Macierze

Macierzą wymiaru $m \times n$ (czyli o m wierszach i n kolumnach) nazywamy tablicę

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Piszemy także $A = [a_{ij}]$, gdzie a_{ij} (dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) są liczbami rzeczywistymi.

Rzędy poziome nazywamy wierszami, zaś pionowe nazywamy kolumnami

W macierzy $A = [a_{ij}]$ wyraz a_{ij} jest liczbą stojącą w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.

Macierzą kwadratową stopnia n nazywamy dowolną macierz wymiaru $n \times n$ (macierz taka ma tyle samo wierszy co kolumn)

Niech macierz $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową rzędu n. Wyrazy postaci a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, (czyli wyrazy mające ten sam numer wiersza i kolumny) tworzą przekątną macierzy A.

Macierzą jednostkową stopnia n nazywamy macierz kwadratową $I = [c_{ij}]$ stopnia n taką, że $c_{ij} = 1$ dla $i = j$ oraz $c_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, jest to zatem macierz postaci:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(Macierz jednostkowa ma na przekątnej same jedynki, zaś poza przekątną same zera.)

Działania na macierzach

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$.

Sumą macierzy A i B nazywamy macierz wymiaru $m \times n$ zdefiniowaną następująco:

$A + B = [c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dla dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Iloczynem macierzy A przez liczbę rzeczywistą c nazywamy macierz wymiaru $m \times n$ zdefiniowaną następująco:

$c \cdot A = [d_{ij}]$, gdzie $d_{ij} = c \cdot a_{ij}$ dla dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Różnicą macierzy A i B nazywamy macierz wymiaru $m \times n$ zdefiniowaną jako: $A - B = A + (-1)B$, a zatem macierz $A - B$ ma postać:

$A - B = [e_{ij}]$, gdzie $e_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ dla dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$
c \cdot A = c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Przykład 1. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Obliczyć $A + B$, $5A$ oraz $3 \cdot A - 2 \cdot B$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 15 & 0 \\ 20 & 10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot A - 2 \cdot B = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 12 & 6 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 7 & 6 \\ 10 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Niech $A = [a_{ik}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times p$, zaś $B = [b_{kj}]$ będzie macierzą wymiaru $p \times n$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz wymiaru $m \times n$ określoną wzorem:

$A \cdot B = [c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}] \cdot [b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{pj}]$ dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Inaczej mówiąc, wyraz c_{ij} stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy $A \cdot B$ jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza macierzy A i j-tej kolumny macierzy B (traktujemy tutaj wiersze i kolumny macierzy jako wektory).

Mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne (nie musi zachodzić równość $A \cdot B = B \cdot A$).

Mnożenie macierzy A i B jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B.

Przykład 2. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.
Obliczyć $A \cdot B$ i $B \cdot A$ i sprawdzić, czy te iloczyny są równe.

Przykład 3. Obliczyć $A \cdot B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ i
$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Macierz transponowana

Jeśli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą wymiaru $m \times n$, to macierzą transponowaną do A nazywamy macierz A^T wymiaru $n \times m$ daną wzorem:

$A^T = [b_{ji}]$, gdzie $b_{ji} = a_{ij}$

Inaczej mówiąc:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Operacja transponowania macierzy zamienia odpowiednie wiersze macierzy A na kolumny macierzy A^T, zaś kolumny macierzy A zamienia na wiersze macierzy A^T.

Przykład 4. Obliczyć A^T, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 0 & -7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Niektóre własności operacji na macierzach

Jeśli działania na podanych macierzach A, B, C są wykonalne, to zachodzą następujące równości:

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (łączność dodawania);

(ii) $A + B = B + A$ (przemienność dodawania);

(iii) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (łączność mnożenia);

(iv) $A \cdot I = A$; $I \cdot B = B$ (macierz jednostkowa jest elementem neutralnym operacji mnożenia macierzy);

(v) $\forall c \in \mathbb{R} \quad A \cdot (c \cdot B) = (c \cdot A) \cdot B = c \cdot (A \cdot B)$;

(vi) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (lewostronna rozdzielność mnożenia względem dodawania);

(vii) $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (prawostronna rozdzielność mnożenia względem dodawania);

(viii) $(A^T)^T = A$.

Niech A będzie dowolną macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$ (stopnia n).

Dla macierzy A zdefiniujemy liczbę nazywaną wyznacznikiem A, oznaczaną $|\, A \,|$ lub $\det A$.

Definicja (indukcyjna definicja wyznacznika - rozwinięcie względem pierwszego wiersza).

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n.

Krok 1. Jeśli $n = 1$ to A jest postaci $A = [a_{11}] = [a]$, określamy:
$\det A = a$

Krok 2. Zakładając, że mamy zdefiniowany wyznacznik macierzy wymiaru $(n-1) \times (n-1)$ definiujemy wyznacznik macierzy A wymiaru $n \times n$ wzorem:
$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{ij} jest macierzą powstałą z A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Twierdzenie Laplace'a (o rozwinięciu wyznacznika względem wiersza lub kolumny). Jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n, to wówczas:

$\det A = (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} \det A_{k2} + \ldots + (-1)^{k+n} a_{kn} \det A_{kn}$ (rozwinięcie względem k-tego wiersza),

$\det A = (-1)^{1+l} a_{1l} \det A_{1l} + (-1)^{2+l} a_{2l} \det A_{2l} + \ldots + (-1)^{n+l} a_{nl} \det A_{nl}$ (rozwinięcie względem l-tej kolumny),

gdzie A_{ij} oznacza, jak wcześniej, macierz powstałą z A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny).

Wzory na wyznaczniki macierzy 2×2 i 3×3

(i) jeśli A jest macierzą 2×2 postaci $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, to wówczas

$\det A = ad - bc$;

(ii) jeśli A jest macierzą 3×3 postaci $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, to wówczas

$\det A = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$ (wzór Sarrusa, na tablicy podaję związany z tym wzorem schemat obliczania wyznaczników macierzy 3×3).

Przykład 5. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Przykład 6. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]$ stopnia n nazywamy macierzą trójkątną, jeśli spełnia ona jeden z dwóch warunków:

(i) $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ (warunek ten oznacza, że wszystkie wyrazy macierzy leżące poniżej przekątnej są równe 0), macierz A nazywamy wówczas macierzą górnotrójkątną;

(ii) $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ (warunek ten oznacza, że wszystkie wyrazy macierzy leżące powyżej przekątnej są równe 0), macierz A nazywamy wówczas macierzą dolnotrójkątną.

Jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n, to wówczas spełnione są warunki:

(i) $\det A^T = \det A$;

(ii) jeśli A jest macierzą trójkątna, to $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ (inaczej mówiąc, wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi wszystkich wyrazów leżących na przekątnej tej macierzy);

Przykład 7. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Upraszczanie macierzy

Rozpatrujemy następujące elementarne operacje na wierszach macierzy A:

I) Dodanie do wiersza $w_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ innego wiersza $w_j = [a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}]$ pomnożonego przez liczbę c (tzn. i-ty wiersz $w_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ zastępujemy wierszem $w_i' = w_i + cw_j = [a_{i1} + ca_{j1}, a_{i2} + ca_{j2}, \ldots, a_{in} + ca_{jn}]$);

II) Zamiana dwóch wierszy miejscami;

III) Pomnożenie wiersza w_i przez niezerową liczbę d (tzn. zastępujemy w_i przez $w_i'' = dw_i = [da_{i1}, da_{i2}, \ldots, da_{in}]$).

Analogicznie definiujemy operacje typu I, II i III na kolumnach.

Kolejne własności wyznaczników

i) Jeśli macierz kwadratowa B powstała z macierzy A przez wykonanie operacji typu I (na wierszach lub kolumnach), to $\det B = \det A$ (operacje typu I nie zmieniają wyznacznika macierzy);

ii) jeśli macierz kwadratowa B powstała z macierzy A przez wykonanie operacji typu II (na wierszach lub kolumnach), to $\det B = -\det A$ (operacje typu II zmieniają jedynie znak wyznacznika);

iii) Jeśli macierz kwadratowa B powstała z macierzy A przez wykonanie operacji typu III (na wierszach lub kolumnach), to $\det B = d \cdot \det A$ (wykonanie operacji typu III na macierzy A powoduje pomnożenie wyznacznika przez d).

Twierdzenie Cauchy'ego (o wyznaczniku iloczynu macierzy). Jeśli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to zachodzi równość $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Przykład 8. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -3 & -3 \\ 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$.

Przykład 9. Obliczyć wyznacznik macierzy ABA^T, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Macierz nieosobliwa

Mówimy, że macierz kwadratowa A jest nieosobliwa, jeśli $\det A \neq 0$; w przeciwnym przypadku mówimy, że macierz A jest osobliwa.

Twierdzenie. Jeśli A jest macierzą kwadratową, to następujące warunki są równoważne:

(i) A jest osobliwa;

(ii) pewien wiersz w_i macierzy A jest kombinacją liniową innych wierszy;

(iii) pewna kolumna k_j macierzy A jest kombinacją liniową innych kolumn.

Wnioski. Załóżmy, że A jest macierzą kwadratową, wówczas:

(a) jeśli jeden z wierszy macierzy A składa się z samych zer, to A jest osobliwa;

(b) jeśli jedna z kolumn macierzy A składa się z samych zer, to A jest osobliwa;

(c) jeśli jeden z wierszy macierzy A jest sumą dwóch (lub większej ilości) innych wierszy, to A jest osobliwa;

(d) jeśli jedna z kolumn macierzy A jest sumą dwóch (lub większej ilości) innych kolumn, to A jest osobliwa;

(e) jeśli jeden z wierszy macierzy A jest równy innemu wierszowi pomnożonemu przez liczbę, to A jest osobliwa;

(f) jeśli jedna z kolumn macierzy A jest równa innej kolumnie pomnożonej przez liczbę, to A jest osobliwa.

Przykład 10. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -3 & -5 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 6 & 8 \\ -2 & 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 & -6 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & -8 \end{bmatrix}$. Sprawdzić, czy macierz AB jest osobliwa.

Macierz odwrotna

Jeśli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą wymiaru $n \times n$, to macierzą odwrotną do A nazywamy macierz A^{-1} wymiaru $n \times n$, spełniającą warunek:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową stopnia n.

Twierdzenie (o istnieniu macierzy odwrotnej). Jeśli A jest macierzą kwadratową, to macierz odwrotna do A istnieje wtedy i tylko wtedy gdy A jest macierzą nieosobliwą.

Twierdzenie (o wyznaczniku macierzy odwrotnej). Jeśli A jest macierzą nieosobliwą, to $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A nazywamy macierz $A^D = [b_{ij}]$, gdzie $b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, \ldots n$, przy czym A_{ij} oznacza, jak wcześniej, macierz powstałą z A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Element b_{ij} zdefiniowany powyższym wzorem nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} dla $i, j = 1, 2, \ldots n$.

Twierdzenie.

Jeśli A jest nieosobliwą macierzą stopnia n, to $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^D)^T$.

Wniosek. Jeśli A jest macierzą 2×2 postaci $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, to wówczas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Przykład 11. Obliczyć A^{-1}, gdzie $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Przykład 12. Obliczyć A^{-1}, gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.