

Funkcje i ich własności

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ (funkcja f ze zbioru X w zbiór Y) to przyporządkowanie, które każdemu elementowi x ze zbioru X przypisuje dokładnie jeden element ze zbioru Y (element ten oznaczamy przez $f(x)$).

Każdy element x zbioru X nazywa się **argumentem** funkcji.

Każdy element $y = f(x)$ nazywa się **wartością** funkcji.

X nazywamy **dziedziną** funkcji f i oznaczamy symbolem D_f .

Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji f .

Zbiór wszystkich $y \in Y$ dla których istnieje $x \in X$ takie że $y = f(x)$ nazywamy **zbiorem wartości** funkcji f .

W przypadku gdy $X \subset \mathbb{R}$ oraz $Y \subset \mathbb{R}$ funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej**.

Jeśli mamy określoną wzorem funkcję rzeczywistą $f(x)$ zmiennej rzeczywistej, przy czym dziedzina lub przeciwdziedzina tej funkcji nie są podane, to przyjmujemy że przeciwdziedzina funkcji $f(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych, zaś jej dziedziną jest zbiór wszystkich tych $x \in \mathbb{R}$ dla których możliwe jest obliczenie wartości $f(x)$ za pomocą wzoru definiującego funkcję f .

Jeśli f jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej, to mówimy, że f jest **parzysta** (odpowiednio, **nieparzysta**), jeśli $\forall x \in D_f$ zachodzi równość $f(-x) = f(x)$ (odpowiednio, $f(-x) = -f(x)$).

Jeśli f jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej, to mówimy, że f jest **okresowa** jeśli $\exists t > 0 \forall x \in D_f f(x + t) = f(x) = f(x - t)$.

Funkcja f jest **różnowartościowa**, jeśli dla dowolnych $x, y \in D_f$ takich że $x \neq y$, zachodzi warunek $f(x) \neq f(y)$.

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją z X na Y (w skrócie funkcją „na”), jeśli dla dowolnego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = y$ (a zatem, f jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór wartości i przeciwdziedzina są takie same).

Przykład 1. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sin x$ nie jest funkcją różnowartościową ani „na”, funkcja ta jest nieparzysta i okresowa.

Przykład 2. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \cos x$ nie jest funkcją różnowartościową ani „na”, funkcja ta jest parzysta i okresowa.

Przykład 3. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = e^x$ jest funkcją różnowartościową, nie jest funkcją „na”, nie jest funkcją parzystą, nieparzystą ani okresową.

Mówimy, że f jest **bijekcją** (albo inaczej, że f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną), jeśli f jest różnowartościowa i „na”,

Inaczej mówiąc, $f : X \rightarrow Y$ jest bijekcją jeśli dla każdego $y \in Y$ istnieje dokładnie jeden element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$.

Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest bijekcją, to możemy określić funkcję $f^{-1} : Y \rightarrow X$ przyporządkowującą każdemu elementowi $y \in Y$ jedyny element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$, funkcję tę nazywamy funkcją **odwrotną** do funkcji f .

Funkcję odwrotną możemy scharakteryzować następującym warunkiem:

dla dowolnych $x \in X, y \in Y$ równość $f^{-1}(y) = x$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = y$.

Przykład 4. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ określona wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, jest bijekcją. Funkcją odwrotną f^{-1} do tej funkcji jest funkcja $\log_a x$.

Funkcję $\log_e x$, będącą funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = e^x$, nazywamy **logarytmem naturalnym** z liczby $x > 0$ i oznaczamy przez **$\ln x$** .

Dziedziną funkcji $\ln x$ jest zatem zbiór $(0, +\infty)$, zaś jej przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

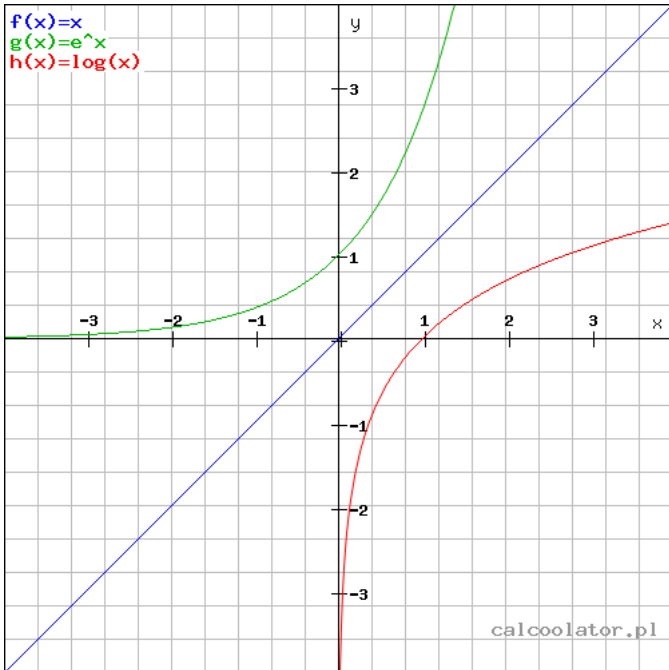
Funkcję $\ln x$ możemy scharakteryzować następującym warunkiem:

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad \ln x = y \iff e^y = x.$$

Spełnione są równości:

i) $\forall x \in (0, +\infty) \quad e^{\ln x} = x$

ii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$



Przykład 5. Funkcja $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$ określona wzorem $f(x) = \sin x$ jest bijekcją, zatem istnieje funkcja $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, będąca funkcją odwrotną do f ; funkcję tę oznaczamy **arcsinx**.

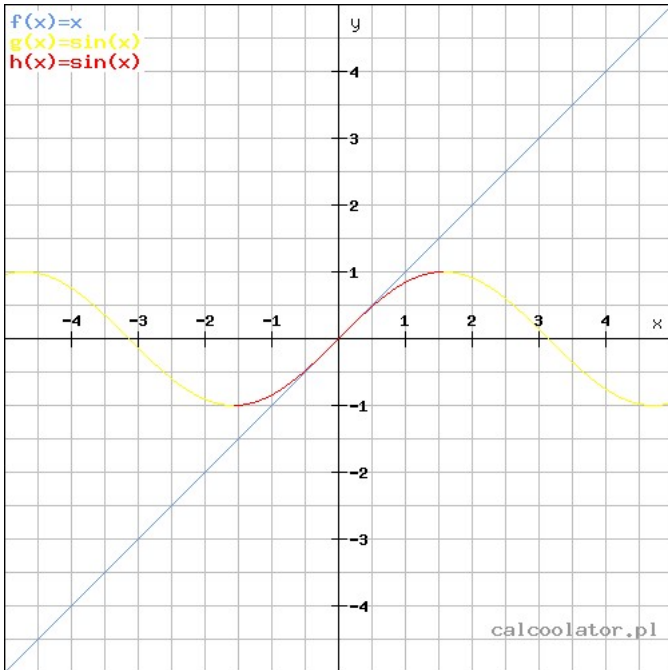
Funkcję $\arcsin x$ można scharakteryzować warunkiem:

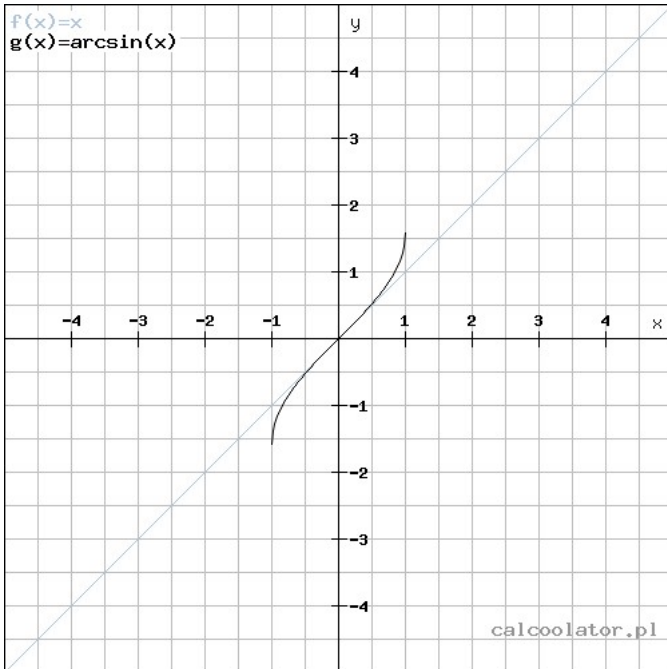
$$\forall x \in (-1, 1) \quad \arcsin x = y \iff (\sin y = x \wedge y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)).$$

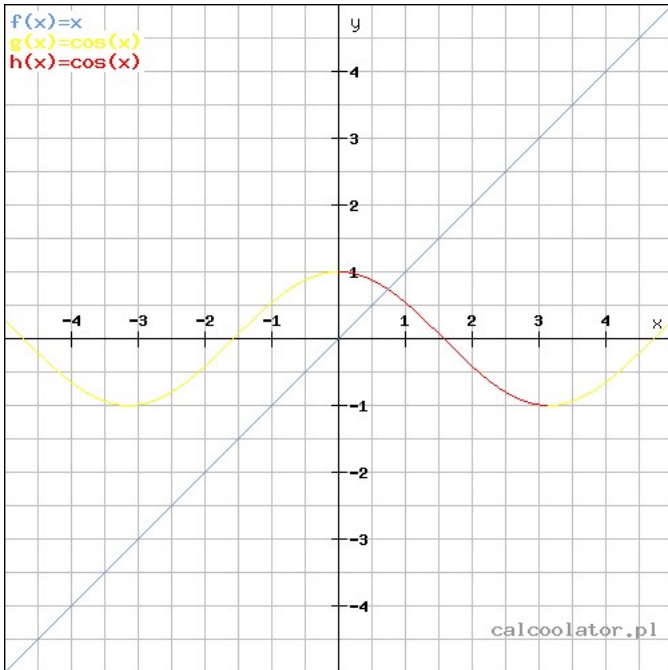
Przykład 6. Funkcja $f : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$ określona wzorem $f(x) = \cos x$ jest bijekcją, zatem istnieje funkcja $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$, będąca funkcją odwrotną do f ; funkcję tę oznaczamy **arccosx**.

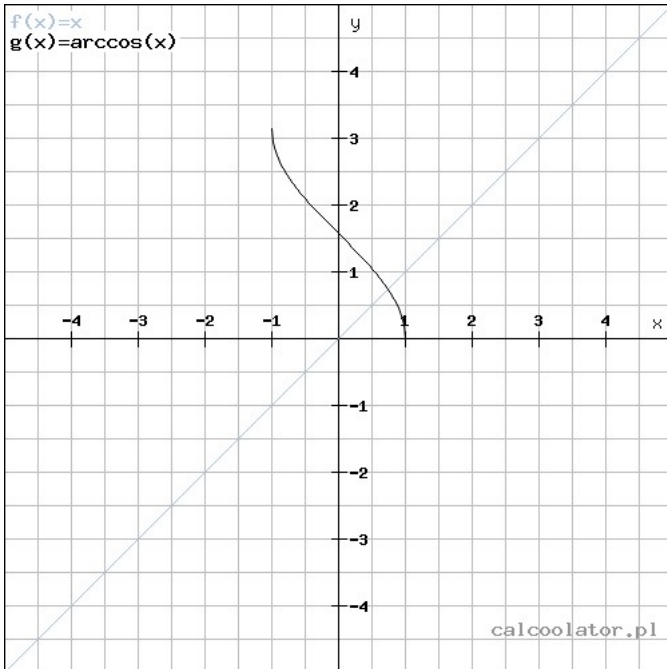
Funkcję $\arccos x$ można scharakteryzować warunkiem:

$$\forall x \in (-1, 1) \quad \arccos x = y \iff (\cos y = x \wedge y \in (0, \pi)).$$









Przykład 7. Funkcja $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \operatorname{tg}x$ jest bijekcją, zatem istnieje funkcja $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, będąca funkcją odwrotną do f ; funkcję tę oznaczamy **arctgx**.

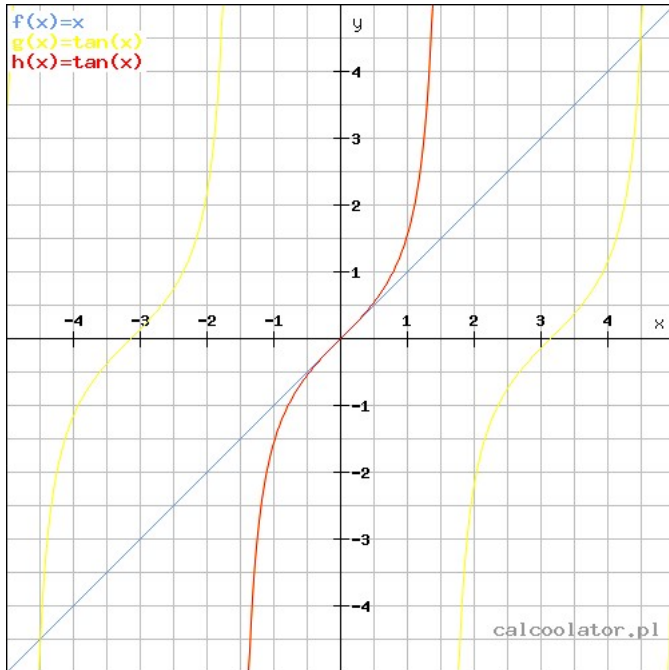
Funkcję $\operatorname{arctg}x$ można scharakteryzować warunkiem:

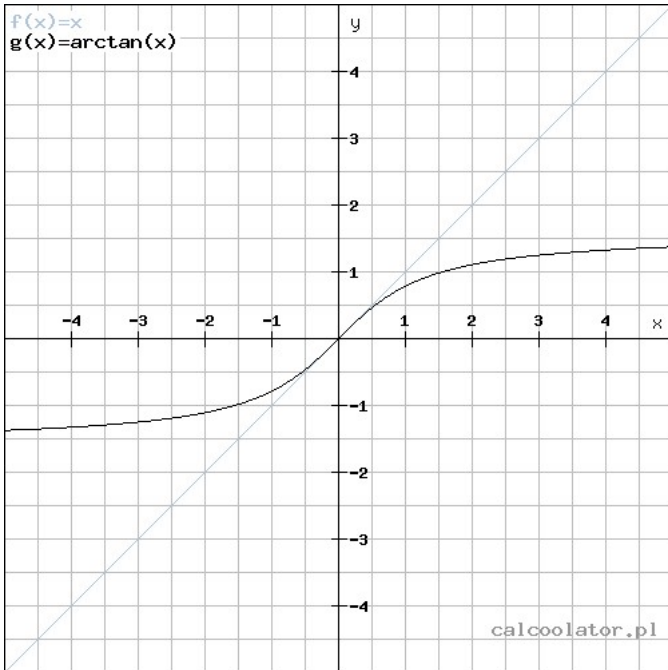
$$\forall x \in \mathbb{R} \operatorname{arctg}x = y \iff (\operatorname{tgy} = x \wedge y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})).$$

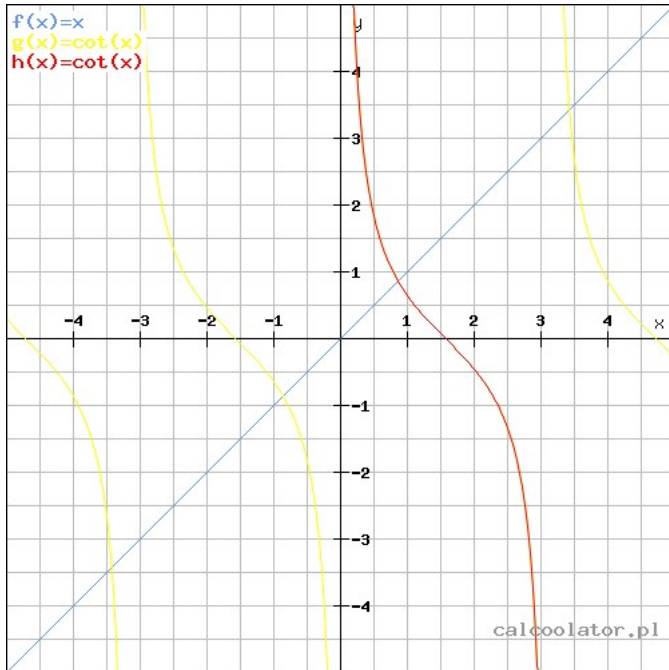
Przykład 8. Funkcja $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \operatorname{ctg}x$ jest bijekcją, zatem istnieje funkcja $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, będąca funkcją odwrotną do f ; funkcję tę oznaczamy **arcctgx**.

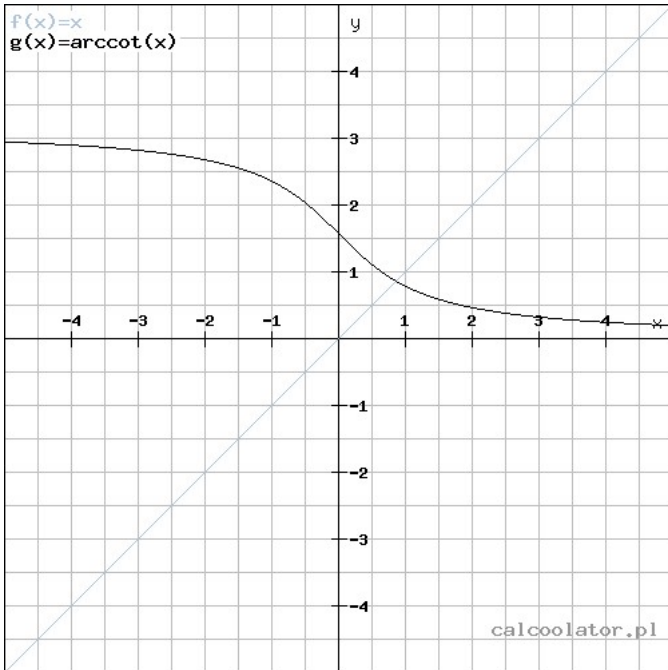
Funkcję $\operatorname{arcctg}x$ można scharakteryzować warunkiem:

$$\forall x \in \mathbb{R} \operatorname{arcctg}x = y \iff (\operatorname{ctgy} = x \wedge y \in (0, \pi)).$$









Złożenie funkcji

Jeśli $g : X \rightarrow Y$ i $f : Y \rightarrow Z$ są funkcjami, to **złożeniem** funkcji f i funkcji g nazywamy funkcję $f \circ g : X \rightarrow Z$ określoną wzorem:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Funkcję f nazywamy wówczas **funkcją zewnętrzną funkcji złożonej $f \circ g$** , zaś funkcję g nazywamy **funkcją wewnętrzną funkcji złożonej $f \circ g$** .

Przykład 9. Dla funkcji złożonej $\sin^2 x$ funkcją zewnętrzną jest funkcja $f(y) = y^2$, zaś funkcją wewnętrzną funkcja $g(x) = \sin x$.

Przykład 10. Dla funkcji złożonej $\sin(x^2)$ funkcją zewnętrzną jest funkcja $f(y) = \sin y$, zaś funkcją wewnętrzną funkcja $g(x) = x^2$.

Przykład 11. Dla funkcji złożonej $e^{\cos x}$ funkcją zewnętrzną jest funkcja $f(y) = e^y$, zaś funkcją wewnętrzną funkcja $g(x) = \cos x$.

Granica funkcji

Punkt $a \in A \subset \mathbb{R}$ nazywamy **punktem skupienia** zbioru A jeśli a jest granicą ciągu (x_n) , którego wyrazy należą do zbioru A i są różne od a .

Przykład 12. Jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem o niezerowej długości, to każdy punkt $a \in A$ jest punktem skupienia zbioru A .

Niech dana będzie funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, oraz punkt skupienia a zbioru A . Mówimy, że $b \in \mathbb{R}$ jest **granicą funkcji f w punkcie a** (oznaczenie: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do a i takiego, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do A i są różne od a , zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Analogicznie definiujemy granicę dla $a = \infty$, $a = -\infty$, $b = \infty$, $b = -\infty$. Dla $a = +\infty$ (odpowiednio $a = -\infty$) należy jedynie zastąpić warunek że a jest punktem skupienia zbioru A warunkiem, że A nie jest ograniczony z góry (odpowiednio, z dołu).

Jeżeli w definicji granicy funkcji zastąpimy warunek $x_n \neq a$ warunkiem $x_n < a$ (odpowiednio, $x_n > a$) to dostaniemy definicję **granicy lewostronnej** (odpowiednio, **prawostronnej**).

Twierdzenie. Niech f i g będą funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej i niech a będzie punktem skupienia zbioru $D_f \cap D_g$ (a zatem, a jest również punktem skupienia zbiorów D_f i D_g). Jeśli istnieją granice $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ to wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = FG$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \text{ jeśli } G \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = F^G, \text{ jeśli } F > 0 \text{ lub } F = 0 \text{ i } G > 0$$

Uwaga. Powyższe równości będą spełnione dla $a = +\infty$ lub $a = -\infty$.

Uwaga. Widać, że przy obliczaniu granic funkcji można stosować podobne techniki co przy obliczaniu granic ciągów. Zasady operowania na granicach niewłaściwych są takie same. Te same są też symbole nieoznaczone.

Przykład 13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Przykład 14. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+px)^{\frac{1}{x}} = e^p, p \in \mathbb{R}$

Przykład 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Przykład 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Twierdzenie o trzech funkcjach. Jeśli a jest punktem skupienia zbioru A , zaś f, g i h są funkcjami określonymi na zbiorze A takimi, że $\forall x \in A \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$, to wówczas $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

Mówimy, że funkcja rzeczywista $f : X \rightarrow Y$ jest **ograniczona** jeśli

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad a < f(x) < b$$

Twierdzenie. Jeśli f jest funkcją rzeczywistą spełniającą warunek $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ zaś g jest funkcją rzeczywistą ograniczoną taką, że x jest punktem skupienia $D_f \cap D_g$, to wówczas $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

Funkcja ciągła

Mówimy, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest **ciągła w punkcie skupienia** $a \in X$ jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Mówimy, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest **ciągła** jeśli f jest ciągła w każdym punkcie skupienia $a \in X$.

Twierdzenie. Funkcje x^α , $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, a^x (gdzie $a > 0$), $\log_a x$ (gdzie $a > 0$, $a \neq 1$), $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$ oraz funkcje stałe są ciągłe.

Twierdzenie. Jeśli funkcje f i g są ciągłe, to ich suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie są ciągłe w swojej dziedzinie; ciągła jest również funkcja $(f(x))^{g(x)}$ przy założeniu: $\forall x \in D_f \ f(x) > 0$

Uwaga:

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła w punkcie skupienia $a \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy granica lewostronna i prawostronna funkcji f w punkcie a są sobie równe oraz są równe $f(a)$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Uwaga. Ciągłość funkcji f w punkcie $a \in D_f$ zależy tylko od wartości $f(x)$ dla x należących do zbioru postaci $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap D_f$, $\epsilon > 0$ (jest to zbiór tych $x \in D_f$ których odległość od a jest mniejsza od ϵ).

Twierdzenie. Niech f będzie funkcją rzeczywistą ciągłą w każdym punkcie przedziału $\langle a, b \rangle \subset D_f$ oraz niech liczba d należy do przedziału o końcach $f(a)$ i $f(b)$ (a zatem $f(a) \leq d \leq f(b)$ lub $f(b) \leq d \leq f(a)$). Wówczas istnieje co najmniej jedna liczba $c \in \langle a, b \rangle$ spełniająca warunek $f(c) = d$.

Uwaga. Twierdzenie powyższe mówi, że funkcja rzeczywista f ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $f(a)$ i $f(b)$ (opisaną tutaj własność nazywa się własnością Darboux).