

Задание к домашней работе 4

(Работа выполняется в программе Comsol)

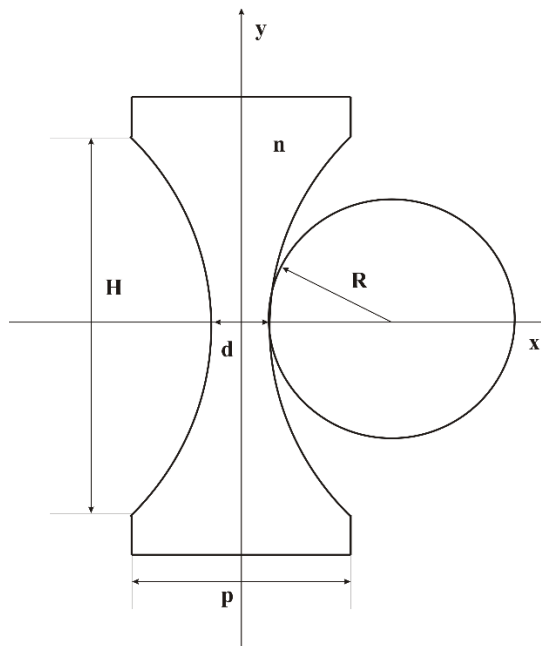
Краткое введение.

Для рентгеновского излучения мягкого диапазона волн и глубокого ультрафиолета практически для всех веществ, показатель преломления имеет следующую структуру.

$$n(\omega) = 1 - \delta(\omega) + i\gamma(\omega), \quad \delta, \gamma \ll 1$$

Так как действительная часть показателя преломления меньше единицы, то для фокусировки рентгеновского излучения используются двояковогнутые линзы.

Такая линза выглядит следующим образом.



Здесь R – радиус кривизны поверхности линзы в центральной части, d - толщина линзы в центральной части, p - толщина линзы в периферийной части, H - диаметр линзы (геометрическая апертура).

Преломляющие поверхности выбираем параболической формы. Уравнения для левой и правой параболы

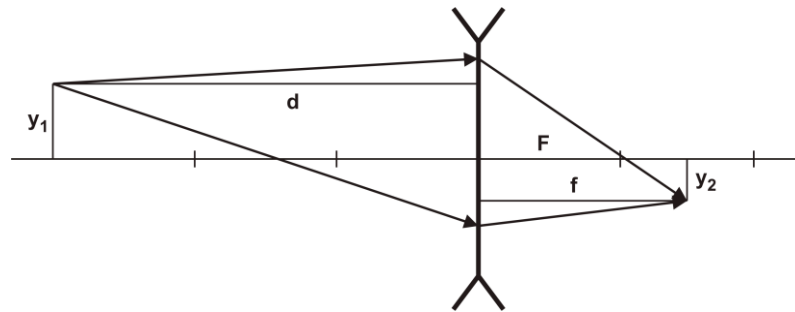
$$x = -\frac{d}{2} - \frac{y^2}{2R}, \quad x = +\frac{d}{2} + \frac{y^2}{2R}$$

Фокусное расстояние такой линзы определяется действительной частью показателя преломления, и вычисляется по формуле.

$$F = \frac{R}{2\delta}$$

Если диаметр линзы много больше ее толщины, то можно использовать формулу тонкой линзы.

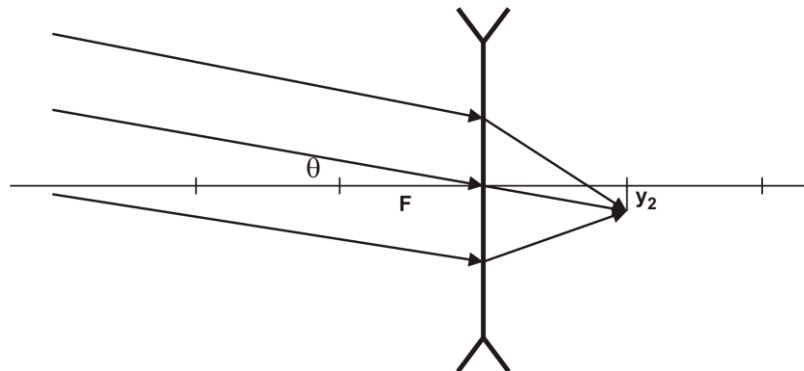
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$



Коэффициент увеличения (уменьшения) поперечного размера объекта определяется формулой.

$$\Gamma = \frac{y_2}{y_1} = \frac{f}{d}$$

Если рассматривать параллельный пучок лучей, падающий на линзу, то картина фокусировки будет следующей.



Здесь сдвиг точки фокуса определяется формулой.

$$y_2 = F \tan \theta$$

Варианты задания.

Для примера будем рассматривать линзу из бериллия (Beryllium) на длинах волн рентгеновского излучения $\lambda = 13.0 \div 16.0 \text{ nm}$.

| Варианты | λ, nm | δ | H, mkm | R, mm | Γ |
|----------|----------------------|----------|-----------------|----------------|----------|
| 1 | 13.0 | 0.0089 | 600 | 1.5 | 1/3 |
| 2 | 13.5 | 0.011 | 550 | 2.0 | 1/4 |
| 3 | 14.0 | 0.014 | 500 | 2.5 | 1/2 |
| 4 | 14.5 | 0.016 | 450 | 3.0 | 1/3 |
| 5 | 15.0 | 0.018 | 400 | 2.5 | 1/4 |
| 6 | 15.5 | 0.020 | 450 | 2.0 | 1/2 |
| 7 | 16.0 | 0.022 | 500 | 1.5 | 1/3 |
| 8 | 13.0 | 0.0089 | 550 | 1.0 | 1/4 |
| 9 | 13.5 | 0.011 | 600 | 2.0 | 1/2 |
| 10 | 14.0 | 0.014 | 650 | 2.5 | 1/3 |
| 11 | 14.5 | 0.016 | 700 | 3.0 | 1/4 |
| 12 | 15.0 | 0.018 | 650 | 2.5 | 1/2 |

- _ λ - длина волны рентгеновского излучения
- _ δ - коэффициент преломления бериллия на данной длине волны λ .
- _ H - диаметр линзы.
- _ R - радиус кривизны преломляющей поверхности линзы.
- _ Γ - поперечный коэффициент увеличения линзы.

В работе использовать следующие смещения точечных источников и угол наклона параксиальных лучей к оптической оси.

$$y_1 = 200 \text{ mkm}, \quad y_{10} = 50 \text{ mkm}, \quad y_{20} = -50 \text{ mkm}, \quad \theta = 0.1 \text{ deg}$$

В домашней работе надо:

- 1) провести вычисления параметров получаемых изображений, по заданным формулам.
- 2) Затем провести моделирование в программе Comsol, и сравнить результаты моделирования (картинки распределения электрического поля) с теоретическими расчетами. Совпадения должны быть близкими.

Рассмотрим вариант.

| Варианты | λ, nm | δ | H, mkm | R, mm | Γ |
|----------|---------------|----------|----------|---------|----------|
| х | 13.5 | 0.011 | 600 | 1.0 | 1/2 |

Задание 1.

Изображение точечного источника.

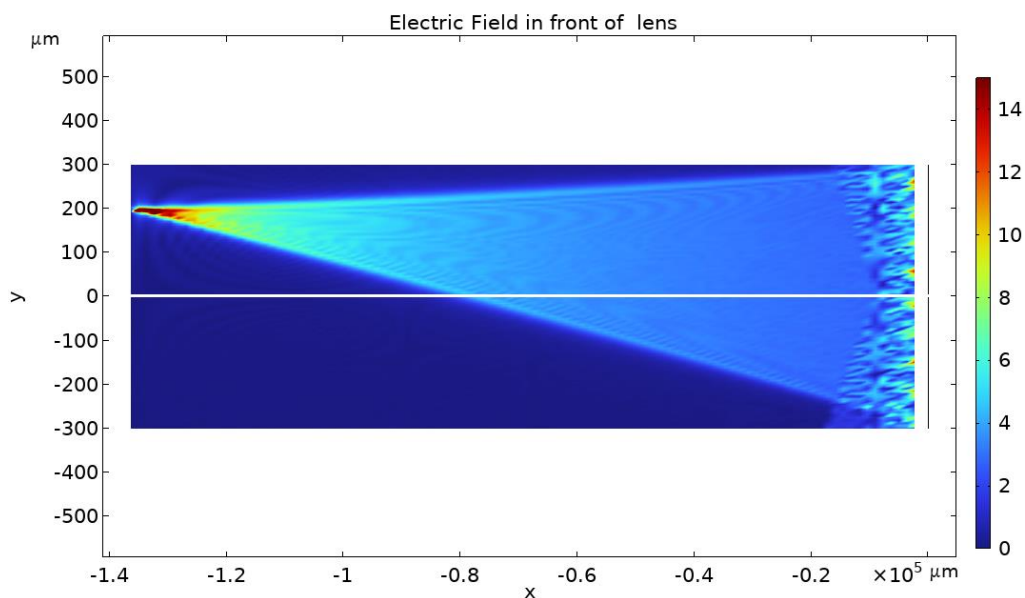
(Проект находится в папке Test_1).

Используем формулы тонкой линзы, получаем следующие параметры.

$$F = 45,5 \text{ mm}, \quad d = 136.4 \text{ mm}, \quad f = 68.2 \text{ mm}, \quad y_2 = 100 \text{ mkm}$$

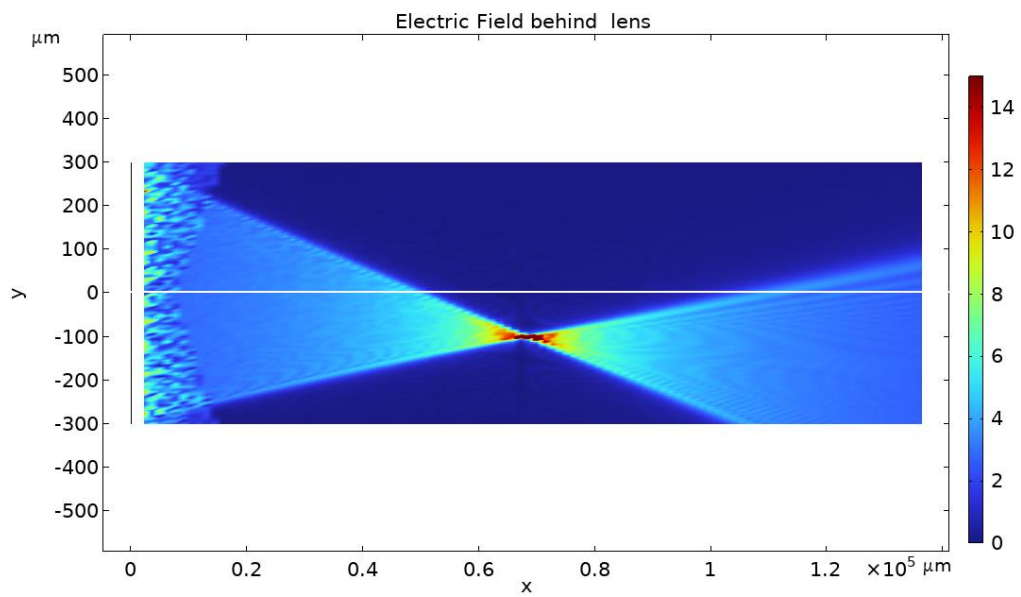
В результате моделирования нужно получить 4 картинки.

_ Первая – поле излучения перед линзой.



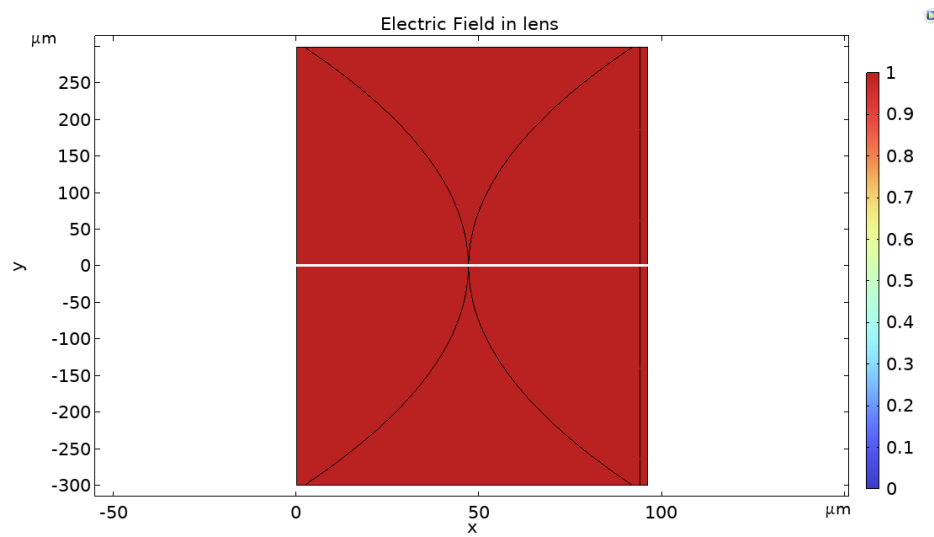
На картинке расстояние от источника до линзы примерно равно $d = 136 \text{ mm}$, а смещение от оптической оси $y_1 = 200 \text{ mkm}$.

_ Вторая – поле излучения позади линзы.

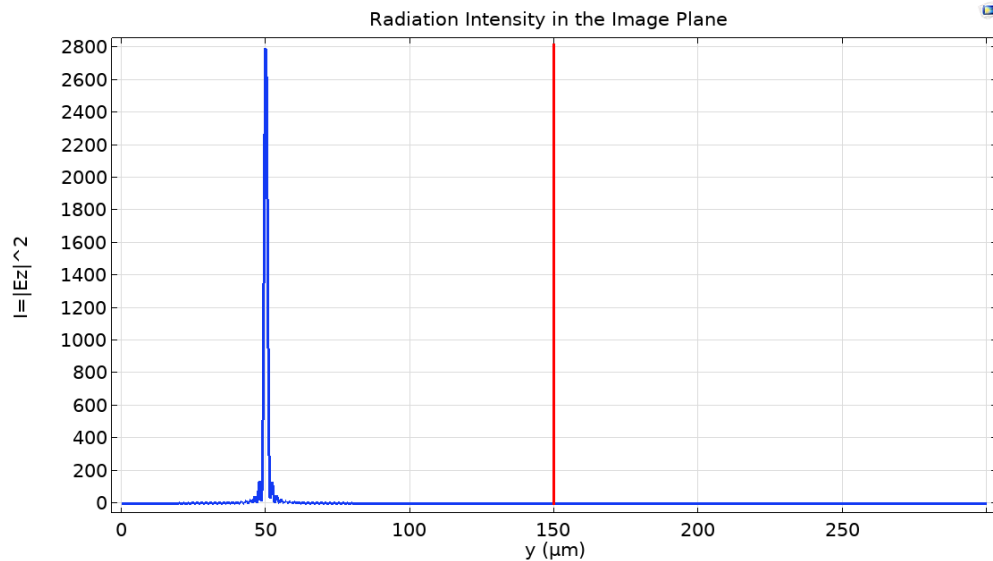


На картинке расстояние от изображения до линзы примерно равно $f = 68 \text{ mm}$, а смещение от оптической оси $y_2 = 100 \text{ mkm}$.

_ Третья – поле излучения внутри линзы.



_ Четвертая - сфокусированное изображение точечного источника в плоскости изображения.



На картинке изображение точечного источника смещено от оптической оси на расстояние $y_2 = 100 \text{ mkm}$.

Выводы. Совпадение результатов моделирования и теоретических результатов - хорошее.

Замечание. Оптическая ось – белая линия, и положение оптической оси – красная линия, были нарисованы после моделирования в графических редакторах Paint или Corel Photo Paint.

Задание 2.

Фокусировка параллельного пучка лучей линзой с диафрагмой.

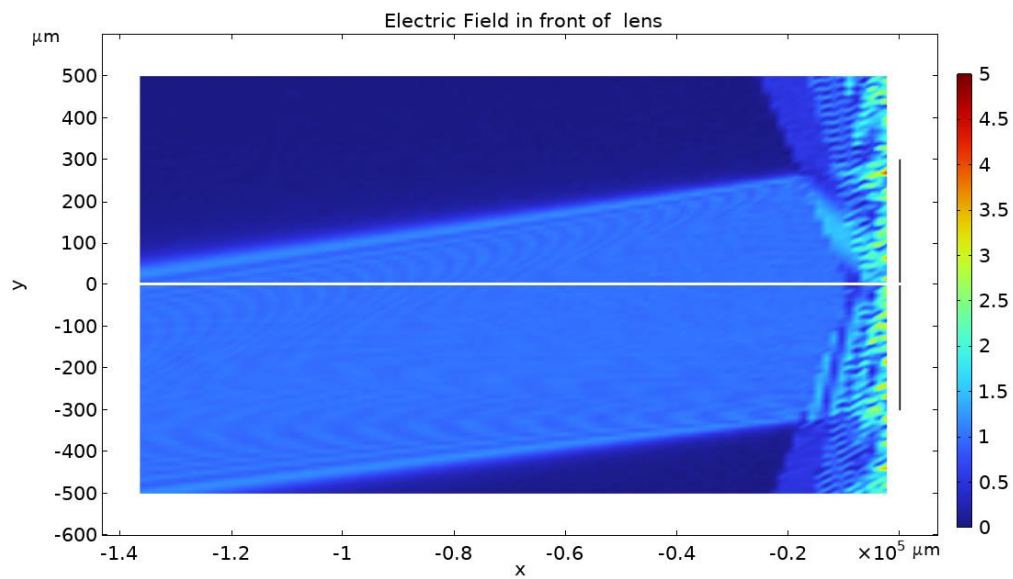
(Проект находится в папке Test_2).

Используем формулы тонкой линзы, получаем следующие параметры.

$$F = \frac{R}{2\delta} = 45,5 \text{ mm}, \quad y_2 = F \tan \theta = 79.4 \text{ mkm}$$

В результате моделирования нужно получить 4 картинки.

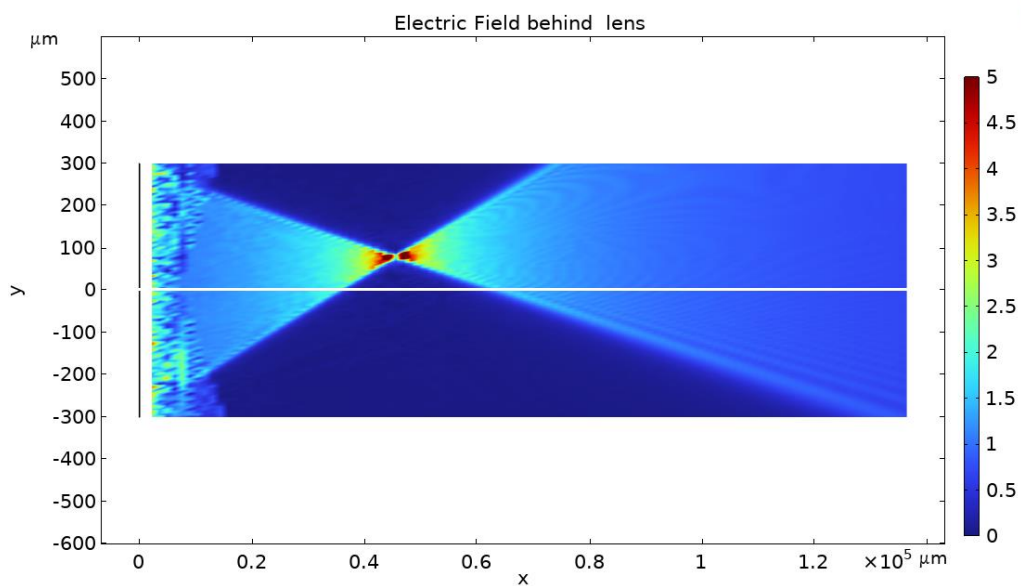
_ Первая – поле излучения перед линзой.



На картинке угол наклона параксиальных лучей можно оценить по формуле.

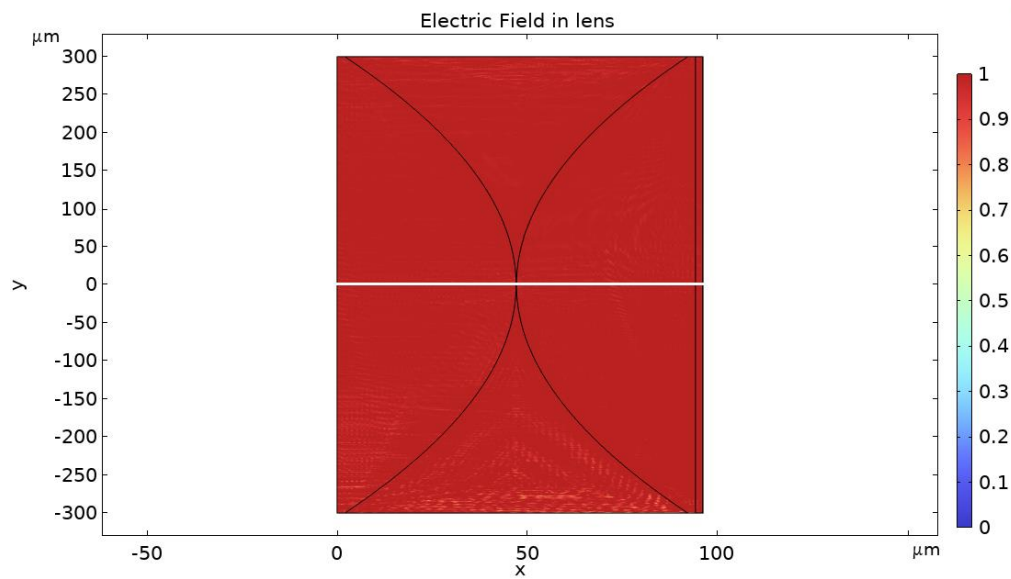
$$\tan \theta = \frac{300 \text{ (} \mu\text{m)} }{136 \text{ (mm)}} = 0.0022 \rightarrow \theta = 0.12 \text{ deg}$$

_ Вторая – поле излучения позади линзы.

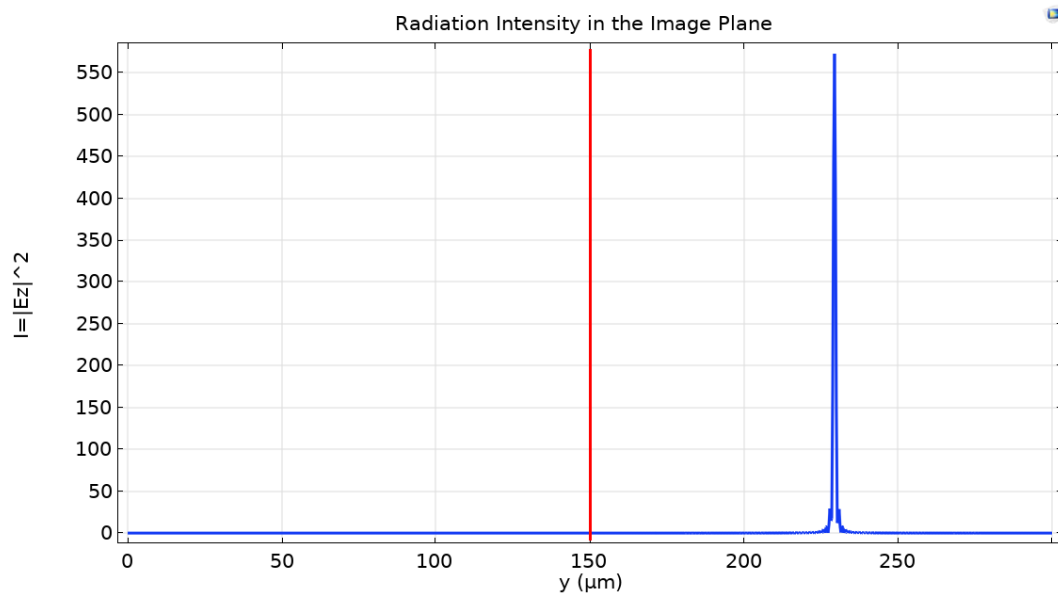


На картинке фокусное расстояние примерно равно $F = 45 \text{ mm}$, а смещение от оптической оси $y_2 = 80 \text{ } \mu\text{m}$.

_ Третья – поле излучения внутри линзы.



_ Четвертая - сфокусированное изображение параллельного пучка в фокальной плоскости.



На картинке смещение от оптической оси $y_2 = 79.5 \text{ mkm}$.

Выводы. Совпадение результатов моделирования и теоретических результатов - хорошее.

**Исследование влияния размеров диафрагмы на изображение
сфокусированного пучка в фокальной плоскости.**

Далее, нужно изменить проект. Добавим диафрагму с диаметром $2a$ в два раза меньшим диаметра линзы $2a = H/2$. Пучок лучей пустим параллельно оптической оси $\theta = 0$.

Для этого надо перестроить проект моделирования.

_ В окне Model Builder нажимаем кнопку Parameters, и изменяем значение угла $\varphi_i = 0$.

_ В окне Model Builder раскрываем окно Component, раскрываем окно Electromagnetic Wave, Beam Envelops, нажимаем кнопку Matched Boundary Condition.

В окне Settings, Matched Boundary Condition раскрываем окно Matched Boundary Condition и в окне электрического поля E_0 в строчке проекции z делаем замену.

Вместо строчки

```
1[V/m]*fun3( 0, y, k, fi)
```

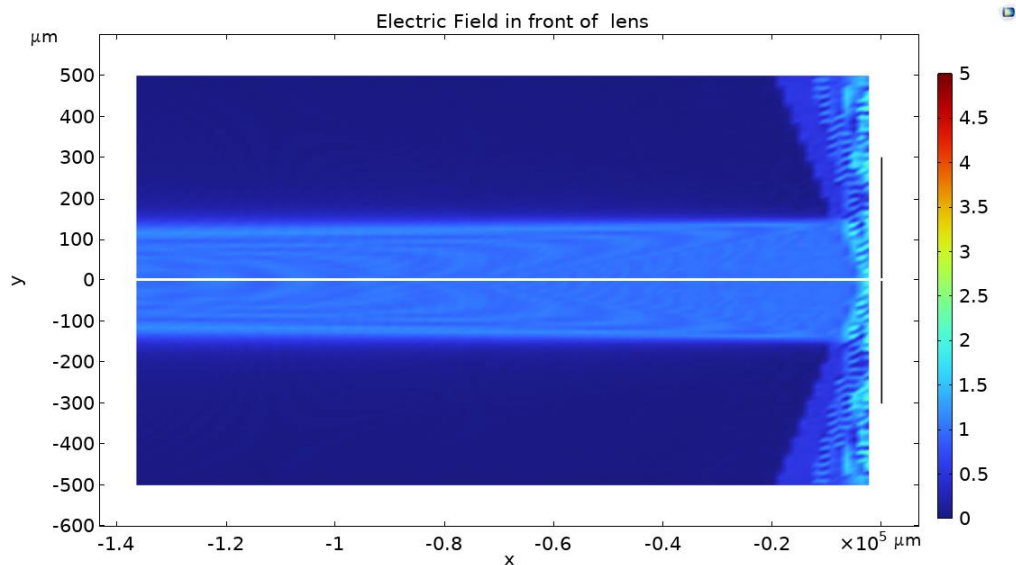
Вставляем новую строчку.

```
1[V/m]*fun3( 0, y, k, fi)*(abs(y)<H/4)
```

_ Запускаем Comsol на моделирование, в главном меню Build Compute.

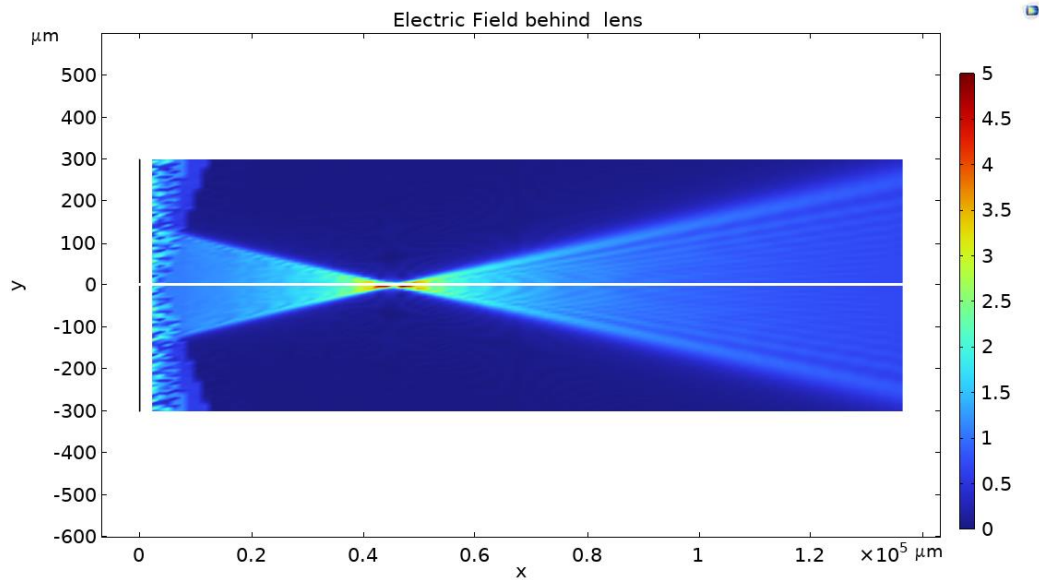
В результате моделирования нужно получить 5 картинок.

_ Первая – поле излучения перед линзой.



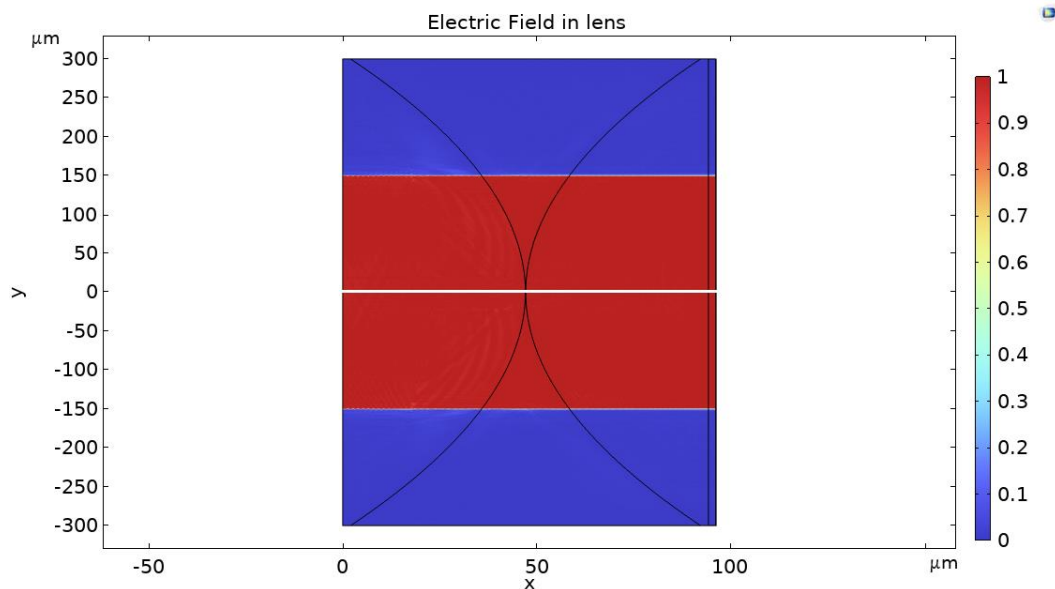
На картинке показан пучок параллельных лучей, проходящий через диафрагму диаметром $2a = 300 \text{ мкм}$, та часть излучения, которая не попадает на линзу, не рассматривается и окрашена в темный цвет.

_ Вторая – поле излучения позади линзы.

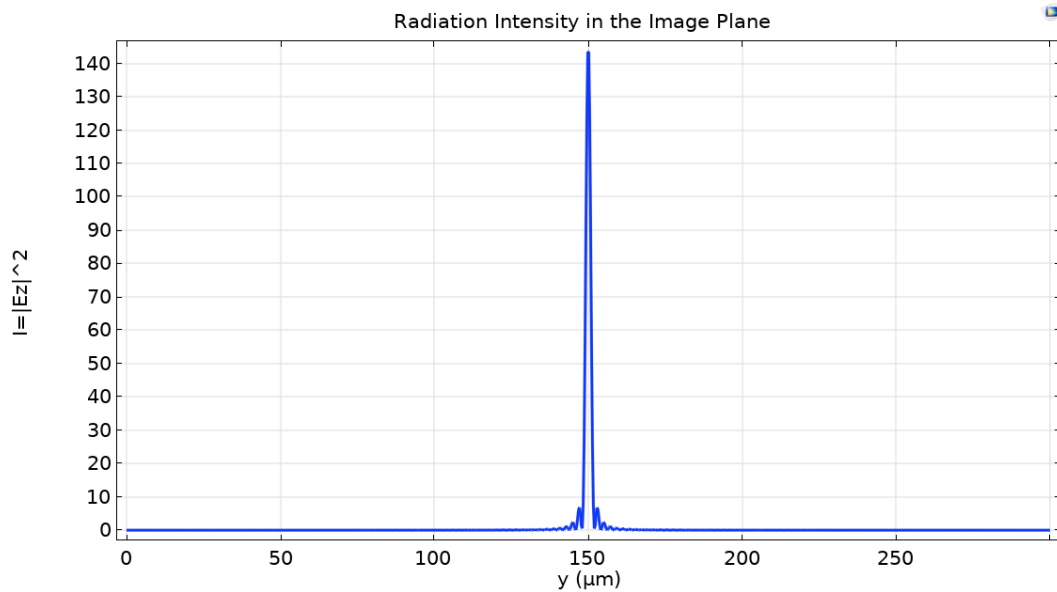


На картинке фокусное расстояние примерно равно $F = 45 \text{ мм}$, а смещение от оптической оси $y_2 = 0$.

_ Третья – поле излучения внутри линзы.



_ Четвертая - сфокусированное изображение параллельного пучка в фокальной плоскости.



На картинке видно, что изображение не является точечным, а имеет некоторое распределение интенсивности в фокальной плоскости с центром в точке фокуса.

Чтобы провести анализ полученных результатов последнюю картинку надо растянуть в горизонтальном направлении хотя бы в 25 раз (в другом варианте это может быть другое число).

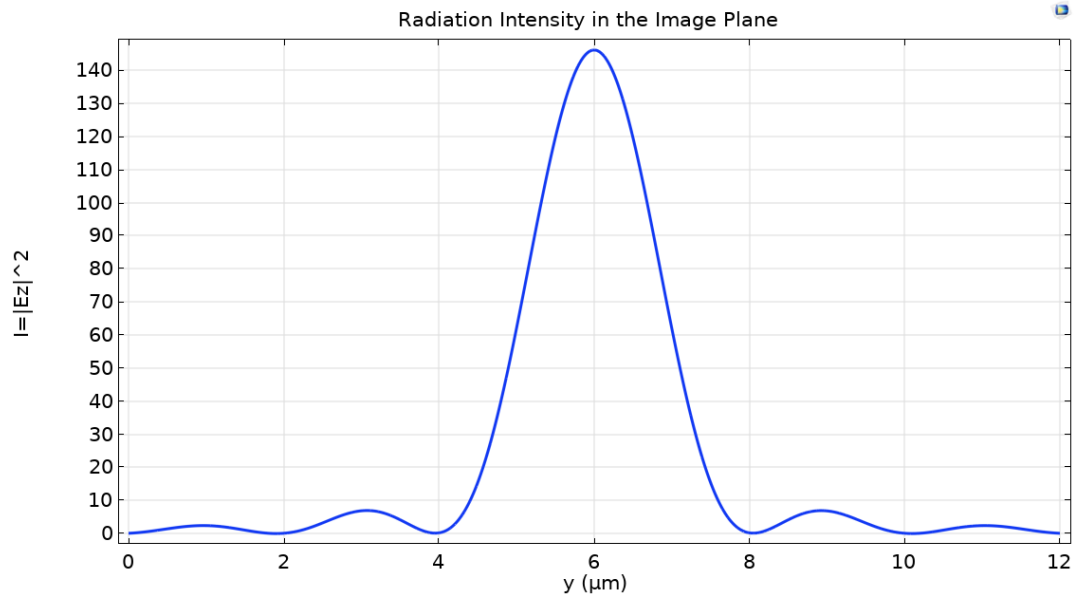
_ В окне Model Builder раскрываем окно Results, раскрываем окно Image Plane, нажимаем кнопку Line Graph.

_ В окне Settings, Line Graph раскрываем окно Data, и в окне Dataset находим имя инструкции Grid 1D 2, в которой определяются размеры картинки.

_ В окне Model Builder раскрываем окно Results, раскрываем окно Datasets, нажимаем кнопку Grid 1D 2.

_ В окне Settings, Grid 1D раскрываем окно Parameter Bounds, и в окнах Minimum, Maximum вставляем новые значения $-H/100$ и $H/100$.

_ В окне Model Builder раскрываем окно Results, раскрываем окно Image Plane, нажимаем кнопку Line Graph. В результате получаем картинку.



На рисунке видно, что за счет дифракции на диафрагме изображение уже не является точкой, а приобрело конечные размеры Δy (ширина фокального пятна). Теория дифракции дает следующую формулу для ширины фокального пятна.

$$\Delta y = \frac{\lambda F}{a}$$

В нашем примере ширина фокального пятна равна следующей величине.

$$\Delta y = \frac{13.5(nm) \cdot 45(mm)}{150(mkm)} = 4.05 mkm$$

На последнем рисунке ширина фокального пятна примерно равна $\Delta y = 4 mkm$.

Выводы. Совпадение результатов моделирования и теоретических результатов - хорошее.

Задание 3.

Изображение двух точечных источников. Разрешающая способность линзы.

(Проект находится в папке Test_3).

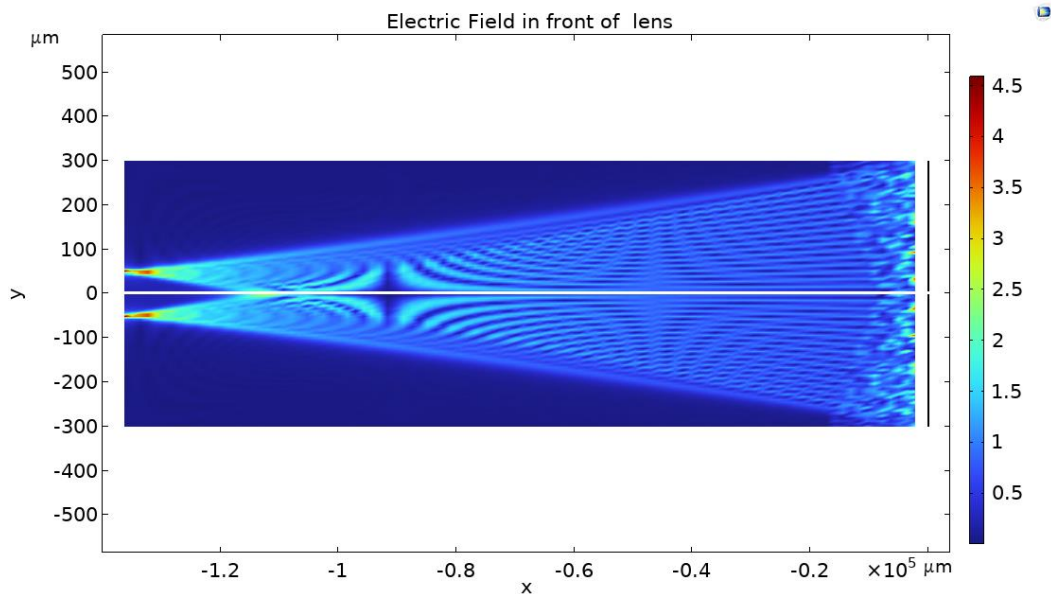
Здесь оба точечных источника находятся на расстоянии d от линзы, их смещение от оптической оси определяется величинами y_{10}, y_{20} . Изображения источников находятся на расстоянии f от линзы в плоскости изображения, смещение от оптической оси определяется величинами y_1, y_2 .

Используем формулы тонкой линзы, получаем следующие параметры.

$$F = 45,5 \text{ mm}, \quad d = 136.4 \text{ mm}, \quad f = 68.2 \text{ mm}, \quad y_1 = -25 \text{ mkm}, \quad y_2 = 25 \text{ mkm}$$

В результате моделирования нужно получить 4 картинки.

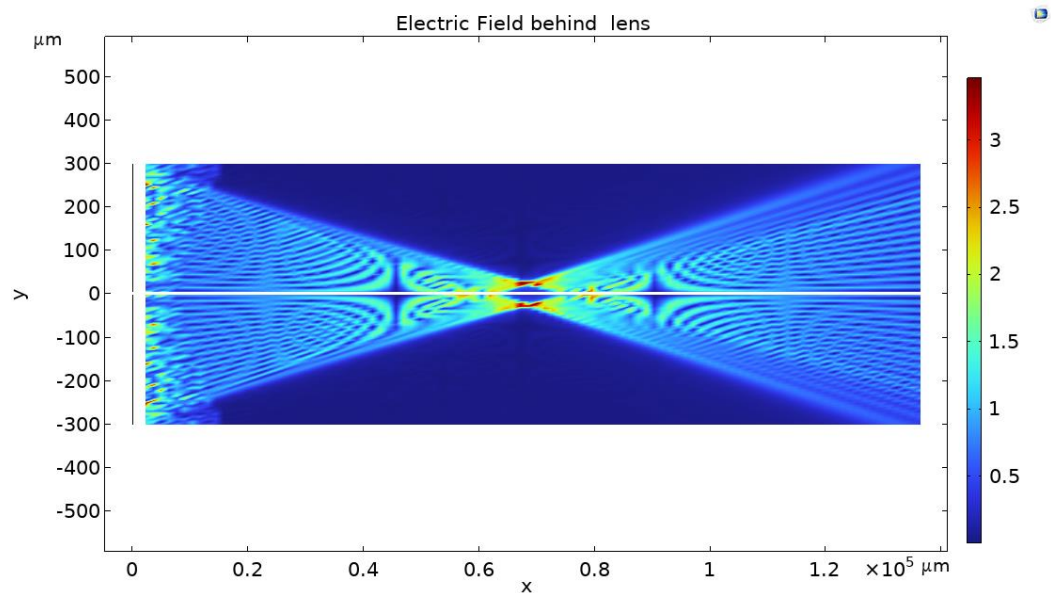
_ Первая – поле излучения перед линзой.



На картинке расстояние от двух точечных источника до линзы примерно равно

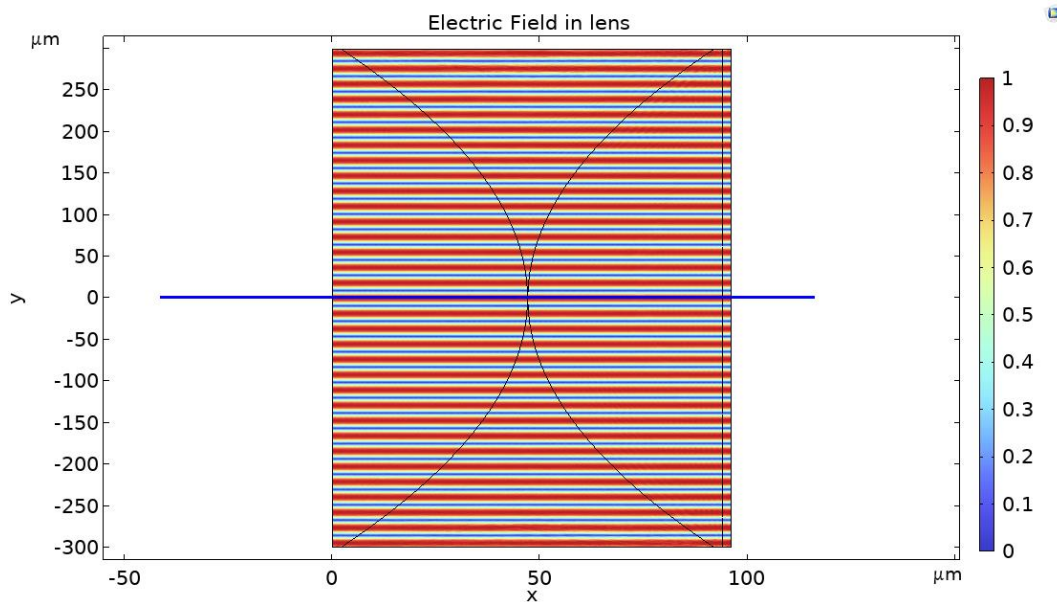
$$d = 136 \text{ mm}, \text{ а смещение от оптической оси } y_{10} = 50 \text{ mkm}, \quad y_{20} = -50 \text{ mkm}.$$

_ Вторая – поле излучения позади линзы.

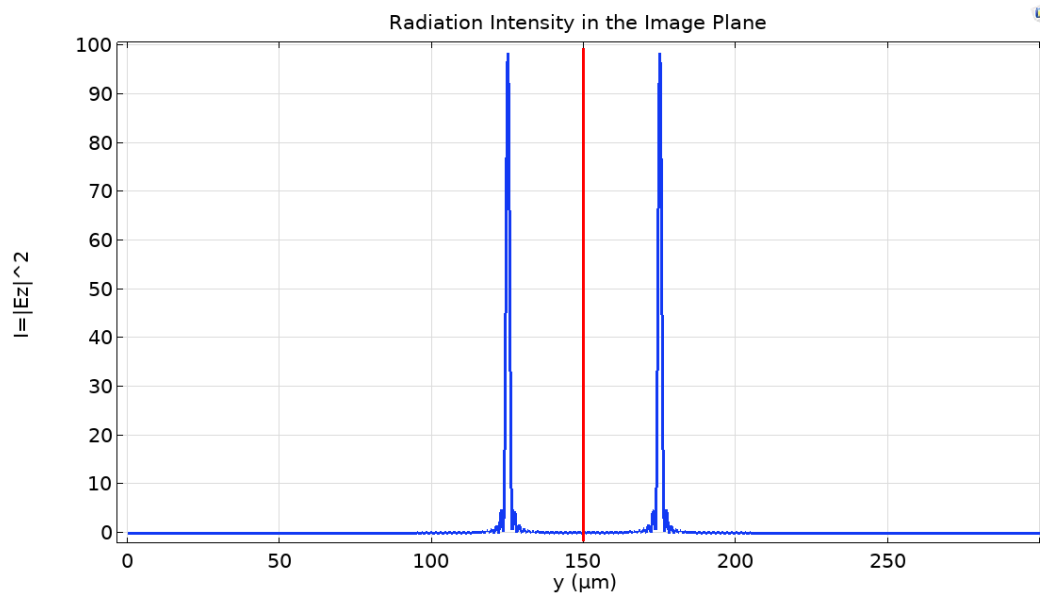


На картинке расстояние от изображения до линзы примерно равно $f = 68 \text{ mm}$, а смещение от оптической оси $y_1 = -25 \text{ mm}$, $y_2 = 25 \text{ mm}$.

_ Третья – поле излучения внутри линзы.



_ Четвертая - сфокусированное изображение точечных источников в плоскости изображения.



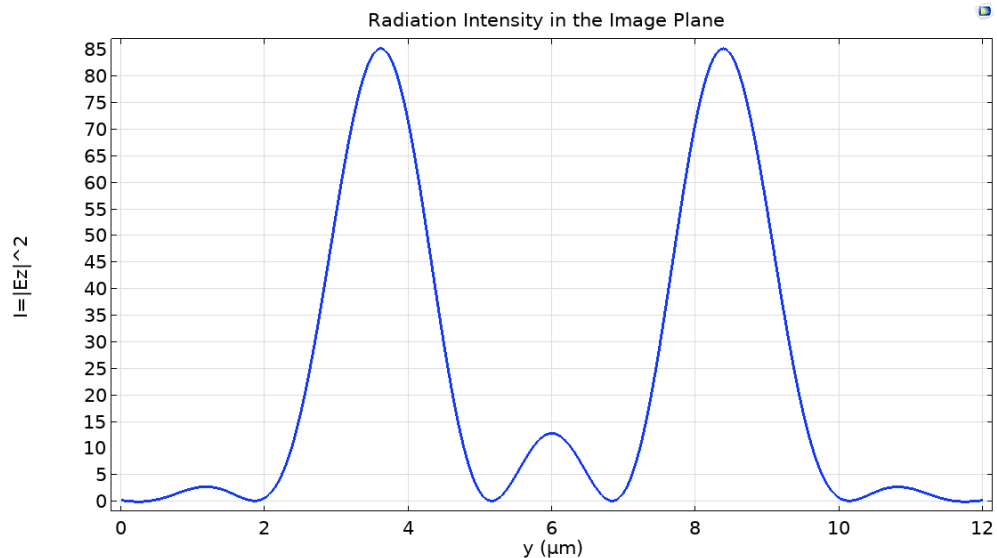
На картинке изображения точечных источников смещены от оптической оси на расстояние $y_1 = -25 \text{ мкм}$, $y_2 = 25 \text{ мкм}$.

Выводы. Совпадение результатов моделирования и теоретических результатов - хорошее.

Исследование влияния размеров диафрагмы на разрешающую способность линзы в плоскости изображения.

Одой из важных характеристик линзы является разрешающая способность линзы. Возникает задача, если в плоскости объекта есть два близко расположенных точечных источника, сумеем ли мы разрешить их, то есть можно ли по картине интенсивности, возникающей в плоскости изображения, отличить два точечных источника от одного.

Проведем эксперимент. Расстояние между точечными источниками в плоскости объекта возьмем равным величине $\Delta y_0 = |y_{20} - y_{10}| = 10 \text{ мкм}$. Тогда в плоскости изображения получится картина.



На картине показано хорошая различимость изображения двух точечных источников.

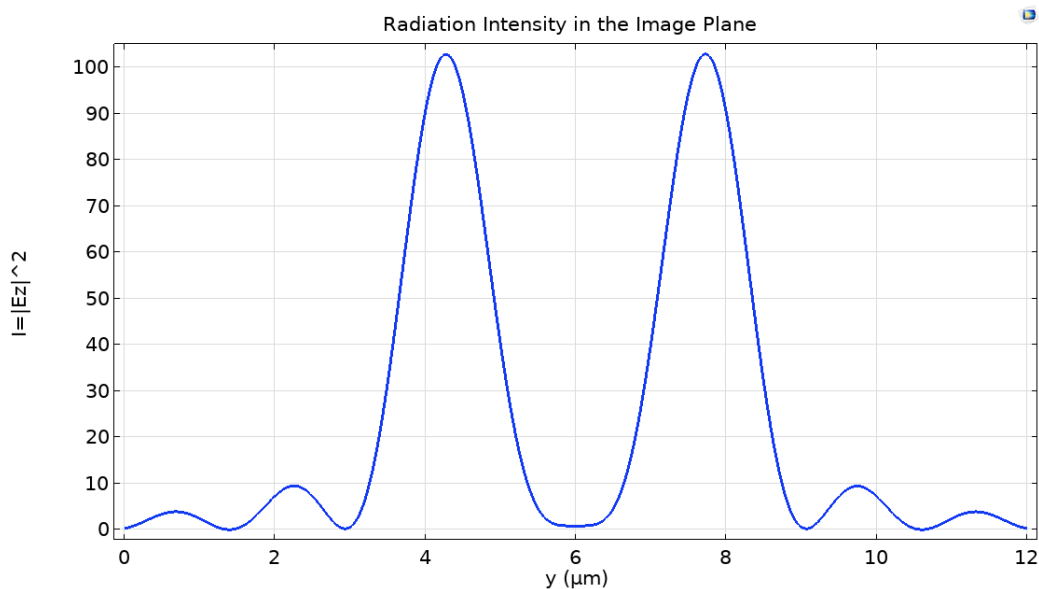
Замечание. Чтобы получить последнюю картину, предыдущую пришлось растянуть в горизонтальном направлении в 25 раз (в другом варианте это может быть другое число).

Обратимся к дифракционной теории. Условие различимости можно записать в виде неравенства для координат точечных источников в плоскости объекта.

$$\Delta y_0 = |y_{20} - y_{10}| \geq \lambda d / a$$

Для рассматриваемого варианта это расстояние равно величине $\Delta y_0 = 6.12 \text{ мкм}$.

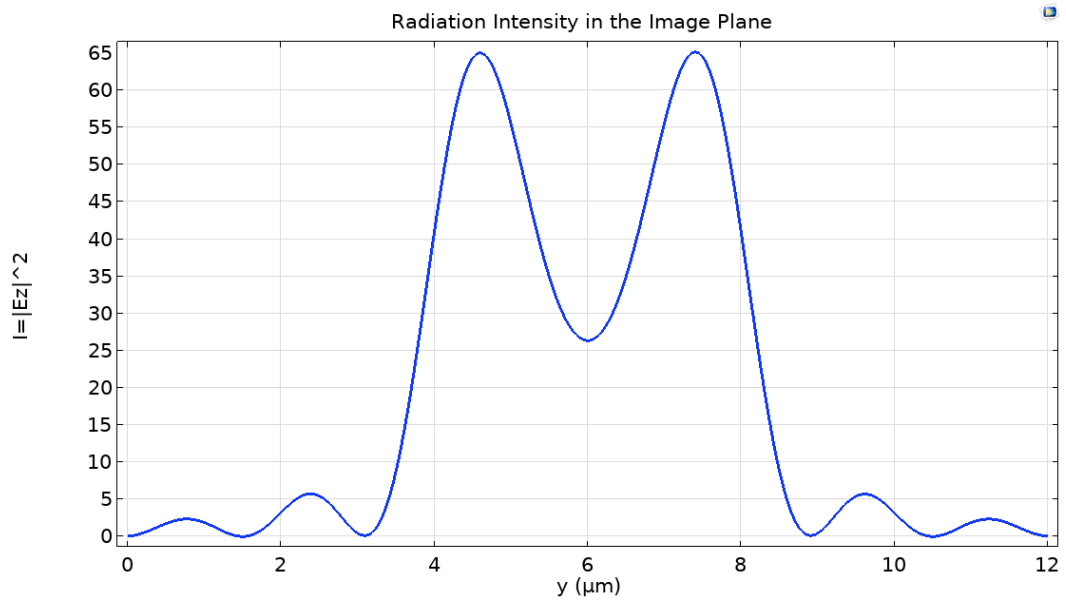
Моделирование в программе Comsol дает следующую картину в плоскости изображения.



На картинке показано хорошая различимость изображения двух точечных источников.

Попробуем еще уменьшить расстояние между точечными источниками, возьмем

$\Delta y_0 = 4.8 \text{ мкм}$. Моделирование в программе Comsol дает следующую картину в плоскости изображения.



На картинке видны два пика, по которым можно определить координаты двух точечных источников y_{10} , y_{20} в плоскости объекта. Здесь провал между пиками составляет примерно половину максимального значения интенсивности.

Выводы. Разрешающая способность линзы в данной задаче равна $\Delta y_0 = 4.8 \text{ мкм}$.