Федеральное агентство по образованию
Пензенский государственный университет

Кафедра Высшей и прикладной математики

Романова Л.Д., Ланцова В.А., Романова Е.Г.

Контрольные задания по высшей математике и методические указания к их выполнению

Учебное пособие
для студентов-заочников инженерно-технических специальностей

ЧАСТЬ II

Пенза, 2009

“КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ”, часть 2

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов-заочников инженерно-технических специальностей Пензенского государственного университета, составлено на основе программы курса высшей математики с учётом числа часов, отводимых для данной дисциплины учебным планом, а также профиля подготавливаемых специалистов. Учебное пособие состоит из 3-х частей. В данной второй части пособия содержатся краткие теоретические сведения по темам, изучаемым в третьем семестре: функции многих переменных, дифференциальные уравнения, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Приводятся задания для трёх контрольных работ, выполняемых в третьем семестре и решения типового варианта каждой контрольной работы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ в третьем семестре

Тема 11. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Бермант А.Ф., Араманович И.Г., глава 7.
Пискунов Н. С., часть 1, гл. 8.
Письменный Д.Т., часть 1, § 43-46.
Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., часть 1, гл. 8.

Функции нескольких переменных

Если каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторого множества D по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной $z \in E$, то переменная z называется ***функцией двух переменных*** $z = f(x, y)$, x, y - *независимыми переменными* или *аргументами*, D - *областью определения*, E - *множеством значений*.

Так как уравнение $z = f(x, y)$ определяет некоторую поверхность в пространстве, то под графиком функции двух переменных будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$ (рис. 1).

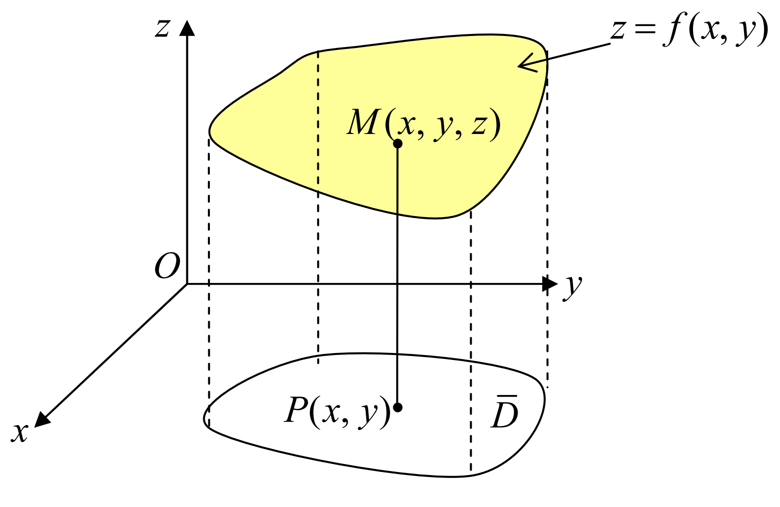

Рис. 1

Геометрически область определения функции D представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$, во втором – *открытой*.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трёх и большего числа переменных. Величина y *называется функцией переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторой области n - мерного пространства соответствует определённое значение y, что записывается в виде $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Так как совокупность значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ определяет точку n - мерного пространства $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то всякую функцию нескольких переменных можно рассматривать как функцию точек M пространства соответствующей размерности, а именно, $y = f(M)$.

δ - *окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, принадлежащей δ - окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ выполняется условие $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Тогда функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$,

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Свойство 1. Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство 2. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка (x_0, y_0) такая, что $f(x_0, y_0) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D по крайней мере один раз функция обращается в ноль.

Свойство 3. Функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, *ограничена* в этой области, т.е. существует такое число K, что для всех точек области верно неравенство $|f(x,y)| < K$.

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и дадим переменной x приращение Δx, оставив y постоянной величиной, тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое *частным приращением функции по переменной* x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Тогда, если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется *частной производной функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$.

Аналогично определяется *частная производная функции по переменной* y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Полным приращением функции $f(x, y)$ называется выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x, y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \qquad (11.1)$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно Δx и Δy и обозначаемая dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy, \qquad (11.2)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ - приращения независимых переменных, равные их дифференциалам.

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, ..., t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

Решение. Для функции трёх переменных полный дифференциал имеет вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2.$$

Следовательно, $du = y^2 z x^{y^2 z - 1}\,dx + 2x^{y^2 z}\,yz\ln x\,dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x\,dz$.

Полный дифференциал часто используется для ***приближённых вычислений значений функций***. Запишем полное приращение функции $z = f(x, y)$: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, откуда можно выразить

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z.$$

Если подставить в эту формулу выражение $\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$, то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz \quad \text{или}$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y. \qquad (11.3)$$

Пример 2. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1$.

Решение. Из заданного выражения определим $\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$, $\Delta z = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$.

Найдем значение функции $u(x, y, z) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$.

Находим частные производные и вычисляем их значения при $x = 1, \; y = 2, \; z = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}.$$

Полный дифференциал функции $u(x, y, z)$ равен:

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 =$$

$= 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$, следовательно,

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1,2,1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05.$$

Производные сложных и неявных функций

Функция $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, называется *сложной функцией*. Для нахождения частных производных сложной функции применяются формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (11.4)$$

Если $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, то $z = f(u(x), v(x)) = f_1(x)$ и тогда формула нахождения производной примет вид:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (11.5)$$

Если же $z = f(x, y(x))$, то из последней формулы, в силу того, что $u = x$, а $v = y(x)$, получим:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (11.6)$$

Если уравнение $F(x, y) = 0$ задаёт некоторую функцию $y(x)$ в *неявном виде* и $F'_y(x, y) \neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (11.7)$$

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задаёт функцию двух переменных $z = f(x, y)$ в *неявном виде* и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (11.8)$$

Частные производные высших порядков

Если функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D, то ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$ также будут определены в той же области. Будем называть эти производные *частными производными первого порядка.*

Производные этих функций будут *частными производными второго порядка,* т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y).$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$ и т.д. называются *смешанными производными.*

Теорема. Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные $f'_x,\ f'_y,\ f''_{xy},\ f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x,y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков при этих и аналогичных условиях не зависят от порядка дифференцирования.

Подобным же образом определяются полные дифференциалы высших порядков.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy;$$

$$d^2z=d\left(dz\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2;$$

$$d^3z=d\left(d^2z\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3;$$

…………………

Символически можно записать

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$ где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $P_0(x_0, y_0)$, ***касательная плоскость*** в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{11.9}$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{11.10}$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задаётся в неявном виде $F(x, y, z) = 0$ и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

<u>Пример 3.</u> Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке M(1, 1, 1).

<u>Решение</u>. Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали: $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 1}{-1}$.

Производная по направлению. Градиент

Пусть дана функция $u = f(x, y, z)$, определенная и дифференцируемая в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и вектор $\vec{\lambda}$, который имеет начало в точке M_0 и направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Тогда *производная от функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{\lambda}$* может быть найдена по формуле:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{11.11}$$

В случае функции двух переменных $z = f(x,y)$ формула упрощается:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\sin\alpha, \qquad (11.12)$$

так как $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \cos\gamma = 0$.

Производная по направлению $\vec{\lambda}$ характеризует скорость изменения функции по этому направлению. Если $\frac{\partial u}{\partial \lambda} > 0$, то функция $u = f(x,y,z)$ возрастает в направлении $\vec{\lambda}$, если $\frac{\partial u}{\partial \lambda} < 0$, то функция $u = f(x,y,z)$ в направлении $\vec{\lambda}$ убывает. Величина $\left|\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции $u = f(x,y,z)$ в точке M_0 в направлении $\vec{\lambda}$. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ можно рассматривать как производные от функции $u = f(x,y,z)$ по направлению координатных осей Ox, Oy, Oz.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$, называется ***градиентом функции*** и обозначается $\mathbf{grad}\,u$, т.е. $\mathbf{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$.

В частном случае, $\mathbf{grad}\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}$.

Рассмотрим единичный вектор $\boldsymbol{\lambda} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$ и некоторую функцию $u(x,y,z)$ и найдем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{grad}\,u$.

$$\mathbf{grad}\,u \cdot \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (11.13)$$

Выражение, стоящее в правой части (11.13) равенства является производной функции $u(x,y,z)$ по направлению $\boldsymbol{\lambda}$. Т.е. $\mathbf{grad}\,u \cdot \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}$. Если угол между векторами $\mathbf{grad}\,u$ и $\boldsymbol{\lambda}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\boldsymbol{\lambda}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\mathbf{grad}\,u| \cdot \cos\varphi. \qquad (11.14)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (11.14) и является проекцией вектора $\mathbf{grad}\,u$ на вектор $\boldsymbol{\lambda}$.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля $u(x,y,z)$ в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент направлен перпендикулярно поверхности (линии) уровня функции.

Экстремум функции двух переменных

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $z=f(x,y)$, если для всех точек $M(x,y)$, отличных от $M_0(x_0,y_0)$ и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ $\left(f(x_0,y_0)<f(x,y)\right)$.

Максимум или минимум функции называется ее ***экстремумом***. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется *точкой экстремума функции.*

Теорема 1 (необходимые условия экстремума).

Если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции $z=f(x,y)$, то $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются *стационарными или критическими.* Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия экстремума.

Для того чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения: $A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ и $\Delta=AC-B^2$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0,y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta>0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой ***максимума*** при $A<0$ $(C<0)$ и

точкой ***минимума*** при $A > 0$ $\left(C > 0\right)$;

2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть. Отметим, что случай 3 требует дополнительных исследований.

Экстремум функции $z = f(x, y)$ найденный при условии $\varphi(x, y) = 0$, называется *условным*. Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ называется *уравнением связи*.

Тогда $z = f(x, y(x))$ и $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$.

В точках экстремума:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{11.15}$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{11.16}$$

Умножим равенство (11.16) на число λ и сложим с равенством (11.15), получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{11.17}$$

Полученная система уравнений представляет собой необходимое условие условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Функция $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ называется *функцией Лагранжа.* Система (11.17) представляет собой необходимое условие существования экстремума функции Лагранжа.

Метод наименьших квадратов

На практике часто требуется представить наблюдаемые (измеренные) данные в виде функциональной зависимости. При этом предполагается, что вид функциональной зависимости известен (например, в результате ранее проведенных исследований), и требуется определить только параметры этой зависимости.

Пусть в ходе исследования получена следующая таблица, где x - аргумент , а y - функция

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Требуется по этим табличным данным получить функциональную зависимость вида $y = ax + b$.

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров a и b из условия минимума суммы квадратов отклонений:

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((ax_i + b) - y_i\right)^2 \to \min .$$

Тогда из условий $\dfrac{\partial\Phi}{\partial a} = 0, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial b} = 0$ получаются формулы для определения коэффициентов линейной зависимости:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (11.18)$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

271-280. Дана функция $z = f(x, y)$. Найти: 1) полный дифференциал dz; 2) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 3) убедиться в том, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

271. $z = \cos(xy^2)$; **272.** $z = e^{x^2 - y^2}$; **273.** $z = \sin(x^2 - y)$;

274. $z = e^{2x^2 + y^2}$; **275.** $z = x \ln \frac{y}{x}$; **276.** $z = e^{xy}$;

277. $z = \ln(x^2 + y^2)$; **278.** $z = xe^{y/x}$; **279.** $z = \ln(x + e^{-y})$;

280. $z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$.

281-290. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки A($x_0; y_0$) и B($x_1; y_1$).
1) Найти приближённое значение данной функции в точке B, исходя из её точного значения в точке A и заменяя приращение Δz дифференциалом dz.
2) Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке C($x_0; y_0; z_0$).

281. $z = x^2 + xy + y^2$; A(1; 2), B(1,02; 1,96).

282. $z = 3x^2 - xy + x + y$; A(1; 3), B(1,06; 2,92).

283. $z = x^2 + 3xy - 6y$; A(4; 1), B(3,96; 1,03).

284. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; A(2; 3), B(2,02; 2,97).

285. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; A(2; 1), B(1,96; 1,04).

286. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; A(2; 4), B(1,98; 3,91).

287. $z = 3x^2 - xy + 2y^2$; A(-1; 3), B(-0,98; 2,97).

288. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$; A(3; 3), B(3,02; 2,98).

289. $z = 2xy + 3y^2 - 5x$; A(3; 4), B(3,04; 3,95).

290. $z = xy + 2y^2 - 2x$; A(1; 2), B(0,97; 2,03).

291-300. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от функции $z(x, y)$, заданной неявно.

291. $z^3 + 3xyz + 3y = 7$; $M_0(1;1;1)$.

292. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$; $M_0\left(\pi/4; 3\pi/4; -\pi/4\right)$.

293. $e^{z-1} = \cos x \sin y + z$; $M_0\left(\pi/2; \pi/2; 1\right)$.

294. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2$; $M_0(0; \pi/2; \pi)$.

295. $e^z - xyz - x + 1 = 0$; $M_0(2;1;0)$.

296. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$; $M_0(1;2;0)$.

297. $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$; $M_0(4;3;1)$.

298. $x^3 - z^3 + 3xyz = 27$; $M_0(3;1;3)$.

299. $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$; $M_0(1;1;3)$.

300. $z^2 = xy - z + x^2 - 4$; $M_0(2;1;1)$.

301 – 310. Даны функция $z = f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти: 1) $\operatorname{grad} z$ в точке M_0; 2) производную в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

301. $z = 2x^3 + 2\sqrt{x - y^2}$; $M_0(2, 1)$, $\vec{a} = 2\vec{i} + \sqrt{5}\vec{j}$.

302. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; $M_0(1, 3)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

303. $z = 2x^2 + xy + y^2$; $M_0(2, 2)$, $\vec{a} = \vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$.

304. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; $M_0(1, 1)$, $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

305. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$; $M_0(2, 3)$, $\vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

306. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $M_0(1, 1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

307. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$; $M_0(-1, 2)$ $\vec{a} = 12\vec{i} + 5\vec{j}$.

308. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$; $M_0(1, 1)$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

309. $z = x^2 + 5x + y^2 - \frac{4}{y}$; $M_0(0, 2)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

310. $z = e^{x^3 - 3x^2 y + 3x + 1}$; $M_0(1, -1)$, $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

311 – 320. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y)$.

311. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$. **312.** $z = 1 + 15x - 2x^2 - 2y^2 - xy$.

313. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$. **314.** $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

315. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$. **316.** $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

317. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. **318.** $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

319. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$. **320.** $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2 + 4$.

321-330. Экспериментально получены пять значений искомой функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$.

321.

x	0,3	0,5	0,8	1,1	2,3
y	1,4	0,7	-0,9	-2,3	-8,8

322.

x	1,0	1,5	2,0	3,0	3,2
y	8,1	9,0	11,2	13,8	14,7

323.

x	1,2	1,7	3,3	4,1	4,3
y	-3,1	-5,6	-17,1	-23,1	-24,8

324.

x	0,5	0,8	1,2	1,3	4,0
y	6,3	7,0	9,0	9,3	16,8

325.

x	-3,4	-3,2	-3,1	-2,5	-1,5
y	-13,9	-12,9	-12,2	-9,1	-4,2

326.

x	0,7	0,9	1,3	1,6	2,3
y	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0

327.

x	1,1	2,1	3,4	4,3	4,9
y	-0,8	1,2	3,8	5,4	6,7

328.

x	2,1	2,3	3,1	3,8	4,5
y	-9,3	-7,2	-13,4	-16,1	-18,9

329.

x	0,1	0,3	0,5	1,2	2,1
y	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6

330.

x	10,1	11,5	13,6	16,2	17,5
y	0,9	0,8	0,6	0,3	0,2

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

271-280. Дана функция $z = \arccos\frac{y}{x}$. Найти: 1) полный дифференциал dz; 2) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 3) убедиться в том, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение.

1) Полный дифференциал функции двух переменных имеет вид: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Найдём частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\arccos\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\arccos\frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Соответственно, $dz = \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}dx - \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-y^2}}(ydx - xdy)$.

2) Находим частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ по следующему правилу:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\right)'_x=-y\frac{\left(x\sqrt{x^2-y^2}\right)'_x}{x^2(x^2-y^2)}=$$

$$=-y\frac{\sqrt{x^2-y^2}+x\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2(x^2-y^2)}=-\frac{y(2x^2-y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)'_y=-\left((x^2-y^2)^{-1/2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2y}{(x^2-y^2)^{3/2}}=$$

$$=-\frac{y}{(x^2-y^2)^{3/2}}.$$

3) Убедимся в том, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Действительно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)'_x=-\left((x^2-y^2)^{-1/2}\right)'_x=\frac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\right)'_y=\frac{x\sqrt{x^2-y^2}-y\cdot\left(x\sqrt{x^2-y^2}\right)'_y}{x^2(x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2-y^2}-xy\dfrac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2(x^2-y^2)}=\frac{x^3-xy^2+xy^2}{x^2(x^2-y^2)^{3/2}}=\frac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}}.$$

281-290. Дана функция $z=\sqrt{4x^2-y^2+4y}$ и две точки A(2; 4) и B(1,96; 4,16). 1) Найти приближённое значение данной функции в точке B, исходя из её точного значения в точке A и заменяя приращение Δz дифференциалом dz. 2) Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке C($x_0; y_0; z_0$).

Решение.

1) Применим формулу приближённого вычисления функции

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+dz(x_0,y_0).$$

При $x_0 = 2$ и $y_0 = 4$ имеем $f(x_0, y_0) = \sqrt{4 \cdot 2^2 - 4^2 + 4 \cdot 4} = 4$.
$\Delta x = 1{,}96 - 2 = -0{,}04,\ \Delta y = 4{,}16 - 4 = 0{,}16$. Находим полный дифференциал функции $z = \sqrt{4x^2 - y^2 + 4y}$ в любой точке:

$$dz = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - y^2 + 4y}} \Delta x + \frac{-y+2}{\sqrt{4x^2 - y^2 + 4y}} \Delta y.$$

Вычисляем его значение в точке A(2; 4) при данных приращениях
$\Delta x = -0{,}04$ и $\Delta y = 0{,}16$: $dz = \frac{8}{4} \cdot (-0{,}04) + \frac{-4+2}{4} \cdot 0{,}16 = -0{,}16$. Тогда
$z(B) \approx 4 - 0{,}16 = 3{,}84$.

2) Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$**,** то уравнение касательной плоскости в точке C$(x_0; y_0; z_0)$ к данной поверхности имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 4, \quad f'_x(x_0, y_0) = \left.\frac{4x}{\sqrt{4x^2 - y^2 + 4y}}\right|_{(2,\,4)} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \left.\frac{-y+2}{\sqrt{4x^2 - y^2 + 4y}}\right|_{(2,\,4)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Подставим в уравнение плоскости, получим
$z - 4 = 2(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 4) \Rightarrow 2z - 8 = 4x - 8 - y + 4 \Rightarrow 4x - y - 2z + 4 = 0$.

291-300. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от функции $z(x, y)$, заданной неявно
$x^3 - y^3 - e^z + xyz - 6 = 0$. $M_0(2, 1, 0)$.

Решение.

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задаёт функцию двух переменных $z = f(x, y)$ в неявном виде и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то справедливы формулы (11.8).

Найдём частные производные функции $F(x, y, z)$ и вычислим их значения в заданной точке.
$F'_x = 3x^2 + yz\Big|_{(2,1,0)} = 12, \quad F'_y = -3y^2 + xz\Big|_{(2,1,0)} = -3, \quad F'_z = -e^z + xy\Big|_{(2,1,0)} = 1.$

Следовательно, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)=-\dfrac{12}{1}=-12,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)=-\dfrac{-3}{1}=3$.

301 -310. Даны функция $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$, точка $M_0(1,2)$ и вектор $\vec{a}=12\vec{i}-5\vec{j}$. Найти: 1) $\operatorname{grad} z$ в точке M_0; 2) производную в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение.

1) Для нахождения $\operatorname{grad} z$ надо вычислить значения частных производных функции $z=f(x,y)$ в заданной точке. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\bigg|_{(1,2)}=-\frac{3}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)'_y=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\bigg|_{(1,2)}=\frac{3}{4}.$$ Следовательно, $\operatorname{grad} z=-\dfrac{3}{2}\vec{i}+\dfrac{3}{4}\vec{j}$.

2) Найдём производную от функции $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0(1,2)$ по направлению вектора $\vec{a}=12\vec{i}-5\vec{j}$. Воспользуемся формулой $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial a}=\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}\sin\alpha$. Значения частных производных были вычислены в предыдущем пункте $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}=-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\dfrac{3}{4}$. Найдём

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|a|}=\dfrac{12}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\dfrac{12}{13}$, $\quad\sin\alpha=\dfrac{a_y}{|a|}=\dfrac{-5}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=-\dfrac{5}{13}$, тогда

$\dfrac{\partial z}{\partial a}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{12}{13}+\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{87}{52}$. $\dfrac{\partial z}{\partial a}<0$, следовательно, функция $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0(1,2)$ по направлению вектора $\vec{a}=12\vec{i}-5\vec{j}$ убывает.

311 -320. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение. Так как в данном случае $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$, то для нахождения стационарных точек составляем систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0; \end{cases}$ и решаем её:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 - 1) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 = 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, получили две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

Далее находим: $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$.

В точке $M_1(0;0)$ $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$ и $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$, т. е. в этой точке экстремума нет.

В точке $M_2(1;1)$ $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, $\Delta = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ и $A = 6 > 0$, следовательно, в этой точке данная функция достигает локального минимума $z_{\min}(1;1) = -1$.

321-330. Экспериментально получены пять значений искомой функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице.

x	1,1	2,1	3,4	4,3	4,9
y	-0,8	1,2	3,8	5,4	6,7

Методом наименьших квадратов найти функцию $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$.

Решение. Перепишем таблицу в виде столбцов и проведём необходимые вычисления

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,1	-0,8	1,21	-0,88
2	2,1	1,2	4,41	2,52
3	3,4	3,8	11,56	12,92
4	4,3	5,4	18,49	23,22
5	4,9	6,7	24,01	32,83
$\sum\limits_{i=1}^{5}$	15,8	16,3	59,68	70,61

Система линейных уравнений для определения параметров a и b будет иметь вид: $\begin{cases} 59{,}68a + 15{,}8b = 70{,}61, \\ 15{,}8a + 5b = 16{,}3. \end{cases}$ Решая систему, получим $a = 1{,}96$, $b = -2{,}93$. Следовательно, $y = 1{,}96x - 2{,}93$.

Тема 12. Дифференциальные уравнения

Бермант А.Ф., Араманович И.Г., глава 10.

Пискунов Н. С., часть 2, гл. 13.

Письменный Д.Т., часть 2, § 1-5.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., часть 2, гл. 4.

Дифференциальным уравнением **(**ДУ**)** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется *обыкновенным дифференциальным уравнением,* если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производных, входящих в уравнение.

Например, $x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и её первую производную y', т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{12.1}$$

Если это уравнение можно преобразовать к виду

$$y' = f(x, y), \tag{12.2}$$

то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, *разрешенным относительно производной.*

Преобразуем уравнение (12.2):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию $f(x, y)$ представим в виде: $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $Q(x,y) \neq 0$; тогда получим так называемую *дифференциальную форму* уравнения первого порядка:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,. \qquad (12.3)$$

Общим решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество при любых значениях C.

Свойства общего решения.

1) Так как C – произвольная постоянная величина, то дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При заданных начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения. График решения $y = \varphi(x)$ ДУ называется *интегральной кривой*. С геометрической точки зрения $y = \varphi(x, C)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, частное же решение $y = \varphi(x, C_0)$ - одна кривая этого семейства, проходящая через точку (x_0, y_0).

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом*; уравнение вида $\Phi(x, y, C_0) = 0$ в этом случае называется *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши (теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка).

Если в уравнении (12.2) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна в некоторой области* D *плоскости* Oxy *и имеет в этой области непрерывную частную производную* $f'_y(x,y)$, *то какова бы не была точка* (x_0, y_0) *в области D, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *этого уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию* $y(x_0) = y_0$.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (12.2) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде

$$y' = f_1(x) f_2(y). \qquad (12.4)$$

Учитывая тот факт, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнение (12.4) можно записать в виде: $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ или $dy = f_1(x) f_2(y) dx$.

Разделив последнее уравнение на $f_2(y) \neq 0$, получим уравнение с *разделёнными переменными*: $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Проинтегрировав обе части этого уравнения, получаем: $\int \dfrac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx; \quad F_2(y) = F_1(x) + C$ - общий интеграла уравнения (12.4).

Дифференциальное уравнение (12.3) будет уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0. \qquad (12.5)$$

Разделив почленно уравнение (12.5) на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$, получим уравнение с разделёнными переменными $\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \dfrac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$, проинтегрировав которое почленно, получим общий интеграл уравнения (12.5):

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина *C*, и, соответственно, частное решение.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

<u>Решение.</u> Сделав замену $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделив переменные, получим:

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^{2.}}{2} + C; \qquad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Таким образом нашли общее решение заданного уравнения.

Пример 2. Найти решение уравнения $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Преобразуем заданное уравнение: $2xe^{-x^2} + \frac{dy}{ydx} = 0$;

$2xe^{-x^2}dx + \frac{dy}{y} = 0$; $\int 2xe^{-x^2}dx + \int \frac{dy}{y} = C$; $-e^{-x^2} + \ln|y| = C$.

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Для нахождения частного решения подставим в полученное выражение значения $x = 0$, $y = 1$ и найдём $C = -e^0 + \ln 1 = -1$. Следовательно, частный интеграл заданного уравнения будет иметь вид $\ln|y| = e^{-x^2} - 1$, а частное решение - $y = e^{(e^{-x^2} - 1)}$.

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется *однородной n – го измерения* (*порядка*) относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример 3. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3- го порядка.

Дифференциальное уравнение (12.2) называется *однородным*, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать: $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \dfrac{1}{x}$.

Тогда получаем: $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \dfrac{y}{x}$, т.е. $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = \varphi(u)$;

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}.$$

В итоге получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u. Решаем его:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Затем, найдя интегралы и сделав обратную замену, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

<u>Пример 4.</u> Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$.

<u>Решение.</u> Введем вспомогательную функцию u.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\dfrac{du}{u\ln u} = \dfrac{dx}{x}$; $\displaystyle\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x}$;

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$; $\ln u = Cx$; $u = e^{Cx}$;

Переходя от вспомогательной функции к функции y, получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

Уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (12.6)$$

линейное относительно неизвестной функции y и её производной y' называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением первого порядка. Функции $P(x) \neq 0,\ \ Q(x) \neq 0$ должны быть непрерывны на некотором промежутке $[a;\ b]$, для того, чтобы выполнялись условия теоремы Коши существования и единственности решения. Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (12.6) называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением и имеет вид:

$$y' + P(x)y = 0\,. \qquad (12.7)$$

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений применяются в основном два метода: ***метод Бернулли*** и ***метод Лагранжа***.

Метод Бернулли заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = u(x) \cdot v(x)$.

Находим $y' = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$ и подставляем в исходное уравнение, получаем: $u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$ или

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)\,. \qquad (12.8)$$

Одну из составляющих произведение функций выбираем так, что выражение в скобках было равно нулю, т.е. $\dfrac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, можно получить функцию u, разделив переменные и проинтегрировав:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим полученное выражение для функции u в уравнение (12.8) и с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю, получаем:

$$Ñe^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Подставляем найденные функции в произведение:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right).$$

Окончательно получаем

$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$, где C_2 – произвольная постоянная.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений также называют методом ***вариации произвольной постоянной***. Первый шаг данного метода состоит в решении соответствующего однородного уравнения

$$y' + P(x)y = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией, зависящей от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} + C_1(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Из этого уравнения определим функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом решения уравнения по методу Бернулли.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n,$$

где n – число, не равное 0 и 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = y^{1-n}$, с помощью которой уравнение Бернулли приводится к линейному относительно z:

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Решив полученное уравнение одним из описанных выше методов, найдём $z = z(x, C)$, а затем и $y = z^{1/(1-n)}$. Однако уравнение Бернулли, как и линейное, можно решить подстановкой Бернулли $y = u(x) \cdot v(x)$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ *высших порядков*. ДУ второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

или, если это возможно, в виде, разрешённом относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (12.9)$$

Общим решением ДУ (12.9) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением ДУ при любых значениях C_1 и C_2;

2) при заданных начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \qquad (12.10)$$

существуют единственные значения $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ является решением уравнения (12.9) и удовлетворяет начальным условиям (12.10).

Всякое решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ уравнения (12.9), получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, называется *частным решением*.

Решения ДУ, записанные в виде $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ и $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ называются соответственно, *общим* и *частным интегралом* соответственно.

Как и в случае уравнения первого порядка задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши*.

Теорема Коши (теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения 2- го порядка).

Если в уравнении (12.9) *функция* $f(x, y, y')$ *и её частные производные* f'_y *и* $f'_{y'}$ *непрерывны в некоторой области* D *изменения переменных* x, y, y', *то какова бы не была точка* $(x_0, y_0, y'_0) \in D$, *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям* (12.10).

Аналогичные понятия и определения имеют место для *дифференциального уравнения* n *– го порядка,* которое записывается в виде:
$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, или, если это возможно, в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \qquad (12.11)$$

Начальные условия для ДУ (12.11) имеют вид:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad .... \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Общим решением ДУ n - го порядка является функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, содержащая n произвольных постоянных.

Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $[a, b]$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

…………………………………………………………………

$$y = \int dx \int dx .... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

<u>Пример 5.</u> Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $y(0) = 1;\; y'(0) = -1;\quad y''(0) = 0.$

<u>Решение.</u> $y'' = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Получили общее решение заданного уравнения. Для нахождения его частного решения подставим заданные начальные условия: $1 = \frac{1}{8} + \tilde{N}_3;$ $-1 = \frac{1}{4} + C_2;$ $0 = \frac{1}{2} + C_1;$ из которых находим значения постоянных $C_1 = -\frac{1}{2};$ $C_2 = -\frac{5}{4};$ $C_3 = \frac{7}{8}.$ В результате получим частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}.$

2. Уравнения, не содержащие явно искомой функции

Это уравнения вида:

$$y'' = f(x, y') \tag{12.12}$$

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ - новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (12.12) принимает вид $p' = f(x, p)$. Пусть $p = \varphi(x, C_1)$ - общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя p на y', получаем уравнение $y' = \varphi(x, C_1)$, общее решение которого будет иметь вид

$$y = \int \varphi(x, C_1)\, dx + C_2 .$$

<u>Пример 6.</u> Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{y'}{x}$.

<u>Решение.</u> Применяем подстановку $p = y';$ $p' = y'';$

$$p' = \frac{p}{x}; \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad p = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y' = C_1 x; \qquad y = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2.$$

3. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида

$$y'' = f(y, y'). \qquad (12.13)$$

Порядок таких уравнений может быть понижен с помощью замены $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

Подставляем эти значения в исходное дифференциальное уравнение:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Получили ДУ первого порядка, пусть $p = \varphi(y, C_1)$ является общим его решением. Заменяя функцию $p(y)$ на y', получаем уравнение $y' = \varphi(y, C_1)$, интегрируя которое найдём общий интеграл уравнения (12.13)

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 7. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = 0$.

Решение. Понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p(y)$. Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p. \quad y \frac{dp}{dy} p - p^2 = 0; \quad p = 0; \quad y = C;$ и

$$\frac{ydp}{dy} = p; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln C_1; \quad p = C_1 y.$$

Далее, заменим $p(y)$ на y':

$y' = C_1 y; \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx; \quad \ln|y| = C_1 x + C_2; \quad y = e^{C_1 x} e^{C_2} = C_3 e^{C_1 x}$, где $C_3 = e^{C_2}$. Окончательно получаем: $y = Ce^{C_1 x}$.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x),$$

где $p_1, p_2, ..., p_n$ – функции, зависящие от x или постоянные величины.

Левую часть этого уравнения обозначим $L(y)$:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = L(y).$$

Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется *линейным однородным* уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется *линейным неоднородным* уравнением, если все коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется *линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами*.

Рассмотрим ДУ вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (12.14)$$

Выражение $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется *линейным дифференциальным оператором*.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами: 1) $L(Cy) = CL(y)$;

2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения (12.14) обладают следующими свойствами:

1) Если функция y является решением уравнения, то функция Cy, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Если из функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ составить определитель n – го порядка вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется *определителем Вронского*.

Теорема. Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *линейно зависимы*, то составленный из них определитель Вронского равен нулю.

Теорема. Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *линейно независимы,* то составленный из них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке интервала (a, b).

Теорема. Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, ..., y_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы составленный из них определитель Вронского был *не равен* нулю.

Теорема. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \text{ или } L(y) = 0,$$

решение которого будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const.$

Так как $y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}; \quad ...; \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется *характеристическим многочленом* дифференциального уравнения.

Для того чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется *характеристическим уравнением.*

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения. Характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \dots \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \dots \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \dots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 8. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0;$ его корни $k_1 = -1; \quad k_2 = 2$. Общее решение: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$.

Пример 9. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет кратные корни $k_1 = k_2 = 2$. В этом случае общее решение уравнения $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Пример 10. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0; \quad D = -16$. Дискриминант отрицательный, следовательно, уравнение имеет комплексные сопряжённые корни $k_1 = -1 + 2i$ и $k_2 = -1 - 2i.$ Здесь $\alpha = -1,\ \beta = 2$, поэтому общее решение уравнения запишется так: $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$

Пример 11. Решить уравнение $y^{IV} - y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0.$ Разложим левую часть уравнения на множители и найдём его корни

$$(k^2-1)(k^2+1)=0; \qquad k_1=1; \quad k_2=-1; \quad k_3=i; \quad k_4=-i.$$

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Пример 12. Решить уравнение $y^V-9y'''=0.$

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $k^5-9k^3=0;$ $k^3(k^2-9)=0$ и находим его корни $k_1=k_2=k_3=0;$ $k_4=3;$ $k_5=-3$. Записываем общее решение: $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=f(x).$$

С учетом обозначения $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=L(x)$ его можно записать так:

$$L(x)=f(x).$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=f(x)$ в некоторой области есть сумма *любого* его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

На практике удобно применять метод ***вариации произвольных постоянных.***

Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде: $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n=\sum\limits_{i=1}^{n}C_iy_i$.

Затем, полагая коэффициенты $C_1,C_2,...,C_n$ функциями, зависящими от x, ищется решение неоднородного уравнения:

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i .$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_1(x),C_2(x),...,C_n(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме двух решений: общего решения соответствующего однородного уравнения (y_0) и некоторого частного решения неоднородного уравнения (Y), т.е. $y = y_0 + Y$. Если правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, то частное решение может быть найдено в виде:

$$Y = e^{ax}(S_p(x)\cos bx + T_p(x)\sin bx) \cdot x^r,$$

где $S_p(x)$, $T_p(x)$ – многочлены степени $p = \max(n, m)$ с неопределёнными коэффициентами, r равно числу корней характеристического уравнения, совпадающих со значением $z = a + bi$. Таким образом, $r = 0$, если среди корней характеристического уравнения нет числа z; $r = 1$, если существует один корень, совпадающий с z; $r = 2$, если существуют два корня, совпадающие с z.

Пример 13. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$.

Решение. Для нахождения y_0 составляем и решаем характеристическое уравнение: $k^2 - 2k = 0$, $k(k-2) = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$.

Следовательно, $y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Частное решение Y подбираем по виду правой части заданного уравнения $f(x) = 6 + 12x - 24x^2$. Здесь $a = 0$, $b = 0$, $z = 0$, $n = 2$. Следовательно, $Y = S_2(x) \cdot x$, где $S_2(x)$ – многочлен второй степени с неопределёнными коэффициентами, который умножили на x, т.к. среди корней характеристического уравнения есть один корень, равный z. Таким образом,

$$Y = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x = Ax^3 + Bx^2 + Cx\,.$$

Коэффициенты A, B и C находим методом неопределённых коэффициентов. Для этого находим $Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $Y'' = 6Ax + 2B$.

Подставим найденные выражения для Y, Y' и Y'' в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при x^2, x и x^0, получим:

$$6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 6 + 12x - 24x^2,$$

$$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = 6 + 12x - 24x^2.$$

$$x^2 \,|\; -6A = -24, \Rightarrow A = 4;$$

$$x \,|\; 6A - 4B = 12, \Rightarrow 24 - 4B = 12, \Rightarrow 4B = 12, \quad B = 3;$$

$$x^0 \,|\; 2B - 2C = 6, \Rightarrow 6 - 2C = 6, \Rightarrow C = 0.$$

Тогда $Y = 4x^3 + 3x^2$, и общее решение заданного неоднородного уравнения будет иметь вид $y = y_0 + Y = C_1 + C_2e^{2x} + 4x^3 + 3x^2$.

Пример 14. $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

Решение. Для нахождения y_0 составляем и решаем характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 1 = 0$, $(k-1)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$.

Следовательно, $y_0 = e^x(C_1 + C_2x)$.

Частное решение Y подбираем по виду правой части заданного уравнения $f(x) = 4e^x$. Здесь $a = 1$, $b = 0$, $z = 1$, $n = 0$, $p = 0$. Следовательно, $Y = S_0(x) \cdot e^x \cdot x^2$, где $r = 2$, т.к. среди корней характеристического уравнения есть два корня, равные z. Таким образом $Y = Ae^x x^2$ и

$$Y' = Ae^x x^2 + 2Ae^x x = Ae^x(x^2 + 2x),$$

$$Y'' = Ae^x(x^2 + 2x) + Ae^x(2x + 2) = Ae^x(x^2 + 4x + 2).$$

Подставим найденные выражения для Y, Y' и Y'' в исходное уравнение, получим: $Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Ae^x(x^2 + 2x) + Ae^x x^2 = 4e^x$,

разделим обе части на e^x, раскроем скобки и приведём подобные:

$$Ax^2 + 4Ax + 2A - 2Ax^2 - 4Ax + Ax^2 = 4\text{, получим } 2A = 4,\ A = 2.$$

Тогда $Y = 2e^x x^2$, и общее решение заданного неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y = y_0 + Y = e^x(C_1 + C_2x) + 2e^x x^2 = e^x(C_1 + C_2x + 2x^2).$$

П р и м е р 15. $y'' + 36y = 2\sin 6x$.

Р е ш е н и е. Для нахождения y_0 составляем и решаем характеристическое уравнение: $k^2 + 36 = 0,\quad k^2 = -36,\quad k_1, k_2 = \pm 6i$.

Следовательно, $y_0 = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$.

Частное решение Y подбираем по виду правой части заданного уравнения $f(x) = 2\sin 6x$. Здесь $a = 0,\ b = 6,\ z = 6i,\ m = 0,\ p = 0$. Тогда $Y = (A\cos 6x + B\sin 6x)\cdot x$, где $r = 1$, т.к. среди корней характеристического уравнения есть один корень, совпадающий с z.

Находим $Y' = (-6A\sin 6x + 6B\cos 6x)x + (A\cos 6x + B\sin 6x)$,

$$Y'' = (-36A\cos 6x - 36B\sin 6x)x - 6A\sin 6x + 6B\cos 6x - 6A\sin 6x +$$
$$+ 6B\cos 6x = -36(A\cos 6x + B\sin 6x)x - 12A\sin 6x + 12B\cos 6x.$$

Подставим найденные выражения для Y и Y'' в исходное уравнение:

$$-36(A\cos 6x + B\sin 6x)x - 12A\sin 6x + 12B\cos 6x +$$
$$+36(A\cos 6x + B\sin 6x)x = 2\sin 6x,$$
$$-12A\sin 6x + 12B\cos 6x = 2\sin 6x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 6x$ и $\cos 6x$, получим:

$$\begin{array}{l|l} \sin 6x & -12A = 2, \Rightarrow A = -6; \\ \cos 6x & 12B = 0, \Rightarrow B = 0. \end{array}$$

Тогда $Y = -6x\cos 6x$, и общее решение заданного неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y = y_0 + Y = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x - 6x\cos 6x.$$

З а м е ч а н и е.

Если в неоднородном уравнении $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение $Y = Y_1 + Y_2$, где Y_1 – частное решение уравнения с правой частью $f_1(x)$, Y_2 – частное решение уравнения с правой частью $f_2(x)$.

П р и м е р 16. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x} + 10x - 4$.

Р е ш е н и е. Для нахождения y_0 составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 10 = 0,\quad D = 36 - 40 = -4,\quad \sqrt{D} = 2i,\quad k_{1,2} = -3 \pm 2i.$$

Следовательно, $y_0 = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

Частное решение Y подбираем по виду правой части заданного уравнения $f(x)=74e^{3x}+2x-1=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=74e^{3x}$, а $f_2(x)=10x-4$. Поэтому $Y=Y_1+Y_2$, где

Y_1 – частное решение уравнения $y''+6y'+10y=74e^{3x}$, (1)

Y_2 – частное решение уравнения $y''+6y'+10y=10x-4$. (2)

$f_1(x)=74e^{3x}$. Здесь $a=3,\ b=0,\ z=3,\ n=0,\ p=0,\ r=0$, поэтому $Y_1=Ae^{3x},\quad Y_1'=3Ae^{3x},\quad Y_1''=9Ae^{3x}$.

Подставим найденные выражения для Y, Y' и Y'' в уравнение (1):

$$9Ae^{3x}+18Ae^{3x}+10Ae^{3x}=74e^{3x},$$

$$37Ae^{3x}=74e^{3x}\Rightarrow 37A=74,\quad A=2.$$

Следовательно, $Y_1=2e^{3x}$.

$f_2(x)=10x-4$. Здесь $a=0,\ b=0,\ z=0,\ n=1,\ p=1,\ r=0$, поэтому $Y_2=Ax+B,\quad Y_2'=A,\quad Y_2''=0$. Подставим найденные выражения для Y, Y' и Y'' в уравнение (2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$6A+10Ax+10B=10x-4.$$

$$x\ \big|\ 10A=10\Rightarrow A=1;$$

$$x^0\ \big|\ 6A+10B=-4\Rightarrow 6+10B=-4\Rightarrow B=-1.$$

Тогда $Y_2=x-1$, и общее решение заданного неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y=y_0+Y_1+Y_2=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+2e^{3x}+x-1.$$

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями $y=y(x),\ z=z(x),\ u=u(x)$:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=a_{11}y+a_{12}z+a_{13}u\\ \dfrac{dz}{dx}=a_{21}y+a_{22}z+a_{23}u\\ \dfrac{du}{dx}=a_{31}y+a_{32}z+a_{33}u\end{cases}\qquad(12.15)$$

Решения системы (12.15) ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}$; $z = \beta e^{kx}$; $u = \gamma e^{kx}$, $\alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему (12.15) и разделив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma \\ \gamma k = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma \end{cases}$$

После несложных преобразований система примет вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases} \qquad (12.16)$$

Система (12.16) является однородной системой трёх линейных уравнений с тремя неизвестными α, β, γ. Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \qquad (12.17)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* системы (12.15). Раскрыв определитель, получим уравнение третьей степени относительно k, которое три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (12.15):

$$\begin{aligned} y &= C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x}; \\ z &= C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x}; \\ u &= C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Пример 17. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений (12.16), которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}.$$

Для $k_1 = 1$: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$.

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для $k_2 = 6$: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$.

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения: $x'' = 5x' + 4x + 4y$. Из первого уравнения выразим $2y = x' - 5x$ и подставим в последнее уравнение, получим уравнение второго порядка относительно функции $x(t)$: $x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$ или $x'' - 7x' + 6x = 0$.

Находим корни соответствующего характеристического уравнения $k_1 = 6$; $k_2 = 1$ и записываем решение $x(t) = Ae^t + Be^{6t}$. Дифференцируем $x'(t) = Ae^t + 6Be^{6t}$ и затем находим решение

$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t}$; $y(t) = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t}$. Обозначив $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, получаем общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Дифференциальные уравнения

331-340. Найти общее решение дифференциального уравнения

331. $y' = \dfrac{8x+5y}{5x-2y}$.

332. $y' = \dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

333. $xy' + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$.

334. $xy' - y + \sqrt{x^2+y^2} = 0$.

335. $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$.

336. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

337. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

338. $2x^2y' + x^2 + y^2 = 0$.

339. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

340 $xyy' = 8x^2 + y^2$.

341-350. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

341. $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, $y(0) = -1$.

342. $xy' - y = x^2\cos x$, $y(\pi/2) = \pi/2$.

343. $xy' + y = -x^2y^2$, $y(1) = 1$.

344. $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

345. $xy' + 2y = 3x^5y^2$, $y(1) = -1$.

346. $y' + 2xy = 3x^2e^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

347. $y' + y = -e^{2x}y^2$, $y(0) = 1$.

348. $y' + 2y\operatorname{tg} 2x = \sin 4x$, $y(0) = 0$.

349. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$, $y(0) = -1$.

350. $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$, $y(0) = 1$.

351-360. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка

351. $y'' \cdot \operatorname{tg} 5x = 5y'$.

352. $(1+\sin x)y'' = \cos x \cdot y'$.

353. $xy'' + 2y' = 0$.

354. $xy'' + y' = 1$.

355. $\operatorname{ctg} 2x \cdot y'' + 2y' = 0$. **356.** $\operatorname{tg} x \cdot y'' = 2y'$.

357. $(1 + x^2)y'' = 2xy'$. **358.** $y''x \ln x = y'$.

359. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$. **360.** $xy'' = y'$.

361-370. Найти частное решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

361. $y'' - e^y y' = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

362. $(y+1)^2 y'' = (y')^3$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

363. $y'' = 3\sqrt{y+1}$, $y(2) = 0,\ y'(2) = 2$.

364. $2yy'' = 3 + (y')^2$, $y(1) = 1,\ y'(1) = 1$.

365. $(y-2)y'' = 2(y')^2$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 1$.

366. $2y'' - e^{4y} = 0$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1/2$.

367. $y'' - 12y^2 = 0$, $y(0) = 1/2,\ y'(0) = 1$.

368. $y^3 y'' = 3$, $y(1) = 1,\ y'(1) = 1$.

369. $yy'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

370. $y'' \cdot y' = 2y$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

371-380. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

371. а) $y'' + 5y' = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

372. а) $y'' + 7y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.

373. а) $y'' - 49y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

374. а) $y'' + 9y' = 0$; б) $y'' + y' - 6y = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

375. а) $y'' - 4y = 0$; б) $y'' - y' - 12y = 0$; в) $y'' + 2y' + 17y = 0$.

376. а) $y'' - 2y' = 0$; б) $y'' - 2y' + 10y = 0$; в) $y'' + y' - 2y = 0$.

377. а) $y'' + 3y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 6y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

378. а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

379. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

380. а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

381-390. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

381. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4$.

382. $y'' - 3y' = 3e^{3x}$.

383. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3$.

384. $y'' + y' = 3\cos x - \sin x$.

385. $y'' - 4y = 4\sin 2x$.

386. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4$.

387. $y'' - 2y' = 2x + 1$.

388. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.

389. $y'' + 4y = 3\cos x$.

390. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$.

391-400. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

391. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

392. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$

393. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

394. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

395. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

396. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

397. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

398. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

399. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$

400. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

401. Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(9; –4), если известно, что длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, проведённой в любой точке кривой, равна полусумме координат точки касания.

402. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(–2; 5), если известно, что длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, проведённой в любой точке кривой, равна квадрату абсциссы точки касания.

403. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(1; 1), если известно, что длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, проведённой в любой точке кривой, равна квадрату абсциссы точки касания.

404. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(0; –8), если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведённой в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

405. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(0; 4), если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведённой в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

406. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(–1; 1), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке равняется квадрату ординаты точки касания.

407. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(2; 4), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке в 2 раза меньше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

408. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(2; 5), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке в 8 раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

409. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(–1; 3), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке равняется удвоенной ординате этой точки.

410. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(3; –2), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке равняется ординате этой точки, увеличенной в 4 раза.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

331-340. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Решение. Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = x \cdot u(x)$.

Далее находим: $y' = u'x + u, \quad u'x + u = \dfrac{x^2 + 2x^2u - 5x^2u^2}{2x^2 - 6x^2u},$

$u'x + u = \dfrac{x^2(1 + 2u - 5u^2)}{x^2(2 - 6u)}, \; u'x + u = \dfrac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u}, \quad u'x = \dfrac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u} - u,$

$u'x = \dfrac{1 + 2u - 5u^2 - 2u + 6u^2}{2 - 6u}, \quad u'x = \dfrac{1 + u^2}{2 - 6u}.$

Заменяем $u' = \dfrac{du}{dx}$ и получим уравнение с разделяющимися переменными

$x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1 + u^2}{2 - 6u}$. Решаем его: $\dfrac{2 - 6u}{1 + u^2}du = \dfrac{dx}{x}, \quad \displaystyle\int \frac{2 - 6u}{1 + u^2}du = \int \frac{dx}{x},$

$2\displaystyle\int \frac{du}{1 + u^2} - 3\int \frac{2udu}{1 + u^2} = \ln x + C, \quad 2\,\mathrm{arctg}\,u - 3\int \frac{d(1 + u^2)}{1 + u^2} = \ln x + C,$

$2\,\mathrm{arctg}\,u - 3\ln(1 + u^2) = \ln x + C, \quad 2\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) - \ln x = C,$

$$2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) - \ln x = C,$$

$$2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln(x^2 + y^2) + 3\ln x^2 - \ln x = C,$$

$2\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} - 3\ln(x^2 + y^2) + 5\ln x = C$, т.о. нашли общий интеграл исходного уравнения.

341-350. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' + y = 2y^2 \ln x$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1/2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Преобразуем уравнение и выполним подстановку, в результате чего получим:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2y^2}{x}\ln x, \quad u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 2\frac{u^2v^2}{x}\ln x.$$

Сгруппируем первое и третье слагаемые и функцию $v(x)$ вынесем за скобки:

$$v(u' + \frac{u}{x}) + uv' = 2\frac{u^2v^2}{x}\ln x. \qquad (1)$$

Находим $u(x)$ из условия $u' + \dfrac{u}{x} = 0$, которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{du}{u} = -\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = -\ln|x|, \quad u = \frac{1}{x}.$$

Полученное выражение для $u(x)$ подставим в уравнение (1):

$$\frac{1}{x}v' = 2\frac{v^2}{x^3}\ln x, \quad \frac{v'}{v^2} = \frac{2\ln x}{x^2}, \quad v' = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{v^2} = \frac{2\ln x}{x^2}dx,$$

$$\int\frac{dv}{v^2} = \int\frac{2\ln x}{x^2}dx, \quad \int\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{v}, \quad \int\frac{2\ln x}{x^2}dx = \left\|\begin{matrix} u_1 = \ln x, & du_1 = \dfrac{dx}{x} \\ dv_1 = \dfrac{2dx}{x^2}, & v_1 = -\dfrac{2}{x}\end{matrix}\right\| =$$

$$= -\frac{2\ln x}{x} - \int -\frac{2}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{2\ln x}{x} + 2\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C = -\frac{2\ln x + 2 - Cx}{x}.$$

Следовательно, $-\dfrac{1}{v} = -\dfrac{2\ln x + 2 - Cx}{x}$ и $v = \dfrac{x}{2\ln x + 2 - Cx}$.

Находим общее решение исходного уравнения

$$y = u(x)v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2\ln x + 2 - Cx} = \frac{1}{2\ln x + 2 - Cx}.$$

Подставляем начальные условия $y(1) = 1/2$:

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\ln 1 + 2 - C}$, откуда следует, что $C = 0$, и записываем частное решение заданного уравнения: $y = \dfrac{1}{2(\ln x + 1)}$.

351-360. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $xy'' = y' + x^2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = p(x)$.

Тогда $y' = p'(x)$. Преобразуем уравнение и выполним подстановку:

$$y'' - \frac{y'}{x} = x, \quad p'(x) - \frac{p(x)}{x} = x.$$

В результате получили линейное уравнение первого порядка, которое решаем с помощью подстановки $p(x) = u(x)v(x)$. Тогда $p'(x) = u'v + uv'$. Подставим в уравнение и получим

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x.$$

Сгруппируем первое и третье слагаемые и функцию *v(x)* вынесем за скобки:

$$v(u' - \frac{u}{x}) + uv' = x. \qquad (2)$$

Находим $u(x)$ из условия $u' - \frac{u}{x} = 0$, которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = \ln|x|, \quad u = x.$$

Полученное выражение для $u(x)$ подставим в уравнение (2):

$$xv' = x, \quad v' = 1, \quad v' = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = 1, \quad dv = dx, \quad v = x + C_1$$

Следовательно, $p(x) = x(x + C_1) = x^2 + C_1x$. Но $p(x) = y' = \frac{dy}{dx}$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + C_1x, \quad dy = (x^2 + C_1x)dx, \quad \int dy = \int (x^2 + C_1x)dx.$$

Проинтегрировав, получим общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2.$$

361-370. Найти частное решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $y'' + y(y')^3 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

<u>Решение.</u> Понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'(y) \cdot y' = p \cdot p'(y)$. Подставим в уравнение:

$$p \cdot p'(y) + yp^3 = 0, \quad p(p'(y) + yp^2) = 0, \quad p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C.$$

Исходя из начальных условий, получим: $C = 1, \quad y = 1$.

Далее: $p'(y) + yp^2 = 0, \quad \frac{dp}{dy} = -yp^2, \quad -\frac{dp}{p^2} = ydy, \quad \frac{1}{p} = \frac{y^2}{2} + C_1,$

$p = \frac{2}{y^2 + 2C_1}, \quad y' = \frac{2}{y^2 + 2C_1}.$ Исходя из начальных условий найдём C_1

($y' = 2$ при $y = 1$): $2 = \frac{2}{1 + 2C_1}, \quad 1 + 2C_1 = 1, \quad C_1 = 0.$ Следовательно, дальше продолжаем решать уравнение $y' = \frac{2}{y^2}$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y^2}$, $y^2dy=2dx$, $\int y^2dy=2\int dx$, $\frac{y^3}{3}=2x+C_2$.

Найдём C_2 из начальных условий: $\frac{1}{3}=C_2$, следовательно, частное решение заданного уравнения имеет вид: $\frac{y^3}{3}=2x+\frac{1}{3}$, или $y=\sqrt[3]{6x+1}$.

371-380. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

а) $y''-2y'=0$;   б) $9y''-6y'+y=0$;   в) $y''+12y'+37y=0$.

Решение. Заданные уравнения являются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами, вида $y''+py'+qy=0$. Корнями его характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$ могут быть:

1) действительные, различные числа $k_1\neq k_2$;

2) действительные, равные числа $k_1=k_2$;

3) комплексно-сопряжённые числа $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$.

Им соответствуют следующие общие решения уравнения:

1) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$;

2) $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$;

3) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Для заданных уравнений составляем характеристические уравнения, находим их корни и записываем общие решения.

а) $y''-2y'=0$. Характеристическое уравнение : $k^2-2k=0$, его корни $k_1=0,\quad k_2=2$ – действительные различные числа, поэтому общее решение уравнения имеет вид: $y=C_1e^0+C_2e^{2x}$, или $y=C_1+C_2e^{2x}$.

б) $9y''-6y'+y=0$. Характеристическое уравнение :
$9k^2-6k+1=0,\quad D=0$, следовательно, корни $k_1=k_2=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ действительные равные числа, поэтому общее решение уравнения имеет вид:

$y=e^{(1/3)x}(C_1+C_2x)$ или $y=e^{\frac{x}{3}}(C_1+C_2x)$.

в) $y'' + 12y' + 37y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^2 + 12k + 37 = 0, \quad D = 144 - 4 \cdot 37 = -4, \quad \sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2i$, следовательно, корни - комплексно-сопряжённые числа $k_{1,2} = \dfrac{-12 \pm 2i}{2} = -6 \pm i$, где $\alpha = -6, \quad \beta = 1$, поэтому общее решение уравнения имеет вид: $y = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

381-390. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (см. примеры 13-16).

391-400. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. пример 17).

401-410. Решить задачу.

Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(0; 2), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке равняется утроенной ординате этой точки.

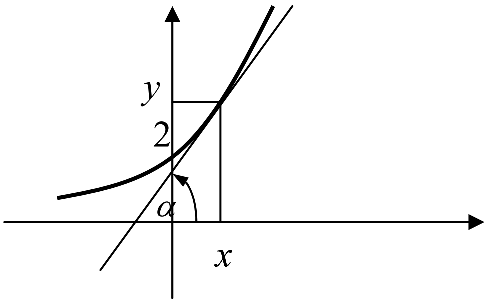

Рис. 2

Решение. Угловой коэффициент касательной к кривой равен $\kappa = tg\alpha = y'(x)$. По условию задачи $y'(x) = 3y$ (рис. 2). Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его: $\dfrac{dy}{dx} = 3y, \ \dfrac{dy}{y} = 3dx, \ \int \dfrac{dy}{y} = \int 3dx, \ \ln|y| = 3x + C$.

Искомая кривая проходит через точку A(0; 2), поэтому $\ln 2 = 0 + C$, следовательно, $C = \ln 2, \quad \ln|y| = 3x + \ln 2$, $y = e^{3x + \ln 2} = 2e^{3x}$.

Таким образом, уравнение искомой кривой имеет вид $y = 2e^{3x}$.

Тема 13. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Бермант А.Ф., Араманович И.Г., глава 8, 9
Пискунов Н. С., часть 2, гл. 14, 15.
Письменный Д.Т., часть 2, § 7-12.
Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., часть 2, гл. 1, 2.

Двойные интегралы и их вычисление

Рассмотрим некоторую область D, ограниченную замкнутой линией C на плоскости Oxy. Пусть в D задана функция $z = f(x, y)$. Произвольными линиями разобьем D на n элементарных областей S_i, площади которых ΔS_i $(i = 1, 2, ..., n)$. В каждой области S_i, выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ (рис. 3). *Диаметром* d_i, *области* S_i называется длина наибольшей из хорд, соединяющих граничные точки S_i. Выражение вида

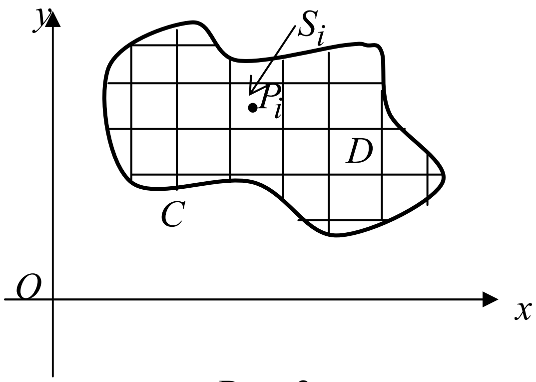

Рис. 3

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i \qquad (12.18)$$

называется *интегральной суммой для функции* $z = f(x, y)$ *в области* D.

Двойным интегралом функции $z = f(x, y)$ ***по области*** D называется предел $\lim\limits_{d_i \to 0} I_n$ обозначаемый $\iint\limits_D f(x, y)dS$. Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i \qquad (12.19)$$

Будем предполагать, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D и линия C — кусочно-гладкая, поэтому указанный в формуле (12.19) предел всегда существует.

Укажем *основные свойства двойного интеграла* и его геометрический и физический смыслы.

1. $\iint\limits_D dS = S(D)$, где $S(D)$ — площадь области интегрирования D.

2. Если подынтегральная функция $z = f(x, y) = \mu(x, y)$ — поверх-

ностная плотность материальной пластины, занимающей область D, то масса этой пластины определяется по формуле

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y) dS$$

В этом заключается *физический смысл двойного интеграла.*

3. Если $f(x, y) \geq 0$ в области D, то двойной интеграл (12.19) численно равен объему V цилиндрического тела, находящегося над плоскостью Oxy, нижним основанием которого является область D, верхним — часть поверхности $z = f(x, y)$, проектирующаяся в D, а боковая поверхность — цилиндрическая, причем ее прямолинейные образующие параллельны оси Oz и проходят через границу C области D (рис. 4).

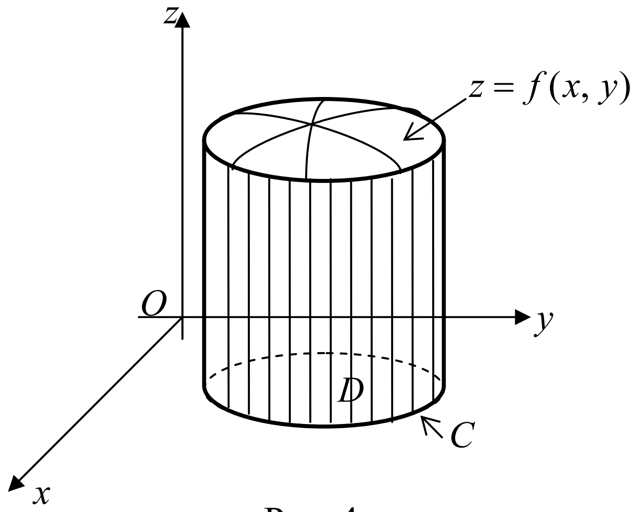

Рис. 4

Это свойство выражает *геометрический смысл двойного интеграла.*

4. Если функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ непрерывны в области D то верна формула

$$\iint\limits_D \left(f_1(x, y) \pm f_2(x, y) \right) dS = \iint\limits_D f_1(x, y) dS \pm \iint\limits_D f_2(x, y) dS .$$

5. Постоянный множитель k подынтегральной функции можно вы носить за знак двойного интеграла:

$$\iint\limits_D k \cdot f(x, y) dS = k \iint\limits_D f(x, y) dS .$$

6. Если область D разбить на конечное число областей $D_1, D_2, ..., D_k$, не имеющих общих внутренних точек, то интеграл по области D равен сумме интегралов по областям D_k:

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \iint\limits_{D_1} f(x, y) dS + \iint\limits_{D_2} f(x, y) dS + ... + \iint\limits_{D_k} f(x, y) dS .$$

7 (Теорема о среднем). Для непрерывной функции $z = f(x, y)$ в области D, площадь которой $S(D)$, всегда найдется хотя бы одна точка $P(x_0, y_0)$, такая, что

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = f(x_0, y_0) \cdot S(D) .$$

Число $f(x_0, y_0)$ называется *средним значением функции* $z = f(x, y)$ *в области* D.

8. Если в области D $f(x, y) \ge 0$, то $\iint\limits_D f(x, y)dS \ge 0$.

9. Если в области D для непрерывных функций $f(x,y)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ выполнены неравенства $f_1(x,y) \le f(x,y) \le f_2(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f_1(x,y)dS \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le \iint\limits_D f_2(x,y)dS.$$

10. $\left|\iint\limits_D f(x,y)dS\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dS$.

З а м е ч а н и е. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области D на элементарные области S_i (теорема существования и единственности), то в декартовой системе координат область D удобно разбивать на элементарные области S_i, прямыми, параллельными осям координат. Полученные при таком разбиении элементарные области S_i, принадлежащие области D являются прямоугольниками. Следовательно, $dS = dxdy$ и

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Вычисление двойного интеграла

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, и кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, причём функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывные и таковы, что $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a,b]$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Для вычисления двойного интеграла сначала берём внутренний интеграл в пределах от $y_{\text{âõ}} = \varphi_1(x)$ до $y_{\text{âû õ}} = \varphi_2(x)$, считая x постоянным, а затем от полученного результата берём внешний интеграл в пределах от наименьшего до наибольшего значений x в области D (рис. 5).

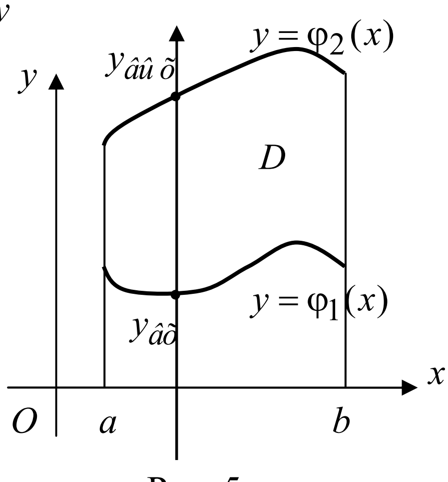

Рис. 5

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, если область D ограничена линиями: $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ (рис. 6).

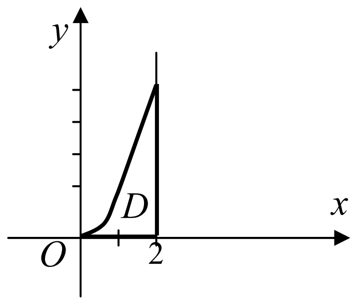

Рис. 6

Решение.

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} (x-y)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} = \int\limits_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - 3{,}2 = 0{,}8.$$

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, и кривыми $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, причём функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывные и таковы, что $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ для всех $y \in [c,d]$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x$, $y=1$, $y=2$, $x=0$ (рис. 7).

Решение.

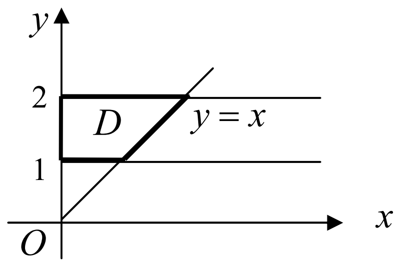

Рис. 7

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^x (x^2+y^2)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Bigg|_0^y dy = \int\limits_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5.$$

Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соотношениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ где $x(u, v)$, $y(u, v)$ - непрерывные и дифференцируемые функции.

Выражение $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = |I|$ называется *определителем Якоби* или *Якобианом*.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)dydx = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |I| \cdot dudv . \qquad (12.20)$$

Формула (12.20) называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

Прямоугольные декартовы (x, y) и полярные (ρ, φ) координаты связаны между собой следующими соотношениями: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$,

В этом случае Якобиан имеет вид:

$$|I| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Тогда формула (13.3) принимает вид

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \iint\limits_{D'} f_1(\rho, \varphi)\rho\, d\rho d\varphi .$$

Здесь D' - область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги)

Пусть в пространстве R^3 задана гладкая дуга AB кривой L, во всех точках которой определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Дугу AB произвольным образом разобьем на n частей l_i, длиной Δl_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ (рис.8). В каждой элементарной части l_i, выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i .$$

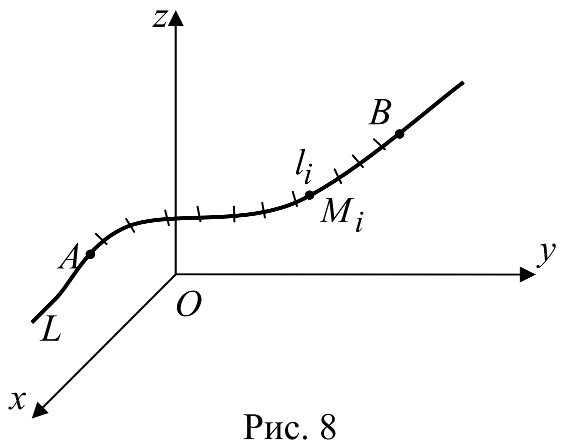

Рис. 8

Тогда предел $\lim\limits_{\Delta l_i \to 0} I_n$ всегда существует, называется ***криволинейным интегралом первого рода*** или ***криволинейным интегралом по длине дуги*** AB от функции $f(x, y, z)$ и обозначается $\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i .$$

Если кривая L лежит в плоскости Oxy и вдоль этой кривой задана непрерывная функция $f(x, y)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i .$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1) Значение криволинейного интеграла по длине дуги не зависит от направления кривой AB.

2) Свойство линейности: постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла; криволинейный интеграл от суммы функций равен сумме криволинейных интегралов от этих функций.

3) Свойство аддитивности: если кривая AB разбита на дуги AC и CB, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)ds = \int\limits_{AC} f(x, y, z)ds + \int\limits_{CB} f(x, y, z)ds .$$

4) Если в точках кривой AB $f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z)$, то

$$\int\limits_{AB} f_1(x,y,z)ds \le \int\limits_{AB} f_2(x,y,z)ds.$$

5) $\left|\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds\right| \le \int\limits_{AB} |f(x,y,z| ds$.

6) Если $f(x,y,z)=1$, то $\int\limits_{AB} dl = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta l_i = l(AB)$; где $l(AB)$ – длина дуги AB, $\lambda = \max \Delta l_i$.

7) Теорема о среднем.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой существует точка (x_1,y_1,z_1) такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = f(x_1,y_1,z_1)\cdot l(AB).$$

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги надо определить его связь с обыкновенным определенным интегралом.

В случае, когда гладкая кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ и параметр t изменяется монотонно на отрезке $[\alpha,\beta]\,(\alpha<\beta)$ при перемещении по кривой L из точки A в точку *B,* верна формула для вычисления криволинейного интеграла

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt. \qquad (12.21)$$

Длина дуги AB равна: $l(AB) = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$.

В случае плоской кривой формула (12.21) упрощается.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \qquad (12.22)$$

Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах, функция $\rho(\varphi)$ и ее производная $\rho'(\varphi)$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы (12.22), где в качестве параметра t взят полярный угол φ:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,$$

где φ_A и φ_B - значения полярного угла φ, определяющие на кривой точки A и B.

Если плоская кривая задана непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией $y = y(x)$, где a и b - абсциссы точек A и B, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx .$$

Итак, во всех случаях вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Криволинейные интегралы второго рода (по координатам)

Пусть в пространстве R^3 задан вектор $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, координаты которого - непрерывные функции в точках ориентированной кривой L. Кривую L разобьем в направлении от A к B на n элементарных дуг l_i и построим векторы $\Delta\vec{l}_i = \Delta x_i\mathbf{i} + \Delta y_i\mathbf{j} + \Delta z_i\mathbf{k}$, где Δx_i, Δy_i, Δz_i - проекции векторов $\Delta\vec{l}_i$ на оси координат. Начала этих векторов совпадают с началами элементарных дуг l_i, а концы - с их концами (рис.9). На каждой элементарной части l_i, выберем произвольную $M_i(x_i, y_i, z_i)$ точку и составим интегральную сумму

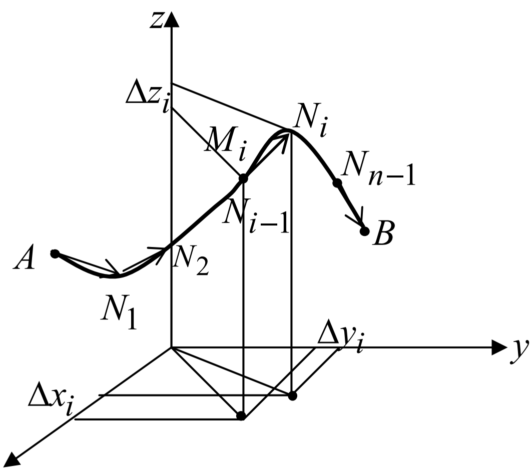

Рис. 9

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\vec{l}_i \tag{12.23}$$

Предел суммы (12.23), найденный при условии, что все $\left|\Delta\vec{l}_i\right| \to 0$, называется ***криволинейным интегралом второго рода*** или ***криволинейным интегралом по координатам*** от вектор-функции $\mathbf{a}(x, y, z)$ по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L \mathbf{a}(x,y,z)\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \lim_{\max|\Delta l_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i,y_i,z_i)\cdot \Delta\vec{l}_i. \qquad (12.24)$$

Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в точках гладкой кривой L, то предел суммы (12.23) существует, т. е. существует криволинейный интеграл второго рода (12.24).

Криволинейные интегралы второго рода обладают основными свойствами определенных интегралов (линейности, аддитивности). Непосредственно из определения криволинейного интеграла второго рода следует, например, что он зависит от направления интегрирования вдоль кривой, т е. меняет знак при изменении ориентации кривой:

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}(x,y,z)\cdot d\vec{l} = -\int\limits_{BA} \mathbf{a}(x,y,z)\cdot d\vec{l}\ .$$

Если кривая интегрирования L замкнута, криволинейные интегралы второго рода обозначаются $\oint\limits_L \mathbf{a}(x,y,z)\cdot d\vec{l}$. В этом случае через кривую L проводится ориентированная поверхность и за положительное направление обхода контура L принимается направление против хода часовой стрелки.

Если гладкая кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ где $x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ - соответственно начальная и конечная точки этой кривой, то верна следующая формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)dt. \qquad (12.25)$$

Если кривая L лежит в плоскости Oxy, $\mathbf{a} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, то $R(x,y,z)\equiv 0$, $z(t)\equiv 0$ и формула (12.25) упрощается:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt.$$

Если кривая L лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = f(x)$, производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $\mathbf{a} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \Big(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)\Big)dx.$$

Криволинейный интеграл второго рода (12.24) в случае, когда $\mathbf{a} = \mathbf{F}$ сила, под действием которой перемещается тело, определяет работу силы $\mathbf{F}$ на пути AB. В этом заключается *физический смысл криволинейного интеграла второго рода.*

Теорема (Грина). Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны, имеют непрерывные частные производные в замкнутой односвязной области D, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной кусочно-гладкой кривой L, то

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx, \qquad (12.26)$$

где интегрирование по контуру L выполняется в положительном направлении.

Формула (12.26) называется ***формулой Грина***. Т.о. формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Если в некоторой области D выполнены условия теоремы Грина, то равносильны следующие утверждения.

1. $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если L - любой замкнутый контур, расположенный в области D.

2. Интеграл $\oint_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B.

3. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$, где $du(x, y)$ - полный дифференциал функции $u(x, y)$.

4. Во всех точках области D справедливо равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Из формулы Грина следует, что площадь S области D можно также вычислить с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_L -ydx + xdy,$$

где интегрирование по контуру L производится в положительном направлении.

С помощью теории криволинейных интегралов второго рода можно решить следующую задачу. Известно дифференциальное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, которое является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Требуется найти эту функцию.

Решение данной задачи определяется формулой

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C \quad \text{или}$$

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+C, \qquad (12.27)$$

где точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ принадлежат области *D,* в которой $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные являются непрерывными функциями; C - произвольная постоянная.

Поверхностные интегралы первого рода

Пусть $u=f(x,y,z)$ - непрерывная функция в точках некоторой гладкой поверхности $S\in R^3$. С помощью кусочно-гладких линий разобьем поверхность S на n элементарных площадок S_i, площади которых обозначим через ΔS_i, $(i=1,2,...,n)$, а диаметры - через d_i (рис. 10). На каждой площадке S_i, выберем произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, вычислим $f(x_i,y_i,z_i)$ и составим интегральную сумму

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

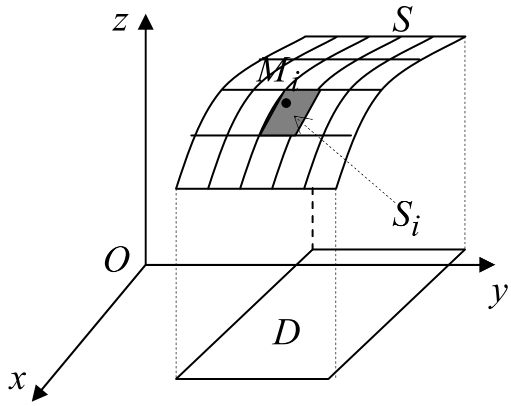

Рис. 10

Тогда предел $\lim\limits_{\max d_i\to 0} I_n$ всегда существует, называется ***поверхностным интегралом первого рода*** от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$.

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i.$$

Поверхностные интегралы первого рода обладают свойствами линейности, аддитивности, для них справедлива теорема о среднем, их величина не зависит от выбора стороны поверхности.

Очевидно, что интеграл $\iint\limits_S dS$ равен площади поверхности, а $\iint\limits_S \mu(x,y,z)dS$, где $\mu(x,y,z)$ - поверхностная плотность поверхности S, - массе поверхности S.

Если проекция D поверхности S на плоскость Oxy *однозначна*, т. е. всякая прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность S лишь в одной точке, то поверхность можно задать уравнением $z = z(x,y)$ и справедливо равенство, с помощью которого вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}\, dxdy. \qquad (12.28)$$

<u>Пример</u>. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S - часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=2$ (рис. 11).

<u>Решение</u>. Из уравнения данной поверхности находим, что для рассматриваемой её части $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и проекцией её D на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2 \le 4$. Так как $z_x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то из формулы (12.28) получим

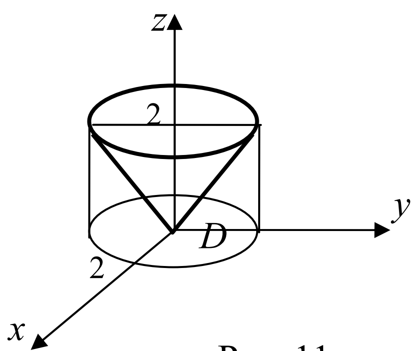

Рис. 11

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho\, d\rho d\varphi \end{array} \right| = \sqrt{2}\iint\limits_D \rho^2 d\rho\, d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Поверхностные интегралы второго рода

Сторона гладкой поверхности S, из каждой точки которой восставлен вектор нормали $\mathbf{n}$, называется *положительной,* а другая ее сторона (если она существует) - *отрицательной.* Если, в частности, поверхность S является замкнутой и ограничивает некоторую область пространства $V,$ то положительной или *внешней стороной поверхности* называется та ее сторона, нормальные векторы которой направлены от области $V,$ а отрицательной или *внутренней* — сторона, нормальные векторы которой направлены в область $V.$ Поверхность, у которой существуют положительная (внешняя) и отрицательная (внутренняя) стороны, называется *двухсторонней.* Поверхность S с выбранной стороной называется *ориентированной.* Будем считать положительным направлением обхода контура L, принадлежащего поверхности, такое направление, при движении по которому по выбранной стороне поверхности сама поверхность остается слева.

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$ то нормальный вектор $\mathbf{n}$, образующий с осью Oz острый угол γ, определяется следующим образом: $\mathbf{n} = \left(-f'_x, -f'_y, 1\right)$, а координаты единичного вектора нормали $\mathbf{n}^0$ равны его направляющим косинусам, т. е.

$$\mathbf{n}^0 = \left(-\frac{f'_x}{|\mathbf{n}|}, -\frac{f'_y}{|\mathbf{n}|}, \frac{1}{|\mathbf{n}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \ |\mathbf{n}| = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}.$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\mathbf{grad}F}{|\mathbf{grad}F|},$$

где знак « + » берется в случае, когда угол γ острый, а знак «—» в случае, когда γ - тупой.

Пусть в пространстве R^3 определена вектор-функция $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, где $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ - функции, непрерывные в области $V.$ Далее, пусть S - некоторая гладкая поверхность, лежащая в области $V,$ с выбранной положительной стороной, т.е. выбранным направлением вектора $\mathbf{n}^0$. Разобьем поверхность S принадлежащими ей кусочно-гладкими линиями на элементарные площадки S_i, площади которых ΔS_i $(i = 1, 2, ..., n)$, а диаметры - d_i, и выберем в каждой из них произвольно точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Тогда существует предел

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{n}^0(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i ,$$

который называется ***поверхностным интегралом второго рода*** от функции $\mathbf{a}(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается $\iint\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS$. Таким образом, по определению

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dS\,. \qquad (12.29)$$

Поверхностные интегралы второго рода обладают свойствами линейности и аддитивности. При изменении стороны поверхности на противоположную, т. е. при замене $\mathbf{n}^0$ на $-\mathbf{n}^0$, интеграл (12.29) изменяет знак.

Так как $\cos\alpha dS = dydz,\ \cos\beta dS = dzdx,\ \cos\gamma dS = dxdy$, то интеграл (12.29) можно записать в виде

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = \iint\limits_S Pdydz + Q\,dzdx + R\,dxdy\,. \qquad (12.30)$$

Справедлива следующая формула, сводящая вычисление интеграла (12.29) к вычислению двойного интеграла:

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = \iint\limits_{D_{xy}} \mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dxdy\,, \qquad (12.31)$$

где область D_{xy} является проекцией поверхности S на плоскость Oxy, поверхность S задается функцией $z = f_3(x,y)$, $\mathbf{n} = \pm\mathbf{grad}(z - f_3(x,y))$. В двойном интеграле переменную z следует заменить на $f_3(x,y)$. Приведем еще две формулы, которые можно применять для вычисления поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = \iint\limits_{D_{yz}} \mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dydz = \iint\limits_{D_{xz}} \mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dxdz\,, \qquad (12.32)$$

где области D_{yz} и D_{xz} - соответственно проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxz, поверхность S задается функциями $x = f_1(y,z)$ и $y = f_2(x,z)$. В двойном интеграле по области D_{yz} следует в подынтегральном выражении заменить x функцией $f_1(y,z)$ и принять $\mathbf{n} = \pm\mathbf{grad}(x - f_1(y,z))$, а в двойном интеграле по D_{xz} заменить y функцией $f_2(x,z)$ и взять $\mathbf{n} = \pm\mathbf{grad}(y - f_2(x,z))$. Отметим, что в выражениях для $\mathbf{n}$ знак « + » или «–» ставится в зависимости от выбранной стороны поверхности S.

Интегралы в правых частях формулы (12.30) рассматривают как сумму трех интегралов, для вычисления каждого из которых можно применить одну из формул (12.31) или (12.32).

Поток векторного поля. Дивергенция

Потоком векторного поля $\mathbf{a}(M)$, $M(x,y,z)\in S$ через *поверхность* S *в сторону единичного вектора нормали* $\mathbf{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ *поверхности* S называется поверхностный интеграл второго рода (12.30).

Если вектор $\mathbf{a}(P,Q,R)$ определяет векторное поле скоростей текущей несжимаемой жидкости, то интеграл (12.30) равен объему V жидкости, протекающей через поверхность S в направлении нормали $\mathbf{n}^0$ за единицу времени (в этом заключается *физический смысл интеграла* (12.30)), *т.* е.

$$П=\iint_S \mathbf{a}(M)\cdot\mathbf{n}^0 dS\,. \qquad (12.33)$$

Из формулы (12.33) ясно, что $П$ - скалярная величина, и если угол $\theta=(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{n}^0})<\frac{\pi}{2}$, то $П>0$, если же $\theta>\frac{\pi}{2}$, то $П<0$, если $\theta=\frac{\pi}{2}$, то $П=0$.

При изменении ориентации поверхности знак $П$ меняется на противоположный (вследствие свойств поверхностных интегралов второго рода).

Пусть S замкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область V, и $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ - функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области V. Тогда поток $П$ вектора $\mathbf{a}(P,Q,R)$ через поверхность S можно вычислить с помощью ***формулы Остроградского — Гаусса*** :

$$П=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,. \qquad (12.34)$$

Т.о. эта формула связывает поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

На практике формулу Гаусса – Остроградского можно применять для вычисления объема тел, если известна поверхность, ограничивающая это тело. Имеют место формулы:

$$V=\iint_S xdydz=\iint_S ydxdz=\iint_S zdxdy=\iiint_V dxdydz$$

Пусть $\mathbf{a}(M)$ поле скоростей несжимаемой жидкости. Если $П>0$, то из формулы (12.34) следует, что из области V вытекает больше жидкости, чем втекает. Это означает, что внутри области V имеются *источники*. Если $П<0$, то из области V вытекает меньше жидкости, чем втекает в нее. В этом случае говорят, что внутри области V имеются *стоки*. При $П=0$ в область V втекает столько же жидкости, сколько вытекает.

Пусть в области V задано векторное поле $\mathbf{a}(M)=(P,Q,R)$, где функции $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ имеют частные производные в точке $M(x,y,z)\in V$ по x,y,z соответственно. Тогда ***дивергенцией*** или ***расходимостью векторного поля*** a(M) в точке M, обозначаемой $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$, называется величина, равная сумме частных производных, вычисленных в точке M, т. е. по определению

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_M. \qquad (12.35)$$

С физической точки зрения $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ характеризует плотность источников или стоков векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M. Если $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)>0$, то точка M является источником, если $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)<0$ - стоком. В случае, когда $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=0$, в точке M нет ни источников, ни стоков. Перечислим *основные свойства дивергенции* векторного поля:

1) $\operatorname{div}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\operatorname{div}\mathbf{a}+\operatorname{div}\mathbf{b}$;

2) $\operatorname{div}\mathbf{c}=0$, если $\mathbf{c}$ - постоянный вектор;

3) $\operatorname{div}(f\cdot\mathbf{a})=f\operatorname{div}\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{grad}\,f$, где $f=f(x,y,z)$ - скалярная функция.

Из формул (12.33), (12.34) и (12.35) следует, что

$$Ï=\iint\limits_S \mathbf{a}(M)\cdot\mathbf{n}^0 dS=\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}(M)\,dxdydz, \qquad (12.36)$$

т.е. *поток векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *через замкнутую поверхность* S *во внешнюю ее сторону численно равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области V, ограниченной поверхностью* S.

Циркуляция и ротор векторного поля

Пусть L - замкнутая кусочно-гладкая кривая в пространстве R^3 и S - гладкая поверхность, краем которой служит кривая L. За *положительное направление обхода* кривой L принимается такое направление, при котором область, ограниченная этой кривой, будет оставаться слева на положительной стороне поверхности S, т. е. на стороне, из точек которой восставлен единичный вектор нормали

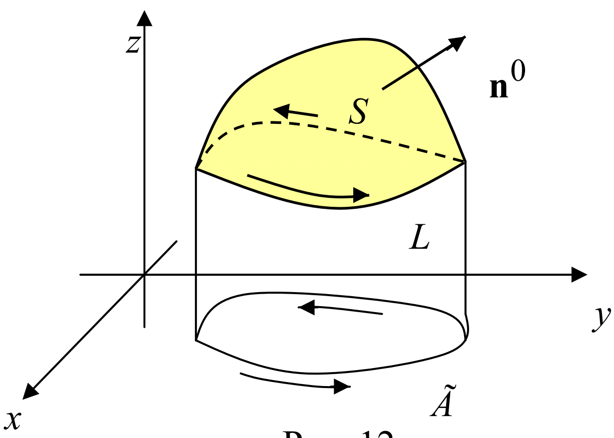

Рис. 12

$\mathbf{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ к поверхности S (рис. 12). Пусть, далее, в каждой точке поверхности S задан вектор $\mathbf{a}(P,Q,R)$, координаты которого $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ являются непрерывными функциями вместе со своими частными производными первого порядка. Тогда имеет место ***формула Стокса,*** связывающая криволинейный и поверхностный интегралы

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где направление обхода по замкнутой кривой L выбирается положительным.

Формула Грина (12.26) является частным случаем формулы Стокса, когда кривая L и поверхность S лежат в плоскости Oxy.

Если задано векторное поле $\mathbf{a}(M) = (P,Q,R)$ и некоторая замкнутая кусочно-гладкая кривая L в пространстве R^3 то криволинейный интеграл

$$C = \oint_L \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}^0 dl = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

называется ***циркуляцией векторного поля*** $\mathbf{a}(M)$ вдоль контура L. Здесь $\boldsymbol{\tau}^0$ - единичный вектор, направленный по касательной к кривой L и указывающий направление обхода по контуру.

Если $\mathbf{a} = \vec{F}$ - вектор силы, то циркуляция равна работе этой силы вдоль замкнутой кривой L.

Ротором или ***вихрем векторного поля*** $\mathbf{a}(M) = (P,Q,R)$ называется вектор, обозначаемый $\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M)$, координаты которого

$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$, т.е. по определению

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Используя понятия ротора и циркуляции, формулу Стокса можно записать в векторной форме:

$$C = \oint_L \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}^0 dl = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS,$$

т. е. *циркуляция векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *вдоль замкнутого контура* L *равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность* S, *краем которой является* L.

Символический вектор $\vec{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ называется *оператором Гамильтона*. Символ ∇ читается “набла”.

С учетом этого обозначения можно представить себе понятие ротора вектора $\mathbf{a}(M)$ как векторного произведения оператора Гамильтона на вектор $\mathbf{a}(M)$, т.е.

$$\mathbf{rot\,a} = \vec{\nabla} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}.$$ Ч

исло $C(M) = \text{ï ð}_{\mathbf{n}^0}\, \mathbf{rot\,a}(M)$ называется *плотностью циркуляции* векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M в направлении вектора $\mathbf{n}^0$. Плотность достигает максимума в направлении $\mathbf{rot\,a}(M)$ и равна

$\max C(M) = \left| \mathbf{rot\,a}(M) \right|$.

Отметим некоторые *свойства ротора векторного поля*:

1) $\mathbf{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{rot\,a} + \mathbf{rot\,b}$;

2) $\mathbf{rot}(\mathbf{c}) = 0$, если $\mathbf{c}$ - постоянный вектор;

3) $\mathbf{rot}(f \cdot \mathbf{a}) = f\,\mathbf{rot\,a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}\,f$, где $f = f(x, y, z)$ - скалярная функция.

Если $\mathbf{rot\,a}(M) = 0$, то это свидетельствует о вращении векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Векторное поле $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ называется ***потенциальным*** или ***безвихревым*** в односвязной области V, если в каждой точке этой области ротор равен нулю.

Согласно определению ротора, необходимыми и достаточными условиями потенциальности поля являются выполнение равенств

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \qquad (12.37)$$

Тогда вектор $\mathbf{F}$ является градиентом некоторой функции $u = u(x, y, z)$, которая называется ***потенциалом векторного поля***, т.е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Потенциал векторного поля находится по формуле

$$u(x, y, z) = \int\limits_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz + C =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0) dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0) dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z) dz + C,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - некоторая фиксированная точка области V, $M(x, y, z)$ - любая точка области V, C - произвольная постоянная. При выполнении условий (12.37) криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки M_0 и M.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

411-420. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

411. $\iint\limits_D (x+3y)\,dxdy; \quad D: y = x^2 - 1,\ y = 1 - x^2.$

412. $\iint\limits_D x(y-2)\,dxdy; \quad D: y = 5x,\ y = x,\ x = 3.$

413. $\iint\limits_D (x^2 + 2y)\,dxdy; \quad D: y = x^2,\ y^2 = x.$

414. $\iint\limits_D (x^3 y)\,dxdy; \quad D: y = 2 - x,\ y = x,\ x \ge 0.$

415. $\iint\limits_D (x - y^2)\,dxdy; \quad D: y = x^2,\ y = 1.$

416. $\iint\limits_D (x^2 + 6y^2)\,dxdy; \quad D: y^2 = x,\ x = 4.$

417. $\iint\limits_D x(1-y)\,dxdy; \quad D: y^2 = x,\ 5y = x.$

418. $\iint\limits_D (x-3)y\,dxdy; \quad D: y = x,\ y = \frac{1}{2}x,\ x = 2.$

419. $\iint\limits_D (x - 4y^3)\,dxdy; \quad D: y = x^3,\ y = 0,\ x = 1.$

420. $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy; \quad D: y = x^3,\ y = 8,\ x = 0.$

421-430. Вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy.

421. $z = 2x, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad z = 0, \quad y = 0.$

422. $z = 9 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0$.

423. $z = 4 - x - y, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$.

424. $z = y^2, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0$.

425. $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$.

426. $z = 2x + y, \quad y = \sqrt{4 - x^2}, \quad z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$.

427. $z = 3x, \quad y = \sqrt{9 - x^2}, \quad z = 0, \quad y = 0$.

428. $z = 2y, \quad y = \sqrt{4 - x^2}, \quad z = 0, \quad x = 0$.

429. $z = 3x + 2y, \quad y = \sqrt{9 - x^2}, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0$.

430. $z = x + y + 2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$.

431-440. Задан криволинейный интеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ и точки O(0;0), A(4; 0), B(0; 8) и C(4; 8). Вычислить интеграл, если:

а) L – ломаная OAC; б) L – ломаная OBC; в) L – дуга параболы $y = \dfrac{x^2}{2}$. Объяснить совпадение полученных результатов.

431. $\int\limits_L (x - y)dx - (x - 2y)dy$.

432. $\int\limits_L (2 + xy)dx + (\dfrac{x^2}{2} - y)dy$.

433. $\int\limits_L (x^3 - 2y)dx - (2x - 5)dy$.

434. $\int\limits_L (2x - 3y)dx - (3x - 4y)dy$.

435. $\int\limits_L (4 + xy^2)dx + (x^2 y - 3y^2)dy$.

436. $\int\limits_L (3x - 2y)dx - (2x + y)dy$.

437. $\int\limits_L (1 + 2xy)dx + (x^2 - y)dy$.

438. $\int\limits_L (5x - 2y)dx - (2x - y)dy$.

439. $\int\limits_L (3x^2 - y)dx - (x + 2y)dy$.

440. $\int\limits_L (4xy + 3)dx + (2x^2 - 1{,}5y^2)dy$.

441-450. Показать, что выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Найти функцию $u(x,y)$.

441. $(5x^4 y^2 + e^x)dx + (2x^5 y - \sin y)dy$.

442. $(3x^2y^4-1)dx+\left(4x^3y^3+\dfrac{1}{y}\right)dy$.

443. $(4x^3-y^2)dx+\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}-2xy\right)dy$.

444. $\left(\dfrac{2x}{y}+3\cos 3x\right)dx+\left(2-\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy$.

445. $\left(2xy^5-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(6x^2y^5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^2}\right)dy$.

446. $(3x^2e^{2y}-y\sin x)dx+(2x^3e^{2y}+\cos x)dy$.

447. $\left(y-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx+(x+2e^{2y})dy$.

448. $\left(3e^{3x}\operatorname{tg} y-\dfrac{1}{x^4}\right)dx+\left(\dfrac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\right)dy$.

449. $\left(2x+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

450. $(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy$.

451-460. Дано векторное поле $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ и плоскость (p): $Ax+By+Cz+D=0$, которая вместе с координатными осями образует пирамиду V. Пусть σ - основание пирамиды, принадлежащее плоскости (p); λ - контур, ограничивающий σ; $\vec{n}$ - нормаль к σ, направленная вне пирамиды V. Требуется вычислить:

1) поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$;

2) циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно и применив теорему Стокса к поверхности σ с ограничивающим ее контуром λ;

3) поток векторного поля F через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно, и применив теорему Гаусса-Остроградского. Сделать чертеж.

451. $\vec{F}=(x-3y+6z)\vec{i}$; (p): $-x+y+2z-4=0$.

452. $\vec{F}=(5x+2y+3z)\vec{k}$; (p): $x+y+3z-3=0$.

453. $\vec{F}=(3x+4y+2z)\vec{j}$; (p): $x+y+2z-4=0$.

454. $\vec{F}=(x-y+z)\vec{i}$; (p): $-x+2y+z-4=0$.

455. $\vec{F}=(2x+4y+3z)\vec{k}$; (p): $3x+2y+3z-6=0$.

456. $\vec{F}=(2x+3y-3z)\vec{j}$; (p): $2x-3y+2z-6=0$.

457. $\vec{F}=(x+2y-z)\vec{i}$; (p): $-x+2y+2z-4=0$.

458. $\vec{F}=(x+7z)\vec{k}$; (p): $2x+y+z-4=0$.

459. $\vec{F}=(y-x+z)\vec{j}$; (p): $2x-y+2z-2=0$.

460. $\vec{F}=(x+z)\vec{i}$; (p): $x+y+z-2=0$.

461-470. Проверить является ли векторное поле $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля F найти его потенциал.

461. $\vec{F}=(7x-2yz)\vec{i}+(7y-2xz)\vec{j}+(7z-2xy)\vec{k}$;

462. $\vec{F}=(5x+4yz)\vec{i}+(5y+4xz)\vec{j}+(5z+4xy)\vec{k}$;

463. $\vec{F}=(9x+5yz)\vec{i}+(9y+5xz)\vec{j}+(9z+5xy)\vec{k}$;

464. $\vec{F}=(3x-yz)\vec{i}+(3y-xz)\vec{j}+(3z-xy)\vec{k}$;

465. $\vec{F}=(6x+7yz)\vec{i}+(6y+7xz)\vec{j}+(6z+7xy)\vec{k}$;

466. $\vec{F}=(8x-5yz)\vec{i}+(8y-5xz)\vec{j}+(8z-5xy)\vec{k}$;

467. $\vec{F}=(10x-3yz)\vec{i}+(10y-3xz)\vec{j}+(10z-3xy)\vec{k}$;

468. $\vec{F}=(12x+yz)\vec{i}+(12y+xz)\vec{j}+(12z+xy)\vec{k}$;

469. $\vec{F}=(4x-7yz)\vec{i}+(4y-7xz)\vec{j}+(4z-7xy)\vec{k}$;

470. $\vec{F}=(x+2yz)\vec{i}+(y+2xz)\vec{j}+(z+2xy)\vec{k}$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

411-420. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

$$\iint\limits_D (x+y+3)\,dxdy; \quad D: y=2-x,\ y=\sqrt{x},\ x=0, \text{(рис. 13)}.$$

Решение. Область интегрирования D ограничена прямой $y=2-x$, параболой $y=\sqrt{x}$ и осью Oy. Следовательно, $\iint\limits_D (x+y+3)dxdy =$

$$=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{2-x}(x+y+3)\,dy=\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}+3y\right)\Bigg|_{y=\sqrt{x}}^{y=2-x}dx=$$

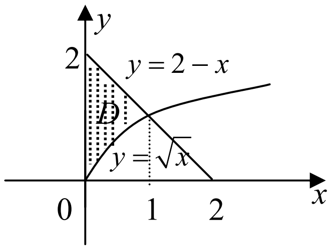

Рис. 13

$$=\int_0^1\left(\cancel{2x}-x^2+\frac{(2-x)^2}{2}+6-\cancel{2x}-x\sqrt{x}-\frac{x}{2}-3\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{(2-x)^3}{6}+6x-\frac{2x^{5/2}}{5}-\frac{x^2}{4}-3\frac{2x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+6-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}-2+\frac{8}{6}=$$

$$=4\frac{11}{60}.$$

421-430. Вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями: $z=2+x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=1$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy.

Решение. По заданным поверхностям построим область V и её проекцию на плоскость xOy (рис. 14). Объём тела находим по формуле

$$V=\iiint\limits_{(V)}dxdydz.$$

Перейдем в данном интеграле к цилиндрической системе координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdydz=\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$,

следовательно, $V=\iiint\limits_{(V)}\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

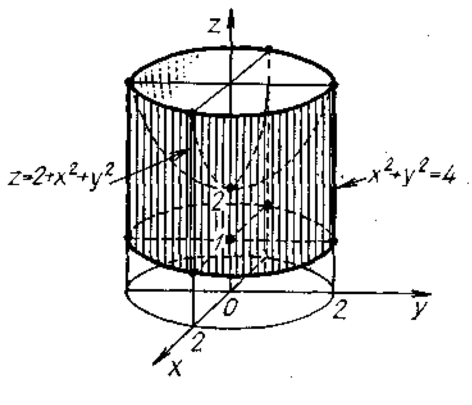

Рис. 14

С учётом того, что проекцией заданного тела на плоскость xOy является окружность радиуса 2 с центром в начале координат, пределы изменения φ и ρ будут таковы: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 2$. z изменяется от $z_{вх}=1$ (уравнение плоскости, ограничивающей данное тело снизу) до

$z_{\text{вых}} = 2 + x^2 + y^2$ (уравнение параболоида, ограничивающего данное тело сверху). Но так как в цилиндрических координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$, то $z_{\text{вых}} = 2 + \rho^2$. Перейдём к повторным интегралам, расставим пределы интегрирования и вычислим объём:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho \int_1^{2+\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho\, z\Big|_1^{2+\rho^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho(2 + \rho^2 - 1)\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\rho + \rho^3)\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 = 6 \int_0^{2\pi} d\varphi = 12\pi.$$

431-440. Задан криволинейный интеграл $\int\limits_L (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$ и точки O(0;0), A(2; 0), B(0; 4) и C(2; 4). Вычислить интеграл, если: а) L – ломаная OAC; б) L – ломаная OBC;

в) L – дуга параболы $y = x^2$. Объяснить совпадение полученных результатов.

Решение.

а) L – ломаная OAC (рис. 15). По свойству аддитивности криволинейного интеграла

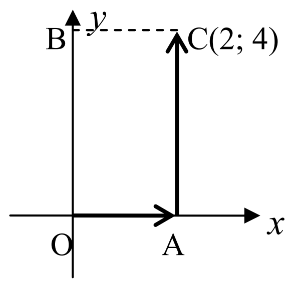

Рис. 15

$$\int\limits_L (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy =$$

$$= \int\limits_{OA} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy +$$

$$+ \int\limits_{AC} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy.$$

На отрезке OA: $y = 0,\ dy = 0,\ 0 \le x \le 2$,

на отрезке AC: $x = 2,\ dx = 0,\ 0 \le y \le 4$. Поэтому

$$\int\limits_{OA} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy = \int_0^2 (2x + 1)dx = (x^2 + x)\Big|_0^2 = 6,$$

$$\int\limits_{AC} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy = \int_0^4 (2 - 12y)dy = (2y - 6y^2)\Big|_0^4 = -88.$$

Следовательно, $\int\limits_{OAC} (2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy = 6-88 = -82$.

б) L – ломаная OBC (рис. 16). Аналогично предыдущему

$$\int\limits_{L}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy =$$

$$= \int\limits_{OB}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy +$$

$$+ \int\limits_{BC}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy.$$

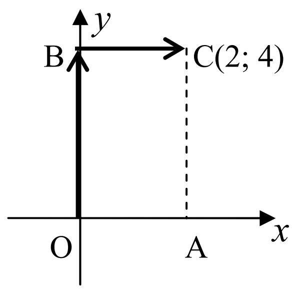

Рис. 16

На отрезке OB: $x=0,\ dx=0,\ 0\le y\le 4$,

на отрезке BC: $y=4,\ dy=0,\ 0\le x\le 2$. Поэтому

$$\int\limits_{OB}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy = \int\limits_0^4 2dy = 2y\Big|_0^4 = 8,$$

$$\int\limits_{BC}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy = \int\limits_0^2 (2x-48+1)dx = (x^2-47x)\Big|_0^2 = -90.$$

Следовательно, $\int\limits_{OBC} (2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy = 8-90 = -82$.

в) L – дуга параболы $y=x^2$. На параболе $y=x^2,\ dy=2xdx,\ 0\le x\le 2$. Поэтому

$$\int\limits_{L}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy =$$

$$= \int\limits_0^2\Big(2x-3\cdot x^4+1+(2-6x\cdot x^2)2x\Big)dx =$$

$$= \int\limits_0^2(2x-3x^4+1+4x-12x^4)dx = \int\limits_0^2(1+6x-15x^4)dx =$$

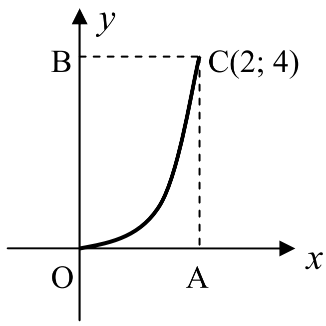

Рис. 17

$$= (x+3x^2-3x^5)\Big|_0^2 = 14-96 = -82.$$

Таким образом, во всех трёх случаях получили одинаковый результат. Это возможно тогда, когда под знаком интеграла стоит полный дифференциал некоторой функции, т.е. тогда, когда выполнено условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Проверим, так ли это.

У нас

$$P(x,y)=2x-3y^2+1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-6y,\qquad Q(x,y)=2-6xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-6y.$$

Условие полного дифференциала выполнено, следовательно, криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

441-450. Показать, что выражение $(y^2e^{xy^2}+3)dx+(2xye^{xy^2}-1)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Найти функцию $u(x,y)$.

Решение. Проверим, выполняется ли условие полного дифференциала $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ для функции $u(x,y)$. Имеем:

$$P(x,y)=y^2e^{xy^2}+3,\quad Q(x,y)=2xye^{xy^2}-1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2ye^{xy^2}+y^2\cdot 2xye^{xy^2}=2ye^{xy^2}(1+xy^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2ye^{xy^2}+2xy\cdot y^2e^{xy^2}=2ye^{xy^2}(1+xy^2)$$

Итак, данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Положив $x_0=0,\ y_0=0$, найдем

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy+C=\int_0^x 3dx+\int_0^y (2xye^{xy^2}-1)dy=$$

$$=3x\Big|_0^x+\int_0^y e^{xy^2}d(xy^2)-y+C=3x+e^{xy^2}\Big|_0^y-y+C=3x-y+e^{xy^2}-1+C=$$

$$=3x-y+e^{xy^2}+C_1.$$

Результат вычислений верен, если $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

Сделаем проверку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3x-y+e^{xy^2}+C_1\right)=3+y^2e^{xy^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(3x-y+e^{xy^2}+C_1\right)=2xye^{xy^2}-1$$

Итак, $u(x,y)=3x-y+e^{xy^2}+C$.

451-460. Дано векторное поле $\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+z\vec{k}$ и плоскость (p): $x-2y+2z-4=0$, которая вместе с координатными осями образует пирамиду V. Пусть σ - основание пирамиды, принадлежащее плоскости (p); λ - контур, ограничивающий σ; $\vec{n}$ - нормаль к σ, направленная вне пирамиды V. Требуется вычислить:

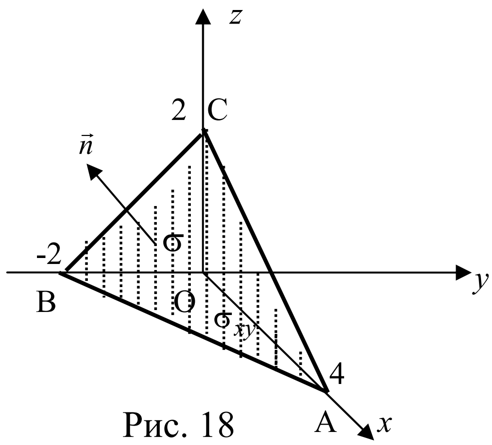

Рис. 18

1) поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$;

2) поток векторного поля F через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно, и применив теорему Остроградского – Гаусса..

3) циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно и применив теорему Стокса к поверхности σ с ограничивающим ее контуром λ. Сделать чертеж.

Решение.

1) Вычисляем поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$ с помощью поверхностного интеграла

$\Pi_1=\iint\limits_{\sigma}(\vec{F}\cdot\vec{n}^0)ds$, где $\vec{n}^0$ - единичный вектор нормали к плоскости

$$x-2y+2z-4=0,\quad ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,,$$

$(\vec{F}\cdot\vec{n}^0)$ – скалярное произведение векторов (рис. 18). Находим:

$$\vec{n}^0=\frac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{3}=\left\{\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\},$$

$$z=-\frac{1}{2}x+y+2,\quad z'_x=-\frac{1}{2},\quad z'_y=1,\quad ds=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}\,dxdy=\frac{3}{2}dxdy\,,$$

$$(\vec{F}\cdot\vec{n}^0)=(x+z)\cdot\frac{1}{3}+(2y-x)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+z\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(x+z-4y+2x+2z)=$$

$$=\frac{1}{3}(3x-4y+3z)\,.$$

Поэтому $\Pi_1=\iint\limits_{\sigma}(\vec{F}\cdot\vec{n}^0)ds=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\sigma}(3x-4y+3z)dxdy=$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(3x-4y+3\left(-\frac{1}{2}x+y+2\right)\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{0}^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}dy\left(\frac{3}{4}x^2+(6-y)x\right)\Bigg|_{0}^{2y+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{3}{4}(2y+4)^2+(6-y)(2y+4)\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}\left(3(y^2+4y+4)+12y+24-2y^2-4y\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}(y^2+20y+36)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}+10y^2+36y\right)\Bigg|_{-2}^{0}=\frac{52}{3}.$$

2) Вычисляем поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды V, для чего вычислим поток через каждую грань пирамиды (рис. 19).

Грань AOC лежит в плоскости $y=0$, нормаль к этой грани

$\vec{n}^0=\vec{j}, \quad (\vec{F}\cdot\vec{n}^0)=2y-x=-x$

(так как $y=0$), $ds=dxdz$.

Тогда поток векторного поля $\vec{F}$ через грань AOC

$$\Pi_2=-\iint\limits_{\triangle AOC}xds=-\iint\limits_{\triangle AOC}xdxdz=$$

$$=-\int\limits_{0}^{4}xdx\int\limits_{0}^{2-x/2}dz=-\int\limits_{0}^{4}x\left(2-\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=-\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{0}^{4}=-\frac{16}{3}.$$

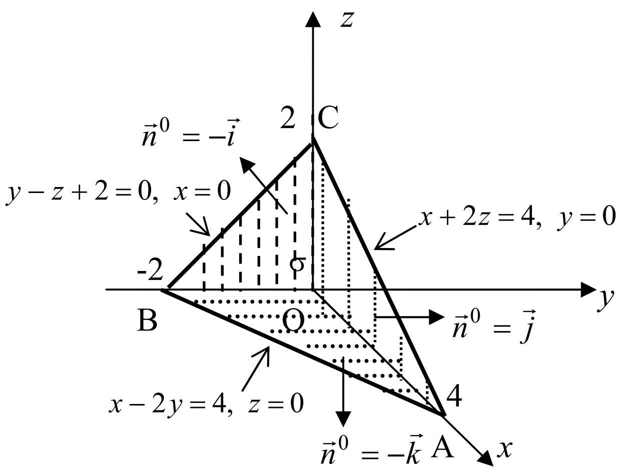

Рис. 19

Грань AOB лежит в плоскости $z=0$, нормаль к этой грани $\vec{n}^0=-\vec{k}, \quad (\vec{F}\cdot\vec{n}^0)=-z=0$ (так как $z=0$), $ds=dxdy$. Тогда поток векторного поля $\vec{F}$ через грань AOB равен нулю.

Грань ВОС лежит в плоскости $x = 0$, нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{i}$, $(\vec{F} \cdot \vec{n}^0) = -(x+z) = -z$ (так как $x = 0$), $ds = dydz$. Тогда поток векторного поля $\vec{F}$ через грань ВОС

$$\Pi_3 = -\iint\limits_{\triangle BOC} zds = -\iint\limits_{\triangle AOC} zdydz = -\int\limits_0^2 zdz \int\limits_{z-2}^{0} dy = -\int\limits_0^2 z(-z+2)dz =$$

$$= -\left(-\frac{z^3}{3} + z^2\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

Теперь находим поток через полную поверхность пирамиды

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \frac{52}{3} - \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$$

Вычислим поток через поверхность пирамиды по формуле Остроградского – Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Находим $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial (x+z)}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial (2y-x)}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{\partial (z)}{\partial z} = 1$. Так как $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объёму прямоугольной пирамиды АВСО, то

$$\Pi = \iiint\limits_V (1+2+1)dxdydz = 4\iiint\limits_V dxdydz = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{32}{3}.$$

3) Вычислим циркуляцию С векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ с помощью криволинейного интеграла

$$C = \oint\limits_{\lambda} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + +R(x,y,z)dz.$$

Замкнутый контур интегрирования λ состоит из трёх отрезков: АС, СВ, ВА (рис. 20).

На АС: $y = 0$, $dy = 0$, $x = 4 - 2z$, $dx = -2dz$.

Тогда $\displaystyle\int\limits_{AC} (x+z)dx + (2y-x)dy + zdz = \int\limits_0^2 \big((4-z)\cdot(-2) + z\big)dz = \int\limits_0^2 (3z-8)dz =$

$$= \left(3\frac{z^2}{2} - 8z\right)\Bigg|_0^2 = -10.$$

На CB: $x = 0,\ dx = 0,\ y = z - 2,\ dy = dz$.

Тогда $\int\limits_{CB} (x+z)dx + (2y-x)dy + zdz = \int\limits_{2}^{0}\big(2(z-2)+z\big)dz = \int\limits_{2}^{0}(3z-4)dz =$

$= \left(3\dfrac{z^2}{2} - 4z\right)\Bigg|_2^0 = 2$.

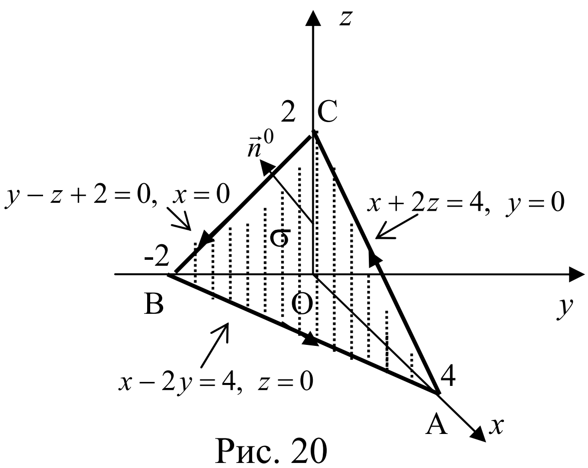

Рис. 20

На BA:
$z = 0,\ dz = 0,\ x = 2y + 4,\ dx = 2dy$.

Тогда

$\int\limits_{BA} (x+z)dx + (2y-x)dy + zdz =$

$= \int\limits_{-2}^{0}\big((2y+4)\cdot 2 - 4\big)dy = \int\limits_{-2}^{0}(4y+4)dy =$

$= \left(4\dfrac{y^2}{2} + 4y\right)\Bigg|_{-2}^{0} = 0$. Значит, $C = -10 + 2 + 0 = -8$.

Вычислим циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ применив теорему Стокса к поверхности σ с ограничивающим ее контуром λ.

$\oint\limits_{\lambda} Pdx + Qdy + Rdz =$

$$= \iint\limits_{\sigma}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)ds$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ - направляющие косинусы единичного вектора нормали к плоскости σ (вычислены в п. 1). Найдём

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(z)}{\partial y} - \frac{\partial(2y-x)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial z} - \frac{\partial(z)}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial x} - \frac{\partial(x+z)}{\partial y} = -1.$$

Тогда

$$C = \iint\limits_{\sigma}(\cos\beta - \cos\gamma)ds = \iint\limits_{\sigma}\left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)ds = -\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}} dxdy = -2S_{\triangle AOB} = -8.$$

461-470. Проверить является ли векторное поле $\vec{F}=(2xy+z)\vec{i}+(x^2-2y)\vec{j}+x\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля F найти его потенциал.

Решение.

Векторное поле $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ является потенциальным, если в каждой точке этой области ротор равен нулю.
Имеем: $P=2xy+z,\quad Q=x^2-2y,\quad R=x$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z & x^2-2y & x\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}+\left(1-1\right)\vec{j}+\left(2x-2x\right)\vec{k}=0.$$

Таким образом, $\operatorname{rot}\vec{F}=0$, т.е. поле $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ - потенциальное.

Векторное поле является соленоидальным области V, если в каждой точке этой области $\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

Найдём $\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{\partial(2xy+z)}{\partial x}+\dfrac{\partial(x^2-2y)}{\partial y}+\dfrac{\partial(x)}{\partial z}=2y-2+0\neq 0$, поэтому поле не является соленоидальным.

Найдём потенциал векторного поля по формуле

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M} Pdx+Qdy+Rdz+C,$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - некоторая фиксированная точка области V, $M(x,y,z)$ - любая точка области V, C - произвольная постоянная. В данном случае,

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M}(2xy+z)dx+(x^2-2y)dy+xdz+C.$$

Согласно определению ротора, необходимыми и достаточными условиями потенциальности поля являются равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

При выполнении этих условий криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки M_0 и M. Так как функции $P=2xy+z,\quad Q=x^2-2y,\quad R=x$ непрерывны и имеют непрерывные производные во всех точках пространства, То в качестве $M_0(x_0,y_0,z_0)$ можно взять начало координат $O(0,0,0)$, а в качестве

$M(x,y,z)$ - произвольную точку пространства. Так как уже отмечалось, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, поэтому его можно вычислить по ломаной OABM (рис. 21):

$$u(x,y,z) = \int\limits_{OM} (2xy+z)dx + (x^2-2y)dy + xdz + C =$$

$$= \int\limits_{OA} (2xy+z)dx + (x^2-2y)dy + xdz +$$

$$+ \int\limits_{AB} (2xy+z)dx + (x^2-2y)dy + xdz +$$

$$+ \int\limits_{BM} (2xy+z)dx + (x^2-2y)dy + xdz + C =$$

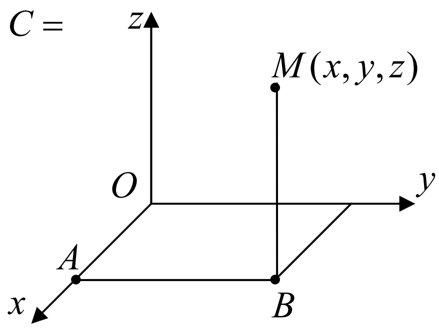

Рис. 21

На OA: $y=0, \quad z=0, \quad dy=0, \quad dz=0.$

На AB: величина x фиксированная, $\quad z=0, \quad dx=0, \quad dz=0.$

На BM: x, y - фиксированные, $dx=0, \quad dy=0$.

$$= \int_0^x 0dx + \int_0^y (x^2-2y)dy + \int_0^z xdz + C = x^2y - y^2 + xz + C.$$

Таким образом, потенциал векторного поля $u(x,y,z) = x^2y - y^2 + xz + C.$