1 Лабораторная работа №1. Сравнительный анализ решения нелинейных алгебраических уравнений пятью методами

Исследуются корни нелинейных уравнений $f_\alpha(x) = 0$ в зависимости от значений параметра $\alpha = 1, 2, 3$. Порядок выполнения задания для каждого **фиксированного значения α**:

1. Используя доступные методы построить график функции $y = f_\alpha(x)$ (на бумаге или с помощью доступных программ-графопостроителей) и локализовать ВСЕ корни нелинейного уравнения. В результате будут получены отрезки локализации корней $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$, $r = 1, 2 \dots R$, здесь R — количество корней уравнения. Если корней бесконечно-много, требуется найти *три корня, наименьших по модулю*. В отчете представить скриншот графика функции (или несколько скриншотов, если корни не поместились на одном графике).
2. На каждом отрезке $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$ аналитически исследовать функции $f_\alpha(x)$: определить знаки функций в концах отрезков $f_\alpha(a_r^\alpha)$, $f_\alpha(b_r^\alpha)$; знаки первых и вторых производных $f_\alpha'(x)$, $f_\alpha''(x)$ на отрезках локализации. На каждом из отрезков построить эквивалентные функции $\varphi_{\alpha,(r)}(x)$. Для каждого из отрезков $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$ вычислить константы: $M_{(r)}^\alpha \geqslant \max\limits_{x\in[a_r^\alpha, b_r^\alpha]} |f_\alpha'(x)|$, $\quad 0 < m_{(r)}^\alpha \leqslant \min\limits_{x\in[a_r^\alpha, b_r^\alpha]} |f_\alpha'(x)|$, $1 > q_{(r)}^\alpha \geqslant \max\limits_{x\in[a_r^\alpha, b_r^\alpha]} |\varphi_{\alpha,(r)}'(x)|$.
3. С помощь программы на языке Си для каждого из отрезков $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$ вычислить уточненные значения корней $\xi_r^* = x_{N+1}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$: $|\xi_r^* - \xi_r| < \varepsilon$. Использовать пять методов: половинного деления, секущих, простой итерации, Эткена, Ньютона. Начальные значения $x_0^{(r)}$ следует выбирать одинаковыми для всех методов: $x_0^{(r)} = a_r^\alpha$ или $x_0^{(r)} = b_r^\alpha$.
4. Сравнить методы по их способности приближенно вычислить корень ξ и по скорости сходимости к корню (т. е. число итераций). В отчете представить таблицу, в которой также указать значения невязки $f_\alpha(\xi^*)$ и параметров $M_{(r)}^\alpha$, $m_{(r)}^\alpha$, $q_{(r)}^\alpha$:

Корень ξ_r^*	Невязка $f_\alpha(\xi_r^*)$	Отрезок $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$	$x_0^{(r)}$	Число итераций $N+1$					$M_{(r)}^\alpha$	$m_{(r)}^\alpha$	$q_{(r)}^\alpha$
				Метод деления	Метод хорд	Простая итерация	Метод Эткена	Метод Ньютона			
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

1	$\lvert x(x-\alpha)\rvert = \alpha \ln x$	2	$\lvert x^2-\alpha\rvert = e^{\alpha\lvert x\rvert}$	3	$\left\lvert x^2 - 2\alpha/x\right\rvert = e^{1-x^2}$
4	$\sqrt{(x-\alpha/2)(x-\alpha)} = \sin x$	5	$\lvert x-\alpha\rvert = \sin x + \lvert\sin x\rvert$	6	$x^4 \sin(x/\alpha) = 1$
7	$\alpha \sin\sqrt{1+2\sin x} = x^3$	8	$(1+\sin x)\sin x = \alpha + 3x - 5$	9	$\cos e^{\lvert\sin x\rvert} = \alpha x$
10	$\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right) = = \alpha e^x$	11	$\cos\dfrac{1}{1+(1-e^{-\lvert x\rvert})^2} = = \alpha - x$	12	$\sin\dfrac{1}{1+\left(\operatorname{arctg} e^{-x^2}\right)^2} = = \alpha - x$

13	$e^{-\sin^2\frac{1}{1+x^2}} = -\operatorname{tg}(x/\alpha)$	14	$\ln(1+\cos^2 x) = \alpha e^{-x}$	15	$x + e^{-\frac{1}{1+x^2}} = \alpha - 5$
16	$\ln\sqrt{1+x^2} = -\operatorname{ctg}(x/\alpha)$	17	$1+e^{-2x^2} = \alpha^2 e^{-2x}$	18	$\alpha^2 e^{2x} = 1+\ln^2\sqrt{1+x^2}$
19	$\sin^2 \ln\sqrt{1+(1-e^{-\lvert x\rvert})^2} =$ $= -\alpha\ln x$	20	$(x^2-1)^2 = x^\alpha$	21	$\pi^2 x - x^3 + x^5 =$ $= 0.1\alpha^2\cos x$
22	$10x - 0.5x^3 + x^5 =$ $= 0.04\alpha^3 e^{-x^2}$	23	$x+x^3+x^7+x^9 =$ $= 0.3\alpha\,\mathrm{th}\,x$	24	$5x^2 - 0.1x^3+0.2x^4 =$ $= 0.1(\alpha+\mathrm{th}\,x)$
25	$\sum_{k=0}^3 \frac{(\pi-k)^2}{k!}x^{2k+1} =$ $= 0.1\alpha^2$	26	$\sum_{k=0}^2 (-e)^k x^{4k+1} =$ $= 0.07\alpha+0.3x$	27	$\sum_{k=0}^2 \frac{k-1.9929}{k-0.99929}x^k =$ $= x^5\sqrt{0.1\alpha} - \alpha\ln\alpha$
28	$\sum\limits_{k=0}^{2} \frac{e^k}{k!}x^{4k+1} = 0.098\alpha$	29	$\sum_{k=0}^2\left(1-\frac{3k}{\sqrt{2}}+k^2\right)\times$ $\times x^{3k+1} = 0.1\alpha$	30	$\sum_{k=1}^3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{k^2}{2}-2.0537\right)\times$ $\times x^{k^2} = \sqrt[4]{0.1\alpha}$
31	$\sum_{k=1}^4 \frac{(\pi-k)^2}{k!}x^{2k} =$ $= 1+0.859\alpha x$	32	$\sum_{k=0}^2 \frac{(-2)^k}{2k+1}x^{4k+2} =$ $= 1.41+0.1\alpha^2 x$	33	$\sum_{k=0}^2 \frac{e^k}{2k+1}x^{2(2k+1)} =$ $= 1+0.096\alpha^3 x$
34	$\sum_{k=1}^4\left(\left(\frac{k}{100}-1\right)x\right)^k =$ $= -0.101\alpha$	35	$\sum_{k=0}^2\frac{k^2-2.14k+1}{k+0.667}\times$ $\times x^{3k+2} = 1+x/\alpha$	36	$\sum\limits_{k=0}^{2}\frac{6k-11.9937}{k^2-3k10^{-3}-0.9931}\times$ $\times x^k = 1/x + x^5/\sqrt{\alpha}$

2 Лабораторная работа №2. Сравнительный анализ решения нелинейных САУ тремя методами

Исследуются пары корней системы нелинейных уравнений $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$. Порядок выполнения задания:

1. Построить на плоскости Oxy графики неявных функций $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ (на бумаге или с помощью доступных программ-графопостроителей) и приближенно определить все точки пересечения графиков. В результате будут получены прямоугольники (сегменты) локализации пар корней $\vec{\xi}_r \equiv (\xi_r, \eta_r) \in \Omega_r \equiv [ax_r, bx_r] \times [ay_r, by_r]$, $r = 1, 2 \ldots R$, здесь R — количество пар корней системы уравнений. В отчете представить скриншот всех пересечений графиков функций (или несколько скриншотов, если точки пересечений не поместились на одном графике).
2. На каждом сегменте Ω_r определить константы q_r, μ_r: $1 > q_r \geqslant \max\limits_{\vec{x}\in\Omega_r}\left\|\mathfrak{D}_{\vec{\varphi}}(\vec{x})\right\|$, $\mu_r \geqslant \max\limits_{\vec{x}\in\Omega_r}\left\|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x})\right\| \max\limits_{\vec{x}\in\Omega_r}\left\|\mathfrak{D}^{-1}_{\vec{f}}(\vec{x})\right\|$.
3. С помощь программы на языке Си для каждого из сегментов Ω_r вычислить уточненные значения пар корней $\vec{\xi}^*_r \equiv (\xi^*_r, \eta^*_r) = (x_{N+1}, y_{N+1})$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$: $\|\vec{\xi}^*_r - \vec{\xi}_r\| < \varepsilon$. Использовать три метода: простой итерации, Зейделя, Ньютона. Начальные значения $x_0^{(r)}$, $y_0^{(r)}$ следует выбирать одинаковыми для всех методов: $(x_0^{(r)}, y_0^{(r)}) \in \Omega_r$.

4. Сравнить методы по их способности приближенно вычислить пары корней $\vec{\xi}_r$ и по скорости сходимости к корню (т. е. по числу итераций). В отчете представить таблицу, в которой также указать значения нормы невязки $\|\vec{f}_\alpha(\vec{\xi}_r^*\|$ и параметров q_r, μ_r:

Пара корей $\vec{\xi}_r^*$		Норма невязки $\|\vec{f}(\vec{\xi}_r^*)\|$	Начальный вектор		Число итераций $N+1$			q_r	μ_r
ξ_r^*	η_r^*		$x_0^{(r)}$	$y_0^{(r)}$	Простая итерация	Метод Зейделя	Метод Ньютона		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

1	$\begin{cases}\sin(x+1)-y=1,\\ 2x+\cos y=2;\end{cases}$	2	$\begin{cases}x^{2/3}+y^{2/3}=4,\\ x^2-2y=0,\end{cases}$ $(x>0)$	3	$\begin{cases}\operatorname{tg}(xy+0.2)=x^2,\\ x^2+2y^2=1;\end{cases}$
4	$\begin{cases}\sqrt{x+1}-y=0,\\ x^2+2y^2=2y;\end{cases}$ $(x>0)$	5	$\begin{cases}2x+\operatorname{tg}(xy)=0,\\ (y^2-6)^2+\ln x=0;\end{cases}$	6	$\begin{cases}x\cos x-y=0,\\ x^2+y^2-1=0;\end{cases}$ $(x>0)$
7	$\begin{cases}y\cos y-x=0,\\ x^2+y^2-1=0;\end{cases}$ $(y<0)$	8	$\begin{cases}2x^2+y^2=1,\\ x^{2/3}-y=0;\end{cases}$ $(y>0)$	9	$\begin{cases}0.6x+7.5y+x^2y=0,\\ 6x+\cos y=0;\end{cases}$
10	$\begin{cases}x^2+2y^2=1,\\ x+y^{2/3}=0;\end{cases}$ $(y<0)$	11	$\begin{cases}\sin(x+0.8)+2y=1,\\ \cos(y+0.6)+0.6x=0;\end{cases}$	12	$\begin{cases}\sin x-y=0,\\ x^2+y^2=1;\end{cases}$ $(x>0)$
13	$\begin{cases}x-\cos y=0,\\ x^2+y^2=2;\end{cases}$ $(y>0)$	14	$\begin{cases}x^2+y^2=2y,\\ e^{-x}-y=0;\end{cases}$ $(x<0)$	15	$\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ x-e^{-y}=0;\end{cases}$ $(y>0)$
16	$\begin{cases}x^{2/3}+y^{2/3}=4,\\ 2x-y^2=0,\end{cases}$ $(y<0)$	17	$\begin{cases}2x-x^2-y^2+2y=1,\\ \sqrt{x+1}=y,\quad (x>0);\end{cases}$	18	$\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ \ln x-y=0;\end{cases}$ $(y>0)$
19	$\begin{cases}2x+x^2+y^2+2y=-1,\\ \sqrt{x+1}=y+1;\end{cases}$	20	$\begin{cases}x^{2/3}+y^{2/3}=1,\\ x^2+y^2=2x,\end{cases}$ $(y>0)$	21	$\begin{cases}x\sin x=y,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ $(x>0)$
22	$\begin{cases}\operatorname{tg} x-\cos(1.5y)=0,\\ 2y^2-x^2+4x=3;\end{cases}$	23	$\begin{cases}x/(1+x^2)=y,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ $(x>0)$	24	$\begin{cases}x^{2/3}+y^{2/3}=1,\\ x^2+y^2=2y,\end{cases}$ $(x<0)$
25	$\begin{cases}x=y\sin y,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ $(y<0)$	26	$\begin{cases}x^2+y^2=2y,\quad (x>0)\\ 1/2\ln(x+1)=y,\end{cases}$	27	$\begin{cases}y/(1+y^2)=x,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ $(y<0)$
28	$\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ x=2\ln(y+1),\end{cases}$ $(y>0)$	29	$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 2xe^{-x}=y,\end{cases}$ $(x>0)$	30	$\begin{cases}(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)\\ x^2+y=1,(x>0,y>0)\end{cases}$
31	$\begin{cases}x=2ye^{-y}\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ $(y<0)$	32	$\begin{cases}(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)\\ x+y^2=1,(x>0,y<0)\end{cases}$	33	$\begin{cases}\sin(x+y)-1.5x=0.1,\\ x^2+y^2=1;\end{cases}$

Рекомендуемая литература

[1] *Дьяченко В. Ф.* Основные понятия вычислительной математики. — М.: Наука, 1972.

[2] *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы. Т.1,2. — М.: НАУКА, 1976.

[3] *Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л.* Численные методы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

3 Основные принципы численных алгоритмов на примере задачи извлечения квадратного корня из положительного числа

Выше мы убедились, что даже простейшие динамические модели описываются СОДУ, точный математический анализ которых весьма затруднителен. Получить *приближенное* решение можно например методом *линеаризации*. *Численные методы* являются более общим подходом к приближенному решению задач.

3.1 Постановка задачи

Пусть для фиксированного $a > 0$ требуется найти приближённое значение $\sqrt{a}$. Вычисление квадратного корня можно трактовать как решение нелинейного уравнения $x^2 - a = 0$, которое является частным случаем более общей задачи поиска нулей ξ функции $f(x)$: $f(\xi) = 0$ (для нашей задачи $\xi = \sqrt{a}$). Предлагается заменить задачу вычисления нулей функции $f(x)$ на эквивалентную ей задачу отыскания *стационарных точек* некой вспомогательной функции $\varphi(x)$, т. е. ищем $\xi \in [\alpha, \beta]$ что $\varphi(\xi) = \xi \Leftrightarrow f(\xi) = 0$. Далее, задачу о поиске стационарной точки решаем приближенно, построив *итерационную* (или *рекуррентную*) последовательность вида

$$\{x_n\} : x_0 \to x_n = \varphi(x_{n-1}). \text{Известно, что } \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \xi \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \xi. \quad \text{(I.1)}$$

Сначала рассмотрим примеры неудачного выбора функции φ. Если положить $\varphi(x) = ax^{-1}$, то как легко видеть, $\sqrt{a}$ является стационарной точкой функции $\varphi(x)$, однако если в качестве *начального приближения* взять произвольное $x_0 \neq \sqrt{a}$, то очевидно получим расходящуюся последовательность $\{x_n\}$: $x_1 = \varphi(x_0) = ax_0^{-1} \neq \sqrt{a}$, $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(ax_0^{-1}) = x_0$, $x_3 = ax_0^{-1}$, $x_4 = x_0$ и т. д. Интересно отметить, что последовательность $\{x_n\}$ остается «мигающей» при сколь угодно малой разности между x_0 и $\sqrt{a}$. Другой антипример даёт функция $\varphi(x) = 2x - ax^{-1}$ (и в этом случае $\varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$). Эта функция монотонно возрастает на промежутках непрерывности, т. к. $\varphi'(x) = 2 + ax^{-2} > 2$, $\forall x \neq 0$. Взяв начальное значение $x_0 > \sqrt{a}$, получим

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(x_0) > \varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \Leftrightarrow x_1 > \sqrt{a} \Rightarrow \\
x_2 &= \varphi(x_1) > \varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \Leftrightarrow x_2 > \sqrt{a} \Rightarrow \\
&\dots \\
x_n &= \varphi(x_{n-1}) > \varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \Leftrightarrow x_n > \sqrt{a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Из доказанного неравенства $x_n > \sqrt{a}$, $\forall n = 0, 1, 2 \dots$ и формулы Лагранжа:

$$x_n - \sqrt{a} = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(\sqrt{a}) \geqslant \min|\varphi'(x)|(x_{n-1} - \sqrt{a}) >$$
$$> 2(x_{n-1} - \sqrt{a}) > \ldots > 2^n(x_0 - \sqrt{a}),$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Последовательность $\{x_n\}$ как и в первом антипримере расходится всегда, если только $x_0 \neq \sqrt{a}$. Такие алгоритмы называются *неустойчивыми*. Теперь покажем, что сходящуюся последовательность можно получить из функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big). \tag{I.2}$$

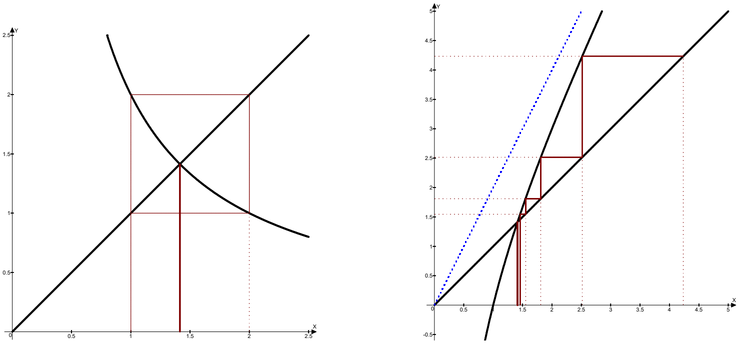

Рис. I.1. Два неустойчивых алгоритма

Естественным условием применения (I.1) является требование ограниченности числа итераций, т. е. должен существовать такой параметра N, что $n \leqslant N$. Значение N либо изначально фиксируют, либо счёт останавливают при достижении фиксированной точности $\varepsilon:\ |x_N - \sqrt{a}| < \varepsilon$. Применение второго условия требует дополнительного исследования свойств функции $\varphi(x)$, поскольку величина $\sqrt{a}$ нам неизвестна.

Итак, для исследования сформулирован следующий алгоритм:

$$x_0 > 0,\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big), \quad n \leqslant N: \quad |x_N - \xi| < \varepsilon. \tag{I.3}$$

3.2 Обоснование численного алгоритма (I.3)

Для определённости положим $a > 1$. По теореме о среднем арифметическом и геометрическом, получаем: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(x_n + \dfrac{a}{x_n}\Big) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \dfrac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$, причём равенство возможно только если $x_n = a x_n^{-1} \Leftrightarrow x_n = \sqrt{a}$. Таким образом показано, что $x_n > \sqrt{a} > 1$, $\forall n = 1, 2\ldots$ независимо от начального положительного приближения x_0. Поэтому не нарушая общности можно считать, что $x_n > \sqrt{a} > 1$, $\forall n = 0, 1, 2\ldots$

Очевидно, что $\varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, т. е. $\sqrt{a}$ действительно является стационарной точкой для $\varphi(x)$. Далее, для доказательства сходимости последовательности $\{x_n\}$ рассмотрим последовательность *относительных ошибок* $\{\delta_n\}$, заданную формулой

$$\frac{x_n}{\sqrt{a}} = 1 + \delta_n, \quad \delta_n > 0, \quad \forall n = 0, 1, 2\ldots \tag{I.4}$$

Разделим $x_n = \varphi(x_{n-1})$ на $\sqrt{a}$ и преобразуем (при этом учтем очевидное двойное неравенство $0 < \delta_{n-1}/(1 + \delta_{n-1}) < 1$ при $\delta_{n-1} > 0$):

$$\frac{x_n}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}}}\right) \Leftrightarrow 1+\delta_n = \frac{1}{2}\left(1+\delta_{n-1}+\frac{1}{1+\delta_{n-1}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\delta_n = \frac{1}{2}\left(\delta_{n-1} - 1 + \frac{1}{\delta_{n-1}+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta_{n-1}^2}{1+\delta_{n-1}} = \tag{I.5}$$

$$= \frac{\delta_{n-1}}{2(1+\delta_{n-1})}\delta_{n-1} < \frac{1}{2}\delta_{n-1} < \ldots < \frac{1}{2^n}\delta_0.$$

Неравенство $\delta_n < \delta_0 2^{-n}$ означает, что относительная ошибка убывает быстрее геометрической прогрессии со знаменателем 0.5, а значит алгоритм (I.3) сходится.

Исследуем условие $|x_N - \xi| < \varepsilon$. Заметим, что на луче $x > \sqrt{a}$ производная функция $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right) \in (0; \frac{1}{2})$, и воспользуемся формулой Лагранжа:

$$0 < x_n - \sqrt{a} = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(\sqrt{a}) \leqslant \max|\varphi'(x)|(x_{n-1}-\sqrt{a}) < \frac{1}{2}(x_{n-1}-\sqrt{a}) \Leftrightarrow$$

$$0 < 2x_n - 2\sqrt{a} < x_{n-1} - \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} - x_n < x_n - \sqrt{a} < x_{n-1} - x_n \Leftrightarrow$$

$$0 < x_n - \sqrt{a} < x_{n-1} - x_n \tag{I.6}$$

Последнее неравенство показывает, что для достижении заданной точности ε достаточно проверить разность двух соседних значений последовательности $\{x_n\}$:

$$x_{n-1} - x_n < \varepsilon \Rightarrow x_n - \sqrt{a} < \varepsilon. \tag{I.7}$$

Итак, построен алгоритм и доказана принципиальная возможность достигнуть любую заданную точность $\varepsilon > 0$ за конечное число шагов N:

$$x_0 > 0,\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right), \quad n \leqslant N: \quad |x_N - x_{N-1}| < \varepsilon. \tag{I.8}$$

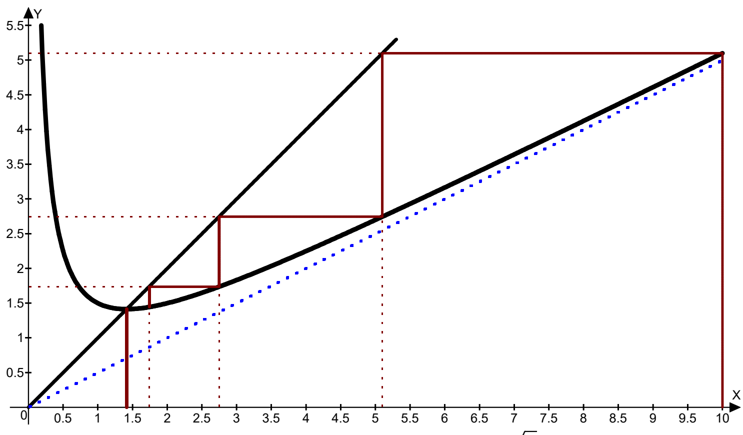

Рис. I.2. Устойчивый алгоритм вычисления $\sqrt{2}$ (для $x_0 = 10$).

3.3 Представление чисел в памяти ЭВМ. Проекции и их свойства

Дадим базовые определения для исследования приближенных вычислений.

Определение I.1: Погрешности точных величин

Обозначим через ξ точное значение величины и через ξ^* её приближенное значение.

- **абсолютной погрешностью (ошибкой)** приближенного значения ξ^* называется любое число $\Delta(\xi^*)$, удовлетворяющее неравенству $|\xi - \xi^*| \leqslant \Delta(\xi^*)$.
- **вычислительной относительной погрешностью (ошибкой)** приближенного значения ξ^* называется любое число $\delta(\xi^*)$, про которое известно, что $\left|\frac{\xi-\xi^*}{\xi^*}\right| \leqslant \delta(\xi^*)$. Эта величина близка к величине $|(\xi-\xi^*)/\xi|$, которая называется *физической относительной погрешностью*. Вычислительная относительная ошибка более удобна в приложениях.

Упражнение № I.1

Проверить, что для $\xi = 0$ физическая относительная ошибка не определена (равна бесконечности), а вычислительная *всегда* равна единице.

Множество чисел $\mathbb{F}$, которыми оперирует компьютер, отличается от множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Числа в памяти машины являются приближенными значениями точных величин. Для операций над *приближенными физическими величинами* важно контролировать именно их относительную точность. Для этого используется различные *типы величин с плавающей точкой (float)*.

Определение I.2: Множество $\mathbb{F}$ чисел с плавающей точкой.

Элементы конечного числового множества $\mathbb{F}$ имеют вид: $\pm\left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \cdots + \frac{d_t}{p^t}\right)p^\alpha$.

- $p \equiv \text{const} \geqslant 2$, $p \in \mathbb{N}$ — **основание системы счисления**, $t \equiv \text{const} \in \mathbb{N}$ — **разрядность**, $[L, U]$ — **интервал показателей**, $L, U \equiv \text{const} \in \mathbb{Z}$.
- $0 \leqslant d_i \leqslant p-1$, $d_i \in \mathbb{N}$ — **разряды**, $1 \leqslant i \leqslant t$, $\alpha \in [L, U]$ — **показатель числа**.
- Выражение в скобках называется **мантиссой**, а параметр t — **длинной мантиссы**.
- В **нормализованном множестве** $\mathbb{F}$ для всех чисел (кроме нуля) $d_1 \neq 0$.

Определение I.3: Приближением называется проекция $f\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$, со свойствами

- $\forall x \in \mathbb{R}\colon f\ell(x) \equiv \tilde{x} \in \mathbb{F}$ or $\tilde{x} = \infty$. Случай $\tilde{x} = \infty$ называется **переполнением**;
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon \tilde{x} = x(1+\rho_x)$, $\sup_x |\rho_x| = \rho$. Параметр $\boldsymbol{\rho}$ называется **машинной точностью**;
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : f\ell(\tilde{x} * \tilde{y}) = (\tilde{x} * \tilde{y})(1 + \rho_{\tilde{x}*\tilde{y}})$, где значком «$*$» условно обозначена произвольная арифметическая операция над элементами множества $\mathbb{F}$.

Докажем, что ρ является **верхней границей для относительной физической погрешности представления ненулевого числа x в памяти компьютера**:

$$x(1+\rho_x) = \tilde{x} \equiv x + (\tilde{x} - x) = x\left(1 + \frac{\tilde{x} - x}{x}\right) \Rightarrow \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| = |\rho_x| < \rho. \qquad \text{(I.9)}$$

Упражнение № I.2

- Проверить, что машинная точность ρ является *точностью (абсолютной погрешностью) представления единицы в памяти компьютера*: $\Delta(\tilde{1}) \equiv \left|\tilde{1} - 1\right| < \rho$.
- Доказать, что **мощность множества** $\mathbb{F}$ равна: $|\mathbb{F}| = 2(p-1)p^{t-1}(U - L + 1) + 1$.
- Доказать, что для традиционного **округления** выполнено $\boldsymbol{\rho = \frac{1}{2}p^{1-t}}$.
- Доказать, что для **усечения — приближения отбрасыванием разрядов**: $\boldsymbol{\rho = p^{1-t}}$.
- Построить приближение $f\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ с параметрами $p = 2$, $t = 3$, $L = -1$, $U = 2$.
- Для множества $\mathbb{F}$, построенного выше, вычислить проекции: $f\ell\left(\frac{23}{32}\right)$; $f\ell\left(\frac{1}{8}\right)$; $f\ell\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)$; $f\ell\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{4}\right)$; $f\ell\left(3 + \frac{7}{2}\right)$; $f\ell\left(\frac{7}{16} - \frac{3}{8}\right)$; $f\ell\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{16}\right)$.

3.4 Анализ влияния ошибок округления

Ошибки вычислений разделяют на **устранимые** и **неустранимые**.

Определение I.4: Неустранимая ошибка и корректность алгоритма

- Итерационный алгоритм вычисления *приближенного* значения x_n *точной* величины ξ обладает **неустранимой ошибкой**, если существует такое $\delta_{\min} > 0$, что $\forall \delta < \delta_{\min}$: $|x_n - \xi|/|\xi| \geqslant \delta$, $n = 0, 1 \ldots$
- Алгоритм называется **корректным**, если неустранимая ошибка является величиной порядка точности ЭВМ: $\delta_{\min} = O(\rho)$.

Для алгоритма (I.8) *устранимой ошибкой* является параметр ε, который принципиально возможно выбрать сколь угодно малым и, самое главное, достигнуть выбранной точности за *конечное* число вычислений. Однако реальные вычисления проводятся с округленными величинами из множества $\mathbb{F}$, что и создает *неустранимую ошибку*. Оценим неустранимую ошибку $\delta_{\min}(\rho)$ алгоритма (I.8) и докажем его корректность.

Обозначим $y_n \equiv x_n/\sqrt{a}$, $f\ell(y_n) \equiv \tilde{y}_n = y_n \cdot (1 + \rho_n)$. Отметим, что в отличие от последовательности $\{y_n\} \to 1$, последовательность $\{\tilde{y}_n\}$ вообще-то является расходящейся и для неё возможно лишь установить границы значений. При выполнении естественного условия $\tilde{y}_0 = y_0 \cdot (1 + \rho_0) > 0$, с помощью неравенства Коши получаем оценку слева для всех номеров $n \geqslant 1$:

$$\rho \ll 1 \Rightarrow \tilde{y}_n = \frac{1}{2}\left(\tilde{y}_{n-1} + \frac{1}{\tilde{y}_{n-1}}\right)(1 + \rho_n) \geqslant \frac{1}{2}\left(\tilde{y}_{n-1} + \frac{1}{\tilde{y}_{n-1}}\right)(1 - \rho) \geqslant$$

$$\geqslant (1 - \rho)\sqrt{\tilde{y}_{n-1} \cdot \frac{1}{\tilde{y}_{n-1}}} = (1 - \rho) \Rightarrow$$

$$\tilde{y}_n \geqslant 1-\rho > 0, \quad 0 < \frac{1}{\tilde{y}_n} \leqslant \frac{1}{1-\rho}, \quad n = 1, 2\ldots \tag{I.10}$$

Ранее нами установлено, что алгоритм (I.8) сходится при *любом положительном* начальном значении. Однако очевидно, что результат рассчёта на ЭВМ будет некорректен, если взять y_0 слишком близким к нулю: $y_0 \ll 1 \Rightarrow f\ell\left((y_0)^{-1}\right) = \infty$. Следовательно, одним из критериев устойчивости должно быть условие *отделимости от нуля* начального значения x_0. Поэтому, не ограничивая общности и для упрощения дальнейших рассуждений, будем считать, что условия (I.10) выполнены и для $n = 0$.

Теперь для $\{\tilde{y}_n\}$ построим последовательность-мажоранту $\{t_n\}$: $t_0 = x_0 \cdot (1+\rho)$, $t_n = \dfrac{1+\rho}{2}\left(t_{n-1} + \dfrac{1}{1-\rho}\right)$, $n = 1, 2\ldots$ Очевидно, что $\tilde{y}_0 = x_0 \cdot (1+\rho_0) \leqslant t_0$ и имеем:

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{y}_0 + \frac{1}{\tilde{y}_0}\right)(1+\rho_1) \leqslant \frac{1+\rho}{2}\left(\tilde{y}_0 + \frac{1}{1-\rho}\right) \leqslant \frac{1+\rho}{2}\left(t_0 + \frac{1}{1-\rho}\right) = t_1 \Rightarrow$$
$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{y}_1 + \frac{1}{\tilde{y}_1}\right)(1+\rho_2) \leqslant \frac{1+\rho}{2}\left(\tilde{y}_1 + \frac{1}{1-\rho}\right) \leqslant \frac{1+\rho}{2}\left(t_1 + \frac{1}{1-\rho}\right) = t_2 \Rightarrow$$
$$\ldots$$
$$\tilde{y}_n = \frac{1}{2}\left(\tilde{y}_{n-1} + \frac{1}{\tilde{y}_{n-1}}\right)(1+\rho_n) \leqslant \frac{1+\rho}{2}\left(\tilde{y}_{n-1} + \frac{1}{1-\rho}\right) \leqslant \frac{1+\rho}{2}\left(t_{n-1} + \frac{1}{1-\rho}\right) = t_n.$$

Упражнение № I.3

Для последовательности-мажоранты $\{t_n\}$ вывести формулу общего члена при любом начальном значении t_0:

$$t_n = \frac{1+\rho}{2}\left(t_{n-1} + \frac{1}{1-\rho}\right) \Leftrightarrow t_n = \left(t_0 - \frac{1+\rho}{(1-\rho)^2}\right)\left(\frac{1+\rho}{2}\right)^n + \frac{1+\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Отсюда получить результат: $\forall \rho \ll 1\ \exists N_\rho: \quad t_n \leqslant \rho + (1+\rho)/(1-\rho)^2 \quad \forall n \geqslant N_\rho.$

Теперь легко доказываем сходимость $\{t_n\}$ и получаем оценку для элементов $\{\tilde{y}_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1+\rho}{(1-\rho)^2} \Rightarrow t_n \leqslant \rho + \frac{1+\rho}{(1-\rho)^2} \Rightarrow \tilde{y}_n \leqslant t_n \leqslant \rho + \frac{1+\rho}{(1-\rho)^2},\ n \geqslant N_\rho \Rightarrow$$
$$\tilde{y}_n \leqslant \rho + \frac{1+\rho}{1-2\rho+\rho^2} < \rho + \frac{1+\rho}{1-2\rho} < \rho + (1+\rho)(1+3\rho) = 1 + 5\rho + 3\rho^2 < 1 + 6\rho$$

(при выводе учтено, что для $\rho \ll 1$ выполнено: $(1-2\rho)^{-1} < 1+3\rho$ и $3\rho^2 < \rho$).

Окончательно получаем ограничения для элементов последовательности $\{\tilde{y}_n\}$:

$$1 - 6\rho < 1 - \rho \leqslant \tilde{y}_n < 1 + 6\rho,\ n \geqslant N_\rho \ \Rightarrow\ |\tilde{y}_n - 1| < 6\rho \ \Rightarrow\ \varepsilon/\sqrt{a} \geqslant 6\rho.$$

Доказано, что ошибки округления не накапливаются и алгоритм (I.8) завершится за конечное время, если точность приближения ε выбирать **не меньше** чем $6\rho\sqrt{a}$.

Из проведенного **полного** анализа алгоритма (I.8) сделаем общие выводы.

***Правило*: Общие свойства численных алгоритмов [1]**

1. Исходная задача заменяется другой, численной, решение которой в некотором смысле близко к требуемому решению.
2. В новой задаче возникает параметр N, которого нет в первоначальной задаче.
3. Выбором параметра *принципиально* можно добиться любой близости решений.
4. Ошибки округления при машинной реализации алгоритма не накапливаются и существенно не меняют его свойств.

Далее представлена реализация алгоритма на языке C++ и результат расчета.

```
// Квадратный корень из положительного числа

#include <iostream> // Стандартная библиотека ввода-вывода
#include <math.h>   // Библиотека станлартных математических функций
#include <fstream>  // Библиотека функций для работы с потоками (файлами)
using namespace std;
#define a 2
#define eps 0.0001      // Требуемая точность вычисления ε
#define x0 100   // Начальное приближение

int main()
{
  setlocale(LC_ALL, "Russian");
  ofstream fout;
  fout.open("root.txt");
  double x1 = 0, x = x0, temp = eps + 1.;
  int N = 0;

      if ( a < 0 ) {
            /* Вывод результатов на консоль*/
            cout << "Введено отрицательное число" << endl;
            /* Вывод результатов в файл*/
            fout << "Введено отрицательное число" << endl;
            return -1;
      }

      while (temp  >=  eps) {
               x1 = 0.5 * ( x + a / x );
                  cout << "x1 =  " << x1 << endl;
                  fout << "x1 =  " << x1 << endl;
                  temp = fabs( x - x1 );
                  x = x1;
                  N++;
      }
```

```
        fout << "Sqrt(" << a << ") = " << x1 << endl;
        fout << "N = " << N << endl;
        cout << "Sqrt(" << a << ") = " << x1 << " " << "N = " << N << endl;
        fout.close();
        return 0;
}
/*Результаты работы программы:
x0 =  100
x1 =  50.01
x1 =  25.025
x1 =  12.5525
x1 =  6.35589
x1 =  3.33528
x1 =  1.96747
x1 =  1.492
x1 =  1.41624
x1 =  1.41422
x1 =  1.41421
Sqrt(2) = 1.41421
N = 10 */
```

Листинг I.1. Метод простой итерации для вычисления квадратного корня из 2

II Решение нелинейных алгебраических уравнений

Задача состоит в решении нелинейного уравнения $f(x) = 0$. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $x \in [a, b]$, имеет, по меньшей мере, один изолированный корень $\xi \in [a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Докажем теорему.

Теорема II.1: Достаточное условие существования единственного корня

Пусть $f(x) \in C^2[a, b]$ и $f''(x)$ не меняет знак на $[a, b]$. Тогда:
1. Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists!\, \xi \in (a, b)$, такое что $f(\xi) = 0$.
2. Если $f(a) = f(b) = 0$, то корней на (a, b) нет.

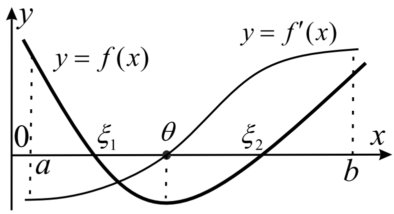

Рис. II.1. К доказательству теоремы

Доказательство. Докажем п. 1 теоремы. Непрерывная и меняющая знак на интервале функция имеет по крайней мере один корень на этом интервале: $f(\xi_1 \in (a, b)) = 0$. Далее предположим (от противного), что $a < \xi_1 < \xi_2 < b$, $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. Тогда по теореме Ролля, существует $\theta \in (\xi_1, \xi_2)$, что $f'(\theta) = 0$. Рассмотрим случай $f''(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$. Тогда производная функция $f'(x)$ *не убывает* на $[a, b]$. Из этого и из условия $f'(\theta) = 0$ делаем вывод, что $f'(x) \leqslant 0$, $x \in [a, \theta]$ и $f'(x) \geqslant 0$, $x \in [\theta, b]$. А значит $f(x)$ *не возрастает* на $[a, \theta]$ и *не убывает* на $[\theta, b]$. Поэтому $f(a) \geqslant f(\xi_1) = 0$ и $0 = f(\xi_2) \leqslant f(b)$, что противоречит условию $f(a) \cdot f(b) < 0$. Случай $f''(x) \leqslant 0$ рассматривается аналогично.

Для доказательства п. 2 теоремы от противного предположим, что $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$ для $a < \xi < b$. Тогда по теореме Ролля заключаем, что $\exists \theta_1 \in (a, \xi) < \theta_2 \in (\xi, b)$ и $f'(\theta_1) = f'(\theta_2) = 0$. Применим теорему Ролля теперь к функции $f'(x)$ и получим, что вторая производная $f''(x)$ меняет знак на интервале (a, b). ▲

1 Метод хорд (метод секущих)

Для нахождения очередного приближения корня, находящегося в интервале $[a, b]$, этот интервал делят в отношении $|f(a)| : |f(b)|$. Геометрически метод хорд эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Уравнение хорды $h_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$, $x \in [a; b]$. Абсцисса точки пересечения x_1 хорды с осью OX: $h_1(x_1) = 0$ определяется, очевидно, по формуле:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \tag{II.1}$$

и является приближённым значением корня ξ. Далее выбирается тот из интервалов $[a, x]$ или $[x, b]$, в котором функция меняет свой знак, и процесс уточнения корня повторяется. Установим условия возрастания (убывания) последовательности $\{x_n\}$.

Предположим, что вторая производная $f''(x)$ на интервале $[a, b]$ сохраняет знак. Пусть для определённости $\boldsymbol{f''(x) < 0}$ **и** $\boldsymbol{f(a) < 0}$, так что выполнено условие

$\boldsymbol{f''(x) \cdot f(a) > 0}$. Исследуем $\Phi(x) \equiv f(x) - h_1(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$, $x \in [a;b]$. Выполнены условия второго пункта теоремы: $\Phi''(x) \equiv f''(x) < 0$ на $[a;b]$ и $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. Значит, функция $\Phi(x)$ на интервале (a,b) сохраняет знак. В данном случае $\Phi(x) > 0$, поскольку $\Phi(a) = 0$ и $\Phi'(a) > 0$. В частности $\Phi(x_1) > 0$. Из свойства $h(x_1) = 0$ следует, что $f(x_1) = \Phi(x_1) > 0 \Rightarrow f(a) \cdot f(x_1) < 0$. На новом отрезке $[a;x_1]$ для хорды $h_2(x) = \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}(x_1-a) + f(a)$ находим корень $h_2(x_2) = 0$ и анализ повторяется. Так получаем отрезки $[a;x_2]$, $[a;x_3]\ldots$ и расчетные формулы:

Определение II.1: Метод хорд (метод секущих)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a), \quad x_0 = b, \quad n = 0,1\ldots N; \tag{II.2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n), \quad x_0 = a, \quad n = 0,1\ldots N; \tag{II.3}$$

$$|x_{N+1} - x_N| < \frac{m}{M-m}\varepsilon, \quad 0 < m \leqslant m_1 = \min_{[a,b]}|f'(x)|, \quad M \geqslant M_1 = \max_{[a,b]}|f'(x)|.$$

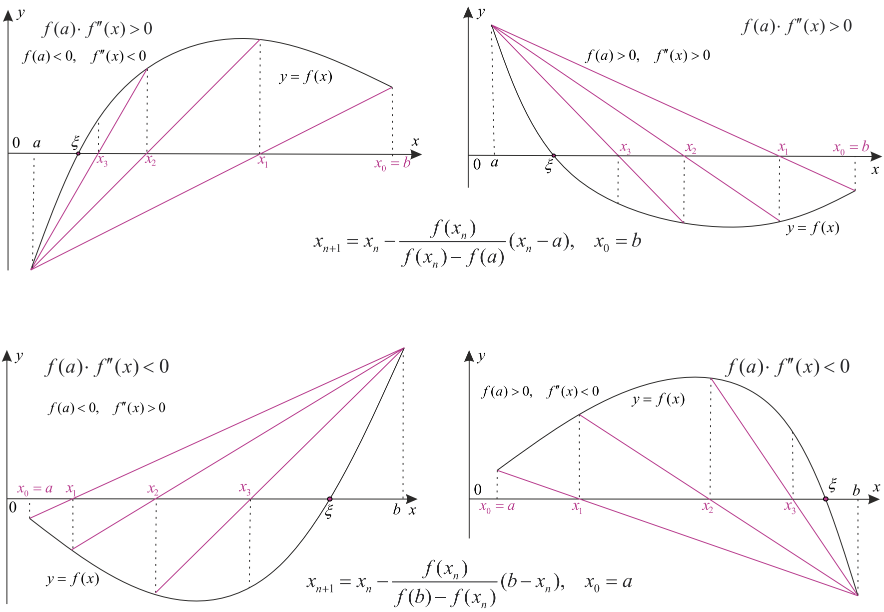

Рис. II.2. Метод хорд (метод секущих)

Очевидно, что $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена слева: $x_n > \xi > a, \ \forall n$. По теореме Коши, $\{x_n\}$ является сходящейся последовательностью, т. е. $\exists \zeta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (II.2), учтём непрерывность функции $f(x)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(\zeta)$. Также учтём, что $\zeta \geqslant \xi > a$ и $f(\zeta) \geqslant 0 > f(a)$.

Тогда получим

$$\zeta = \zeta - \frac{f(\zeta)}{f(\zeta) - f(a)}(\zeta - a) \Leftrightarrow f(\zeta) = 0 \Leftrightarrow \zeta = \xi,$$

что завершает доказательство сходимости процесса (II.2) к корню уравнения $f(x) = 0$.

Для случая, когда $f''(x) > 0$ и $f(a) > 0$, аналогично обосновывается неподвижность левого конца a (*докажите!*). Значит, неравенство $f''(x) \cdot f(a) > 0$ является *достаточным условием* для расчёта по формулам (II.2).

Если выполнено условие $f''(x) \cdot f(b) > 0$, то неподвижен конец b (*докажите!*) и вычисления производятся по формуле (II.3).

Номер N, когда гарантированно достигнута заданная точность $\varepsilon > |x_{N+1} - \xi|$, определим с помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях $\big(\forall z, y\ \exists\theta \in (y, z) : f(z) - f(y) = f'(\theta)(z - y)\big)$, условия $f(\xi) = 0$ и равенств (II.3):

$$0 < x_{n+1} - x_n = |x_{n+1} - x_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f(b) - f(x_n)|}|b - x_n| = \frac{|f(x_n) - f(\xi)|}{|f(b) - f(x_n)|}|b - x_n| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m_1|x_n - \xi|}{M_1|b - x_n|}|b - x_n| = \frac{m_1}{M_1}|x_n - \xi| = \frac{m_1}{M_1}(\xi - x_n) \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n) - \frac{m_1}{M_1}(x_{n+1} - x_n) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m_1}{M_1}(\xi - x_n) - \frac{m_1}{M_1}(x_{n+1} - x_n) \Leftrightarrow \frac{M_1 - m_1}{M_1}(x_{n+1} - x_n) \geqslant \frac{m_1}{M_1}(\xi - x_{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_1 - m_1}{m_1}(x_{n+1} - x_n) \geqslant (\xi - x_{n+1}) \Leftrightarrow |x_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad \text{(II.4)}$$

Для (II.2) выводится аналогичное неравенство (*проверить!*). Таким образом, получили критерий достижения заданной точности ε:

$$|x_{n+1} - \xi| < \varepsilon \Leftarrow |x_{n+1} - x_n| < \frac{m_1}{M_1 - m_1}\varepsilon \quad \text{(II.5)}$$

Пример II.1 (*Метод хорд*)**.** Пусть требуется решить уравнение $2^x + 5x - 2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Для этого введём и исследуем функцию $f(x) = 2^x + 5x - 2$.

Сначала необходимо локализовать и отделить корень, т. е. определить отрезок $[a; b]$, в котором находится один и только один корень уравнения. Дифференцируя $f(x)$, получаем: $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 5 > 0$, $\forall x$, т. о. $f(x)$ монотонно возрастает на всём ОДЗ. Далее, $f(0) = -1 < 0$ и $f(1) = 5 > 0$. Итак, уравнение имеет единственный корень $\xi \in [0; 1]$.

Для определения констант m_1 и M_1 минимальное и максимальное значения производной следует вычислять с заданной точностью ε. Вторая производная функции $f(x)$: $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 > 0$, $\forall x$, значит $f'(x)$ монотонно возрастает и $m_1 = f'(0) \approx \approx 5.6931$, $M_1 = f'(1) \approx 6.3863$. Можно поступить иначе и расширить отрезок $[m_1; M_1]$, определив минимальное значение с недостатком $m_1 = f'(0) > 5.69 \equiv m$, а максимальное значение с избытком $M_1 = f'(1) < 6.39 \equiv M$.

Функция $f''(x)$ всюду положительная, $f(1) = 5$, $f''(x) \cdot f(b) > 0$. Следовательно, последовательные приближения корня будем искать по формуле (II.3).

Определим условие окончания итераций

$$|x_{n+1}-\xi| \leqslant \frac{M_1-m_1}{m_1}|x_{n+1}-x_n| < \frac{M-m}{m}|x_{n+1}-x_n| = \frac{6.39-5.69}{5.69}|x_{n+1}-x_n| <$$
$$< 10^{-4} \Rightarrow |x_{n+1}-x_n| < \frac{5.69}{6.39-5.69}\cdot 10^{-4} \Rightarrow |x_{n+1}-x_n| < 8\cdot 10^{-4} = 0.0008,$$

здесь последнюю дробь вычислили с недостатком. Результат вычислений: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1667$, $x_2 = 0.1740$, $x_3 = 0.1743$, $x_4 = 0.1743\ldots$

2 Метод Ньютона (метод касательных)

В методе Ньютона приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$ находится из условия $h(x) = 0$, где $y = h(x)$ — уравнение касательной к графику функции $f(x)$. Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка на графике. Тогда уравнение касательной, проведённой в этой точке: $h_0(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью OX: $0 = f'(x_0)(x_1-x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - f(x_0)\big(f'(x_0)\big)^{-1}$. Проведя касательную к точке $(x_1; f(x_1))$, найдём x_2 и т. д. Получили итерационный процесс:

Определение II.2: Метод Ньютона (метод касательных)

$$x_0 \in (a,b), \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0,1\ldots N, \; |x_{N+1}-x_N| < \frac{m}{M-m}\varepsilon$$

Теорема II.2: Достаточные условия сходимости метода Ньютона II.2

- корень $\xi \in (a;b)$;
- функции $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определённые знаки на отрезке $[a;b]$;
- начальное приближение $x_0 \in (a;b)$;
- $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.

Проверим для случая, когда $f'(x)$, $f''(x)$ — положительны на $[a;b]$ и $f(x_0) > 0$.

Во-первых, условие $f'(x) > 0$ означает монотонный рост функции $f(x)$, так что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и корень ξ — единственный на $[a;b]$. Из монотонного роста $f(x)$ следует также, что $x_0 > \xi$, поскольку $f(x_0) > 0 = f(\xi)$.

Во-вторых, из определения II.2 при $n = 0$ легко получаем, что $x_1 < x_0$.

В-третьих, из условий $f'(x)$, $f''(x) > 0$ следует, что $f'(x)$ положительна и монотонно возрастает на $[a;b]$. Значит, выполнено двойное неравенство $0 < \dfrac{f'(\theta)}{f'(x_0)} < 1$, $\forall\theta \in (a;x_0)$. Используем его для доказательства неравенства $\xi < x_1$:

$$x_1 - \xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \xi = x_0 - \xi - \frac{f(x_0)-f(\xi)}{f'(x_0)} = x_0 - \xi - \frac{f'(\theta)(x_0-\xi)}{f'(x_0)} =$$
$$= (x_0-\xi)\left(1 - \frac{f'(\theta)}{f'(x_0)}\right) > 0, \quad \text{т. к. согласно теореме Лагранжа } \theta \in (\xi; x_0).$$

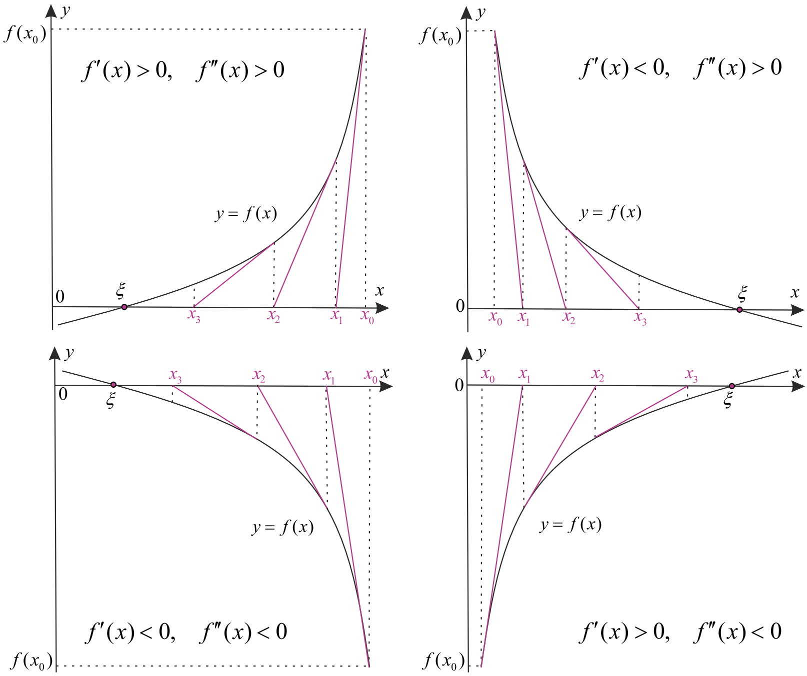

Рис. II.3. Метод Ньютона

Теперь методом индукции находим, что $\xi < \ldots < x_n < \ldots < x_1 < x_0$. Окончательно, как и при обосновании метода хорд, легко устанавливается сходимость монотонной ограниченной последовательности $\{x_n\}$ к значению ξ.

Пусть как и ранее $m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)| > 0$, $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$. Найдём критерий достижения заданной точности ε: $|x_{n+1} - \xi| < \varepsilon$, Используя формулу Лагранжа и то, что $f(\xi) = 0$, для метода II.2 получаем

$$0 < x_n - x_{n+1} = |x_{n+1} - x_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|} = \frac{|f(x_n) - f(\xi)|}{|f'(x_n)|} \geqslant \frac{m_1|x_n - \xi|}{M_1} =$$

$$= \frac{m_1}{M_1}(x_n - \xi) \Leftrightarrow (x_n - x_{n+1}) - \frac{m_1}{M_1}(x_n - x_{n+1}) \geqslant \frac{m_1}{M_1}(x_n - \xi) - \frac{m_1}{M_1}(x_n - x_{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{M_1 - m_1}{M_1}(x_n - x_{n+1}) \geqslant \frac{m_1}{M_1}(x_{n+1} - \xi) \Leftrightarrow \frac{M_1 - m_1}{m_1}(x_n - x_{n+1}) \geqslant (x_{n+1} - \xi) \quad \text{(II.6)}$$

Отсюда выводим критерий завершения счёта, совпадающий с (II.5).

В заключении отметим, что приближенные значения m, M констант m_1, M_1 следует вычислять либо с точностью, не меньшей ε. Иначе следует расширить отрезок $[m_1; M_1] \subset [m; M]$ (см. пример на применение метода хорд).

Пример II.2 (*Метод Ньютона*)**.** Для уравнения $2^x + 5x - 2 = 0$ (точность решения оставим равной $\varepsilon = 10^{-4}$) определение II.2 примет следующий вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2^{x_n} + 5x_n - 2}{2^{x_n} \ln 2 + 5}. \quad \text{(II.7)}$$

Критерий остановки счета возьмем из метода хорд: $|x_{n+1}-x_n| < 8\cdot 10^{-4} = 0.0008$. Результат вычислений: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1757$, $x_2 = 0.1743$, $x_3 = 0.1743\ldots$

3 Метод простой итерации

Заменим уравнение $f(x) = 0$ на **эквивалентное уравнение** $x = \varphi(x)$, так чтобы на отрезке локализации корня $[a, b]$ было выполнено $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$. Таким образом, ξ одновременно является нулем функции $f(x)$ и *стационарной точкой* **эквивалентной функции** $\boldsymbol{\varphi(x)}$. Приближенное значение стационарной точки ξ будем искать по рекуррентной формуле $\boxed{x_{n+1} = \varphi(x_n)}$. Функцию $\varphi(x)$ необходимо выбрать так, чтобы последовательность x_n являлась *сходящейся* (тогда её пределом будет точка ξ). Например, достаточно потребовать, чтобы функция $\varphi(x)$ была *сжимающим отображением* отрезка $[a; b]$, т. е. обладала следующими свойствами:

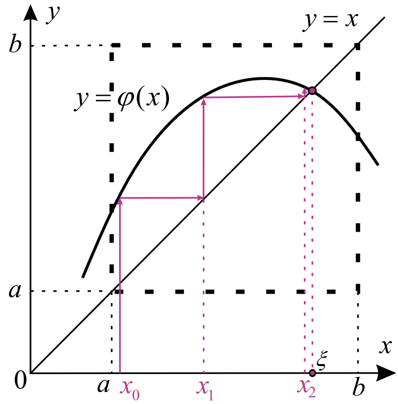

Рис. II.4. Метод простой итерации

- Для функции $\varphi(x)$ выполнено условие $\forall x \in [a; b] \Rightarrow \varphi(x) \in [a; b]$;
- существует такое число q, для которого $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ при $x \in [a; b]$.

Докажем, что последовательности x_n сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a; b]$. Для этого проверим, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Используем теорему Лагранжа о конечных приращениях:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leqslant q|x_n - x_{n-1}| \leqslant q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leqslant \ldots \leqslant q^n|x_1 - x_0|$$
$$\Downarrow$$
$$|x_{n+k} - x_n| = |(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$
$$\leqslant q^{n+k-1}|x_1 - x_0| + q^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \ldots + q^n|x_1 - x_0| =$$
$$= \left(q^{n+k-1} + \ldots + q^n\right)|x_1 - x_0| = q^n\frac{1-q^k}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|, \tag{II.8}$$

откуда легко видеть ($0 < q < 1$), что для любого $\delta > 0$ найдётся такой номер N, что $\forall\, n \geqslant N$ и $\forall\, k \geqslant 1$ выполнено $|x_{n+k} - x_n| < \delta$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальна. Известно, что числовая фундаментальная последовательность сходится. Тогда переходя к пределу в $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ и с учетом непрерывности $\varphi(x)$ получаем:

$$\zeta \equiv \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = \varphi(\zeta) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = \xi = \varphi(\xi),\;\; \xi \in [a; b].$$

Установим критерий достижения заданной точности $|x_{N+1} - \xi| < \varepsilon$:

$$|x_{n+1} - x_n| = |(x_{n+1} - \xi) - (x_n - \xi)| \geqslant |x_n - \xi| - |x_{n+1} - \xi| = |x_n - \xi| -$$

$$-|\varphi(x_n)-\varphi(\xi)| \geqslant |x_n-\xi| - q|x_n-\xi| = (1-q)|x_n-\xi| \geqslant (1-q)\frac{1}{q}|\varphi(x_n)-\varphi(\xi)| =$$

$$= \frac{1-q}{q}|x_{n+1}-\xi| \Rightarrow \boxed{|x_{n+1}-\xi| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon} \qquad \text{(II.9)}$$

Определение II.3: Метод простых итераций

$$x_0 \in [a,b], \quad x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1\ldots N, \quad |x_{N+1}-x_N| < \frac{1-q}{q}\varepsilon, \quad 1 > q \geqslant \max_{[a;b]}|\varphi'(x)|$$

Пример II.3 (*Метод простой итерации-1*)**.** Рассмотрим снова уравнение $2^x + 5x - 2 = 0$ (требуемая точность решения по прежнему $\varepsilon = 10^{-4}$).

Локализация корня нам известна: $\xi \in [0; 1]$. Перепишем уравнение в виде:

$$x = \frac{2-2^x}{5}, \quad \varphi(x) \equiv \frac{2-2^x}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(x).$$

Докажем, что функция $\varphi(x)$ является сжимающим отображением для отрезка $[0; 1]$. Производная $\varphi'(x) = -\dfrac{\ln 2}{5}2^x < 0$, $\forall\, x$, значит $\varphi(x)$ монотонно убывает. Тогда

$$0 = \varphi(1) = \min_{[0;1]}\varphi(x) < \max_{[0;1]}\varphi(x) = \varphi(0) = 0.4 < 1 \ \Rightarrow\ \varphi([0;1]) \subset [0;1];$$

$$\max_{[0;1]}|\varphi'(x)| = |\varphi'(1)| = \frac{2\ln 2}{5} < 0.3 < 1 \quad \Rightarrow \quad q = 0.3.$$

Достаточные условия сходимости выполнены. Вычисления проводим по формулам

$$x_0 = 0.2,\ x_{n+1} = \frac{2-2^{x_n}}{5},\ n = 0.1\ldots N,\ |x_{N+1}-x_N| < \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{7}{3}10^{-4} \approx 2.3\cdot 10^{-4}.$$

Здесь дробь $7/3$ вычислена *с недостатком*, чтобы гарантировать требуемую точность. В качестве начального приближения x_0 можно взять произвольное число из отрезка $[0; 1]$, и мы для сравнения с рассмотренными методами выберем $x_0 = 0$. Результаты вычислений: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.1703$, $x_3 = 0.1749$, $x_4 = 0.1742$, $x_5 = 0.1743$, $x_6 = 0.1743\ldots$

Пример II.4 (*Метод простой итерации-2*)**.** Рассмотрим для сравнения уравнение $f(x) \equiv 2^x + \dfrac{1}{5}x - 2 = 0$. Функция $f(x)$ по прежнему монотонна, её единственный корень локализован в отрезке $\xi \in [0; 1]$. Попробуем применить рассмотренный выше способ и запишем:

$$x = 5(2-2^x),\ \varphi(x) \equiv 5(2-2^x) \Rightarrow x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

В отличие от предыдущего примера, здесь отображение $\varphi(x)$ уже не является сжимающим на отрезке $[0; 1]$ (*Проверить!*).

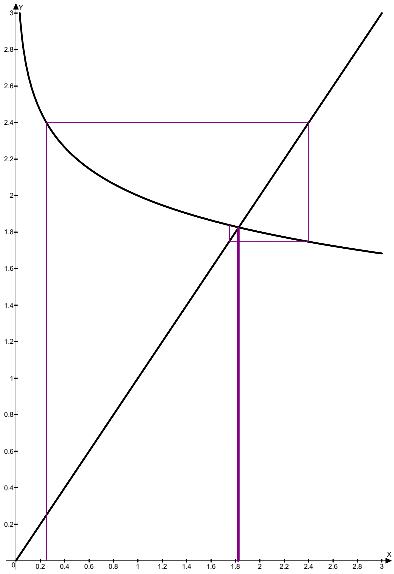

Рис. II.5. «Хорошая» функция $\varphi(x)$

Заметим, что выполнение требования $|\varphi'(x)| < < 1$ *не является необходимым* для сходимости алгоритма простой итерации (только *достаточным*). Однако в данном случае предложенный алгоритм расходится. Например, вычислим с точностью 10^{-4} последовательность: $x_0 = 0.2$, $x_1 = = 4.2565$, $x_2 = -85.5667$, $x_3 = 10$, $x_4 = -5110$, $x_5 = 10$, $x_5 = -5110\ldots$

Для получения «хорошей» функции $\varphi(x)$ можно, например, произвести замену $z = 2^x$, так что уравнение перепишется в виде $z + \frac{1}{5}\log_2 z - 2 = = 0$. Тогда получаем итерационный алгоритм $z = = 2 - \dfrac{\log_2 z}{5} \equiv \varphi(z) \Rightarrow z_{n+1} = \varphi(z_n), z_0 \in [1;2]$, $\max\limits_{[1;2]}|\varphi'(z)| = |\varphi'(1)| = \dfrac{1}{5\ln 2} < 0.3 \equiv q$.

Получили рекуррентную последовательность, которая сходится к корню немонотонно (рис.II.5). Для $x_0 = 0$: $z_0 = 1, z_1 = 2, z_2 = 1.8, z_3 = 1.8304$, $z_4 = 1.8256$, $z_5 = 1.8263$, $z_6 = 1.8262$, $z_7 = 1.8262\ldots$ Вернемся к переменной x и получим ответ: $\xi^* = \log_2 1.8262 \approx 0.8689$.

Если функций $f(x)$ *монотонна на отрезке* $[a,b]$ (а значит её производная сохраняет знак на этом отрезке), то функцию $\varphi(x) \in C^1[a,b]$ можно выбрать в виде:

$$\boxed{\varphi(x) = x - \operatorname{sign}\big(f'(x)\big)\frac{f(x)}{M}}, \quad \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -1, \ x < 0. \end{cases} \qquad M \geqslant \max_{[a;b]}|f'(x)|. \quad \text{(II.10)}$$

Очевидно, что $\varphi'(x) = 1 - \operatorname{sign}\big(f'(x)\big)\dfrac{f'(x)}{M} = 1 - \dfrac{|f'(x)|}{M} \leqslant \left(1 - \dfrac{m}{M}\right) \equiv q < 1$, где $0 < m \leqslant \min\limits_{[a;b]}|f'(x)|$. Для нашего примера $f(x) = 2^x + 0.2x - 2 \Rightarrow M \equiv 2.5 > > \max_{[0;1]}|2^x \ln 2 + 0.2|$. Тогда получаем $\varphi(x) = x - \frac{2}{5}(2^x + 0.2x - 2) \Rightarrow$

$$x_0,\ x_{n+1} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}2^{x_n} + \frac{23}{25}x_n\,,\ n = 0.1\ldots N,\ |x_{N+1} - x_N| < \frac{7}{18}\varepsilon \approx 0.3888 \cdot 10^{-4},$$

здесь $\max_{[0;1]}|\varphi'(x)| < 18/25 = q \Rightarrow \frac{1-q}{q} = \frac{7}{18}$. Результат расчета: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.6402$, $x_3 = 0.7656$, $x_4 = 0.8243$, $x_5 = 0.8501$, $x_6 = 0.8610$, $x_7 = 0.8556$, $x_8 = 0.8675$, $x_9 = 0.8683$, $x_{10} = 0.8686$, $x_{11} = 0.8688$, $x_{12} = 0.8688$, $x_{13} = 0.8689$, $x_{14} = 0.8689\ldots$ Получили найденный ранее ответ.

Для функций, не имеющих непрерывной первой производной, в качестве достаточного условия сходимости алгоритма вместо условия $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ можно использовать *условие Липшица*: $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < q|x_1 - x_2|$, где $q = \text{const} < 1$.

Упражнение № II.1

Показать, что для следующих отображений:

- $\varphi(x) = 2 - \dfrac{\log_2 x}{5}$ является сжимающим на отрезке $[1, 2]$;
- $\varphi(x) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}2^x + \dfrac{23}{25}x$ является сжимающим на $[0, 1]$ и $M_1^{\varphi} < \dfrac{18}{25}$.

4 Метод деления отрезка пополам (метод половинного деления)

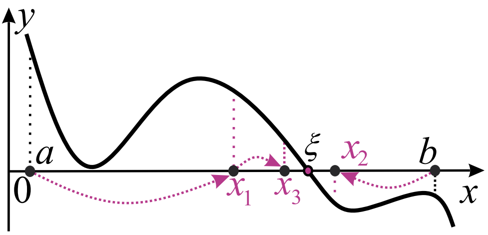

Рис. II.6. Метод половинного деления

Следующий метод использует минимальную (по сравнению с другими методами) информацию о свойствах функции $f(x)$. Мы знаем лишь то, что функция обладает единственным корнем на отрезке $[a, b]$ и этот корень нечетной кратности (т. е знаки функции различны на отрезках справа и слева от корня). Тогда мы можем последовательно делить отрезки пополам и выбирать ту половинку, которая содержит корень. После n делений мы гарантируем, что искомый корень находится внутри отрезка с длиной $\dfrac{b-a}{2^n}$, а значит искомая точность будет достигнута, когда эта длина станет меньше чем ε. Отсюда легко получаем значение параметра n: $n = \left[\log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1$. Приведем запись алгоритма половинного деления на **псевдокоде** и на **языке Си**:

Алгоритм II.1. Метод половинного деления

Вход: функция $f(x)$; отрезок локализации корня $[a, b]$; точность ε; невязка e.

Выход: приближенное значение корня ξ^*.

$n = \left[\log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1$ /* $\Leftarrow \dfrac{b-a}{2^n} \leqslant \varepsilon$, $[\cdot]$ - целая часть числа */

для всех *i = 1,2...n* **начало цикла**

  $\xi^* = \dfrac{a+b}{2}$

  если $|f(\xi^*)| <= e$ **то конец цикла**

  если $f(\xi^*)$ *и* $f(a)$ *разных знаков* **то**

    $b \leftarrow \xi^*$ /* (сделать ξ^* новой правой границей) */

  иначе

    $a \leftarrow \xi^*$ /* (сделать ξ^* новой левой границей) */

  конец если

конец цикла

возврат ξ^*

Определение II.4: Псевдокод - язык описания алгоритмов

Псевдокод — компактный, зачастую неформальный язык описания алгоритмов, использующий ключевые слова языков программирования, но опускающий несущественные для понимания алгоритма подробности и специфический синтаксис. Предназначен для представления алгоритма человеку, а не для компьютерной трансляции и последующего исполнения программы.

Существуют различные варианты псевдокода, многие из которых используют конструкции естественных языков.

```
// Метод деления отрезка пополам
#include <iostream> // Стандартная библиотека ввода-вывода
#include <math.h>   // Библиотека станлартных математических функций
#include <fstream>  // Библиотека функций для работы с потоками (файлами)
using namespace std;
#define eps 0.0001      // Требуемая точность вычисления ε
#define e 0.00005       // Минимальное значение невязки e
double f (double x){
          return pow(x, 3.) - x - 5.;}  // Функция f(x) = x^3 - x - 5
int main(){
    double a = 1., b = 2., ksi;  // Концы отрезка и искомый корень
    int n, i;  // Число витков цикла n, счетчик i
    ofstream fout;       // Открываем поток
    fout.open("onehalf.txt"); // Связываем поток с файлом

    n = int(log((b - a) / eps) / log(2)) + 1; // n = [log_2 (b - a)/ε] + 1
    ksi = (a + b) / 2.;    // Вычисляем середину начального отрезка
    for (i = 1; i <= n && fabs(f(ksi))>=e; i++){
        if (f(ksi) * f(a) < 0) b = ksi;
        else a = ksi;
        /* Вывод результатов на консоль*/
        cout << "i = " << i << "  [a,b]=[" << a << ", " << b << "]" << endl;
        /* Вывод результатов в файл*/
        fout << "i = " << i << "  [a,b]=[" << a << ", " << b << "]" << endl;
        ksi = (a + b) / 2.;    // Вычисляем середину нового отрезка
    }
    cout << "ksi = " << ksi << endl;
    fout << "ksi = " << ksi << endl;
    fout.close(); // Закрываем поток
    return 0;
}
/*Результаты работы программы:
i = 1  [a,b]=[1.5, 2]
i = 2  [a,b]=[1.75, 2]
```

```
i = 3  [a,b]=[1.875, 2]
i = 4  [a,b]=[1.875, 1.9375]
i = 5  [a,b]=[1.875, 1.90625]
i = 6  [a,b]=[1.89062, 1.90625]
i = 7  [a,b]=[1.89844, 1.90625]
i = 8  [a,b]=[1.90234, 1.90625]
i = 9  [a,b]=[1.90234, 1.9043]
i = 10  [a,b]=[1.90332, 1.9043]
i = 11  [a,b]=[1.90381, 1.9043]
i = 12  [a,b]=[1.90405, 1.9043]
i = 13  [a,b]=[1.90405, 1.90417]
i = 14  [a,b]=[1.90411, 1.90417]
ksi = 1.90414*/
```

Листинг II.1. Метод половинного деления

Упражнение № II.2

Методом половинного деления найти корень уравнения $2^x + 5x - 2 = 0$ на отрезке $[0, 1]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

5 Анализ эффективности итерационных методов

5.1 Скорость сходимости. Порядок сходимости.

Обозначим **n-ую погрешность корня ξ уравнения** $f(x) = 0$ как $\boldsymbol{\varepsilon_n = x_n - \xi}$ и сформулируем несколько определений и утверждений.

Определение II.5: Порядок и скорость сходимости итерационного метода

- **Порядком сходимости итерационного метода называется число $p \geqslant 1$**, для которого неравенство $|\varepsilon_{n+1}| \leqslant C|\varepsilon_n|^p$ $(C < 1)$ выполнено во всей области сходимости.
- В частности $p = 1$ соответствует **линейной скорости сходимости**, $p = 2$ — **квадратичной скорости сходимости**, $p = 3$ — **кубичной скорости сходимости** и т. д.
- **Сходимость итерационного метода со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$** определяется неравенством $|\varepsilon_n| \leqslant Bq^n$.

Лемма II.3: О связи между порядком и скоростью сходимости [2]

Методы **первого порядка сходимости $p = 1$** (с линейной скоростью сходимости) сходятся со скоростью геометрической прогрессии: $|\varepsilon_n| \leqslant |\varepsilon_0| \cdot C^n$.
Методы **порядка сходимости $p > 1$** сходятся со скоростью показательной функции с основанием $q = C^{1/(p-1)}|\varepsilon_0|$ и показателем p^n : $|\varepsilon_n| \leqslant C^{1/(1-p)} \cdot q^{p^n}$.

Для $p = 1$: $|\varepsilon_n| \leqslant C|\varepsilon_{n-1}| \leqslant C^2|\varepsilon_{n-2}| \leqslant \ldots \leqslant C^n|\varepsilon_0| \Rightarrow \boxed{q = C < 1,\ B = |\varepsilon_0|}$.

Для $p > 1$: $|\varepsilon_n| \leqslant C|\varepsilon_{n-1}|^p \leqslant C\left(C|\varepsilon_{n-2}|^p\right)^p = C^{(1+p)}|\varepsilon_{n-2}|^{p^2} \leqslant$

$$\leqslant C^{(1+p)}\big(C|\varepsilon_{n-3}|^p\big)^{p^2} \leqslant C^{(1+p+p^2)}\big(C|\varepsilon_{n-4}|^p\big)^{p^3} \leqslant \ldots \leqslant C^{(1+p+p^2\ldots p^{n-1})}|\varepsilon_0|^{p^n} =$$

$$= C^{\frac{p^n-1}{p-1}}|\varepsilon_0|^{p^n} = C^{1/(1-p)}|C^{1/(p-1)}\varepsilon_0|^{p^n} \Rightarrow \boxed{q = C^{1/(p-1)}|\varepsilon_0|}.$$

Теорема II.4: О скорости сходимости четырех методов

Методы половинного деления, простой итерации и хорд имеют первый порядок сходимости ($p = 1$). Для метода Ньютона в случае простого корня выполнено $p = 2$ (**сверхлинейная сходимость**, *квадратичная сходимость*).

Доказательство теоремы начнем с метода половинного деления. Поскольку на каждом шаге итерации длина отрезка локализации корня уменьшается в два раза, то очевидно получаем $|\varepsilon_n| \leqslant (b-a)2^{-n} \Rightarrow \boxed{p = 1,\ B = b - a,\ q = 1/2}$.

Также утверждение теоремы очевидно для метода простой итерации:

$$|\varepsilon_{n+1}| = |\varphi(x_n) - \varphi(\xi)| \leqslant \max_{[a,b]}|\varphi'(x)| \cdot |\varepsilon_n| \Rightarrow \boxed{p = 1,\ C = \max_{[a,b]}|\varphi'(x)|}.$$

Далее, в неравенстве (II.8) перейдем к пределу при $k \to \infty$ и получим

$$|\varepsilon_n| \equiv |\xi - x_n| \leqslant \frac{|x_1 - x_0|}{1 - C}C^n \Rightarrow \boxed{q = C,\ B = \frac{|x_1 - x_0|}{1 - C}}.$$

Теорему для *метода хорд* докажем в случае (II.2), установив двойное неравенство:

$$x_n - \xi > x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n) - f(\xi)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \geqslant \frac{m_1(x_n - \xi)}{M_1(x_n - a)}(x_n - a) = \frac{m_1}{M_1}(x_n - \xi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 < -\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - \xi} \leqslant -\frac{m_1}{M_1} \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - \xi} \leqslant 1 - \frac{m_1}{M_1}.$$

Учитывая подобие треугольников с вершинами $\big((a, f(a)), (x_n, f(x_n)), (x_n, f(a))\big)$ и $\big((x_{n+1}, 0), (x_n, f(x_n)), (x_n, 0)\big)$, а также доказанное выше неравенство, получаем

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)/(x_n - \xi)}{(f(x_n) - f(a))/(x_n - a)}(x_n - \xi) = \varepsilon_n -$$
$$- \frac{f(x_n)/(x_n - \xi)}{f(x_n)/(x_n - x_{n+1})}\varepsilon_n = \left(1 - \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - \xi}\right)\varepsilon_n \leqslant \left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)\varepsilon_n \Rightarrow \boxed{p = 1,\ C = 1 - \frac{m_1}{M_1}}.$$

Известно, что метод Ньютона особенно эффективен в малой окрестности корня. Поэтому проверим теорему для случая $|\varepsilon_n| \ll 1$. Используем константы $M_2 \equiv \max_{[a,b]}|f''(x)|$, $m_1 \equiv \min_{[a,b]}|f'(x)|$, и первые слагаемые рядов Тейлора в окрестности корня ξ ($f(\xi) = 0$) для функции $f(x)$ и для функции $f'(x)$:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \varepsilon_n - \frac{f(\xi + \varepsilon_n)}{f'(\xi + \varepsilon_n)} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n f'(\xi) + 1/2\varepsilon_n^2 f''(\xi) + O(\varepsilon_n^3)}{f'(\xi) + \varepsilon_n f''(\xi) + O(\varepsilon_n^2)} =$$

$$= \frac{1/2\varepsilon_n^2 f''(\xi) + O(\varepsilon_n^3)}{f'(\xi) + O(\varepsilon_n)} = \frac{1/2 f''(\xi) + O(\varepsilon_n)}{f'(\xi) + O(\varepsilon_n)}\varepsilon_n^2 \Rightarrow |\varepsilon_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}\varepsilon_n^2.$$

Если $C < 1$, то: $\boxed{p = 2,\ C = \frac{M_2}{2m_1},\ q = C^{1/(p-1)}|\varepsilon_0| = \frac{M_2}{2m_1}|\varepsilon_0|,\ |\varepsilon_n| \leqslant C^{-1}q^{2^n}}$. ▲

5.2 Метод Ньютона для случая кратных корней

Покажем, что метод II.2 в случае кратного корня является методом первого порядка ($p = 1$). Действительно, если $f'(\xi) = f(\xi) = 0$, то

$$\begin{cases} f(x_n) = \dfrac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\xi) + o(\varepsilon_n^3), \\ f'(x_n) = \varepsilon_n f''(\xi) + o(\varepsilon_n). \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2 f''(\xi)/2 + o(\varepsilon_n^2)}{\varepsilon_n f''(\xi) + o(\varepsilon_n)} =$$

$$= \frac{\varepsilon_n^2 f''(\xi)/2 + o(\varepsilon_n^2)}{\varepsilon_n f''(\xi) + o(\varepsilon_n)} = \frac{\varepsilon_n}{2}\frac{f''(\xi) + o(1)}{f''(\xi) + o(1)} \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}| = \frac{|\varepsilon_n|}{2}\frac{|f''(\xi) + o(1)|}{|f''(\xi) + o(1)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\varepsilon_n|}{2}\frac{|f''(\xi)| + |o(1)|}{|f''(\xi)| - |o(1)|} \approx \frac{|\varepsilon_n|}{2} \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|\varepsilon_n| : \boxed{p = 1,\ C = \frac{1}{2} = q,\ B = |\varepsilon_0|}.$$

Теперь сделаем предположение, что с помощью выбора *неопределенного множителя* λ в формуле $x_{n+1} = x_n - \lambda \cdot f(x_n)/f'(x_n)$ возможно повысить порядок метода p, если известна кратность корня k: $f(\xi) = f'(\xi) = ... = f^{(k-1)}(\xi) = 0,\ f^{(k)}(\xi) \neq 0$. Для удобства введем обозначения $A_k = f^{(k)}(\xi)/k! \neq 0$ и по Тейлору получим:

$$\begin{cases} f(x_n) = \dfrac{\varepsilon_n^k}{k!} f^{(k)}(\xi) + \dfrac{\varepsilon_n^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) + o(\varepsilon_n^{k+1}) \equiv A_k\varepsilon_n^k + A_{k+1}\varepsilon_n^{k+1} + o(\varepsilon_n^{k+1}), \\ f'(x_n) = \dfrac{\varepsilon_n^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(\xi) + \dfrac{\varepsilon_n^k}{k!} f^{(k+1)}(\xi) + o(\varepsilon_n^k) \equiv kA_k\varepsilon_n^{k-1} + (k+1)A_{k+1}\varepsilon_n^k + o(\varepsilon_n^k). \end{cases}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \lambda\frac{A_k\varepsilon_n^k + A_{k+1}\varepsilon_n^{k+1} + o(\varepsilon_n^{k+1})}{kA_k\varepsilon_n^{k-1} + (k+1)A_{k+1}\varepsilon_n^k + o(\varepsilon_n^k)} =$$

$$= \frac{\overbrace{(k-\lambda)}^{=0} A_k\varepsilon_n^k + (k+1-\lambda)A_{k+1}\varepsilon_n^{k+1} + o(\varepsilon_n^{k+1})}{kA_k\varepsilon_n^{k-1} + (k+1)A_{k+1}\varepsilon_n^k + o(\varepsilon_n^k)} = \frac{A_{k+1}\varepsilon_n^{k+1} + o(\varepsilon_n^{k+1})}{kA_k\varepsilon_n^{k-1} + o(\varepsilon_n^{k-1})} =$$

$$= \varepsilon_n^2\frac{A_{k+1} + o(1)}{kA_k + o(1)} \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}| \leqslant \varepsilon_n^2\frac{|A_{k+1}| + |o(1)|}{|kA_k| - |o(1)|} \approx \varepsilon_n^2\frac{\left|f^{(k+1)}(\xi)\right|(k-1)!}{(k+1)!|f^{(k)}(\xi)|} \Rightarrow$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqslant \frac{M_{k+1}}{k(k+1)m_k}\varepsilon_n^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = k, p = 2, C = \frac{M_{k+1}}{k(k+1)m_k}}, M_{k+1} = \max_{[a,b]}\left|f^{(k+1)}(x)\right|$$

Определим критерий достижений заданной точности вычислений $|\varepsilon_n| = |x_n - \xi| < \varepsilon$ при условии, что все вычисления проводятся вблизи искомого корня ξ: $|\varepsilon_n| \ll 1$.

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_{n+1} - \xi - (x_n - \xi)| = |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| = \left|k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| =$$

$$= k\frac{|A_k\varepsilon_n^k + o(\varepsilon_n^k)|}{|kA_k\varepsilon_n^{k-1} + o(\varepsilon_n^{k-1})|} = |\varepsilon_n|\frac{|1 + o(1)|}{|1 + o(1)|} = |\varepsilon_n|\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \approx |\varepsilon_n|.$$

Таким образом, вблизи корня (а именно тогда метод Ньютона особенно эффективен) проверку погрешности $|\varepsilon_n|$ можно заменить проверкой величины $|x_{n+1} - x_n|$.

Определение II.6: Метод Ньютона вычисления корня кратности $k > 1$

$$x_0, \;\; x_{n+1} = x_n - k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n = 0, 1 \ldots N, \;\; |\varepsilon_{N+1}| \approx |x_{N+1} - x_N| < \varepsilon.$$

5.3 Ускорение итерационных алгоритмов с помощью процесса Эткена

Ускорить медленно сходящиеся итерационные алгоритмы можно с помощью *процесса Эткена*, при построении которого используются несколько (больше двух) соседних элементов последовательности. Для простой итерации запишем асимптотики:

$$|\varepsilon_n| \leqslant Bq^n \Rightarrow \varepsilon_{n-1} \sim Bq^{n-1}, \, \varepsilon_n \sim Bq^n, \, \varepsilon_{n+1} \sim Bq^{n+1} \Rightarrow \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \sim q \sim \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \approx \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \Leftrightarrow \frac{x_n - \xi}{x_{n-1} - \xi} \approx \frac{x_{n+1} - \xi}{x_n - \xi} \Rightarrow \xi \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}}.$$

Эту формулу используем для *уточнения* приближения x_{n+1} и получаем алгоритм

Определение II.7: Процесс Эткена для метода простой итерации

$$x_0, x_1 = \varphi(x_0), n = 1 \ldots N\colon \; x_{n+\frac{1}{2}} = \varphi(x_n), x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_{n+1/2} - x_n^2}{x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1/2}}, |x_{N+1} - x_N| < \varepsilon$$

Можно доказать, что процесс Эткена имеет второй порядок сходимости: $p = 2$.
Сформулируем общее правило численного решения алгебраических уравнений:

***Правило*: порядок действий при численном решении нелинейных уравнений**

- Используя свойства функции $f(x)$, аналитическими методами локализуем корень.
- Методом половинного деления уменьшаем отрезок локализации корня.
- Аналитически доказываем достаточные условия применимости высокоскоростных методов. Или сразу переходим к следующему пункту.
- Достигаем требуемой точности $|\xi^* - \xi| < \varepsilon$ с помощью высокоскоростных численных методов (метод Ньютона, метод Эткена или какой-нибудь другой метод).
- Анализируем полученные результаты (число шагов итерации, невязку $f(\xi^*)$ и др.)

6 Методы решения систем алгебраических уравнений (САУ)

Рассмотрим $\vec{f}(\vec{x}) \equiv (f_1(x_1, x_2 \ldots x_K), f_2(x_1, x_2 \ldots x_K) \ldots f_K(x_1, x_2 \ldots x_K))^T$ — вектор-функцию, составленную из K функций от K аргументов. Тогда $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ является системой нелинейных уравнений относительно K неизвестных $(x_1, x_2 \ldots x_K)^T$. Обозначим через $\vec{\xi} \equiv (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_K)^T$ вектор-корень системы: $\vec{f}(\vec{\xi}) = \vec{0}$.

В большинстве случаев корень вычисляется только приближенно (численно). Для системы двух нелинейных уравнений первоначальную локализацию корня можно найти через пересечение графиков функций $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$. Затем приближение корня с заданной точностью вычисляют каким-либо итерационным методом. Для дальнейшего анализа определим понятия **векторной нормы** и **матричной нормы**:

$$\|\vec{x}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant K} |x_i|, \quad \|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant K} \sum_{j=1}^{K} |A_{ij}|. \quad \text{(II.11)}$$

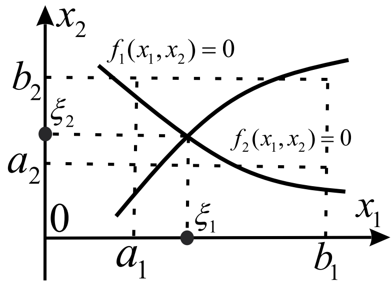

Рис. II.7. Локализация корня системы двух нелинейных уравнений

Примеры. $\|(3, -5)\| = \max\{|3|; |-5|\} = 5$; $\left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \right\| = \max\{1 + 2; 3 + 4\} = 7.$

Общие определения векторных, матричных и функциональных норм будут рассмотрены в следующей главе.

Определение II.8: Число обусловленности μ_A невырожденной матрицы A

$$\text{If} \quad \exists A^{-1} \quad \text{then} \quad \mu_A \equiv \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Определение II.9: Сходимость последовательности векторов по норме

$$\exists \lim_{n \to \infty} \vec{x}^n = \vec{\xi} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} (\vec{x}^n - \vec{\xi}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} \|\vec{x}^n - \vec{\xi}\| = 0$$

Сформулируем простые, но важные свойства норм в форме упражнения:

Упражнение № II.3

Доказать, что для векторной и матричной норм, определенных равенствами (II.11), выполнены следующие неравенства для любого K-мерного вектора $\vec{x}$ и любой квадратной матрицы A размерности $K \times K$:

- Признак векторной нормы: $\boxed{\|\vec{x}\| > 0 \Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{0}, \ \|\vec{0}\| = 0}$, $\boxed{\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|, \ \forall\alpha \in \mathbb{R}}$, $\boxed{\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$;
- Признак матричной нормы: $\boxed{\|A\| > 0 \Leftrightarrow A \neq 0, \ \|0\| = 0}$, $\boxed{\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|, \forall\alpha \in \mathbb{R}}$, $\boxed{\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|}$, $\boxed{\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|}$;
- $\boxed{\|A \cdot \vec{x}\| \leqslant \|A\|\|\vec{x}\|}$; $\boxed{\|I\| = 1}$, где I — единичная матрица;
- Если матрица А — невырождена, то: $\boxed{\mu_A \geqslant 1}$, $\boxed{\|A^{-1} \cdot \vec{x}\| \geqslant \|A\|^{-1}\|\vec{x}\|}$;

6.1 Метод простых итераций и метод Зейделя для нелинейных САУ

Уравнение $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ заменяем **эквивалентным уравнением** $\vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{x}$, т. е. выполнено $\boxed{\vec{f}(\vec{\xi}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\varphi}(\vec{\xi}) = \vec{\xi}}$. Например, можно выбрать $\vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{f}(\vec{x})$. Пусть областью локализации корня $\vec{\xi}$ является K-мерный сегмент и на нем выбран начальный вектор $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_K^0)$: $\vec{\xi}, \vec{x}^0 \in [\vec{a}, \vec{b}] \equiv [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_K, b_K]$. Тогда

Определение II.10: Метод простой итерации для нелинейных САУ

$$\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_K^0)^T, \quad \vec{x}^{n+1} = \vec{\varphi}(\vec{x}^n),\ n = 0, \dots N, \quad \|\vec{x}^{N+1} - \vec{x}^N\| < \frac{1-q}{q}\varepsilon,$$

$$\max_{\vec{x}\in[\vec{a},\vec{b}]} \|\mathfrak{D}_{\vec{\varphi}}(\vec{x})\| \leqslant q < 1, \quad \mathfrak{D}_{\vec{\varphi}}(\vec{x}) \equiv \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1\dots K}.$$

Для обоснования введем **вектор приращений $\vec{h}^n \equiv \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n = (h_1^n, h_1^n \dots h_K^n)$** и вспомогательную гладкую вектор-функцию скалярного аргумента $\vec{\Phi}(t) \equiv \vec{\varphi}(\vec{x}^n + t\vec{h}^n)$:

$$\varphi_i(\vec{x}^{n+1}) - \varphi_i(\vec{x}^n) = \Phi_i(1) - \Phi_i(0) = \Phi_i'(\vec{x}^n + \tau\vec{h}^n) = \sum_{j=1}^{K} h_j^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big|_{\vec{x}^n+\tau\vec{h}^n}, \quad \begin{matrix} 0 < \tau < 1, \\ i = 1 \dots K. \end{matrix}$$

$$\|\vec{\varphi}(\vec{x}^{n+1}) - \vec{\varphi}(\vec{x}^n)\| = \left\|\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\vec{x}^n+\tau\vec{h}^n} \cdot \vec{h}^n\right\| \leqslant \max_{\vec{x}\in[\vec{a},\vec{b}]} \|\mathfrak{D}_{\vec{\varphi}}(\vec{x})\| \|\vec{h}^n\| \leqslant q\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\| =$$

$$= q\|\vec{\varphi}(\vec{x}^n) - \vec{\varphi}(\vec{x}^{n-1})\| \leqslant q^2\|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^{n-2}\| \dots \leqslant q^n\|\vec{x}^1 - \vec{x}^0\| \equiv q^n\|\vec{h}^0\|.$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{x}^{n+k} - \vec{x}^n\| = \|(\vec{x}^{n+k} - \vec{x}^{n+k-1}) + (\vec{x}^{n+k-1} - \vec{x}^{n+k-2}) + \dots + (\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\vec{x}^{n+k} - \vec{x}^{n+k-1}\| + \|\vec{x}^{n+k-1} - \vec{x}^{n+k-2}\| + \dots + \|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\| \leqslant$$

$$\leqslant q^{n+k-1}\|\vec{h}^0\| + q^{n+k-2}\|\vec{h}^0\| + \dots + q^n\|\vec{h}^0\| = \left(q^{n+k-1} + \dots + q^n\right)\|\vec{h}^0\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|\vec{h}^0\|.$$

Установим критерий достижения заданной точности $\|\vec{x}^{N+1} - \vec{\xi}\| < \varepsilon$ (как в (II.9)):

$$\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\| = \|(\vec{x}^{n+1} - \vec{\xi}) - (\vec{x}^n - \vec{\xi})\| \geqslant \|\vec{x}^n - \vec{\xi}\| - \|x^{n+1} - \vec{\xi}\| = \|\vec{x}^n - \vec{\xi}\| -$$

$$- \|\vec{\varphi}(\vec{x}^n) - \vec{\varphi}(\vec{\xi})\| \geqslant \|\vec{x}^n - \vec{\xi}\| - q\|\vec{x}^n - \xi\| = (1-q)\|x^n - \vec{\xi}\| \geqslant$$

$$\geqslant (1-q)\frac{1}{q}\|\vec{\varphi}(x^n) - \vec{\varphi}(\vec{\xi})\| = \frac{1-q}{q}\|\vec{x}^{n+1} - \vec{\xi}\| \Rightarrow \boxed{\|\vec{x}^{n+1} - \vec{\xi}\| \leqslant \frac{q}{1-q}\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\|}$$

Определение II.11: Метод Зейделя для нелинейных алгебраических систем

$$x_1^{n+1} = \varphi_1(\vec{x}^n),\ x_2^{n+1} = \varphi_2(x_1^{n+1}, x_2^n, \dots, x_K^n), \dots x_K^{n+1} = \varphi_K(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_{K-1}^{n+1}, x_K^n),$$
$$\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_K^0)^T, \quad n = 0, \dots N, \quad \|\vec{x}^{N+1} - \vec{x}^N\| < \varepsilon.$$

Пример II.5 (*Метод простых итераций и метод Зейделя* [3]).

$$\begin{cases} f(x,y) \equiv \sin(x-0.6) - 2y - 1.6 = 0 \\ g(x,y) \equiv 3x - \cos y - 0.9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\cos y}{3} + 0.3 \equiv \varphi(x,y) \\ y = \dfrac{\sin(x-0.6)}{2} - 0.8 \equiv \psi(x,y) \end{cases}$$

Графически локализуем и определим решение системы. Примем $x^0 = 0.4$, $y^0 = -1.3$. Найдем норму матрицы Якоби:

$$\mathfrak{D}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\sin y}{3} \\ \dfrac{\cos(x-0.6)}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\|\mathfrak{D}\| = \max\left\{\dfrac{|\cos(x-0.6)|}{2}, \dfrac{|\sin y|}{3}\right\} \leqslant \dfrac{1}{2} \equiv q.$

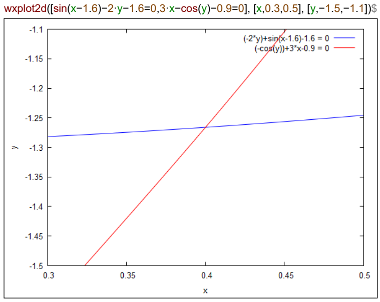

Рис. II.8. Локализация корня в программе wxMAXIMA.

Ниже в таблице представлены результаты расчетов методом простой итерации и методом Зейделя для $\varepsilon = 10^{-3}$:

n	Метод простой итерации			Метод Зейделя		
	x^{n+1}	y^{n+1}	$\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\|$	x^{n+1}	y^{n+1}	$\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\|$
0	0.3892	-0.8993	0.4007	0.3892	-0.9046	0.3954
1	0.5074	-0.9046	0.1182	0.5060	-0.8469	0.1168
2	0.5060	-0.8462	0.0584	0.5208	-0.8396	0.0148
3	0.5209	-0.8469	0.0149	0.5226	-0.8387	0.0018
4	0.5208	-0.8395	0.0074	$\boxed{0.523}$	$\boxed{-0.839}$	0.0002
5	0.5226	-0.8396	0.0019			
6	$\boxed{0.523}$	$\boxed{-0.839}$	0.0009			

6.2 Метод Ньютона для нелинейных САУ

Определение II.12: Метод Ньютона для нелинейных САУ

$$\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_K^0)^T, \quad \vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^n) \cdot \vec{f}(\vec{x}^n), \quad n = 0, \ldots N,$$

$$\|\vec{x}^{N+1} - \vec{x}^N\| < \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad \mu \geqslant \max_{\vec{x}\in[\vec{a},\vec{b}]} \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x})\| \max_{\vec{x}\in[\vec{a},\vec{b}]} \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x})\|, \quad \mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}) \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1\ldots K}.$$

Запишем это определение в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ \vdots \\ x_K^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{n} \\ x_2^{n} \\ \vdots \\ x_K^{n} \end{pmatrix} - \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_K}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_K}{\partial x_K} \end{pmatrix}^{-1}\right|_{\vec{x}^n} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_1^n, x_2^n, \dots, x_K^n) \\ f_2(x_1^n, x_2^n, \dots, x_K^n) \\ \vdots \\ f_K(x_1^n, x_2^n, \dots, x_K^n) \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_K^0), \quad n = 0, 1 \dots N, \quad \|\vec{x}^{N+1} - \vec{x}^N\| < \mu^{-1}\varepsilon.$$

Для обоснования метода Ньютона используем вектор приращений $\vec{h}^n = \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n$ и вспомогательную гладкую вектор-функцию $\vec{H}(t) \equiv \vec{f}(\vec{x}^n + t\vec{h}^n)$ вещественного аргумента $t \in [0, 1]$. Выпишем первые слагаемы ряда Тейлора:

$$\vec{f}(\vec{x}^{n+1}) \equiv \vec{H}(1) = \vec{H}(0) + \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right|_{t=0} \cdot 1 + \vec{o}(\|\vec{h}^n\|) = \vec{H}(0) + \left(\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right)_{t=0} \cdot \vec{h}^n + \vec{o}(\|\vec{h}^n\|) =$$

$$= \vec{f}(\vec{x}^n) + \left(\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right)_{\vec{x}^n} \cdot \vec{h}^n + \vec{o}(\|\vec{h}^n\|) = \vec{f}(\vec{x}^n) + \mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}^n) \cdot \vec{h}^n + \vec{o}(\|\vec{h}^n\|) \Rightarrow$$

$$\vec{f}(\vec{x}^{n+1}) \approx \vec{f}(\vec{x}^n) + \mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}^n) \cdot (\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^n) \cdot \vec{f}(\vec{x}^n).$$

Критерий сходимости метода получим с помощью неравенств из упражнения II.3. Используем вспомогательную функцию $\vec{E}(t) \equiv \vec{f}(\vec{\xi} + t\vec{\varepsilon}^n)$, $\vec{\varepsilon}^n = \vec{x}^n - \vec{\xi}$:

$$\|\vec{f}(\vec{x}^n) - \vec{f}(\vec{\xi})\| = \|\vec{E}(1) - \vec{E}(0)\| = \|\vec{E}'(\tau) \cdot 1\| = \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{\xi} + \tau\vec{\varepsilon}^n) \cdot \vec{\varepsilon}^n\| \Rightarrow$$

$$\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\| = \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^n) \cdot \vec{f}(\vec{x}^n)\| \geqslant \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}^n)\|^{-1} \|\vec{f}(\vec{x}^n)\| =$$

$$= \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}^n)\|^{-1} \|\vec{f}(\vec{x}^n) - \vec{f}(\vec{\xi})\| = \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}^n)\|^{-1} \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{\xi} + \tau\vec{\varepsilon}^n) \cdot \vec{\varepsilon}^n\| \geqslant$$

$$\geqslant \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}^n)\|^{-1} \|\mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^n + \tau\vec{\varepsilon}^n)\|^{-1} \|\vec{\varepsilon}^n\| \geqslant \mu^{-1}\|\vec{\varepsilon}^n\| \Rightarrow \boxed{\|\vec{\varepsilon}^n\| \leqslant \mu\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\|}$$

Пример II.6 (*Метод Ньютона для примера* II.5)**.** Обозначим $\det \equiv \cos(x - 0.6)\sin y + 6$

$$\mathfrak{D}_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x - 0.6) & -2 \\ 3 & \sin y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1} = \frac{1}{\det(x, y)} \begin{pmatrix} \sin y & 2 \\ -3 & \cos(x - 0.6) \end{pmatrix}$$

$$\max_{\vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]} \left\|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x})\right\| = \left\|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(0, \frac{\pi}{2})\right\| = 4; \; \max_{\vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]} \left\|\mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x})\right\| = \left\|\mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(0.6; \frac{3\pi}{2})\right\| = \frac{3 + 1}{6 - 1} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{16}{5} = 3.2 \Rightarrow \boxed{\left\|\vec{x}^{N+1} - \vec{x}^N\right\| < \frac{5}{16}\varepsilon}$$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -1.3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} - \mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x^n, y^n) \\ g(x^n, y^n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} - \left(\begin{array}{c} \dfrac{\sin y^n \Big(\sin(x^n - 0.6) - 2y^n - 1.6\Big) + 2\Big(3x^n - \cos y^n - 0.9\Big)}{\cos(x^n - 0.6)\sin y^n + 6} \\ \\ \dfrac{-3\Big(\sin(x^n - 0.6) - 2y^n - 1.6\Big) + \cos(x^n - 0.6)\Big(3x^n - \cos y^n - 0.9\Big)}{\cos(x^n - 0.6)\sin y^n + 6} \end{array} \right).$$

Результаты расчетов приведены в таблице:

n	x^{n+1}	y^{n+1}	$\lVert\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\rVert$	$\lVert\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x}^n)\rVert \lVert\mathfrak{D}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^n)\rVert$
0	0.5399	-0.8308	0.4692	3.1203
1	$\boxed{0.523}$	$\boxed{-0.839}$	0.0170	2.8401
2	0.523	-0.839	0.00001	2.8456

Для рассмотренного примера метод простой итерации оказался самым медленным, а быстрее всех сошелся к корню метод Ньютона.