

## 6. Zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu, praca.

Wybór i opracowanie zadań 6.1-6.29..Bogumiła Strzelecka.

**6.1.** Sanki zsuwają się ze szczytu toru o długości  $l$  pochyłonego pod kątem  $\alpha$  do poziomu, a następnie wjeżdżają na tor prosty. Wzdłuż całego toru działa na sanki siła tarcia. Współczynnik tarcia na torze pochyłym wynosi  $\mu_1$ , zaś na torze prostym  $\mu_2$ . Obliczyć jaką drogę  $s$  przebędą sanki po torze prostym.

**6.2.** Kulka o masie  $m = 20\text{ g}$  wyrzucona pionowo w górę z prędkością  $v_o = 200\text{ m/s}$ , spadła na ziemię z prędkością  $v = 50\text{ m/s}$ . Obliczyć pracę sił tarcia w powietrzu.

**6.3.** Do gałęzi drzewa przywiązana jest lina, po której wspina się człowiek o masie  $m$ . Jaką pracę wykona człowiek, jeżeli przebędzie on po tej linie odcinek o długości  $l$ . Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .

**6.4.** Kulka o masie  $M$ , znajdująca się na końcu mogącego się obracać cienkiego pręta o długości  $l$  (masę pręta pomijamy), została wychylona o  $180^\circ$  ze swego najniższego położenia. Spadając kulka zderza się w najniższym położeniu z kulką plastelinową o masie  $m$ . Na jaką wysokość wzniosą się obie kulki po zderzeniu i zlepieniu się? W obliczeniach przyjąć, że  $l$  jest dużo większe niż rozmiary mas  $M$  i  $m$ .

**6.5.** Na szczycie gładkiej kuli o promieniu  $R$  położono monetę, której nadano prędkość początkową w kierunku poziomym o wartości  $v_q$ . W którym miejscu, licząc od wierzchołka kuli, moneta oderwie się od niej (moneta zsuwa się bez tarcia)? Przyspieszenie ziemskie jest równe  $g$ .

**6.6.** Dwie kule o masach  $m_1$  i  $m_2$ , poruszające się z taką samą prędkością  $v$  zderzają się centralnie. Zderzenie jest doskonale sprężyste. Podać warunki, jakie muszą być spełnione, aby: a) pierwsza kula zatrzymała się; b) druga kula zatrzymała się; c) nastąpiła zmiana zwrotu prędkości każdej z kul.

**6.7.** Jaką pracę należy wykonać, aby słup telegraficzny o masie  $M = 200\text{ kg}$ , do którego wierzchołka przymocowano poprzeczkę o masie  $m = 30\text{ kg}$ , podnieść z położenia poziomego do pozycji pionowej, jeżeli długość słupa jest równa  $l = 10\text{ m}$ ? Przyspieszenie ziemskie przyjąć  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

**6.8.** Znaleźć moc wodospadu Niagara, jeżeli jego wysokość  $h = 50\text{ m}$ , a średni przepływ wody  $V = 5900\text{ m}^3/\text{s}$ . Gęstość wody  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ , a przyspieszenie ziemskie  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

**6.9.** Kulka o masie  $m$  uderza w wahadło fizyczne o masie  $M$  i pozostaje w nim. Jaka część energii kulki zamieni się na ciepło?

**6.10.** Ciało wyrzucono pionowo w górę z prędkością  $v_o$ . Znaleźć wysokość, na której energia kinetyczna ciała będzie równa jego energii potencjalnej? Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .

**6.11.** Kulka o masie  $m$  lecąca poziomo, uderza w powierzchnię klina o masie  $M$  leżącego na poziomej płaszczyźnie tak, że odskakuje pionowo w górę na wysokość  $h$ . Zakładając, że zderzenie jest doskonale sprężyste, znaleźć prędkość, jaką uzyskał klin tuż po zderzeniu. Przyspieszenie ziemskie jest równe  $g$ .

**6.12.** Piłeczkę pingpongową o promieniu  $r = 15 \text{ mm}$  i masie  $m = 5 \text{ g}$  zanurzono w wodzie na głębokości  $h = 30 \text{ cm}$ . kiedy puszczo tę piłeczkę, wyskoczyła ona z wody na wysokość  $h_1 = 10 \text{ cm}$ . Jaka ilość ciepła wydzielila się w wyniku działania sił tarcia? Gęstość wody  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Przyjąć  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**6.13.** Dwie kule o masach  $m_1 = 0,2 \text{ kg}$  i  $m_2 = 0,8 \text{ kg}$  zawieszono na dwóch równoległych niciach o długości  $l = 2 \text{ m}$  każda, stykają się ze sobą. Mniejsza kula zostaje odchylona o kąt  $90^\circ$  od początku położenia i puszczone. Znaleźć prędkość kul po zderzeniu zakładając, że zderzenie kul było: a) doskonale sprężyste, b) doskonale niesprężyste. Jaka część energii początkowej zamieni się na ciepło w przypadku zderzenia doskonale niesprężystego?

**6.14.** Ciało o masie  $m$  przymocowane do nici o długości  $l_0$  zatacza okrąg o promieniu równym długości nici z prędkością  $v_0$ . Jaką pracę należy wykonać ściągając ciało do środka okręgu, skracając nić o  $\Delta l$ .

**6.15.** Znaleźć hamujący moment siły, który może zatrzymać w ciągu czasu  $t = 20 \text{ s}$  koło zamachowe o masie  $m = 50 \text{ kg}$  i promieniu  $R = 0,3 \text{ m}$  obracające się z częstotliwością  $f = 30 \text{ s}^{-1}$ . Założyć, że masa koła zamachowego rozmieszczona jest na jego obwodzie. Jaka praca będzie potrzebna do zatrzymania tego koła zamachowego?

**6.16.** Kulka, staczająca się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$ , uderza w płaszczyznę poziomą i podskakuje na wysokość  $h = 12,5 \text{ cm}$  w rzucie ukośnym. Zaniedbując tarcie i zakładając, że uderzenie jest doskonale sprężyste znaleźć drogę jaką przebyła kulka wzdłuż równi pochyłej. Moment bezwładności kulki  $I = \frac{2}{5}mR^2$

**6.17\*.** Jednorodna deska o masie  $m$  i długości  $l$  leży na granicy zetknięcia dwóch stołów, na stole pierwszym. Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby przesunąć ją ze stołu pierwszego na drugi, jeżeli współczynniki tarcia pomiędzy deską a stołem wynoszą  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , odpowiednio dla pierwszego i drugiego stołu.

**6.18\*.** Walec o wysokości  $h$ , promieniu podstawy  $R$  i gęstości  $\rho_1$  pływa w naczyniu wypełnionym cieczą o gęstości  $\rho_2 > \rho_1$ . Oś walca jest prostopadła do podstawy naczynia. Obliczyć pracę, jaką należy wykonać aby walec zanurzyć całkowicie w cieczy?

**6.19\*.** Na podłodze leży lina o masie  $m$  i długości  $l$ . Jeden z jej końców podnosimy do góry dopóki lina nie oderwie się od podłogi. Wyznaczyć minimalną wartość pracy jaką należy wykonać, aby podnieść linę z podłogi w polu grawitacyjnym Ziemi w przypadku, gdy:

a) lina jest jednorodna

b) lina jest niejednorodna i jej masa  $m$  zależy od odległości  $x$  od jednego z jej końców

według wzoru  $m(x) = m_0 \left( \frac{x}{l} \right)^2$ .

**6.20.** Człowiek stoi na nieruchomym wózku i rzuca do przodu kamień o masie  $m$ , nadając mu prędkość  $v$ . Wyznaczyć pracę, jaką musi wykonać przy tym człowiek, jeżeli Masa wózka wraz z nim wynosi  $M$ .

**6.21.** Człowiek o masie  $m_1 = 60 \text{ kg}$ , biegnący z prędkością  $v_1 = 8 \text{ km/h}$ , dogania wózek o masie  $m_2 = 90 \text{ kg}$ , który jedzie z prędkością  $v_2 = 4 \text{ km/h}$  i wskazuje na ten wózek. Z jaką

prędkością będzie poruszał się wózek z człowiekiem? Jaka będzie prędkość wózka z człowiekiem w przypadku, gdy człowiek będzie biegł naprzeciwko wózka?

**6.22.** Lecący poziomo granat z prędkością  $v = 10 \text{ m/s}$  w pewnej chwili rozerwał się na dwa odłamki. Większy odłamek, którego masa stanowiła  $n = 60\%$  masy całego granatu, kontynuował lot w pierwotnym kierunku, lecz ze zwiększoną prędkością  $v_1 = 25 \text{ m/s}$ . Znaleźć kierunek i wartość prędkości mniejszego odłamka.

**6.23.** Znaleźć wartość prędkości początkowej poruszającego się po lodzie krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył on drogę  $s_1 = 5 \text{ m}$ , a po zderzeniu, które można traktować jako doskonale sprężyste, przebył jeszcze drogę  $s_2 = 2 \text{ m}$  do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia krążka o lód jest równy  $\mu = 0,1$ .

**6.24.** Z rury o przekroju  $s = 5 \text{ cm}^2$  wypływa w kierunku poziomym strumień wody z prędkością, której wartość wynosi  $v = 10 \text{ m/s}$ , uderzając pionowo w ścianę stojącą na szynach wózka, a następnie spływa w dół po tej ścianie. Z jakim przyspieszeniem będzie poruszać się wózek? Jego masa  $m = 200 \text{ kg}$ , a kierunek strumienia wody jest równoległy do kierunku szyn. Przyjąć, iż hamująca ruch wózka siła oporu jest sto razy mniejsza od ciężaru tego pojazdu.

**6.25.** Dwie poziome tarcze wirują wokół pionowej osi przechodzącej przez ich środek. Momenty bezwładności tarcz wynoszą  $I_1$  oraz  $I_2$ , a ich prędkości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Po upadku tarczy górnej na dolną obie tarcze ( w wyniku działania sił tarcia) obracają się razem jak jedno ciało. Wyznaczyć:

- a) prędkość kątową tarcz po złączeniu;
- b) pracę wykonaną przez siły tarcia.

**6.26.** Na brzegu poziomo ustawionej tarczy o momencie bezwładności  $I$  (względem osi pionowej przechodzącej przez środek tarczy) i promieniu  $R$  znajduje się człowiek o masie  $m$ . Obliczyć prędkość kątową tarczy  $\omega$ , gdy człowiek zacznie poruszać się wzdłuż jej brzegu z prędkością  $v$  względem niej.

**6.27.** Człowiek o masie  $m$  stoi na osi obrotowego stolika o promieniu  $R$  trzymając oburącz za oś, pionowo nad głową obracające wokół tej osi (pionowej) z prędkością kątową  $\omega_0$  koło rowerowe o momencie bezwładności  $I_0$ . Wyznaczyć prędkość kątową  $\omega_1$  ruchu obrotowego stolika po:

- a) obróceniu przez człowieka koła o kąt  $180^\circ$ ,
- b) zahamowaniu koła przez człowieka.

Moment bezwładności stolika z człowiekiem wynosi  $I$ .

**6.28.** Listwa drewniana o długości  $l$  i masie  $m$  może się obracać dookoła osi prostopadłej do listwy, przechodzącej przez jej środek. W koniec listwy trafia pocisk o masie  $m_1$ , lecący z prędkością  $v_1$  w kierunku prostopadłym do osi i do listwy. Znaleźć prędkość kątową, z jaką listwa zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk.

**6.29.** Na poziomym, doskonale gładkim stole leży pręt o długości  $l$  i masie  $m$ . W koniec pręta trafia pocisk o masie  $m_1$ , lecący z prędkością  $v_1$  w kierunku prostopadłym do osi pręta. Znaleźć prędkość kątową, z jaką pręt zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk oraz wartość prędkości liniowej środka pręta.

## Rozwiązania:

### 6.1.R.

Korzystając z zasady zachowania energii oraz pamiętając, że praca jest formą energii otrzymujemy:

$$(1) \quad mgh = \frac{mv^2}{2} + W_1$$

$$(2) \quad \frac{mv^2}{2} = W_2$$

oraz z definicji pracy

$$(3) \quad W_1 = T_1 \cdot l$$

$$(4) \quad W_2 = T_2 \cdot x$$

i siły tarcia

$$(5) \quad T_1 = \mu_1 mg \cos \alpha$$

$$(6) \quad T_2 = \mu_2 mg$$

podstawiamy wyrażenia określone równaniami (2), (3), (4), (5) i (6) do równania (1) trzymując:

$$(7) \quad mgh = \mu_2 mgx + \mu_1 mg \cos \alpha \cdot l$$

Ponieważ

$$(8) \quad \frac{h}{l} = \sin \alpha, \text{ stąd } h = l \cdot \sin \alpha.$$

Podstawiając tożsamość (8) do równania (7) i przekształcając je otrzymujemy:

$$x = \frac{\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha}{\mu_2} \cdot l$$

$$6.2.O. \quad W = 375 \text{ J}$$

$$6.3.O. \quad W = mgl$$

### 6.4.R.

Korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej otrzymujemy równanie:

$$(1) \quad M g 2l = \frac{p^2}{2M}, \text{ gdzie } p \text{ oznacza wartość pędu masy } M \text{ w najniższym położeniu.}$$

Z zasady zachowania pędu:

$$(2) \quad p = p_u$$

Wysokość, na którą wzniosą się obie masy po złączeniu, obliczamy korzystając ponownie z zasady zachowania energii:

$$(3) \quad \frac{p_u^2}{2(M+m)} = (M+m)gh$$

Po przekształceniach

$$(4) \quad h = 2 \frac{M^2}{(M+m)^2} \cdot l$$

### 6.5.R.

Z zasady zachowania energii wynika:

$$(1) \quad \frac{mv_o^2}{2} + mgR = \frac{mv^2}{2} + mg(R-x)$$

W punkcie, w którym oderwie się ciało:

$$(2) \quad \frac{mv^2}{R} = N, \text{ gdzie } N - \text{wartość siły nacisku.}$$

Z podobieństwa trójkątów:

$$(3) \quad \frac{N}{mg} = \frac{R-x}{R}$$

Po rozwiązaniu układu powyższych równań otrzymujemy:

$$(4) \quad x = \frac{R}{3} - \frac{v_o^2}{3g}$$

$$6.6.O. \text{ a) } m_1 = 3m_2, \text{ b) } 3m_1 = m_2, \text{ c) } \frac{m_2}{3} \angle m_1 \angle 3m_2$$

6.7.R. Praca jest równa zmianie energii potencjalnej słupa względem jego pierwotnego położenia:

$$(1) \quad W = \Delta E_p$$

Słup traktujemy jako bryłę sztywną, natomiast poprzeczkę jako punkt materialny.

$$(2) W = \left( Mg \frac{l}{2} + mgl \right) - 0 = 13kJ$$

### 6.8.R.

$$(1) P = \frac{W}{t}$$

$$(2) W = \Delta E = mgh$$

$$(3) P = \frac{mgh}{t}$$

$$(4) \frac{m}{t} = \rho \cdot V$$

$$(5) P = \rho \cdot Vgh = 2950MW$$

### 6.9.R.

$$(1) x = \frac{Q}{E_o}, \text{ gdzie } Q - \text{wydzielone ciepło, } E_o - \text{energia kinetyczna kulki;}$$

$$(2) Q = E_o - E, E - \text{energia kinetyczna układu kulka wahadło po zderzeniu;}$$

$$(3) E_o = \frac{p_o^2}{2m}, \quad E = \frac{p^2}{2(M+m)}, \text{ gdzie } p_o - \text{pęd kulki przed zderzeniem, } p - \text{pęd układu kulka wahadło po zderzeniu.}$$

Zgodnie z zasadą zachowania pędu:

$$(4) p_o = p$$

Podstawiając wzory (2), (3) i (4) do równania (1) otrzymujemy:

$$(5) x = \frac{M}{M+m}$$

### 6.10.O.

$$h = \frac{v_o^2}{4g}$$

### 6.11.R.

Korzystając z zasady zachowania pędu oraz zasady zachowania energii otrzymujemy układ trzech równań:

$$(1) p_3^2 = p_2^2 + p_1^2, \quad p_1 - \text{pęd kulki przed zderzeniem, } p_2 - \text{pęd kulki po zderzeniu, } p_3 - \text{pęd klina.}$$

$$(2) \quad \frac{p_3^2}{2M} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m}$$

$$(3) \quad \frac{p_2^2}{2m} = mgh$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy wzór na wartość  $p_3$ :

$$(4) \quad p_3 = 2m \sqrt{\frac{ghM}{M-m}}$$

Ponieważ  $p_3 = M \cdot v_3$ , stąd

$$(5) \quad v_3 = 2m \sqrt{\frac{gh}{M(M-m)}}$$

### 6.12.R.

Praca siły wyporu  $F_w$  na drodze  $h$  zostaje wykorzystana na zmianę energii potencjalnej ciała  $\Delta E$  względem położenia początkowego oraz na ciepło  $Q$ :

$$(1) \quad F_w h = Q + \Delta E$$

$$(2) \quad F_w = \rho \cdot gV; \quad V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$(3) \quad \Delta E = mg(h + h_1)$$

Przekształcając powyższe równania otrzymujemy:

$$(4) \quad Q = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot gh - mg(h + h_1) = 2,2 \cdot 10^{-2} J$$

### 6.13.R.

a) W zderzeniu doskonale sprężystym spełniona jest zasada zachowania pędu i energii mechanicznej

$$(1) \quad m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad \text{gdzie } v, v_1 - \text{wartości prędkości ciała o masie } m_1 \text{ przed i po zderzeniu, } v_2 - \text{wartość prędkości ciała } m_2 \text{ po zderzeniu.}$$

$$(2) \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

Rozwiązując powyższe równania otrzymujemy:

$$(3) \quad v_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v \quad \text{oraz} \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Energia potencjalna odchylonej kulki jest równa jej energii kinetycznej w momencie zderzenia z drugą kulką:

$$(4) \quad m_1 gl = \frac{m_1 v^2}{2} \quad \text{stąd } v = \sqrt{2gl}$$

więc:

$$(5) \quad v_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl} = 3,8 \text{ m/s} \quad \text{i} \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl} = 2,5 \text{ m/s}$$

b)

W zderzeniu doskonale nie sprężystym spełniona jest zasada zachowania pędu:

$$(1) \quad m_1 v = (m_1 + m_2) v_x,$$

gdzie  $v$  wartość prędkości masy  $m$  przed zderzeniem,  $v_x$  wartość prędkości obu złączonych kulek po zderzeniu  
stąd:

$$(2) \quad v_x = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v$$

Ponieważ

$$(3) \quad m_1 gl = \frac{m_1 v^2}{2} \quad \text{stąd } v = \sqrt{2gl}$$

otrzymujemy

$$(4) \quad v_x = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl} = 1,3 \text{ m/s}$$

$$(5) \quad x = \frac{Q}{m_1 gl} \quad \text{- oznacza, jaka część energii zamieni się na ciepło}$$

$$(6) \quad Q = m_1 gl - \frac{(m_1 + m_2)}{2} v_x^2$$

Po podstawieniu za  $v_x$  otrzymujemy:

$$(7) \quad x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,8$$

#### 6.14.R.

Wykonana praca jest równa zmianie energii kinetycznej:

$$(1) \quad W = \Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}.$$

Prędkość  $v$  kulki po skróceniu nici znajdujemy z zasady zachowania pędu:



$$(2) \quad mv(l_0 - \Delta l) = mv_0 l_0$$

Wówczas praca jest równa:

$$(3) \quad W = \frac{mv_0^2}{2} \left[ \frac{l_0^2}{(l_0 - \Delta l)^2} - 1 \right]$$

### 6.15.R.

(1)  $M = I \cdot \varepsilon$ ;      gdzie  $M$  – wartość momentu siły,  $I = mR^2$  – moment bezwładności tarczy,  $\varepsilon$  - wartość przyspieszenia kątownego.

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{\Delta \omega}{t} = \frac{\omega - 0}{t} = \frac{2\pi f}{t}$$

$$(3) \quad M = \frac{2\pi \cdot f m R^2}{t} = 42,39 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Praca potrzebna do zatrzymania koła jest równa zmianie energii kinetycznej:

$$(4) \quad W = \Delta E = \frac{1}{2} I \omega^2 - 0 = \frac{1}{2} m R^2 \cdot (2\pi \cdot f)^2 = 2\pi^2 m R^2 f^2 = 79,9 \text{ kJ}$$

### 6.16.R.

Energia potencjalna ciała w najwyższym położeniu zmienia się w energię kinetyczną ruchu obrotowego i ruchu postępowego u podnóża równi.:

$$(1) \quad mgH = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

Po podstawieniu za  $\omega = \frac{v}{R}$  oraz  $I = \frac{2}{5} m R^2$  oraz uwzględniając, że  $H = l \sin \alpha$  otrzymujemy :

$$(2) \quad l = \frac{7}{10} \cdot \frac{v^2}{g \sin \alpha}$$

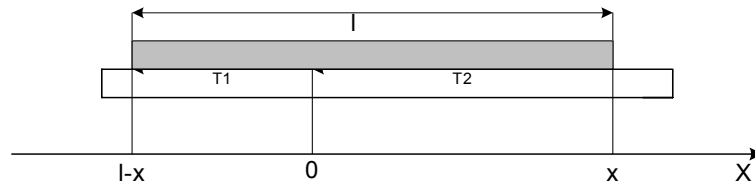
Korzystając ze wzoru na wysokość maksymalną w rzucie ukośnym  $h = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

wyznaczamy  $v^2$  i podstawiamy do wzoru (2) otrzymując wielkość szukaną:

$$(3) \quad l = \frac{1,4 \cdot h}{\sin^3 \alpha}$$

**6.17.R.**

Przesunięcie deski z jednego stołu na drugi wymaga wykonania pracy siłą co najmniej równą sile tarcia pomiędzy deską a płaszczyznami stołów. Siła tarcia w tym przypadku jest równa sumie sił tarcia pomiędzy deską i, odpowiednio, stołem pierwszym ( $T_1$ ) i drugim ( $T_2$ ).



$$(1) \quad W = \int_0^l (T_1 + T_2) dx$$

Zgodnie z rysunkiem wartości sił  $T_1$  i  $T_2$  zależą od tego, jaka część deski znajduje się na stole pierwszym, a jaka na drugim. Ponieważ deska jest jednorodna wychodząc z założenia, że masa jest proporcjonalna do długości deski możemy znaleźć wartości sił nacisku na poszczególne stoły.

$$(2) \quad N_1 = \frac{l-x}{l} mg, \quad \text{a więc} \quad T_1 = \mu_1 \cdot \frac{l-x}{l} mg$$

$$(3) \quad N_2 = \frac{x}{l} mg, \quad \text{a więc} \quad T_2 = \mu_2 \cdot \frac{x}{l} mg$$

Podstawiając do wzoru (1) otrzymujemy po scałkowaniu:

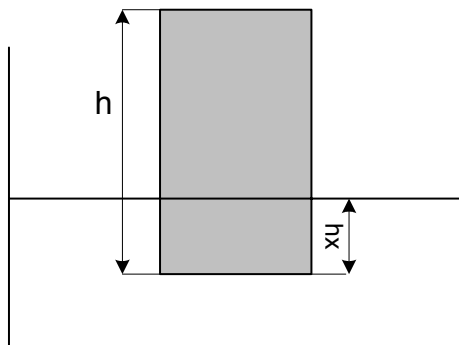
$$(4) \quad W = \frac{mgl}{2} (\mu_1 + \mu_2)$$

**6.18.R.**

Pracę obliczamy z wzoru

(1)

$$W = \int_{h_x}^h F_w dx$$



ponieważ wartość siły wyporu  $F_w = \rho_2 \cdot Vg = \rho_2 \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 x$  zależy od głębokości zanurzenia walca.

Wielkość początkowego zanurzenia walca  $h_1$  obliczamy z równowagi siły wyporu i siły ciężkości w chwili początkowej:

(2)  $F_w = Q$ , czyli  $\rho_2 \cdot \pi \cdot R^2 h_x g = \rho_1 \cdot \pi \cdot R^2 h g$ , stąd  $h_x = \frac{\rho_1}{\rho_2} h$ .

Po podstawieniu do równania jeden otrzymujemy wyrażenie na pracę:

(3)  $W = \frac{\pi \cdot R^2 g h^2}{2} \cdot \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2}$

### 6.19.R.

a) Na fragment liny o masie  $dm$ , znajdujący się w odległości  $x$  od jej końca, działa siła

(1)  $dF = g \cdot dm$ .

Podnosząc ten fragment na wysokość  $x$  należy działać na niego siłą równą co do wartości  $dF$  lecz przeciwnie skierowaną. Zostanie przy tym wykonana praca elementarna :

(2)  $dW = x \cdot dF = xg \cdot dm$ .

Ponieważ cała jednorodna lina o długości  $l$  ma masę  $m$ , z proporcji  $\frac{dx}{l} = \frac{dm}{m}$  wynika, że rozpatrywany fragment ma masę

$$(3) \quad dm = \frac{m}{l} \cdot dx.$$

Podstawiając wzór (3) do wzoru (2) i sumując prace elementarne  $dW$  otrzymujemy:

$$(4) \quad W = \frac{mg}{l} \int_0^l x \cdot dx = \frac{mgl}{2}$$

b) Dla liny niejednorodnej mamy zależność masy od odległości  $x$ :  $m(x) = m_0 \left( \frac{x}{l} \right)^2$ .

Masę  $dm$  elementu liny o długości  $dx$  obliczamy różniczkując tę zależność:

$$(5) \quad dm = \frac{2m_0}{l^2} x \cdot dx.$$

Siła  $dF$  ma teraz postać:

$$(6) \quad dF = g \cdot dm = \frac{2m_0 g}{l^2} x \cdot dx,$$

zaś praca elementarna

$$(7) \quad dW = x \cdot dF = \frac{2m_0 g}{l^2} x^2 \cdot dx.$$

Praca całkowita jest równa całce:

$$(8) \quad W = \frac{2m_0 g}{l^2} \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{2m_0 gl}{3}$$

## 6.20.R.

Praca wykonana przez człowieka będzie równa przyrostowi energii kinetycznej układu:

$$(1) \quad W = \Delta E_k = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

gdzie prędkość  $v_1$  jest prędkością wózka z człowiekiem po rzucie. Prędkość tę oblicza się z zasady zachowania pędu:

$$(2) \quad 0 = M\vec{v}_1 + m\vec{v}.$$

Po uwzględnieniu zwrotów wektorów :

$$(3) \quad 0 = Mv_1 - mv$$

otrzymujemy :

$$(4) \quad v_1 = \frac{m}{M} v.$$

Uwzględniając zależność (4) otrzymujemy wzór na pracę:

$$(5) \quad W = \frac{M}{2} \left( \frac{m}{M} v \right)^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right)$$

### 6.21.O.

$$a) \quad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 5,6 \frac{km}{h}$$

$$b) \quad v = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 0,8 \frac{km}{h}$$

### 6.22.R.

Z zasady zachowania pędu wynika, że pęd granatu przed wybuchem musi być równy sumie pędów wszystkich odłamków granatu po wybuch:

$$(1) \quad m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Przechodząc do równania skalarnego należy uwzględnić, że prędkości ułamków są skierowane przeciwnie:

$$(2) \quad mv = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

Przekształcając równanie (2) otrzymujemy:

$$(3) \quad v_2 = \frac{m_1 v_1 - mv}{m_2}.$$

Z warunków zadania wynika:

$$m_1 = nm \quad \text{oraz} \quad m_2 = m - m_1 = (1 - n)m.$$

Podstawiając powyższe zależności do równania (3) otrzymujemy:

$$(4) \quad v_2 = \frac{nv_1 - v}{1 - n} = 12,5 \frac{m}{s}.$$

Mniejszy odłamek odleciał w kierunku przeciwnym do kierunku lotu odłamka większego.

**6.23.R.**

Energia kinetyczna początkowa krążka zostaje zużyta na pracę siły tarcia przed zderzeniem z bandą i po zderzeniu z bandą, ponieważ w wyniku zderzenia doskonale sprężystego zmienia się kierunek a nie wartość pędu.

$$(1) \frac{mv_0^2}{2} = kmg s_1 + kmg s_2$$

Po przekształceniu powyższego równania otrzymujemy:

$$(2) v_o = \sqrt{2kg(s_1 + s_2)} = 3,7 \frac{m}{s}$$

**6.24.R.**

Siła wypadkowa działająca na wózek opisana jest równaniem:

$$(1) F_w = ma = F - \frac{mg}{100}$$

Siłę F, jaką woda popycha wózek, obliczamy z II zasady dynamiki Newtona:

$$(2) F \cdot t = \Delta p$$

Zmiana pędu w kierunku ruchu dreźyny jest równa:

$$(3) \Delta p = p - 0.$$

Ponieważ  $p = mv$ , zaś  $m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot x$  otrzymujemy podstawiając te zależności do równania (2):

$$(4) F \cdot t = \rho \cdot S \cdot x \cdot v.$$

Dzieląc powyższe równanie obustronnie przez t otrzymujemy:

$$(5) F = \frac{x}{t} \cdot \rho \cdot S \cdot v = \rho \cdot S \cdot v^2, \text{ ponieważ } v = \frac{x}{t}.$$

Podstawiając do równania (1) otrzymujemy:

$$(6) ma = \rho \cdot S \cdot v^2 - \frac{mg}{100}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$(7) a = \frac{\rho \cdot S \cdot v^2}{m} - \frac{g}{100} = 0,15 \frac{m}{s^2}.$$

**6.25.R.**

Na układ opisany w zadaniu nie działa żaden zewnętrzny moment sił. Moment pędu układu  $L_1$  przed połączeniem tarcz wynosi:

$$(1) \quad L_1 = I_1\omega_1 + I_2\omega_2,$$

natomiast po połączeniu momentu pędu  $L_2$  wynosi:

$$(2) \quad L_2 = (I_1 + I_2) \cdot \omega.$$

W powyższym wzorze  $\omega$  jest prędkością kątową po połączeniu się tarcz. Z zasady zachowania momentu pędu  $L_1 = L_2$ , toteż porównując oba powyższe wzory otrzymujemy wyrażenie na prędkość kątową  $\omega$  w postaci:

$$(3) \quad \omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}.$$

Pracę, która została wykonana przez siłę tarcia podczas wyrównywania się prędkości tarcz, obliczamy jako różnicę energii kinetycznych układu: początkowej:

$$(4) \quad E_{k1} = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}$$

i końcowej:

$$(5) \quad E_{k2} = \frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2}$$

Wówczas :

$$(6) \quad W = E_{k1} - E_{k2} = \frac{I_1 I_2 (\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$$

**6.26.R.**

Stosując zasadę zachowania momentu pędu otrzymujemy:

$$(1) \quad 0 = \vec{L}_c + \vec{L}_t, \quad \text{gdzie } L_c - \text{moment pędu człowieka, } L_t - \text{moment pędu tarczy.}$$

Zapisując powyższe równanie w postaci skalarnej otrzymujemy:

$$(2) \quad 0 = L_c + L_t.$$

Moment pędu tarczy wynosi:

$$(3) \quad L_t = I \cdot \omega_t, \quad \text{gdzie } \omega_t - \text{prędkością kątową tarczy.}$$

Człowiek porusza się z prędkością kątową  $\omega_c = \frac{v}{R}$  względem tarczy i jednocześnie jest unoszony przez tarczę z prędkością kątową  $\omega_t$  w kierunku przeciwnym. Zatem jego całkowity moment pędu wynosi:

$$(4) \quad L_c = I_c \cdot \omega_t - I_c \cdot \omega_c, \quad \text{gdzie} \quad I_c = mR^2 \text{ jest momentem bezwładności człowieka o masie}$$

$m$  względem osi obrotu tarczy.

Podstawiając równania (3) i (4) do (2) otrzymujemy:

$$(5) \quad \omega_t = \frac{mRv}{I + mR^2}$$

### 6.27.R.

a) Początkowy moment pędu układu wynosi:

$$(1) \quad L_0 = I_0 \cdot \omega_0,$$

ponieważ tylko koło się obraca.

Po obrocie koła o  $180^\circ$  jego moment pędu zmieni się na przeciwny, wskutek czego człowiek ze stolikiem będzie się poruszał ruchem obrotowym. Wówczas całkowity moment pędu układu jest równy:

$$(2) \quad L_1 = I \cdot \omega_1 - I_0 \cdot \omega_0$$

gdzie  $\omega_1$  – prędkość kątową człowieka ze stolikiem.

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu:

$$(3) \quad L_0 = L_1$$

wyznaczamy prędkość kątową  $\omega_1$ :

$$(4) \quad \omega_1 = 2 \frac{I_0 \cdot \omega_0}{I}$$

b) Po zahamowaniu koła rowerowego całkowity moment pędu układu będzie równy momentowi pędu stolika z człowiekiem:

$$(5) \quad L_2 = I \cdot \omega_2$$

Stosując zasadę zachowania momentu pędu wyznaczamy  $\omega_2$ :

$$(6) \quad \omega_2 = \frac{I_0 \cdot \omega_0}{I}$$

### 6.28.R.

Z zasady zachowania momentu pędu wynika:



$$(1) L_1 = L_2,$$

gdzie:

$$(2) L_1 = m_1 v_1 \frac{l}{2} \quad \text{jest momentem pędu układu listwa – pocisk przed zderzeniem,}$$

zaś:

$$(3) L_2 = I \cdot \omega \quad \text{jest momentem układu po zderzeniu.}$$

Moment bezwładności układu  $I$  po zderzeniu opisany jest zależnością:

$$(4) I = \frac{1}{12} m l^2 + m_1 \left( \frac{l}{2} \right)^2.$$

Przekształcając powyższe równania otrzymujemy:

$$(5) \omega = \frac{2m_1 v_1}{l \left( \frac{1}{3} m + m_1 \right)}$$

### 6.29.R.

Przy rozwiązaniu zadania korzystamy z zasady zachowania pędu i z zasady zachowania momentu pędu.

Przed zderzeniem pęd układu równy jest pędowi pocisku:

$$(1) p_1 = m_1 v_1.$$

Moment pędu układu względem dowolnie wybranego punktu jest równy momentowi pędu pocisku.

$$(2) L_1 = m_1 v_1 \left( \frac{l}{2} - x \right), \quad \text{gdzie } x \text{ jest odległością środka masy układu pocisk-pręt od}$$

środku pręta.

Położenie środka masy znajdujemy ze wzoru:

$$(3) x = \frac{\frac{l}{2} \cdot m_1 + 0 \cdot m}{m_1 + m} = \frac{l}{2} \left( \frac{m_1}{m + m_1} \right).$$

Po zderzeniu pocisku z prętem pęd układu jest równy:

$$(4) p_2 = (m + m_1) v_s, \quad \text{gdzie } v_s \text{ – prędkość środka masy układu.}$$

Porównując wartości pędów przed (1) i po zderzeniu (4) obliczamy prędkość środka masy:

$$(5) \quad v_s = \frac{m_1}{m + m_1} v_1.$$

Moment pędu układu pocisk-pręt po zderzeniu wyraża się wzorem:

$$(6) \quad L_2 = I \cdot \omega,$$

gdzie  $\omega$  - prędkość kątowa, zaś moment bezwładności  $I$  jest sumą momentu bezwładności pręta i momentu bezwładności pocisku:

$$(7) \quad I = I_{pr} + I_{poc}.$$

Moment bezwładności pocisku liczymy jak moment bezwładności punktu materialnego:

$$(8) \quad I_{poc} = m_1 \left( \frac{l}{2} - x \right)^2.$$

Moment bezwładności pręta względem środka masy układu obliczamy korzystając z prawa Steinera:

$$(9) \quad I_{pr} = I_0 + mx^2 = \frac{1}{12} ml^2 + mx^2.$$

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu [rów.(2) i (6)] oraz podstawiając wzory: (3), (7), (8) i (9) otrzymujemy wzór na prędkość kątową:

$$(10) \quad \omega = \frac{6m_1(m + m_1)v_1}{l(m^2 + m \cdot m_1 + 4m_1^2)}$$