Ciągi liczbowe

Nieskończonym ciągiem liczbowym o wyrazach rzeczywistych nazywamy funkcję $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, przyporządkowującą każdej liczbie naturalnej n liczbę rzeczywistą a_n. Ciąg liczbowy oznaczać będziemy przez $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Mówimy, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, jeśli istnieją dwie liczby rzeczywiste $a < b$ takie, że $a < a_n < b$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga:

W powyższej definicji możemy zastąpić nierówność ostrą nierównością nieostrą, tzn. ciąg jest ograniczony, jeśli istnieją dwie liczby rzeczywiste $a < b$ takie, że $a \leq a_n \leq b$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Ciągi monotoniczne

Ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący (odpowiednio, niemalejący) jeśli $\forall n, m \in \mathbb{N}\ m > n \implies a_m > a_n$ (odpowiednio, $a_m \geq a_n$).

Ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący (odpowiednio, nierosnący) jeśli $\forall n, m \in \mathbb{N}\ m > n \implies a_m < a_n$ (odpowiednio, $a_m \leq a_n$).

Ciągiem monotonicznym nazywamy ciąg który jest niemalejący lub nierosnący.

Uwaga:

Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} > a_n$, analogiczne twierdzenie zachodzi dla ciągów: niemalejących, malejących i nierosnących.

Przykład 1. Ciąg $a_n = n^2$ jest rosnący i nie jest ograniczony.

Przykład 2. Ciąg $a_n = \frac{1}{n+2}$ jest ciągiem malejącym i ograniczonym.

Przykład 3. Ciąg $a_n = (-1)^n n$ jest nieograniczony i nie jest ani nierosnący ani niemalejący (a zatem, ciąg ten nie jest monotoniczny).

Granica ciągu

Pierwsza definicja zbieżności ciągu. Mówimy, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ prawie wszystkie (tzn. wszystkie poza skończoną ilością) wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ leżą w odległości mniejszej niż ϵ od punktu g (czyli należą do przedziału $(g-\epsilon, g+\epsilon)$). Fakt ten oznaczamy: $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Definicję zbieżności ciągu możemy równoważnie sformułować:
Druga definicja zbieżności ciągu. Ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$ jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \quad | \, a_n - g \, | < \epsilon$$

warunek ten możemy równoważnie zapisać

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ a_n \in (g-\epsilon, g+\epsilon)$$

Ciąg który posiada granicę nazywamy ciągiem zbieżnym, zas ciąg który nie posiada granicy nazywamy ciągiem rozbieżnym.

Przykład 4. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Przykład 5. Ciąg $a_n = 2$ (ciąg stały) jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Przykład 6. Ciąg $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ jest zbieżny do 0.

Twierdzenie. Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie. Jeżeli dwa ciągi różnią się jedynie skończoną ilością wyrazów i pierwszy z tych ciągów ma granicę, to wówczas drugi ciąg ma tę samą granicę (zmiana skończenie wielu wyrazów ciągu nie ma wpływu na granicę).

Twierdzenie. Każdy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ który jest zbieżny spełnia następujący warunek, nazywany warunkiem Cauchy'ego:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m > n_0 \ \ | a_n - a_m |< \epsilon$$

Przykład 7. Ciąg $a_n = (-1)^n$ jest rozbieżny.

Działania na granicach ciągów

Twierdzenie. Jeśli istnieją granice ciągów: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, to poniższe granice również istnieją i są równe:

$\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, $c \in \mathbb{R}$,

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ przy założeniu: $b \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N}\ b_n \neq 0)$,

$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$ przy założeniu: $a > 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0)$. Równość ta zachodzi również przy założeniu: $a = 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} a_n > 0) \wedge b > 0$.

Przykład 8. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-1}{2n^2+2} = \frac{3}{2}$

Przykład 9. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$.

Przykład 10. (bez uzasadnienia) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Wniosek. Jeśli $w(x)$ jest wielomianem stopnia $m \geq 1$ takim, że $w(n) \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to wówczas

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{w(n)} = 1$$

Przykład 11. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2n^2 + 5n + 3} = 1$

Granice nieskończone (niewłaściwe) ciągu

Definicja. Mówimy, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (odpowiednio, granicę niewłaściwą $-\infty$) jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ a_n \geq M \text{ (odpowiednio, } a_n \leq M)$$

Mówimy wtedy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (odpowiednio, rozbieżny do $-\infty$) i oznaczamy ten fakt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (odpowiednio $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$)

Przykład 12. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

Twierdzenie. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny to jest ograniczony.

Twierdzenie. Ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę skończoną.

Twierdzenie. Ciąg monotoniczny i nieograniczony ma granicę niewłaściwą: niemalejący $+\infty$, nierosnący $-\infty$.

Działania na ciągach posiadających granicę nieskończoną

W niektórych przypadkach gdy jeden z ciągów (a_n), (b_n) ma granicę niewłaściwą, zaś drugi ma granicę skończoną lub niewłaściwą, możemy obliczyć granicę ich sumy $a_n + b_n$, różnicy $a_n - b_n$, iloczynu $a_n \cdot b_n$, ilorazu $\frac{a_n}{b_n}$ lub potęgi $a_n^{b_n}$ (w przypadkach tych wymienione granice takie będziemy oznaczać odpowiednio symbolami $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$, A^B, gdzie $A, B \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ są granicami odpowiednio ciągów (a_n) i (b_n)). Przykładowo, zachodzą następujące równości (wszędzie zakładamy że $a \in \mathbb{R}$).

$\infty + a = \infty$

$\infty - a = \infty$

$-\infty + a = -\infty$

$-\infty - a = -\infty$

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\infty \cdot a = \infty$ dla $a > 0$ oraz $\infty \cdot a = -\infty$ dla $a < 0$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$-\infty \cdot \infty = -\infty$

$\frac{a}{\infty} = 0$

$a^{\infty} = \infty$ dla $a > 1$ oraz $a^{\infty} = 0$ dla $0 \leq a < 1$

$\infty^{b} = \infty$ dla $b > 0$ oraz $\infty^{b} = 0$ dla $b < 0$

$\infty^{\infty} = \infty$

Uwaga. Aby poprawnie stosować powyższe wzory przy obliczaniu granic musimy jednocześnie przechodzić do granicy ze wszystkimi ciągami występującymi w wyrażeniu.

Symbole nieoznaczone

W niektórych przypadkach znając granice ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie potrafimy obliczyć granicy ich sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu lub potęgi. Przypadki te są to tzw. symbole nieoznaczone. Przykładowo, następujące symbole nieoznaczone:

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^0, ∞^0

Symbol $\frac{1}{0}$. W przypadku gdy $b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ granica ciągu $\frac{a_n}{b_n}$ jest nieoznaczona. Aby znaleźć tę granicę wystarczy sprawdzić znak b_n:

Jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są dodatnie, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ (oznaczenie: $\frac{1}{0^+} = +\infty$), natomiast jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są ujemne, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ (oznaczenie: $\frac{1}{0^-} = -\infty$). W przypadku gdy ciąg (b_n) ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich oraz nieskończenie wiele wyrazów ujemnych, ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ nie posiada granicy.

Podciągi

Niech dany będzie ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz rosnący ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Wtedy ciąg $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy podciągiem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Przykład 13. Ciąg $(\frac{1}{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots)$ jest podciągiem ciągu $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$

Twierdzenie. Jeśli ciąg ma granicę (właściwą lub niewłaściwą), to każdy jego podciąg ma tę samą granicę.

Wniosek. Jeśli ciąg (a_n) ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic (właściwych lub niewłaściwych) to ciąg ten nie ma granicy (właściwej ani niewłaściwej).

Liczba Eulera

Przykład 14. (bez uzasadnienia). Ciąg $(1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony, a zatem jest zbieżny.

Granicę tego ciągu oznaczamy symbolem e:

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

Liczba e (zwana liczbą Eulera) jest liczbą niewymierną z przedziału $(2,3)$ (nieco dokładniej mówiąc, rozwinięcie tej liczby do pierwszego miejsca po przecinku to $2,7\ldots$).

Twierdzenie. Jeśli (a_n) jest ciągiem takim, że $a_n > -1$, $a_n \neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to wówczas $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

Wniosek. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{p}{n})^n = e^p$

Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie. Dane sa trzy ciągi: (a_n), (b_n) i (c_n) takie, że $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n \leq c_n$. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny i ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Uwaga. Podobne twierdzenie zachodzi dla granic nieskończonych; wystarczą wtedy tylko dwa ciągi:

Jeśli $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, to wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Jeśli $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Uwaga. W twierdzeniu o trzech ciągach można zastąpić warunek $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n \leq c_n$ słabszym warunkiem, że nierówność ta zachodzi dla prawie wszystkich liczb naturalnych n.

Twierdzenie. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to wówczas
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} | a_n |= 0$

Twierdzenie. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do 0, zaś ciąg (b_n) jest ograniczony, to wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Granica ciągu geometrycznego

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg postaci $a_n = pq^n$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Jeśli $q > 1$, $p > 0$ ($p < 0$), to wówczas granica ciągu geometrycznego $a_n = pq^n$ jest równa ∞ (odpowiednio, $-\infty$)

Jeśli $\mid q \mid < 1$, to wówczas granica ciągu geometrycznego $a_n = pq^n$ jest równa 0.