Układy równań liniowych

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi ma postać ogólną:

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Liczby rzeczywiste a_{ij} nazywamy współczynnikami, zaś liczby b_i nazywamy wyrazami wolnymi układu równań.

Układ jest jednorodny jeśli wszystkie jego wyrazy wolne są równe 0 tzn. jest postaci

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots & a_{2n}x_n & =0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots & a_{mn}x_n & =0 \end{array}\right.$$

n-elementowy ciąg liczb $s_1, s_2, \ldots, s_n$ nazwiemy rozwiązaniem układu równań liniowych U, jeśli po wstawieniu tych liczb w miejsce niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ otrzymujemy dla wszystkich równań układu równości prawdziwe.

Układ jednorodny ma zawsze co najmniej jedno rozwiązanie, jest nim ciąg złożony z zer, tzn. $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Układ nazwiemy sprzecznym jeśli nie ma on rozwiązań (tzn. zbiór rozwiązań jest pusty).

Dwa układy nazwiemy równoważnymi jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Macierz układu równań liniowych

Układowi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Przypisujemy macierz $m \times (n+1)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywaną macierzą tego układu (inaczej, macierzą rozszerzoną układu).

Macierz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą współczynników układu;

Ostatnia kolumna macierzy układu to kolumna wyrazów wolnych $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Uwaga:

Wiersze macierzy rozszerzonej układu równań odpowiadają równaniom z tego układu - wyrazy w i-tym wierszu tej macierzy to współczynniki przy kolejnych zmiennych oraz wyraz wolny z i-tego równania układu.

Układ U możemy inaczej zapisać w formie równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

w skrócie $A \cdot X = B$, gdzie

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Rozwiązywanie układów Cramera

Dla dowolnego układu n równań liniowych z n niewiadomymi **wyznacznikiem** tego układu nazywamy wyznacznik $\det A$ macierzy współczynników tego układu.

Układem Cramera nazywamy układ n równań liniowych z n niewiadomymi, taki że wyznacznik tego układu jest różny od zera.

Układy Cramera możemy rozwiązywać na dwa sposoby:

I sposób: jako równanie macierzowe. Zapisujemy układ Cramera w formie $A \cdot X = B$, gdzie

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, A jest macierzą współczynników układu, zaś B jest kolumną wyrazów wolnych. Ponieważ macierz A ma wyznacznik różny od zera, więc istnieje macierz A^{-1}, obliczamy tę macierz. Mnożymy obie strony równania $A \cdot X = B$ z lewej strony przez macierz A^{-1}, otrzymując równość:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

po obliczeniu iloczynu $A^{-1} \cdot B$ odczytujemy rozwiązanie.

II sposób: z użyciem tzw. wzorów Cramera:

$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$,

gdzie A_i jest macierzą powstałą w wyniku zastąpienia i-tej kolumny macierzy A przez kolumnę wyrazów wolnych.

Czasem wzory Cramera zapisujemy w formie: $x_i = \frac{W_i}{W}$ dla $i = 1, 2, , \ldots, n$, gdzie $W = \det A$ oraz $W_i = \det A_i$.

Upraszczanie układów równań liniowych

Na układzie równań liniowych możemy wykonywać pewne operacje, które nie zmieniają zbioru rozwiązań układu (inaczej mówiąc, przekształcają one dany układ równań U na układ równoważny z U). W wielu przypadkach daje nam to możliwość zastąpienia układu U przez inny układ, który jest równoważny z U i jest prostszy od U (np. ma mniej równań lub ma wiele współczynników równych 0), co bardzo ułatwia dalsze obliczenia.

Operacje mające opisaną powyżej własność to np.

(i) dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę;

(ii) zamiana dwóch równań miejscami;

(iii) pomnożenie jednego z równań przez niezerową liczbę;

(iv) usunięcie z układu równania postaci $0 = 0$;

(v) usunięcie z układu równania, które można uzyskać z innych równań jako ich kombinację (inaczej mówiąc, możemy z układu usunąć równanie które jest sumą dwóch lub większej ilości innych równań z układu pomnożonych przez stałe).

Upraszczanie macierzy układu równań liniowych

Opisanym wcześniej operacjom na układzie równań liniowych odpowiada wykonywanie następujących operacji na wierszach macierzy rozszerzonej tego układu:

(i) dodanie do wiersza $w_i = [w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in}]$ innego wiersza $w_j = [w_{j1}, w_{j2}, \ldots, w_{jn}]$ pomnożonego przez liczbę c (tzn. wiersz w_i zastępujemy wierszem $w_i' = w_i + cw_j$);

(ii) zamiana dwóch wierszy miejscami

(iii) pomnożenie wiersza w_i przez niezerową liczbę d (tzn. zastępujemy w_i przez $w_i'' = dw_i$);

(iv) usunięcie z macierzy wiersza złożonego z samych zer;

(v) usunięcie z macierzy wiersza będącego kombinacją liniową innych wierszy.

Rząd macierzy

Podmacierz macierzy A jest to macierz powstała przez skreślenie w macierzy A pewnej liczby wierszy i kolumn.

Wyznacznik kwadratowej podmacierzy $n \times n$ nazywamy minorem stopnia n.

Rzędem macierzy nazywamy najwyższy ze stopni jej różnych od zera minorów.

Rząd macierzy A oznaczamy symbolem $\mathrm{rz}A$ lub $\mathrm{rank}A$.

Macierz zerowa ma rząd równy 0.

Uwaga:

a) Dla dowolnej macierzy A wymiaru $m \times n$ zachodzi nierówność $\mathrm{rz}A \leq \min(m, n)$ (inaczej mówiąc, rząd macierzy nie przekracza liczby wierszy ani liczby kolumn macierzy).

b) $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}A^T$

Poniższe operacje nie zmieniaj rzędu macierzy:

(i) dodanie do wiersza $w_i = [w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in}]$ innego wiersza $w_j = [w_{j1}, w_{j2}, \ldots, w_{jn}]$ pomnożonego przez liczbę c (tzn. wiersz w_i zastępujemy wierszem $w_i' = w_i + cw_j$);

(ii) zamiana dwóch wierszy miejscami

(iii) pomnożenie wiersza w_i przez niezerową liczbę d (tzn. zastępujemy w_i przez $w_i'' = dw_i$);

(iv) usunięcie z macierzy wiersza złożonego z samych zer;

(v) usunięcie z macierzy wiersza będącego kombinacją liniową innych wierszy.

(vi) transpozycja

(vii) operacje na kolumnach analogiczne do operacji na wierszach opisanych w warunkach (i), (ii), (iii), (iv) i (v).

Uwaga. Operacje na wierszach (i)-(v) są opisanymi wcześniej operacjami mogącymi służyć do upraszczania macierzy układu równań liniowych.

Twierdzenie Kroneckera - Capellego

Twierdzenie (Kroneckera - Capellego). Niech A będzie macierzą główną układu równań liniowych z n niewiadomymi i niech $C = [A \mid B]$ będzie macierzą rozszerzoną tego układu.

Jeśli $\mathrm{rz} A = \mathrm{rz} C = n$, to układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony).

Jeśli $\mathrm{rz} A = \mathrm{rz} C < n$, to układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony).

Jeśli rzA $<$ rz C, to układ równań nie ma rozwiązań (układ sprzeczny).

Uwaga:

Układ n równań liniowych z n niewiadomymi jest oznaczony wtedy i tylko wtedy gdy jest układem Cramera.

Postać schodkowa macierzy

Elementem wiodącym wiersza macierzy nazwiemy jego pierwszy niezerowy element.

Macierz liczbowa jest w postaci schodkowej jeśli:

- wszystkie wiersze zerowe sa poniżej niezerowych (o ile istnieją);

- elementy wiodące kolejnych wierszy niezerowych znajdują sie w kolumnach o coraz wyższych numerach.

Uwaga. Używając operacji (i)-(v) na wierszach macierzy możemy przekształcić macierz układu w macierz która ma postać schodkową (takie przekształcenie nazywamy sprowadzeniem macierzy układu równań do postaci schodkowej). Sprowadzenie układu równań do postaci schodzkowej nie zmienia zbioru rozwiązań układu ani rzędu macierzy rozszerzonej C, dodatkowo ponieważ podczas wykonywania operacji na wierszach macierzy C wykonujemy analogiczne operacje na wierszach macierzy A, więc rząd macierzy A również nie ulega zmianie. Znalezienie postaci schodkowej układu równań pozwala na łatwiejsze obliczenie rzędów macierzy, o których mowa w twierdzeniu Kroneckera - Capellego.

Zredukowana postać schodkowa macierzy

Macierz jest w postaci schodkowej zredukowanej jeśli:

- jest w postaci schodkowej;

- wszystkie elementy wiodące wierszy są równe 1 oraz w kolumnach w których elementy te stoją są poza nimi same zera.

Uwaga 1. Używając operacji (i)-(v) na wierszach macierzy możemy sprowadzić macierz układu równań do postaci schodkowej zredukowanej bez wierszy zerowych (jest to tzw. postać bazowa układu równań).

Uwaga 2. Rząd macierzy w postaci schodkowej lub schodkowej zredukowanej jest równy liczbie elementów wiodących w tej macierzy (liczba ta jest równa liczbie niezerowych wierszy macierzy w postaci schodkowej lub schodkowej zredukowanej).

Rozwiązywanie układów równań (metoda Gaussa)

Opiszemy algorytm rozwiązywania układów równań liniowych z n niewiadomymi.

Krok 1. Sprowadzamy macierz układu do postaci schodkowej bez wierszy zerowych i wyznaczamy rzędy macierzy A i $C = [A \mid B]$

Jeżeli $\mathrm{rz} A < \mathrm{rz}[A \mid B]$, to układ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).

Jeżeli $\mathrm{rz} A = \mathrm{rz}[A \mid B]$, to przechodzimy do kroku 2.

Krok 2. Rozwiązujemy układ równań.
a) Jeżeli $\mathrm{rz} A = \mathrm{rz}[A \mid B] = n$ (liczba niewiadomych), to układ jest układem Cramera, a zatem można go rozwiązać np. przy użyciu wzorów Cramera.

b) Jeżeli $\mathrm{rz} A = \mathrm{rz}[A \mid B] = k < n$ (liczba niewiadomych), to przekształcamy macierz układu do postaci schodkowej zredukowanej i zapisujemy układ równań odpowiadający uzyskanej macierzy. Po lewej stronie równań pozostawiamy niewiadome związane z elementami wiodącymi wierszy, zaś pozostałe niewiadome przenosimy na prawą stronę z przeciwnym znakiem (wraz ze stojącymi przy nich współczynnikami) i traktujemy jako parametry rozwiązania.

Uwaga. W kroku 2 b) możemy zastąpić sprowadzanie macierzy układu do postaci schodkowej zredukowanej inną operacją - ten sam efekt uzyskamy, jeśli zapiszemy układ równań odpowiadający macierzy w postaci schodkowej, zaś następnie zaczynając od ostatniego równania i kończąc na pierwszym będziemy wyznaczać z równań zmienne odpowiadające elementom wiodącym wierszy (tzw. zmienne bazowe) i podstawiać uzyskany wynik do równań o niższych numerach. Na końcu powinniśmy uzyskać przedstawienie wszystkich zmiennych jako pewnych kombinacji parametrów.

Twierdzenie.

Układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k = \overrightarrow{0}$

Zatem, układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy równość $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k = \overrightarrow{0}$ zachodzi jedynie w przypadku, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

Wniosek. Układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest liniowo niezależny $\iff$ rząd macierzy, której kolumnami są wektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest równy k $\iff$ rząd macierzy, której wierszami są wektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest równy k.