Семинар 5.

Электромагнитная энергия переносимая волной бегущей вдоль кабеля.

Рассматриваем коаксиальный кабель Рис.1.

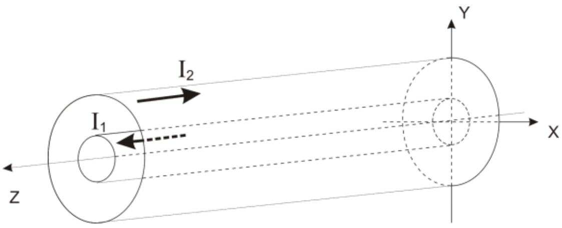

Рис.1.

Электромагнитная волна бегущая вдоль кабеля имеет вид.

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(r)e^{i(\beta z-\omega t)},$$
$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}(r)e^{i(\beta z-\omega t)}. \tag{1}$$

Эта волна поперечная, где электрическое поле и магнитное имеют по одной поперечной составляющей, которая в цилиндрической системе координат имеет вид.

$$\vec{E}(x,y)=\left(E_r(r),\quad 0,\quad 0\right),$$
$$\vec{B}(x,y)=\left(0,\quad B_\psi(r),\quad 0\right). \tag{2}$$

Сечение кабеля приведено на Рис.2, где также указаны орты цилиндрической системы координат.

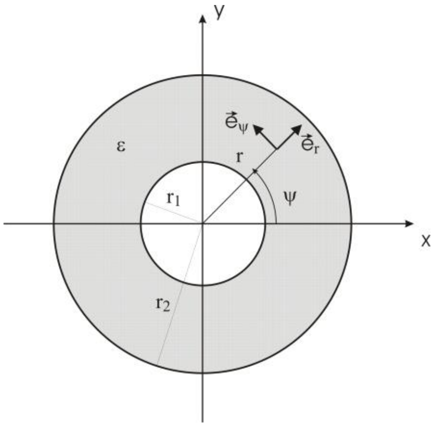

Рис.2.

Фазовая скорость такой монохроматической волны равна следующей величине.

$$v_f=\frac{\omega}{\beta}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{3}$$

Электрическое и магнитное поле волны отлично от нуля в пространстве между цилиндрами $r_1<r<r_2$, и определяется следующими формулами.

$$E_r(r)=\frac{c\mu_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon}}I_0\frac{1}{r},\qquad B_\psi(r)=\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\frac{1}{r} \tag{4}$$

Здесь I_0 – амплитуда тока, текущего по внутреннему цилиндру через какое-нибудь сечение кабеля, например $z=0$. Амплитуда тока I_0, связана с амплитудой напряжения U_0 между металлическими цилиндрами следующей формулой.

$$I_0 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0}\frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{5}$$

Когда говорят об амплитуде тока и напряжения, то речь идет о переменном токе и напряжении, которые колеблются с частотой ω в любом сечении кабеля. Более того, ток и напряжение в данной задаче являются монохроматическими волнами, бегущими вдоль кабеля.

$$I(z,t) = I_0 e^{i(\beta z-\omega t)}, \quad U(z,t) = U_0 e^{i(\beta z-\omega t)} \tag{6}$$

Задача 1.

Найти плотность энергии волны, бегущей вдоль кабеля, и усреднить по времени, за период колебания $T = 2\pi/\omega$.

Плотность электромагнитной энергии определяется формулой.

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\varepsilon\,\tilde{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\tilde{B}^2\right) \tag{2.26}$$

Здесь знак тильда над электрическим и магнитным полем означает, что поля надо подставлять в эту формулу в действительном виде. Если считать, что ток I_0 действительная величина, то из формул (4) следует, поля $E_r(r), B_\psi(r)$ тоже действительные величины. Отсюда следует, что амплитуды $\vec{E}(r), \vec{B}(r)$ электрического и магнитного поля в волне (1) тоже действительные векторы.

Поэтому волна (1) записанная в действительном виде, будет выглядеть следующим образом.

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) &= \vec{E}(r)\cos(\beta z-\omega t) = \vec{e}_r E_r(r)\cos(\beta z-\omega t), \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) &= \vec{B}(r)\cos(\beta z-\omega t) = \vec{e}_\psi B_\psi(r)\cos(\beta z-\omega t). \end{aligned} \tag{7}$$

Из формулы (2.26) видно, что энергия электромагнитной волны равна сумме электрической и магнитной энергии.

$$w = w_e + w_m, \quad w_e = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\tilde{E}^2}{2}, \quad w_m = \frac{\tilde{B}^2}{2\mu_0} \tag{8}$$

Подставляем (7) в выражения (8) для плотности электрической и магнитной энергии, и учитываем связь (4) электрического и магнитного поля с током I_0. В результате получаем формулы для плотности энергии волны, как функции от радиуса r, от координаты z и времени t.

$$
\begin{aligned}
w_e(r,z,t) &= \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}E_r^2(r)\cos^2(\beta z-\omega t) = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{I_0^2}{r^2}\cos^2(\beta z-\omega t) \\
w_m(r,z,t) &= \frac{1}{2\mu_0}B_\psi^2(r)\cos^2(\beta z-\omega t) = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{I_0^2}{r^2}\cos^2(\beta z-\omega t)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Заметим, что при выводе формул (9) было использовано известное соотношение между электрической постоянной ε_0 и магнитной постоянной μ_0.

$$
\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{10}
$$

Первое, что бросается в глаза из формулы (9), это то, что электрическая часть энергии и магнитная часть энергии волны равны друг другу, в любой момент времени, в любой точке внутри кабеля. Складывая электрическую и магнитную части, получаем плотность энергии волны, бегущей вдоль кабеля.

$$
w(r,z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi^2}\frac{I_0^2}{r^2}\cos^2(\beta z-\omega t) \tag{11}
$$

Второе, что можно увидеть из формулы (9) или (11), это то, что в любом сечении $z = const$ кабеля, в любой точке сечения $r_1 < r < r_2$, плотность энергии колеблется от нуля до максимального значения.

$$
w_{\max}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi^2}\frac{I_0^2}{r^2} \tag{12}
$$

Третье, что можно увидеть из формулы (11), это то, что формула (11) описывает волновой процесс. Это хорошо видно, если в формуле (11) косинус в квадрате заменить через косинус двойного угла.

$$
w(r,z,t) = w_{\max}(r)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\beta z-2\omega t)\right) \tag{13}
$$

Из формулы (13) видно, что энергия состоит из двух частей. Первая часть не зависит от времени t и координаты z. Вторая часть является монохроматической волной с частотой 2ω и волновым числом 2β, которая бежит вдоль кабеля с фазовой скоростью, равной скорости электромагнитной волны (3). Действительно, получается следующая формула для фазовой скорости.

$$
v_f = \frac{2\omega}{2\beta} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{14}
$$

Сделаем замечание, вот о чем. Если частоты достаточно большие, то приборы, измеряющие энергию, по сути дела, измеряют значения энергии, усредненные за период колебаний $T = 2\pi/\omega$.

$$
\langle w\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T w(r,z,t)\,dt \tag{15}
$$

Поэтому, когда говорят об энергии волны, имеют в виду не формулу (11), а формулу, которая получается при усреднении по времени формулы (11). Подставим (13) в формулу усреднения (15).

$$\langle w\rangle = \frac{w_{\max}(r)}{2}\frac{1}{T}\int_0^T dt + \frac{w_{\max}(r)}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\beta z - 2\omega t)dt \tag{16}$$

Первый интеграл равен T , а второй интеграл требует вычислений. Сделаем во втором интеграле замену.

$$2\omega t - 2\beta z = u, \quad 2\omega\, dt = du$$

Тогда второй интеграл в (16) будет вычисляться следующим образом.

$$\int_0^T \cos(2\beta z - 2\omega t)dt = \frac{1}{2\omega}\int_{-2\beta z}^{4\pi-2\beta z} \cos u\, du =$$
$$= \frac{1}{2\omega}\left(\sin(4\pi - 2\beta z) - \sin(-2\beta z)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\omega} 2\sin\frac{4\pi}{2}\cos\frac{4\pi - 4\beta z}{2} = 0$$

Таким образом, второй интеграл в формуле (16) равен нулю, поэтому усредненная за период энергия вычисляется по следующей формуле.

$$\langle w\rangle = \frac{w_{\max}(r)}{2} = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{I_0^2}{r^2} \tag{17}$$

Задача 2.

Найти погонную емкость и погонную индуктивность кабеля.

Возьмем отрезок кабеля длиной l, ограниченного двумя поперечными сечениями $z = 0$ и $z = l$. Найдем электрическую и магнитную энергию, заключенную в этом отрезке по формулам.

$$W_e = \iiint_V w_e dV, \quad W_m = \iiint_V w_m dV \tag{18}$$

Здесь V объем заключенный между цилиндрами. Вычисление проводим в цилиндрической системе координат по следующему правилу.

$$\iiint_V w\, dV = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr\, w \tag{19}$$

Для нахождения емкости и индуктивности надо использовать энергии, усредненные за период T . Перепишем формулы (18) с учетом усреднения.

$$\langle W_e\rangle = \iiint_V \langle w_e\rangle dV, \quad \langle W_m\rangle = \iiint_V \langle w_m\rangle dV \tag{20}$$

Используя условие равности плотности электрической и магнитной энергии $w_e = w_m$, и формулу (17), получим выражение для магнитной энергии $\langle W_m\rangle$.

$$\langle W_m\rangle = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr \langle w_m\rangle = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr \frac{1}{2}\langle w\rangle \tag{21}$$

Выполняем интегрирование, и получаем окончательно формулу.

$$\left\langle W_m \right\rangle = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r dr \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{I_0^2}{r^2} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} I_0^2 \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} =$$
$$= \frac{\mu_0}{16\pi^2} I_0^2 \, l \, 2\pi \ln \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{\mu_0 l}{8\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) I_0^2 \qquad (22)$$

В теории длинных передающих линий (кабель), так же как и в электротехники переменных токов, индуктивность L присутствует в следующей формуле.

$$\left\langle W_m \right\rangle = \frac{L}{2} \left\langle \tilde{I}^2 \right\rangle \qquad (23)$$

Ток, текущий по поверхности цилиндров является монохроматической волной, которая в комплексном виде выглядит следующим образом.

$$I(z,t) = I_0 e^{i(\beta z - \omega t)}, \qquad (24)$$

Поскольку ток является действительной величиной $\tilde{I}$, а комплексная форма I (24) применяется для математического удобства, то запишем формулу (24) в действительном виде.

$$\tilde{I}(z,t) = I_0 \cos(\beta z - \omega t) \qquad (25)$$

Найдем среднее значение квадрата тока (25), аналогично формуле (16).

$$\left\langle \tilde{I}^2 \right\rangle = I_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\beta z - \omega t) dt =$$
$$= I_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left(1 + \cos(2\beta z - 2\omega t)\right) dt = \frac{I_0^2}{2} \qquad (26)$$

Подставим в формулу (23) среднюю энергию из формулы (22), а средний квадрат тока из формулы (26).

$$\left(\frac{\mu_0 l}{8\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) I_0^2 = \frac{L}{2} \frac{I_0^2}{2} \qquad (27)$$

Отсюда получаем индуктивность отрезка кабеля.

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (28)$$

Поскольку электрическая и магнитная энергия волны совпадают, то среднее значение электрической энергии вычисляем по формуле аналогичной (22).

$$\left\langle W_e \right\rangle = \left(\frac{\mu_0 l}{8\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) I_0^2 \qquad (29)$$

В теории длинных передающих линий (кабель), так же как и в электротехники переменных токов, емкость C присутствует в следующей формуле.

$$\left\langle W_e \right\rangle = \frac{C}{2} \left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \qquad (30)$$

Напряжение между цилиндрами является монохроматической волной, которая в комплексном виде выглядит следующим образом.

$$U(z,t) = U_0 e^{i(\beta z - \omega t)}, \tag{31}$$

Поскольку напряжение является действительной величиной $\tilde{U}$, а комплексная форма U (24) применяется для математического удобства, то запишем формулу (31) в действительном виде.

$$\tilde{U}(z,t) = U_0 \cos(\beta z - \omega t) \tag{32}$$

Найдем среднее значение квадрата напряжения, аналогично формуле (26).

$$\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle = \frac{U_0^2}{2} \tag{33}$$

Подставим в формулу (30) среднюю энергию из формулы (29), а средний квадрат напряжения из формулы (33), и, кроме того, используем связь (5) между амплитудой тока I_0 и амплитудой напряжения U_0.

$$\left(\frac{\mu_0 l}{8\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) \left(\frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}\right)^2 = \frac{C}{2} \frac{U_0^2}{2} \tag{34}$$

Отсюда получаем емкость отрезка кабеля.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon\, l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{35}$$

Теперь из формул (28) и (35) находим погонную емкость и погонную индуктивность кабеля.

$$\bar{C} = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \qquad \bar{L} = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \tag{36}$$

Задача 3.

Найти плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) волны, бегущей вдоль кабеля, и усреднить по времени, за период колебания $T = 2\pi/\omega$.

Вектор плотности потока электромагнитной энергии определяется формулой Пойнтинга.

$$\vec{S}_P = \frac{1}{\mu_0} \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{B}} \tag{6.60}$$

Учитываем поляризацию волны (7), и из формулы (6.60) находим, что вектор Пойнтинга имеет одну проекцию вдоль оси кабеля z.

$$S_{P,z}(r,z,t) = \frac{1}{\mu_0} E_r(r) B_\psi(r) \cos^2(\beta z - \omega t), \tag{37}$$

Усредняем (37) по времени за период, и получаем.

$$\left\langle S_{P,z}(r)\right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_r(r) B_\psi(r) \quad (38)$$

Заменяем электрическое и магнитное поле по формулам (4), и получаем плотность потока в зависимости от амплитуды тока I_0.

$$\left\langle S_{P,z}(r)\right\rangle = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{I_0^2}{r^2} \quad (39)$$

Подставим формулу для фазовой скорости (14), и формулу для среднего значения плотности энергии (17), в выражение (39). В результате, получим связь между плотностью потока энергии и плотностью энергии.

$$\left\langle S_{P,z}(r)\right\rangle = v_f \left\langle w(r)\right\rangle \quad (40)$$

Проинтегрировав проекцию вектора Пойнтинга на ось z по сечению кабеля, найдем поток энергии, распространяющийся вдоль кабеля.

$$\Phi_W = \iint_S \left\langle S_{P,z}(r)\right\rangle dS \quad (6.67)$$

Здесь S – область интегрирования, в данном случае это кольцо с радиусами r_1 и r_2. Интеграл (6.67) вычисляем в полярных координатах.

$$\Phi_W = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r\,dr \left\langle S_{Pz}\right\rangle = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} r\,dr \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{I_0^2}{r^2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_0^2 \ln\frac{r_2}{r_1} \quad (6.68)$$

Используем связь между амплитудой тока и амплитудой напряжения.

$$I_0 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{c\mu_0} \frac{U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad (5)$$

В результате поток энергии (6.68), переносимы волной, принимает вид.

$$\Phi_W = \frac{I_0 U_0}{2} \quad (41)$$

Интересно, что такая же формула (41) получается для среднего значения мощности, измеренной в любом сечении кабеля.

$$\left\langle P\right\rangle = \left\langle \tilde{U}(z,t)\tilde{I}(z,t)\right\rangle = U_0 I_0 \left\langle \cos^2(\beta z - \omega t)\right\rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \quad (42)$$

Поэтому поток энергии можно найти, измеряя мощность в кабеле.