



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»  
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

## ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Новокшанов Евгений Андреевич
Группа:	РК6-66Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Метод конечных разностей

Студент

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Новокшанов Е.А.  
Фамилия, И.О.

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

\_\_\_\_\_  
Фамилия, И.О.

Москва, 2023

<b>Метод конечных разностей</b>	<b>3</b>
Задание	3
Цель выполнения лабораторной работы	6
1 Метод конечных разностей в общем виде	6
2 Метод дробления шага	6
3 Метод конечных элементов в явном виде	7
4 Метод конечных элементов в неявном виде	8
5 Описание структур данных	10
6 Инструкция по работе с программой	13
7 Сравнение результатов моделирования	15
Заключение	17

## Задание

Метод конечных разностей объединяет целый класс численных методов для решения дифференциальных уравнений путём аппроксимации производных.

В данной задаче необходимо найти распределение температуры в двумерной области (пластине)  $\Omega^1$ , представленной на рис. 1. Пластина изготовлена из однородного материала. Единицы измерения: время — секунды (сек.), пространство — миллиметры (мм), температура — градусы Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ).

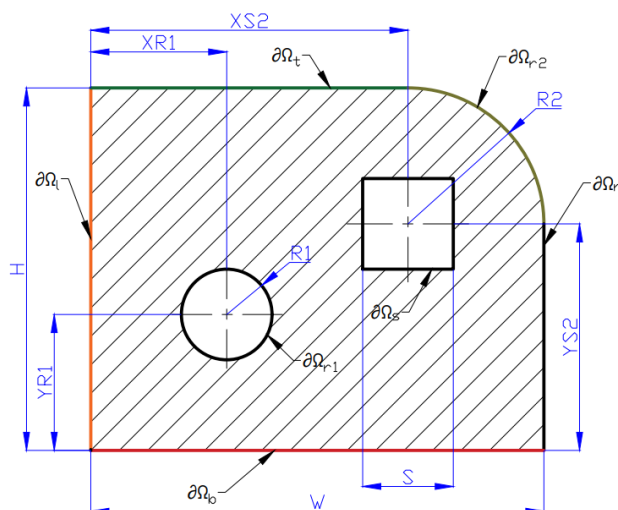


Рис. 1. Чертёж расчётной области пластины  $\Omega$

Основные размеры пластины:  $H = 400$  мм,  $W = 500$  мм,  $R2 = 150$  мм, сторона квадратного отверстия  $S = 100$  мм, радиус круглого отверстия  $R1 = 50$  мм. В каждом варианте задания пластина имеет лишь одно отверстие из двух изображенных на рис. 1. Тип отверстия определяется в соответствии с параметром  $\gamma_1 \in \Gamma_1 = \{\partial\Omega_{r1}, \partial\Omega_s\}$ . Координаты центра отверстия  $(XR1, YR1)$  или  $(XS2, YS2)$  определяются параметром  $\gamma_2 \in \Gamma_2 = \{(155, 155), (155, 255), (355, 255), (355, 155), (255, 205)\}$ .

Пусть граница пластины  $\partial\Omega$  представлена несколькими участками (рис. 1):

$$\Omega = \Omega_l \cup \Omega_r \cup \Omega_t \cup \Omega_b \cup \Omega_{r1} \cup \Omega_s \cup \Omega_{r2};$$

$$\Omega_{ext} = \Omega_l \cup \Omega_r \cup \Omega_t \cup \Omega_b \cup \Omega_{r2}, \text{ — внешняя граница области } \Omega;$$

$\Omega_{in} = \Omega_s \cup \Omega_{r1}$ , — внутренняя граница области  $\Omega$ .

Узловые точки, расположенные на границах  $(x, y) \in \partial\Omega$  или их окрестности  $(x, y) \in \Omega_{near}$  требуют особого внимания, поскольку в этих областях шаг сетки неравномерный, формулы для расчёта производных можно вывести используя материалы лекций

${}^1\Omega$  — область пластины, не включая её границу,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  — область пластины, включая её границу  $\partial\Omega$ ,  $\Omega_{near}$  — внутренняя область в  $h$ -окрестности границы  $\partial\Omega$ , где  $h$ -шаг сетки.

по [Вычислительной математике](#)<sup>2</sup> или [материалы БИГОР](#). Напомним, что внутренняя область пластины обозначена просто  $\Omega$  и рассматривается двумерная постановка задачи. Известно, что температура  $T$  в точке с координатами  $(x, y) \in \Omega$  в момент времени  $t$  есть отображение  $T: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , которое вычисляется в результате решения дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad T = T(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, т.е.  $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ .

Начальное значение температуры для всех вариантов имеет вид:

$$T|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2)$$

При этом, граничные условия для сторон пластины  $\Omega_x$  будут иметь различный вид:

$$T|_{(x,y) \in \Omega_x} = 100 \text{ — ГУ 1-о рода, задает источник нагрева;} \quad (3)$$

$$\nabla_{\bar{n}} T|_{(x,y) \in \Omega_x} = 0 \text{ — ГУ 3-о рода, теплоизоляция,} \quad (4)$$

где  $\nabla_{\bar{n}} T = \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = \nabla_{x,y} T \cdot \bar{n}$  — градиент температуры вдоль внешней нормали  $\bar{n}$  к  $\Omega_x$ ;

$$\nabla_{\bar{n}} T|_{(x,y) \in \Omega_x} = T \text{ — ГУ 3-о рода, для конвективного теплообмена на границе } \Omega_x. \quad (5)$$

Физический смысл ГУ 1-о рода может означать, например, соприкосновение стороны поверхности  $\Omega_x$ , если рассматривать пластину как сечение тела, с некоторой средой высокой температуры (100 С°). Соответствие  $\Omega_x$  конкретному ГУ задает параметр

$\gamma_3 \in \Gamma_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ , исходя из таблицы [1](#).

Требуется (базовая часть):

- 1 Определить форму пластины и ГУ в соответствии с  $id_{\Gamma_i}[\gamma_i]$ ,  $\forall i \in [1 : 3]$ .
- 2 Задать равномерный шаг дискретизации  $h \in \{5, 10\}$ <sup>3</sup> по координатам  $x$  и  $y$ . Построить расчётную сетку на множестве  $\bar{\Omega}$  и рассчитать позиции узлов на границах.
- 3 Для каждого варианта шага  $h$  явным и неявным методом решить нестационарное уравнение теплопроводности (1) при заданных ГУ, определив значения температуры в узлах сетки в диапазоне времени  $t \in (0; 100]$  сек, с шагом  $h_t = 1$  сек.

<sup>2</sup>Глава «Метод разложения функции в ряд Тейлора»

<sup>3</sup>Каждому значению шага  $h$  соответствует один расчет; шаг по координатам  $x$  и  $y$  одинаков.

Таблица 1. Варианты граничных условий в зависимости от  $\gamma_3$ 

	«нагрев» (3)	«теплоизоляция» (4)	«конвекция» (5)
$\gamma_3 = 1$	$\partial\Omega_{ex}$	$\emptyset$	$\partial\Omega_{in}$
$\gamma_3 = 2$	$\partial\Omega_{in}$	$\emptyset$	$\partial\Omega_{ex}$
$\gamma_3 = 3$	$\partial\Omega_l$	$\partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b$	$\partial\Omega_r$
$\gamma_3 = 4$	$\partial\Omega_r$	$\partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b$	$\partial\Omega_l$
$\gamma_3 = 5$	$\partial\Omega_t$	$\partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r$	$\partial\Omega_b$
$\gamma_3 = 6$	$\partial\Omega_b$	$\partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r$	$\partial\Omega_t$
$\gamma_3 = 7$	$\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r$	$\partial\Omega_{in}$	$\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b$
$\gamma_3 = 8$	$\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r \cup \partial\Omega_{in}$	$\emptyset$	$\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b$
$\gamma_3 = 9$	$\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b$	$\partial\Omega_{in}$	$\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r$
$\gamma_3 = 10$	$\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b \cup \partial\Omega_{in}$	$\emptyset$	$\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r$
$\gamma_3 = 11$	$\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r$	$\emptyset$	$\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b \cup \partial\Omega_{in}$
$\gamma_3 = 12$	$\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_b$	$\emptyset$	$\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r \cup \partial\Omega_{in}$
$\gamma_3 = 13$	$\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_b$	$\partial\Omega_{in}$	$\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_r$

- 4 Результаты необходимо сохранить в 4-х текстовых файлах<sup>4</sup>, имя каждому следует задавать в формате согласно материалу инструкции по выполнению лабораторных работ [1]<sup>5</sup>. Содержание каждого файла с результатами расчётов должно соответствовать следующему формату<sup>6</sup>:

```
t x y T
ti xj yk Tijk
...
```

- 5 Для неявного метода в отчёте должна быть приведена информация о СЛАУ: количество неизвестных (уравнений), число ненулевых элементов матрицы.
- 6 Сравнить полученные результаты вычислений с результатом моделирования аналогичной задачи в ANSYS.

Требуется (продвинутая часть):

7. Реализовать функцию кубической интерполяции значений температуры для произвольных точек пластины  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  по известным значениям в узлах, в дискретные моменты времени;
8. Визуализировать результаты вычислений: функцию поля температуры  $f(t_i, x, y)$  по всей пластине в виде цветовой диаграммы в требуемый момент времени (во время защиты).

<sup>4</sup>Рассматривается 2 шага и по 2 метода для каждого.

<sup>5</sup>Пример: `edumta1ab2023rk663bivanovpp1ab1res2.pdf`-21..6 – 63, 2023.

<sup>6</sup>В первой строке наименования параметров, а далее в каждой строке значения аргументов  $t_i$ ,  $x_j$ ,  $y_k$  и функции  $f(t_i, x_j, y_k) = f_{ijk}$ . В качестве разделителя могут использоваться: пробел или точка с запятой.

## Цель выполнения лабораторной работы

Познакомиться с методом конечных разностей и продемонстрировать с помощью компилируемого языка программирования пример распределения температуры в двумерной области.

## 1 Метод конечных разностей в общем виде

В первую очередь для реализации МКР требуется дискретизировать время и пространство. Дискретизация пространства происходит путем наложения на пластину сетки с шагом  $h$ . Начало координат сетки совпадает с левым нижним углом пластины. Ось  $X$  параллельна нижней грани пластины. Ось  $Y$  параллельна левой грани пластины. Начало отсчета производится с нуля. На пересечении вертикальных и горизонтальных "полос" сетки находятся узлы, в которых будут вычисляться значения температур. Исключением являются граничные узлы, не попадающие на сетку. Они находятся на пересечении границ пластины с одной из "полос" сетки. Количество узлов в сетке по горизонтали, считая с граничными:  $n = \frac{W}{h} + 1$ , по вертикали:  $m = \frac{H}{h} + 1$ . Время дискретизируется путем разделения задачи на шаги, в каждом из которых производится вычисление температуры во всех узлах при фиксированном времени с шагом по времени  $h_t = 1$  сек. Начальный момент времени  $k = 0$ .

Значение температуры в граничных узлах может быть записано формулой (6):

$$T_{ij}^k = \begin{cases} 100, \text{ ГУ} = (3); \\ 200, (ih, jh) \in \Omega_{r2}; \\ T_{i+\Delta i_1, j+\Delta j_1}^t, \text{ ГУ} = (4); \\ \frac{T_{i+\Delta i_1, j+\Delta j_1}^t}{\mu h + 1}, \text{ ГУ} = (5), \end{cases} \quad (6)$$

где  $i = \{0, n\}$  при  $j = 1..m - 1$ ;  $j = \{0, m\}$  при  $i = 1..n - 1$ ;  $\Delta i_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{n}$ ,  $\Delta j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{n}$ ,  $\mu$  - соотношение расстояния между узлом  $(i, j)$  и  $(i + \Delta i_1, j + \Delta j_1)$  к  $h$ .

## 2 Метод дробления шага

Если граничный узел не совпадает с реальной границей рассматриваемого объекта, то для вычисления 1-й производной необходимо применять метод дробления шага. Суть данного метода заключается в дроблении шага сетки на граничном узле так, что бы новый узел совпадал с реальной границей объекта. Формула представлена ниже:

Формула для второй производной:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 \frac{\mu V_C + V_A - (\mu + 1)V_B}{(\mu^2 + \mu) \Delta x^2} \quad (7)$$

Формула для первой производной:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mu^2 V_C - V_A - (\mu^2 - 1)V_B}{(\mu^2 - \mu) \Delta x} \quad (8)$$

Для узлов, которые не являются граничными, мы принимаем  $\mu = 1$  и вычисляем 2-ю производную.

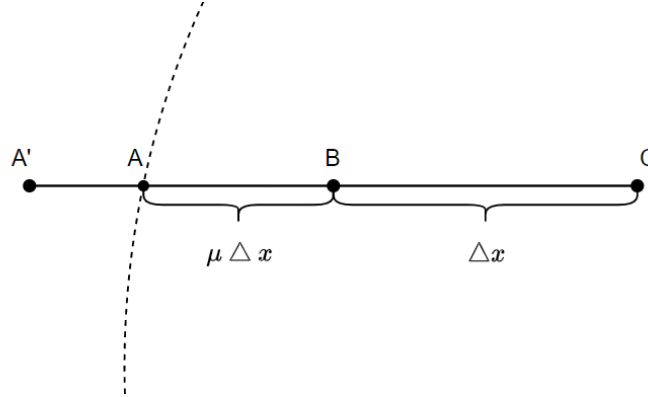


Рис. 2. Иллюстрация схемы с дроблением шага

### 3 Метод конечных элементов в явном виде

Явная разностная схема, из которой мы находим температуру на  $k+1$  шаге, имеет следующий вид:

$$\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{\partial^2 T_j^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i^k}{\partial y^2} \quad (9)$$

Схема расположения узлов и их индексация представлена ниже:

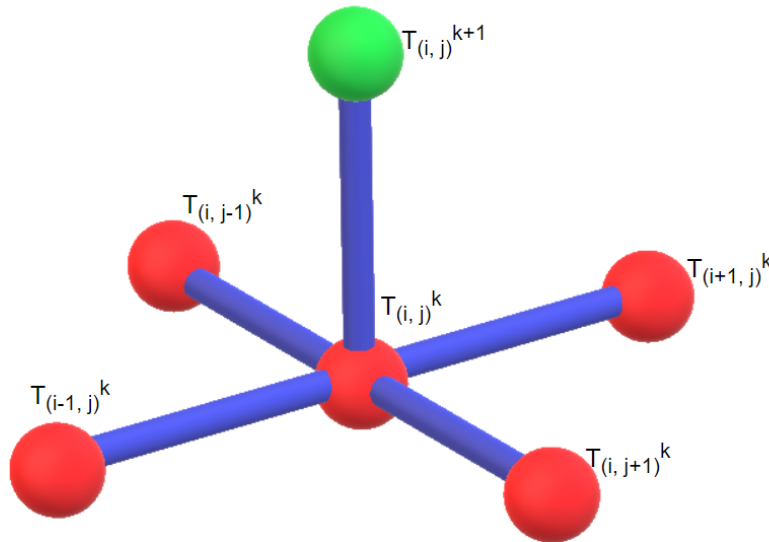


Рис. 3. Визуальное представление сетки на  $k$ -м и  $k+1$ -м шаге

#### 4 Метод конечных элементов в неявном виде

Для решения задачи неявным МКР применяется метод расщепления.

Первым этапом по значениям температур предыдущего шага находятся температуры  $w_{ij}^{t+1}$ , по значениям которых на втором этапе находятся температуры на новом шаге  $T_{ij}^{t+1}$ . При этом  $i = 1..n - 1, j = 1..m - 1$ .

Формула на первом этапе следующая:

$$w_{ij}^{t+1} - T_{ij}^t = 2 \frac{\mu_x w_{i+\Delta i_2, j}^{t+1} - (1 + \mu_x) w_{ij}^{t+1} + w_{i-\Delta i_2, j}^{t+1}}{\mu_x (1 + \mu_x) h^2}, \quad (10)$$

(10) можно представить в виде:

$$-T_{ij}^t = \frac{2}{(1 + \mu_x) h^2} w_{i+\Delta i_2, j}^{t+1} + \frac{-2 - \mu_x h^2}{\mu_x h^2} w_{ij}^{t+1} + \frac{2}{\mu_x (1 + \mu_x) h^2} w_{i-\Delta i_2, j}^{t+1}, \quad (11)$$

При фиксации  $j$ , (11) можно представить в виде СЛАУ. При  $i = \{1, n - 1\}$  при этом в СЛАУ будут фигурировать ГУ. От них можно избавиться путем подстановки (6). Такая подстановка влияет либо на коэффициент перед  $T_{ij}^t$ , либо перед  $w_{ij}^{t+1}$ . Дополнительно можно подставить  $\mu_x = 1$  для  $i = 2..n - 2$ .

Результирующая СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{-2-\mu_{x1}h^2}{\mu_{x1}h^2} + \Delta w_1 & \frac{2}{(1+\mu_{x1})h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{2}{(1+\mu_{x2})h^2} + \Delta w_2 & \frac{-2-\mu_{x2}h^2}{\mu_{x2}h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1j}^{t+1} \\ w_{2j}^{t+1} \\ w_{3j}^{t+1} \\ \vdots \\ w_{n-2,j}^{t+1} \\ w_{n-1,j}^{t+1} \end{bmatrix} = \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} -T_{1j}^t + \Delta T_1 \\ -T_{2j}^t \\ -T_{3j}^t \\ \vdots \\ -T_{n-2,j}^t \\ -T_{n-1,j}^t + \Delta T_2 \end{bmatrix},$$

где  $\mu_{x1}$  - отношение расстояния между узлом  $(0, j)$  и узлом  $(1, j)$  к  $h$ ;  $\mu_{x2}$  - отношение расстояния между узлом  $(n - 1, j)$  и узлом  $(n, j)$  к  $h$ ;

$$\Delta w_1 = \begin{cases} 0, \text{ ГУ в } (0, j) \text{ 1-го рода;} \\ \frac{2}{\mu_{x1}(1+\mu_{x1})h^2}, \text{ ГУ в } (0, j) = (4); \\ \frac{2}{\mu_{x1}(1+\mu_{x1})h^2(\mu_{x1}h+1)}, \text{ ГУ в } (0, j) = (5). \end{cases}, \Delta w_2 = \begin{cases} 0, \text{ ГУ в } (n, j) \text{ 1-го рода;} \\ \frac{2}{\mu_{x2}(1+\mu_{x2})h^2}, \text{ ГУ в } (n, j) = (4); \\ \frac{2}{\mu_{x2}(1+\mu_{x2})h^2(\mu_{x2}h+1)}, \text{ ГУ в } (n, j) = (5). \end{cases},$$

$$\Delta T_1 = \begin{cases} -\frac{100}{\mu_{x1}(1+\mu_{x1})h^2}, \text{ ГУ в } (0, j) : T_{ij}^{t+1} = 100; \\ -\frac{200}{\mu_{x1}(1+\mu_{x1})h^2}, \text{ ГУ в } (0, j) : T_{ij}^{t+1} = 200; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}, \Delta T_2 = \begin{cases} -\frac{100}{\mu_{x2}(1+\mu_{x2})h^2}, \text{ ГУ в } (n, j) : T_{ij}^{t+1} = 100; \\ -\frac{200}{\mu_{x2}(1+\mu_{x2})h^2}, \text{ ГУ в } (n, j) : T_{ij}^{t+1} = 200; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}.$$



При решении СЛАУ (12) для всех  $j = 1..m - 1$  получается массив значений  $w_{ij}^{t+1}$ ,  $i = 1..n - 1$ . На основе него аналогичным первому этапу производится второй этап вычислений:

$$T_{ij}^{t+1} - w_{ij}^{t+1} = 2 \frac{\mu_y T_{i,j+\Delta j_2}^{t+1} - (1 + \mu_y) T_{ij}^{t+1} + T_{i,j-\Delta j_2}^{t+1}}{\mu_y (1 + \mu_y) h^2}, \quad (13)$$

(13) можно представить в виде:

$$-w_{ij}^{t+1} = \frac{2}{(1 + \mu_y) h^2} T_{i,j+\Delta j_2}^{t+1} + \frac{-2 - \mu_y h^2}{\mu_y h^2} T_{ij}^{t+1} + \frac{2}{\mu_y (1 + \mu_y) h^2} T_{i,j-\Delta j_2}^{t+1}, \quad (14)$$

При фиксации  $i$ , (14) можно представить в виде СЛАУ. При  $j = \{1, m-1\}$  в СЛАУ будут фигурировать ГУ. От них можно избавиться путем подстановки (6). Такая подстановка влияет либо на коэффициент перед  $w_{ij}^{t+1}$ , либо перед  $T_{ij}^{t+1}$ . Дополнительно можно подставить  $\mu_y = 1$  для  $j = 2..m - 2$ .

Результирующая СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{-2-\mu_{y1}h^2}{\mu_{y1}h^2} + \Delta x_1 & \frac{2}{(1+\mu_{y1})h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{2}{(1+\mu_{y2})h^2} + \Delta x_2 & \frac{-2-\mu_{y2}h^2}{\mu_{y2}h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i1}^{t+1} \\ T_{i2}^{t+1} \\ T_{i3}^{t+1} \\ \vdots \\ T_{i,m-2}^{t+1} \\ T_{i,n-1}^{t+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -w_{i1}^{t+1} + \Delta T_3 \\ -w_{i2}^{t+1} \\ -w_{i3}^{t+1} \\ \vdots \\ -w_{i,n-2}^{t+1} \\ -w_{i,m-1}^{t+1} + \Delta T_4 \end{bmatrix},$$

где  $\mu_{y1}$  - отношение расстояния между узлом  $(i, 0)$  и узлом  $(i, 1)$  к  $h$ ;  $\mu_{y2}$  - отношение расстояния между узлом  $(i, m-1)$  и узлом  $(i, m)$  к  $h$ ;

$$\Delta x_1 = \begin{cases} 0, \text{ГУ в } (i, 0) \text{ 1-го рода;} \\ \frac{2}{\mu_{y1}(1+\mu_{y1})h^2}, \text{ГУ в } (i, 0) = (4); \\ \frac{2}{\mu_{y1}(1+\mu_{y1})h^2(\mu_{y1}h+1)}, \text{ГУ в } (i, 0) = (5). \end{cases}, \quad \Delta x_2 = \begin{cases} 0, \text{ГУ в } (i, m) \text{ 1-го рода;} \\ \frac{2}{\mu_{y2}(1+\mu_{y2})h^2}, \text{ГУ в } (i, m) = (4); \\ \frac{2}{\mu_{y2}(1+\mu_{y2})h^2(\mu_{y2}h+1)}, \text{ГУ в } (i, m) = (5). \end{cases},$$

$$\Delta T_3 = \begin{cases} -\frac{100}{\mu_{y1}(1+\mu_{y1})h^2}, \text{ГУ в } (i, 0) : T_{ij}^{t+1} = 100; \\ -\frac{200}{\mu_{y1}(1+\mu_{y1})h^2}, \text{ГУ в } (i, 0) : T_{ij}^{t+1} = 200; \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}, \quad \Delta T_4 = \begin{cases} -\frac{100}{\mu_{y2}(1+\mu_{y2})h^2}, \text{ГУ в } (i, m) : T_{ij}^{t+1} = 100; \\ -\frac{200}{\mu_{y2}(1+\mu_{y2})h^2}, \text{ГУ в } (i, m) : T_{ij}^{t+1} = 200; \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}.$$

При решении (15) для всех  $i$  находятся значения во всех внутренних узлах на новом шаге. Для нахождения значений температур в граничных узлах используется формула (6) после вычисления значения во внутренних узлах.

Цикл нахождения повторяется до достижения поставленной задачи времени выполнения.

В итоге, в неявном методе составляется и решается 2 СЛАУ, где количество уравнений равно количеству внутренних узлов пластины, а в матричном виде мы получаем  $3 \cdot N - 2$  ненулевых элементов матрицы.

Схема расположения узлов и их индексации представлена ниже:

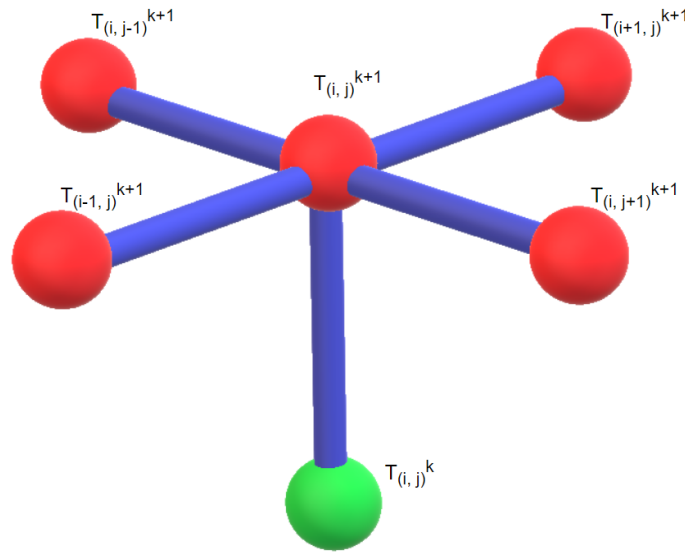


Рис. 4. Визуальное представление сетки на  $k$ -м и  $k+1$ -м шаге

## 5 Описание структур данных

Для выполнения поставленных задач, а именно программной реализации метода конечных разностей в явном и неявном виде, были разработаны следующие классы:

- Object;
- Hole;
- Circle - public наследование класса Hole;
- Square - public наследование класса Hole;
- Point.

UML-диаграмма их взаимодействия представлена ниже:

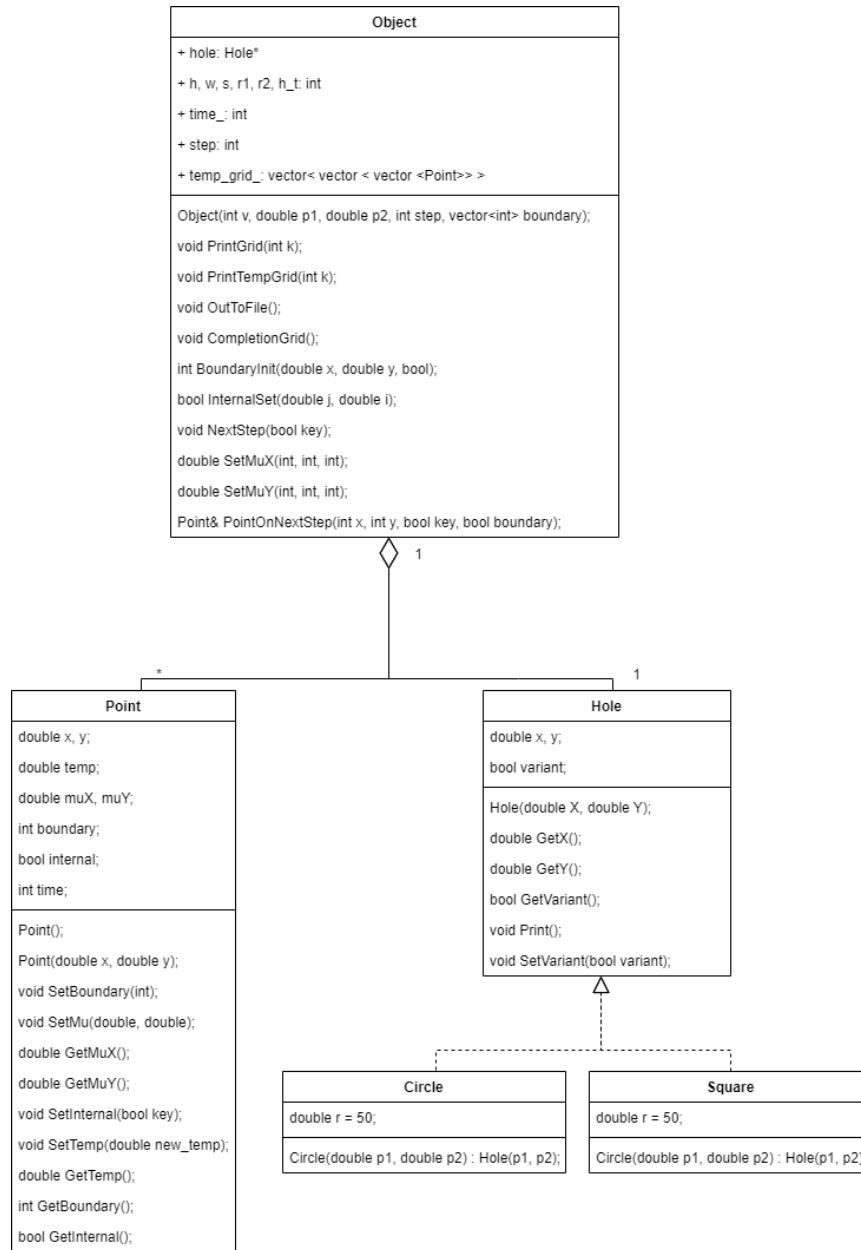


Рис. 5. UML-диаграмма классов

Класс **Object** - объект, который хранит температуру каждого узла в каждый момент времени. В инициализаторе данного класса вызывается метод **CompletionGrid** который формирует сетку в начальный момент времени и проставляет начальные условия, которые передаются программе с помощью файла **input.txt**. Матрица для хранения сетки реализуется с помощью класса вектора стандартной библиотеки C++, в котором хранятся объекты пользовательского класса **Point**. Вычисление темпера-

туры в каждом узле в следующий момент времени вычисляется с помощью метода **NextStep**, в который передается ключ типа **boolean**, с помощью которого определяется метод. Ниже представлен листинг класса **Object**.

Листинг 1. Листинг файла Object.h

---

```

1 class Object {
2 private:
3     int h = 400, w = 500;
4     int s = 100;
5     int r1 = 50, r2 = 150;
6     int h_s, w_s;
7     int h_t = 1;
8     int time_;
9     Hole* hole;
10    int step;
11    vector<int> boundary_;
12    vector< vector < vector <Point>>> > temp_grid_;
13    vector< pair <char, int> > boundary_conditions_;
14 public:
15    Object(int v, double p1, double p2, int step, vector<int> boundary);
16    void PrintGrid(int k);
17    void PrintTempGrid(int k);
18    void OutToFile();
19    void CompletionGrid();
20    void SetBoundary(vector<int> boundary);
21    int BoundaryInit(double x, double y, bool);
22    bool InternalSet(double j, double i);
23    Point& PointOnNextStep(int x, int y, bool key, bool boundary);
24    void NextStep(bool key);
25    double SetMuX(int, int, int);
26    double SetMuY(int, int, int);
27 };

```

---

Узлы сетки реализованы с помощью объектов пользовательского класса **Point**. В данном классе реализованы основные **set** и **get** методы для изменения параметров объекта и получения данных и области **private**. Ниже приведен листинг класса **Point**.

Листинг 2. Листинг файла Point.h

---

```

1 #pragma once
2 class Point {
3 private:
4     double x, y;
5     double temp;
6     double muX, muY;
7     int boundary;
8     bool internal;

```

---

```

9  int time;
10 public:
11  Point();
12  Point(double x, double y);
13  void SetBoundary(int);
14  void SetMu(double, double);
15  double GetMuX();
16  double GetMuY();
17  void SetInternal(bool key);
18  void SetTemp(double new_temp);
19  double GetTemp();
20  int GetBoundary();
21  bool GetInternal();
22 };

```

В методе **CompletionGrid** с помощью методов **BoundaryInit**, **InternalSet**, **SetMuX** и **SetMuY** происходит вычисление коэффициентов  $\mu$ , распределение узлов на внутренние и внешние, а так же на граничные и не граничные, которое используется для правильной реализации МКР. Все это передается в соответствующий объект класса **Point**.

Для задания координат отверстия и его формы были реализованы классы **Hole**(родительский класс), **Circle**(дочерний класс) и **Square**(дочерний класс). Вид отверстия определяется в конструкторе класса **Object** с помощью переопределения класса **Hole**.

## 6 Инструкция по работе с программой

Параметры для работы программы записываются в файле input.txt, где на каждой новой строке находится новый параметр:

1. Шаг сетки: 5 или 10;
2. Вариант: определяет то, каким будет отверстие. Если вариант нечетный, то отверстие имеет форму квадрата, если четный, то отверстие имеет форму круга;
3. Указывается X координата центра отверстия;
4. Указывается Y координата центра отверстия;
5. Указывается граничное условие для 1-й грани;
6. Указывается граничное условие для 2-й грани;
7. Указывается граничное условие для 3-й грани;
8. Указывается граничное условие для 4-й грани;
9. Указывается граничное условие для 5-й грани;

10. Указывается граничное условие для граней отверстия.

Граничные условия: 1 - 100 градусов(нагрев) 2 - 200 градусов(нагрев) 3 - Граничное условие второго рода(теплоизоляция) 4 - Граничное условие третьего рода(конвекция)  
Нумерация граней:

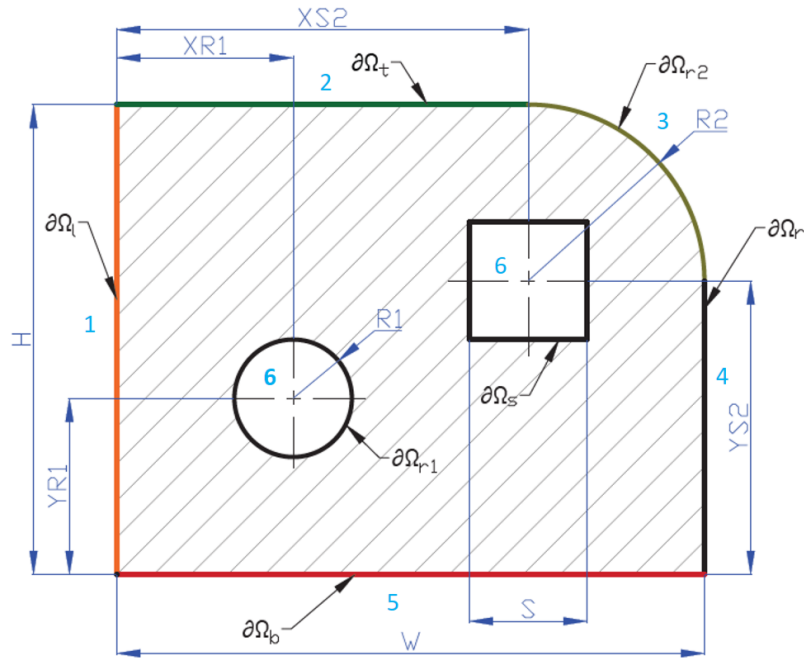


Рис. 6. Сформированная сетка

Системные требования:

1. Для работы явного метода с шагом 10 в среднем требуется 100 МВ ОЗУ;
2. Для работы явного метода с шагом 5 в среднем требуется 1 GB ОЗУ;
3. Для работы неявного метода с шагом 10 в среднем требуется 100 МВ ОЗУ;
4. Для работы неявного метода с шагом 5 в среднем требуется 1 GB ОЗУ.

## 7 Сравнение результатов моделирования

В соответствии со своим 17-м вариантом представлены следующие результаты. Результаты работы программы в программном комплексе Ansys:

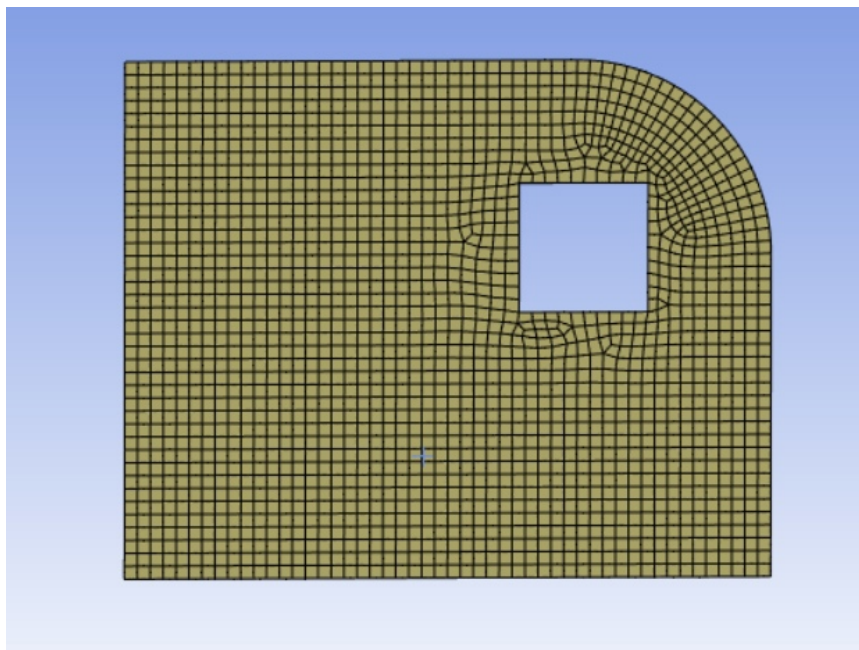


Рис. 7. Сформированная сетка

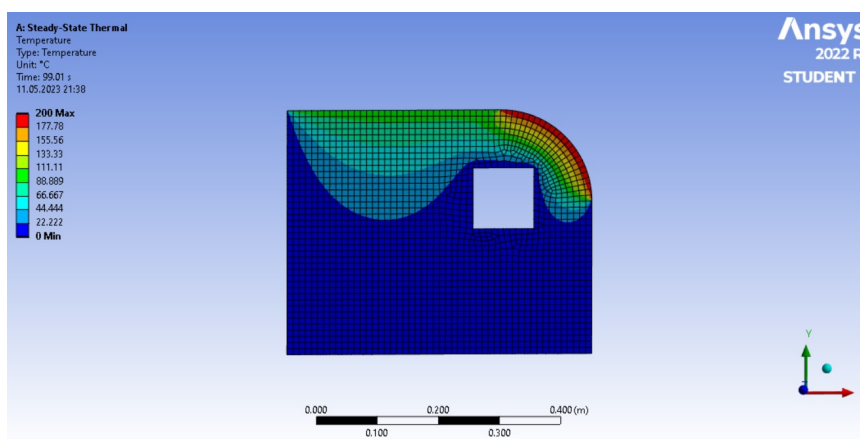


Рис. 8. Температура пластины на 100-й секунде

Результаты работы разработанной программы (неявный метод 1000 итераций):

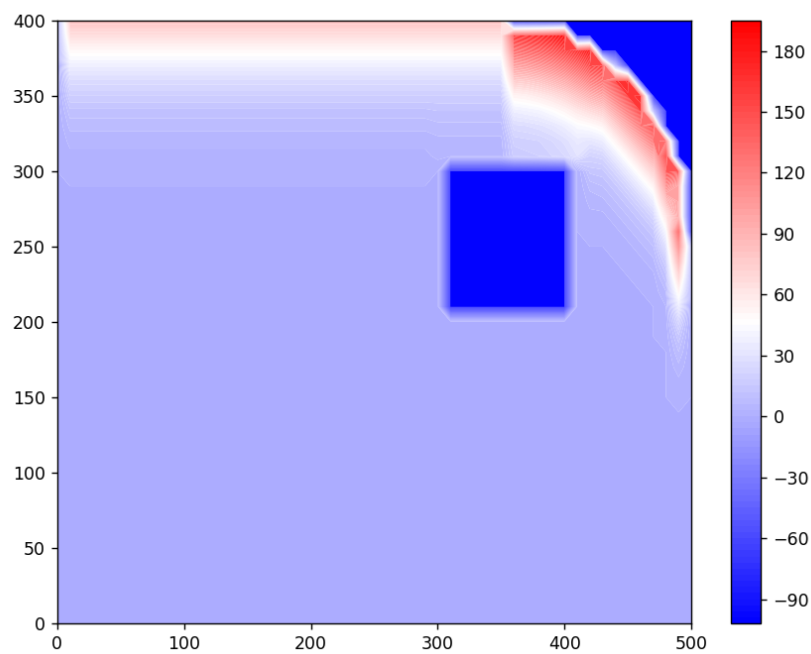


Рис. 9. Температура пластины на 100-й секунде

Результаты работы разработанной программы(явный метод 10000 итераций):

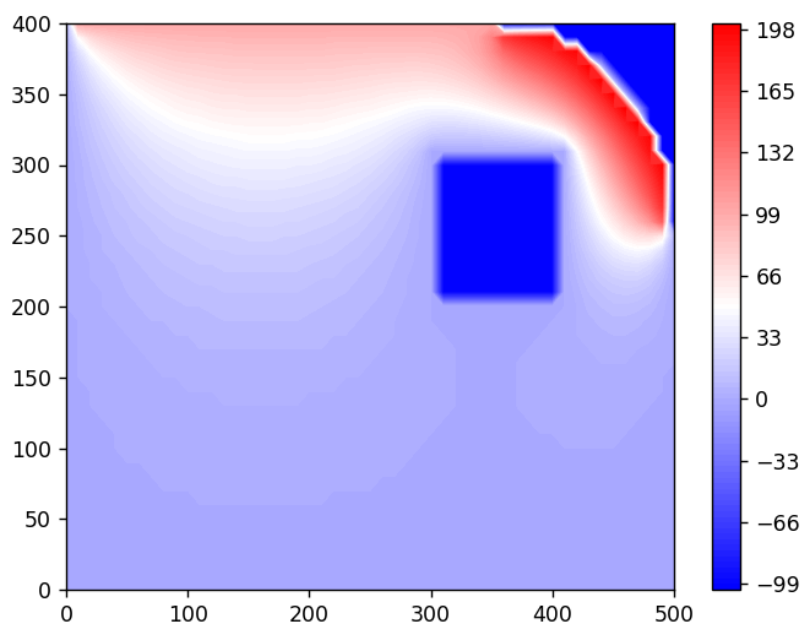


Рис. 10. Температура пластины на 10000 шаге



Результаты работы разработанной программы и моделирования в программе Ansys совпадают с некоторой неточностью, что вызвано тем, что мы не знаем точный материал пластины.

## Заключение

При выполнении лабораторной работы была построена модель в ANSYS, заданы необходимые граничные условия, реализован программный аналог решения задачи на языке программирования C++.

## Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: <https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046>.
2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).

## Выходные данные

Новокишанов Е.А. Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2023. — 17 с. URL: <https://sa2systems.ru:88> (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка:  доцент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин

Решение и вёрстка:  студент группы РК6-66Б, Новокишанов Е.А.

2023, весенний семестр