Векторная алгебра

п. 1. Понятие линейного пространства

Определение 1. Множество V называется ***линейным пространством,*** а его элементы – ***векторами,*** если по некоторому правилу:

а) любым двум элементам $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$ поставлен в соответствие элемент $\bar{x} + \bar{y} \in V$, называемый *суммой* элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$;

б) любому элементу $\bar{x} \in V$ и произвольному числу $\lambda \in \boldsymbol{R}$ поставлен в соответствие элемент $\lambda \cdot \bar{x} \in V$, называемый *произведением* числа λ на элемент $\bar{x}$, причем справедливы следующие аксиомы ($\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V, \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$):

1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (коммутативность сложения);

2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (ассоциативность сложения);

3) существует *нулевой* элемент $\bar{0}$ такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$;

4) для каждого элемента $\bar{x}$ существует *противоположный* элемент $-\bar{x}$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

5) $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$;

6) $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$;

7) $\lambda(\mu\bar{x}) = (\lambda\mu)\bar{x}$;

8) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

Линейные пространства часто называют *векторными* пространствами.

Примерами линейных пространств являются:

1) множество решений системы однородных линейных уравнений;

2) множество функций, определенных на отрезке $[a;b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число;

3) множество всех многочленов с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число;

4) арифметическое n-мерное векторное пространство (см. п.3.4.).

Свойства операций в линейных пространствах ($\forall \bar{x} \in V, \lambda \in \boldsymbol{R}$):

1°. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент $\bar{0}$;

2°. $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$;

3°. $-\bar{x} = (-1) \cdot \bar{x}$;

4°. $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$;

5°. $(-\lambda)\cdot\overline{x} = -(\lambda\overline{x})$.

п. 2. Арифметическое n-мерное векторное пространство

Определение 2. ***Арифметическим n-мерным вектором*** называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записываемая в виде $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующие вектор, называются *компонентами* вектора.

В дальнейшем слово «арифметический» в названии вектора будем опускать.

При n=2 или n=3 совокупность чисел можно интерпретировать как совокупность координат вектора на плоскости или в пространстве.

Определение 3. Два n-мерных вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называются ***равными***, если равны соответствующие их компоненты: $x_i = y_i$ $(i = \overline{1, n})$. Равенство векторов обозначается обычным образом: $\overline{x} = \overline{y}$.

Вектор $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ называется ***нулевым***.

Вектор $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ называется ***противоположным*** вектору $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Операции над n-мерными векторами:

1) *Суммой векторов* $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называется вектор $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

2) *Произведением вектора* $\overline{x}$ *на число* (*скаляр*) λ называется вектор $\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Нетрудно проверить, что введенные таким образом операции удовлетворяют аксиомам векторного пространства.

Множество всех n-мерных арифметических векторов, в котором введены указанные выше операции сложения и умножения вектора на число, называется ***арифметическим n-мерным векторным пространством*** и обозначается $\boldsymbol{R}^n$.

п. 3. Линейная зависимость векторов

Произвольный набор векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m \in \boldsymbol{R}^n$ называется ***системой векторов***. Отличие системы векторов от множества векторов в том, что все векторы пронумерованы и среди них могут быть совпадающие.

Пусть даны векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m \in \boldsymbol{R}^n$. Любой набор вида $\overline{a} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m \overline{a}_m$, где λ_1, λ_2, …, λ_m – произвольные числа, называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m$.

При наличии равенства $\overline{a} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m \overline{a}_m$ говорят, что вектор $\overline{a}$ *линейно выражается* через векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \ldots$, $\overline{a}_m$, или что вектор $\overline{a}$ *разлагается* по векторам $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \ldots$, $\overline{a}_m$.

Определение 4. Система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m$ называется ***линейно зависимой,*** если существуют такие числа λ_1, λ_2, …, λ_m, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство: $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m \overline{a}_m = \overline{0}$.

Если же система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_m$ такова, что равенство $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m \overline{a}_m = \overline{0}$ возможно, только если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то эта система называется ***линейно независимой.***

Пример 1.

Примером линейно зависимой системы, состоящей из двух векторов в $\boldsymbol{R}^3$, является система, состоящая из двух коллинеарных векторов; из трех векторов – система, состоящая из трех компланарных векторов.

Пример 2.

Является ли система векторов $\overline{a_1} = (1,-1,2,2)$, $\overline{a_2} = (-1,-2,3,0)$, $\overline{a_3} = (2,1,-1,2)$, $\overline{a_4} = (1,0,-2,-1)$ линейно зависимой? Если да, найти все значения коэффициентов λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, при которых система векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{a_4}$ является линейно зависимой.

Решение. Составим векторное равенство $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \lambda_3 \overline{a}_3 + \lambda_4 \overline{a}_4 = \overline{0}$. Запишем его в векторном виде, представив векторы в виде матриц-столбцов своих координат:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда, умножая матрицы на соответствующие числа и складывая полученные матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4 \\ -\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3-2\lambda_4 \\ 2\lambda_1+2\lambda_3-\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторное равенство $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_3\overline{a}_3+\lambda_4\overline{a}_4=\overline{0}$ свелось к решению следующей системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4=0 \\ -\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3-2\lambda_4=0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_3-\lambda_4=0 \end{cases}.$$

Решим СЛУ методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ -2I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2IV \\ -2IV \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -II \\ -2II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :7 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $rang(A)=rang(A|B)=3<n=4$, то СЛУ совместная и неопределенная, следовательно, имеет ненулевое решение. Таким образом, система векторов линейно зависима. Из последней матрицы найдем коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, при которых система векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{a_4}$ является линейно зависимой:

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_2-\lambda_3-5\lambda_4=0 \\ \lambda_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-\lambda_3 \\ \lambda_2=\lambda_3 \\ \lambda_4=0 \end{cases}, \text{ где } \lambda_3 \in \boldsymbol{R}.$$

Свойства линейно зависимых (независимых) систем векторов:

1°. Система, состоящая из одного вектора $\overline{a}$, линейно зависима тогда и только тогда, когда $\overline{a}=\overline{0}$.

2°. Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда среди векторов системы имеется такой, который линейно выражается через остальные векторы.

3°. Если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

4°. Если система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно независима, но при добавлении к ней еще одного вектора $\overline{a}$ она становится линейно зависимой, то добавленный вектор $\overline{a}$ линейно выражается через $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$.

Лестничной системой векторов называется система вида:

$$\overline{a_1} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}, \ldots, a_{1n}),$$
$$\overline{a_2} = (0, a_{22}, \ldots, a_{2r}, \ldots, a_{2n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\overline{a_r} = (0, 0, \ldots, a_{rr}, \ldots, a_{rn}).$$

5°. Лестничная система векторов линейно независима.

Из свойства 5° вытекает тот факт, что в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ существует линейно независимая система, содержащая ровно n векторов. Примером такой системы может служить система вида: $\overline{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\overline{e_2} = (0, 1, \ldots, 0)$, …, $\overline{e_n} = (0, 0, \ldots, 1)$. Указанная система обладает важным свойством: любой вектор $\overline{a_n} \in \boldsymbol{R}^n$ может быть разложен по этой системе: $\overline{a_n} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + \ldots + a_n\overline{e_n}$, где $\overline{a_n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Теорема. В пространстве $\boldsymbol{R}^n$ *любая система, состоящая более чем из* n *векторов, линейно зависима.*

п. 4. Базис векторного пространства

Пусть *S'* – какая-либо часть системы *S*.

Определение 5. S' называется ***базисом*** системы *S*, если *S'* – максимальная линейно независимая подсистема *S*. Другими словами, подсистема *S'* есть базис системы *S*, если:

1) она линейно независима;

2) добавление к *S'* любого другого вектора из системы *S* превращает эту подсистему в линейно зависимую.

Любой вектор системы *S* линейно выражается через базис.

Из линейной независимости векторов, входящих в базис, следует, что базис любой системы векторов пространства всегда содержит не более чем n векторов.

Теорема (о базисах). Два различных базиса одной и той же системы векторов содержат одинаковое число векторов.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом базисе системы.

Пример 3. Дана система из четырех векторов в $\boldsymbol{R}^5$: $\overline{a_1}=(-1,3,3,2,5)$, $\overline{a_2}=(-3,6,2,3,4)$, $\overline{a_3}=(-3,1,-5,0,7)$, $\overline{a_4}=(-5,7,1,4,1)$. Найти ранг и базис этой системы.

Решение. Запишем векторное равенство: $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_3\overline{a}_3+\lambda_4\overline{a}_4=\overline{0}$. Приравнивая координаты векторов слева и справа, получим следующую однородную систему:

$$\begin{cases}-\lambda_1-3\lambda_2-3\lambda_3-5\lambda_4=0\\ 3\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3+7\lambda_4=0\\ 3\lambda_1+2\lambda_2-5\lambda_3+\lambda_4=0\\ 2\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_4=0\\ 5\lambda_1+4\lambda_2-7\lambda_3+\lambda_4=0\end{cases}.$$

Решим последнюю систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}-1&-3&-3&-5\\3&5&1&7\\3&2&-5&1\\2&3&0&4\\5&4&-7&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\+3I\\+3I\\+2I\\+5I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-3&-3&-5\\0&-4&-8&-8\\0&-7&-14&-14\\0&-3&-6&-6\\0&-11&-22&-24\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1)\\:(-4)\\:(-7)\\:(-3)\\\cdot(-1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&3&5\\0&1&2&2\\0&1&2&2\\0&1&2&2\\0&11&22&24\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-II\\-II\\-11II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&5\\0&1&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&5\\0&1&2&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Так как $rang(A)=rang(A|B)=3<n=4$, то система неопределенная, т.е. имеет бесконечное число решений.

Таким образом, исходная система линейных уравнений свелась к следующей:

$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3+5\lambda_4=0\\ \lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4=0\\ 2\lambda_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=3\lambda_3\\ \lambda_2=-2\lambda_3\\ \lambda_4=0\end{cases}, \text{ где } \lambda_3\in\boldsymbol{R}.$$

Наличие свободной переменной указывает на линейную зависимость системы.

Исследуем теперь линейную зависимость векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_4}$, соответствующих базисным переменным λ_1, λ_2, λ_4. Для этого рассмотрим уравнение $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_4\overline{a}_4=\overline{0}$ Так как это уравнение получается из исходного уравнения $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_3\overline{a}_3+\lambda_4\overline{a}_4=\overline{0}$ в предположении λ_3=0, то и общее решение уравнения $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_4\overline{a}_4=\overline{0}$ может быть получено из общего решения уравнения $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_3\overline{a}_3+\lambda_4\overline{a}_4=\overline{0}$, задаваемого соотношениями $\begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$, если положить λ_3=0. Получим: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$, следовательно, векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_4}$ линейно независимы. Значит, ранг этой системы равен трем, т.к. в этой системе существуют три линейно независимых вектора, а сама система (состоящая из четырех векторов) линейно зависима.

Кроме того, из равенства $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_4\overline{a_4} = \overline{0}$ и системы $\begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$ следует, что вектор $\overline{a_3}$ представляет собой линейную комбинацию векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_4}$: $\overline{a_3}$ =-3$\overline{a_1}$ +2 $\overline{a_2}$ +0$\overline{a_4}$. Таким образом, векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_4}$ образуют базис данной системы.

Частным случаем системы *n*-мерных векторов служит множество всех *n*-мерных векторов, т.е. все пространство $\boldsymbol{R}^n$. Как уже было отмечено , в этом пространстве существует система из *n* линейно независимых векторов, по которым можно разложить любой вектор пространства. Следовательно, эта система и есть базис пространства $\boldsymbol{R}^n$. Любой другой базис должен состоять из *n* векторов. Таким образом, любой базис пространства $\boldsymbol{R}^n$ есть система из *n* линейно независимых векторов. Верно и обратное: любая система из *n* линейно независимых векторов будет базисом пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Пример 4. Система векторов $\overline{a_1} = (7,1,3,-2)$, $\overline{a_2} = (0,-1,2,0)$, $\overline{a_3} = (0,0,-2,6)$, $\overline{a_4} = (0,0,0,1)$ образует базис $\boldsymbol{R}^4$, поскольку это лестничная система и количество векторов равно 4.

Пример 5. Базисом пространства $\boldsymbol{R}^n$ может являться система из *n* единичных векторов $\overline{e_1} = (1,0,\ldots,0)$, $\overline{e_2} = (0,1,\ldots,0)$, …, $\overline{e_n} = (0,0,\ldots,1)$, называемая ***элементарным*** (*простейшим*) базисом.

Размерностью линейного пространства *V* называется число векторов его базиса, обозначается *dimV*.

Теорема. Каждый вектор x линейного пространства можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \quad . \qquad (1)$$

Доказательство.

□ Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют произвольный базис n-мерного пространства R. Так как любые из $(n+1)$ векторов n-мерного пространства R зависимы, то будут зависимы, в частности, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и рассматриваемый вектор x. Тогда существуют такие не равные одновременно нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n + \lambda x = 0.$$

При этом $\lambda \neq 0$, ибо в противном случае, если $\lambda = 0$ и хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ было бы отлично от нуля, то векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} e_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n \text{ или}$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\overline{a}$ по базису $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$, числа x_1, x_2, …, x_n называются *координатами вектора* $\overline{a}$ в этом базисе и обозначаются $\overline{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

п. 5. Переход к новому базису

Пусть $E = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ и $E' = (\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \ldots, \overline{e_n'})$ - векторы линейного n-мерного пространства V. Выразим векторы базиса E' через векторы базиса E:

$$\begin{cases} \overline{e_1'} = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n} \\ \overline{e_2'} = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{n2}\overline{e_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{e_n'} = a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \ldots + a_{nn}\overline{e_n} \end{cases}.$$

Представим последнюю систему в матричном виде:

$$(\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \ldots, \overline{e_n'}) = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

сокращенно: $E' = ET$, где $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица, называемая *матрицей перехода* от базиса *E* к базису E'. Как видим матрица перехода от «старого» E базиса к «новому» E' состоит из координат векторов «нового» базиса в «старом», записанных в столбцы.

Свойства матрицы перехода:

1°. Матрица перехода невырождена.

2°. Матрица перехода от базиса E' к базису *E* имеет вид T^{-1}.

Пусть вектор $\overline{x}$ в старом базисе E имеет координаты $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, в новом базисе E' координаты $\overline{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Зависимость между координатами вектора в разных базисах имеет вид: $X = TX'$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Координаты вектора в новом базисе выражаются через координаты вектора в старом базисе следующим образом: $X' = T^{-1}X$.

Пример 6. Векторы $\overline{x} = (1,3,-2)$, $\overline{e'_1} = (1,1,0)$, $\overline{e'_2} = (1,0,1)$, $\overline{e'_3} = (0,1,1)$ заданы своими координатами в старом базисе $E = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$. Выразить координаты вектора $\overline{x}$ в новом базисе $E' = (\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3})$

Решение. Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу, обратную матрице перехода: $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда искомые координаты вектора $\overline{x}$ в новом базисе $E' = (\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3})$ вычисляются следующим образом: $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T^{-1}X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

п. 6. Евклидовы пространства

Определение 6. Линейное пространство V называется ***евклидовым*** пространством, если каждой паре векторов $\overline{x}$, $\overline{y} \in V$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое $\overline{x}\,\overline{y}$ (или $(\overline{x}, \overline{y})$), причем выполнены следующие условия (аксиомы)

($\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$):

1) $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{y}\,\overline{x}$;

2) $(\overline{x} + \overline{y})\overline{z} = \overline{x}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z}$;

3) $(\lambda \overline{x})\overline{y} = \lambda(\overline{x}\,\overline{y})$;

4) $\overline{x}^2 = \overline{x}\,\overline{x} \geq 0$, причем $\overline{x}\,\overline{x} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0$.

Число $\overline{x}\,\overline{y}$ называется ***скалярным произведением*** векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Число $\overline{x}^2 = \overline{x}\,\overline{x}$ называется ***скалярным квадратом*** вектора.

Если векторы $\overline{x}$, $\overline{y}$ задаются своими координатами: $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, то скалярное произведение этих векторов определяется формулой: $\overline{x}\,\overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

Два ненулевых вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называются ***ортогональными,*** если их скалярное произведение равно нулю. Для пространств $\boldsymbol{R}^2$ и $\boldsymbol{R}^3$ ортогональность векторов означает их взаимную перпендикулярность.

Длиной вектора $\overline{x}$ называется число $|\overline{x}| = \sqrt{\overline{x}^2}$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***нормированным***.

Если вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то длина вектора определяется по формуле $|\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

Свойства длины вектора:

1°. $\overline{x} = \overline{0} \Leftrightarrow |\overline{x}| = 0$.

2°. $|\lambda \overline{x}| = |\lambda| |\overline{x}|$ ($\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$).

3°. $|\overline{x}\,\overline{y}| \leq |\overline{x}| |\overline{y}|$ (неравенство Коши-Буняковского).

4°. $|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$ (неравенство треугольника).

Углом между ненулевыми векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ евклидова пространства называется число φ, определяемое из равенства $cos\varphi = \frac{\bar{x}\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$; считается, что $\varphi \in [0;\pi]$.

Если в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ базисные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ взаимно перпендикулярны и $|\bar{e}_1| \neq |\bar{e}_2| \neq |\bar{e}_3|$, то такая система векторов называется *прямоугольной системой базисных векторов* в пространстве. Если базисные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ взаимно перпендикулярны и $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=|\bar{e}_3|=1$, то такая система векторов называется *декартовой системой базисных векторов* в пространстве. Векторы $\bar{e}_1(1;0;0)$, $\bar{e}_2(0;1;0)$, $\bar{e}_3(0;0;1)$ обозначаются соответственно символами $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства образуют *ортогональный базис*, если эти векторы попарно ортогональны, и *ортонормированный базис*, если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т.е. если $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|\boldsymbol{e}_i| = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Примером ортонормированного базиса является система n единичных векторов $\boldsymbol{e}_i$, у которых i-я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \quad 0)'$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)'$, $\quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)'$.

Построение ортогонального базиса

Рассмотрим пространство R^n с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Покажем, как из произвольного базиса можно получить ортогональный. Данный процесс называют ***ортогонализацией*** по Шмидту.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ искомый ортогональный базис.

1) Выбираем $e_1 = a_1$ (можно взять любой другой вектор исходного базиса.
2) Будем искать e_2 по правилу $e_2 = a_2 - \alpha \cdot e_1$, где α – произвольное действительное число. Найдем формулу для α, используя ортогональность векторов e_1 и e_2. Их скалярное произведение должно быть равно нулю, т.е.$(e_1, e_2) = 0$.
$$(e_1, e_2) = (e_1, a_2 - \alpha \cdot e_1,) = (e_1, a_2) - \alpha(e_1, e_1)$$
Получаем уравнение $(e_1, a_2) - \alpha(e_1, e_1) = 0$. Находим α.
$$\alpha = \frac{(e_1, a_2)}{(e_1, e_1)} = \frac{(e_1, a_2)}{|e_1|^2}.$$
Тогда $e_2 = a_2 - \frac{(e_1, a_2)}{|e_1|^2} \cdot e_1$.
3) Аналогично получаем формулу для $e_3 = a_3 - \frac{(e_1, a_3)}{|e_1|^2} \cdot e_1 - \frac{(e_2, a_3)}{|e_2|^2} \cdot e_2$

4) Окончательно получим формулу:

$$e_n = a_n - \frac{(e_1,a_n)}{|e_1|^2}\cdot e_1 - \frac{(e_2,a_n)}{|e_2|^2}\cdot e_2 - \dots - \frac{(e_{n-1},a_n)}{|e_{n-1}|^2}\cdot e_{n-1}.$$

Полученную ортогональную систему векторов можно сделать ортонормированной, поделив каждый вектор на его длину.

Пример. Дана система векторов $a_1 = (1;2;\ 2;-1), a_2 = (1;1;-5;3), a_3 = (3;2;\ 8;-7)$. Применяя процесс ортогонализации по Шмидту, построить ортогональный базис.

Решение.

1) Пусть $e_1 = a_1 = (1;2;\ 2;-1)$.

2) Найдем $\alpha = \frac{(e_1,a_2)}{(\,e_1,e_1)} = \frac{1\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot(-5)+(-1)\cdot 3}{1^2+2^2+2^2+(-1)^2} = \frac{-10}{10} = -1.$

Находим $e_2 = a_2 - \frac{(e_1,a_2)}{|e_1|^2}\cdot e_1$. Удобно выполнять действия в матричной форме.

$$e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix} - (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $e_2 = (2;3;-3;2)$.

3) Находим $\frac{(e_1,a_3)}{|e_1|^2} = \frac{1\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 8+(-1)\cdot(-7)}{1^2+2^2+2^2+(-1)^2} = \frac{30}{10} = 3$ и $\frac{(e_2,a_3)}{|e_2|^2} = \frac{2\cdot 3+3\cdot 2+(-3)\cdot 8+2\cdot(-7)}{2^2+3^2+(-3)^2+2^2} = \frac{-26}{26} = -1$. Находим $e_3 = a_3 - \frac{(e_1,a_3)}{|e_1|^2}\cdot e_1 - \frac{(e_2,a_3)}{|e_2|^2}\cdot e_2$.

$$e_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} - (-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\-6\\-6\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Таким образом, $e_3 = (2;-1;-1;-2)$.

Окончательно ортогональный базис состоит из векторов : $e_1 = (1;2;\ 2;-1)$, $e_2 = (2;3;-3;2)$ и , $e_3 = (2;-1;-1;-2)$.

Проверим ортогональность векторов: $e_1\cdot e_2 = 2+6-6-2 = 0$, $e_1\cdot e_3 = 2-2-2+2 = 0$, $e_2\cdot e_3 = 4-3+3-4 = 0$. Следовательно векторы e_1, e_2, e_3 попарно ортогональны. Можно нормировать эти векторы поделив каждый на его длину. $|e_1|=\sqrt{10}$, $|e_2|=\sqrt{26}$, $|e_3|=\sqrt{10}$,

Тогда получим ортонормированный базис: $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$,

$e_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{26}};\frac{3}{\sqrt{26}};-\frac{3}{\sqrt{26}};\frac{2}{\sqrt{26}}\right)$ и $e_3' = \left(\frac{2}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.