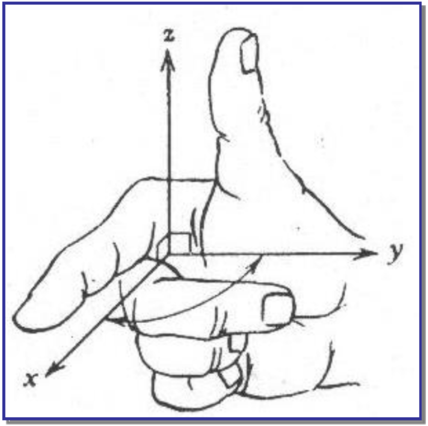
GEOMETRIA W $\mathbb{R}^3$



Prawoskrętny układ współrzędnych (reguła prawej ręki).

Orientacja układu wektorów

Mówimy, że uporządkowana trójka wektorów $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y, w_z]$ ma orientację zgodną z orientacją układu współrzędnych jeśli zachodzi warunek

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} > 0,$$

W przypadku, gdy podany wyznacznik jest ujemny, mówimy że orientacja układu $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest przeciwna do orientacji układu współrzędnych.

Orientacja układu wektorów jest zależna od kolejności wektorów w układzie.

Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym nierównoległych wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ spełniający warunki:

1. wektor $\overrightarrow{w}$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ (co jest równoważne temu, że $\overrightarrow{w}$ jest prostopadły do wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$);

2. jego długość jest określona wzorem $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\varphi$,

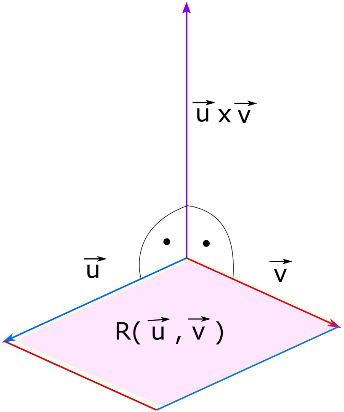
gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$,

3. orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Jeżeli jeden z wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jest wektorem zerowym lub wektory te są równoległe, to przyjmujemy $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Uwaga:

Z warunku 2 w definicji iloczynu wektorowego wynika, że długość wektora $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.



Długość wektora $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest równa polu równoległoboku $R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Własności iloczynu wektorowego

Dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ i $a \in \mathbb{R}$ zachodzą warunki:

(i) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$

(ii) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$

(iii) $(a\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = a(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \times (a\overrightarrow{v})$

(iv) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$ (antysymetria);

(v) $\overrightarrow{0} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

Obliczanie iloczynu wektorowego

Iloczyn wektorowy wektorów $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$ i $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

gdzie $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ są wersorami osi współrzędnych (czyli $\overrightarrow{i} = [1, 0, 0]$, $\overrightarrow{j} = [0, 1, 0]$, $\overrightarrow{k} = [0, 0, 1]$).

Uwaga:

Niezerowe wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Iloczyn mieszany

Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ nazywamy iloczyn $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$, oznaczamy go symbolem $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

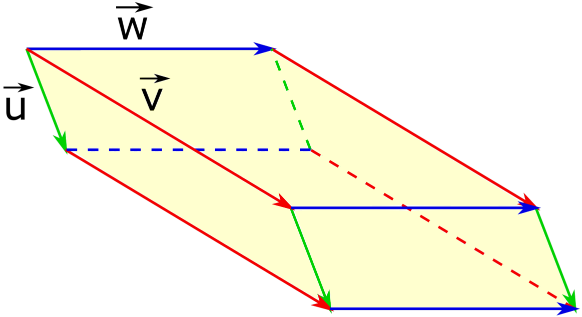
Iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y, w_z]$ obliczamy ze wzoru

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Zachodzą równości: $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

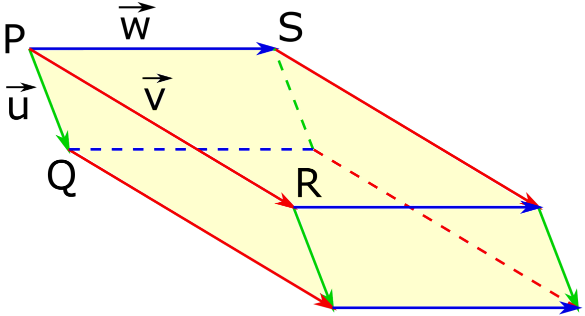
Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego:

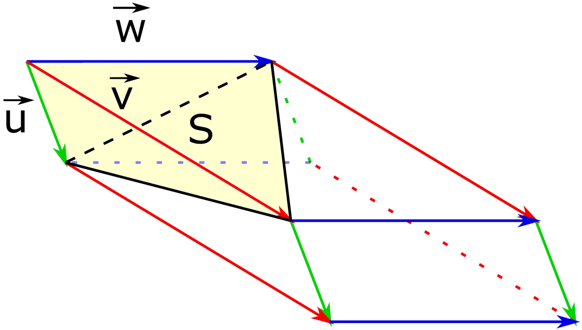
Iloczyn mieszany (z dokładnością do znaku) równy jest objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$.



Wniosek 1. Zaczepione w tym samym punkcie wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ leżą na jednej płaszczyźnie (są współpłaszczyznowe) wtedy i tylko wtedy, gdy $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$

Wniosek 2. Punkty $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^3$ leżą na jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = 0$



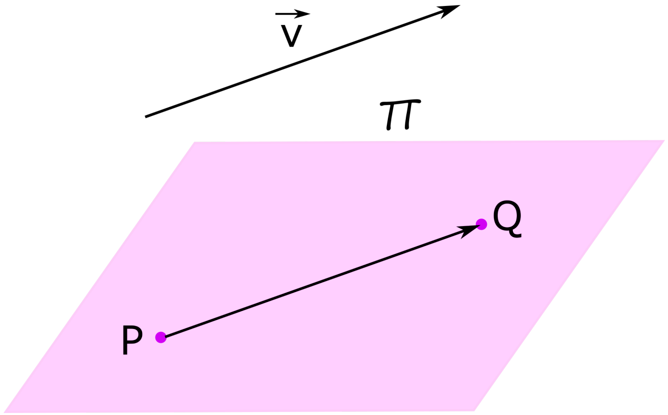


$$V_S = \frac{1}{6} V_{R(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$$

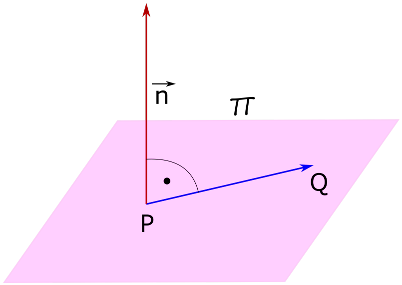
(zależność między objętością czworościanu S i objętością równoległościanu $R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$

Mówimy, że wektor $\overrightarrow{v}$ jest równoległy do płaszczyzny π, jeśli istnieją punkty $P, Q \in \pi$ takie że $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ (w szczególności, dla dowolnych punktów $P, Q \in \pi$ wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest równoległy do π).



Mówimy, że niezerowy wektor $\vec{n}$ jest prostopadły do płaszczyzny π, jeśli dla dowolnych $P, Q \in \pi$ wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest prostopadły do $\vec{n}$ (wektor $\vec{n}$ nazywamy wówczas wektorem normalnym płaszczyzny π.



Uwaga:

Wektor $\vec{n}$ jest prostopadły do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy gdy $\vec{n}$ jest prostopadły do każdego wektora który jest równoległy do π.

Równanie ogólne płaszczyzny

Równaniem ogólnym płaszczyzny π nazywamy równanie postaci

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

o tej własności, że punkt $P = (x, y, z) \in \pi$ wtedy i tylko wtedy gdy współrzędne x, y, z punktu P spełniają to równanie.

Uwaga:

Jeśli płaszczyzna π ma równanie ogólne $Ax + By + Cz + D = 0$, to wektor $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ jest prostopadły do π.

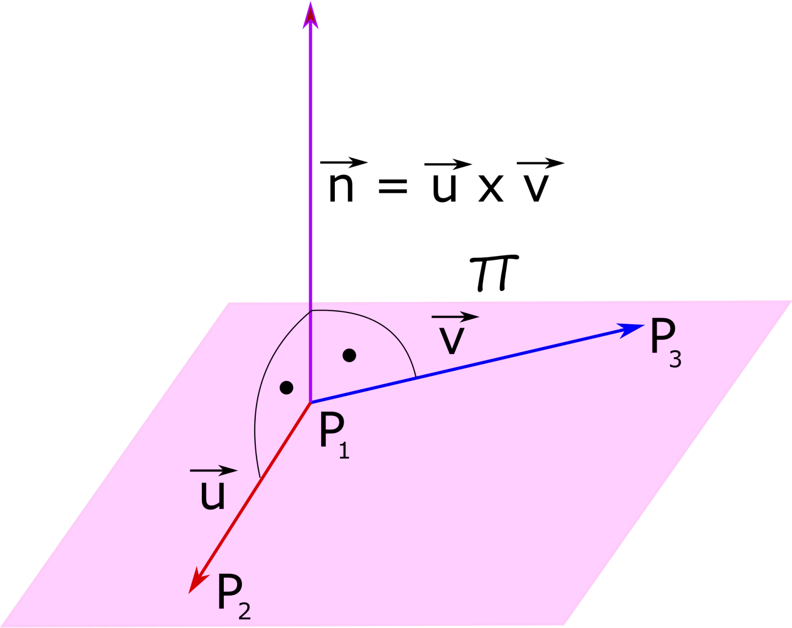
Przykładowe metody znajdowania równania ogólnego płaszczyzny π

(1) Jeśli dany jest punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$, który jest prostopadły do π, to ze współrzędnych A, B, C wektora $\overrightarrow{n}$ odczytujemy trzy pierwsze współczynniki równania ogólnego, zaś współczynnik D obliczamy podstawiając współrzędne x_0, y_0, z_0 punktu P_0 w miejsce zmiennych x, y, z.

(2) Jeśli możemy znaleźć punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ oraz dwa niezerowe wektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ równoległe do π i takie, że $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$, to wektor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest prostopadły do π i dalej możemy postępować jak w metodzie (1).

(3) Jeśli mamy dane trzy różne punkty $P_1, P_2, P_3 \in \pi$, które nie leżą na jednej prostej (co jest równoważne warunkowi $\overrightarrow{P_1P_2} \nparallel \overrightarrow{P_1P_3}$), to możemy postąpić na jeden ze sposobów:

(a) postępować jak w metodzie (2) przyjmując $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ (za P_0 możemy podstawić dowolny z punktów P_1, P_2, P_3);



$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
π
$\vec{v}$
P_3
P_1
$\vec{u}$
P_2

(b) skorzystać z warunku: $P = (x, y, z) \in \pi \iff (\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$, co możemy zapisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

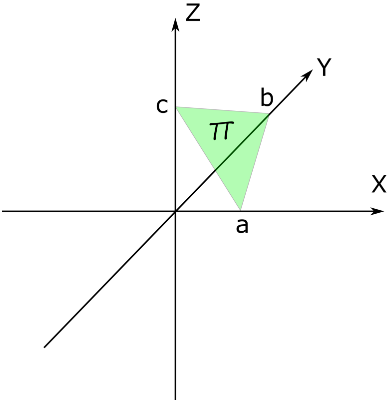
gdzie $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ dla $i = 1, 2, 3$ (jest to tzw. równanie wyznacznikowe płaszczyzny);

(c) skorzystać z drugiej postaci równania wyznacznikowego płaszczyzny, która jest równoważna z pierwszą postacią:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie odcinkowe płaszczyzny

Jeżeli w równaniu ogólnym płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$ wszystkie współczynniki są różne od 0, to możemy napisać odcinkowe równanie płaszczyzny: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, gdzie a, b, c są współrzędnymi odcinanymi przez płaszczyznę na osiach układu współrzędnych.



Przedstawienie parametryczne płaszczyzny

Przedstawienie parametryczne płaszczyzny π ma postać:

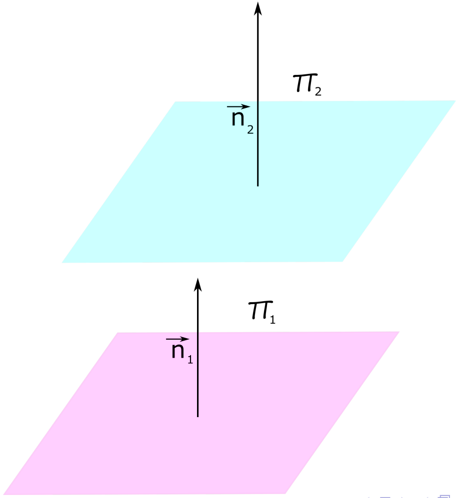
$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + tu_x + sv_x \\ y = y_0 + tu_y + sv_y \\ z = z_0 + tu_z + sv_z \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R},$$

gdzie $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ jest punktem należącym do płaszczyzny, zaś wektory $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ są niezerowymi wektorami równoległymi do π takimi, że $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$.

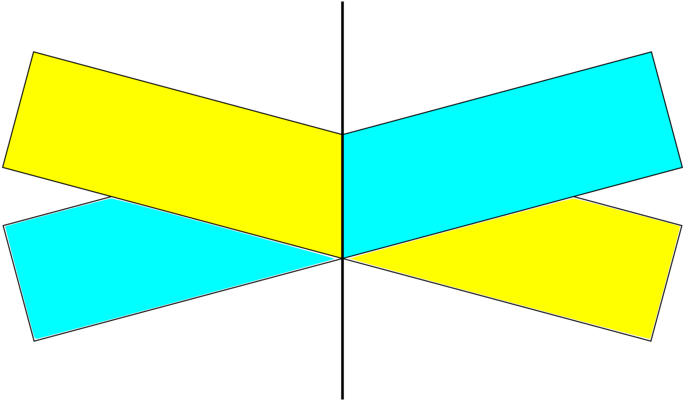
Punkt $P = (x, y, z)$ należy do π wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wartości parametrów $t, s \in \mathbb{R}$ dla których współrzędne x, y, z punktu P spełniają powyższe równanie.

Wzajemne położenie płaszczyzn

Dwie płaszczyzny π_1, π_2 są równoległe, jeśli każdy wektor równoległy do π_1 jest zarazem równoległy do π_2; warunek ten jest równoważny temu, że wektory normalne płaszczyzn π_1 i π_2 są równoległe.



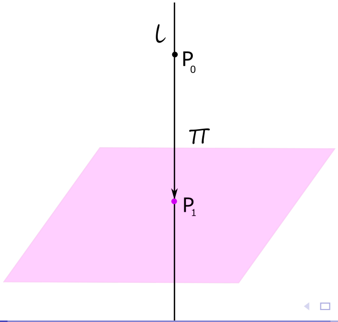
Płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ które nie są równoległe przecinają się wzdłuż prostej (tzn. ich część wspólna jest prostą).



Odległość punktu od płaszczyzny

Odległość punktu P_0 od płaszczyzny π określamy jako odległość P_0 od punktu z płaszczyzny π leżącego najbliżej punktu P_0 (punkt $P_1 \in \pi$ mający tę własność nazywamy rzutem prostopadłym punktu P_0 na płaszczyznę π).

Jeśli P_1 jest rzutem prostopadłym punktu P_0 na płaszczyznę π, to wektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ jest prostopadły do płaszczyzny π, wynika stąd, że P_1 jest punktem przecięcia płaszczyzny π z prostą przechodzącą przez punkt P_0 i prostopadłą do π (prosta jest prostopadła do płaszczyzny π jeśli jest równoległa do wektora normalnego płaszczyzny π).



Odległość dwóch równoległych płaszczyzn π_1 i π_2 definiujemy jako odległość dowolnego punktu $P_0 \in \pi_1$ od płaszczyzny π_2.

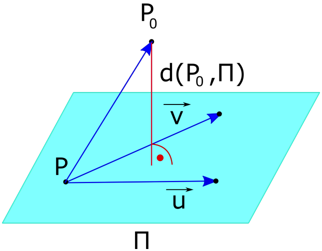
Wzory na odległości punktu P_0 od płaszczyzny π (a) Jeśli mamy podane równanie ogólne płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, to odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny π wyraża się wzorem:

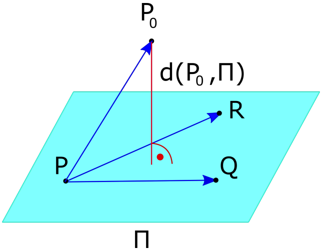
$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(b) Jeśli możemy znaleźć punkt $P \in \pi$ oraz dwa wektory $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$ równoległe do π, to wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|(\overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|} = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|}$$

Wynika to stąd, że odległość P_0 od π jest długością wysokości równoległościanu O rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ zaczepionych w punkcie P, opuszczonej z wierzchołka P_0 na płaszczyznę zawierającą równoległobok R rozpięty przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ zaczepione w punkcie P (płaszczyzna odpowiadająca temu opisowi to po prostu płaszczyzna π), zatem odległość P_0 od π możemy obliczyć dzieląc objętość równoległościanu O przez pole równoległoboku R.


P0
d(P0 ,Π)
v
P
u
Π


P0
d(P0 ,Π)
R
P
Q
Π

(c) Jeśli mamy podane punkty $P, Q, R \in \pi$ które nie są współliniowe (czyli nie leżą na jednej prostej), to z podpunktu (b) wynika, że odległość P_0 od π można obliczyć za pomocą wzoru:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|(\overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})|}{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|} = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})|}{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}$$

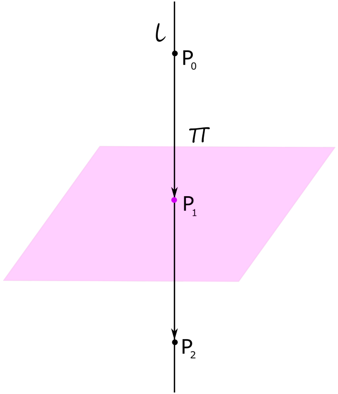
(d) Jeśli mamy dane przedstawienie parametryczne płaszczyzny π:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + tu_x + sv_x \\ y = y_0 + tu_y + sv_y \\ z = z_0 + tu_z + sv_z \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R},$$

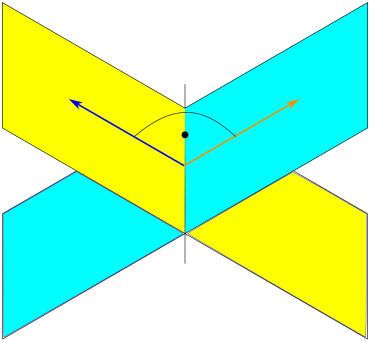
to wówczas punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ należy do płaszczyzny π, zaś wektory $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ są niezerowymi wektorami równoległymi do π takimi, że $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$, a zatem możemy obliczyć odległość P_0 od π korzystając ze wzoru w podpunkcie (b).

(e) Jeśli P_1 jest rzutem prostopadłym P_0 na π, to odległość P_0 od π równa jest odległości między punktami P_0 i P_1 (z definicji).

Punktem symetrycznym do punktu P_0 względem płaszczyzny π nazywamy punkt $P_2 \neq P_0$, leżący na prostej l przechodzącej przez punkt P_0 i prostopadłej do π, taki że punkty P_0 i P_2 są tak samo odległe od płaszczyzny π. Z definicji tej wynika, że punkt P_1, będący rzutem prostopadłym punktu P_0 na płaszczyznę π jest środkiem odcinka łączącego P_0 z P_2, a zatem jeśli mamy znaleziony punkt P_1, to P_2 możemy wyznaczyć z równości: $P_2 = P_1 + \overrightarrow{P_0P_1}$.

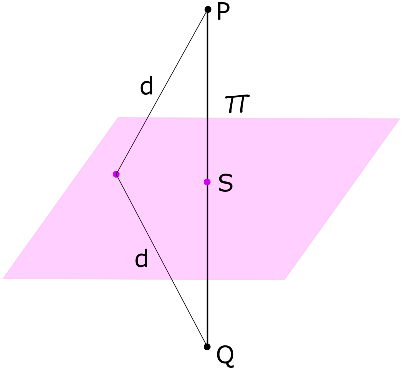


Dwie płaszczyzny są prostopadłe, jeśli ich wektory normalne są prostopadłe. Warunek ten jest równoważny temu, że wektor normalny pierwszej płaszczyzny jest równoległy do drugiej płaszczyzny (i na odwrót).



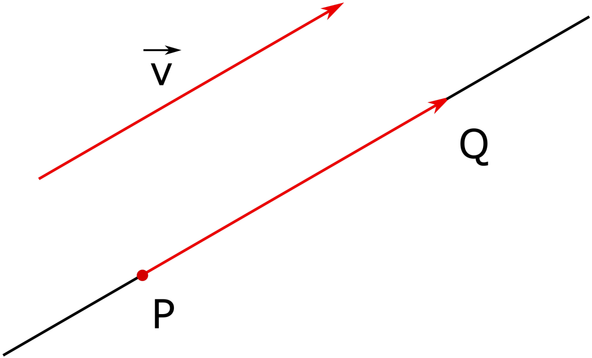
Płaszczyzna jako zbiór punktów równo oddalonych od pary punktów:

Dla dowolnych punktów $P \neq Q$ w $\mathbb{R}^3$ zbiór wszystkich punktów które są tak samo oddalone od P i od Q jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt S, będący środkiem odcinka łączącego P z Q, prostopadłą do wektora $\overrightarrow{PQ}$.

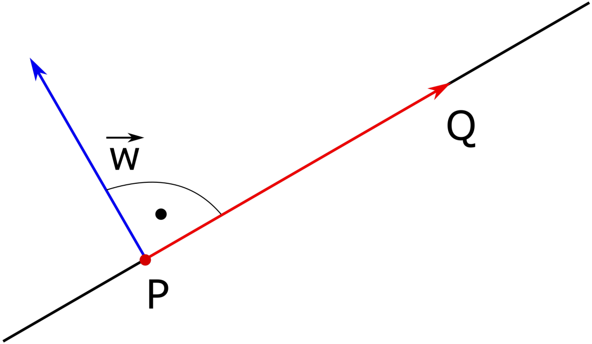


Prosta w $\mathbb{R}^3$

Mówimy, że wektor $\overrightarrow{v}$ jest równoległy do prostej l, jeśli istnieją punkty $P, Q \in l$ takie że $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ (w szczególności, dla dowolnych punktów $P, Q \in l$ wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest równoległy do l). Niezerowy wektor $\overrightarrow{v}$ równoległy do prostej l nazywamy wektorem kierunkowym tej prostej.



Mówimy, że wektor $\overrightarrow{w}$ jest prostopadły do prostej l, jeśli $\overrightarrow{w}$ jest prostopadły do wektora kierunkowego prostej l.



Uwaga:

Wektor $\overrightarrow{w}$ jest prostopadły do prostej l wtedy i tylko wtedy gdy $\overrightarrow{w}$ jest prostopadły do każdego wektora, który jest równoległy do l.

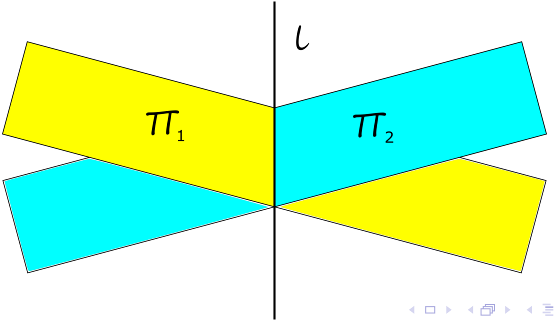
Mówimy że prosta l jest równoległa do płaszczyzny π, jeśli wektor kierunkowy prostej l jest równoległy do płaszczyzny π.

Przedstawienie krawędziowe prostej

Każdą prostą $l \subset \mathbb{R}^3$ możemy przedstawić jako część wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn: $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, wynika stąd, że prostą l możemy opisać układem równań:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Przedstawienie to nazywamy przedstawieniem krawędziowym prostej l.

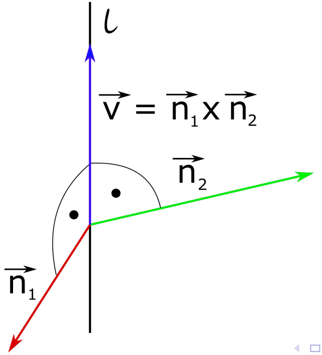


Uwaga:

Jeśli prosta l ma przedstawienie krawędziowe

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

to wektory $\overrightarrow{n_1} = [A_1, B_1, C_1]$ i $\overrightarrow{n_2} = [A_2, B_2, C_2]$ nie są równoległe i są prostopadłe do l, zatem wektor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ jest równoległy do l.



Przedstawienie parametryczne prostej

Przedstawienie parametryczne prostej $l \subset \mathbb{R}^3$ ma postać:

$$l : \begin{cases} x = x_0 + tu_x \\ y = y_0 + tu_y \\ z = z_0 + tu_z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ jest punktem należącym do prostej l, zaś $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$ jest niezerowym wektorem równoległym do l.

Przedstawienie kierunkowe prostej

Przedstawienie kierunkowe prostej $l \subset \mathbb{R}^3$ ma postać:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$$

gdzie $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ jest punktem należącym do prostej l, zaś $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$ jest wektorem równoległym do l i mającym wszystkie współrzędne różne od 0.

Wzajemne położenie prostych w $\mathbb{R}^3$

Dwie proste l_1, l_2 są równoległe, jeśli ich wektory kierunkowe są równoległe.

Dwie proste równoległe l_1, l_2 są albo rozłączne ($l_1 \cap l_2 = \emptyset$) albo też pokrywają się ($l_1 = l_2$).

Proste nierównoległe albo przecinają się w jednym punkcie, albo mają puste przecięcie (proste nierównoległe które nie mają punktów przecięcia nazywamy prostymi skośnymi).

Proste leżące na jednej płaszczyźnie

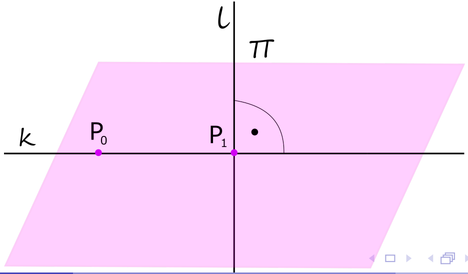
(a) Dwie proste l_1, l_2 w $\mathbb{R}^3$ leżą na jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy są równoległe lub mają niepuste przecięcie. Zatem dwie proste są skośne wtedy i tylko wtedy, gdy proste te nie leżą na jednej płaszczyźnie.

(b) Jeśli P_1, Q_1, P_2, Q_2 są różnymi punktami takimi, że $P_1, Q_1 \in l_1$, $P_2, Q_2 \in l_2$, to proste l_1 i l_2 leżą na jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy punkty P_1, Q_1, P_2 i Q_2 leżą na jednej płaszczyźnie.

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu P_0 od prostej l określamy jako odległość P_0 od punktu z prostej l leżącego najbliżej punktu P_0 (punkt $P_1 \in l$ mający tę własność nazywamy rzutem prostopadłym punktu P_0 na prostą l).

Jeśli P_1 jest rzutem prostopadłym punktu P_0 na prostą l, to wektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ jest prostopadły do prostej l, a zatem punkt P_1 leży na prostej k, przechodzącej przez punkt P_0 i przecinającej prostą l pod kątem prostym; ponieważ opisana tutaj prosta k jest zawarta w płaszczyźnie π, przechodzącej przez punkt P_0 i prostopadłej do l, więc dodatkowo $P_1 \in \pi$. Wynika stąd, że P_1 jest punktem przecięcia prostej l z płaszczyzną π.



Odległość dwóch równoległych prostych l_1 i l_2 definiujemy jako odległość dowolnego punktu $P_0 \in l_1$ od prostej l_2.

Wzory na odległość punktu P_0 od prostej l

(a) Jeśli mamy dany punkt $P \in l$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{v}$ równoległy do l, to wówczas

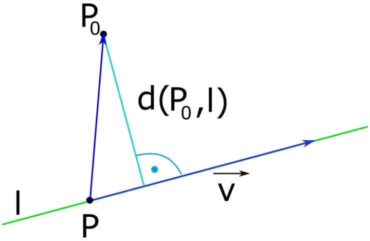
$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \times \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$$

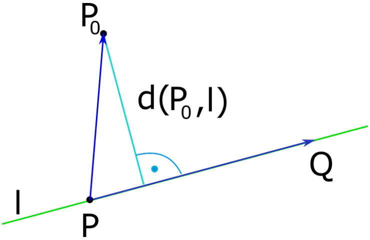
Wynika to stąd, że odległość P_0 od l jest długością wysokości równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{PP_0}$ i $\overrightarrow{v}$ zaczepionych w punkcie P, opuszczonej z wierzchołka P_0 na prostą l zawierająca bok $\overline{PQ}$, gdzie Q jest końcem wektora $\overrightarrow{v}$ zaczepionego w punkcie P.

(b) Jeśli mamy podane dwa różne punkty $P, Q, \in l$, to z podpunktu (a) wynika, że odległość P_0 od l można obliczyć za pomocą wzoru:

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \times \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}.$$

(c) Jeśli P_1 jest rzutem prostopadłym P_0 na l, to odległość P_0 od l równa jest odległości między punktami P_0 i P_1 (z definicji).


P0
d(P0,l)
v
l
P


P0
d(P0,l)
Q
l
P

Punktem symetrycznym do punktu P_0 względem prostej l nazywamy punkt $P_2 \neq P_0$, leżący na prostej k przechodzącej przez punkt P_0 i przecinającej prostą l pod kątem prostym, taki że punkty P_0 i P_2 są tak samo odległe od prostej l. Z definicji tej wynika, że punkt P_1, będący rzutem prostopadłym punktu P_0 na prostą l, jest środkiem odcinka łączącego P_0 z P_2, a zatem jeśli mamy znaleziony punkt P_1, to P_2 możemy wyznaczyć z równości: $P_2 = P_1 + \overrightarrow{P_0P_1}$ (podobnie jak w przypadku punktu symetrycznego względem płaszczyzny).