ЛЕКЦИЯ 8

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА И ЧИСЛА МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. СОПРЯЖЁННЫЙ И САМОСОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

8.1. СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР И СОБСТВЕННОЕ ЧИСЛО МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим линейный оператор А в пространстве L_n, A - матрица этого оператора в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ненулевой вектор* $\bar{x} \in L_n$ *называется* ***собственным вектором матрицы*** A, *если найдётся такое число* λ, *что*

$$\mathrm{A}\bar{x} = \lambda\bar{x} \text{ (или } A \cdot X = \lambda X \text{),}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *- столбец координат вектора* $\bar{x}$.

λ *называется* ***собственным (характеристическим) числом матрицы*** A.

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим выражение $A \cdot X = \lambda X$ с точки зрения матричного уравнения:

$$A \cdot X = \lambda X \Leftrightarrow A \cdot X - \lambda X = 0 \Leftrightarrow A \cdot X - \lambda \cdot E \cdot X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E)X = 0$$

Так как по определению ***собственного вектора*** он не может быть нулевым, то матричная запись $(A - \lambda \cdot E)X = 0$ равносильна однородной системе уравнений, которая должна иметь ненулевое решение, что возможно только при условии $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$. Таким образом мы приходим к ***способу нахождения собственных чисел:*** собственные числа λ должны удовлетворять уравнению $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Алгебраическое уравнение n-го порядка* $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ *называется* ***характеристическим уравнением матрицы*** A:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ.1) Собственные числа матрицы A -корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

2. У ***подобных матриц*** (см. **ЛЕКЦИЯ 7, п. 7.3.2.)** характеристические уравнения и собственные числа одинаковы (т.е. собственные числа и векторы не зависят от базиса).

ПРИМЕР 1. Найти собственные числа и соответствующие собственные векторы оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&3\\0&3&5\end{pmatrix}$.

Решение.

1. Собственные числа являются корнями характеристического уравнения:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&5-\lambda&3\\0&3&5-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)\left((5-\lambda)^2-9\right)=0\Leftrightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=8.$$

2. Собственному (характеристическому) числу $\lambda_1=1$ соответствует собственный вектор $\Gamma_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\0&5-1&3\\0&3&5-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}4\beta_1+3\gamma_1=0\\3\beta_1+4\gamma_1=0,\\\alpha_1-\text{любое}\end{cases}\begin{cases}\beta_1=-\dfrac{3}{4}\gamma_1\\\beta_1=-\dfrac{4}{3}\gamma_1\\\alpha_1-\text{любое}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1-\text{любое}\\\beta_1=0\\\gamma_1=0\end{cases},$$

например $\Gamma_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Собственному (характеристическому) числу $\lambda_2=2$ соответствует собственный вектор $\Gamma_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1-2&0&0\\0&5-2&3\\0&3&5-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha_2=0\\3\beta_2+3\gamma_2=0,\\3\beta_2+3\gamma_2=0\end{cases}\begin{cases}\alpha_2=0\\\beta_2=-\gamma_2\end{cases},$$

например $\Gamma_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Собственному (характеристическому) числу $\lambda_1=8$ соответствует собственный вектор $\Gamma_3=\begin{pmatrix}\alpha_3\\\beta_3\\\gamma_3\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1-8 & 0 & 0 \\ 0 & 5-8 & 3 \\ 0 & 3 & 5-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\alpha_3 = 0 \\ -3\beta_3 + 3\gamma_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \beta_3 = \gamma_3 \end{cases},$$

например $\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8.2. СОПРЯЖЁННЫЙ И САМОСОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА

Рассмотрим в евклидовом n-мерном пространстве E^n :

- линейные операторы $\tilde{\mathrm{A}}$ и A^*,
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ -ортонормированный базис в E^n ,
- $\tilde{A}$ - матрица оператора $\tilde{\mathrm{A}}$,
- A^* - матрица оператора A^*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Оператор* A^* *называется* ***сопряжённым оператору*** $\tilde{\mathrm{A}}$*, если матрица оператора* $\tilde{\mathrm{A}}$ *равна транспонированной матрице оператора* A^**:*

$$\tilde{A} = \left(A^*\right)^T.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Оператор* $\tilde{\mathrm{A}}$ *называется* ***самосопряжённым,*** *если он совпадает со своим сопряжённым оператором, т.е. если его матрица* $\tilde{A}$ *- симметрическая относительно главной диагонали:*

$$\tilde{A}^T = \tilde{A}.$$

СВОЙСТВА СОБСТЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ САМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА

1. Собственные числа самосопряжённого оператора различны.
2. Собственные вектора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.
3. **ТЕОРЕМА.** *В базисе из единичных собственных векторов самосопряжённого оператора матрица этого оператора диагональна, при чём элементы главной диагонали её собственные числа.*

Доказательство.

Доказательство проведём для случая 3-х мерного евклидова пространства.

Рассмотрим 3 собственных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ -они ортогональны (по свойству 2), значит мы можем взять их за базис, а затем пронормировать и получить $\vec{e}_1^{\,0}, \vec{e}_2^{\,0}, \vec{e}_3^{\,0}$ - три единичных собственных вектора матрицы A:

$$\vec{e}_1^{\,0}(1,0,0),\ \vec{e}_2^{\,0}(0,1,0),\ \vec{e}_3^{\,0}(0,0,1).$$

По определению линейного самосопряжённого оператора A, соответствующего матрице A:

$$\mathrm{A}\vec{e}_1^{\,0} = \lambda_1\vec{e}_1^{\,0},\ \lambda_1\vec{e}_1^{\,0} = (\lambda_1, 0, 0)$$
$$\mathrm{A}\vec{e}_2^{\,0} = \lambda_2\vec{e}_2^{\,0},\ \lambda_2\vec{e}_2^{\,0} = (0, \lambda_2, 0)$$
$$\mathrm{A}\vec{e}_3^{\,0} = \lambda_3\vec{e}_3^{\,0},\ \lambda_3\vec{e}_3^{\,0} = (0, 0, \lambda_3)$$

тогда

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$ - диагональная симметрическая матрица.

Теорема доказана.

8.3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ПРИВЕДЕНИЕ ИХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Квадратичной формой*** $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***n переменных*** $x_1, x_2, ..., x_n$ *называется сумма всевозможных парных произведений* $x_i x_j\ (i, j = 1,..,n)$*:*

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j =$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n +$$
$$+ .... +$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2$$

где a_{ij}*-называются* ***коэффициентами квадратичной формы*** *(*a_{ij} *- числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратичная форма* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ *называется* ***канонической****, если все* $a_{ij} = 0$ *при* $i \neq j$*:*

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то в квадратичной форме $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Рассмотрим квадратичную форму 3-х переменных x, y, z:

$$\Phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

и составим из её коэффициентов матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ -она симметрическая (т.к. $a_{ij} = a_{ji}$).

Каноническая квадратичная форма 3-х переменных имеет вид:

$$\Phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2,$$

её матрица также симметрическая и диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Если $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, тогда квадратичную форму

$$\Phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

можно представить в ***матричном виде***:

$$\Phi(x,y,z) = X^T \cdot A \cdot X = (x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи канонической квадратичной формы имеет вид:

$$\Phi(x,y,z) = X^T \cdot A \cdot X = (x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Часто (см. например **п.8.4** ниже) возникает необходимость найти такое преобразование координат, которое приведёт квадратичную форму к каноническому виду.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(x,y,z) = X^T \cdot A \cdot X = (x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

и преобразование координат T:

$X = T \cdot X'$, где T - ортогональная матрица (т.е. $T^{-1} = T^T$, $\det T = \pm 1$).

В новых координатах (новом базисе) квадратичная форма будет иметь вид:

$$\Phi(x',y',z') = (X)^T \cdot A \cdot X = (T \cdot X')^T \cdot A \cdot (T \cdot X') = (X')^T \cdot T^T \cdot A \cdot (T \cdot X') = (X')^T \cdot A' \cdot X',$$

где $A' = T^T \cdot A \cdot T = T^{-1} \cdot A \cdot T$.

Так как

$$(A')^T = (T^T \cdot A \cdot T)^T = (A \cdot T)^T \cdot (T^T)^T = T^T \cdot A^T \cdot T = T^T \cdot A \cdot T = A',$$

то $A' = T^T \cdot A \cdot T$ - симметрическая матрица, а значит соответствующий ей оператор ***самосопряжённый*** (см. п.**8.2.**).

По **свойству 3** самосопряжённого оператора, если базис состоит из единичных собственных векторов этого оператора, то его матрица будет иметь диагональный вид, элементы диагонали которой - собственные числа этой матрицы.

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

К КАНОНИЧЕСКОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЕ

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2$$

1. Найти собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,
2. Найти координаты соответствующих собственных векторов и нормировать их.
3. Составить матрицу T преобразования координат единичных собственных векторов (столбцы в матрице T - координаты единичных собственных векторов выстроенные так, чтобы $\det T = 1$).
4. Найти матрицу канонической квадратичной формы $A' = T^T \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, где λ_i - собственные числа матрицы A.
5. Каноническая квадратичная форма будет иметь вид:

$$\Phi(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 .$$

8.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В ПРОСТРАНСТВАХ R^2 И R^3

В курсе "Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве" мы подробно будем изучать различные геометрические объекты в пространствах R^2 и R^3. В частности, в R^2 мы будем изучать ***кривые 2-го порядка***, а в R^3 - ***поверхности 2-го порядка***. В этом пункте мы покажем, как с помощью теории квадратичных форм можно общее уравнение кривой (поверхности) 2-го порядка привести к каноническому виду, определив тем самым точный вид этой кривой (поверхности).

8.4.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ R^2

Рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + d = 0,$$

где $a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2 \neq 0$.

С помощью ортогонального преобразования эту кривую можно привести к одному из 9-ти ***канонических уравнений кривых 2-го порядка на плоскости***:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - ***эллипс***:

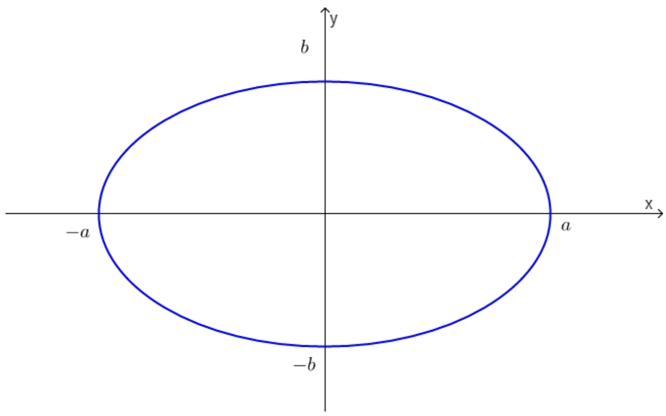


РИС.1. График эллипса (при $a > b$)

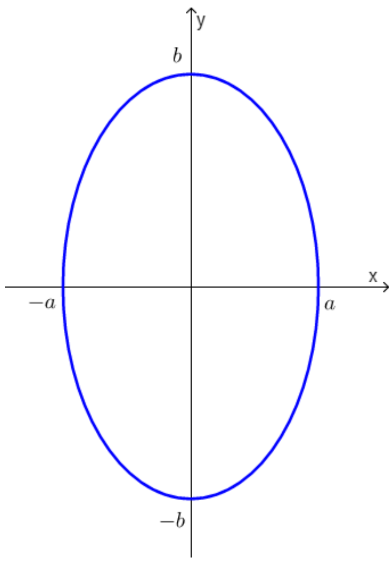
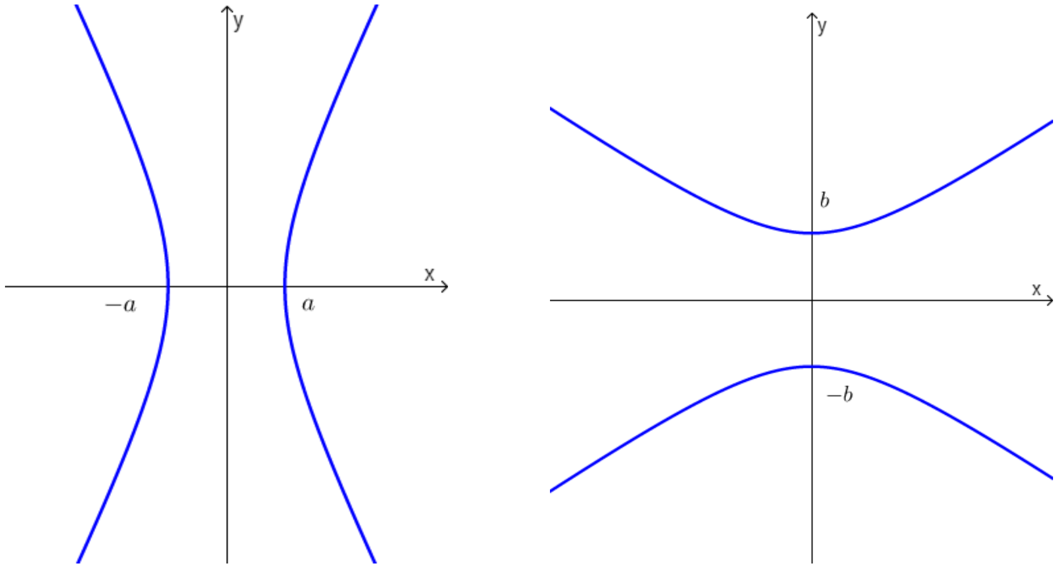


РИС.2. График эллипса (при $a < b$)

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ - точка O(0,0).

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - пустое множество точек (***мнимый эллипс***)

4. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ **- *гипербола:***



а) б)

РИС. 2 . Графики гиперболы а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,б) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$.

5. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересекающихся прямых:

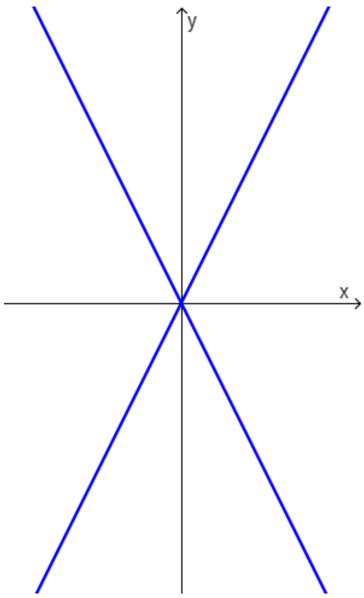
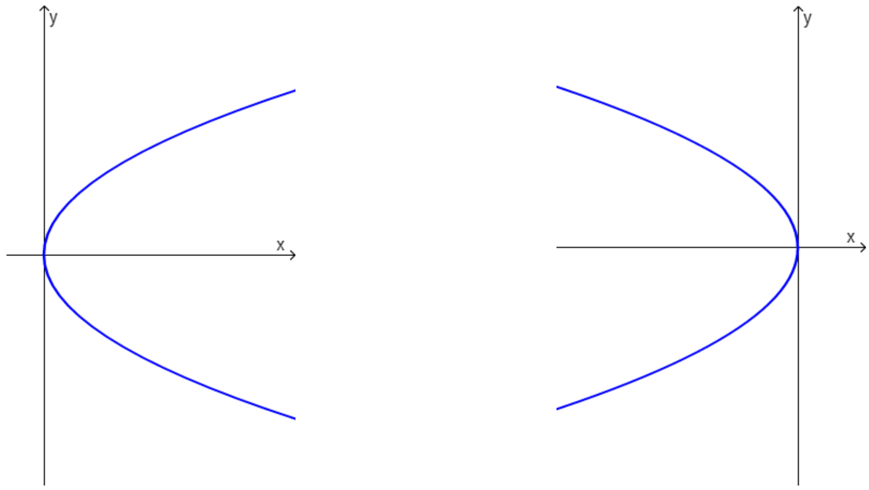


РИС. 3. График пары пересекающихся прямых, заданных уравнением

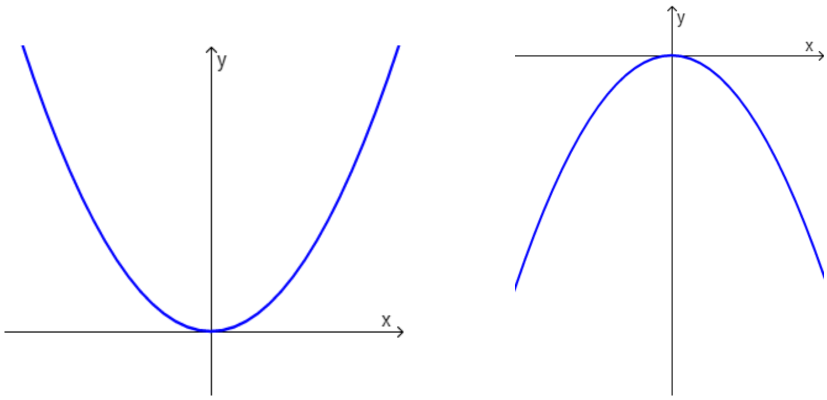
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

6. $y^2=2px\ (x^2=2py),\ \ p\neq 0$ **- *парабола:***



а) $p > 0$ б) $p < 0$

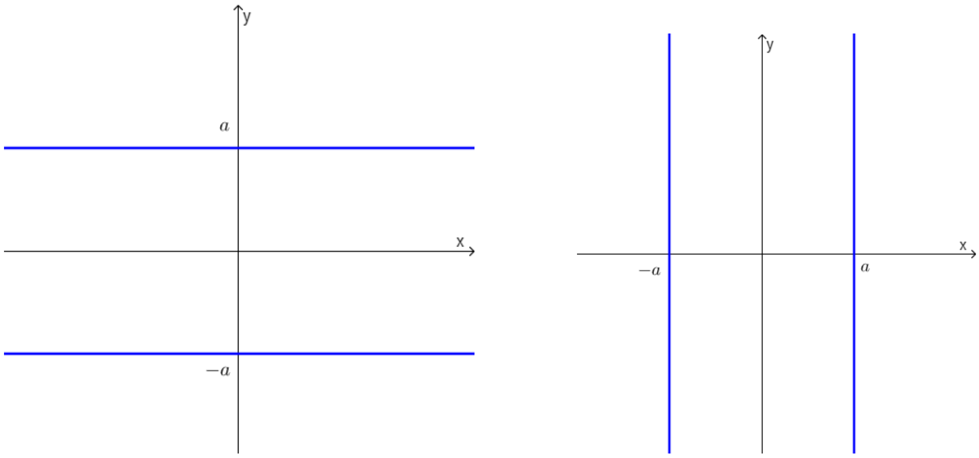
РИС. 4. График параболы $y^2 = 2px$.



а) $p > 0$ б) $p < 0$

РИС. 5. График параболы $x^2 = 2py$.

7. $y^2 = a^2$ $(x^2 = a^2)$, $a \neq 0$ - пара параллельных прямых:



а) б)

РИС.6. График параллельных прямых, заданных уравнениями

а) $y^2 = a^2$ б) $x^2 = a^2$

8. $y^2 = 0 (x^2 = 0)$ - пара слившихся прямых.,

9. $y^2 = -a^2 \ (x^2 = -a^2),\ a \neq 0$ - пустое множество точек.

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ 2-Х ПЕРЕМЕННЫХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. Рассмотрим ортогональное преобразование координат $X = T \cdot X'$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 \end{cases},\ T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},\ \begin{cases} x = t_{11}x' + t_{21}y' \\ y = t_{12}x' + t_{22}y' \end{cases}$$

которое приводит квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, где λ_1, λ_2 - собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

(о возможности такого преобразования было сказано выше, в **п.8.3**). Общее уравнение кривой 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + d = 0$$

примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1 x' + c_1 y' + d_1 = 0.$$

2. Выделяем полные квадраты в выражении $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1 x' + c_1 y' + d_1 = 0$:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1 x' + c_1 y' + d_1 = \lambda_1 (x' - h_1)^2 + \lambda_2 (y' - h_2)^2 + h_3,$$

3. Уравнение $\lambda_1 (x' - h_1)^2 + \lambda_2 (y' - h_2)^2 + h_3 = 0$ приводим к каноническому виду и строим кривую 2-го порядка в системе $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$, где т. O' получается параллельным переносом из т. O на вектор $\overrightarrow{OO'} = h_1\vec{e}_1' + h_2\vec{e}_2'$.

ПРИМЕР 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$$

и построить график кривой, заданной этим уравнением.

Решение.

1. Квадратичная форма, соответствующая данному уравнению, имеет вид

$$\Phi(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2.$$

Найдём ортогональное преобразование, приводящее её к каноническому виду.

Составим матрицу данной квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

и найдём её собственные числа (они являются корнями характеристического уравнения):

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda_1=20, \lambda_2=5 .$$

Находим соответствующие собственные векторы.

Числу $\lambda_1=20$ соответствует собственный вектор $\Gamma_1=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 17-20 & 6 \\ 6 & 8-20 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha_1+6\beta_1=0 \\ 6\alpha_1-12\beta_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{\alpha_1=2\beta_1 ,$$

например $\Gamma_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда единичный собственный вектор $\Gamma_1^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Числу $\lambda_2=5$ соответствует собственный вектор $\Gamma_2=\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 17-5 & 6 \\ 6 & 8-5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\alpha_2+6\beta_2=0 \\ 6\alpha_2+3\beta_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\alpha_2=-\frac{1}{2}\beta_2 \right. ,$$

например $\Gamma_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Тогда единичный собственный вектор $\Gamma_2^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Составляем матрицу ортогонального преобразования координат

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \det T=\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1 ,$$

тогда ***формула преобразования координат***

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}.$$

Найдём уравнение кривой в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$:

$$17x^2+12xy+8y^2+20\sqrt{5}x+20=20x'^2+5y'^2+20\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)+20=$$

$$=20x'^2+5y'^2+40x'-20y'+20=0.$$

2. Выделяем полные квадраты в выражении $20x'^2+5y'^2+40x'-20y'+20$:

$$20(x'^2+2x'+1-1)+5(y'^2+4y'+4-4)+20=20(x'+1)^2-20+5(y'+2)^2-20+20=$$

$$=20(x'+1)^2+5(y'+2)^2-20,$$

3.Уравнение $20x'^2+5y'^2+40x'-20y'+20=0$ равносильно уравнению $20(x'+1)^2+5(y'+2)^2-20=0$, которое в каноническом форме имеет вид:

$$\frac{(x'+1)^2}{1}+\frac{(y'+2)^2}{4}=1.$$

В системе $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ делаем параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'}=-1\vec{e}_1'+2\vec{e}_2'$ и получаем каноническую систему $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$, в которой исходная кривая 2-го порядка задаётся уравнением

$$\frac{x''^2}{1}+\frac{y''^2}{4}=1 \text{ -}$$

это эллипс, вытянутый вдоль оси $O'y''$ (см. РИС.7).

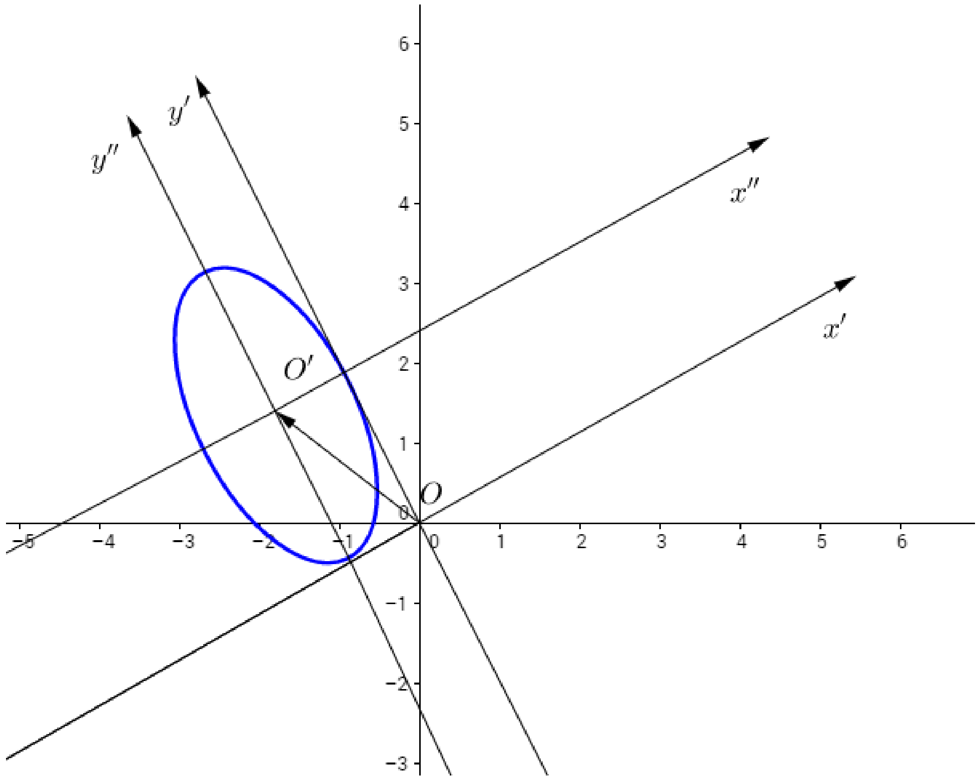


РИС. 7. График кривой 2-го порядка, заданной уравнением

$$17x^2+12xy+8y^2+20\sqrt{5}x+20=0.$$

8.4.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ R^3

Рассмотрим общее уравнение поверхности 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + bx + dy + ez + f = 0,$$

где хотя бы один из членов $a_{ii} \neq 0$.

С помощью ортогонального преобразования это уравнение можно привести к одному из 9-ти ***канонических уравнений поверхностей 2-го порядка в пространстве***:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **-** ***эллипсоид***

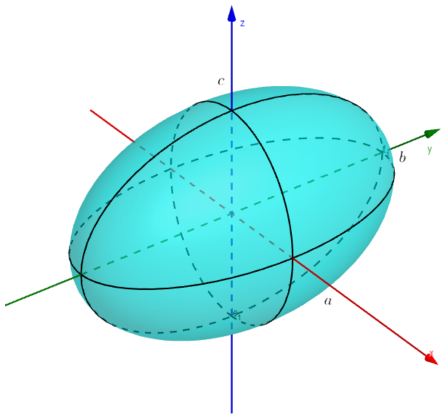


РИС. 8. Эллипсоид.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ **-** ***однополостный гиперболоид***

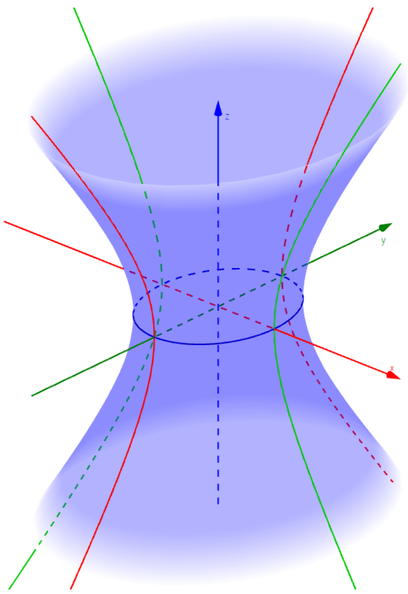


РИС.9. Однополостный гиперболоид

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ - ***двуполостный гиперболоид***

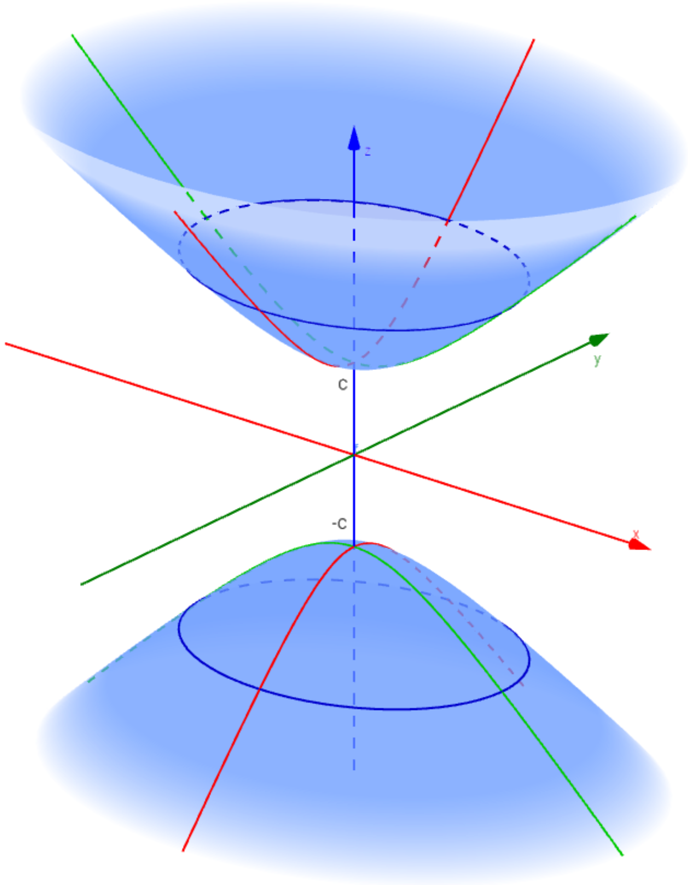


РИС.10. Двуполостный гиперболоид

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ - ***конус***

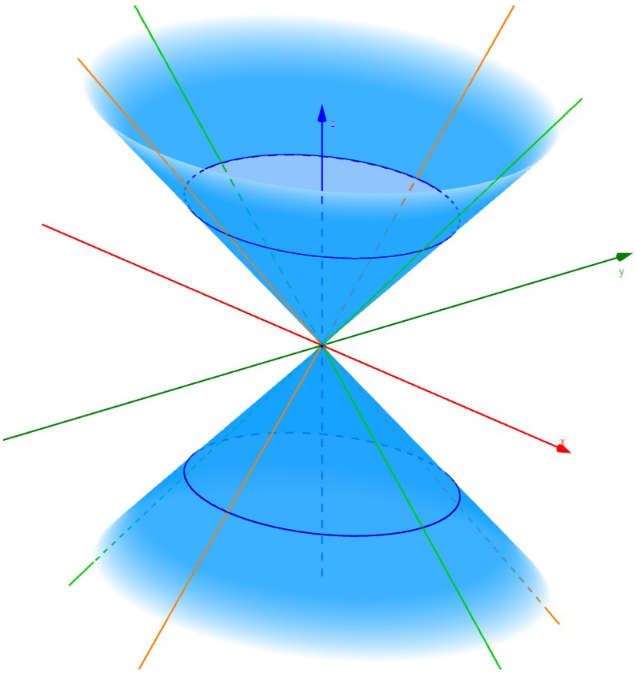


РИС.11. Конус

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ **- *эллиптический параболоид***

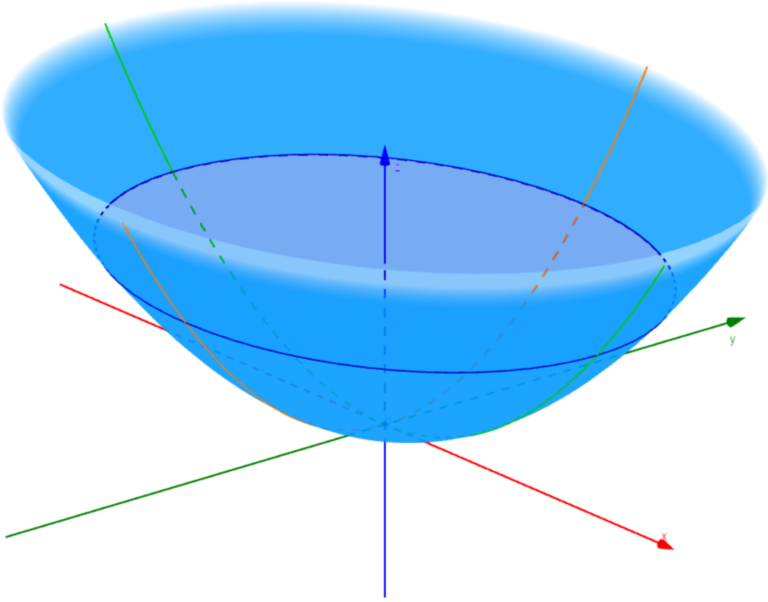


РИС.12. Эллиптический параболоид

6. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ **- *гиперболический параболоид***

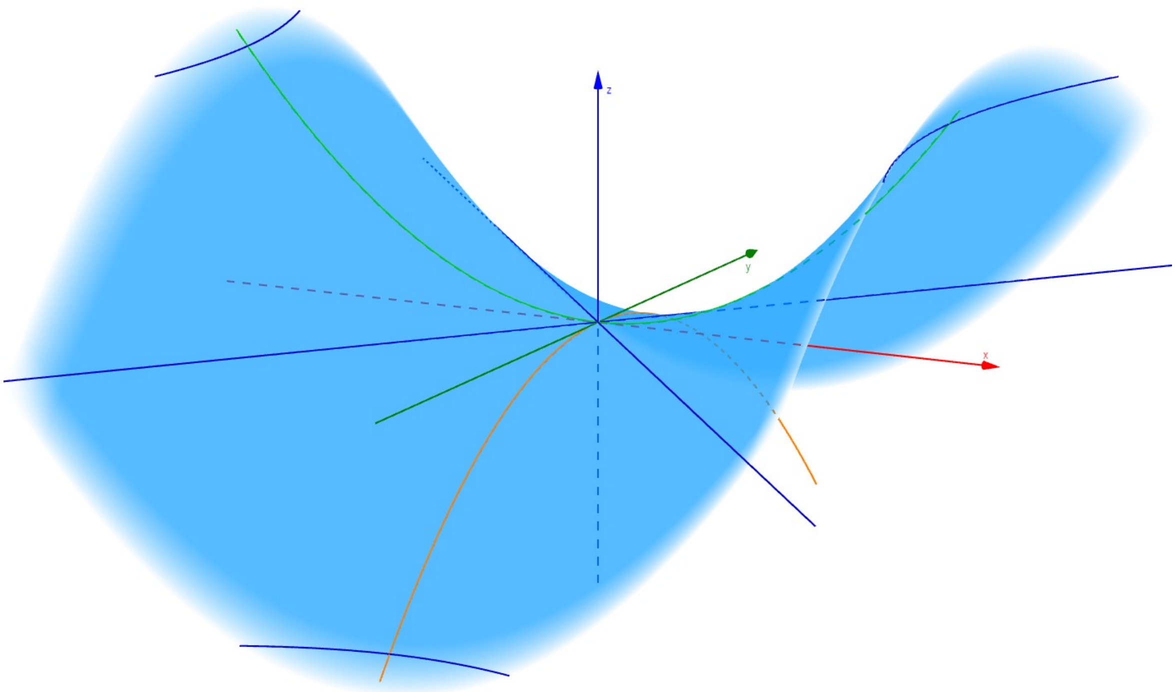


РИС.13. Гиперболический параболоид

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **- эллиптический цилиндр**

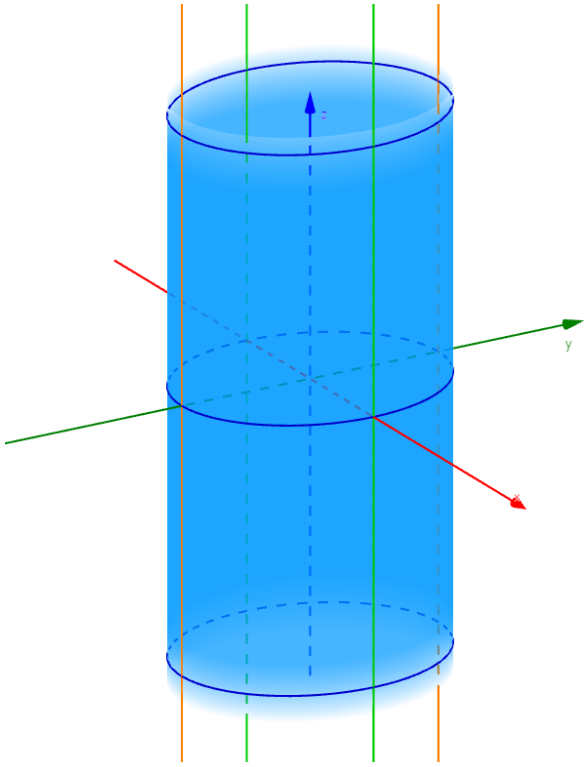


РИС.14. Эллиптический цилиндр

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **- *гиперболический цилиндр***

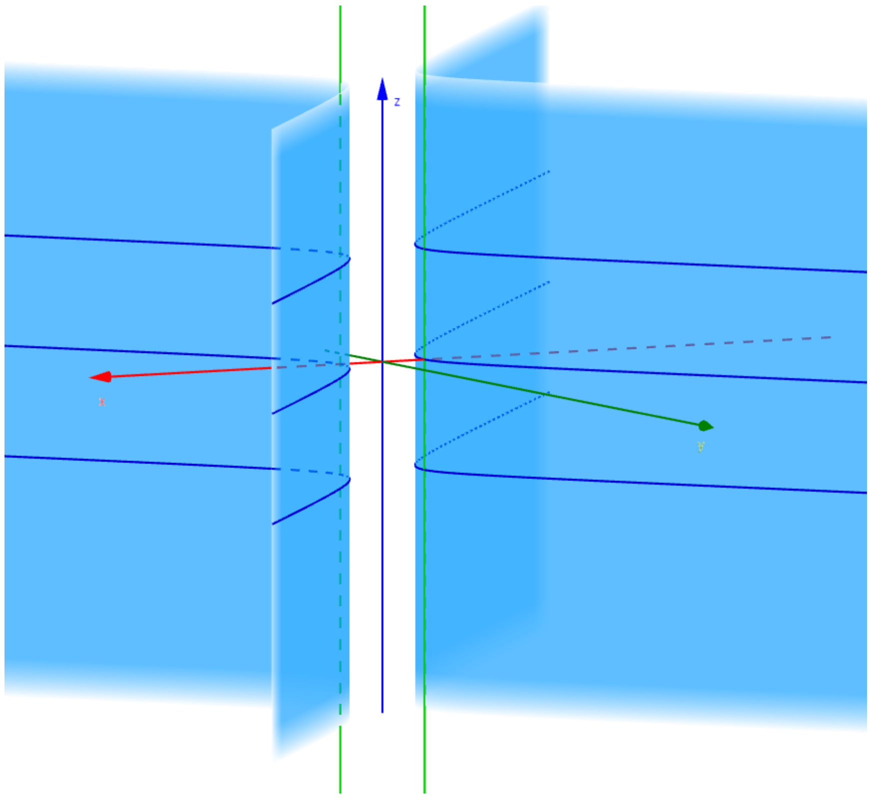


РИС.15. Гиперболический цилиндр

9. $y^2 = 2px, p \neq 0$ **-** ***параболический цилиндр***

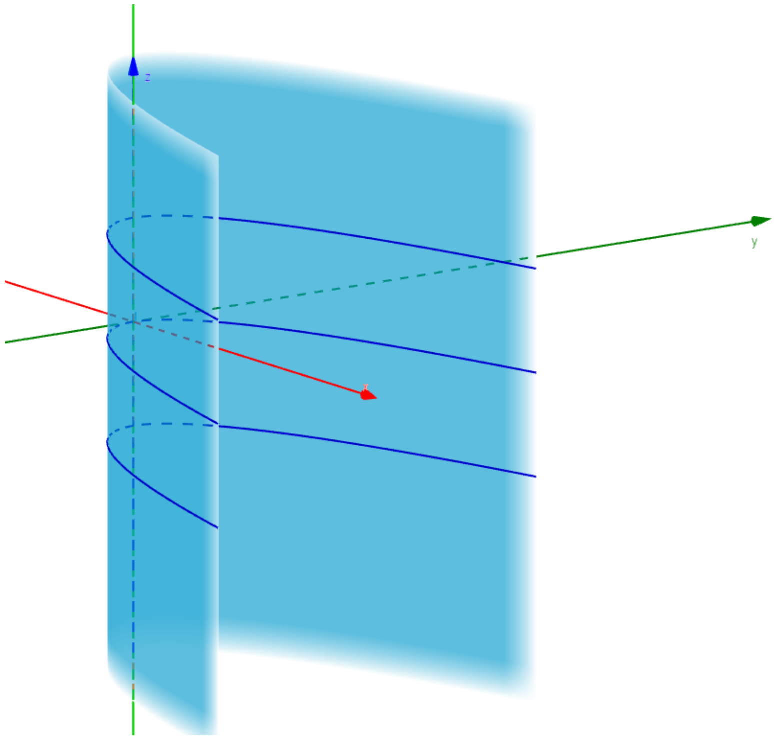


РИС.16. Параболический цилиндр.

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ 3-Х ПЕРЕМЕННЫХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. Рассмотрим ортогональное преобразование координат $X = T \cdot X'$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + t_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + t_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = t_{13}\vec{e}_1 + t_{23}\vec{e}_2 + t_{33}\vec{e}_3 \end{cases}, \ T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}, \ \begin{cases} x = t_{11}x' + t_{21}y' + t_{31}z' \\ y = t_{12}x' + t_{22}y' + t_{32}z' \\ z = t_{13}x' + t_{23}y' + t_{33}z' \end{cases}$$

которое приводит квадратичную форму $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (о возможности такого преобразования было сказано выше, в **п.8.3**).

Общее уравнение поверхности 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + bx + dy + ez + f = 0$$

примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1 x' + d_1 y' + e_1 z' + f_1 = 0 .$$

2. Выделяем полные квадраты в выражении

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1 x' + d_1 y' + e_1 z' + f_1 = 0 :$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1 x' + d_1 y' + e_1 z' + f_1 = \lambda_1 (x' - h_1)^2 + \lambda_2 (y' - h_2)^2 + \lambda_3 (z' - h_3)^2 + h_4$$

3.Уравнение

$$\lambda_1 (x' - h_1)^2 + \lambda_2 (y' - h_2)^2 + \lambda_3 (z' - h_3)^2 + h_4 = 0$$

приводим к каноническому виду и строим кривую 2-го порядка в системе $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, где т. O' получается параллельным переносом из т. O на вектор $\overrightarrow{OO'} = h_1 \vec{e}_1' + h_2 \vec{e}_2' + h_3 \vec{e}_3'$.

ПРИМЕР 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + 4 = 0$$

и построить график поверхности, заданной этим уравнением.

Решение.

1. Квадратичная форма, соответствующая данному уравнению, имеет вид

$$\Phi(x, y, z) = 9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz .$$

Найдём ортогональное преобразование, приводящее её к каноническому виду.

Составим матрицу данной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{pmatrix}$$

и найдём её собственные числа (они являются корнями характеристического уравнения):

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 20-\lambda & -20 \\ 0 & -20 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 40, \lambda_3 = 0 .$$

Находим соответствующие собственные векторы.

Числу $\lambda_1 = 9$ соответствует собственный вектор $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 9-9 & 0 & 0 \\ 0 & 20-9 & -20 \\ 0 & -20 & 20-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\beta_1 - 20\gamma_1 = 0 \\ -20\beta_1 + 11\gamma_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = \dfrac{20}{11}\gamma_1 \\ \beta_1 = \dfrac{11}{20}\gamma_1 \\ \alpha_1 - \textit{любое} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \textit{любое} \\ \beta_1 = 0 \\ \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

например $\mathit{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, он имеет единичную длину и нормировать его не нужно.

Числу $\lambda_2 = 40$ соответствует собственный вектор $\mathit{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 9-40 & 0 & 0 \\ 0 & 20-40 & -20 \\ 0 & -20 & 20-40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -31\alpha_2 = 0 \\ -20\beta_2 - 20\gamma_2 = 0 \\ -20\beta_2 - 20\gamma_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = -\gamma_2 \end{cases},$$

например $\mathit{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда единичный собственный вектор

$$\mathit{\Gamma}_2{}^0 = \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Числу $\lambda_3 = 0$ соответствует собственный вектор $\mathit{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 9-0 & 0 & 0 \\ 0 & 20-0 & -20 \\ 0 & -20 & 20-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha_3 = 0 \\ 20\beta_3 - 20\gamma_3 = 0 \\ -20\beta_3 + 20\gamma_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \beta_3 = \gamma_3 \end{cases},$$

например $\mathit{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда единичный собственный вектор $\Gamma_3^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Составляем матрицу ортогонального преобразования координат

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

тогда формула преобразования координат

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z' \end{cases} .$$

Найдём уравнение кривой в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$:

$$9x'^2 + 40y'^2 + 0z'^2 - 36x' - 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'\right) + 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'\right) + 4 =$$

$$= 9x'^2 + 40y'^2 + 0z'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0.$$

2. Выделяем полные квадраты в выражении $9x'^2 + 40y'^2 + 0z'^2 - 36x' - 8y' + 4$:

$$9(x'^2 - 4x' + 4 - 4) + 40\left(y'^2 - \frac{1}{5} y' + \frac{1}{100} - \frac{1}{100}\right) + 4 = 9(x'-2)^2 - 36 + 40\left(y' - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{2}{5} + 4 =$$

$$= 9(x'-2)^2 - 36 + 40\left(y' - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{18}{5},$$

3. Уравнение

$$9x'^2 + 40y'^2 + 0z'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0$$

равносильно уравнению

$$9(x'-2)^2 - 36 + 40\left(y' - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{18}{5} = 0,$$

которое в каноническом форме имеет вид:

$$\frac{(x'-2)^2}{3{,}6} + \frac{(y'-0{,}1)^2}{0{,}81} = 1.$$

В системе $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ делаем параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'} = 2\vec{e}_1' + 0{,}1\vec{e}_2'$ и получаем каноническую систему $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, в которой исходная кривая 2-го порядка задаётся уравнением

$$\frac{x''^2}{(\sqrt{3{,}6})^2} + \frac{y''^2}{0{,}9^2} = 1 \text{ -}$$

это эллиптический цилиндр, вытянутый вдоль оси $O'z''$ (см. РИС.17).

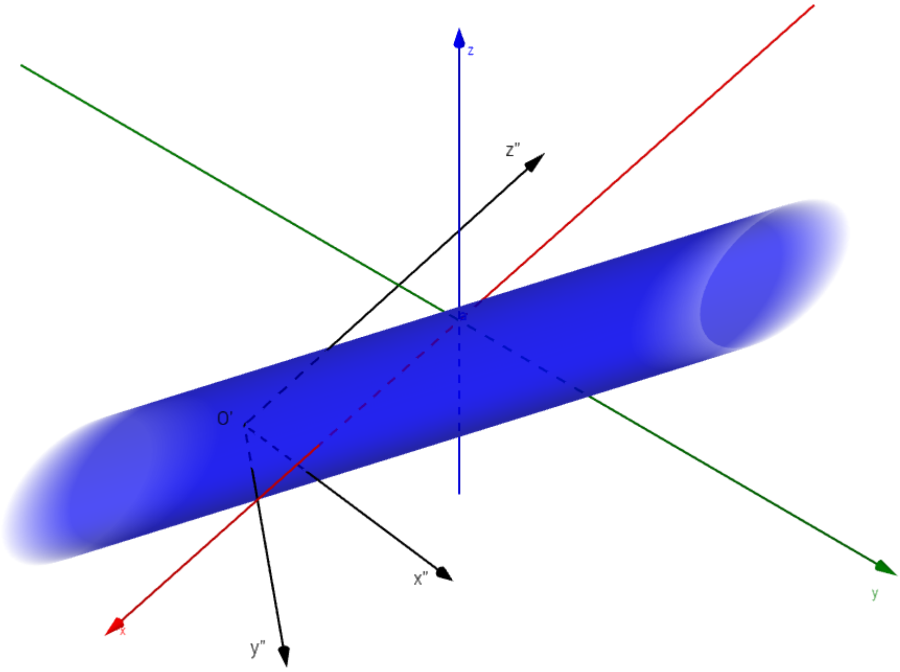


РИС.17. Эллиптический цилиндр, заданный уравнением

$$9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + 4 = 0$$