



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ
по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Новокшанов Евгений Андреевич
Группа:	РК6-56Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Интерполяция Лагранжа

Студент _____
подпись, дата _____

Новокшанов Е.А.
Фамилия, И.О.

Преподаватель _____
подпись, дата _____

Фамилия, И.О.

Москва, 2022

Содержание

Интерполяция Лагранжа	3
Задание	3
Цель выполнения лабораторной работы	4
1 Базовая часть	4
Задание №1	4
Задание №2	4
Задание №3	5
Задание №4	9
2 Продвинутая часть	16
Задание №1	16
Задание №2	17
Задание №3	20
Задание №4	24
Заключение	24

Интерполяция Лагранжа

Задание

Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad (1)$$

где $x \in [-1; 1]$. Также дана рациональная функция, известная как аппроксимация Паде:

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum_{j=1}^m a_j x^j}{1 + \sum_{k=1}^n b_k x^k}, \quad (2)$$

где $x \in [-1; 1]$.

Требуется (базовая часть):

1. Разработать функцию `l_i(i, x, x_nodes)`, которая возвращает значение i -го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами `x_nodes`, в точке x .
2. Написать функцию `L(x, x_nodes, y_nodes)`, которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами `x_nodes` и ординатами `y_nodes`, в точке x .
3. Для равномерно расположенных узлов вывести на экран одновременно графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для следующих количеств узлов: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23. В результате это должно дать 7 пар графиков. Опишите, что наблюдается при увеличении количества узлов?
4. Повторить предыдущий пункт для чебышевских узлов. В чем разница между интерполяцией Лагранжа функции $f(x)$ на основе равномерно расположенных узлов и чебышевских? Сделать выводы.

Требуется (продвинутая часть):

1. Сгенерировать 100 функции $f_{n,m}(x)$, где целые степени $n, m \in [7; 15]$ и вещественные коэффициенты $a_j, b_k \in [0; 1]$ генерируются случайным образом для каждой из функций.
2. Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики $f_{n,m}(x)$ и соответствующего интерполяционного полинома $L(x)$, построенного по N равномерно расположенным узлам, где N выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведите $L(x)$, построенного по N чебышевским узлам.

3. Для каждой из функций, сгенерированных в предыдущем пункте, найдите интерполяционные полиномы $L(x)$, построенные по $N \in \{1, 2, \dots, 30\}$ равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого N рассчитайте расстояние между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L_∞ . Рассмотрите несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от N и сделайте по ним вывод. Добавьте в отчет один характерный график, который наглядно демонстрирует верность вашего вывода.
4. Объясните, что такое аппроксимация Паде и до какой степени предложенный метод генерации случайных функций $f_{n,m}(x)$ позволяет обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции

Цель выполнения лабораторной работы

Исследование влияния количества и расположения узлов на построения интерполяционного полинома Лагранжа. Так же исследовать феномен Рунге для равномернораспределенных узлов.

1 Базовая часть

Лабораторная работа была выполнена на языке Python3.9 с использованием библиотек matplotlib версии 3.6.0 и numpy версии 1.23.3.

Задание №1

Программная реализация базисного многочлена $(n-1)$ й степени $l_i = \prod_{i \neq j} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$ выполнена с помощью циклического заполнения массива элементами $\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$ при $i \neq j$. x - абсцисса точки, в которой мы ищем значение, i - номер базисного полинома, x_nodes - узлы, через которые будет строиться полином.

Листинг 1. Реализация функции

```

1 def l_i(i, x, x_nodes):
2     x_nodes_i = []
3     for j in range(len(x_nodes)):
4         if(j!=i):
5             x_nodes_i.append(x_nodes[j])
6     return np.prod((x-x_nodes_i)/(x_nodes[i]-x_nodes_i))

```

Задание №2

Программная реализация интерполяционного многочлена Лагранжа, где x - точка, в которой мы находим значение полинома, x_nodes и y_nodes - абсциссы и ординаты

узлов соответственно, через которые строится полином.

$$L_{i-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}, \quad (3)$$

Листинг 2. Реализация функции $L(x, x_nodes, y_nodes)$

```
1 def L(x, x_nodes, y_nodes):
2     return np.sum(y_nodes*[l_i(i,x,x_nodes) for i in range(x_nodes.size)])
```

Задание №3

Построим графики интерполянтов для N равномерно распределенных узлов, при $N = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$. Для построения графиком используем объекты axes, figure. Задание соответствующего набора точек происходит с помощью метода plot объекта axes.

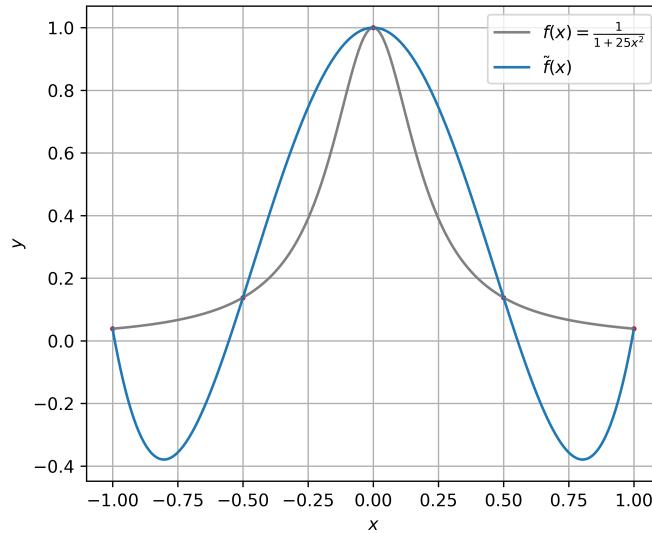


Рис. 1. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 5-ти равномерным узлам

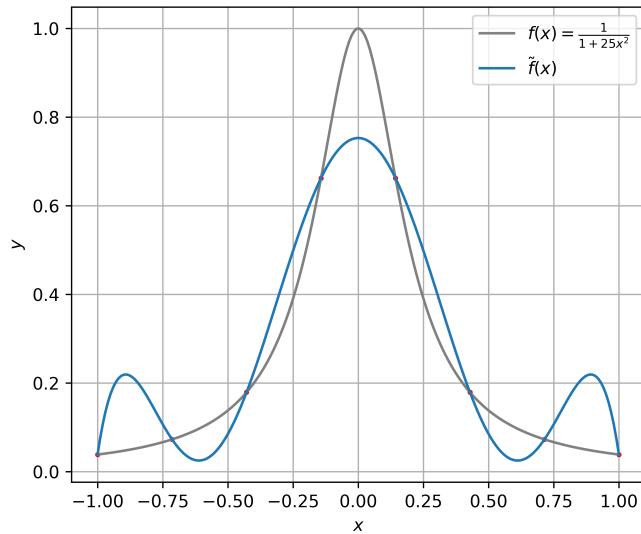


Рис. 2. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 8-ти равномерным узлам

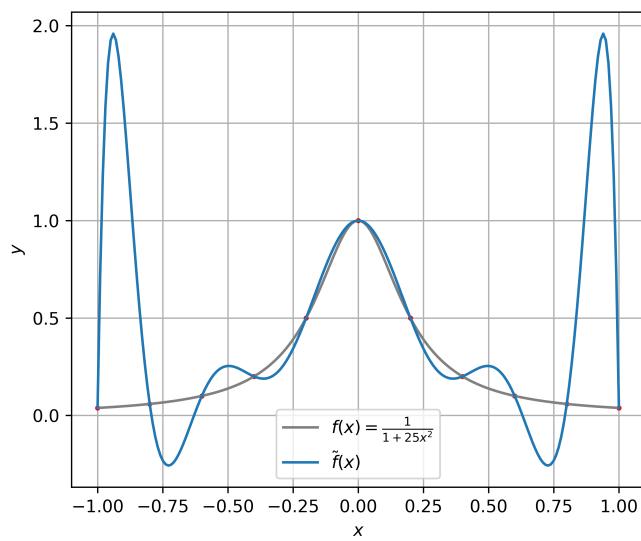


Рис. 3. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 11-ти равномерным узлам

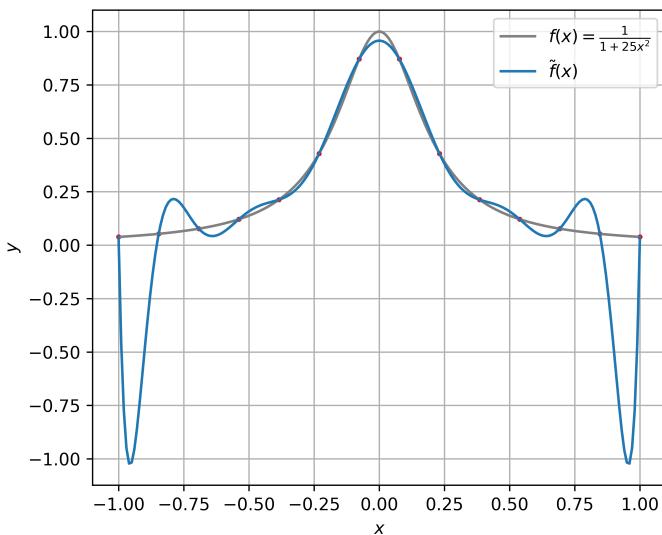


Рис. 4. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 14-ти равномерным узлам

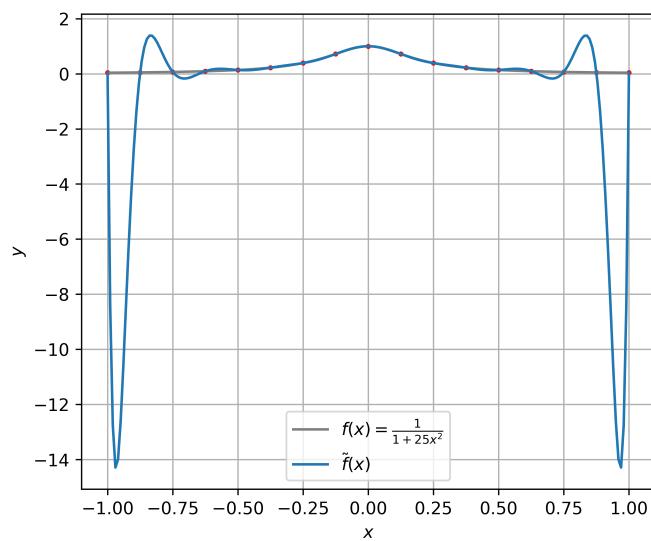


Рис. 5. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 17-ти равномерным узлам

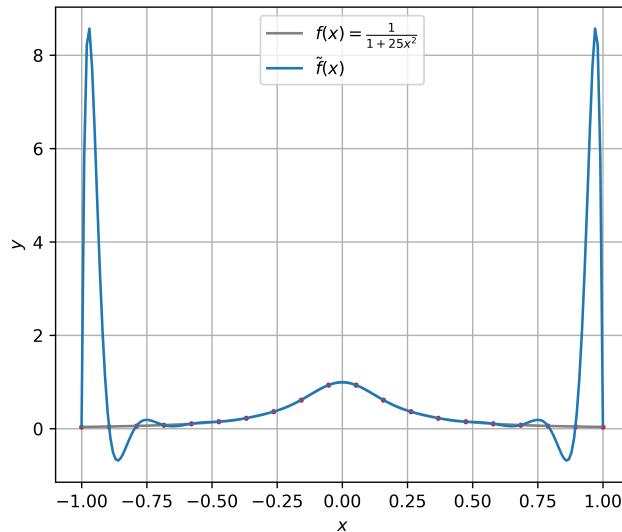


Рис. 6. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 20-ти равномерным узлам

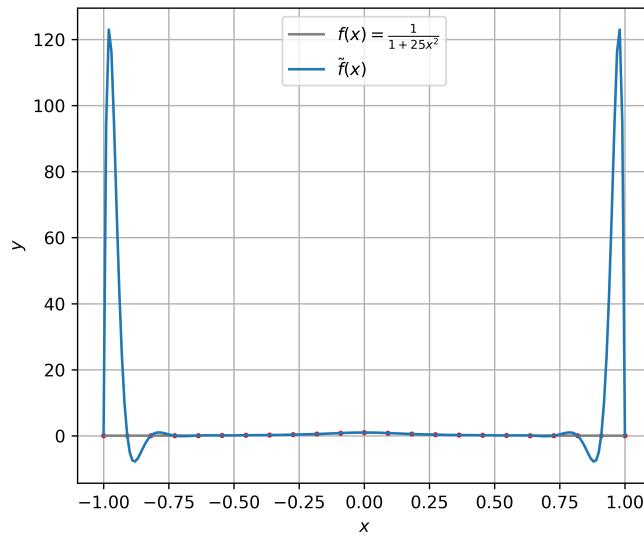


Рис. 7. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 23-ти равномерным узлам

По приведенным выше графикам(рис. 1 - 7) можно сделать вывод: Увеличение количества равномерно распределенных узлов приводит к увеличению осцилляции на границе промежутка интерполяции $[-1; 1]$. Так же мы наблюдаем эффект Рунге - эффект нежелательных осцилляций, возникающий при интерполяции полиномами высоких степеней.

Задание №4

Построим графики(рис. 8 - 14) интерполянтов для N чебышевских узлов, при N = {5, 8, 11, 14, 17, 20, 23}. Координаты узлов Чебышева мы расчитываем по следующей формуле:

$$\bar{x}_i = \cos\left(\frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right), \quad (4)$$

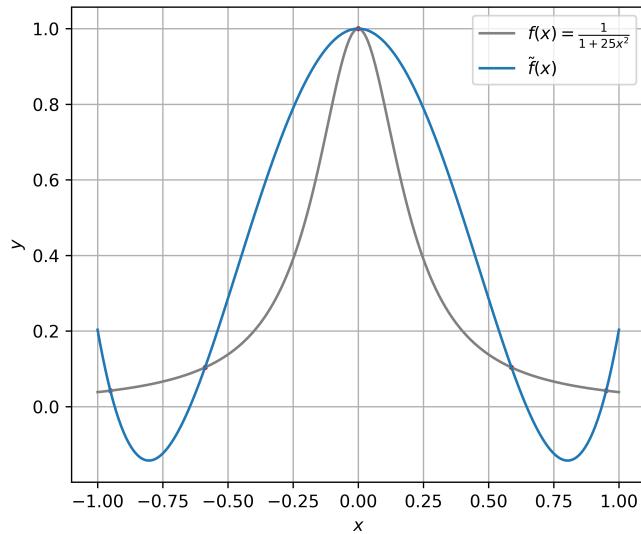


Рис. 8. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 5-ти чебышевским узлам

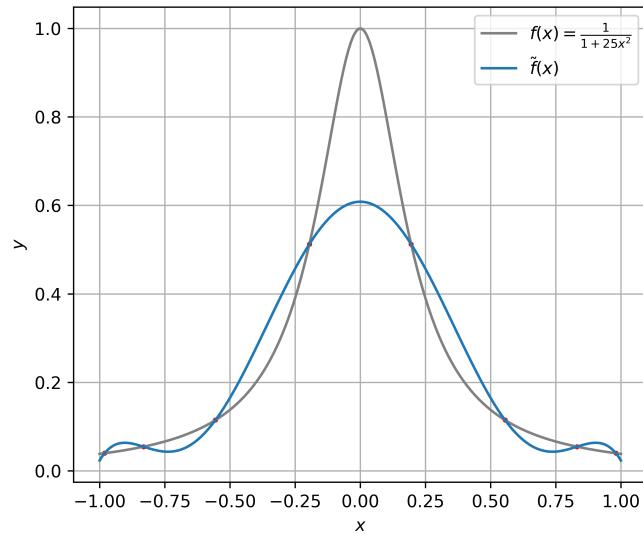


Рис. 9. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 8-ти чебышевским узлам

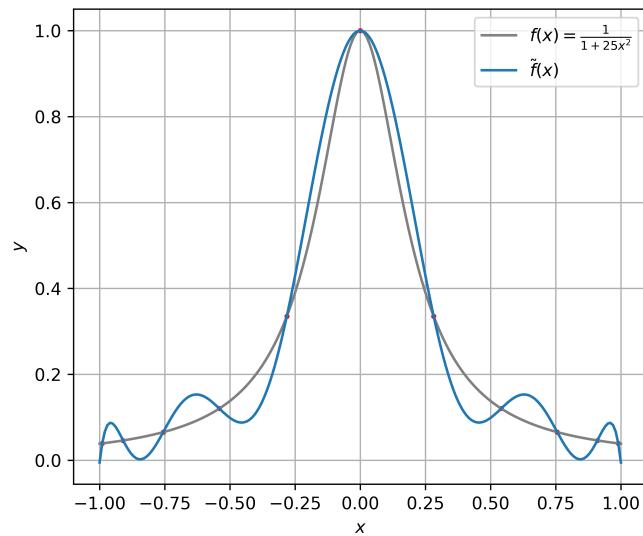


Рис. 10. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 11-ти чебышевским узлам

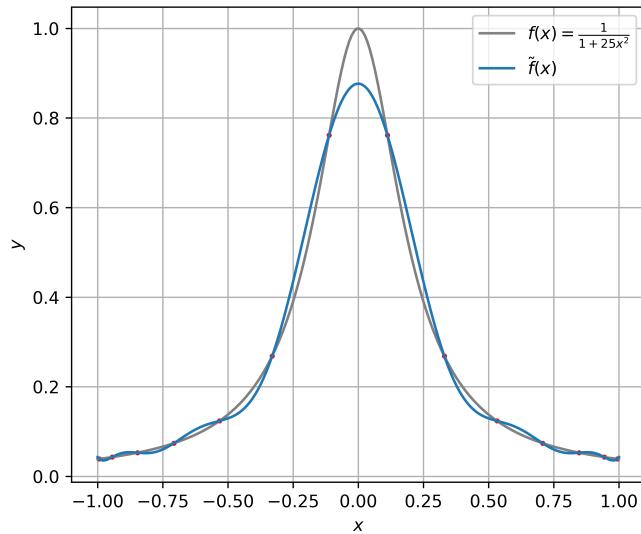


Рис. 11. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 14-ти чебышевским узлам

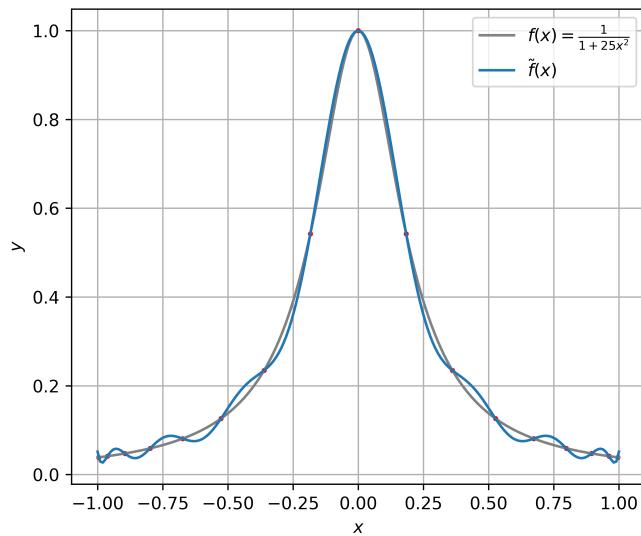


Рис. 12. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 17-ти чебышевским узлам

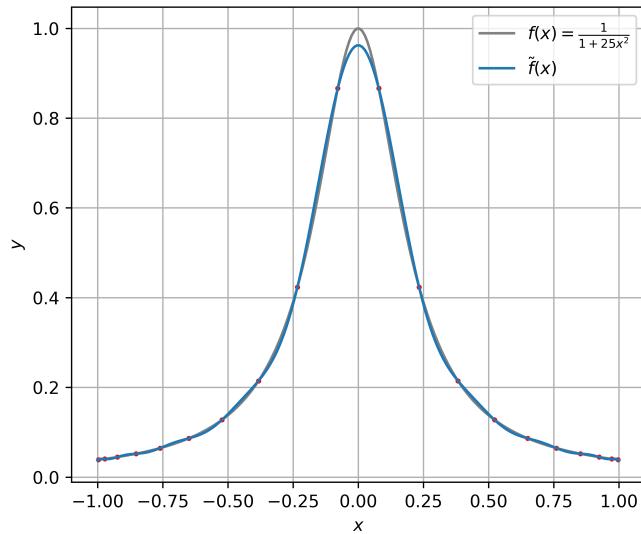


Рис. 13. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 20-ти чебышевским узлам

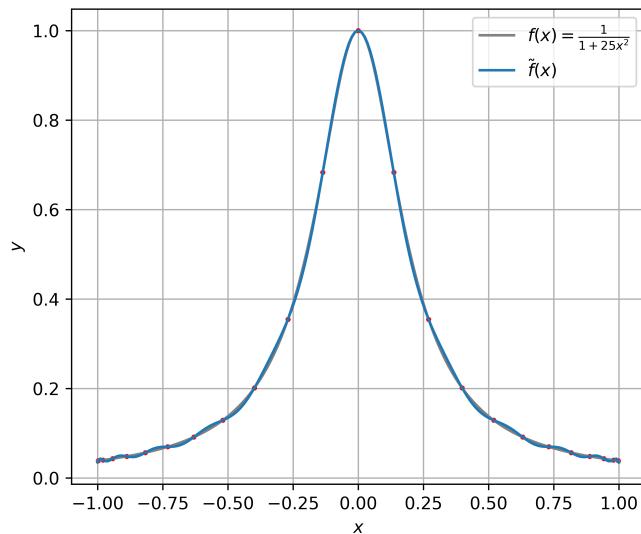


Рис. 14. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 23-ти чебышевским узлам

Проведем сравнение полиномов лагранжа по чебышевским узлам и по равномерно распределенным узлам, для этого рассмотрим графики, на которых одновременно изображены интерполянты по узлам Чебышева и по равномерным узлам.

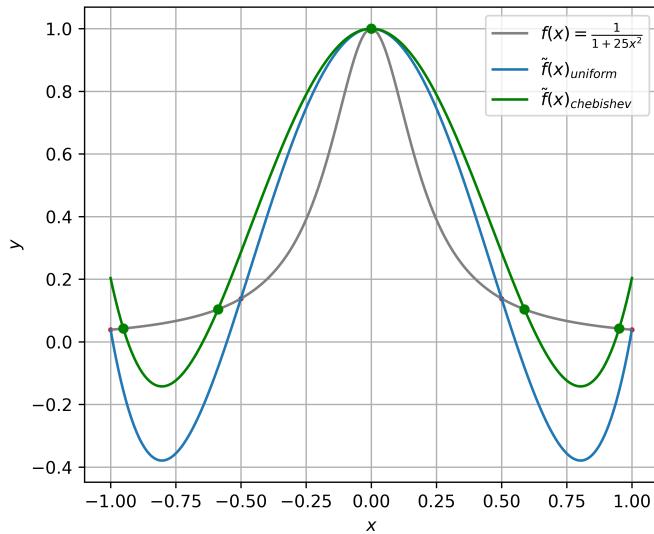


Рис. 15. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 5-ти чебышевским и равномерным узлам

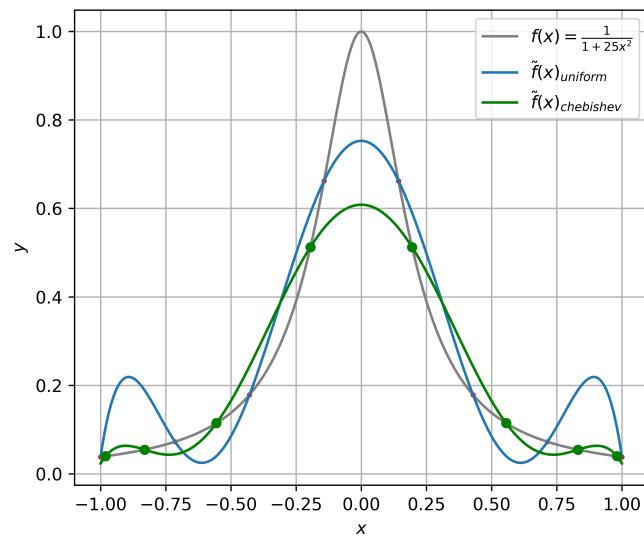


Рис. 16. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 8-ти чебышевским и равномерным узлам

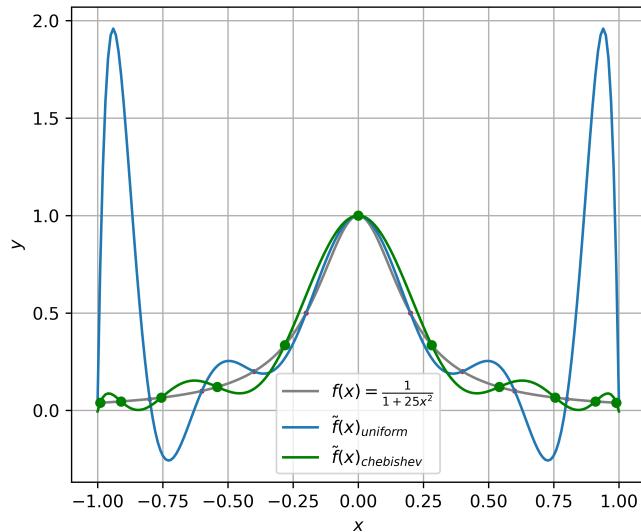


Рис. 17. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 11-ти чебышевским и равномерным узлам

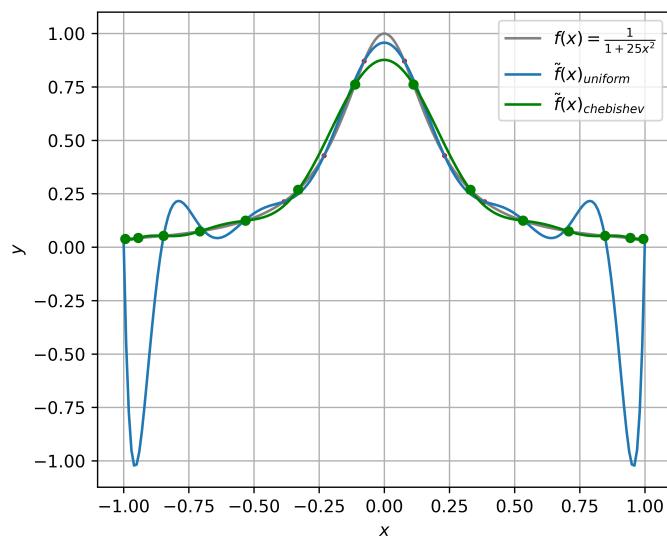


Рис. 18. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 14-ти чебышевским и равномерным узлам

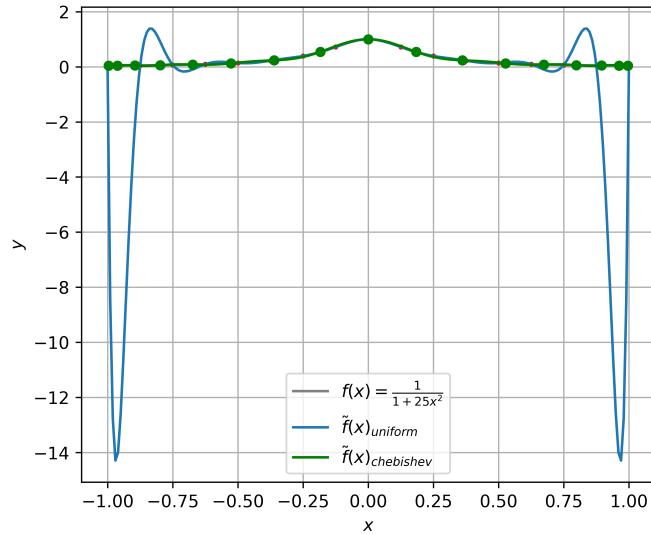


Рис. 19. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 17-ти чебышевским и равномерным узлам

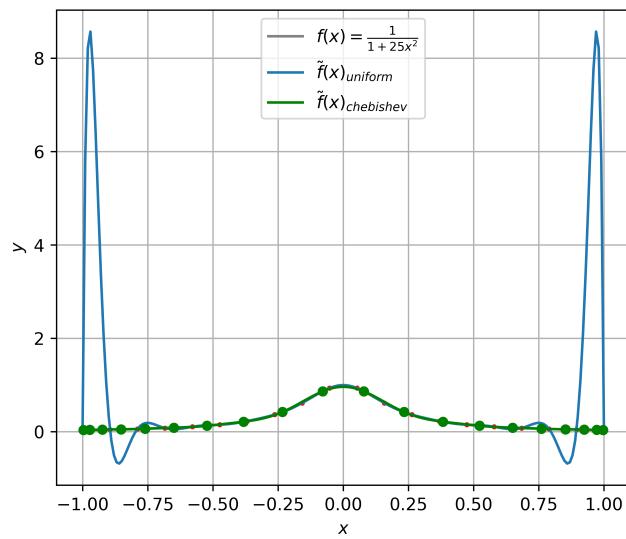


Рис. 20. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 20-ти чебышевским и равномерным узлам

light • (None) @ (None) • (None) • (None) ((None))

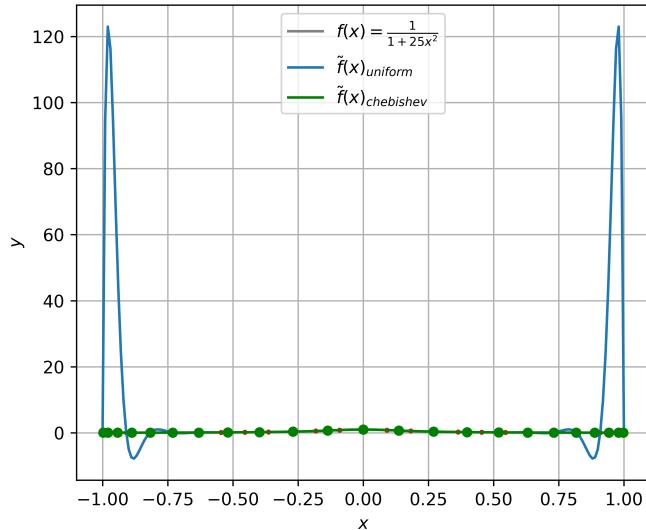


Рис. 21. Аппроксимационный многочлен Лагранжа по 23-ти чебышевским и равномерным узлам

[git] • (None) ⊗ (None) • (None) • (None)((None))

На основании приведенных графиков(рис. 15 - 21) можно заметить, что осцилляция на концах промежутка по равномерным узлам заметно больше, чем по чебышевским узлам. Следовательно феномена Рунге не наблюдается.

2 Продвинутая часть

Задание №1

Для удобства генерации функций $f_{n,m}$ с рандомизированными параметрами n , m , j , k (Формула №2) был реализован класс *function*. В конструкторе класса происходит генерация параметров с помощью метода *randint* из библиотеки *random*. Это позволяет получать новые параметры функции при создании нового объекта класса, которые будут в нем записаны. Знаменатель аппроксимации Паде $1 + \sum_{k=0}^n b_k x^k$ может принимать нулевое значение, если $\sum_{k=0}^n b_k x^k = -1$. Это может приводить к разрывам функции и неверному построению интерполянта, так как интерполяция проводится для функции без разрывов на заданном интервале.

Листинг 3. Класс *function* для генерации параметров функции известной как аппроксимация Паде

```

1 class function:
2     def __init__(self):
3         n = random.randint(7, 15)
4         m = random.randint(7, 15)

```

```

5      j = [random.randint(0, 1000) / 1000 for i in range(m)]
6      k = [random.randint(0, 1000) / 1000 for i in range(n)]
7      self.n = n
8      self.m = m
9      self.j = j
10     self.k = k

```

Для нахождения значения функции $f_{n,m}$ в точке x был реализован метод класса `function function_value_from_x(self, x)`.

Листинг 4. Метод для посчета значения функции $f_{n,m}$ в точке x

```

1  def function_value_from_x(self, x):
2      a = []
3      b = []
4      for i in range(len(self.j)):
5          a.append(self.j[i] * x ** i)
6      for i in range(len(self.k)):
7          b.append(self.k[i] * x ** i)
8      A = np.array(a)
9      B = np.array(b)
10     return np.sum(A) / (1 + (np.sum(B)))

```

Генерация 100 различных функций происходит с помощью цикла, где на каждой новой итерации создается новый объект класса `function` и добавляется в массив(`list`).

Листинг 5. Создание 100 объектов `function` и добавление в массив `functions`

```

1  functions = [function() for i in range(100)]

```

Задание №2

Построим графики 4 функций из функций, которые мы сгенерировали в прошлом пункте. Графики интерполянтов строятся по 14-ти узлам.

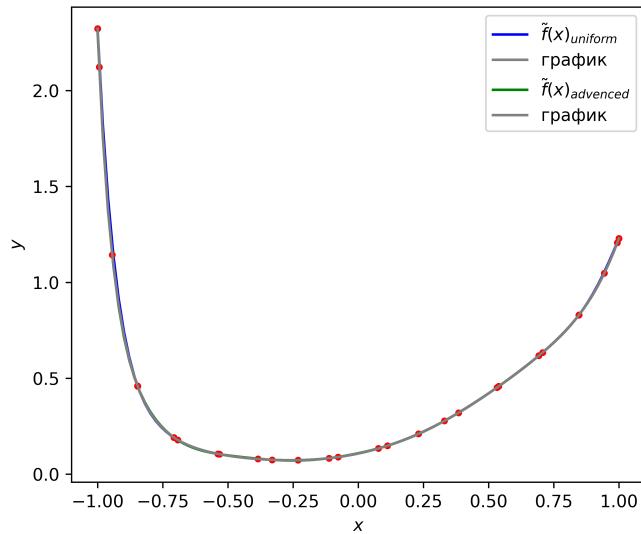


Рис. 22. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 1 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

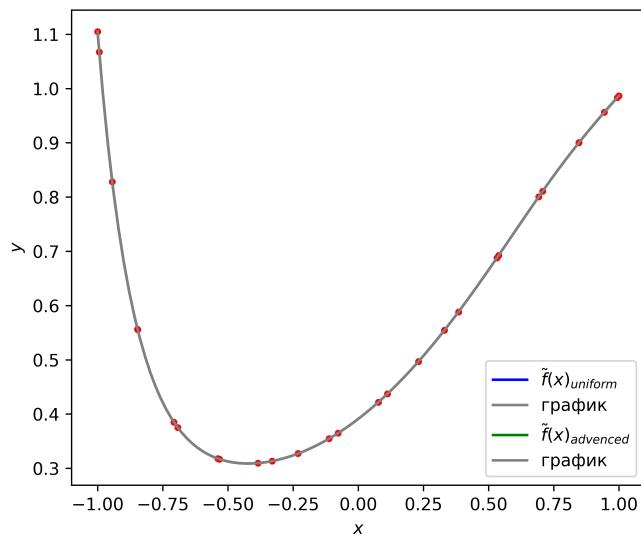


Рис. 23. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 2 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

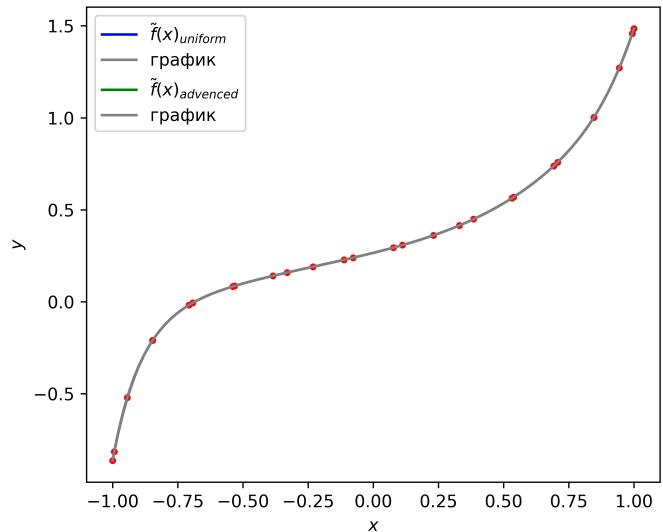


Рис. 24. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 3 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

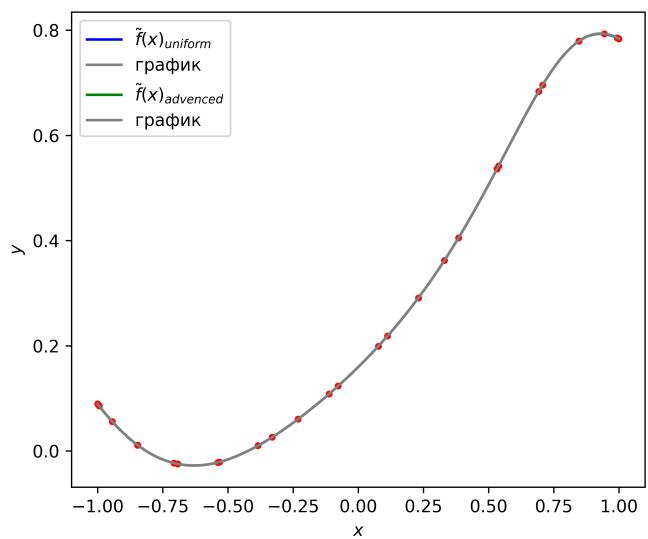


Рис. 25. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 4 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

light) • (None) @ (None) • (None) • (None)(None))

Задание №3

Для подсчета расстояния между функциями в лебеговом пространстве применим данную формулу:

$$\|g(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [a;b]} |g(x)|, \quad (5)$$

Реализуется вычисление равномерной нормы путем поиска максимальной разности ординат от x между графиками на интервале $[-1,1]$.

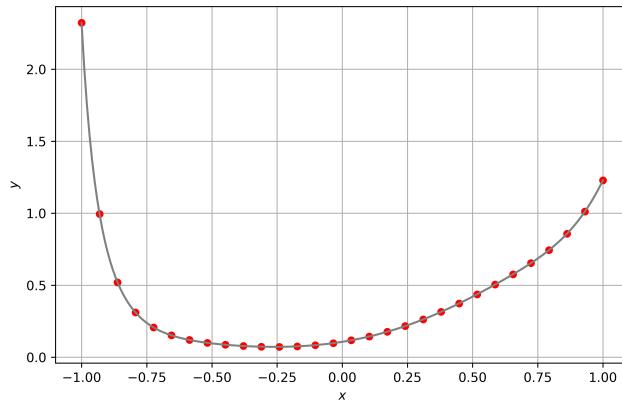


Рис. 26. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 1 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

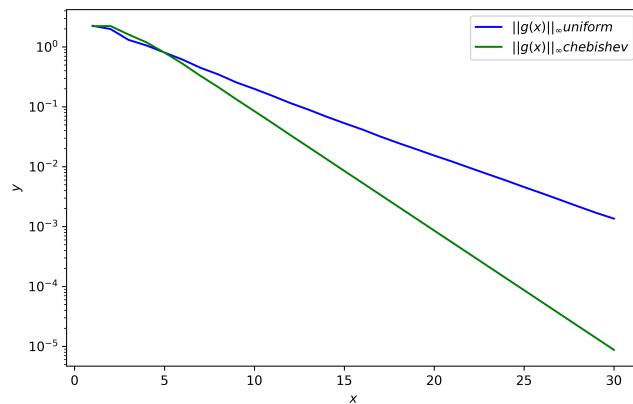


Рис. 27. Графики №1 зависимости расстояний $\|g(x)\|_{\infty}$ для узлов Чебышева и равномерно распределенных узлов от количества узлов

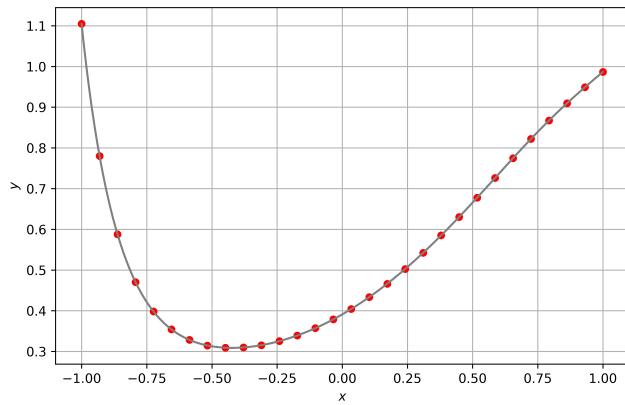


Рис. 28. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 2 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

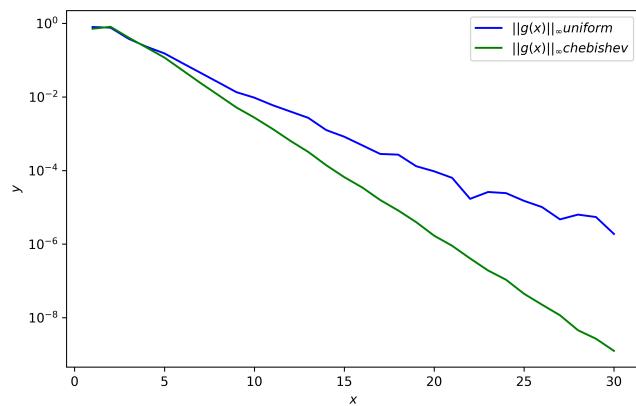


Рис. 29. Графики №2 зависимости расстояний $\|g(x)\|_\infty$ для узлов Чебышева и равномерно распределенных узлов от количества узлов

light) • (None) @ (None) • (None), () (None))

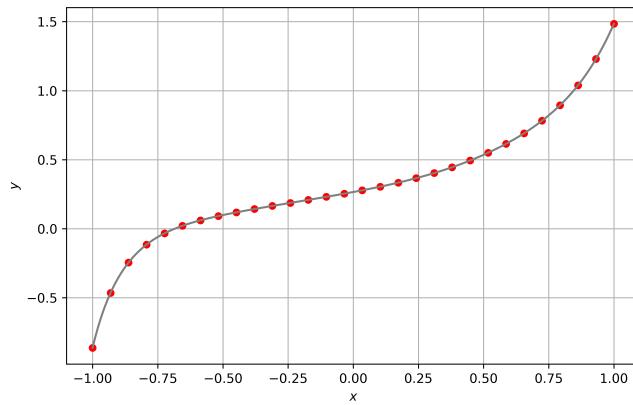


Рис. 30. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 3 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

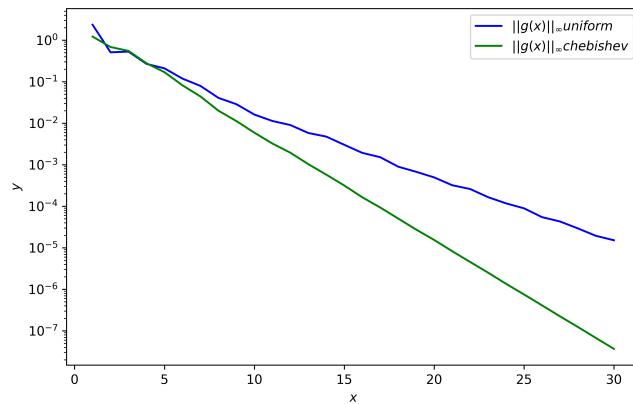


Рис. 31. Графики №3 зависимости расстояний $\|g(x)\|_\infty$ для узлов Чебышева и равномерно распределенных узлов от количества узлов

light) • (None) @ (None) • (None) • (None)(None))

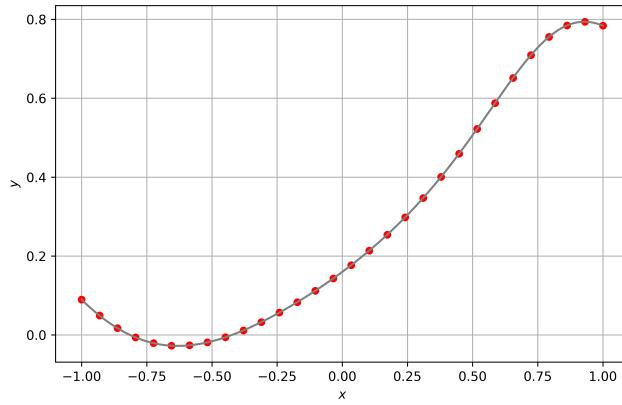


Рис. 32. Интерполянты функции($f_{n,m}$) номер 4 по равномерно распределенным и чебышевским узлам

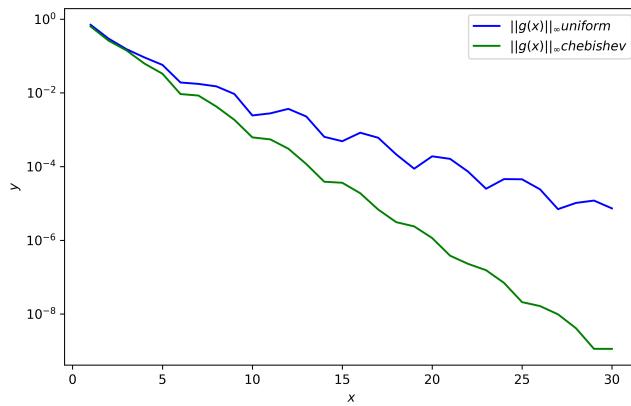


Рис. 33. Графики №4 зависимости расстояний $\|g(x)\|_\infty$ для узлов Чебышева и равномерно распределенных узлов от количества узлов

По данным графикам можно сделать вывод: разность расстояний $\|g(x)\|_\infty$ для интерполяции по узлам Чебышева и по равномерно распределенным узлам увеличивается с возрастанием количества узлов. $f_{n,m}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^m a_j x^j}{1 + \sum\limits_{k=0}^n b_k x^k}$ является аппроксимантом функции $f(x) = c_0 + c_1 \cdot z^1 + c_2 \cdot z^2 + \dots$. При разложении аппроксиманта в ряд Тейлора (с центром в нуле) совпадает с разложением функции $f(z)$ до тех пор, пока это возможно. Следовательно аппроксимация Паде совпадает с полиномом Лагранжа с какой-то степенью точности и чем больше точек, по которым строятся интерполяционные многочлены Лагранжа, тем точнее получается аппроксимация функции $f_{n,m}(x)$

Задание №4

Аппроксимация Паде - метод аппроксимации аналитических функций. Данный метод генерации случайных функций позволяет обобщить выводы о зависимости расстояния между полиномом и его интерполянтом от количества узлов для всех непрерывных функций. С помощью аппроксимации Паде можно сгенерировать полином степенью не больше 15.

Заключение

1. Реализована функция подсчета i-го базисного полинома Лагранжа на высокочувствительном языке программирования Python.
2. Программно реализована функция подсчета полинома Лагранжа по заданным узлам в точке x.
3. Выведены графики $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ на одной координатной плоскости для равномерно распределенных узлов. При увеличении количества узлов увеличивается осцилляция. Данное поведение называется феноменом Рунге.
4. Выведены графики $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ на одной координатной плоскости для равномерно распределенных узлов и для узлов Чебышева. При построении полинома Лагранжа по узлам Чебышева феномена Рунге не наблюдается.
5. Описана программная реализация генерации случайных функций(2)
6. Выведены несколько полиномов Лагранжа для 4-х различных функций $F_{n,m}(x)$.
7. Найдены интерполяционные полиномы построенные по узлам Чебышева, а также проведено сравнение расстояний между интерполянтами и интерполируемыми функциями для разного количества узлов. Сделан соответствующий вывод.
8. Дано определение аппроксимации Паде и для каких функций подходят выводы, сделанные в 3-м пункте.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: <https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046>.
2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Новокшанов Е.А. Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] – Москва: 2022. – 25 с. URL: <https://sa2systems.ru:88> (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка:  доцент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин
Решение и вёрстка:  студент группы РК6-56Б, Новокшанов Е.А.

2022, осенний семестр