1 Метод прогонки

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_i & c_i & -b_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Определим прогоночные коэффициенты α_i, β_i, чтобы выполнялась система:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -\alpha_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & -\alpha_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i}$$

Установим *рекуррентные формулы* для прогоночных коэффициентов. Из нулевого уравнения получаем:

$$c_0 u_0 - b_0 u_1 = f_0 \Rightarrow u_0 = \frac{b_0}{c_0} u_1 + \frac{f_0}{c_0} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},\ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}}.$$

Далее применим метод математической индукции. Предположим, что установлены формулы для номера i, т. е. определено равенство $u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i$. Чтобы определить формулы для α_{i+1} и β_{i+1} рассмотрим вместе с этим равенством i-ое уравнение исходной системы. Умножим первое уравнение на a_i и сложим со вторым:

$$\begin{cases} u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i \\ -a_i u_{i-1} + c_i u_i - b_i u_{i+1} = f_i \end{cases} \Rightarrow u_i = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i} u_{i+1} + \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i},$$

откуда получаем

$$\boxed{\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}}$$

И наконец, обработаем последнее уравнение системы:

$$\begin{cases} u_{n-1} = \alpha_n u_n + \beta_n \\ -a_n u_{n-1} + c_n u_n = f_n \end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{f_n + a_n \beta_n}{c_n - a_n \alpha_n} \Rightarrow \boxed{\beta_{n+1} = \frac{f_n + a_n \beta_n}{c_n - a_n \alpha_n}}$$

Окончательно получаем *правило метода левой прогонки*:

Правило **I.1: метод левой прогонки**

- Прямой ход прогонки: $\alpha_1 = \dfrac{b_0}{c_0}$, $\alpha_{i+1} = \dfrac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}$, $i = 1\dots n-1$, $\beta_1 = \dfrac{f_0}{c_0}$, $\beta_{i+1} = = \dfrac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}$, $i = 1\dots n$.
- Обратный ход прогонки: $u_n = \beta_{n+1}$, $u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i$, $i = n, n-1\dots 1$.
- Число арифметических действий равно $O(n)$ (в общем методе Гаусса — $O(n^3)$).

2 Аппроксимация (интерполирование) сплайнами

Рассмотрим сетку на отрезке $\mathrm{Grid}_h[a,b]$ (не обязательно равномерную).

Определение I.1: Сплайн

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a,b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Мы в качестве примера рассмотрим интерполирование сеточной функции кубическим сплайном $S_3(x) \in C^2[a,b]$. По определению, $S_3(x) = A_i + B_i(x - x_{i-1}) + C_i(x - - x_{i-1})^2 + D_i(x - x_{i-1})^3$, $i = 1,2\dots n$. Для однозначного определения коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i требуется $4n$ уравнений (т. к. число частичных отрезков равно n). Условие совпадения сплайна с сеточной функцией в узлах сетки даёт нам $n+1$ уравнение вида $\boxed{S_3(x_i) = u_i,\ i = 0,1\dots n}$. Далее, из непрерывности сплайна и двух его производных во *внутренних* узлах сетки получаем ещё $3(n-1)$ уравнений вида $\boxed{S_3(x_{i-0}) = S_3(x_{i+0}),\ S_3'(x_{i-0}) = S_3'(x_{i+0}),\ S_3''(x_{i-0}) = S_3''(x_{i+0}),\ i = 1,2\dots n-1}$. Всего у нас $4n-2$ уравнения. Для замыкания системы не хватает ещё двух уравнений. Примем дополнительными условиями $\boxed{S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0}$ (эти условия называются **естественными**).

Покажем однозначную разрешимость полученной задачи. Из определения кубического сплайна делаем вывод, что $S_3''(x)$ является *непрерывной кусочно-линейной функцией* и, значит, может быть записана так:

$$S_3''(x) = k_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + k_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i},\ \ x \in [x_{i-1}, x_i],\ \ k_i = S_3''(x_i),\ \ h_i = x_i - x_{i-1}.$$

В результате интегрирования получаем (p_i, q_i — константы интегрирования):

$$S_3(x) = k_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + k_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + p_i\frac{x_i - x}{h_i} + q_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i},\ \ x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Подставим в формулу узлы сетки x_{i-1} и x_i и учтем условие интерполирования:

$$u_{i-1} = k_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + p_i,\ \ u_i = k_i\frac{h_i^2}{6} + q_i \ \ \Rightarrow p_i = u_{i-1} - k_{i-1}\frac{h_i^2}{6},\ \ q_i = u_i - k_i\frac{h_i^2}{6}.$$

$$S_3(x) = \frac{x_i - x}{h_i}u_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i}u_i + k_{i-1}\frac{(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)}{6h_i} + \\ + k_i\frac{(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})}{6h_i}, \ x \in [x_{i-1}, x_i], \ i = 1, 2 \dots n.$$

Вычислим первую производную на частичных отрезках сетки:

$$S_3'(x) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} + k_{i-1}\frac{h_i^2 - 3(x_i - x)^2}{6h_i} + k_i\frac{3(x - x_{i-1})^2 - h_i^2}{6h_i}, \ x \in [x_{i-1}, x_i].$$

$$\hat{S}_3'(x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} + k_i\frac{h_{i+1}^2 - 3(x_{i+1} - x)^2}{6h_{i+1}} + k_{i+1}\frac{3(x - x_i)^2 - h_{i+1}^2}{6h_{i+1}}, \ x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Условие непрерывности первой производной во внутренних узлах $S_3'(x_i) = \hat{S}_3'(x_i)$ даёт нам $(n-1)$ уравнение для определения $(n+1)$ коэффициента k_i:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} + k_{i-1}\frac{h_i}{6} + k_i\frac{h_i}{3} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - k_i\frac{h_{i+1}}{3} - k_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}.$$

$$k_{i-1}\frac{h_i}{6} + k_i\frac{h_i + h_{i+1}}{3} + k_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, \ i = 1, 2 \dots n-1.$$

Учитывая *естественное краевое условие* $k_0 = k_n = 0$, получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{h_i}{6} & \frac{h_i+h_{i+1}}{3} & \frac{h_{i+1}}{6} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_{n-2} \\ k_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u_2-u_1}{h_2} - \frac{u_1-u_0}{h_1} \\ \frac{u_3-u_2}{h_3} - \frac{u_2-u_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h_i} \\ \vdots \\ \frac{u_{n-1}-u_{i-2}}{h_{n-1}} - \frac{u_{i-2}-u_{i-3}}{h_{n-2}} \\ \frac{u_n-u_{n-1}}{h_n} - \frac{u_{n-1}-u_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

```
/* Кубический сплайн. Результаты работы программы:
 ========================
|  n  |     norma     |   kappa  |
--------------------------------
|      5|      0.000447|          -     |
|     10|      2.57e-05|     0.0574|
|     20|      1.59e-06|     0.0619|
|     40|      9.92e-08|     0.0624|
|     80|      6.19e-09|     0.0625|
|    160|      3.87e-10|     0.0625|
|    320|      2.42e-11|     0.0625|
|    640|      1.55e-12|     0.0641|
|   1280|      1.34e-13|     0.0865|
|   2560|      2.87e-13|       2.14|*/

#include <iostream>
#include <math.h>
#include <iomanip>
#include <fstream>
using namespace std;
const int N=2561;

double v(double x){return sin(x);}

int main(){
cout.setf(ios::left);
ofstream fout;
fout.open("spline.out");
int i, n;
double x[N], a[N], b[N], c[N], k[N], S3[N], f[N], u[N], alpha[N], beta[N];
double norm0 = 0., norm = 0., A = 0., B = M_PI, h, kappa, tmp;
fout<<" ================================"<<endl;
fout<<" |  n  |     norma     |   kappa  |"<<endl;
fout<<" --------------------------------"<<endl;
for (n=5; n<N; n=2*n){

h = (B - A)/n;

for(i=0; i<=n; i++){
x[i] = A + i*h; // Массив узлов
u[i] = v(x[i]);} // Массив значений сеточной функции

for(i=1; i<n; i++){
f[i] = (u[i-1] - 2.*u[i] + u[i+1])/h; // Правый столбец
a[i] = -h/6.; c[i] = h*2./3; b[i] = -h/6.;}
```

```
alpha[2] = b[1]/c[1]; beta[2] = f[1]/c[1]; // Прогоночные коэффициенты

for(i=2; i<n; i++){
  tmp = c[i] - a[i]*alpha[i];
  alpha[i+1] = b[i]/tmp;
  beta[i+1] = (f[i] + a[i]*beta[i])/tmp;
}

k[0] = 0; k[n] = 0; // Естественные краевые условия
k[n-1] = beta[n]; // Решение линейной системы
for(i=n-1; i>1; i--)k[i-1] = alpha[i]*k[i] + beta[i];

for (i=1; i<=n; i++){// Вычисление сплайна во внутренних точках отрезков
  tmp = x[i-1] + h/2.;
  S3[i] = ((x[i]-tmp)*u[i-1]+(tmp-x[i-1])*u[i])/h + k[i-1]*(pow((x[i]-tmp),3.)//
  -h*h*(x[i]-tmp))/(6*h) + k[i]*(pow((tmp-x[i-1]),3.) - h*h*(tmp-x[i-1]))/(6*h);
}
norm = fabs(S3[1] - v(x[0]+h/2.)); // Оценка равномерной нормы
for (i=2; i<=n; i++){
  tmp = x[i] - h/2.;
  if(fabs(S3[i] - v(tmp)) > norm) norm = fabs(S3[i] - v(tmp));
}
if(n==5)fout<<"|"<<setw(6)<<n<<"|"<<setw(13)<<setprecision(3)<<norm<<"|"<<//
setw(10)<<"-"<<"|"<<endl;
if(n>5){
  kappa = norm / norm0; // Изменение нормы с измельчением сетки
  fout<<"|"<<setw(6)<<n<<"|"<<setw(13)<<setprecision(3)<<norm<<"|"<<//
  setw(10)<<kappa<<"|"<<endl;
}
norm0 = norm;
}
return 0; }
```

Листинг I.1. Аппроксимация функции $\sin(x)$ на отрезке $[0;\pi]$ кубическим сплайном

Упражнение № I.1

Написать программу вычисления кубического сплайна функции $\sin(x)$ на отрезке $[0;\pi]$ с использованием неравномерной сетки. В качестве узлов сетки выбрать нули приведенного полинома Чебышева. Исследовать изменение равномерной нормы ошибки интерполяции с уменьшением нормы сетки.

3 Краевая задача ОДУ второго порядка

Определение I.2: Уравнение $u^{(d)} = f(x, u(x), u'(x)\dots u^{(d-1)}(x))$: задача Коши и краевая задача на отрезке $[a, b]$

- **Задача Коши** заключается в определении решения ОДУ при условии, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ заданы значения функции u и её младших производных: $u(x_0) = u_0$, $u'(x_0) = u_1 \dots u^{(d-1)}(x_0) = u_{d-1}$. Эти дополнительные условия также называются **начальными значениями**.
- **Краевая задача** — это задача определения решения ОДУ при условии, что дополнительные условия заданы в двух и более точках отрезка $x \in [a, b]$.

Теорема Коши утверждает существование и единственность задачи Коши при условии, что функция $f(x, u' \dots u^{(d-1)})$ является достаточно «хорошей» (например, если f удовлетворяет условию Липшица по аргументам u, $u' \dots u^{(d-1)}$) и для довольно широкого диапазона начальных значений $u_0, u_1 \dots u_{d-1}$. Для приближенного решения задачи Коши разработаны высокоэффективные вычислительные методы (например, методы Рунге-Кутта, и др.). Эти методы доступны в стандартных вычислительных пакетах, типа Octave, Matlab и др. Теория и практика решения краевых задач являются значительно более сложными, и зачастую уравнения, «хорошие» для задачи Коши, не являются такими для краевых задач. В данном примере, несмотря на то, что уравнение является *линейным, однородным, с постоянными коэффициентами*, решения нет:

$$\begin{cases} u''(x) = -u(x), \ \ x \in (0, \pi) \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \emptyset.$$

Далее рассмотрим метод сеток в применении к решению краевой задачи для ОДУ:

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = g(x), \ \ x \in (a, b), \tag{I.1}$$

$$\lambda_a u(x) + \mu_a u'(x)\big|_{x=a} = \psi_a, \qquad \lambda_b u(x) + \mu_b u'(x)\big|_{x=b} = \psi_b. \tag{I.2}$$

Решение начинаем с построения сетки $\mathrm{Grid}_h[a, b]$, $h = (b - a)/n$ (для простоты — равномерной). Далее вычисляем проекции функций на сетку: $p_i \equiv [p]_i \equiv p(x_i)$, $q_i \equiv [q]_i \equiv q(x_i)$, $g_i \equiv [g]_i \equiv g(x_i)$, $i = 0, 1 \dots n$. Приближенным решением задачи является числовая последовательность u_i, которая во всех *внутренних* узлах удовлетворяет системе линейных уравнений:

$$\begin{matrix} \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = g_i, \Leftrightarrow \\ -\Big(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_i}{2h}\Big)u_{i-1} + \Big(\dfrac{2}{h^2} - q_i\Big)u_i - \Big(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_i}{2h}\Big)u_{i+1} = -g_i. \end{matrix} \quad i = 1, 2 \dots n - 1 \tag{I.3}$$

Рассмотрим различные случаи граничных условий.

Случай первый: $\lambda_a \neq 0$, $\lambda_b \neq 0$, $\mu_a = \mu_b = 0$ (*задача Дирихле*). С помощью граничных условий преобразуем первое и последнее уравнения в системе (I.3):

$$x_0 = a \Rightarrow u_0 = \psi_a/\lambda_a, \qquad x_n = b \Rightarrow u_n = \psi_b/\lambda_b;$$

$$i=1:\quad \frac{u_2-2u_1+\psi_a/\lambda_a}{h^2}+p_1\frac{u_2-\psi_a/\lambda_a}{2h}+q_1u_1=g_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2}-q_1\Big)}_{c_1}u_1-\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2}+\frac{p_1}{2h}\Big)}_{b_1}u_2=\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2}-\frac{p_1}{2h}\Big)\frac{\psi_a}{\lambda_a}-g_1}_{f_1};$$

$$i\in[2,n-2]:\quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2}-\frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i}u_{i-1}+\underbrace{\Big(\frac{2}{h^2}-q_i\Big)}_{c_i}u_i-\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2}+\frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i}u_{i+1}=\underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i=n-1:\quad \frac{\psi_b/\lambda_b-2u_{n-1}+u_{n-2}}{h^2}+p_{n-1}\frac{\psi_b/\lambda_b-u_{n-2}}{2h}+q_{n-1}u_{n-1}=g_{n-1}$$

$$\Rightarrow -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2}-\frac{p_{n-1}}{2h}\Big)}_{a_{n-1}}u_{n-2}+\underbrace{\Big(\frac{2}{h^2}-q_{n-1}\Big)}_{c_{n-1}}u_{n-1}=\underbrace{\frac{\psi_b}{\lambda_b}\Big(\frac{1}{h^2}+\frac{p_{n-1}}{2h}\Big)-g_{n-1}}_{f_{n-1}}.$$

Матрица линейной системы является трехдиагональной матрицей *размерности n-1*, так что для ее решения можно применить метод прогонки:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\ -a_2 & c_2 & -b_2 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & -a_i & c_i & -b_i & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-2} & c_{n-2} & -b_{n-2}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_i\\ \vdots\\ u_{n-2}\\ u_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_i\\ \vdots\\ f_{n-2}\\ f_{n-1}\end{pmatrix}$$

Случай второй: $\boldsymbol{\mu_a\neq 0,\ \mu_b=0,\ \lambda_b\neq 0}$ (*смешанная задача*). Чтобы вычислить порядок аппроксимации *одного* уравнения системы (I.3), надо вместо u_i подставить проекцию $[u]_i$ *точного* решения уравнения (I.1). Затем проекцию функции g_i заменить из уравнения (I.1):

$$\Big|\frac{[u]_{i+1}-2[u]_i+[u]_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{[u]_{i+1}-[u]_{i-1}}{2h}+q_i[u]_i-g_i\Big|=$$
$$=\Big|\frac{[u]_{i+1}-2[u]_i+[u]_{i-1}}{h^2}-[u'']_i+p_i\Big(\frac{[u]_{i+1}-[u]_{i-1}}{2h}-[u']_i\Big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|\frac{[u]_{i+1}-2[u]_i+[u]_{i-1}}{h^2}-[u'']_i\Big|+|p_i|\Big|\frac{[u]_{i+1}-[u]_{i-1}}{2h}-[u']_i\Big|=O(h^2)$$

Левое краевое условие (I.2) можно аппроксимировать с помощью правой разностной производной ∂_+: $\lambda_a u_0+\mu_a\partial_+u_0=\psi_a$. При вычислении порядка аппроксимации заменим ψ_a из (I.2): $|\lambda_a[u]_0+\mu_a\partial_+[u]_0-\psi_a|=|\mu_a|\cdot|\partial_+[u]_i-[u']_i|=O(h)$. В итоге получаем: $\|(\text{I.3})\|_\infty=\max\{O(h^2),O(h)\}=O(h)$. Таким образом, аппроксимация краевого условия с первым порядком *понизила* общий порядок аппроксимации всей расчетной схемы. Для сохранения общего второго порядка аппроксимации используем два различных метода.

Метод несимметричной разностной производной основан на построении формулы первой разностной производной на шаблоне валентности $(2,0)$ (т. е. на шаблоне $(i, i+1, i+2)$) со вторым порядком аппроксимации.

$$\begin{cases} [u]_i = [u]_i \,\| \times C_0 \\ [u]_{i+1} = [u]_i + h[u']_i + \frac{h^2}{2}[u'']_i + O(h^3) \| \times C_1 \\ [u]_{i+2} = [u]_i + 2h[u']_i + 2h^2[u'']_i + O(h^3) \| \times C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [u]_i \,\| \; C_0 + C_1 + C_2 = 0 \\ [u']_i \,\| \; C_1 h + 2C_2 h = 1 \\ [u'']_i \,\| \; \frac{h^2}{2}C_1 + 2h^2 C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_0 = \frac{-3}{2h},\ C_1 = \frac{2}{h},\ C_2 = \frac{-1}{2h} \Rightarrow \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2h}$$ Получили аппроксимацию левого граничного условия:

$$\lambda_a u_0 + \mu_a \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} = \psi_a \Leftrightarrow \Big(-\frac{3\mu_a}{2h} + \lambda_a\Big)u_0 + \frac{2\mu_a}{h}u_1 - \frac{\mu_a}{2h}u_2 = \psi_a.$$

Полученное уравнение нарушает трехдиагональную структуру матрицы. Для исправления возникшего недостатка рассмотрим это уравнение вместе с уравнением, которое записано для внутреннего узла с номером $i = 1$. Исключим из уравнений u_2:

$$\begin{cases} \Big(-\frac{3\mu_a}{2h} + \lambda_a\Big)u_0 + \frac{2\mu_a}{h}u_1 - \frac{\mu_a}{2h}u_2 = \psi_a & \| \times -\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_1}{2}\Big) \neq 0 \\ -\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\Big)u_0 + \Big(\frac{2}{h^2} - q_1\Big)u_1 - \Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\Big)u_2 = -g_1 & \| \times \frac{\mu_a}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u_0 \| - \Big(-\frac{3\mu_a}{2h} + \lambda_a\Big)\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_1}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\Big)\frac{\mu_a}{2} = \frac{\mu_a}{h^2} + \frac{\mu_a p_1 - \lambda_a}{h} - \frac{\lambda_a p_1}{2};$$

$$u_1 \| - \frac{2\mu_a}{h}\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_1}{2}\Big) + \Big(\frac{2}{h^2} - q_1\Big)\frac{\mu_a}{2} = -\frac{\mu_a}{h^2} - \frac{\mu_a p_1}{h} - \frac{\mu_a q_1}{2}.$$

Заметим, что в случае $(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}) = 0$ для восстановления трехдиагональной структуры матрицы достаточно переставить уравнения местами.

В итоге, получили систему линейных уравнений:

$$\underbrace{\Big(\frac{\mu_a}{h^2} + \frac{\mu_a p_1 - \lambda_a}{h} - \frac{\lambda_a p_1}{2}\Big)}_{c_0}u_0 - \underbrace{\Big(\frac{\mu_a}{h^2} + \frac{\mu_a p_1}{h} + \frac{\mu_a q_1}{2}\Big)}_{b_0}u_1 = \underbrace{-\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_1}{2}\Big)\psi_a - \frac{\mu_a}{2}g_1}_{f_0};$$

$$i \in [1, n-2]: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i}u_{i-1} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_i\Big)}_{c_i}u_i - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i}u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n-1: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\Big)}_{a_{n-1}}u_{n-2} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_{n-1}\Big)}_{c_{n-1}}u_{n-1} = \underbrace{\frac{\psi_b}{\lambda_b}\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\Big) - g_{n-1}}_{f_{n-1}}.$$

Матрица линейной системы является трехдиагональной матрицей *размерности n*, так что для ее решения можно применить метод прогонки:

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_i & c_i & -b_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-2} & c_{n-2} & -b_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Метод фиктивного узла использует дополнительный узел, не принадлежащий отрезку $[a,b]$: $\boldsymbol{x_{-1} = a - h}$. Мы предполагаем, что дифференциальная модель также выполнена на интервале $(a-h,b)$. Поэтому в узле a запишем разностный аналог уравнения (I.1) и краевое условие (I.2), используя центральную разностную производную второго порядка аппроксимации на симметричном шаблоне $(i-1, i, i+1)$.

$$i = 0 \Rightarrow \lambda_a u_0 + \mu_a \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \psi_a \Leftrightarrow -\frac{\mu_a}{2h} u_{-1} + \lambda_a u_0 + \frac{\mu_a}{2h} u_1 = \psi_a.$$

Далее исключим из уравнений *фиктивное* узловое значение u_{-1}.

$$\begin{cases} -\dfrac{\mu_a}{2h} u_{-1} + \lambda_a u_0 + \dfrac{\mu_a}{2h} u_1 = \psi_a & \| \times -\Big(\dfrac{1}{h} - \dfrac{p_0}{2}\Big) \neq 0 \\ -\Big(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_0}{2h}\Big) u_{-1} + \Big(\dfrac{2}{h^2} - q_0\Big) u_0 - \Big(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_0}{2h}\Big) u_1 = -g_0 & \| \times \dfrac{\mu_a}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u_0 \| -\lambda_a \Big(\frac{1}{h} - \frac{p_0}{2}\Big) + \Big(\frac{2}{h^2} - q_0\Big) \frac{\mu_a}{2} = \frac{\mu_a}{h^2} - \frac{\lambda_a}{h} + \frac{\lambda_a p_0 - \mu_a q_0}{2};$$

$$u_1 \| -\frac{\mu_a}{2h} \Big(\frac{1}{h} - \frac{p_0}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_0}{2h}\Big) \frac{\mu_a}{2} = -\frac{\mu_a}{h^2}.$$

Если $(\frac{1}{h^2} - \frac{p_0}{2h}) = 0$, то элемент u_{-1} уже исключен. Итак, получаем систему:

$$i = 0: \quad \underbrace{\Big(\frac{\mu_a}{h^2} - \frac{\lambda_a}{h} + \frac{\lambda_a p_0 - \mu_a q_0}{2}\Big)}_{c_0} u_0 - \underbrace{\frac{\mu_a}{h^2}}_{b_0} u_1 = \underbrace{-\Big(\frac{1}{h} - \frac{p_0}{2}\Big)\psi_a - \frac{\mu_a}{2} g_0}_{f_0};$$

$$i \in [1, n-2]: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i} u_{i-1} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_i\Big)}_{c_i} u_i - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i} u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n-1: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\Big)}_{a_{n-1}} u_{n-2} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_{n-1}\Big)}_{c_{n-1}} u_{n-1} = \underbrace{\frac{\psi_b}{\lambda_b}\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\Big) - g_{n-1}}_{f_{n-1}}.$$

Матрица линейной системы является трехдиагональной матрицей *размерности n*, так что для ее решения можно применить метод прогонки:

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_i & c_i & -b_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-2} & c_{n-2} & -b_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Случай третий: $\mu_a = 0$, $\mu_b \neq 0$, $\lambda_a \neq 0$ (*смешанная задача*).

Для аппроксимации $u'(b)$ со вторым порядком аппроксимации используем два различных метода. **Метод несимметричной разностной производной** основан на построении формулы первой разностной производной на шаблоне валентности $(0, 2)$ (т. е. на шаблоне $(i-2, i-1, i)$) со вторым порядком аппроксимации.

$$\begin{cases} [u]_{i-2} = [u]_i - 2h[u']_i + 2h^2[u'']_i + o(h^2) \| \times C_{-2} \\ [u]_{i-1} = [u]_i - h[u']_i + \frac{h^2}{2}[u'']_i + o(h^2) \| \times C_{-1} \\ [u]_i = [u]_i \| \times C_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [u]_i \,\|\, C_{-2} + C_{-1} + C_0 = 0 \\ [u']_i \,\| -2C_{-2}h - C_{-1}h = 1 \Rightarrow \\ [u'']_i \,\|\, 2h^2 C_{-2} + \frac{h^2}{2} C_{-1} = 0 \end{cases}$$

$$C_{-2} = \frac{1}{2h},\ C_{-1} = \frac{-2}{h},\ C_0 = \frac{3}{2h} \Rightarrow \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i}{2h}$$ Т. е. правое граничное условие аппроксимируется так:

$$\lambda_b u_n + \mu_b \frac{u_{n-2} - 4u_{n-1} + 3u_n}{2h} = \psi_b \Leftrightarrow \frac{\mu_b}{2h} u_{n-2} - \frac{2\mu_b}{h} u_{n-1} + \Big(\frac{3\mu_b}{2h} + \lambda_b\Big) u_n = \psi_b.$$

Рассмотрим это уравнение вместе с уравнением, которое записано для внутреннего узла x_{n-1} (т. е. для $i = n-1$). Исключим из уравнений u_{n-2}:

$$\begin{cases} \frac{\mu_b}{2h} u_{n-2} - \frac{2\mu_b}{h} u_{n-1} + \Big(\frac{3\mu_b}{2h} + \lambda_b\Big) u_n = \psi_b \quad \| \times \Big(\frac{1}{h} - \frac{p_{n-1}}{2}\Big) \neq 0 \\ -\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\Big) u_{n-2} + \Big(\frac{2}{h^2} - q_{n-1}\Big) u_{n-1} - \Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\Big) u_n = -g_{n-1} \| \times \frac{\mu_b}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u_{n-1} \| -\frac{2\mu_b}{h}\Big(\frac{1}{h} - \frac{p_{n-1}}{2}\Big) + \Big(\frac{2}{h^2} - q_{n-1}\Big)\frac{\mu_b}{2} = -\frac{\mu_b}{h^2} + \frac{\mu_b p_{n-1}}{h} - \frac{\mu_b q_{n-1}}{2};$$

$$u_n \| \Big(\frac{3\mu_b}{2h} + \lambda_b\Big)\Big(\frac{1}{h} - \frac{p_{n-1}}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\Big)\frac{\mu_b}{2} = \frac{\mu_b}{h^2} - \frac{\mu_b p_{n-1} - \lambda_b}{h} - \frac{\lambda_b p_{n-1}}{2}.$$

Получаем систему линейных уравнений:

$$i = 1: \quad \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_1\Big)}_{c_1} u_1 - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\Big)}_{b_1} u_2 = \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\Big)\frac{\psi_a}{\lambda_a} - g_1}_{f_1};$$

$$i \in [2, n-1]: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i} u_{i-1} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_i\Big)}_{c_i} u_i - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i} u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n: \quad -\underbrace{\Big(\frac{\mu_b}{h^2} - \frac{\mu_b p_{n-1}}{h} + \frac{\mu_b q_{n-1}}{2}\Big)}_{a_n} u_{n-1} + \underbrace{\Big(\frac{\mu_b}{h^2} - \frac{\mu_b p_{n-1} - \lambda_b}{h} - \frac{\lambda_b p_{n-1}}{2}\Big)}_{c_n} u_n =$$

$$= \underbrace{\Big(\frac{1}{h} - \frac{p_{n-1}}{2}\Big)\psi_b - \frac{\mu_b}{2} g_{n-1}}_{f_n}.$$

Матрица линейной системы является трехдиагональной матрицей *размерности n*, так что для ее решения можно применить метод прогонки:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_i & c_i & -b_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Метод фиктивного узла использует дополнительный узел, не принадлежащий отрезку $[a, b]$: $\boldsymbol{x_{n+1} = b + h}$. Мы предполагаем, что дифференциальная модель также выполнена на интервале $(a, b + h)$. Поэтому в узле b запишем разностные аналоги уравнения (I.1) и краевого условия (I.2), используя центральную разностную производную второго порядка аппроксимации на симметричном шаблоне $(i - 1, i, i + 1)$.

$$i = n \Rightarrow \lambda_b u_n + \mu_b \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = \psi_b \Leftrightarrow -\frac{\mu_b}{2h} u_{n-1} + \lambda_b u_n + \frac{\mu_b}{2h} u_{n+1} = \psi_b.$$

Далее исключим из уравнений узловое значение u_{n+1}.

$$\begin{cases} -\dfrac{\mu_b}{2h} u_{n-1} + \lambda_b u_n + \dfrac{\mu_b}{2h} u_{n+1} = \psi_b & \| \times \Big(\dfrac{1}{h} + \dfrac{p_n}{2}\Big) \neq 0 \\ -\Big(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_n}{2h}\Big) u_{n-1} + \Big(\dfrac{2}{h^2} - q_n\Big) u_n - \Big(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_n}{2h}\Big) u_{n+1} = -g_n & \| \times \dfrac{\mu_b}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u_{n-1} \| -\frac{\mu_b}{2h}\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_n}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_n}{2h}\Big)\frac{\mu_b}{2} = -\frac{\mu_b}{h^2};$$

$$u_n \| \quad \lambda_b\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_n}{2}\Big) + \Big(\frac{2}{h^2} - q_1\Big)\frac{\mu_b}{2} = \frac{\mu_b}{h^2} + \frac{\lambda_b}{h} + \frac{\lambda_b p_n - \mu_b q_n}{2}.$$

$$i = 1: \quad \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_1\Big)}_{c_1} u_1 - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\Big)}_{b_1} u_2 = \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\Big)\frac{\psi_a}{\lambda_a} - g_1}_{f_1};$$

$$i \in [2, n-1]: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i} u_{i-1} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_i\Big)}_{c_i} u_i - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i} u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n: \quad -\underbrace{\frac{\mu_b}{h^2}}_{a_n} u_{n-1} + \underbrace{\Big(\frac{\mu_b}{h^2} + \frac{\lambda_b}{h} + \frac{\lambda_b p_n - \mu_b q_n}{2}\Big)}_{c_n} u_n = \underbrace{\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_n}{2}\Big)\psi_b - \frac{\mu_b}{2} g_n}_{f_n}.$$

Матрица линейной системы является трехдиагональной матрицей *размерности* n, так что для ее решения можно применить метод прогонки:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_i & c_i & -b_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Случай четвертый: $\mu_a \neq 0$, $\mu_b \neq 0$ (*задача Неймана*).

Значение производной $u'(x)$ входит в оба граничных условия. Поэтому получается система $n+1$ линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_i & c_i & -b_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Нулевое и последнее уравнения получаются различными для различных способов аппроксимации.

Метод несимметричной разностной производной в точках a и b:

$$\underbrace{\left(\frac{\mu_a}{h^2} + \frac{\mu_a p_1 - \lambda_a}{h} - \frac{\lambda_a p_1}{2}\right)}_{c_0} u_0 - \underbrace{\left(\frac{\mu_a}{h^2} - \frac{\mu_a p_1}{h} - \frac{\mu_a q_1}{2}\right)}_{b_0} u_1 = \underbrace{-\left(\frac{1}{h} + \frac{p_1}{2}\right)\psi_a - \frac{\mu_a}{2} g_1}_{f_0};$$

$$i \in [1, n-1]: \quad -\underbrace{\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)}_{a_i} u_{i-1} + \underbrace{\left(\frac{2}{h^2} - q_i\right)}_{c_i} u_i - \underbrace{\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)}_{b_i} u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n: \quad -\underbrace{\left(\frac{\mu_b}{h^2} - \frac{\mu_b p_{n-1}}{h} + \frac{\mu_b q_{n-1}}{2}\right)}_{a_n} u_{n-1} + \underbrace{\left(\frac{\mu_b}{h^2} - \frac{\mu_b p_{n-1} - \lambda_b}{h} - \frac{\lambda_b p_{n-1}}{2}\right)}_{c_n} u_n =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{h} - \frac{p_{n-1}}{2}\right)\psi_b - \frac{\mu_b}{2} g_{n-1}}_{f_n}.$$

Метод фиктивных узлов в точках a и b:

$$i = 0: \quad \underbrace{\left(\frac{\mu_a}{h^2} - \frac{\lambda_a}{h} + \frac{\lambda_a p_0 - \mu_a q_0}{2}\right)}_{c_0} u_0 - \underbrace{\frac{\mu_a}{h^2}}_{b_0} u_1 = \underbrace{-\left(\frac{1}{h} - \frac{p_0}{2}\right)\psi_a - \frac{\mu_a}{2} g_0}_{f_0};$$

$$i \in [1, n-1]: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i} u_{i-1} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_i\Big)}_{c_i} u_i - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i} u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n: \quad -\underbrace{\frac{\mu_b}{h^2}}_{a_n} u_{n-1} + \underbrace{\Big(\frac{\mu_b}{h^2} + \frac{\lambda_b}{h} + \frac{\lambda_b p_n - \mu_b q_n}{2}\Big)}_{c_n} u_n = \underbrace{\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_n}{2}\Big)\psi_b - \frac{\mu_b}{2} g_n}_{f_n}.$$

Метод несимметричной разностной производной в точке a и метод фиктивного узла в точке b:

$$\underbrace{\Big(\frac{\mu_a}{h^2} + \frac{\mu_a p_1 - \lambda_a}{h} - \frac{\lambda_a p_1}{2}\Big)}_{c_0} u_0 - \underbrace{\Big(\frac{\mu_a}{h^2} - \frac{\mu_a p_1}{h} - \frac{\mu_a q_1}{2}\Big)}_{b_0} u_1 = \underbrace{-\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_1}{2}\Big)\psi_a - \frac{\mu_a}{2} g_1}_{f_0};$$

$$i \in [1, n-1]: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i} u_{i-1} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_i\Big)}_{c_i} u_i - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i} u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n: \quad -\underbrace{\frac{\mu_b}{h^2}}_{a_n} u_{n-1} + \underbrace{\Big(\frac{\mu_b}{h^2} + \frac{\lambda_b}{h} + \frac{\lambda_b p_n - \mu_b q_n}{2}\Big)}_{c_n} u_n = \underbrace{\Big(\frac{1}{h} + \frac{p_n}{2}\Big)\psi_b - \frac{\mu_b}{2} g_n}_{f_n}.$$

Метод фиктивного узла в точке a и метод несимметричной разностной производной в точке b:

$$i = 0: \quad \underbrace{\Big(\frac{\mu_a}{h^2} - \frac{\lambda_a}{h} + \frac{\lambda_a p_0 - \mu_a q_0}{2}\Big)}_{c_0} u_0 - \underbrace{\frac{\mu_a}{h^2}}_{b_0} u_1 = \underbrace{-\Big(\frac{1}{h} - \frac{p_0}{2}\Big)\psi_a - \frac{\mu_a}{2} g_0}_{f_0};$$

$$i \in [1, n-1]: \quad -\underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\Big)}_{a_i} u_{i-1} + \underbrace{\Big(\frac{2}{h^2} - q_i\Big)}_{c_i} u_i - \underbrace{\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\Big)}_{b_i} u_{i+1} = \underbrace{-g_i}_{f_i};$$

$$i = n: \quad -\underbrace{\Big(\frac{\mu_b}{h^2} - \frac{\mu_b p_{n-1}}{h} + \frac{\mu_b q_{n-1}}{2}\Big)}_{a_n} u_{n-1} + \underbrace{\Big(\frac{\mu_b}{h^2} - \frac{\mu_b p_{n-1} - \lambda_b}{h} - \frac{\lambda_b p_{n-1}}{2}\Big)}_{c_n} u_n =$$

$$= \underbrace{\Big(\frac{1}{h} - \frac{p_{n-1}}{2}\Big)\psi_b - \frac{\mu_b}{2} g_{n-1}}_{f_n}.$$

4 Лабораторная работа № 4. Решение краевых задач ОДУ

1) Записать сеточно-разностную схему **второго порядка аппроксимации** для краевой задачи ОДУ, используя ***параметрический стиль программирования***. Это значит, что параметры $\boldsymbol{a}$ (левый конец отрезка), $\boldsymbol{b}$ (правый конец отрезка), размер сетки $\boldsymbol{n}$ (или шаг сетки: $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})/\boldsymbol{n}$), константы краевых условий $\boldsymbol{\lambda}_a$, $\boldsymbol{\mu}_a$, $\boldsymbol{\psi}_a$, $\boldsymbol{\lambda}_b$, $\boldsymbol{\mu}_b$, $\boldsymbol{\psi}_b$, задавать как глобальные константы с помощью оператора #**define**. Функции $\boldsymbol{p}(x)$, $\boldsymbol{q}(x)$ и $\boldsymbol{g}(x)$ оформить как внешние процедуры по отношению к функции **main**{}.

В программе НЕ использовать двумерные массивы, применять только следующие ОДНОМЕРНЫЕ массивы: узлов сетки; проекций известных функций $\boldsymbol{p}(x)$, $\boldsymbol{q}(x)$ и $\boldsymbol{g}(x)$ на сетку; прогоночных коэффициентов; сеточных функций-решений.

2) Для смешанного краевого условия с производной $\boldsymbol{u}'(x)$ использовать две схемы второго порядка аппроксимации: **схема 1** — метод несимметричной производной, **схема 2** — метод фиктивного узла.

3) Методом прогонки для различных значений $\boldsymbol{n}$ найти две сеточные функции: $\mathbf{u}(n) \equiv \equiv (u_0, u_1, \dots u_n)$ — вектор-решение для схемы 1, $\mathbf{v}(n) \equiv (v_0, v_1, \dots v_n)$ — вектор-решение для схемы 2.

4) Проверить выполнение оценки $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = O(h^2)$ для трёх канонических норм. Для этого найти сеточные функции для пары сеток с $n_{\mathrm{II}} = 2n_{\mathrm{I}}$ и вычислить отношение норм $\|\mathbf{u}(n_{\mathrm{I}}) - \mathbf{v}(n_{\mathrm{I}})\| / \|\mathbf{u}(n_{\mathrm{II}}) - \mathbf{v}(n_{\mathrm{II}})\|$. Результаты внести в таблицу:

$n_{\mathrm{I}}/n_{\mathrm{II}}$	25/50	50/100	100/200	200/400	$500/10^3$	$10^3/2\cdot10^3$	$2\cdot10^3/4\cdot10^3$	$5\cdot10^3/10^4$
$\|\cdot\|_\infty / \|\cdot\|_\infty$								
$\frac{1}{n_{\mathrm{I}}}\|\cdot\|_1 / \frac{1}{n_{\mathrm{II}}}\|\cdot\|_1$								
$\frac{1}{n_{\mathrm{I}}}\|\cdot\|_2 / \frac{1}{n_{\mathrm{II}}}\|\cdot\|_2$								

5) Для $\boldsymbol{n} = 2\cdot10^3$ построить график сеточной функции $\{x_i, u_i\}_{i=0\dots n}$ в любом удобном Вам графопостроителе.

Номер варианта совпадает с номером студента в списке курса (в зачетной ведомости).

1. $u''(x) - (\sqrt{x}+1)u'(x) - u(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0.$
2. $u''(x) + \sqrt{\frac{1}{x}}u'(x) - 2u(x) = x^2, \quad 0.33 < x < 1, \quad u'(0.33) = -0.5, \quad u(1) = -1.$
3. $u''(x) + \frac{2}{x^3-2}u'(x) + (x-2)u(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = -0.5, \quad u'(1) = -1.$
4. $u''(x) + 2u'(x) - \frac{4}{x}u(x) = 1, \quad 0.4 < x < 1, \quad u(0.4) = 1.5, \quad u(1) + u'(1) = 4.$
5. $u''(x) + \frac{4x}{x^2+1}u'(x) - \frac{1}{x^2+1}u(x) = -\frac{3}{(x^2+1)^2}, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.5.$
6. $u''(x) - \frac{2}{x}u'(x) - \frac{4}{x^2+2}u(x) = 8, \quad 0.3 < x < 1, \quad u(0.3) = 0.5, \quad u(1) + u'(1) = 1.$
7. $u''(x) + (x+1)u'(x) - u(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = 1, \quad u(1) = 1.38294.$
8. $u''(x) + xu'(x) - \sqrt{x}u(x) = -3e^{-x}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) + 2u'(1) = 0.$
9. $u''(x) + u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = \frac{x+1}{x}, \quad 0,5 < x < 1, \quad u(0.5) = -\frac{1}{2\ln 2}, \quad u'(1) = 0.$
10. $u''(x) + 2xu'(x) - \sin x \cdot u(x) = 2\left(x^2+1\right)\cos(\pi x)$, $0 < x < 0.5$, $u'(0) = 0$, $u(0.5) = = 0.5\sin 0.5$.
11. $u''(x) + \frac{3}{2(x+1)}u'(x) - x^4 \cdot u(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$, $0 < x < 1$, $3u(0) - u'(0) = 1$, $u(1) = \sqrt{2}$.
12. $u''(x) - \frac{1}{x}u'(x) + e^x u(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad 0.25 < x < 1, \quad u'(0.25) = -2, \quad u(1) = 0.$