Literatura

M. Gewert, Z. Skoczylas. *Algebra liniowa1. Definicje, twierdzenia, wzory. Przykłady, zadania. Kolokwia, egzaminy.* Oficyna Wydawnicza GiS.

M. Gewert, Z. Skoczylas. *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory. Przykłady i zadania. Kolokwia i egzaminy.* Oficyna Wydawnicza GiS.

W. Krysicki, L. Włodarski. *Analiza matematyczna w zadaniach.* cz1 PWN

WEKTORY W PRZESTRZENI $\mathbb{R}^n$

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich ciągów n-elementowych o wyrazach rzeczywistych, to znaczy

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

W szczególności, $\mathbb{R}^2$ jest zbiorem wszystkich uporządkowanych par liczb rzeczywistych:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\};$$

$\mathbb{R}^3$ jest zbiorem wszystkich uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Pierwsza geometryczna interpretacja $\mathbb{R}^3$: przestrzeń $\mathbb{R}^3$ można interpretować jako zbiór wszystkich punktów $P = (x, y, z)$ w $\mathbb{R}^3$ (liczby x, y i z są wówczas współrzędnymi punktu P w kartezjańskim układzie współrzędnych).

Analogicznie możemy interpretować przestrzeń $\mathbb{R}^2$ oraz przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

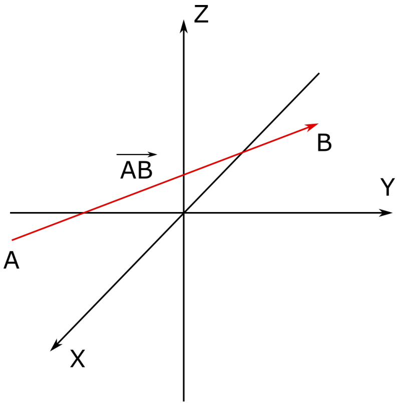
Odległością punktów $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

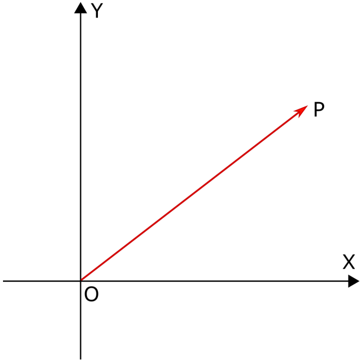
Przykład 1. Obliczyć odległość punktów $A = (5, 2, 1)$ i $B = (7, 3, -1)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

$$d(A, B) = \sqrt{(7-5)^2 + (3-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Wektorem związanym $\overrightarrow{AB}$ w $\mathbb{R}^n$ nazwiemy uporządkowaną parę punktów $A, B \in \mathbb{R}^n$. Punkty A i B będziemy nazywać odpowiednio początkiem i końcem wektora $\overrightarrow{AB}$.

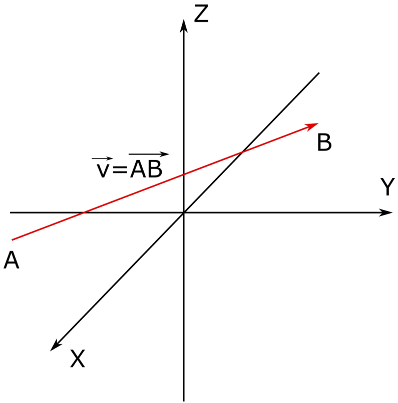


Jeśli P jest punktem w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś $O = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, to wektor związany $\overrightarrow{OP}$ nazywamy wektorem wodzącym punktu P.



Druga geometryczna interpretacja $\mathbb{R}^n$: przestrzeń $\mathbb{R}^n$ można interpretować jako zbiór wszystkich wektorów wodzących $\overrightarrow{OP}$. W tej interpretacji elementy $\mathbb{R}^n$ nazywamy wektorami. Jeśli $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to wtedy piszemy $\overrightarrow{OP} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, zaś liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy współrzędnymi wektora $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$.

Jeśli $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ są punktami w $\mathbb{R}^n$, to wektorem swobodnym odpowiadającym wektorowi związanemu $\overrightarrow{AB}$ będziemy nazywać wektor $\overrightarrow{v} = [y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n]$. Wektor $\overrightarrow{AB}$ będziemy wtedy inaczej określać jako wektor $\overrightarrow{v}$ zaczepiony w punkcie A i będziemy pisali $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

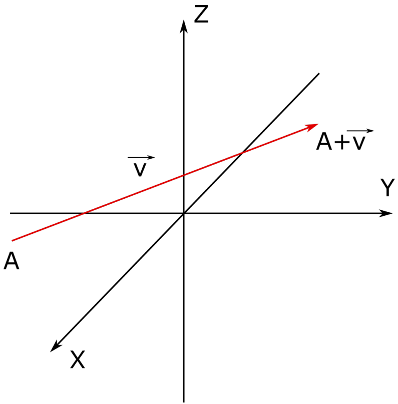


Przykład 2. Jeśli $A = (-4, 1, 5, 2)$ oraz $B = (5, 2, 3, -1)$, to
$\overrightarrow{AB} = [5 - (-4), 2 - 1, 3 - 5, -1 - 2] = [9, 1, -2, -3]$

Dodawanie wektora $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ do punktu $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wykonujemy następująco:

$$A + \overrightarrow{v} = (x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n)$$

Punkt $A + \overrightarrow{v}$ jest końcem wektora $\overrightarrow{v}$ zaczepionego w punkcie A.



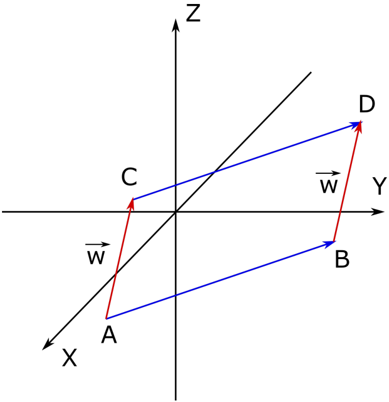
Mówimy, że punkt B jest przesunięciem równoległym punktu A o wektor $\overrightarrow{v}$, jeśli $B = A + \overrightarrow{v}$, co jest równoważne temu, że punkt B jest końcem wektora $\overrightarrow{v}$ zaczepionego w punkcie A.

Uwaga. Jeśli A i B są punktami w $\mathbb{R}^n$, to wówczas punkt B jest przesunięciem punktu A o wektor $\overrightarrow{AB}$, a zatem zachodzi równość $B = A + \overrightarrow{AB}$.

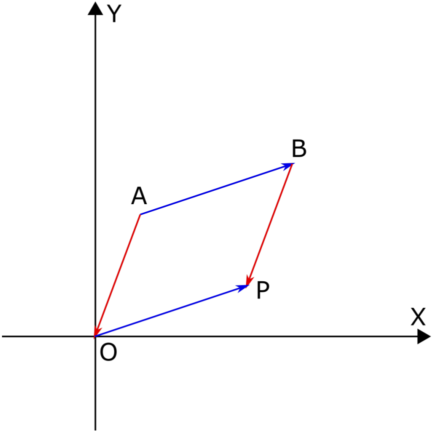
Przykład 3. Znaleźć punkt B, będący przesunięciem punktu $A = (1, 2, 3)$ o wektor $\overrightarrow{v} = [2, -3, 4]$

Punkt B jest końcem wektora $\overrightarrow{v}$ zaczepionego w punkcie A, a zatem $B = A + \overrightarrow{v} = (1, 2, 3) + [2, -3, 4] = (3, -1, 7)$

Będziemy mówić, że wektor $\overrightarrow{CD}$ jest przesunięciem równoległym o wektor $\overrightarrow{w}$ wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli punkty C i D są przesunięciem równoległym o wektor $\overrightarrow{w}$ odpowiednio punktów A i B.



Uwaga. Niech $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ będą punktami w $\mathbb{R}^n$. Jeśli przesuniemy wektor $\overrightarrow{AB}$ o wektor $\overrightarrow{AO} = [-x_1, -x_2, \ldots, -x_n]$, to otrzymamy wektor wodzący punktu $P = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$.



Operacje na wektorach

Suma wektorów $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ to wektor $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n]$

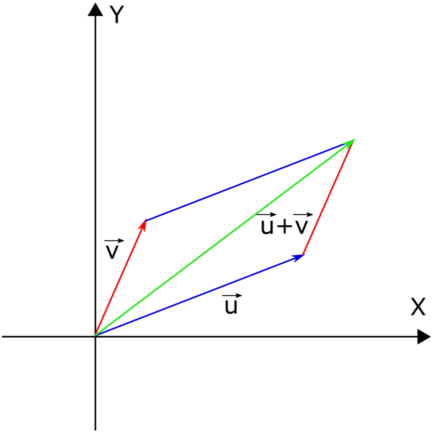
Iloczyn wektora $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ przez skalar $c \in \mathbb{R}$ to wektor $c\overrightarrow{v} = [cv_1, cv_2, \dots, cv_n]$.

Przykład 4. Dane są wektory $\overrightarrow{v} = [2, 1, 0, -3]$ i $\overrightarrow{w} = [3, -2, 7, 5]$. Obliczyć wektory $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{v}$ i $(-1)\overrightarrow{w}$.

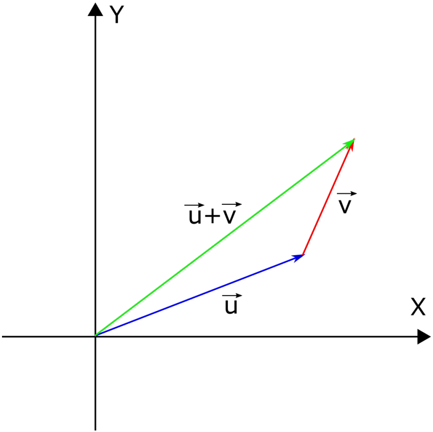
$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = [2, 1, 0, -3] + [3, -2, 7, 5] = [2 + 3, 1 - 2, 0 + 7, -3 + 5] = [5, -1, 7, 2]$

$3\overrightarrow{v} = 3[2, 1, 0, -3] = [6, 3, 0, -9]$

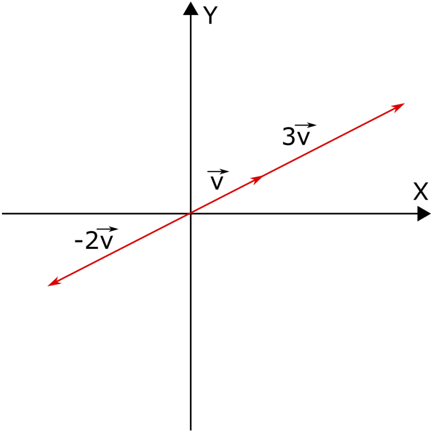
$(-1)\overrightarrow{w} = (-1)[3, -2, 7, 5] = [-3, 2, -7, -5]$



Dodawanie wektorów zgodnie z regułą równoległoboku.



Dodawanie wektorów zgodnie z regułą trójkąta.



Mnożenie wektora przez skalar.

Kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ o współczynnikach $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + x_m\overrightarrow{a_m}$

Przykład 5. Obliczyć kombinację wektorów $[5, 1, -2]$, $[2, -3, 4]$, $[-1, 2, 7]$ ze współczynnikami $2, -3, 4$

$\overrightarrow{v} = 2[5, 1, -2] + (-3)[2, -3, 4] + 4[-1, 2, 7] =$
$[10, 2, -4] + [-6, 9, -12] + [-4, 8, 28] = [0, 19, 12]$.

Długością wektora $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ nazywamy liczbę $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$. Zatem jeśli $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, to wtedy $\overrightarrow{AB} = [y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n]$, zachodzi zatem równość:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2},$$

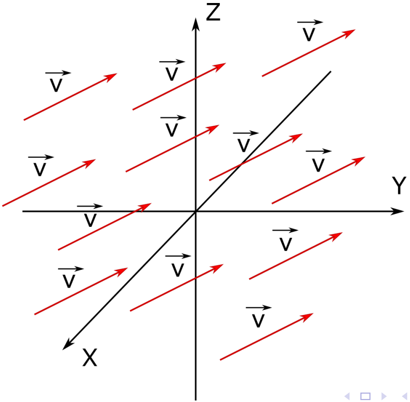
(długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa odległości punktów A i B).

Wektor $\overrightarrow{v}$ jest wersorem, jeśli $|\overrightarrow{v}| = 1$.

Mówimy że dwa niezerowe (tzn. różne od wektora zerowego $\overrightarrow{0} = [0, 0, \ldots, 0]$) wektory $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ mają ten sam kierunek, jeśli są one równoległe, co jest równoważne temu że jeden z tych wektorów jest iloczynem drugiego przez skalar, czyli $\exists c \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{w}$; jeżeli dodatkowo spełniony jest warunek $c > 0$, to mówimy że wektory $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ mają ten sam zwrot.

Mówimy, że dwa wektory związane $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są przystające, jeśli wektory te mają tę samą długość, kierunek i zwrot.

Warunek powyższy równoważny jest warunkowi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ (w takim przypadku $\overrightarrow{AB}$ jest wektorem $\overrightarrow{v}$ zaczepionym w punkcie A, zaś $\overrightarrow{CD}$ jest tym samym wektorem $\overrightarrow{v}$ zaczepionym w punkcie C). Jeśli wektory związane są przystające, to są reprezentantami tego samego wektora swobodnego.

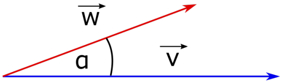


Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny $\vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ możemy równoważnie zdefiniować na dwa sposoby:

I) jako liczbę (skalar) $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$;

II) wzorem $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$, gdzie α jest kątem między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$.



Przykład 6. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{v} = [2, -3, 4, 5]$ i $\vec{w} = [-1, 7, -3, 6]$.

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 7 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 = -2 - 21 - 12 + 30 = -5$

Fakty związane z iloczynem skalarnym oraz długością

Dla dowolnej liczby rzeczywistej c oraz dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą warunki:

(i) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$ (symetria);

(ii) $\overrightarrow{t} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{w}$;

(iii) $\overrightarrow{t} \cdot (c\overrightarrow{v}) = c(\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{v})$;

(iv) jeśli $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, to $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} > 0$ (dodatnia określoność);

(v) $| \overrightarrow{v} | = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$;

(vi) $| c\overrightarrow{v} | = | c | \cdot | \overrightarrow{v} |$;

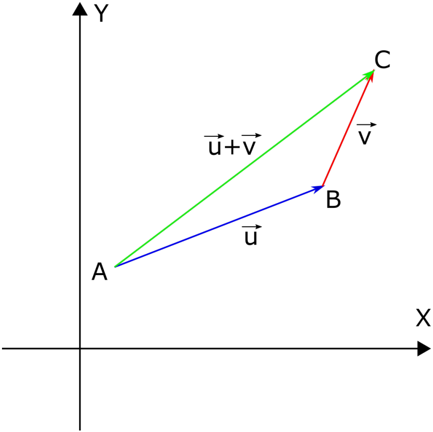
(vii) $| \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} | \leq | \overrightarrow{v} | + | \overrightarrow{w} |$ (nierówność trójkąta);

(viii) $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$ (cosinus kąta między niezerowymi wektorami).

Uwaga:

Ze wzoru (viii) wynika, że dwa wektory $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$

Inna wersja nierówności trójkąta: dla dowolnych punktów $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność
$| \overrightarrow{AC} | \leq | \overrightarrow{AB} | + | \overrightarrow{BC} |$

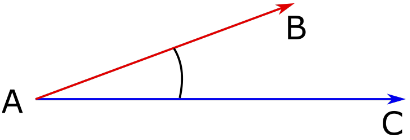


Przykład 7. Obliczyć długość wektora $\overrightarrow{v} = [4, 1, -3]$ oraz długość wektora $7\overrightarrow{v}$

$| \overrightarrow{v} | = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$

$| 7\overrightarrow{v} | = 7\sqrt{26}$

Przykład 8. Obliczyć kąt między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, gdzie $A = (3, 5, -2),\ B = (5, 3, -2),\ C = (3, 6, -1)$

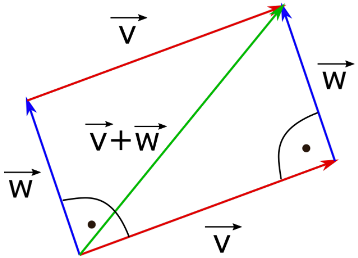


$\overrightarrow{AB} = [2, -2, 0],\ \overrightarrow{AC} = [0, 1, 1]$

$\cos(\measuredangle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{[2,-2,0]\cdot[0,1,1]}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{0+1+1}} = \frac{-2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{16}} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$

$\measuredangle BAC = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Twierdzenie Pitagorasa: wektory $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi równość
$|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{w}|^2$



Liniowa niezależność układu wektorów

Mówimy, że układ wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 2$, jest liniowo zależny, jeśli istnieje liczba $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ taka, że wektor a_i jest kombinacją układu $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k$

W przeciwnym przypadku mówimy, że układ jest liniowo niezależny.

Układ złożony z jednego wektora jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy wektor ten jest różny od wektora zerowego.

Uwaga. (a) każdy układ zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny,

(b) każdy układ zawierający dwa wektory równoległe jest liniowo zależny.