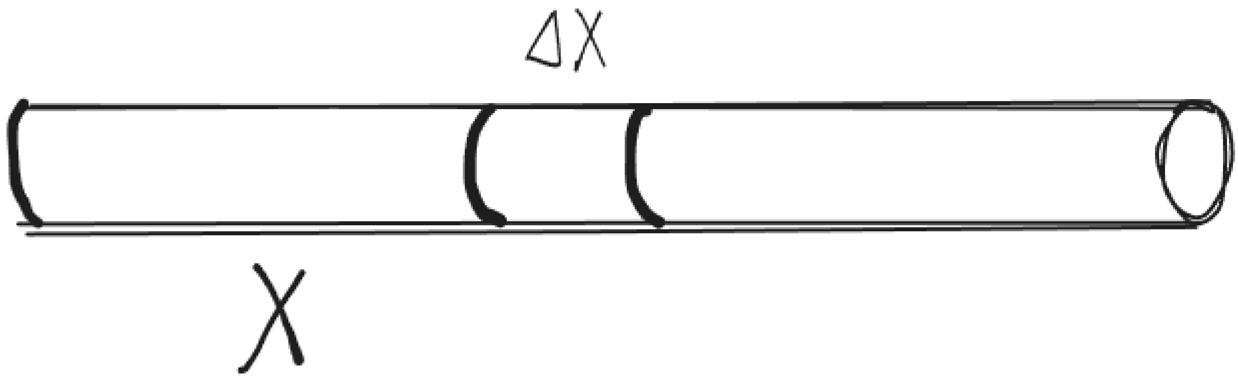
1.3 Скорость упругих волн в тонком стержне

🚨🚨 В материале могут быть опечатки и ошибки 🚨🚨

Новоженов Павел
ЭН-26



Рассмотрим распространение волн в тонком стержне. Функция ξ характеризует отклонение участка от положения равновесия.

$$\sigma = E\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{F_o}{s}$$

$$F_o = F(x+\xi+\Delta x+\Delta\xi) - F(x+\xi) = \ldots$$

$$\ldots = sE\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x+\xi+\Delta x+\Delta\xi} - \frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x+\xi}\right) = |\text{В Тейлора}| = \ldots$$

$$sE(\frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x+\xi}^{x+\xi+\Delta x+\Delta\xi} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x})_{x+\xi}^{x+\xi}\left(\Delta x + \Delta\xi - \frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x+\xi}\right) \approx sE\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Delta x$$

Вспомним что:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = F$$

$$r = x+\xi, \quad m = \rho s\Delta x$$

Тогда подставим:

$$\rho s\Delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = sE\Delta x\frac{\partial^2 r\xi}{\partial x^2}$$

Получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} - \textit{скорость волны}$$