Лекция
№ 1

Матрицы и определители

п.1 Матрицы, действия над матрицами

Матрица **–** прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Обозначают матрицы заглавными буквами латинского алфавита с указанием ее размерности. Например:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – элементы матрицы A, $i = 1,2,\dots,m$ – номер строки, $j = 1,2,\dots,n$ – номер столбца.

Матрица, содержащая одну строку или один столбец, называется ***вектором*** (вектором-строкой, или вектором-столбцом). Их вид:

$$\underset{1\times n}{B} = (b_1\ b_2\ \dots b_n); \qquad \underset{m\times 1}{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Матрицу, количество строк которой равно количеству столбцов (m=n), называют ***квадратной порядка n (n-ого порядка).***

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы квадратной матрицы, имеющие равные индексы, а именно $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ называются элементами ***главной диагонали***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной.***

Например, $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Диагональную матрицу, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называют ***единичной.*** Обозначают ее буквой E. Например, $E_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Нулевая матрица может быть любого размера.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Две матрицы называются ***равными,*** если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

Действия над матрицами

1. Сложение матриц. Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C, имеющая те же размеры, что и слагаемые матрицы, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Пример. Найти сумму матриц $A+B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-1&4&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&-1\\1&-4&6\end{pmatrix}$.

Решение. $A+B=\begin{pmatrix}2&3&0\\-1&4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&3&-1\\1&-4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

2. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число k называется матрица C, имеющая ту же размерность, что и матрица A, каждый элемент которой равен произведению числа k на соответствующий элемент исходной матрицы.

Пример. Найти матрицу $3A$, если $A=\begin{pmatrix}-1&3\\0&6\end{pmatrix}$.

Решение. $3A=3\cdot\begin{pmatrix}-1&3\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&9\\0&18\end{pmatrix}$.

3. Вычитание матриц. Разность матриц можно определить следующим образом: $A-B=A+(-1)B$.

Рассмотрим некоторые свойства операций сложения матриц и умножения на число.

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;

5. $1\cdot A=A$;

6 $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$,

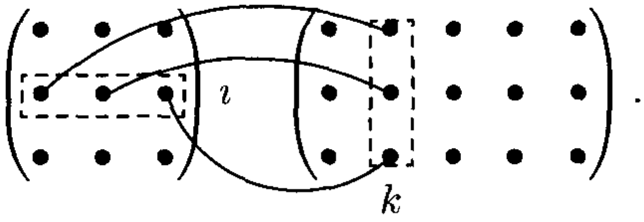
где A, B, C — матрицы, α и β — числа.

4. Произведение матриц. Операция умножения двух матриц вводится только для сцепленных матриц.

Матрицы А и В называют ***сцепленными,*** если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на матрицу $B=\left(b_{jk}\right)_{n\times p}$ называется такая матрица $C=\left(c_{ik}\right)_{m\times p}$, у которой элемент *i*-й строки и *k*-го столбца равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *k*-го столбца матрицы *B*.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Пример. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$

Пример. Дано: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти: 1) *AB*; 2)*BA*.

Решение. 1) $A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 3+0 \\ 1+6 & 2+2 & 3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $B_{2\times 3}\cdot A_{2\times 2}$ не определено, так как число столбцов матрицы В (3) не совпадает с числом строк матрицы *A* (2), т.е матрицы А и В не являются сцепленными.

Этот пример иллюстрирует важную особенность операции умножения матриц, ее некоммутативность, которую для двух произвольных матриц *A* и *B* можно выразить следующей формулой: $A\cdot B\neq B\cdot A.$ Исключение составляют умножение матрицы на единичную матрицу и умножение матрицы на обратную ей: $A\cdot E=E\cdot A,\; A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A$ (понятие обратной матрицы будет рассмотрено позднее).

5. *Транспонирование матрицы.* Матрица, полученная из данной путем замены каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T .

Пример. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
2. $A\cdot(B+C)=AB+AC$;
3. $(A+B)\cdot C=AC+BC$;
4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
2. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

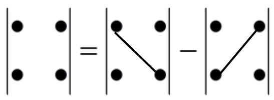
п. 2 Определители

Квадратной матрице *A* *n*-го порядка можно поставить в соответствие число, называемое ее ***определителем***. Обозначается $|A|$ или Δ.

В зависимости от порядка матрицы *n* ее определитель может быть вычислен по следующим правилам:

1) если *n*=1, то $|A| = |a_1| = a_1$;

2) если *n*=2, то $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Вычисление определителя второго порядка иллюстрируется схемой:



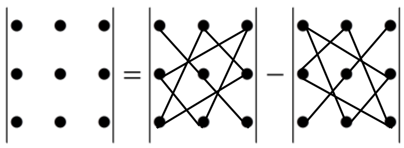
Пример. $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -14 - 15 = -29.$

3) если *n*=3, то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников, которое схематично можно изобразить так:



Пример. Вычислить определитель. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 6 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) -$$

$$-0 \cdot 5 \cdot (-4) = 9.$$

4) Если порядок матрицы выше третьего для вычисления определителя применяют общее **теорему Лапласа.**

Рассмотрим дополнительно некоторые важные понятия, относящиеся к теории определителей.

Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка (*n*>1) называется определитель (*n*-1)-го порядка, полученный из определителя *n*-го порядка вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится данный элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением $\boldsymbol{A_{ij}}$ элемента a_{ij} называется число, находящееся по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример. Найти $M_{12},\ A_{12}$ для определителя $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. Для нахождения M_{12} вычеркиваем из данного определителя первую строку и второй столбец. Результат записываем в виде определителя второго порядка: $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 24 = 15$. Находим алгебраическое дополнение: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -15$.

Свойства определителей

1) Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами с сохранением порядка и наоборот (т.е. транспонировать матрицу).

Примечание: в дальнейшем свойства, относящиеся к строкам определителя, справедливы и по отношению к столбцам.

2) Определитель равен нулю, если:
   а) все элементы какой–либо строки равны нулю;
   б) все элементы одной строки пропорциональны соответствующим элементам другой его строки.
3) При перестановке двух строк определитель меняет свой знак.
4) Общий множитель всех элементов строки определителя можно выносить за знак определителя.
5) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на число, отличное от нуля.
6) **Теорема Лапласа** Определитель равен сумме произведений всех элементов какой-либо его строки на их алгебраические дополнения $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$ (разложение по строке).

<u>**Следствие**</u>: Если сложить произведения всех элементов какой-либо строки на алгебраические дополнения другой строки, то получится ноль:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0; \quad i \neq j.$$

На свойстве 6 (теореме Лапласа) основан метод вычисления определителей понижением их порядка, который дает не только другой способ вычисления определителей второго и третьего порядка, но и позволяет вычислять определители более высоких порядков. Кроме того, перед применением теоремы Лапласа полезно с помощью других свойств (например, свойства 6) получить в нем как можно большее количество нулевых элементов.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{I}_{строка} \\ +\mathrm{I}_{строка}\cdot(-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1+1 & 7+(-1) & 0+7 & 1+4 \\ 3+1\cdot(-3) & 5+(-1)\cdot(-3) & 7+7\cdot(-3) & 8+4\cdot(-3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} = 122.$$

Литература:

1) Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 1, параграфы 1 и 2.
2) Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 1 п. 1.1 - 1.4

- **Справочный материал.**

Определение 1. Перестановкой n чисел $1, 2, \ldots, n$ называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. Два числа образуют инверсию, если большее из них стоит впереди меньшего.

Число пар в перестановке, образующих инверсию, называется числом инверсий перестановки. Перестановка называется четной, если число ее инверсий четное, и нечетной в противном случае.

Пример. Рассмотрим одну из перестановок элементов 1, 2, 3, 4: $\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{1},\mathbf{3}\}$. Данная перестановка имеет три инверсии $\{\mathbf{2},\mathbf{1}\}$, $\{\mathbf{4},\mathbf{1}\}$, $\{\mathbf{4},\mathbf{3}\}$, следовательно, перестановка является нечетной.

Определение 2. Определителем матрицы A порядка n называется сумма всех $n!$ произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца; при этом каждое произведение снабжено знаком «плюс» или «минус» по следующему правилу:

Знак «плюс» выбирается в случае, когда перестановки, образованные первыми и вторыми индексами элементов a_{ij}, входящими в произведение, одинаковой четности и со знаком «минус» в противоположном случае.