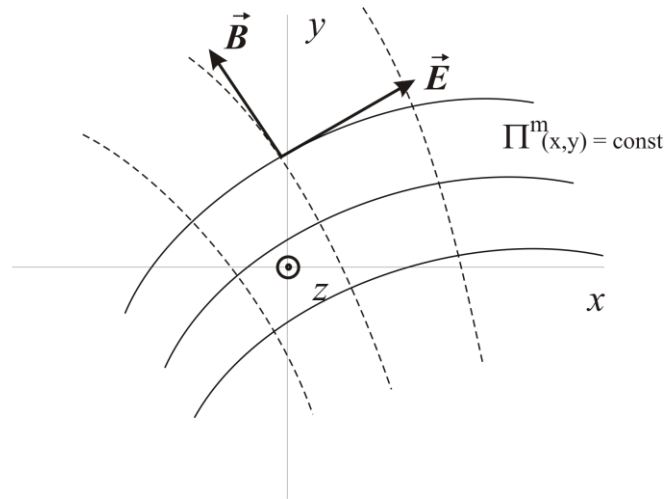


Рис.2.5

Семейства взаимно-перпендикулярных линий электрического и магнитного поля ТЕ поляризации в сечении волновода.

Вектор Пойнтинга волноводной моды.

Вектор Пойнтинга – это вектор плотности потока энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга определяется следующей формулой.

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0} \vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{B}} \quad (2.37)$$

В формуле (2.37) $\tilde{\vec{E}}$ и $\tilde{\vec{B}}$ – это действительные векторные поля. Надо заметить, что во многих физических соотношениях электромагнитные поля можно применять в комплексном виде. Однако если речь идет об энергетических соотношениях, то здесь нужно использовать поля только в действительном виде. Поэтому если рассматриваются поля в комплексном виде, то прежде чем подставить их в формулу (2.37) необходимо эти поля представить в действительном виде.

Волноводные моды в формуле (2.1) представлены в комплексном виде. Представим эти поля в действительном виде.

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\vec{E}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} + \vec{E}^*(x, y) e^{-i(\beta z - \omega t)} \right) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\vec{B}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} + \vec{B}^*(x, y) e^{-i(\beta z - \omega t)} \right) \end{cases} \quad (2.38)$$

Подставляем поля (2.38) в формулу для вектора Пойнтинга (2.37). Получаем следующее соотношение.

$$\begin{aligned} \vec{S}_P = \frac{1}{4\mu_0} & \left(\vec{E}(x, y) \times \vec{B}(x, y) e^{i2\beta z} e^{-i2\omega t} + \right. \\ & + \vec{E}(x, y) \times \vec{B}^*(x, y) + \vec{E}^*(x, y) \times \vec{B}(x, y) + \\ & \left. + \vec{E}^*(x, y) \times \vec{B}^*(x, y) e^{-i2\beta z} e^{i2\omega t} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

В формуле (2.39) есть члены, которые от времени не зависят, а есть члены, которые меняются по закону синуса или косинуса с частотой 2ω . Если частота колебаний достаточно высокая, то обычные приборы типа вольтметра, амперметра эти колебания не отслеживают, а измеряют усредненные характеристики. Поэтому обычно энергетические характеристики электромагнитного поля усредняют по времени за один период колебания.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.40)$$

Процедура усреднения некоторой функции времени $f(t)$ за период колебания T состоит в вычислении следующего интеграла.

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.41)$$

Если функция f не зависит от времени, то усредненное значение совпадает с самой функцией.

$$\langle f \rangle = f \quad (2.42)$$

Рассмотрим усреднение комплексной экспоненты в формуле (2.39).

$$\begin{aligned} \langle e^{i2\omega t} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i2\omega t} dt = \frac{1}{i2\omega T} e^{i2\omega t} \Big|_0^T = \\ &= \frac{1}{i2\omega T} (e^{i2\omega T} - 1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Используем в соотношении (2.43) формулу Эйлера. В результате получаем значение экспоненты.

$$e^{i2\omega T} = e^{i4\pi} = \cos 4\pi + i \sin 4\pi = 1 \quad (2.44)$$

Подставляем (2.44) в формулу (2.43) и находим, что среднее значение комплексной экспоненты равно нулю.

$$\langle e^{i2\omega t} \rangle = 0 \quad (2.45)$$

Взяв комплексное сопряжение от обеих частей уравнения (2.45) получаем аналогичное соотношение для среднего значения комплексно сопряженной экспоненты.

$$\langle e^{-i2\omega t} \rangle = 0 \quad (2.46)$$

Теперь производим усреднение вектора Пойнтинга в формуле (2.39). В результате получаем формулу для среднего значения вектора Пойнтинга.

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \frac{1}{4\mu_0} (\vec{E}(x, y) \times \vec{B}^*(x, y) + \vec{E}^*(x, y) \times \vec{B}(x, y)) \quad (2.47)$$

Выразим усредненный вектор Пойнтинга через потенциалы Герца. Используем формулу (2.47). Поставим в нее электрическое и магнитное поле ТМ моды из формул (2.27), и в результате получим вектор Пойнтинга ТМ волноводных мод.

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \vec{e}_z \frac{\beta \omega \varepsilon_0}{2} \left(\left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} \right|^2 \right) \quad (2.48)$$

Аналогично с помощью формул (2.32) и (2.47) получаем вектор Пойнтинга для ТЕ волноводных мод.

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \vec{e}_z \frac{\beta \omega}{2\mu_0} \left(\left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial y} \right|^2 \right) \quad (2.49)$$

В формулах (2.48), (2.49) \vec{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z .

Поэтому вектор Пойнтинга направлен вдоль оси волновода, а это означает, что электромагнитная энергия переносится вдоль волновода.

При выводе формул (2.48), (2.49) учтена связь между электрической постоянной ϵ_0 , магнитной постоянной μ_0 и скоростью света в вакууме c .

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (2.50)$$

Эти физические величины имеют следующие значения: $c = 2.997925 \cdot 10^8$ м/с, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м (Генри на метр), $\epsilon_0 = 8.854185 \cdot 10^{-12}$ Ф/м (Фарада на метр).

Физический смысл вектора Пойнтинга – это плотность потока энергии, или, другими словами, энергия переносимая электромагнитной волной через единицу площади в единицу времени. Поэтому размерность вектора Пойнтинга будет следующей.

$$[S_P] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{с}}$$

Поток энергии P в волноводе можно найти, интегрируя вектор Пойнтинга по поперечному сечению волновода S .

$$P = \int_S \langle \vec{S}_P \rangle \cdot d\vec{S} = \int_S \langle S_{Pz} \rangle dx dy \quad (2.51)$$

Поток энергии, переносимый волноводной модой имеет размерность мощности.

$$P = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}$$

Физическую величину P в литературе, поэтому называют по-разному. Например, поток энергии переносимый электромагнитной волной ЭМВ, мощность переносимая ЭМВ, мощность электромагнитного излучения.

Металлический волновод прямоугольного сечения, ТМ моды.

Рассмотрим металлический волновод прямоугольного сечения Рис.2.6. Систему координат выберем, так как показано на Рис.2.6.

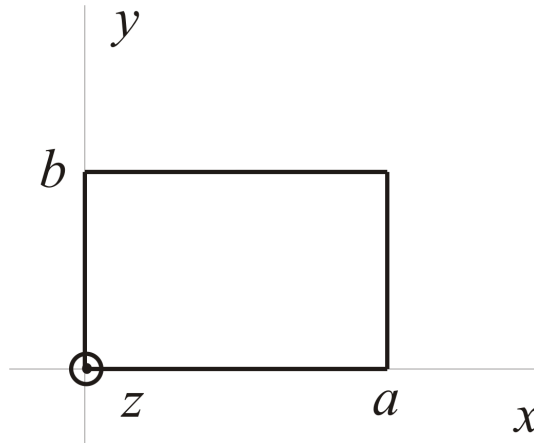


Рис.6

Поперечное сечение металлического волновода.

Рассмотрим сначала ТМ волноводные моды. Такую моду также называют Е – волной. Запишем уравнение Гельмгольца из системы уравнений (2.27) и граничные условия (2.28) для рассматриваемой конфигурации.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial y^2} + g^2 \Pi^e = 0, & g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \\ \Pi^e(0, y) = 0, \quad \Pi^e(a, y) = 0, \quad \Pi^e(x, 0) = 0, \quad \Pi^e(x, b) = 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

Уравнение (2.52) решается методом разделения переменных, и результат имеет следующий вид.

$$\begin{cases} \Pi_{nm}^e(x, y) = A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ g_{nm}^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.53)$$

Из уравнений (2.53) видно, что размерность амплитуды A_1 моды совпадает с размерностью электрического потенциала Герца, и в системе единиц СИ имеет размерность Вольт - метр.

$$[A_1] = B \cdot m$$

Из уравнений (2.52) и (2.53) находим дисперсионное соотношение для моды E_{nm} .

$$\beta = \beta_{nm}(\omega)$$

$$\beta_{nm}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - g_{nm}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} - \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

Волноводная мода ТМ поляризации для прямоугольного волновода обозначается буквой E с двумя индексами E_{nm} . Из формулы (2.54) видно, что для заданной частоты ω могут существовать несколько ТМ мод с разными индексами, например E_{11}, E_{12}, E_{22} .

Если рассматривать заданную моду E_{nm} , то постоянная распространения β будет изменяться с изменением частоты ω по закону, определяемой формулой (2.54). Из формул (2.54) видно, что при некоторых частотах ω подкоренное выражение становится отрицательным и данная волноводная мода E_{nm} на этой частоте распространяться по волноводу не может. Поэтому для каждой моды E_{nm} существует граничная частота, ниже которой данная мода существовать не может. Такие частоты называют частотой отсечки. Частоты отсечки можно найти, если приравнять подкоренное выражение (2.54) нулю. В результате получим для частот отсечки следующее выражение.

$$\omega_{nm} = c \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.55)$$

Перейдем к обычным частотам $f = \omega / 2\pi$ и запишем дисперсионные соотношения (2.54) в следующем виде.

$$\beta = \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_{nm}^2}$$

$$f_{nm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

Используя формулы (2.56) были построены дисперсионные соотношения Рис.2.7 для нескольких ТМ мод.

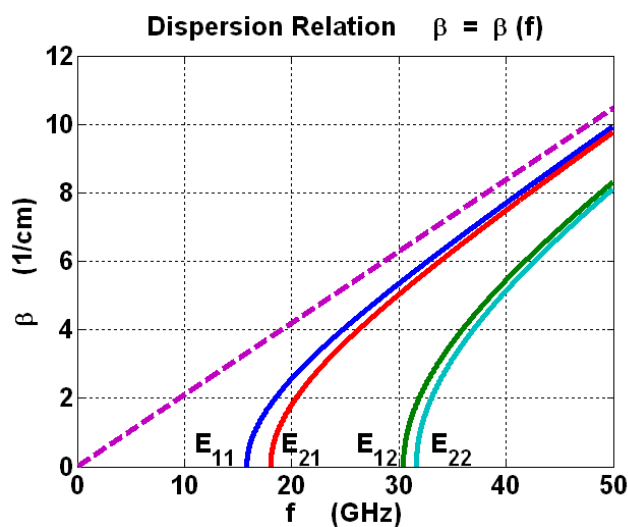


Рис.2.7

Дисперсионные кривые для волноводных мод ТМ поляризации.

На Рис.2.7 показаны дисперсионные кривые для следующих ТМ мод - E_{11} , E_{12} , E_{21} , E_{22} . Выбраны следующие размеры волновода $a = 3$ см, $b = 1$ см.

Для создания дисперсионных кривых была создана программа `TM_r.m` в пакете MATLAB. Ниже приводится код этой программы.

```
%волна E - типа (ТМ - волна)
%рисование дисперсионных кривых
%в прямоугольном волноводе

clc
clear

%размеры волновода
a = 3; % (cm)
b = 1; % (cm)
fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигагерц
c = 3.e+10; %скорость света (cm/s)

%индексы волноводной моды
n=1; m=1;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_11
f1=f_nm:0.01:fm;
bet1 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f1.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
```

```

n=1; m=2;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_12
f2=f_nm:0.01:fm;
bet2 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f2.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=2; m=1;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_21
f3=f_nm:0.01:fm;
bet3 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f3.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=2; m=2;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_22
f4=f_nm:0.01:fm;
bet4 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f4.^2 - f_nm^2);

%находим асимптотику bet = 2*pi/c*f
f0=0:0.01:fm;
bet0 = 2*pi/c*eGHz*f0;

hPl=plot(f1,bet1,f2,bet2,f3,bet3,f4,bet4,f0,bet0,'--');
set(hPl,'LineWidth',4);
grid on
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат (графический
объект axis)
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('f (GHz)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\beta (1/cm)')

text(11.0, 0.5,'E_{11}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(26.0, 0.5,'E_{12}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(19.0, 0.5,'E_{21}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(33.0, 0.5,'E_{22}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')

```

```
title('Dispersion Relation \beta = \beta (f)')
```

Используя найденный электрический потенциал Герца Π_{nm}^e для моды E_{nm} (2.53) можно построить картину линий электрического и магнитного поля в плоскости $xу$. Напомним, что линии магнитного поля Рис.2.4 совпадают с эквипотенциальными линиями.

$$\Pi_{nm}^e(x, y) = \text{const} \quad (2.57)$$

А линии электрического поля совпадают с линиями градиента потенциала Герца. Линии векторного поля и линии градиентов, позволяет рисовать пакет MATLAB. Поэтому для визуализации линий электрического и магнитного поля для моды E_{nm} была создана программа E_type.

Приведем код программы E_type.

```
%волна E - типа (ТМ - волна)
%рисование линий электрического и магнитного полей
%в прямоугольном волноводе

clc
clear

%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T

a = 3;
b = 1;

%задаем сетку в области [0 a 0 b]
%для рисования линий уровня
dx = a/300;
dy = b/100;
[x,y] = meshgrid(0:dx:a, 0:dy:b);

%выбираем моду E_nm
n = 1;
m = 1;
%Электрический потенциал Герца
z = sin(pi*n*x/a).*sin(pi*m*y/b)*sin(-2*pi*t0);

%рисует эквипотенциальные линии (линии магнитного поля)
[C,hc] = contour(x,y,z);
set(hc, 'LineWidth', 3, 'Color', [0.3 0.3 0.8]);
axis([0 a 0 b]);

%задаем сетку в области [0 a 0 b]
%для рисования линий градиента
```

```

dx = a/60;
dy = b/20;
[x,y] = meshgrid(0:dx:a, 0:dy:b);

z = sin(pi*n*x/a).*sin(pi*m*y/b)*sin(-2*pi*t0);    %Электрический
потенциал Герца

%находим минус градиент поля z(x,y)
[px,py] = gradient(-z);

hold on;
%рисует векторы градиента (электрическое поле)
h = quiver(x,y,px,py,1.5);
set(h,'LineWidth',2,'Color',[0.8 0.3 0.3]);

%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат (графический
объект axis)
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
set(hAxes,'xtick',[0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0]);
set(hAxes,'ytick',[0.0 0.5 1.0]);
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('x      (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('y      (cm)')

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['Lines of E and B fields.  TM - mode, E_',strn,'_',strm];
title(string)

```

Рассмотрим следующие строчки кода.

```

%рисует эквипотенциальные линии (линии магнитного поля)
[C,hc] = contour(x,y,z);
set(hc,'LineWidth',3,'Color',[0.3 0.3 0.8]);
axis([0 a 0 b]);

```

Здесь появляется новая графическая функция `contour()` пакета MATLAB (Contour plot of matrix), которая позволяет рисовать линии уровня поверхности, заданной формулой.

$$z = f(x, y)$$

Системная функция `set()` с помощью дескриптора `hc` функции `contour()`, устанавливает толщину линий в 3 пункту, и цвет линий делает синим. Функция `contour()` возвращает, кроме своего дескриптора `hc`, матрицу `C` линий уровня (contour matrix), которую можно использовать, для расстановки меток на уровнях линиях.

Функция `contour()` работает с матрицами нужной размерности, поэтому в коде программы используется функция `meshgrid()` для превращения векторов в соответствующие матрицы. Результат работы программы показан на Рис.2.8.

На Рис.8 показана картина линий электрического и магнитного поля для моды E_{11} .

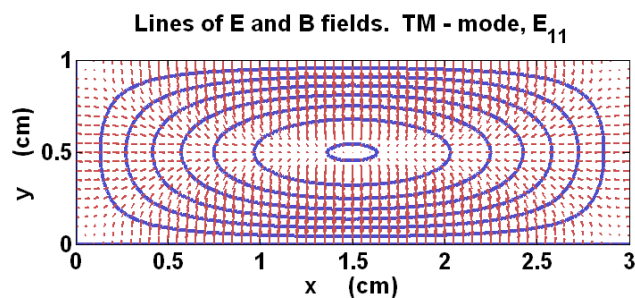


Рис.2.8

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды E_{11} .

На Рис.2.8 показано сечение волновода со следующими размерами $a = 3, b = 1$.

Сплошные линии здесь линии магнитного поля, стрелки показывают направление электрического поля.

На Рис.2.9, Рис.2.10, Рис.2.11 показана картина линий электрического и магнитного поля для мод E_{12}, E_{21}, E_{22} соответственно, созданные с помощью программы `E_type`.

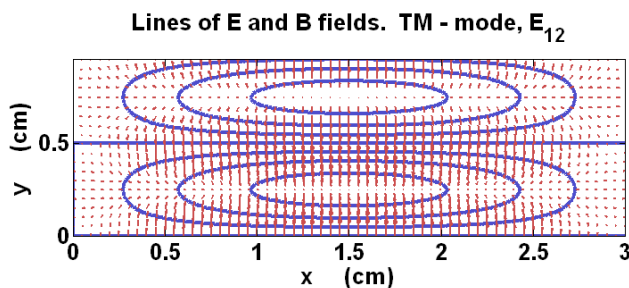


Рис.2.9

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды E_{12} .

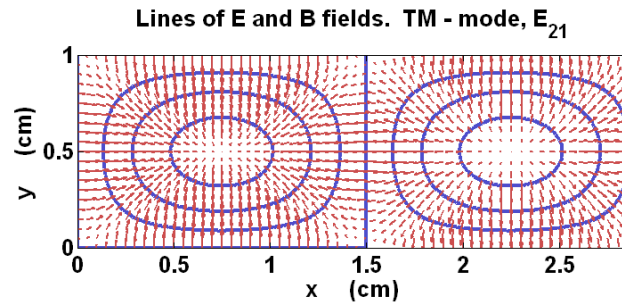


Рис.2.10

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды E_{21} .

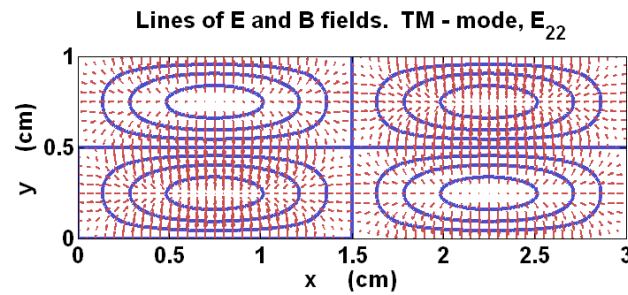


Рис.2.11

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды E_{22} .

Найдем мощность, переносимую ТМ модой. Берем формулу (2.51) для вычисления мощности, формулу (2.48) для среднего значения вектора Пойнтинга, и формулу (2.53) для электрического потенциала Герца. После интегрирования получаем следующую формулу.

$$P = \frac{\beta_{nm} \omega \varepsilon_0}{2} A_1^2 \left(\left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right) \frac{ab}{4} \quad (2.58)$$

В формуле (2.53) для определенности амплитуда A_1 считается действительной величиной. Зная размеры волновода a, b , частоту излучения ω и мощность P , переносимую модой E_{nm} , по формуле (2.58) можно найти амплитуду моды A_1 .

Затем по формулам (2.27) найдем электрическое и магнитное поле моды.

$$\begin{cases} E_x(x, y) = i \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_1 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ E_y(x, y) = i \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ E_z(x, y) = g_{nm}^2 A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\begin{cases} B_x(x, y) = -\frac{i \omega \pi m}{c^2 b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ B_y(x, y) = \frac{i \omega \pi n}{c^2 a} A_1 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ B_z(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Если умножить векторы электрического $\vec{E}(x, y)$ и магнитного $\vec{B}(x, y)$ поля, заданные формулами (2.59), (2.60) на волновой множитель $e^{i(\beta z - \omega t)}$, то получится волноводная мода (2.1) в комплексном виде. Запишем эти поля в действительном виде.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(x, y, z, t) = -\beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_1 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{E}_y(x, y, z, t) = -\beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{E}_z(x, y, z, t) = g_{nm}^2 A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \cos(\beta z - \omega t), \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(x, y, z, t) = \frac{\omega \pi m}{c^2 b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{B}_y(x, y, z, t) = -\frac{\omega \pi n}{c^2 a} A_1 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{B}_z(x, y, z, t) = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Далее у действительных полей значок тильда не будем ставить. Рассмотрим поле в сечении с координатой $z=0$, в момент времени равный одной восьмой периода $t=T/8$. В этом случае из формул (2.61), (2.62) получим следующие поля.

$$\begin{cases} E_x(x, y, 0, T/8) = \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_1 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_y(x, y, 0, T/8) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_z(x, y, 0, T/8) = g_{nm}^2 A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad (2.63)$$

$$\begin{cases} B_x(x, y, 0, T/8) = -\frac{\omega}{c^2} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_y(x, y, 0, T/8) = \frac{\omega}{c^2} \frac{\pi n}{a} A_1 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_z(x, y, 0, T/8) = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

Поле на нижней границе $0 \leq x \leq a$, $y = 0$ прямоугольного контура Рис.2.6 имеет следующий вид.

$$\begin{cases} E_x(x, 0) = 0, \\ E_y(x, 0) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_z(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\begin{cases} B_x(x, 0) = -\frac{\omega}{c^2} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_y(x, 0) = 0, \\ B_z(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

В формулах (2.65), (2.66) для простоты не указана координата $z = 0$ и время $t = T/8$.

Граничные условия (2.14) для контура волновода Рис.2.2, применим для нижнего участка контура $0 \leq x \leq a$, $y = 0$.

$$\begin{cases} E_x = -E_\tau = 0, & E_y = E_n = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s, & E_z = 0, \\ B_x = -B_\tau = -\mu_0 j_{sz}, & B_y = B_n = 0, & B_z = \mu_0 j_{sx} = 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Таким образом, на нижнем участке контура $0 \leq x \leq a$, $y = 0$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(x) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(x) = \frac{\omega}{c^2} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.68)$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(x) = \varepsilon_0 E_n(x), \\ j_{sz}(x) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(x) \end{cases} \quad (2.69)$$

Рассмотрим еще граничные условия на правом участке $x = a, 0 \leq y \leq b$ контура волновода Рис.2.6. Из общих формул (2.63), (2.64) находим поля на этом участке.

$$\begin{cases} E_x(a, y) = \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_1 (-1)^n \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_y(a, y) = 0, \\ E_z(a, y) = 0, \end{cases} \quad (2.70)$$

$$\begin{cases} B_x(a, y) = 0, \\ B_y(a, y) = \frac{\omega}{c^2} \frac{\pi n}{a} A_1 (-1)^n \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_z(a, y) = 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

Граничные условия (2.14) для контура волновода Рис.2.2, применим для правого участка контура $x = a, 0 \leq y \leq b$.

$$\begin{cases} E_x = -E_n = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s, & E_y = -E_\tau = 0, & E_z = 0, \\ B_x = -B_n = 0, & B_y = -B_\tau = -\mu_0 j_{sz}, & B_z = \mu_0 j_{sy} = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

Таким образом, на правом участке контура $x = a, 0 \leq y \leq b$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(y) = \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_1 (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(y) = \frac{\omega}{c^2} \frac{\pi n}{a} A_1 (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.73)$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(y) = \varepsilon_0 E_n(y), \\ j_{sz}(y) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(y) \end{cases} \quad (2.74)$$

Аналогично другим участкам контура волновода, на верхнем участке контура $0 \leq x \leq a, y = b$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(x) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(x) = \frac{\omega}{c^2} \frac{\pi m}{b} A_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.75)$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(x) = \varepsilon_0 E_n(x), \\ j_{sz}(x) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(x) \end{cases} \quad (2.76)$$

Аналогично на четвертом левом участке контура $x = 0, 0 \leq y \leq b$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(y) = \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_1 \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(y) = \frac{\omega}{c^2} \frac{\pi n}{a} A_1 \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.77)$$

Аналогично, на этом участке имеем следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(y) = \varepsilon_0 E_n(y), \\ j_{sz}(y) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(y) \end{cases} \quad (2.78)$$

Пример вычисления ТМ моды.

Рассмотрим металлический волновод прямоугольного сечения. Возьмем следующие размеры волновода $a = 3 \text{ см}$, $b = 1 \text{ см}$. Будем рассматривать E_{31} волновую моду.

С помощью формулы (2.56) находим частоту отсечки f_c (cutoff frequency) для данной моды.

$$f_c = 21.21 \text{ ГГц}$$

С помощью формулы (2.56) и программы `TM_r.m` получаем дисперсионную кривую для моды E_{31} Рис.2.12.

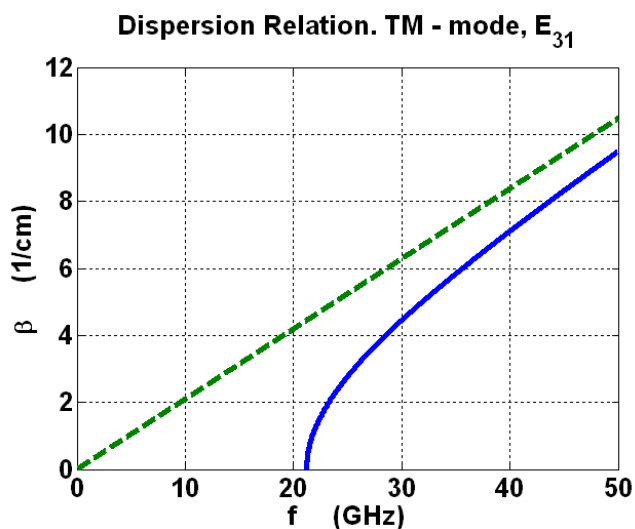


Рис.2.12

Дисперсионная кривая для волноводной моды E_{31} .

Картину линий электрического и магнитного поля построим с помощью программы `E_type.m` Рис.2.13.

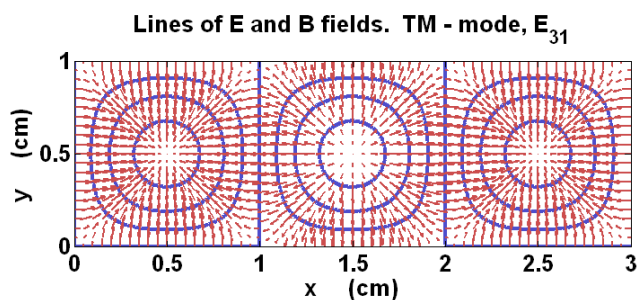


Рис.2.13

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для
волноводной моды E_{31} .

Выберем частоту f в 1.5 раз большую частоты отсечки.

$$f = 1.5 f_c = 31.82 \text{ ГГц}$$

Сделаем замечание по поводу размерностей физических величин в физике волноводов.

Хотя везде используется система единиц СИ, и в этой системе длины должны измеряться в метрах, однако конечные выражения удобно записывать в сантиметрах. Это связано с тем, что в СВЧ технике характерные размеры волноводов – сантиметры.

По формуле (2.56) находим волновое число моды E_{31} на частоте f .

$$\beta = 4.97 \text{ см}^{-1}$$

По формуле (2.2) и (2.4) находим длину волны излучения и фазовую скорость.

$$\lambda = 1.27 \text{ см}, \quad v_p = 4.03 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Фазовая скорость моды оказалась больше скорости света. Однако групповая скорость, найденная по формуле (2.4) оказывается меньше скорости света.

$$v_g = 2.24 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Возьмем мощность, переносимую модой, равную $P = 100 \text{ Вт}$. По формуле (2.58) находим амплитуду моды.

$$A_1 = 12.40 \text{ В} \cdot \text{см}$$

По формулам (2.68), (2.73), (2.75), (2.77) найдем наибольшее значение электрического и магнитного поля на контуре волновода.

$$E_{\max} = 136.77 \text{ В/см}, \quad B_{\max} = 6.12 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}, \quad H_{\max} = 0.487 \text{ А/см}$$

Здесь учтена связь магнитной индукции и напряженности магнитного поля в вакууме $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

По формулам (2.69), (2.74), (2.76), (2.78) найдем наибольшее значение поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока на контуре волновода.

$$\rho_{s \max} = 0.012 \text{ нКл/см}^2, \quad j_{s \max} = 0.487 \text{ А/см}$$

Нарисуем изменение электрического и магнитного поля вдоль контура волновода. Будем двигаться вдоль контура из точки (0,0) против часовой стрелки. Координатой на контуре является переменная s , связанная с координатами x, y следующими соотношениями.

$$\begin{cases} s = x, & 0 \leq s \leq a, \\ s = y + a, & a \leq s \leq a + b, \\ s = -x + 2a + b, & a + b \leq s \leq 2a + b, \\ s = -y + 2a + 2b, & 2a + b \leq s \leq 2a + 2b \end{cases} \quad (2.79)$$

Используя формулы (2.68), (2.73), (2.75), (2.77) и соотношение (2.79) получаем следующую картину распределения электрического и магнитного поля вдоль контура волновода Рис.2.14.

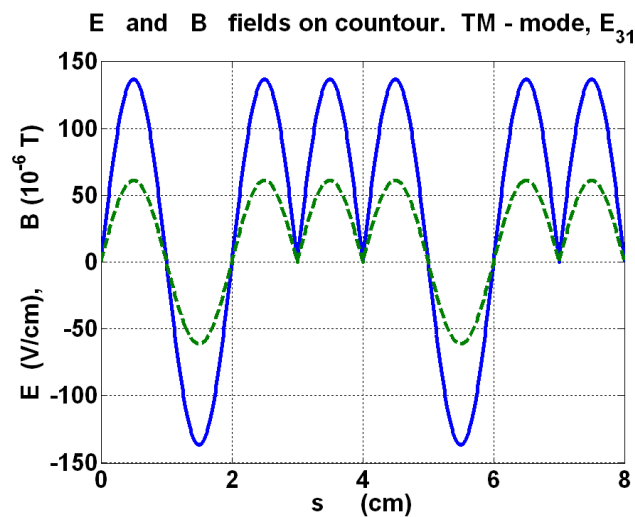


Рис.2.14

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода для волноводной моды E_{31} .

Используя формулы (2.69), (2.74), (2.76), (2.78) и соотношение (2.79) получаем следующую картину распределения поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока вдоль контура волновода Рис.2.15.

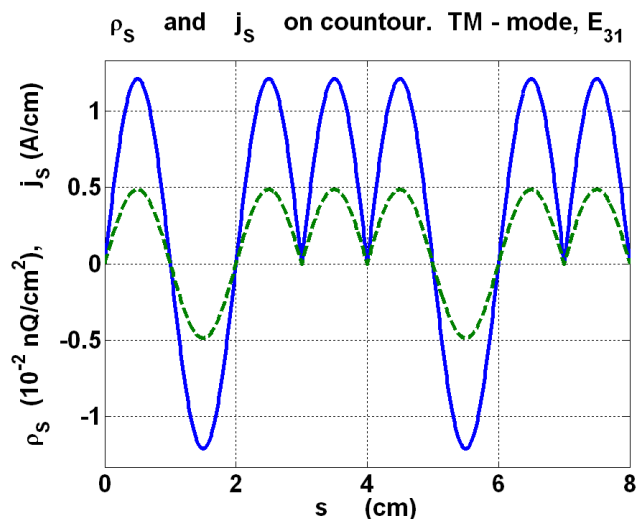


Рис.2.15

Распределение поверхностного заряда и поверхностного тока вдоль контура сечения волновода для волноводной моды E_{31} .

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода, а также распределение плотности поверхностного заряда, и поверхностного тока вычисляется в программе `Contour_TM_r.m`. Там же в этой программе рисуются эти распределения. Приведем код этой программы `Contour_TM_r.m`

```
%волна E - типа (TM - волна)
%волновод прямоугольного сечения

% распределение электрического и магнитного поля
% по контуру волновода

% распределение поверхностного заряда и поверхностного тока
% по контуру волновода

clc
clear

format short g

%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T

%мощность, переносимая модой
P = 800; % (Вт)
```

```

%размеры волновода
a = 3; % (см)
b = 2; % (см)

fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигагерц
c = 3.e+8; %скорость света (см/м)
eps0 = 8.8542e-12; %электрическая постоянная (Ф/м)
mu0 = 4*pi*1.e-7; %магнитная постоянная (Гн/м)

%индексы волноводной моды E_nm
n=3;
m=1;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)*100/eGHz; % (GHz)
fc = f_nm;
disp('fc=')
disp(fc)

%выбираем частоту f = 1.5*fc
f = 1.5*fc; % (GHz)
disp('f=')
disp(f)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_nm
%на частоте f
bet = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f.^2 - f_nm^2)/100; % (1/см)
disp('bet=')
disp(bet)

%находим длину волны моды E_nm
lamb = 2*pi/bet; % (см)
disp('lamb=')
disp(lamb)

%находим фазовую скорость волны
vp = 2*pi*f*eGHz/bet; % (см/с)
disp('vp=')
disp(vp)

%находим групповую скорость моды
vg = c*(c/vp)*10^4; % (см/с)
disp('vg=')
disp(vg)

%Амплитуда моды
kA = bet*2*pi*f*eGHz*eps0/100/2*((pi*n/a)^2 + (pi*m/b)^2)*a*b/4;
% (Ф/(см^2*с))
A1 = sqrt(P/kA); % (В*см)
disp('A1=')
disp(A1)

%находим наибольшее значение электрического и магнитного полей
%на контуре волновода

```

```

A1m = pi*m/b*A1/sqrt(2); % (В)
A1n = pi*n/a*A1/sqrt(2); % (В)

%нижняя часть контура
Ed = bet*A1m; % (В/см)
Bd = 2*pi*f*eGHz/c^2*A1m; % (Тл)
Hd = Bd/mu0/100; % (А/см)

%правая часть контура
Er = bet*A1n; % (В/см)
Br = 2*pi*f*eGHz/c^2*A1n; % (Тл)
Hr = Bd/mu0/100; % (А/см)

%верхняя часть контура
Et = bet*A1m; % (В/см)
Bt = 2*pi*f*eGHz/c^2*A1m; % (Тл)
Ht = Bd/mu0/100; % (А/см)

%левая часть контура
El = bet*A1n; % (В/см)
Bl = 2*pi*f*eGHz/c^2*A1n; % (Тл)
Hl = Bd/mu0/100; % (А/см)

Emax = max([Ed, Er, Et, El]);
Bmax = max([Bd, Br, Bt, Bl]);
Hmax = max([Hd, Hr, Ht, Hl]);

disp(' Emax, Bmax, Hmax')
disp([Emax Bmax Hmax])

%находим наибольшее значение поверхностной плотности электрического
заряда
%поверхностной плотности электрического тока
%на контуре волновода

%нижняя часть контура
roSd = Ed*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSd = Bd/mu0/100; % (А/см)

%правая часть контура
roSr = Er*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSr = Br/mu0/100; % (А/см)

%верхняя часть контура
roSt = Et*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSt = Bt/mu0/100; % (А/см)

%левая часть контура
roSl = El*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSl = Bl/mu0/100; % (А/см)

roSmax = max([roSd, roSr, roSt, roSl]);
jSmax = max([jSd, jSr, jSt, jSl]);

disp(' roSmax, jSmax')
```

```

disp([roSmax    jSmax])

%находим поля, заряды и токи по контуру волновода

%нижняя часть контта
s1 = 0:0.01:a;
x = s1;
E1 = Ed*sin(pi*n/a*x);           % (В/см)
B1 = Bd*sin(pi*n/a*x);           % (Тл)
roS1 = E1*100*eps0/10^4*10^9;    % (нКл/см^2)
jS1 = B1/mu0/100;                % (А/см)

%правая часть контура
s2 = a:0.01:a+b;
y = s2 - a;
E2 = Er*(-1)^(n+1)*sin(pi*m/b*y); % (В/см)
B2 = Br*(-1)^(n+1)*sin(pi*m/b*y); % (Тл)
roS2 = E2*100*eps0/10^4*10^9;    % (нКл/см^2)
jS2 = B2/mu0/100;                % (А/см)

%верхняя часть контура
s3 = a+b:0.01:2*a+b;
x = -s3 + 2*a + b;
E3 = Ed*(-1)^(m+1)*sin(pi*n/a*x); % (В/см)
B3 = Bd*(-1)^(m+1)*sin(pi*n/a*x); % (Тл)
roS3 = E3*100*eps0/10^4*10^9;    % (нКл/см^2)
jS3 = B3/mu0/100;                % (А/см)

%левая часть контура
s4 = 2*a+b:0.01:2*a+2*b;
y = -s4 + 2*a + 2*b;
E4 = Er*sin(pi*m/b*y);           % (В/см)
B4 = Br*sin(pi*m/b*y);           % (Тл)
roS4 = E4*100*eps0/10^4*10^9;    % (нКл/см^2)
jS4 = B4/mu0/100;                % (А/см)

s = cat(2,s1,s2,s3,s4);
E = cat(2,E1,E2,E3,E4);
B = cat(2,B1,B2,B3,B4);
roS = cat(2,roS1,roS2,roS3,roS4);
jS = cat(2,jS1,jS2,jS3,jS4);

B = B*10^6;
roS = roS*10^2;

Bmax = Bmax*10^6;
roSmax = roSmax*10^2;

EBmax = max(Emax,Bmax);
roSjSmax = max(roSmax,jSmax);

%рисует распределение поля по контуру волновода

figure(13)
hPl = plot(s,E,s,B,'--');

```

```

set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*a+2*b -1.1*EBmax 1.1*EBmax]);
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes

set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('s      (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('E      (V/cm),      B (10^{-6} T)')

grid on

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['E      and      B      fields on countour.  TM - mode,
E_',strn,'_',strm];
title(string)

%рисует распределение заряда и тока по контуру волновода

figure(14)
hPl = plot(s,roS,s,jS,'--');
set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*a+2*b -1.1*roSjSmax 1.1*roSjSmax]);
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('s      (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\rho_{S}      (10^{-2} nQ/cm^{2}),      j_{S} (A/cm)')

grid on
strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['\rho_{S}      and      j_{S}      on countour.  TM - mode,
E_',strn,'_',strm];
title(string)

format short

```

Таким образом, программа Contour_TM_r.m, по формулам (2.69), (2.68), (2.73) - (2.79) вычисляет и выводит в графическом виде распределения электрического и магнитного поля, поверхностной плотности заряда, и поверхностной плотности тока. Результат работы программы показан на Рис.2.14, Рис.2.15.

ТЕ волноводные моды.

Рассмотрим теперь ТЕ волноводные моды. Такие моды также называют Н – волнами. Запишем уравнение Гельмгольца из системы уравнений (2.32) и граничные условия (2.33) для рассматриваемой конфигурации.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial y^2} + g^2 \Pi^m = 0, & g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} \Pi^m(0, y) = 0, & \frac{\partial}{\partial x} \Pi^m(a, y) = 0, & \frac{\partial}{\partial y} \Pi^m(x, 0) = 0, & \frac{\partial}{\partial y} \Pi^m(x, b) = 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Уравнение (2.80) решается методом разделения переменных, и результат имеет следующий вид.

$$\begin{cases} \Pi_{nm}^m(x, y) = A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ g_{nm}^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, & n, m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.81)$$

Из уравнений (2.81) видно, что размерность амплитуды A_2 моды совпадает с размерностью магнитного потенциала Герца, и в системе единиц СИ имеет размерность Тесла – метр в квадрате.

$$[A_2] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2$$

Из уравнений (2.80) и (2.81) находим дисперсионное соотношение для моды H_{nm} .

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_{nm}(\omega) \\ \beta_{nm}(\omega) &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - g_{nm}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} - \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, & n, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.82)$$

По поводу формул (2.81), (2.82) сделаем следующее замечание. Индексы n и m начинаются с нуля. Однако одновременно равняться нулю они не могут. Иначе электрическое и магнитное поле такой моды будет равно нулю (2.32). Поэтому моды H_{00} не существует.

Далее заметим, что дисперсионные соотношения (2.82) для ТЕ мод и дисперсионные соотношения (2.54) для ТМ мод полностью совпадают для индексов

n, m не меньших единице. Поэтому и частоты отсечки будут определяться похожими формулами.

$$\omega_{nm} = c \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.83)$$

Перейдем к обычным частотам $f = \omega / 2\pi$ и запишем дисперсионные соотношения (2.82) для ТЕ мод в следующем виде.

$$\beta = \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_{nm}^2}$$

$$f_{nm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.84)$$

Используя формулы (2.84) были построены дисперсионные соотношения Рис.2.16 для некоторых ТЕ мод.

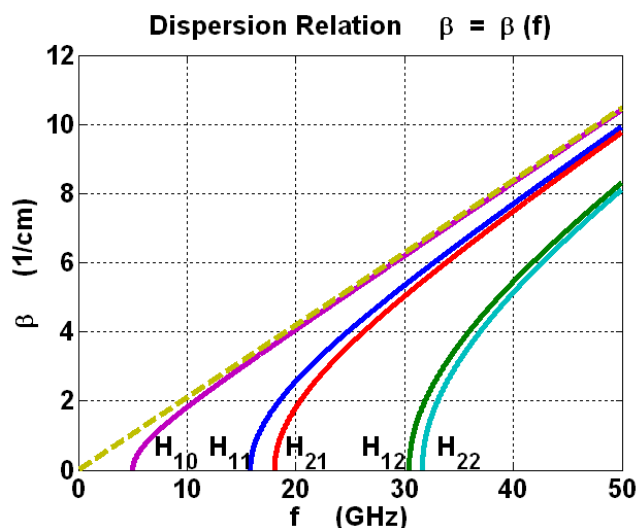


Рис.2.16

Дисперсионные кривые для волноводных мод ТЕ поляризации.

На Рис.2.16 показаны дисперсионные кривые для следующих ТЕ мод -

$H_{10}, H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$. Выбраны следующие размеры волновода $a = 3 \text{ см}, b = 1 \text{ см}$.

Для создания дисперсионных кривых была создана программа `TE_r.m` в пакете MATLAB. Ниже приводится код этой программы.

```
%волна H - типа (ТЕ - волна)
%рисование дисперсионных кривых
%в прямоугольном волноводе
```



```

clc
clear

%размеры волновода
a = 3; % (cm)
b = 1; % (cm)
fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигагерц
c = 3.e+10; %скорость света (cm/s)

%индексы волноводной моды
n=1; m=1;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды H_11
f1=f_nm:0.01:fm;
bet1 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f1.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=1; m=2;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды H_12
f2=f_nm:0.01:fm;
bet2 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f2.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=2; m=1;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды H_21
f3=f_nm:0.01:fm;
bet3 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f3.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=2; m=2;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды H_22
f4=f_nm:0.01:fm;
bet4 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f4.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=1; m=0;

```

```

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды H_10
f5=f_nm:0.01:fm;
bet5 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f5.^2 - f_nm^2);

%находим асимптотику bet = 2*pi/c*f
f0=0:0.01:fm;
bet0 = 2*pi/c*eGHz*f0;

hPl=plot(f1,bet1,f2,bet2,f3,bet3,f4,bet4,f5,bet5,f0,bet0,'--');
grid on

set(hPl,'LineWidth',4);
grid on
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
%set(hAxes,'xtick',[1.5 1.75 2.0 2.25 2.5])
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('f (GHz)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\beta (1/cm)')

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('f (GHz)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\beta (1/cm)')

text(7.0, 0.5,'H_{10}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(12.0, 0.5,'H_{11}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(26.0, 0.5,'H_{12}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(19.0, 0.5,'H_{21}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(33.0, 0.5,'H_{22}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
title('Dispersion Relation \beta = \beta(f)')

```

Сравнение Рис.2.16 с Рис.2.7 показывает, что дисперсионные кривые для пар мод $(E_{11}, H_{11}), (E_{12}, H_{12}), (E_{21}, H_{21}), (E_{22}, H_{22})$ совпадают, как это следует из формул (2.82), (2.84). Отличие этих рисунков в том, что на Рис.2.16 приведена дисперсионная зависимость H_{10} моды. Эта мода имеет самую маленькую частоту отсечки

$f_{10}^H = 5.0 \text{ GHz}$. Поэтому при увеличении частоты излучения в волноводе данной конфигурации первой возбудиться эта волноводная мода.

Используя найденный магнитный потенциал Герца Π_{nm}^m для моды H_{nm} можно построить картину линий электрического и магнитного поля в плоскости xy . Напомним, что линии электрического поля Рис.2.5 совпадают с эквипотенциальными линиями.

$$\Pi_{nm}^m(x, y) = \text{const}$$

Линии магнитного поля совпадают с линиями градиента потенциала Герца. Для визуализации линий электрического и магнитного поля для моды H_{nm} была создана программа H_type.

Приведем код программы H_type.

```
%волна H - типа (TE - волна)
%рисование линий электрического и магнитного полей
%в прямоугольном волноводе

clc
clear

%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T

a = 3;
b = 1;

%задаем сетку в области [0 a 0 b]
%для рисования линий уровня
dx = a/300;
dy = b/100;
[x,y] = meshgrid(0:dx:a, 0:dy:b);

%выбираем моду H_nm
n = 1;
m = 1;
%Магнитный потенциал Герца
z = cos(pi*n*x/a).*cos(pi*m*y/b)*sin(-2*pi*t0);

%рисует эквипотенциальные линии (линии магнитного поля)
[C,hc] = contour(x,y,z);
set(hc,'LineWidth',3,'Color',[0.8 0.3 0.3]);
axis([0 a 0 b]);

%задаем сетку в области [0 a 0 b]
%для рисования линий градиента
```

```

dx = a/60;
dy = b/20;
[x,y] = meshgrid(0:dx:a, 0:dy:b);
%Магнитный потенциал Герца
z = cos(pi*n*x/a).*cos(pi*m*y/b)*sin(-2*pi*t0);

%находим минус градиент поля z(x,y)
[px,py] = gradient(-z);

hold on;
%рисует векторы градиента (электрическое поле)
h = quiver(x,y,px,py,1.5);
set(h,'LineWidth',2,'Color',[0.3 0.3 0.8]);

%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
set(hAxes,'xtick',[0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0]);
set(hAxes,'ytick',[0.0 0.5 1.0]);
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('x (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('y (cm)')

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['Lines of E and B fields. TE - mode, H_',strn,'_',strm];
title(string)

```

Результат работы программы H_type показан на Рис.2.17. На Рис.2.17 показана картина линий электрического и магнитного поля для моды H_{11} .

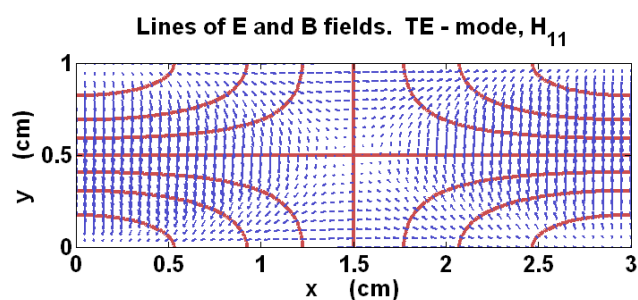


Рис.2.17

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{11} .

На Рис.2.17 показано сечение волновода со следующими размерами $a=3$, $b=1$. Сплошные линии здесь линии электрического поля, стрелки показывают направление магнитного поля.

Полезно сравнить этот рисунок для H_{11} моды с Рис.2.8 для E_{11} моды. Как видно на этих рисунках картина линий электрического и магнитного поля существенно изменилась.

На Рис.2.18, Рис.2.19, Рис.2.20 показана картина линий электрического и магнитного поля для мод H_{12} , H_{21} , H_{22} соответственно.

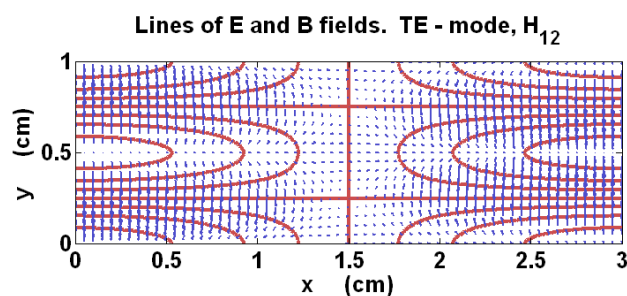


Рис.2.18

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{12} .

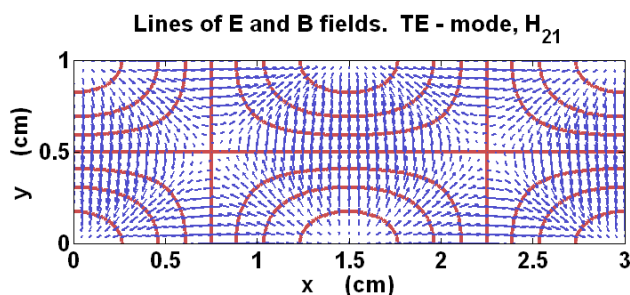


Рис.2.19

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{21} .

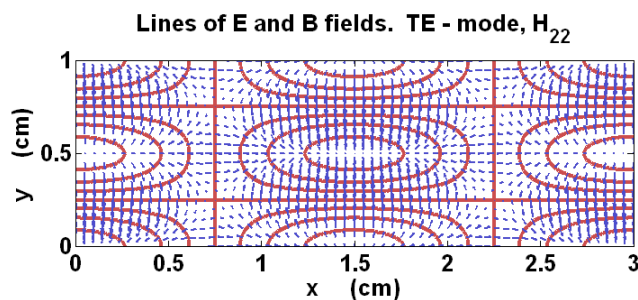


Рис.2.20

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{22} .

Полезно сравнить Рис.2.17, Рис.2.18, Рис.2.19, Рис.2.20 для H_{11} , H_{12} , H_{21} , H_{22} мод с Рис.2.8, Рис.2.9, Рис.2.10, Рис.2.11 для E_{11} , E_{12} , E_{21} , E_{22} мод. Как видно на этих рисунках картина линий электрического и магнитного поля меняется при переходе от одного типа волноводных мод к другому типу.

На Рис.2.21 показана картина линий электрического и магнитного поля для моды H_{10} , аналога которой, в E – волнах нет.

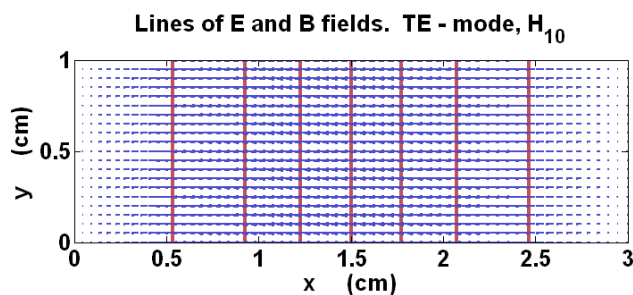


Рис.2.21

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{10} .

Найдем мощность, переносимую ТМ модой. Берем формулу (2.51) для вычисления мощности, формулу (2.49) для среднего значения вектора Пойнтинга, и формулу (2.81) для электрического потенциала Герца. После интегрирования получаем следующую формулу.

$$P = \frac{\beta_{nm} \omega}{2 \mu_0} A_2^2 \left(\left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right) \frac{ab}{4} \quad (2.85)$$

В формуле (2.81) для определенности амплитуда A_2 считается действительной величиной. Зная размеры волновода a, b , частоту излучения ω и мощность P , переносимую модой H_{nm} , по формуле (2.85) можно найти амплитуду моды A_2 .

Затем по формулам (2.32) найдем электрическое и магнитное поле моды.

$$\begin{cases} E_x(x, y) = -i \omega \frac{\pi m}{b} A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ E_y(x, y) = i \omega \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ E_z(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

$$\begin{cases} B_x(x, y) = -i \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ B_y(x, y) = -i \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \\ B_z(x, y) = g_{nm}^2 A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \end{cases} \quad (2.87)$$

Если умножить векторы электрического $\vec{E}(x, y)$ и магнитного $\vec{B}(x, y)$ поля, заданные формулами (2.86), (2.87) на волновой множитель $e^{i(\beta z - \omega t)}$, то получится волноводная мода (2.1) в комплексном виде. Запишем эти поля в действительном виде.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(x, y, z, t) = \omega \frac{\pi m}{b} A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{E}_y(x, y, z, t) = -\omega \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{E}_z(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \quad (2.88)$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(x, y, z, t) = \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{B}_y(x, y, z, t) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin(\beta z - \omega t), \\ \tilde{B}_z(x, y, z, t) = g_{nm}^2 A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \cos(\beta z - \omega t) \end{cases} \quad (2.89)$$

Далее у действительных полей значок тильда не будем ставить. Рассмотрим поле в сечении с координатой $z=0$, в момент времени равный одной восьмой периода $t=T/8$. В этом случае из формул (2.88), (2.89) получим следующие поля.

$$\begin{cases} E_x(x, y) = \omega \frac{\pi m}{b} A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_y(x, y) = -\omega \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_z(x, y) = 0, \end{cases} \quad (2.90)$$

$$\begin{cases} B_x(x, y) = \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_y(x, y) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_z(x, y) = g_{nm}^2 A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.91)$$

Находим поля на прямоугольном контуре волновода. Так на нижнем участке контура $0 \leq x \leq a, y=0$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(x) = -\omega \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(x) = -\beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ B_z(x) = g_{nm}^2 A_2 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.92)$$

Используя граничные условия (2.14) находим следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(x) = \varepsilon_0 E_n(x), \\ j_{sz}(x) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(x) \\ j_{s\tau}(x) = -\frac{1}{\mu_0} B_z(x) \end{cases} \quad (2.93)$$

На правом участке контура $0 \leq y \leq b$, $x = a$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(y) = \omega \frac{\pi m}{b} A_2 (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(y) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_2 (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi m}{b} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ B_z(y) = g_{nm}^2 A_2 (-1)^n \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.94)$$

Используя граничные условия (2.14) находим следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(y) = \varepsilon_0 E_n(y), \\ j_{sz}(y) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(y) \\ j_{s\tau}(y) = -\frac{1}{\mu_0} B_z(y) \end{cases} \quad (2.95)$$

На верхнем участке контура $0 \leq x \leq a$, $y = b$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(x) = \omega \frac{\pi n}{a} A_2 (-1)^m \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(x) = \beta_{nm} \frac{\pi n}{a} A_2 (-1)^m \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ B_z(x) = g_{nm}^2 A_2 (-1)^m \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.96)$$

Используя граничные условия (2.14) находим следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(x) = \varepsilon_0 E_n(x), \\ j_{sz}(x) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(x) \\ j_{s\tau}(x) = -\frac{1}{\mu_0} B_z(x) \end{cases} \quad (2.97)$$

На левом участке контура $0 \leq y \leq b$, $x = 0$ имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(y) = \omega \frac{\pi m}{b} A_2 \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_\tau(y) = \beta_{nm} \frac{\pi m}{b} A_2 \sin\left(\frac{\pi m}{b} x\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ B_z(y) = g_{nm}^2 A_2 \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2.98)$$

Используя граничные условия (2.14) находим следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(y) = \varepsilon_0 E_n(y), \\ j_{sz}(y) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(y) \\ j_{s\tau}(y) = -\frac{1}{\mu_0} B_z(y) \end{cases} \quad (2.99)$$

Пример вычисления ТЕ моды.

Рассмотрим металлический волновод прямоугольного сечения. Возьмем следующие размеры волновода $a = 3 \text{ см}$, $b = 1 \text{ см}$. Будем рассматривать H_{31} волновую моду.

С помощью формулы (2.84) находим частоту отсечки f_c (cutoff frequency) для данной моды.

$$f_c = 21.21 \text{ ГГц}$$

С помощью формулы (2.82) и программы TE_r.m получаем дисперсионную кривую для моды H_{31} .

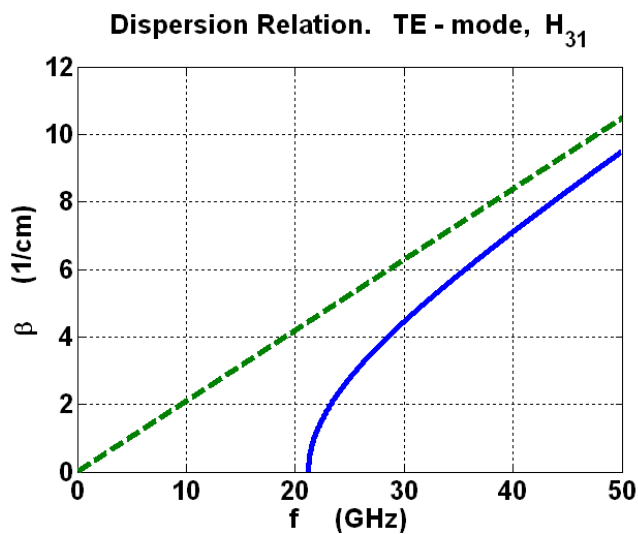


Рис.2.22

Дисперсионная кривая для волноводной моды H_{31} .

Картину линий электрического и магнитного поля построим с помощью программы H_type.m.

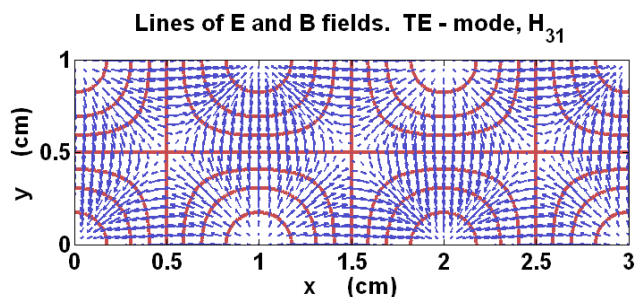


Рис.2.23

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{31} .

Выберем частоту f в 1.5 раз большую частоты отсечки.

$$f = 1.5 f_c = 31.82 \text{ ГГц}$$

По формуле (2.82) находим постоянную распространения моды H_{31} на частоте f .

$$\beta = 4.97 \text{ см}^{-1}$$

По формуле (2.2) и (2.4) находим длину волны излучения и фазовую скорость.

$$\lambda = 1.27 \text{ см}, \quad v_p = 4.03 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Фазовая скорость моды оказалась больше скорости света. Однако групповая скорость, найденная по формуле (2.4) оказывается меньше скорости света.

$$v_g = 2.24 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Возьмем мощность, переносимую модой, равную $P = 100 \text{ Вт}$. По формуле (2.85) находим амплитуду моды.

$$A_2 = 4.14 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{см}^2$$

По формулам (2.92), (2.94), (2.96), (2.98) найдем наибольшее значение электрического и магнитного поля на контуре волновода.

$$\begin{aligned} E_{\max} &= 183.63 \text{ В/см}, \\ B_{\tau \max} &= 4.56 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}, \quad H_{\tau \max} = 0.363 \text{ А/см} \\ B_{z \max} &= 5.78 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}, \quad H_{z \max} = 0.459 \text{ А/см} \end{aligned}$$

Здесь учтена связь магнитной индукции и напряженности магнитного поля в вакууме.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

По формулам (2.93), (2.94), (2.95), (2.96) найдем наибольшее значение поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока на контуре волновода.

$$\begin{aligned} \rho_{s \max} &= 0.016 \text{ нКл/см}^2, \\ j_{s z \max} &= 0.363 \text{ А/см} \\ j_{s \tau \max} &= 0.459 \text{ А/см} \end{aligned}$$

Нарисуем изменение электрического и магнитного поля вдоль контура волновода. Будем двигаться вдоль контура из точки (0,0) против часовой стрелки. Координатой на контуре является переменная s , связанная с координатами x , y следующими соотношениями.

$$\begin{cases} s = x, & 0 \leq s \leq a, \\ s = y + a, & a \leq s \leq a + b, \\ s = -x + 2a + b, & a + b \leq s \leq 2a + b, \\ s = -y + 2a + 2b, & 2a + b \leq s \leq 2a + 2b \end{cases} \quad (2.100)$$

Используя формулы (2.92), (2.94), (2.96), (2.98) и соотношение (2.100) получаем следующую картину распределения электрического и магнитного поля вдоль контура волновода Рис.2.24.

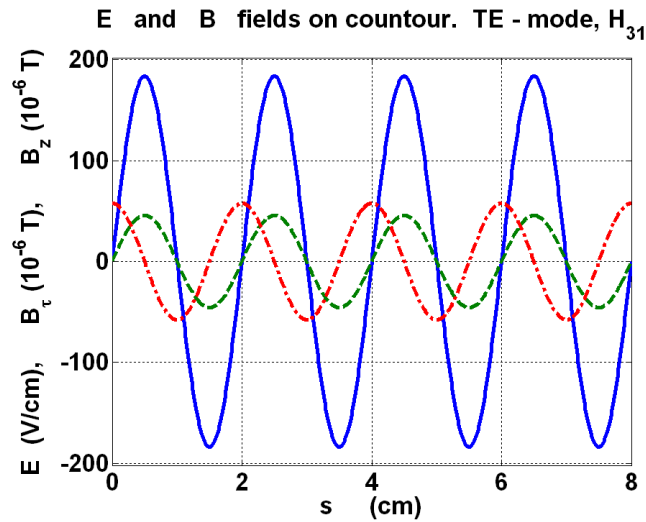


Рис.2.24

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода для волноводной моды H_{31} .

Используя формулы (2.93), (2.95), (2.97), (2.99) и соотношение (2.100) получаем следующую картину распределения поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока вдоль контура волновода Рис.2.25.

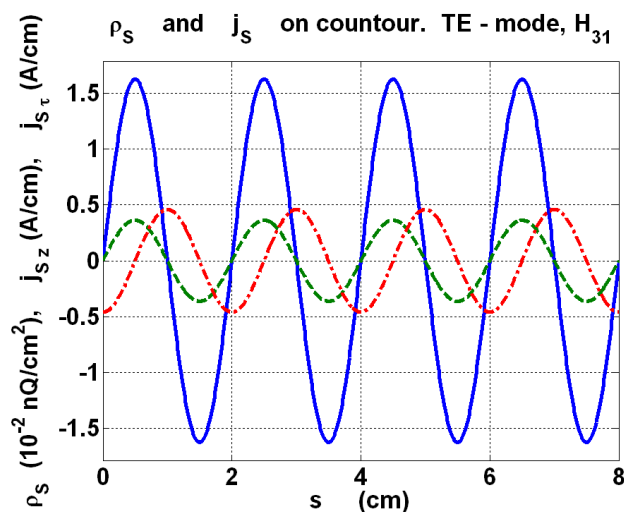


Рис.2.25

Распределение поверхностного заряда и поверхностного тока вдоль контура сечения волновода для волноводной моды H_{31} .

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода, а также распределение плотности поверхностного заряда, и поверхностного тока вычисляется в программе `Contour_TE_r.m`. Там же в этой программе рисуются эти распределения. Приведем код этой программы `Contour_TE_r.m`

```
%волна H - типа (TE - волна)
%волновод прямоугольного сечения

% распределение электрического и магнитного поля
% по контуру волновода

% распределение поверхностного заряда и поверхностного тока
% по контуру волновода

clc
clear

format short g

%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T

%мощность, переносимая модой
P = 100; % (Вт)

%размеры волновода
```

```

a = 3; % (cm)
b = 1; % (cm)

fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигагерц
c = 3.e+8; %скорость света (cm/m)
eps0 = 8.8542e-12; %электрическая постоянная (Ф/м)
mu0 = 4*pi*1.e-7; %магнитная постоянная (Гн/м)

%индексы волноводной моды H_nm
n=3;
m=1;

%частота отсечки
f_nm = c/2*sqrt((n/a)^2 + (m/b)^2)*100/eGHz; % (GHz)
fc = f_nm;
disp('fc=')
disp(fc)

%выбираем частоту f = 1.5*fc
f = 1.5*fc; % (GHz)
disp('f=')
disp(f)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды H_nm
%на частоте f
bet = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f.^2 - f_nm^2)/100; % (1/cm)
disp('bet=')
disp(bet)

%находим длину волны моды H_nm
lamb = 2*pi/bet; % (cm)
disp('lamb=')
disp(lamb)

%находим фазовую скорость волны
vp = 2*pi*f*eGHz/bet; % (cm/c)
disp('vp=')
disp(vp)

%находим групповую скорость моды
vg = c*(c/vp)*10^4; % (cm/c)
disp('vg=')
disp(vg)

%Амплитуда моды
kA = bet*100*2*pi*f*eGHz/mu0/2*((pi*n/a)^2 + (pi*m/b)^2)*a*b/4; %
(1/(Гн*с))
A2 = sqrt(P/kA)*10^4; % (Тл*см^2)
disp('A2=')
disp(A2)

%находим наибольшее значение электрического и магнитного полей
%на контуре волновода
g2 = (pi*n/a)^2 + (pi*m/b)^2;

```

```

A2m = pi*m/b*A2/sqrt(2); % (Тл*см) = (10^{-4} с*В/см)
A2n = pi*n/a*A2/sqrt(2); % (Тл*см) = (10^{-4} с*В/см)
B2z = g2*A2/sqrt(2); % (Тл)

%нижняя часть контура
Ed = 2*pi*f*eGHz*A2n/10^4; % (В/см)
Btd = bet*A2n; % (Тл)
Htd = Btd/mu0/100; % (А/см)
Bzd = B2z; % (Тл)
Hzd = Bzd/mu0/100; % (А/см)

%правая часть контура
Er = 2*pi*f*eGHz*A2m/10^4; % (В/см)
Btr = bet*A2m; % (Тл)
Htr = Btr/mu0/100; % (А/см)
Bzr = B2z; % (Тл)
Hzr = Bzr/mu0/100; % (А/см)

%верхняя часть контура
Et = 2*pi*f*eGHz*A2n/10^4; % (В/см)
Btt = bet*A2n; % (Тл)
Htt = Btt/mu0/100; % (А/см)
Bzt = B2z; % (Тл)
Hzt = Bzt/mu0/100; % (А/см)

%левая часть контура
El = 2*pi*f*eGHz*A2m/10^4; % (В/см)
Btl = bet*A2m; % (Тл)
Htl = Btl/mu0/100; % (А/см)
Bzl = B2z; % (Тл)
Hzl = Bzl/mu0/100; % (А/см)

Emax = max([Ed, Er, Et, El]);
Btmax = max([Btd, Btr, Btt, Btl]);
Htmax = max([Htd, Htr, Htt, Htl]);
Bzmax = max([Bzd, Bzr, Bzt, Bzl]);
Hzmax = max([Hzd, Hzr, Hzl, Hzl]);

disp('          Emax,          Btmax,          Htmax')
disp([Emax Btmax Htmax])
disp('          Bzmax,          Hzmax')
disp([0 Bzmax Hzmax])

%находим наибольшее значение поверхностной плотности электрического
заряда
%поверхностной плотности электрического тока
%на контуре волновода

%нижняя часть контура
roSd = Ed*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSzd = Btd/mu0/100; % (А/см)
jStd = Bzd/mu0/100; % (А/см)

%правая часть контура
roSr = Er*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)

```



```

jSzs = Btr/mu0/100; % (A/см)
jStr = Bzr/mu0/100; % (A/см)

%верхняя часть контура
roSt = Et*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSzt = Btt/mu0/100; % (A/см)
jStt = Bzt/mu0/100; % (A/см)

%левая часть контура
roSl = El*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSzl = Btl/mu0/100; % (A/см)
jStl = Bzl/mu0/100; % (A/см)

roSmax = max([roSd, roSr, roSt, roSl]);
jSzmax = max([jSzd, jSzs, jSzt, jSzl]);
jStmax = max([jStd, jStr, jStt, jStl]);

disp(' roSmax, jSzmax, jStmax')
disp([roSmax jSzmax jStmax])

%находим поля, заряды и токи по контуру волновода

%нижняя часть контура
s1 = 0:0.01:a;
x = s1;
E1 = Ed*sin(pi*n/a*x); % (В/см)
Bt1 = Btd*sin(pi*n/a*x); % (Тл)
Bz1 = Bzd*cos(pi*n/a*x); % (Тл)
roS1 = E1*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSz1 = Bt1/mu0/100; % (A/см)
jSt1 = -Bz1/mu0/100; % (A/см)

%правая часть контура
s2 = a:0.01:a+b;
y = s2 - a;
E2 = Er*(-1)^n*sin(pi*m/b*y); % (В/см)
Bt2 = Btr*(-1)^n*sin(pi*m/b*y); % (Тл)
Bz2 = Bzr*(-1)^n*cos(pi*m/b*y); % (Тл)
roS2 = E2*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSz2 = Bt2/mu0/100; % (A/см)
jSt2 = -Bz2/mu0/100; % (A/см)

%верхняя часть контура
s3 = a+b:0.01:2*a+b;
x = -s3 + 2*a + b;
E3 = Et*(-1)^(m+1)*sin(pi*n/a*x); % (В/см)
Bt3 = Btt*(-1)^(m+1)*sin(pi*n/a*x); % (Тл)
Bz3 = Bzt*(-1)^m*cos(pi*n/a*x); % (Тл)
roS3 = E3*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSz3 = Bt3/mu0/100; % (A/см)
jSt3 = -Bz3/mu0/100; % (A/см)

%левая часть контура
s4 = 2*a+b:0.01:2*a+2*b;
y = -s4 + 2*a + 2*b;

```

```

E4 = -E1*sin(pi*m/b*y); % (В/см)
Bt4 = -Bt1*sin(pi*m/b*y); % (Тл)
Bz4 = Bz1*cos(pi*m/b*y); % (Тл)
roS4 = E4*100*eps0/10^4*10^9; % (нКл/см^2)
jSz4 = Bt4/mu0/100; % (А/см)
jSt4 = -Bz4/mu0/100; % (А/см)

s = cat(2,s1,s2,s3,s4);
E = cat(2,E1,E2,E3,E4);
Bt = cat(2,Bt1,Bt2,Bt3,Bt4);
Bz = cat(2,Bz1,Bz2,Bz3,Bz4);
roS = cat(2,roS1,roS2,roS3,roS4);
jSz = cat(2,jSz1,jSz2,jSz3,jSz4);
jSt = cat(2,jSt1,jSt2,jSt3,jSt4);

Bt = Bt*10^6;
Bz = Bz*10^6;
roS = roS*10^2;

Btmax = Btmax*10^6;
Bzmax = Bzmax*10^6;
roSmax = roSmax*10^2;

EBmax = max([Emax,Btmax,Bzmax]);
roSjSmax = max([roSmax,jSzmax,jStmax]);

%рисует распределение поля по контуру волновода

figure(12)
hPl = plot(s,E,s,Bt,'--',s,Bz,'-.');
set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*a+2*b -1.1*EBmax 1.1*EBmax]);
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('s (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('E (V/cm), B_{\tau} (10^{-6} T), B_z (10^{-6} T)')

grid on

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['E and B fields on countour. TE - mode,'
H_',strn,'_',strm];
title(string)

%рисует распределение заряда и тока по контуру волновода

figure(13)
hPl = plot(s,roS,s,jSz,'--',s,jSt,'-.');
set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*a+2*b -1.1*roSjSmax 1.1*roSjSmax]);

```

```

%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
%set(hAxes,'xtick',[1.5 1.75 2.0 2.25 2.5])
set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('s      (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\rho_{S}   (10^{-2} nQ/cm^{2}),      j_{S z} (A/cm),
j_{S \tau} (A/cm)')

grid on
strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['\rho_{S}      and      j_{S}      on countour. TE - mode,
H_',strn,'_',strm];
title(string)

format short

```

Таким образом, программа Contour_TE_r.m, по формулам (2.92) - (2.100) вычисляет и выводит в графическом виде распределения электрического и магнитного поля, поверхностной плотности заряда, и поверхностной плотности тока. Результат работы программы показан на Рис.2.24, Рис.2.25.

Металлический волновод круглого сечения.

Рассмотрим металлический волновод круглого сечения Рис.2.1. Цилиндрическую систему координат выберем, так как показано на Рис.2.26.

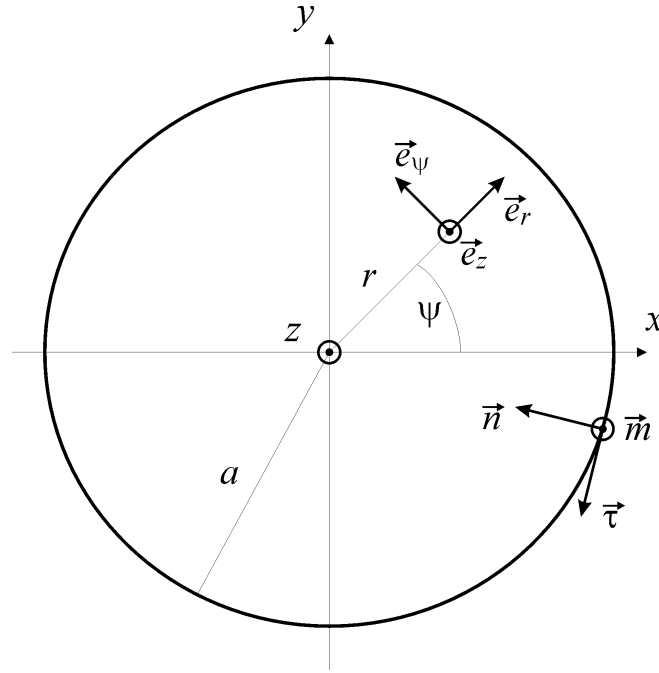


Рис.2.26

Поперечное сечение металлического волновода круглого сечения.

Уравнение Гельмгольца (2.27), (2.32) для электрического и магнитного потенциалов Герца в цилиндрических координатах принимает следующий вид.

$$\frac{\partial^2 \Pi^{e,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^{e,m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi^{e,m}}{\partial \psi^2} + g^2 \Pi^{e,m} = 0$$

$$g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$$
(2.101)

Уравнение (2.101) решается методом разделения переменных. В результате получаем следующее решение уравнения (2.101).

$$\Pi^{e,m}(r, \psi) = A J_n(g r) e^{in\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
(2.102)

Здесь $J_n(z)$ - функция Бесселя 1-ого рода, порядка n .

Рассмотрим ТМ волноводные моды. Граничное условие (2.28) теперь примет следующий вид.

$$\Pi^e(a, \psi) = 0, \quad J_{nm}(g a) = 0$$
(2.103)

Для решения последнего уравнения (2.103) нужно знать корни функции Бесселя. Корни функции Бесселя v_{nm} находятся из следующего уравнения.

$$J_n(v_{nm}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$
(2.104)

Приведем некоторые значения корней функции Бесселя.

$$\begin{aligned}
 \nu_{01} &= 2.405, & \nu_{02} &= 5.520, & \nu_{03} &= 8.654, & \nu_{04} &= 11.792 \\
 \nu_{11} &= 3.832, & \nu_{12} &= 7.016, & \nu_{13} &= 10.173, & \nu_{14} &= 13.324 \\
 \nu_{21} &= 5.136, & \nu_{22} &= 8.417, & \nu_{23} &= 11.620, & \nu_{24} &= 14.796 \\
 \nu_{31} &= 6.380, & \nu_{32} &= 9.761, & \nu_{33} &= 13.015, & \nu_{34} &= 16.223
 \end{aligned}
 \tag{2.105}$$

На Рис.2.27 приведены графики двух функций Бесселя.

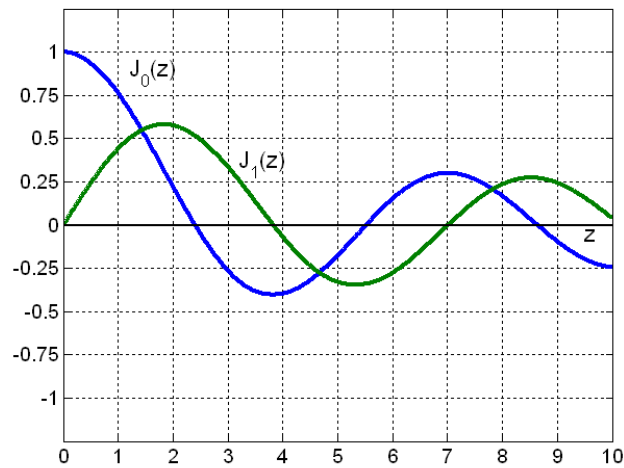


Рис.2.27

Графики функций Бесселя.

Если нули функции Бесселя известны, то решение уравнения Гельмгольца (2.101) с граничным условием (2.103) для электрического потенциала Герца примет следующий вид.

$$\begin{cases} \Pi_{nm}^e(r, \psi) = A_1 J_n\left(\frac{\nu_{nm}}{a} r\right) e^{in\psi}, \\ g_{nm} = \frac{\nu_{nm}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}
 \tag{2.106}$$

Формулы (2.106) определяют структуру ТМ волноводной моды в металлическом волноводе круглого сечения.

Из уравнений (2.101) и (2.106) находим дисперсионное соотношение для моды E_{nm} .

$$\beta = \beta_{nm}(\omega)$$

$$\beta_{nm}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - g_{nm}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{V_{nm}^2}{a^2}}, \quad (2.107)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Частоты отсечки для волновода с круглым сечением определяются следующим выражением.

$$\omega_{nm} = \frac{c V_{nm}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.108)$$

Перейдем к обычным частотам $f = \omega / 2\pi$ и запишем дисперсионные соотношения (2.107) в следующем виде.

$$\beta = \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_{nm}^2} \quad (2.109)$$

$$f_{nm} = \frac{c}{2\pi} \frac{V_{nm}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Используя формулы (2.109) были построены дисперсионные соотношения Рис.2.28 для нескольких ТМ мод.

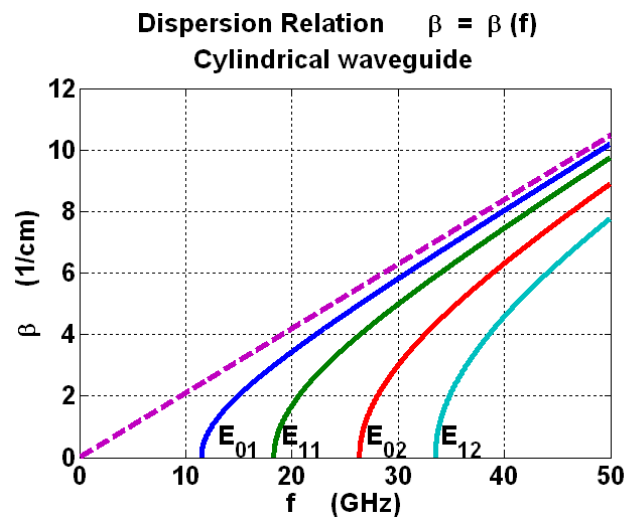


Рис.2.28

Дисперсионные кривые для волноводных мод ТМ поляризации в волноводе круглого сечения.

Для создания дисперсионных кривых была создана программа ТМ_с.m в пакете MATLAB. Ниже приводится код этой программы.

```
%волна E - типа (ТМ - волна)
```

```

%рисование дисперсионных кривых
%волновод круглого сечения

clc
clear

%нули nu_nm функции Бесселя Jn(nu_nm) = 0
nuB(1,2) = 2.405;
nuB(2,2) = 3.832;
nuB(1,3) = 5.520;
nuB(2,3) = 7.016;

%радиус волновода
a = 1; % (см)
fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигаГерц
c = 3.e+10; %скорость света (см/с)

%индексы волноводной моды
n=0; m=1;

%нуль функции Бесселя
nu_nm = nuB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*nu_nm/a/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_01
f1=f_nm:0.01:fm;
bet1 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f1.^2 - f_nm^2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%индексы волноводной моды
n=1; m=1;

%нуль функции Бесселя
nu_nm = nuB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*nu_nm/a/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_11
f2=f_nm:0.01:fm;
bet2 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f2.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=0; m=2;

%нуль функции Бесселя
nu_nm = nuB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*nu_nm/a/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_02
f3=f_nm:0.01:fm;
bet3 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f3.^2 - f_nm^2);

```

```

%индексы волноводной моды
n=1; m=2;

%нуль функции Бесселя
nu_nm = nuB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*nu_nm/a/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_12
f4=f_nm:0.01:fm;
bet4 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f4.^2 - f_nm^2);

%находим асимптотику bet = 2*pi/c*f
f0=0:0.01:fm;
bet0 = 2*pi/c*eGHz*f0;

hPl=plot(f1,bet1,f2,bet2,f3,bet3,f4,bet4,f0,bet0,'--');
set(hPl,'LineWidth',4);
grid on

%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
%set(hAxes,'xtick',[1.5 1.75 2.0 2.25 2.5])
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('f (GHz)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\beta (1/cm)')

text(13.0, 0.5,'E_{01}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(27.0, 0.5,'E_{02}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(19.0, 0.5,'E_{11}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
text(34.0, 0.5,'E_{12}','Color',[0 0
0],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
title('Dispersion Relation \beta = \beta(f) \newline Cylindrical wave-
guide')

```

Обратим внимание на следующие строчки кода.

```

%нули nu_nm функции Бесселя Jn(nu_nm) = 0
nuB(1,2) = 2.405;
nuB(2,2) = 3.832;
nuB(1,3) = 5.520;
nuB(2,3) = 7.016;

```


Здесь создается массив нулей функций Бесселя, используя данные приведенные в математических справочниках. Результат работы ТМ_с. m программы показан на Рис.2.28.

Используя найденный электрический потенциал Герца Π_{nm}^e для моды E_{nm} можно построить картину линий электрического и магнитного поля в плоскости xu . Заметим что в формулах (2.106), потенциал Герца записан в комплексном виде. Поэтому необходимо, вначале перейти к действительным полям, и затем сделать вывод о способе построения линий электромагнитного поля в сечении волновода.

Используем формулы (2.27), где проекции электрического и магнитного поля, а также электрический потенциал Герца, записаны в комплексном виде. Умножаем эти поля на волновой множитель $e^{i(\beta z - \omega t)}$, и переходим к действительной форме записи полей. В результате получаем следующие соотношения.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(\vec{r}, t) = -\beta \frac{\partial \Phi^e}{\partial x}, & \tilde{E}_y(\vec{r}, t) = -\beta \frac{\partial \Phi^e}{\partial y}, \\ \tilde{B}_x(\vec{r}, t) = \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \Phi^e}{\partial y}, & \tilde{B}_y(\vec{r}, t) = -\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \\ \Phi^e(\vec{r}, t) = \frac{1}{2i} \left(\Pi^e(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} - \Pi^{e*}(x, y) e^{-i(\beta z - \omega t)} \right) \end{cases} \quad (2.110)$$

Здесь функция $\Phi^e(\vec{r}, t)$ – мнимая часть комплексного потенциала Герца, как функции координат и времени.

$$\Phi^e(\vec{r}, t) = \text{Im} \left(\Pi^e(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \right)$$

Из уравнений (2.110) видно, что действительные векторы $\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}$ взаимно перпендикулярны, так как $\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{B}} = 0$, а вектор электрического поля $\tilde{\vec{E}}$ пропорционален градиенту функции Φ^e . Отсюда следует, что линии магнитного поля $\tilde{\vec{B}}$ совпадают с эквипотенциальными линиями функции Φ^e

$$\Phi^e(x, y, z, t) = \text{const} \quad (2.111)$$

в заданном сечении волновода $z = \text{const}$ в фиксированный момент времени $t = \text{const}$.

Линии электрического поля $\tilde{\vec{E}}$ задаются линиями градиента функции Φ^e .

Используя явный вид (2.106) потенциала Герца, получаем уравнение эквипотенциальных линий.

$$A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi + \beta z - \omega t) = \text{const} \quad (2.112)$$

Здесь предполагается, что амплитуда моды A_1 действительная величина.

Линии векторного поля и линии градиентов, позволяет рисовать пакет MATLAB. Поэтому для визуализации линий электрического и магнитного поля для моды E_{nm} была создана программа Ec_type.

Приведем код программы Ec_type.

```
%волна E - типа (TM - волна)
%рисование линий электрического и магнитного полей
%в волноводе круглого сечения

clc
clear

%нули nu_nm функции Бесселя Jn(nu_nm) = 0
nuB(1,2) = 2.405; %nu_01
nuB(2,2) = 3.832;
nuB(1,3) = 5.520;
nuB(2,3) = 7.016;

%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T

%радиус волновода
a = 1; % (см)
b = a;

%задаем сетку в области [-a a -b b]
%для рисования линий уровня
dx = a/100;
dy = b/100;
[x,y] = meshgrid(-a:dx:a, -b:dy:b);

%выбираем моду E_nm
n = 1;
m = 1;

%нуль функции Бесселя
nu_nm = nuB(n+1,m+1);

%Электрический потенциал Герца на сетке
r = sqrt(x.^2+y.^2);
psi = atan2(y,x);
```

```

z = besselj(n,nu_nm*r/a).*sin(n*psi-2*pi*t0);

%рисует эквипотенциальные линии (линии магнитного поля)
[C,hc] = contour(x,y,z);
set(hc,'LineWidth',3,'Color',[0.3 0.3 0.8]);
axis([-a a -b b]);

%задаем сетку в области [0 a 0 b]
%для рисования линий градиента
dx = a/10;
dy = b/10;
[x,y] = meshgrid(-a:dx:a, -a:dy:b);

%Электрический потенциал Герца на сетке
r = sqrt(x.^2+y.^2);
psi = atan2(y,x);
z = besselj(n,nu_nm*r/a).*sin(n*psi-2*pi*t0);

%находим минус градиент поля z(x,y)
[px,py] = gradient(-z);

hold on;
%рисует векторы градиента (электрическое поле)
h = quiver(x,y,px,py,1.5);
set(h,'LineWidth',2,'Color',[0.8 0.3 0.3]);

%рисуем контур волновода
fi=0:0.01:2*pi;
xc = a*cos(fi);
yc = a*sin(fi);
hy=line(xc, yc);
set(hy,'color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',10);

%заливаем белым цветом область вокруг круга
xp = [xc a a -a -a a a ];
yp = [yc 0 -b -b b b 0 ];

fill(xp,yp,'w')

%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
ticX = -a:0.5:a;
ticY = -b:0.5:b;
%set(hAxes,'xtick',[0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0]);
%set(hAxes,'ytick',[0.0 0.5 1.0]);
set(hAxes,'xtick',ticX);
set(hAxes,'ytick',ticY);
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('x (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('y (cm)')

```

```

%title('Lines E and B fields')

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['Lines of E and B fields.  TM - mode, E_',strn,'_',strm];
title(string)

%делаем квадратной область текущей области рисования
axis square

```

Для примера рассмотрим картину линий поля в сечении $z=0$ в момент времени равном четверти периода $t=T/4$.

На Рис.2.29 показана картина линий электрического и магнитного поля для моды E_{01} с радиусом $a=1$. Сплошные линии здесь линии магнитного поля, стрелки показывают направление электрического поля.

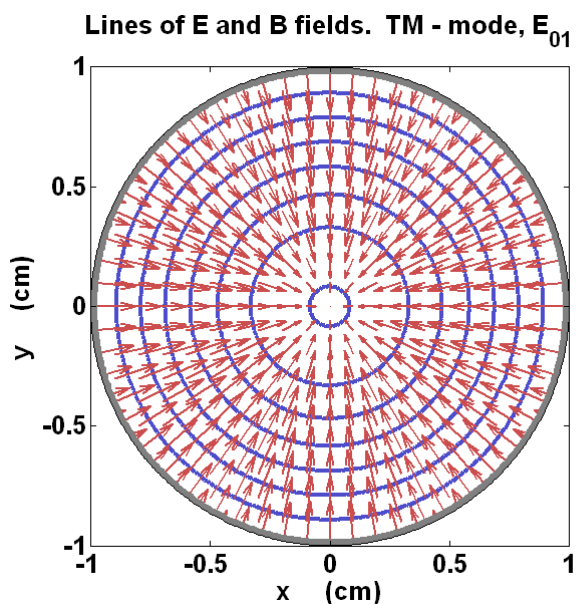


Рис.2.29

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для
волноводной моды E_{01} .

На Рис.2.30 показана картина линий электрического и магнитного поля для моды E_{11} с радиусом $a=1$. Сплошные линии здесь линии магнитного поля, стрелки показывают направление электрического поля.

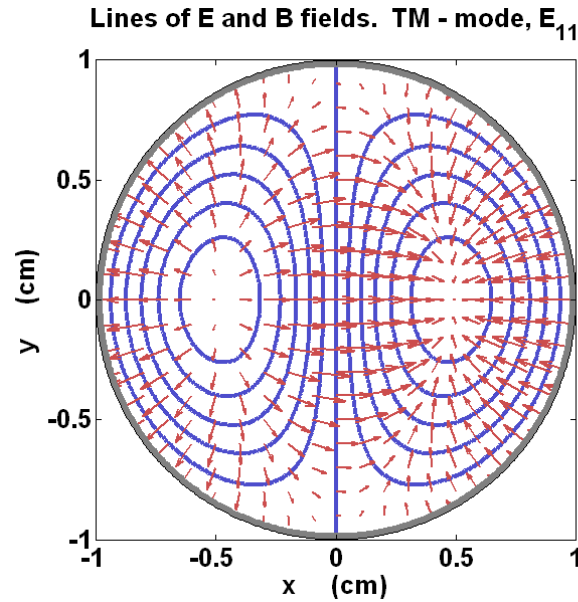


Рис.2.30

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды E_{11} .

Найдем мощность, переносимую ТМ модой. Берем формулу (2.48) для среднего значения вектора Пойнтинга, и формулу (2.53) для электрического потенциала Герца. Перейдем в цилиндрическую систему координат Рис.2.26.

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \\ y = r \sin \psi \end{cases} \quad (2.111)$$

Переходим от производных по декартовым координатам x, y к производным по цилиндрическим координатам r, ψ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} = \cos \psi \frac{\partial \Pi^e}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \psi \frac{\partial \Pi^e}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} = \sin \psi \frac{\partial \Pi^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \psi \frac{\partial \Pi^e}{\partial \psi} \end{cases} \quad (2.112)$$

Подставляя соотношения (2.112) в формулу (2.48) получаем вектор Пойнтинга

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \vec{e}_z \frac{\beta \omega \varepsilon_0}{2} \left(\left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial \psi} \right|^2 \right) \quad (2.113)$$

Интеграл (2.51) для мощности записываем в цилиндрических координатах

$$P = \int_S \langle \vec{S}_P \rangle \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \langle S_{Pz} \rangle r dr d\psi \quad (2.114)$$

После подстановки (2.106) в (2.114) получаем следующее выражение для мощности.

$$P = \frac{\beta \omega \varepsilon_0}{2} 2\pi A_1^2 \int_0^a \left\{ \left(\frac{v_{nm}}{a} \right)^2 \left[J'_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \right]^2 + \frac{n^2}{r^2} \left[J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \right]^2 \right\} r dr \quad (2.115)$$

Интеграл из формулы (2.115) выпишем отдельно, и сделаем в нем замену $t = v_{nm} r / a$.

$$I = \int_0^{v_{nm}} \left\{ J_n'^2(t) + \frac{n^2}{t^2} J_n^2(t) \right\} t dt \quad (2.116)$$

Используем известные формулы для функций Бесселя.

$$\begin{aligned} J_n'(t) &= \frac{n}{t} J_n(t) - J_{n+1}(t) \\ J_n'(t) &= J_{n-1}(t) - \frac{n}{t} J_n(t) \end{aligned} \quad (2.117)$$

После подстановки формул (2.117) в выражение (2.116) интеграл I принимает следующий вид.

$$I = \int_0^{v_{nm}} \left\{ \frac{n}{t} J_n(t) [J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t)] - J_{n-1}(t) J_{n+1}(t) \right\} t dt \quad (2.118)$$

Используем известную формулу для функций Бесселя.

$$\frac{n}{t} J_n(t) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t)) \quad (2.119)$$

После подстановки (2.119) в (2.118) интеграл принимает вид.

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{v_{nm}} (J_{n-1}^2(t) + J_{n+1}^2(t)) t dt \quad (2.120)$$

Интеграл I в форме (2.120) уже пригоден для численного счета, например, в пакете MATLAB. Однако оказывается возможным получить аналитическое выражение для этого интеграла.

Докажем справедливость следующего неопределенного интеграла от функций Бесселя.

$$\int J_n^2(t) t dt = \frac{t^2}{2} (J_n^2(t) - J_{n-1}(t) J_{n+1}(t)) \quad (2.121)$$

Для доказательства возьмем производную от правой части уравнения (2.121).

$$\begin{aligned} \left(\frac{t^2}{2} (J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)) \right)' &= t(J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)) + \\ &+ \frac{t^2}{2} (2J_n(t)J_n'(t) - J_{n-1}'(t)J_{n+1}(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}'(t)) \end{aligned} \quad (2.122)$$

Используем формулы (2.117), которым придадим следующий вид

$$\begin{aligned} J_{n-1}'(t) &= \frac{n-1}{t} J_{n-1}(t) - J_n(t) \\ J_{n+1}'(t) &= J_n(t) - \frac{n+1}{t} J_{n+1}(t) \\ J_n'(t) &= \frac{1}{2} (J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)) \end{aligned} \quad (2.123)$$

После подстановки (2.123) в уравнение (2.122) последний член в правой стороне приобретает следующий вид.

$$\frac{t^2}{2} \left(\frac{2}{t} J_{n-1}(t)J_{n+1}(t) \right) \quad (2.124)$$

В результате уравнение (2.122) превращается в следующее уравнение.

$$\left(\frac{t^2}{2} (J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)) \right)' = t J_n^2(t) \quad (2.125)$$

Это доказывает справедливость неопределенного интеграла (2.121).

Используя формулу для неопределенного интеграла (2.121), вычислим определенный интеграл (2.120).

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \frac{v_{nm}^2}{2} (J_{n-1}^2(v_{nm}) - J_{n-2}(v_{nm})J_n(v_{nm})) + \frac{v_{nm}^2}{2} (J_{n+1}^2(v_{nm}) - J_n(v_{nm})J_{n+2}(v_{nm})) \right\} \quad (2.126)$$

Учтем, что v_{nm} — нули функции Бесселя $J_n(v_{nm}) = 0$. Поэтому (2.126) принимает вид.

$$I = \frac{v_{nm}^2}{4} \{ J_{n-1}^2(v_{nm}) + J_{n+1}^2(v_{nm}) \} \quad (2.127)$$

Применим формулу (2.119), которая в данном случае, с учетом $J_n(v_{nm}) = 0$, примет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{n}{v_{nm}} J_n(v_{nm}) &= \frac{1}{2} (J_{n-1}(v_{nm}) + J_{n+1}(v_{nm})) \\ J_{n-1}(v_{nm}) &= -J_{n+1}(v_{nm}) \end{aligned} \quad (2.128)$$

Окончательно формула (2.127) примет следующий вид.

$$I = \frac{v_{nm}^2}{2} J_{n+1}^2(v_{nm}) \quad (2.129)$$

Поэтому мощность (2.115) будет определяться следующей формулой.

$$P = \beta \omega \varepsilon_0 \pi A_1^2 \frac{v_{nm}^2}{2} J_{n+1}^2(v_{nm}) \quad (2.130)$$

В формуле (2.130) для определенности амплитуда A_1 считается действительной величиной. Зная радиус волновода a , частоту излучения ω и мощность P , переносимую модой E_{nm} , по формуле (2.130) можно найти амплитуду моды A_1 .

Используя явный вид (2.106) электрического потенциала Герца, с помощью формул (2.27) можно найти все проекции электрического E_x, E_y, E_z и магнитного B_x, B_y, B_z поля ТМ моды. Но для цилиндрического волновода удобно найти проекции вектора электрического и магнитного поля на орты цилиндрической системы координат.

Вспоминаем формулы перехода проекций, например вектора \vec{E} , из декартовой системы координат, где орты $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, в цилиндрическую систему, где орты $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$ Рис.2.26.

$$\begin{cases} E_r = \cos \psi E_x + \sin \psi E_y \\ E_\psi = -\sin \psi E_x + \cos \psi E_y \\ E_z = E_z \end{cases} \quad (2.131)$$

Используя формулы (2.27), (2.106), (2.112), (2.131) получаем проекции электрического и магнитного поля ТМ моды в цилиндрической системе координат.

$$\begin{cases} E_r(r, \psi) = i \beta_{nm} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J_n' \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) e^{in\psi}, \\ E_\psi(r, \psi) = -\beta_{nm} \frac{n}{r} A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) e^{in\psi}, \\ E_z(r, \psi) = g_{nm}^2 A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) e^{in\psi}, \end{cases} \quad (2.132)$$

$$\begin{cases} B_r(r, \psi) = \frac{\omega}{c^2} \frac{n}{r} A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) e^{in\psi}, \\ B_\psi(r, \psi) = \frac{i\omega}{c^2} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) e^{in\psi}, \\ B_z(r, \psi) = 0 \end{cases} \quad (2.133)$$

Если умножить векторы электрического \vec{E} и магнитного \vec{B} поля, заданные формулами (2.132), (2.133) на волновой множитель $e^{i(\beta z - \omega t)}$, то получится волноводная мода (2.1) в комплексном виде. Запишем эти поля в действительном виде.

$$\begin{cases} \tilde{E}_r(r, \psi, z, t) = -\beta_{nm} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi + \beta z - \omega t), \\ \tilde{E}_\psi(r, \psi, z, t) = -\beta_{nm} \frac{n}{r} A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi + \beta z - \omega t), \\ \tilde{E}_z(r, \psi, z, t) = g_{nm}^2 A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi + \beta z - \omega t), \\ \tilde{B}_r(r, \psi, z, t) = \frac{\omega}{c^2} \frac{n}{r} A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi + \beta z - \omega t), \\ \tilde{B}_\psi(r, \psi, z, t) = -\frac{\omega}{c^2} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi + \beta z - \omega t), \\ \tilde{B}_z(r, \psi, z, t) = 0 \end{cases} \quad (2.134)$$

Далее у действительных полей значок тильда не будем ставить. Рассмотрим поле в сечении с координатой $z=0$, в некоторый момент времени $t=t_0$. В этом случае из формул (2.134) получим следующие поля.

$$\begin{cases} E_r(r, \psi) = -\beta_{nm} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi - \omega t_0), \\ E_\psi(r, \psi) = -\beta_{nm} \frac{n}{r} A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi - \omega t_0), \\ E_z(r, \psi) = g_{nm}^2 A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi - \omega t_0), \end{cases} \quad (2.135)$$

$$\begin{cases} B_r(r, \psi) = \frac{\omega}{c^2} \frac{n}{r} A_1 J_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi - \omega t_0), \\ B_\psi(r, \psi) = -\frac{\omega}{c^2} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n \left(\frac{v_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi - \omega t_0), \\ B_z(r, \psi) = 0 \end{cases}$$

На металлической поверхности волновода $r = a$ получаем следующие нормальные и касательные составляющие электромагнитного поля ТМ моды.

$$\begin{cases} E_r(a, \psi) = -E_n(\psi) = -\beta_{nm} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n(v_{nm}) \sin(n\psi - \omega t_0), \\ E_\psi(a, \psi) = -E_\tau(\psi) = 0, \\ E_z(a, \psi) = E_z(\psi) = 0, \end{cases} \quad (2.136)$$

$$\begin{cases} B_r(a, \psi) = -B_n(\psi) = 0, \\ B_\psi(a, \psi) = -B_\tau(\psi) = -\frac{\omega}{c^2} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n(v_{nm}) \sin(n\psi - \omega t_0), \\ B_z(a, \psi) = B_z(\psi) = 0 \end{cases}$$

Итак, на поверхности металлического цилиндрического волновода имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(\psi) = \beta_{nm} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n(v_{nm}) \sin(n\psi - \omega t_0), \\ B_\tau(\psi) = \frac{\omega}{c^2} \frac{v_{nm}}{a} A_1 J'_n(v_{nm}) \sin(n\psi - \omega t_0) \end{cases} \quad (2.137)$$

Используя граничные условия (2.14) находим следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(\psi) = \varepsilon_0 E_n(\psi), \\ j_{sz}(\psi) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(\psi) \end{cases} \quad (2.138)$$

Пример ТМ моды, волновод круглого сечения.

Рассмотрим металлический волновод круглого сечения. Возьмем следующий радиус волновода $a = 5 \text{ см}$. Будем рассматривать E_{31} волновую моду.

С помощью формулы (2.109) находим частоту отсечки f_c (cutoff frequency) для данной моды.

$$f_c = 6.093 \text{ ГГц}$$

С помощью формулы (2.109) и программы `TM_c.m` получаем дисперсионную кривую для моды E_{31} Рис.2.31.

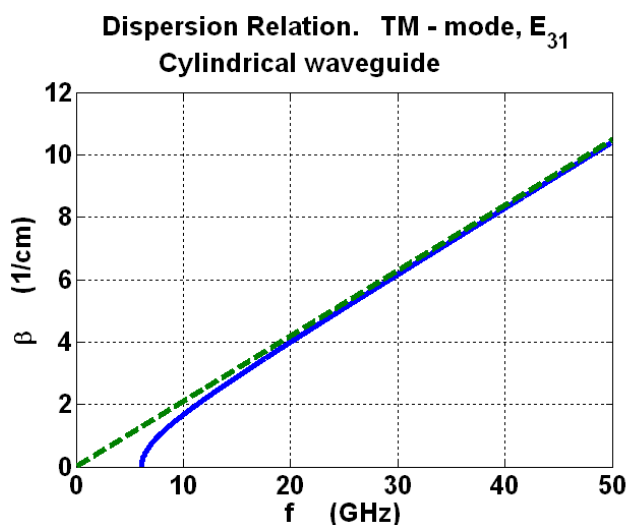


Рис.2.31

Дисперсионная кривая для волноводной моды E_{31} в волноводе круглого сечения.

Картину линий электрического и магнитного поля построим с помощью программы `Ec_type.m`. Рассмотрим картину линий поля в сечении $z = 0$ в момент времени равном одной шестой периода $t = T/6$ Рис.2.32.

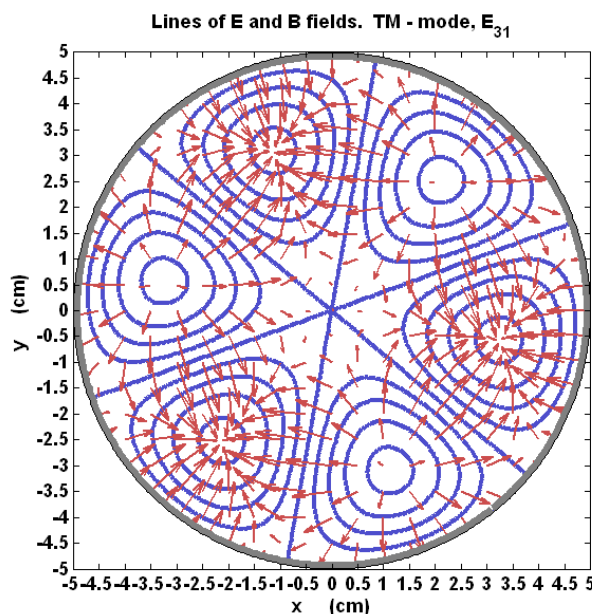


Рис.232

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для
волноводной моды E_{31} .

Выберем частоту f в 1.5 раз большую частоты отсечки.

$$f = 1.5 f_c = 9.139 \text{ ГГц}$$

По формуле (2.109) находим постоянную распространения моды E_{31} на частоте f .

$$\beta = 1.427 \text{ см}^{-1}$$

По формуле (2.2) и (2.4) находим длину волны излучения и фазовую скорость.

$$\lambda = 4.404 \text{ см}, \quad v_p = 4.025 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Фазовая скорость моды оказалась больше скорости света. Однако групповая скорость, найденная по формуле (2.4) оказывается меньше скорости света.

$$v_g = 2.236 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Возьмем мощность, переносимую модой, равную $P = 100 \text{ Вт}$. По формуле (2.130) находим амплитуду моды.

$$A_1 = 47.66 \text{ В} \cdot \text{см}$$

По формулам (2.137) найдем наибольшее значение электрического и магнитного поля на контуре волновода.

$$E_{\max} = 25.88 \text{ В/см}, \quad B_{\max} = 1.157 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}, \quad H_{\max} = 0.092 \text{ А/см}$$

Здесь учтена связь магнитной индукции и напряженности магнитного поля в вакууме $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

По формулам (2.138) найдем наибольшее значение поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока на контуре волновода.

$$\rho_{s \max} = 0.0023 \text{ нКл/см}^2, \quad j_{s \max} = 0.092 \text{ А/см}$$

Нарисуем изменение электрического и магнитного поля вдоль контура волновода. Будем двигаться вдоль контура из точки $(a,0)$ против часовой стрелки. Координатой на контуре является переменная s , связанная с углом ψ , следующим соотношением.

$$s = a\psi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (139)$$

Используя формулы (2.137) и соотношение (2.139) получаем следующую картину распределения электрического и магнитного поля вдоль контура волновода Рис.2.33.

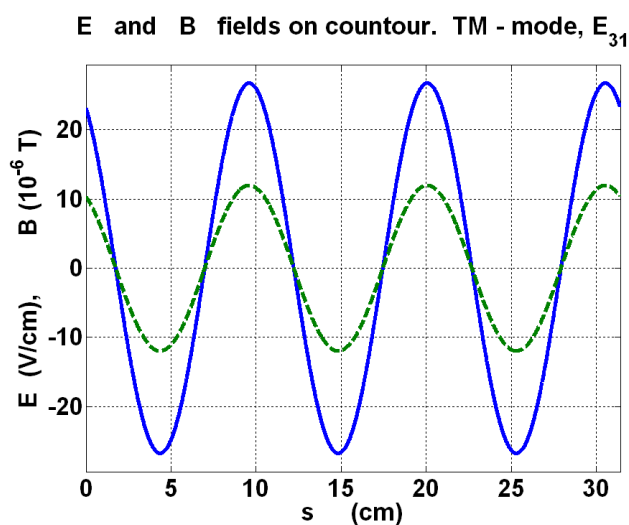


Рис.2.33

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода для волноводной моды E_{31} .

Используя формулы (2.138) и соотношение (2.139) получаем следующую картину распределения поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока вдоль контура волновода Рис.2.34.

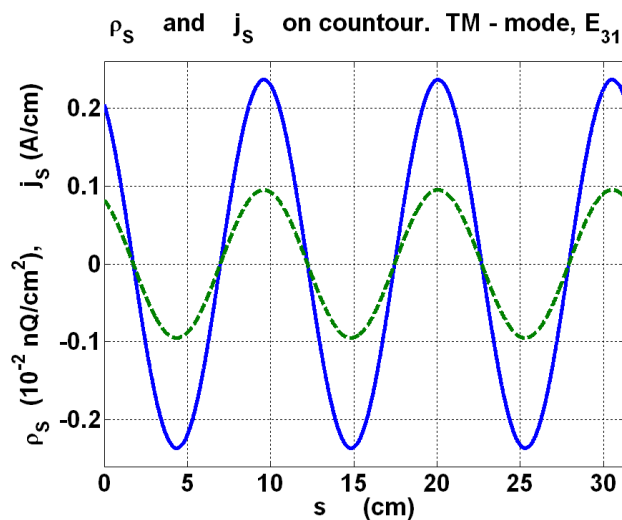


Рис.2.34

Распределение поверхностного заряда и поверхностного тока вдоль контура сечения волновода для волноводной моды E_{31} .

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода, а также распределение плотности поверхностного заряда, и поверхностного тока вычисляется в программе `Contour_TM_c.m`. Там же в этой программе рисуются эти распределения. Приведем код этой программы `Contour_TM_c.m`

```
%волна E - типа (TM - волна)
%волновод круглого сечения

% распределение электрического и магнитного поля
% по контуру волновода

% распределение поверхностного заряда и поверхностного тока
% по контуру волновода

clc
clear

format short g
```

```

%нули nu_nm функции Бесселя Jn(nu_nm) = 0
nuB(1,2) = 2.405; nuB(1,3) = 5.520; nuB(1,4) = 8.654; nuB(1,5) =
11.792;
nuB(2,2) = 3.832; nuB(2,3) = 7.016; nuB(2,4) = 10.173; nuB(2,5) =
13.324;
nuB(3,2) = 5.136; nuB(3,3) = 8.417; nuB(3,4) = 11.620; nuB(3,5) =
14.796;
nuB(4,2) = 6.380; nuB(4,3) = 9.761; nuB(4,4) = 13.015; nuB(4,5) =
16.223;

%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T

%мощность, переносимая модой
P = 100; % (Вт)

%радиус волновода
a = 3; % (см)

fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигагерц
c = 3.e+8; %скорость света (см/м)
eps0 = 8.8542e-12; %электрическая постоянная (Ф/м)
mu0 = 4*pi*1.e-7; %магнитная постоянная (Гн/м)

%индексы волноводной моды E_nm
n=3;
m=1;

%нуль функции Бесселя
nu_nm = nuB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*nu_nm/a*100/eGHz; % (GHz)

fc = f_nm;
disp('fc=')
disp(fc)

%выбираем частоту f = 1.5*fc
f = 1.5*fc; % (GHz)
disp('f=')
disp(f)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_nm
%на частоте f
bet = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f.^2 - f_nm^2)/100; % (1/cm)
disp('bet=')
disp(bet)

%находим длину волны моды E_nm
lamb = 2*pi/bet; % (см)
disp('lamb=')
disp(lamb)

```

```

%находим фазовую скорость волны
vp = 2*pi*f*eGHz/bet; % (см/с)
disp('vp=')
disp(vp)

%находим групповую скорость моды
vg = c*(c/vp)*10^4; % (см/с)
disp('vg=')
disp(vg)

%Амплитуда моды
kA = bet*2*pi*f*eGHz*eps0/100*pi*nu_nm^2/2*(besselj(n+1,nu_nm))^2; %
(Ф/(см^2*с))
A1 = sqrt(P/kA); % (В*см)
disp('A1=')
disp(A1)

%находим наибольшее значение электрического и магнитного полей
%на контуре волновода

%используем формулу  $J'_n(z) = n/z * J_n(z) - J_{n+1}(z)$ 
Ampl = -nu_nm/a*A1*besselj(n+1,nu_nm); % (В)

Eampl = bet*Ampl;
Bampl = 2*pi*f*eGHz/c^2*Ampl;

Emax = abs(Eampl); % (В/см)
Bmax = abs(Bampl); % (Тл)
Hmax = Bmax/mu0/100; % (А/см)

disp('      Emax,      Bmax,      Hmax')
disp([Emax      Bmax      Hmax])

%находим наибольшее значение поверхностной плотности электрического
заряда
%поверхностной плотности электрического тока
%на контуре волновода

roSampl = Eampl*100*eps0/10^4*10^9;
jSampl = Bampl/mu0/100;

roSmax = abs(roSampl); % (нКл/см^2)
jSmax = abs(jSampl); % (А/см)

disp('      roSmax,      jSmax')
disp([roSmax      jSmax])

%находим поля, заряды и токи по контуру волновода

s1 = 0:0.01:2*pi*a;
psi1 = s1/a;
E1 = Eampl*sin(n*psi1 - 2*pi*t0); % (В/см)
B1 = Bampl*sin(n*psi1 - 2*pi*t0); % (Тл)
roS1 = roSampl*sin(n*psi1 - 2*pi*t0); % (нКл/см^2)
jS1 = jSampl*sin(n*psi1 - 2*pi*t0); % (А/см)

```



```

B1 = B1*10^6;
roS1 = roS1*10^2;

Bmax = Bmax*10^6;
roSmax = roSmax*10^2;

EBmax = max(Emax,Bmax);
roSjSmax = max(roSmax,jSmax);

%рисует распределение поля по контуру волновода

figure(12)
hPl = plot(s1,E1,s1,B1,'--');
set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*pi*a -1.1*EBmax 1.1*EBmax]);
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
%set(hAxes,'xtick',[1.5 1.75 2.0 2.25 2.5])
set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('s (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('E (V/cm), B (10^{-6} T)')
%title('E (V/cm), B (10^{-6} T)')

grid on

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['E and B fields on countour. TM - mode,'
E_',strn,'_',strm];
title(string)

%рисует распределение заряда и тока по контуру волновода

figure(13)
hPl = plot(s1,roS1,s1,jS1,'--');
set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*pi*a -1.1*roSjSmax 1.1*roSjSmax]);
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
%set(hAxes,'xtick',[1.5 1.75 2.0 2.25 2.5])
set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('s (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\rho_{S} (10^{-2} nQ/cm^2), j_{S} (A/cm)')

grid on
strn = int2str(n);
strm = int2str(m);

```

```

string = ['\rho_{S}      and      j_{S}      on countour.  TM - mode,
E_',strn,'_',strm];
title(string)

format short

```

Таким образом, программа Contour_TM_c.m, по формулам (2.137), (2.138), (2.139) вычисляет и выводит в графическом виде распределения электрического и магнитного поля, поверхностной плотности заряда, и поверхностной плотности тока. Результат работы программы показан на Рис.2.33, Рис.2.34.

Волновод круглого сечения, ТЕ моды.

Рассмотрим ТЕ волноводные моды. Уравнение Гельмгольца (2.101) и его решение вида (2.102) остаются такими же, как и для ТМ волноводные моды. Отличие будет в следующем. Электрический потенциал Герца Π^e , надо заменить магнитным потенциалом Герца Π^m . Граничное условие (2.33) для ТЕ моды теперь примет следующий вид.

$$\frac{\partial}{\partial r} \Pi^m(a, \psi) = 0, \quad J'_n(ga) = 0 \quad (2.140)$$

Здесь штрих у функции Бесселя означает взятие первой производной. Для решения последнего уравнения (2.140) нужно знать корни первой производной функции Бесселя. Корни первой производной функции Бесселя μ_{nm} находятся из следующего уравнения.

$$J'_n(\mu_{nm}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.141)$$

Приведем некоторые значения корней первой производной функции Бесселя.

$$\begin{aligned}
\mu_{01} &= 3.832, & \mu_{02} &= 7.016, & \mu_{03} &= 10.173, & \mu_{04} &= 13.324 \\
\mu_{11} &= 1.841, & \mu_{12} &= 5.331, & \mu_{13} &= 8.836, & \mu_{14} &= 11.706 \\
\mu_{21} &= 3.054, & \mu_{22} &= 6.706, & \mu_{23} &= 9.970, & \mu_{24} &= 13.170 \\
\mu_{31} &= 4.201, & \mu_{32} &= 8.015, & \mu_{33} &= 11.346, & \mu_{34} &= 14.586
\end{aligned}$$

Если нули первой производной функции Бесселя известны, то решение уравнения Гельмгольца (2.101) с граничным условием (2.140) для магнитного потенциала Герца примет следующий вид.

$$\begin{cases} \Pi_{nm}^m(r, \psi) = A_2 J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{a} r\right) e^{in\psi}, \\ g_{nm} = \frac{\mu_{nm}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.142)$$

Формулы (2.142) определяют структуру ТЕ волноводной моды в металлическом волноводе круглого сечения.

Из уравнений (2.101) и (2.142) находим дисперсионное соотношение для моды H_{nm} .

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_{nm}(\omega) \\ \beta_{nm}(\omega) &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - g_{nm}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_{nm}^2}{a^2}}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.143)$$

Частоты отсечки для волновода с круглым сечением определяются следующим выражением.

$$\omega_{nm} = \frac{c \mu_{nm}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.144)$$

Перейдем к обычным частотам $f = \omega / 2\pi$ и запишем дисперсионные соотношения (2.143) в следующем виде.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_{nm}^2} \\ f_{nm} &= \frac{c}{2\pi} \frac{\mu_{nm}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.145)$$

Используя формулы (2.145) были построены дисперсионные соотношения Рис.2.35 для нескольких ТЕ мод.

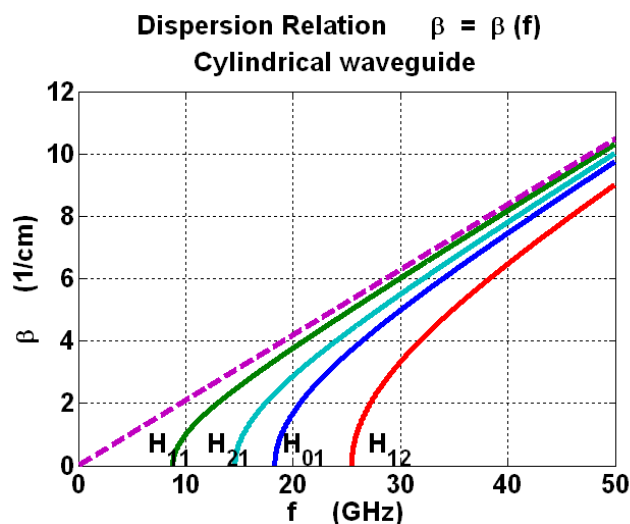


Рис.2.35

Дисперсионные кривые для волноводных мод ТЕ поляризации в волноводе круглого сечения.

Для создания дисперсионных кривых была создана программа TE_c.m в пакете MATLAB. Ниже приводится код этой программы.

```
%волна Н - типа (ТЕ - волна)
%рисование дисперсионных кривых
%волновод круглого сечения

clc
clear

%нули mu_nm производной функции Бесселя J'_n(mu_nm) = 0
muB(1,2) = 3.832;
muB(2,2) = 1.841;
muB(2,3) = 5.331;
muB(3,2) = 3.054;

%радиус волновода
a = 1; % (cm)
fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигагерц
c = 3.e+10; %скорость света (cm/s)

%индексы волноводной моды
n=0; m=1;

%нуль функции Бесселя
mu_nm = muB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*mu_nm/a/eGHz; % (GHz)
```

```

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_01
f1=f_nm:0.01:fm;
bet1 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f1.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=1; m=1;

%нуль функции Бесселя
mu_nm = muB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*mu_nm/a/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_11
f2=f_nm:0.01:fm;
bet2 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f2.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=1; m=2;

%нуль функции Бесселя
mu_nm = muB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*mu_nm/a/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_02
f3=f_nm:0.01:fm;
bet3 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f3.^2 - f_nm^2);

%индексы волноводной моды
n=2; m=1;

%нуль функции Бесселя
mu_nm = muB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*mu_nm/a/eGHz; % (GHz)

%находим постоянную распространения 'bet' для моды E_12
f4=f_nm:0.01:fm;
bet4 = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f4.^2 - f_nm^2);

%находим асимптотику bet = 2*pi/c*f
f0=0:0.01:fm;
bet0 = 2*pi/c*eGHz*f0;

hPl=plot(f1,bet1,f2,bet2,f3,bet3,f4,bet4,f0,bet0,'--');
set(hPl,'LineWidth',4);
grid on

%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('f (GHz)')

```

```
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\beta (1/cm)')

text(19.0, 0.5, 'H_{01}', 'Color', [0 0
0], 'FontSize', 20, 'FontWeight', 'bold')
text(12.0, 0.5, 'H_{21}', 'Color', [0 0
0], 'FontSize', 20, 'FontWeight', 'bold')
text(6.5, 0.5, 'H_{11}', 'Color', [0 0
0], 'FontSize', 20, 'FontWeight', 'bold')
text(27.0, 0.5, 'H_{12}', 'Color', [0 0
0], 'FontSize', 20, 'FontWeight', 'bold')
title('Dispersion Relation \beta = \beta(f) \newline Cylindrical wave-
guide')
```

Обратим внимание на следующие строчки кода.

```
%нули mu_nm производной функции Бесселя J'_n(mu_nm) = 0
muB(1,2) = 3.832;
muB(2,2) = 1.841;
muB(2,3) = 5.331;
muB(3,2) = 3.054;
```

Здесь создается массив `muB` нулей производной функций Бесселя, используя данные приведенные в математических справочниках. Результат работы `TM_c.m` программы показан на Рис.2.35.

Используя найденный магнитный потенциал Герца Π_{nm}^m для моды H_{nm} можно построить картину линий электрического и магнитного поля в плоскости $xу$. Заметим что в формулах (2.142), потенциал Герца записан в комплексном виде. Поэтому надо вначале перейти к действительным полям, и затем сделать вывод о способе построения линий электромагнитного поля в сечении волновода.

Используем формулы (2.32), где проекции электрического и магнитного поля, а также электрический потенциал Герца, записаны в комплексном виде. Умножаем эти поля на волновой множитель $e^{i(\beta z - \omega t)}$, и переходим к действительной форме записи полей. В результате получаем следующие соотношения.

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(\vec{r}, t) = -\omega \frac{\partial \Phi^m}{\partial y}, & \tilde{E}_y(\vec{r}, t) = \omega \frac{\partial \Phi^m}{\partial x}, & \tilde{E}_z(\vec{r}, t) = 0, \\ \tilde{B}_x(\vec{r}, t) = -\beta \frac{\partial \Phi^m}{\partial x}, & \tilde{B}_y(\vec{r}, t) = -\beta \frac{\partial \Phi^m}{\partial y}, & \tilde{B}_z(\vec{r}, t) = g^2 \Psi^m, \end{cases} \quad (2.146)$$

Здесь функции $\Psi^m(\vec{r}, t)$, $\Phi^m(\vec{r}, t)$ – действительная и мнимая части комплексного потенциала Герца $\Pi^m(\vec{r}, t)$, как функции координат и времени (2.26).

$$\begin{aligned}\Pi^m(\vec{r}, t) &= \Pi^m(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)} \\ \Pi^m(\vec{r}, t) &= \Psi^m(\vec{r}, t) + i\Phi^m(\vec{r}, t) \\ \Psi^m(\vec{r}, t) &= \text{Re}(\Pi^m(\vec{r}, t)) \\ \Phi^m(\vec{r}, t) &= \text{Im}(\Pi^m(\vec{r}, t))\end{aligned}$$

Действительные и мнимые части потенциала Герца можно записать еще в следующем виде.

$$\begin{cases} \Psi^m(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\Pi^m(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)} + \Pi^{m*}(x, y)e^{-i(\beta z - \omega t)} \right) \\ \Phi^m(\vec{r}, t) = \frac{1}{2i} \left(\Pi^m(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)} - \Pi^{m*}(x, y)e^{-i(\beta z - \omega t)} \right) \end{cases} \quad (2.147)$$

Теперь подставим потенциал Герца (2.142) для ТЕ моды в (2.147) и получим действительную и мнимую части потенциала Герца в явном виде.

$$\begin{cases} \Psi^m(\vec{r}, t) = A_2 J_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi + \beta z - \omega t) \\ \Phi^m(\vec{r}, t) = A_2 J_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi + \beta z - \omega t) \end{cases} \quad (2.148)$$

Здесь предполагается, что амплитуда моды A_2 величина действительная и положительная. Далее при рассмотрении полей для ТЕ моды, будем использовать действительные векторы. Поэтому в следующих формулах тильду будем опускать.

Из уравнений (2.85) видно, что действительные векторы \vec{E} , \vec{B} взаимно перпендикулярны, так как скалярное произведение $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, а двухмерный вектор магнитного поля $\vec{B} = (B_x, B_y)$ пропорционален двухмерному градиенту функции Φ^m в сечении волновода $z = \text{const}$ в фиксированный момент времени $t = \text{const}$.

$$\vec{B}(x, y) = -\beta \text{grad}(\Phi^m(x, y, z, t))$$

Отсюда следует, что линии двумерного электрического поля $\vec{E} = (E_x, E_y)$ совпадают с эквипотенциальными линиями функции Φ^m

$$\Phi^m(x, y, z, t) = \text{const}$$

в заданном сечении волновода $z = \text{const}$ в фиксированный момент времени $t = \text{const}$.

Линии векторного поля и линии градиентов, позволяет рисовать пакет MATLAB. Поэтому для визуализации линий электрического и магнитного поля для моды H_{nm} была создана программа Hc_type.

Приведем код программы Hc_type.

```
%волна H - типа (TE - волна)
%рисование линий электрического и магнитного полей
%в волноводе круглого сечения

clc
clear

%нули mu_nm производной функции Бесселя J'_n(mu_nm) = 0
muB(1,2) = 3.832;
muB(2,2) = 1.841;
muB(2,3) = 5.331;
muB(3,2) = 3.054;

%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T

%радиус волновода
a = 1; % (см)
b = a;

%задаем сетку в области [-a a -b b]
%для рисования линий уровня
dx = a/100;
dy = b/100;
[x,y] = meshgrid(-a:dx:a, -b:dy:b);

%выбираем моду H_nm
n = 1;
m = 1;

%нуль производной функции Бесселя
mu_nm = muB(n+1,m+1);

%Магнитный потенциал Герца на сетке
```



```

r = sqrt(x.^2+y.^2);
psi = atan2(y,x);
z = besselj(n,mu_nm*r/a).*sin(n*psi-2*pi*t0);

%рисует эквипотенциальные линии (линии электрического поля)
[C,hc] = contour(x,y,z);
set(hc,'LineWidth',3,'Color',[0.8 0.3 0.3]);
axis([-a a -b b]);

%задаем сетку в области [0 a 0 b]
%для рисования линий градиента
dx = a/10;
dy = b/10;
[x,y] = meshgrid(-a:dx:a, -a:dy:b);

%Магнитный потенциал Герца на сетке
r = sqrt(x.^2+y.^2);
psi = atan2(y,x);
z = besselj(n,mu_nm*r/a).*sin(n*psi-2*pi*t0);

%находим минус градиент поля z(x,y)
[px,py] = gradient(-z);

hold on;
%рисует векторы градиента (магнитное поле)
h = quiver(x,y,px,py,1.5);
set(h,'LineWidth',2,'Color',[0.3 0.3 0.8]);

%рисует контур волновода
fi=0:0.01:2*pi;
xc = a*cos(fi);
yc = a*sin(fi);
hy=line(xc, yc);
set(hy,'color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',10);

%заливаем белым цветом область вокруг круга
xp = [xc a a -a -a a a ];
yp = [yc 0 -b -b b b 0 ];

fill(xp,yp,'w')

%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
ticX = -a:0.5:a;
ticY = -b:0.5:b;
set(hAxes,'xtick',ticX);
set(hAxes,'ytick',ticY);
set(hAxes,'FontSize',20,'FontWeight','bold');

%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('x (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('y (cm)')

```

```

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['Lines of E and B fields. TE - mode, H_',strn,'_',strm];
title(string)

%делаем квадратной область текущей области рисования
axis square

```

Нарисуем в сечении волновода линии электрического и магнитного поля ТЕ моды. Возьмем для определенности сечение волновода $z = 0$ и момент времени равный четверти периода $t = T/8$ Рис.2.36. Напомним, что линии электрического поля совпадают с эквипотенциальными линиями функции $\Phi^m(x,y)$. А линии магнитного поля совпадают с линиями градиента функции $\Phi^m(x,y)$ со знаком минус.

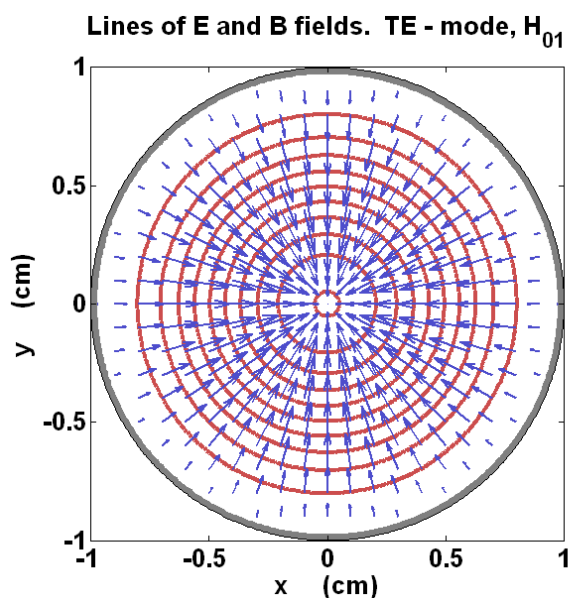


Рис.2.36

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{01} .

На Рис.2.36 показана картина линий электрического и магнитного поля для моды H_{01} с радиусом $a = 1$. Сплошные линии здесь линии электрического поля, стрелки показывают направление магнитного поля.

На Рис.2.37 показана картина линий электрического и магнитного поля для моды H_{11} с радиусом $a = 1$. Сплошные линии здесь линии электрического поля, стрелки показывают направление магнитного поля.

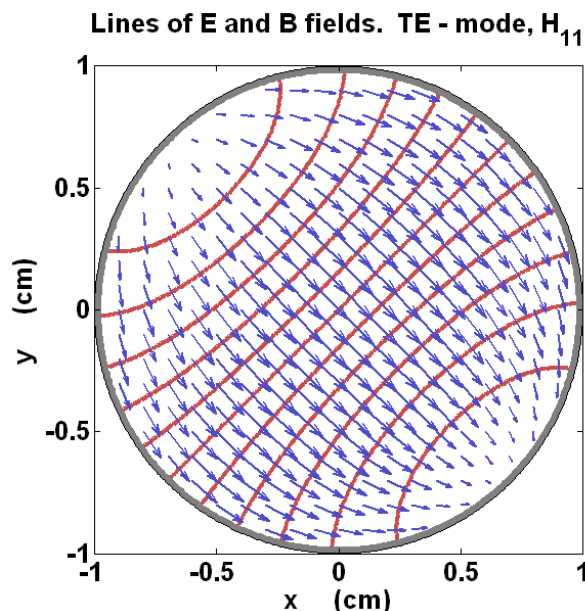


Рис.2.37

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для волноводной моды H_{11} .

Найдем мощность, переносимую ТЕ модой в цилиндрическом волноводе. Поскольку формула (2.106) для электрического потенциала Герца и формула (2.142) для магнитного потенциала Герца формально совпадают, то многие формулы для моды ТМ легко можно перевести в формулы для моды ТЕ.

Берем формулу (2.49) для вектора Пойнтинга ТЕ моды, и формулу (2.113) для вектора Пойнтинга ТМ моды в цилиндрической системе координат. Аналогично получаем вектор Пойнтинга для моды ТЕ в цилиндрической системе координат.

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \vec{e}_z \frac{\beta \omega}{2 \mu_0} \left(\left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial \psi} \right|^2 \right) \quad (2.148)$$

Аналогично формуле (2.115) для ТМ моды получаем формулу мощности для ТЕ моды.

$$P = \frac{\beta \omega}{2 \mu_0} 2 \pi A_2^2 \int_0^a \left\{ \left(\frac{\mu_{nm}}{a} \right)^2 \left[J'_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \right]^2 + \frac{n^2}{r^2} \left[J_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \right]^2 \right\} r dr \quad (2.149)$$

Основное отличие формулы (2.149) для мощности ТЕ моды от формулы (2.115) для мощности ТМ моды, состоит в следующем. В формуле (2.115) ν_{nm} – нули функции Бесселя, а формуле (2.149) μ_{nm} – нули производной функции Бесселя.

$$J_n(\nu_{nm}) = 0, \quad J'_n(\mu_{nm}) = 0 \quad (2.150)$$

В остальном формулы (2.149) и (2.115) имеют одинаковую структуру. Интеграл из формулы (2.149) выпишем отдельно, и сделаем в нем замену $t = \mu_{nm} r / a$.

$$I = \int_0^{\mu_{nm}} \left\{ J_n'^2(t) + \frac{n^2}{t^2} J_n^2(t) \right\} t dt \quad (2.151)$$

Используя формулы (2.120) - (2.126) вычисляем интеграл (2.151).

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_{nm}^2}{2} \left(J_{n-1}^2(\mu_{nm}) - J_{n-2}(\mu_{nm}) J_n(\mu_{nm}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu_{nm}^2}{2} \left(J_{n+1}^2(\mu_{nm}) - J_n(\mu_{nm}) J_{n+2}(\mu_{nm}) \right) \right\} \quad (2.152)$$

Преобразуем формулу (2.152)

$$I = \frac{\mu_{nm}^2}{4} \left\{ J_{n-1}^2(\mu_{nm}) + J_{n+1}^2(\mu_{nm}) - \right. \\ \left. - J_n(\mu_{nm}) (J_{n-2}(\mu_{nm}) + J_{n+2}(\mu_{nm})) \right\} \quad (2.153)$$

Применим формулу (2.117) для нашего случая.

$$J'_n(\mu_{nm}) = \frac{n}{\mu_{nm}} J_n(\mu_{nm}) - J_{n+1}(\mu_{nm}) \\ J'_n(\mu_{nm}) = J_{n-1}(\mu_{nm}) - \frac{n}{\mu_{nm}} J_n(\mu_{nm}) \quad (2.154)$$

Учитывая, что μ_{nm} – ноль производной функции Бесселя (2.150) из (2.154) получаем следующую полезную формулу.

$$J_{n-1}(\mu_{nm}) = J_{n+1}(\mu_{nm}) = \frac{n}{\mu_{nm}} J_n(\mu_{nm}) \quad (2.155)$$

Используя формулу (2.119) дважды, можно получить следующую формулу.

$$\begin{aligned} J_{n-2}(\mu_{nm}) + J_{n+2}(\mu_{nm}) &= \\ &= \frac{2}{\mu_{nm}} ((n-1)J_{n-1}(\mu_{nm}) + (n+1)J_{n+1}(\mu_{nm})) - 2J_n(\mu_{nm}) \end{aligned} \quad (2.156)$$

Используя (2.155) формуле (2.156) можно придать следующий вид.

$$J_{n-2}(\mu_{nm}) + J_{n+2}(\mu_{nm}) = \left(\frac{4n^2}{\mu_{nm}^2} - 2 \right) J_n(\mu_{nm}) \quad (2.157)$$

Окончательно, используя формулу (2.155) и (2.157) интеграл можно записать в следующем виде.

$$I = \frac{1}{2} (\mu_{nm}^2 - n^2) J_n^2(\mu_{nm}) \quad (2.158)$$

Учитывая, что интеграл I (2.151) по определению положительная величина, то формула (2.158) доказывает следующее неравенство для нулей производной функции Бесселя.

$$\mu_{nm} > n$$

Приведенные выше значения нулей μ_{nm} производной функции Бесселя удовлетворяют этому неравенству.

После подстановки (2.158) в выражение (2.149) формула мощности для ТЕ моды принимает следующий вид.

$$P = \frac{\beta \omega \pi}{\mu_0} A_2^2 \frac{1}{2} (\mu_{nm}^2 - n^2) J_n^2(\mu_{nm}) \quad (2.159)$$

В формуле (2.159) амплитуда A_2 считается величиной действительной и положительной. Зная радиус волновода a , частоту излучения ω и мощность P , переносимую модой H_{nm} , по формуле (2.159) можно найти амплитуду моды A_2 .

Используя явный вид (2.148) магнитного потенциала Герца, с помощью формул (2.146) можно найти все проекции электрического E_x, E_y, E_z и магнитного

B_x, B_y, B_z поля ТМ моды. Но для цилиндрического волновода удобно найти проекции вектора электрического и магнитного поля на орты цилиндрической системы координат.

Используя формулы (2.112), (2.131), (2.146) выражаем проекции электрического и магнитного поля ТЕ моды в цилиндрической системе координат через действительную и мнимую части магнитного потенциала Герца.

$$\begin{cases} E_r(r, \psi, z, t) = -\omega \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^m}{\partial \psi}, & E_\psi(r, \psi, z, t) = \omega \frac{\partial \Phi^m}{\partial r}, & E_z(r, \psi, z, t) = 0, \\ B_r(r, \psi, z, t) = -\beta \frac{\partial \Phi^m}{\partial r}, & B_\psi(r, \psi, z, t) = -\beta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^m}{\partial \psi}, & B_z(r, \psi, z, t) = g^2 \Psi^m, \end{cases} \quad (2.160)$$

Подставляя в формулы (2.160) явные значения потенциала Герца (2.148), находим проекции электрического и магнитного поля для цилиндрического волновода.

$$\begin{cases} E_r(r, \psi, z, t) = -\omega \frac{n}{r} A_2 J_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi + \beta z - \omega t), \\ E_\psi(r, \psi, z, t) = \omega \frac{\mu_{nm}}{a} A_2 J'_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi + \beta z - \omega t), \\ E_z(r, \psi, z, t) = 0 \end{cases} \quad (2.161)$$

$$\begin{cases} B_r(r, \psi, z, t) = -\beta \frac{\mu_{nm}}{a} A_2 J'_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \sin(n\psi + \beta z - \omega t), \\ B_\psi(r, \psi, z, t) = -\beta \frac{n}{r} A_2 J_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi + \beta z - \omega t), \\ B_z(r, \psi, z, t) = g_{nm}^2 A_2 J_n \left(\frac{\mu_{nm}}{a} r \right) \cos(n\psi + \beta z - \omega t) \end{cases} \quad (2.162)$$

На металлической поверхности волновода $r = a$, в сечении $z = 0$, в некоторый момент t_0 получаем следующие нормальные и касательные составляющие электромагнитного поля ТЕ моды.

$$\begin{cases} E_r(a, \psi) = -E_n(\psi) = -\omega \frac{n}{a} A_2 J_n(\mu_{nm}) \cos(n\psi - \omega t_0), \\ E_\psi(a, \psi) = -E_\tau(\psi) = 0, \\ E_z(a, \psi) = E_z(\psi) = 0, \end{cases} \quad (2.163)$$

$$\begin{cases} B_r(a, \psi) = -B_n(\psi) = 0, \\ B_\psi(a, \psi) = -B_\tau(\psi) = -\beta \frac{n}{a} A_2 J_n(\mu_{nm}) \cos(n\psi - \omega t_0), \\ B_z(a, \psi) = B_z(\psi) = g_{nm}^2 A_2 J_n(\mu_{nm}) \cos(n\psi - \omega t_0) \end{cases} \quad (2.164)$$

Итак, на поверхности металлического цилиндрического волновода имеем следующие значения электрического и магнитного поля.

$$\begin{cases} E_n(\psi) = \omega \frac{n}{a} A_2 J_n(\mu_{nm}) \cos(n\psi - \omega t_0), \\ B_\tau(\psi) = \beta \frac{n}{a} A_2 J_n(\mu_{nm}) \cos(n\psi - \omega t_0) \\ B_z(\psi) = g_{nm}^2 A_2 J_n(\mu_{nm}) \cos(n\psi - \omega t_0) \end{cases} \quad (2.165)$$

Используя граничные условия (2.14) находим следующие значения поверхностной плотности заряда и поверхностной плотности тока.

$$\begin{cases} \rho_s(\psi) = \varepsilon_0 E_n(\psi), \\ j_{sz}(\psi) = \frac{1}{\mu_0} B_\tau(\psi) \\ j_{s\tau}(\psi) = -\frac{1}{\mu_0} B_z(\psi) \end{cases} \quad (2.166)$$

Пример ТЕ моды, волновод круглого сечения.

Рассмотрим металлический волновод круглого сечения. Возьмем следующий радиус волновода $a = 3 \text{ см}$. Будем рассматривать H_{31} волновую моду.

С помощью формулы (2.145) находим частоту отсечки f_c (cutoff frequency) для данной моды.

$$f_c = 6.89 \text{ ГГц}$$

С помощью формулы (2.145) и программы ТЕ_с.м получаем дисперсионную кривую для моды H_{31} .

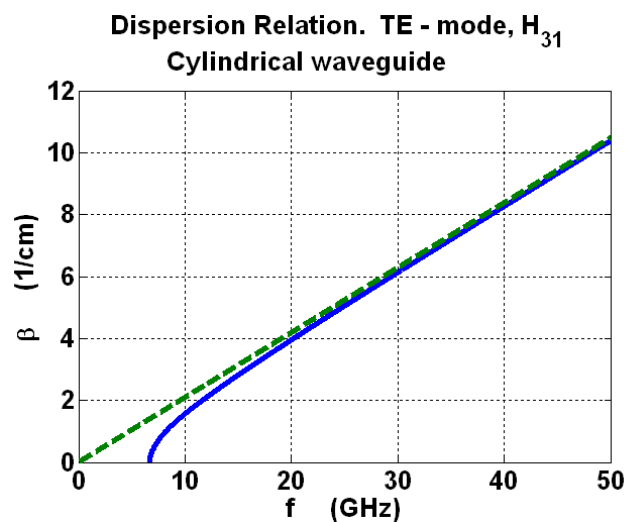


Рис.2.38

Дисперсионная кривая для волноводной моды H_{31} в волноводе круглого сечения.

Картину линий электрического и магнитного поля построим с помощью программы `nc_type.m`. Рассмотрим картину линий поля в сечении $z = 0$ в момент времени равном одной восьмой периода $t = T/8$ Рис.2.39.

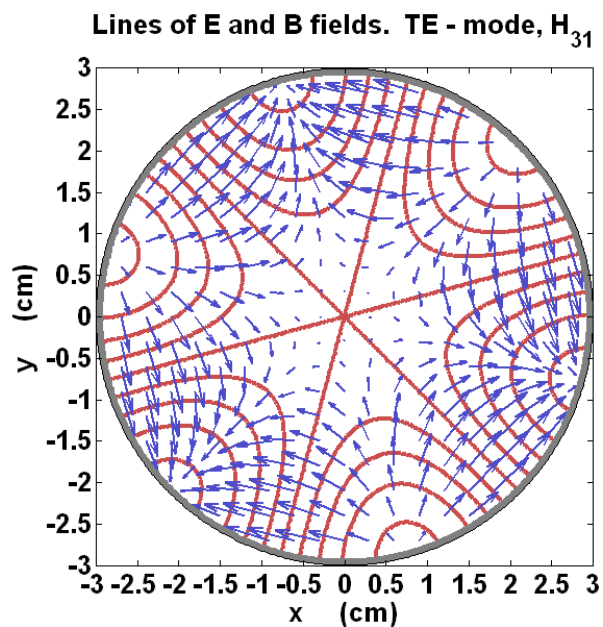


Рис.2.39

Линии электрического и магнитного поля в сечении волновода для
волноводной моды H_{31} .

Выберем частоту f в 1.5 раз большую частоты отсечки.

$$f = 1.5 f_c = 10.03 \text{ ГГц}$$

По формуле (2.145) находим постоянную распространения моды E_{31} на частоте f .

$$\beta = 1.57 \text{ см}^{-1}$$

По формуле (2.2) и (2.4) находим длину волны излучения и фазовую скорость.

$$\lambda = 4.01 \text{ см}, \quad v_p = 4.025 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Фазовая скорость моды оказалась больше скорости света. Однако групповая скорость, найденная по формуле (2.4) оказывается меньше скорости света.

$$v_g = 2.236 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Возьмем мощность, переносимую модой, равную $P = 100 \text{ Вт}$. По формуле (2.159) находим амплитуду моды.

$$A_2 = 2.23 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} \cdot \text{см}^2$$

По формулам (2.165) найдем наибольшее значение электрического и магнитного поля на контуре волновода.

$$E_{\max} = 61.02 \text{ В/см}, \quad B_{\max} = 1.52 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}, \quad H_{\max} = 0.12 \text{ А/см}$$

Здесь учтена связь магнитной индукции и напряженности магнитного поля в вакууме $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

По формулам (2.166) найдем наибольшее значение поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока на контуре волновода.

$$\rho_{s \max} = 0.0054 \text{ нКл/см}^2,$$

$$j_{s z \max} = 0.121 \text{ А/см}$$

$$j_{s \tau \max} = 0.151 \text{ А/см}$$

Нарисуем изменение электрического и магнитного поля вдоль контура волновода. Будем двигаться вдоль контура из точки $(a,0)$ против часовой стрелки. Координатой на контуре является переменная s , связанная с углом ψ , следующим соотношением.

$$s = a\psi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (2.167)$$

Используя формулы (2.165) и соотношение (2.167) получаем следующую картину распределения электрического и магнитного поля вдоль контура волновода Рис.2.40.

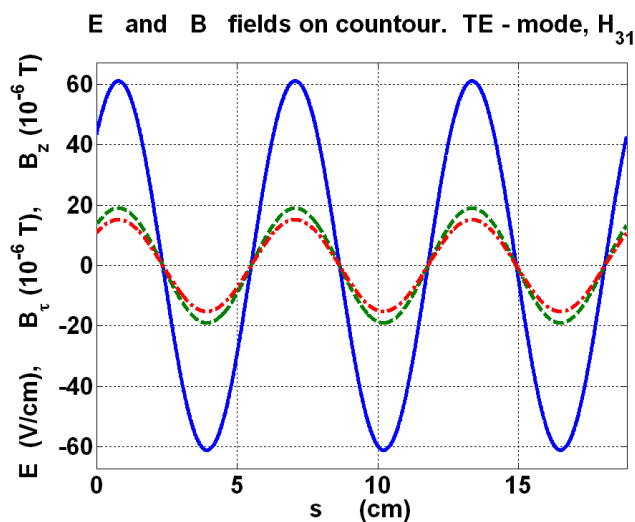


Рис.2.40

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода для волноводной моды H_{31} .

Используя формулы (2.166) и соотношение (2.167) получаем следующую картину распределения поверхностной плотности электрического заряда и поверхностной плотности электрического тока вдоль контура волновода Рис.2.41.

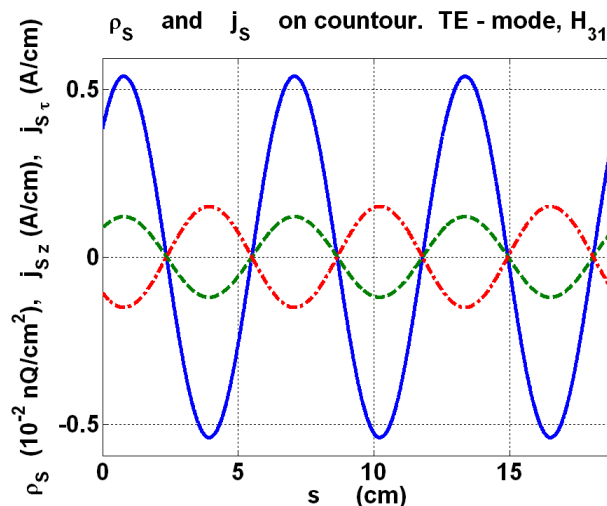


Рис.2.41

Распределение поверхностного заряда и поверхностного тока вдоль контура сечения волновода для волноводной моды H_{31} .

Распределение электрического и магнитного поля вдоль контура сечения волновода, а также распределение плотности поверхностного заряда, и поверхностного тока вычисляется в программе `Contour_TE_c.m`. Там же в этой программе рисуются эти распределения. Приведем код этой программы `Contour_TE_c.m`

```
%волна H - типа (TE - волна)
%волновод круглого сечения

% распределение электрического и магнитного поля
% по контуру волновода

% распределение поверхностного заряда и поверхностного тока
% по контуру волновода

clc
clear

format short g

%нули mu_nm производной функции Бесселя J'_n(mu_nm) = 0
muB(1,2) = 3.832; muB(1,3) = 7.016; muB(1,4) = 10.173; muB(1,5) = 13.324;
muB(2,2) = 1.841; muB(2,3) = 5.331; muB(2,4) = 8.836; muB(2,5) = 11.706;
muB(3,2) = 3.054; muB(3,3) = 6.706; muB(3,4) = 9.970; muB(3,5) = 13.170;
```

```
muB(4,2) = 4.201; muB(4,3) = 8.015; muB(4,4) = 11.346; muB(4,5) = 14.586;
```

```
%в сечении z = 0
%в момент времени t0
t0 = 1/8; % в единицах периода T
```

```
%мощность, переносимая модой
P = 100; % (Вт)
```

```
%радиус волновода
a = 3; % (см)
```

```
fm = 50; %максимальная частота (GHz)
eGHz = 1.e+9; %один гигаГерц
c = 3.e+8; %скорость света (см/м)
eps0 = 8.8542e-12; %электрическая постоянная (Ф/м)
mu0 = 4*pi*1.e-7; %магнитная постоянная (Гн/м)
```

```
%индексы волноводной моды H_nm
n=3;
m=1;
```

```
%нуль производной функции Бесселя
mu_nm = muB(n+1,m+1);
%частота отсечки
f_nm = c/2/pi*mu_nm/a*100/eGHz; % (GHz)
```

```
fc = f_nm;
disp('fc=')
disp(fc)
```

```
%выбираем частоту f = 1.5*fc
f = 1.5*fc; % (GHz)
disp('f=')
disp(f)
```

```
%находим постоянную распространения 'bet' для моды H_nm
%на частоте f
bet = 2*pi/c*eGHz*sqrt(f.^2 - f_nm^2)/100; % (1/cm)
disp('bet=')
disp(bet)
```

```
%находим длину волны моды H_nm
lamb = 2*pi/bet; % (см)
disp('lamb=')
disp(lamb)
```

```
%находим фазовую скорость волны
vp = 2*pi*f*eGHz/bet; % (см/с)
disp('vp=')
disp(vp)
```

```
%находим групповую скорость моды
vg = c*(c/vp)*10^4; % (см/с)
```

```

disp('vg=')
disp(vg)

%Амплитуда моды
kA = bet*100*2*pi*f*eGHz*pi/mu0/2*(mu_nm^2-n^2)*(besselj(n,mu_nm))^2; %
(1/(Гн*с))
A2 = sqrt(P/kA)*10^4; % (Тл*см^2)
disp('A2=')
disp(A2)

%находим наибольшее значение электрического и магнитного полей
%на контуре волновода

g2 = (mu_nm/a)^2;
A2n = n/a*A2*besselj(n,mu_nm); % (Тл*см) = (10^{-4} с*В/см))
B2z = g2*A2*besselj(n,mu_nm); % (Тл)

Eampl = 2*pi*f*eGHz*A2n/10^4; % (В/см)
Btampl = bet*A2n; % (Тл)
Bzampl = B2z; % (Тл)

Emax = abs(Eampl); % (В/см)
Btmax = abs(Btampl); % (Тл)
Bzmax = abs(Bzampl); % (Тл)
Htmax = Btmax/mu0/100; % (А/см)
Hzmax = Bzmax/mu0/100; % (А/см)

disp('          Emax,          Btmax,          Htmax')
disp([Emax    Btmax    Htmax])
disp('          Bzmax,          Hzmax')
disp([0    Bzmax    Hzmax])

%находим наибольшее значение поверхностной плотности электрического
заряда
%поверхностной плотности электрического тока
%на контуре волновода

roSampl = Eampl*100*eps0/10^4*10^9;
jSzampl = Btampl/mu0/100;
jStampl = -Bzampl/mu0/100;

roSmax = abs(roSampl); % (нКл/см^2)
jSzmax = abs(jSzampl); % (А/см)
jStmax = abs(jStampl); % (А/см)

disp('          roSmax,          jSzmax,          jStmax')
disp([roSmax    jSzmax    jStmax])

%находим поля, заряды и токи по контуру волновода

s1 = 0:0.01:2*pi*a;
psi1 = s1/a;
E1 = Eampl*cos(n*psi1 - 2*pi*t0); % (В/см)

```

```

Bt1 = Bzamp1*cos(n*psi1 - 2*pi*t0);           % (Тл)
Bz1 = Btamp1*cos(n*psi1 - 2*pi*t0);           % (Тл)
roS1 = roSamp1*cos(n*psi1 - 2*pi*t0);         % (нКл/см^2)
jSz1 = jSzamp1*cos(n*psi1 - 2*pi*t0);         % (А/см)
jSt1 = jStamp1*cos(n*psi1 - 2*pi*t0);         % (А/см)

Bt1 = Bt1*10^6;
Bz1 = Bz1*10^6;
roS1 = roS1*10^2;

Btmax = Btmax*10^6;
Bzmax = Bzmax*10^6;
roSmax = roSmax*10^2;

EBmax = max([Emax,Btmax,Bzmax]);
roSjSmax = max([roSmax,jSzmax,jStmax]);

%рисуюем распределение поля по контуру волновода

figure(12)
hPl = plot(s1,E1,s1,Bt1,'--',s1,Bz1,'-.');
set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*pi*a -1.1*EBmax 1.1*EBmax]);
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
%set(hAxes,'xtick',[1.5 1.75 2.0 2.25 2.5])
set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат
xlabel('s (cm)')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('E (V/cm), B_{\tau} (10^{-6} T), B_z (10^{-6} T)')
%title('E (V/cm), B (10^{-6} T)')

grid on

strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['E and B fields on countour. TE - mode,'
H_',strn,'_',strm];
title(string)

%рисуюем распределение заряда и тока по контуру волновода

figure(13)
hPl = plot(s1,roS1,s1,jSz1,'--',s1,jSt1,'-.');
set(hPl,'LineWidth',4);
axis([0 2*pi*a -1.1*roSjSmax 1.1*roSjSmax]);
%функция gca возвращает дескриптор текущих осей координат
hAxes = gca;
%функция set устанавливает метки вдоль оси 'x' координатных осей hAxes
%set(hAxes,'xtick',[1.5 1.75 2.0 2.25 2.5])
set(hAxes,'FontSize',26,'FontWeight','bold');
%устанавливаем метку на оси 'x' текущих осей координат

```

```

xlabel('s      (cm) ')
%устанавливаем метку на оси 'y' текущих осей координат
ylabel('\rho_{S} (10^{-2} nQ/cm^{2}),      j_{S z} (A/cm),
j_{S \tau} (A/cm)')
%title('\rho_{S} (10^{-2} nQ/cm^{2}),      j_{S} (A/cm)')

grid on
strn = int2str(n);
strm = int2str(m);
string = ['\rho_{S}      and      j_{S}      on countour. TE - mode,
H_', strn, '_', strm];
title(string)

format short

```

Таким образом, программа Contour_TE_c.m, по формулам (2.165), (2.166), (2.167) вычисляет и выводит в графическом виде распределения электрического и магнитного поля, поверхностной плотности заряда, и поверхностной плотности тока. Результат работы программы показан на Рис.2.40, Рис.2.41.

Контрольные вопросы.

1. В каком виде ищется электромагнитное поле волны, бегущей вдоль волновода.
2. Какие формулы применяются для нахождения фазовой и групповой скорости волноводной моды.
3. Каким уравнениям удовлетворяют продольные составляющие электрического и магнитного поля волноводной моды.
4. Каким граничным условиям на поверхности металлического волновода удовлетворяет потенциал Герца для ТМ моды.
5. Каким граничным условиям на поверхности металлического волновода удовлетворяет потенциал Герца для ТЕ моды.
6. Как выражается электрическое и магнитное поле излучения через электрический потенциал Герца.
7. Как выражается электрическое и магнитное поле излучения через магнитный потенциал Герца.
8. Как выражается средний вектор Пойнтинга через векторные потенциалы Герца для ТМ и ТЕ моды.

9. Как выглядит решение для электромагнитного поля ТМ моды в волноводе прямоугольного сечения.
10. Как выглядит решение для электромагнитного поля ТЕ моды в волноводе прямоугольного сечения.
11. Как выглядит дисперсионное соотношение для ТМ моды в волноводе прямоугольного сечения.
12. Как выглядит дисперсионное соотношение для ТЕ моды в волноводе прямоугольного сечения.
13. Какие функции MATLAB используются для построения линий электрического и магнитного поля для ТМ моды в волноводе прямоугольного сечения.
14. Какие функции MATLAB используются для построения линий электрического и магнитного поля для ТЕ моды в волноводе прямоугольного сечения.
15. Как выглядит решение для электромагнитного поля ТМ моды в волноводе круглого сечения.
16. Как выглядит решение для электромагнитного поля ТЕ моды в волноводе круглого сечения.
17. Как выглядит дисперсионное соотношение для ТМ моды в волноводе круглого сечения.
18. Как выглядит дисперсионное соотношение для ТЕ моды в волноводе круглого сечения.
19. Какие функции MATLAB используются для построения линий электрического и магнитного поля для ТМ моды в волноводе круглого сечения.
20. Какие функции MATLAB используются для построения линий электрического и магнитного поля для ТЕ моды в волноводе круглого сечения.
21. Какие формулы позволяют найти плотность электрического заряда и плотность тока на поверхности металлического волновода.
22. Какие формулы применяются для нахождения частоты отсечки для ТМ моды в волноводе прямоугольного сечения.
23. Какие формулы применяются для нахождения частоты отсечки для ТЕ моды в волноводе прямоугольного сечения.

24. Какие формулы применяются для нахождения частоты отсечки для ТМ моды в волноводе круглого сечения.
25. Какие формулы применяются для нахождения частоты отсечки для ТЕ моды в волноводе круглого сечения.
26. Как можно управлять параметрами графической функции `contour()` пакета MATLAB.
27. Как можно управлять параметрами графической функции `gradient()` пакета MATLAB.
28. Какие функции MATLAB используются для нахождения максимальных значений поля токов и зарядов для ТМ и ТЕ моды на контуре волновода прямоугольного сечения.
29. Какие функции MATLAB используются для нахождения максимальных значений поля токов и зарядов для ТМ и ТЕ моды на контуре волновода круглого сечения.
30. Какие функции MATLAB используются для нахождения нулей функции Бесселя.