Лекция № 2

Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n – *ого* порядка

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение 1. Матрица A называется ***невырожденной***, если ее определитель $|A|$ отличен от нуля. В противном случае матрица называется *вырожденной.*

Матрицей *союзной* к матрице A называют матрицу

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение 2. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и A.

Свойства обратных матриц:

1. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1}=A$.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Доказательство.

❑ Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \det A\neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

Таким образом, получаем

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E.$$

Аналогично можно показать выполнение равенства

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E.$$

Полученные равенства перепишем, поделив на определитель $\det A \neq 0$

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{и} \quad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E.$$

Сравнивая полученные равенства с определением, получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.}$$

Таким образом, обратная матрица существует, значит, теорема доказана.

Замечания.

1) Из доказательства теоремы следует один из способов нахождения обратной матрицы:

- найти определитель матрицы А, убедится, что он отличен от нуля;
- найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А;
- составить обратную матрицу, пользуясь формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2) Второй способ нахождения обратной матрицы опирается на элементарные преобразования матриц, которые будут рассмотрены в следующем пункте

Пример. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A–невырожденная, так как $|A| = -2 \neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы А.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$; $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$;

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$; $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13$;

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$

Находим обратную матрицу по формуле: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$

Проверим правильность нахождения обратной матрицы:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, обратная матрица найдена верно.

Ранг матрицы. Элементарные преобразования

Пусть дана прямоугольная матрица A $(m\times n)$. Пусть k - какое-нибудь натуральное число, не превосходящее m и n. Выберем в A произвольным способом k строк с номерами $i_1<i_2<\ldots<i_k$ и k столбцов с номерами $j_1<j_2<\ldots<j_k$. Из элементов матрицы, лежащих на пересечении выбранных k строк и k столбцов, можно образовать определитель

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется ***минором*** k***-го порядка*** матрицы A.

Определение 1. ***Рангом матрицы*** A называется такое целое число r, что среди миноров r-го порядка матрицы A имеется хотя бы один, не равный нулю, а все миноры $(r+1)$-го (если их можно составить) равны нулю.

Ранг матрицы будем обозначать $rang\,A$ или *r(A).*

Из определения следует:

1) $\boldsymbol{r(A) \ll min\,(m,n)}$.

2) *r(A)*=0 только для нулевой матрицы.
3) Для квадратной матрицы *n-ого* порядка *r(A)*= *n* тогда и только тогда, когда А – невырожденная матрица.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Существует два способа нахождения ранга матрицы.

1 способ. *Метод окаймляющих миноров.* Данный метод следует из определения. Если существует минор порядка r отличный от нуля, а все миноры, содержащие в себе данный (окаймляющие данный) равны нулю, то ранг матрицы равен r.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Есть минор 2-го порядка, составленный из элементов, находящихся на пересечении 2 и 3 строк и 1 и 3 столбцов, отличный от нуля, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Все миноры 3-го порядка, содержащие в себе данный минор (их 2) равны нулю, так как содержат нулевой столбец, это миноры $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ Значит, $rang\, A = 2$.

2 способ. *Метод элементарных преобразований.* Опирается на элементарные преобразования матриц и теорему.

Определение 2. Под *элементарными преобразованиями* матрицы понимаются следующие операции:

1. умножение какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля;
2. прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;
3. перемена местами двух строк;
4. отбрасывание нулевых строк;
5. аналогичные операции над столбцами;
6. транспонирование матрицы.

Применяя к матрице A какое-либо элементарное преобразование, мы получаем новую матрицу B. Этот факт будем записывать так: $\boldsymbol{A \sim B}$.

Теорема 1. *При элементарном преобразовании ранг матрицы не меняется. Другими словами, если* : $\boldsymbol{A \sim B}$, *то* $rang\ A = rang\ B$

Определение 3. Матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & \dots & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{rr+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называется трапециевидной или ***ступенчатой***.

Теорема 2. *Всякая матрица при помощи элементарных преобразований над строками и при помощи перестановки столбцов может быть преобразована в ступенчатую.*

Доказательство. Пусть дана произвольная прямоугольная матрица. Если все ее элементы равны нулю, то она является ступенчатой.

Допустим, что не все ее элементы равны нулю. Переставляя строки и столбцы можно получить элемент $a_{11} \neq 0$. Разделим первую строку на a_{11}. Вычтем первую строку, умноженную соответственно на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$, из всех последующих строк. В результате получится матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если окажется, что все элементы a'_{ij} равны нулю, то мы достигли цели: получившаяся матрица – трапециевидная. Если же не все a'_{ij} нули, то при помощи перестановки строк и столбцов получим $a'_{22} \neq 0$ и при помощи элементарных преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если все a''_{ij} равны нулю, то теорема доказана. В противном случае процесс продолжается. В результате на некотором шаге либо исчерпаются все строки (число единиц на главной диагонали будет равно m), либо получится матрица, у которой несколько последних строк будут состоять из нулей. В обоих случаях получается трапециевидная матрица, что и требовалось доказать.

Ранг полученной ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк m, так как минор m*-ого* порядка будет равен произведению диагональных элементов квадратной матрицы, отличных от нуля.

Замечание 1. Если к матрице A ранга r приписать строку или столбец из нулей, то ранг полученной матрицы будет также равен r.

Замечание 2. Если к матрице A приписать какую-нибудь строку или столбец, то ранг полученной матрицы B может превосходить ранг исходной матрицы не более чем на одну единицу.

Таким образом, для нахождения ранга матрицы надо привести ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду и посчитать число ненулевых строк в полученной ступенчатой матрице.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Применим метод элементарных преобразований.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +(-2)\cdot \mathrm{I}_{строка}\\ +(-3)\cdot \mathrm{I}_{строка}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -5 & -1\\ 0 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +(-1)\cdot \mathrm{II}_{строка}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -5 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ A=2.$$

Литература:

1) Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 1, параграф 3.
2) Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 1 п. 1.5 - 1.6