Семинар 2.

Элементы электростатики.

Система уравнений Максвелла

1) $$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Уравнения электростатики

2) $$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} = 0, \quad \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Плотность энергии электрического поля

3) $$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad \rightarrow \quad w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \rightarrow \quad W = \int_V w(\vec{r})\, dV$$

Скалярный потенциал (электростатический). Уравнение Пуассона (Лапласа).

4) $$\vec{E} = -\mathbf{grad}\, \varphi \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Delta \varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Граничные условия на границе раздела двух сред.

5) $$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Граничные условия на поверхности идеального металла.

6) $$\begin{cases} \textit{Внутри металла} \quad \rightarrow \quad E_{1n} = 0, \; E_{1\tau} = 0 \\ \textit{Снаружи металла} \quad \rightarrow \quad E_{2n} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sigma, \; E_{2\tau} = 0 \end{cases}$$

Поверхностная плотность электрического заряда.

7) $$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \rightarrow \quad q = \int_S \sigma\, d\vec{S}$$

Электрическая емкость конденсатора.

8) $$q = CU \quad \rightarrow \quad U = \varphi_2 - \varphi_1$$

Энергия заряженного конденсатора.

9) $$W = \frac{CU^2}{2} \quad \rightarrow \quad W = \frac{q^2}{2C}$$

Задача 1

Плоский конденсатор.

Площадь металлических пластин S, расстояние между пластинами d, разность потенциалов на пластине U. Найти –

1) Распределение потенциала $\varphi = \varphi(x)$ вдоль ости x, перпендикулярной пластинам.

2) Найти распределение электрического поля $E_x = E_x(x)$.

3) Найти поверхностную плотность заряда на пластинах σ_1, σ_2.

4) Найти заряды на пластинах q_1, q_2.

5) Найти емкость конденсатора C.

6) Найти плотность энергии электрического поля внутри конденсатора w.

7) Найти энергию заряженного конденсатора W.

Уравнение Лапласа внутри конденсатора.

$$\Delta\varphi = 0 \quad \to \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \le x \le d$$

Условие симметрии задачи

$$\varphi = \varphi(x) \quad \to \quad \frac{d^2\varphi}{d x^2} = 0, \quad 0 \le x \le d$$

Решение уравнения Лапласа

$$\frac{d^2\varphi}{d x^2} = 0 \quad \to \quad \frac{d\varphi}{d x} = C_1 \quad \to \quad \varphi = C_1 x + C_2, \quad 0 \le x \le d$$

Граничные условия

$$\varphi = C_1 x + C_2, \quad 0 \le x \le d$$

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \varphi(d) = \varphi_2, \quad U = \varphi_2 - \varphi_1$$

Потенциал произволен до константы, пусть

$$\varphi_1 = 0 \quad \to \quad \varphi_2 = U$$

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{U}{d} \quad \to \quad \varphi(x) = \frac{U}{d} x$$

Рисуем график $\varphi = \varphi(x)$.

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0, & x \le 0 \\ \varphi(x) = \dfrac{U}{d} x, & 0 \le x \le d \\ \varphi(x) = U, & x \ge d \end{cases}$$

Находим электрическое поле

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, 0, 0 \right) \quad \to \quad E_x = -\frac{d\varphi}{d x}$$

Рисуем график $E_x = E_x(x)$.

$$\begin{cases} E_x(x) = 0, & x < 0 \\ E_x(x) = -\dfrac{U}{d}, & 0 \le x \le d \\ E_x(x) = 0, & x > d \end{cases}$$

Находим поверхностную плотность заряда на левой пластине

$$x=0, \quad E_{2n}=E_x(0)=-\frac{U}{d} \quad \to \quad \sigma_1=-\frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

Находим поверхностную плотность заряда на правой пластине

$$x=d, \quad E_{2n}=-E_x(d)=\frac{U}{d} \quad \to \quad \sigma_2=\frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

Находим заряд на пластинах конденсатора

$$q_1=\sigma_1 S=-\frac{\varepsilon_0 U\,S}{d}, \quad q_2=\sigma_2 S=\frac{\varepsilon_0 U\,S}{d}$$

Заряды равны по величине и противоположны по знаку.

$$q_1=-q, \quad q_2=q, \quad q=\frac{\varepsilon_0 U\,S}{d}$$

Находим емкость конденсатора

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon_0\,S}{d}$$

Находим плотность энергии электрического поля

$$w=\frac{\varepsilon_0\,E^2}{2}=\frac{\varepsilon_0\left(E_x^2+E_y^2+E_z^2\right)}{2}=\frac{\varepsilon_0\,E_x^2}{2} \quad \to \quad w=\frac{\varepsilon_0\,U^2}{2d^2}$$

Находим энергию конденсатора

$$W=\int\limits_V w(\vec r)\,dV \quad \to \quad W=wV, \quad \to \quad W=\frac{\varepsilon_0\,U^2}{2d^2}S\,d$$

$$W=\frac{\varepsilon_0\,S U^2}{2d} \quad \to \quad W=\frac{CU^2}{2}$$

Задача 2

Отрезок коаксиального кабеля, цилиндрический конденсатор.

Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров R_1, R_2, длина цилиндров l, разность потенциалов между внешним и внутренним цилиндрами U. Найти –

1) Распределение потенциала $\varphi=\varphi(r)$ в зависимость от радиуса.
2) Найти распределение электрического поля $E_r=E_r(r)$.
3) Найти поверхностную плотность заряда на цилиндрах σ_1, σ_2.
4) Найти заряды на цилиндрах q_1, q_2.
5) Найти емкость конденсатора C.
6) Найти плотность энергии электрического поля внутри конденсатора w.
7) Найти энергию заряженного конденсатора W.

Уравнение Лапласа между цилиндрами, в цилиндрической системе координат.

$$\Delta\,\varphi(r,\psi,z)=0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \quad R_1\le r\le R_2$$

Условие симметрии задачи

$$\varphi=\varphi(r) \quad \to \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0, \quad R_1\le r\le R_2$$

Решение уравнения Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0, \quad \to \quad r\frac{d\varphi}{dr}=C_1 \quad \to \quad \varphi=C_1\ln r+C_2, \quad R_1\le r\le R_2$$

Граничные условия

$$\varphi=C_1\ln r+C_2, \quad R_1\le r\le R_2$$

$$\varphi(R_1)=\varphi_1, \quad \varphi(R_2)=\varphi_2, \quad U=\varphi_2-\varphi_1$$

Потенциал произволен до константы, пусть

$$\varphi_1=0 \quad \to \quad \varphi_2=U$$

$$C_1=\frac{U}{\ln(R_2/R_1)}, \quad C_2=-\frac{U}{\ln(R_2/R_1)}\ln R_1 \quad \to \quad \varphi(r)=\frac{U}{\ln(R_2/R_1)}\ln(r/R_1)$$

Рисуем график $\varphi=\varphi(r)$.

$$\begin{cases}\varphi(r)=0, & 0\le x\le R_1\\ \varphi(r)=\dfrac{U}{\ln(R_2/R_1)}\ln(r/R_1), & R_1\le r\le R_2\\ \varphi(r)=U, & r\ge R_2\end{cases}$$

Находим электрическое поле

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi \quad \to \quad E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad E_\psi=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}, \quad E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \to \quad E_r=-\frac{d\varphi}{dr}$$

Рисуем график $E_r=E_r(r)$.

$$\begin{cases}E_r(r)=0, & 0\le x\le R_1\\ E_r(r)=-\dfrac{U}{\ln(R_2/R_1)}\dfrac{1}{r}, & R_1\le r\le R_2\\ E_r(r)=0, & r\ge R_2\end{cases}$$

Находим поверхностную плотность заряда на внутреннем цилиндре

$$r=R_1, \quad E_{2n}=E_r(R_1)=-\frac{U}{\ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_1} \quad \to \quad \sigma_1=-\frac{\varepsilon_0 U}{\ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_1}$$

Находим поверхностную плотность заряда на внешнем цилиндре

$$r=R_2, \quad E_{2n}=-E_r(R_2)=\frac{U}{\ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_2} \quad \to \quad \sigma_1=\frac{\varepsilon_0 U}{\ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_2}$$

Находим заряд на цилиндрах конденсатора

$$q_1=\sigma_1 S_1=-\frac{\varepsilon_0 U}{\ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_1}(2\pi R_1 l), \quad q_2=\sigma_2 S_2=\frac{\varepsilon_0 U}{\ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_2}(2\pi R_2 l)$$

Заряды равны по величине и противоположны по знаку.

$$q_1=-q, \quad q_2=q, \quad q=\frac{2\pi\varepsilon_0 lU}{\ln(R_2/R_1)}$$

Находим емкость конденсатора

$$C=\frac{q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}$$

Находим плотность энергии электрического поля

$$w=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}=\frac{\varepsilon_0\left(E_r^2+E_\psi^2+E_z^2\right)}{2}=\frac{\varepsilon_0 E_r^2}{2} \quad \to \quad w=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{\ln(R_2/R_1)}\right)^2\frac{1}{r^2}$$

Находим энергию конденсатора

$$W = \int_V w(\vec{r})\, dV \quad \to \quad W = \int_{R_1}^{R_2} r\, dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{l} dz\, w(r) \quad \to \quad W = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} r\, dr\, w(r)$$

$$W = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} r\, dr\, w(r) \quad \to \quad W = 2\pi l \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U}{\ln(R_2 / R_1)} \right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\pi \varepsilon_0 l U^2}{\ln(R_2 / R_1)}$$

$$W = \frac{\pi \varepsilon_0 l U^2}{\ln(R_2 / R_1)} \quad \to \quad W = \frac{C U^2}{2}$$