Правила дифференцирования функций

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$- функции, имеющие производные. Тогда:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2 $(u\mathrm{v})' = u'v + uv'$

3. $(Cu)' = Cu'$, где $C = const$ 4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5. Если $y = f(u), u = u(x)$, т.е. $y = f(u(x))$, где $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0, C = const$ 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$ 3. $(a^x)' = a^x \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$ 5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ 6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$ 8. $(\cos x)' = -\sin x$ 9. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ 11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 14. $(\mathrm{arc}\,c\,\mathrm{tg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование это метод дифференцирования, при котором производная от заданной функции находится с помощью производной ее логарифма. Прежде чем отыскать производную функции $y = f(x)$, ее сначала логарифмируют (как правило, по основанию *e*), получают равенство: $\ln y = \ln f(x)$. Затем дифференцируют полученное равенство, учитывая тот факт, что в левой и правой частях под знаком логарифма стоят функции. Далее выражают производную. $\frac{y'}{y} = (\ln f(x))' \Rightarrow y' = y \cdot (\ln f(x))'$.

Данный метод применяют для дифференцирования степенно-показательных функций, т.е. функций вида $y = f(x)^{g(x)}$. Так же можно упростить процесс дифференцирования, применив метод логарифмического дифференцирования для функций, аналитическое выражение которых содержит большое число произведений, частных и степеней элементарных функций.

Рассмотрим применение данного метода на примере дифференцирования степенно-показательной функции.

Пример. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. Логарифмируем данную функцию и преобразуем правую часть с помощью свойства логарифма (показатель выносим вперед): $\ln y = \ln x^{\sin x} \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$. Дифференцируем обе части полученного равенства: $(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right).$$

Дифференцирование неявно заданной функции

Функция считается неявно заданной, если она задается уравнением вида $F(x, y) = 0$, В некоторых случаях данное уравнение является неразрешимым относительно y.

При дифференцировании неявно заданной функции находят производные правой и левой частей уравнения, рассматривая при этом y как функцию от x, и затем из полученного равенства выражают y'.

Пример. Найти производную функции, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 4xy = 0$.

Решение. Дифференцируем обе части равенства и группируем слагаемые, содержащие y' в левой части, затем выражаем производную, получаем : $\left(x^2 + y^2 - 4xy\right)' = 0' \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x + 2y \cdot y' - 4(1 \cdot y + x \cdot y') = 0 \Rightarrow 2y \cdot y' - 4xy' = 4y - 2x$, таким образом, $y' = \dfrac{4y - 2x}{2y - 4x} = \dfrac{2y - x}{y - 2x}$.

Дифференцирование параметрических функций

Говорят, что функция задана параметрически, если переменные x и y зависят от третьей переменной, например, переменной t. Тогда функцию можно задать следующей системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где параметр $t \in [a, b]$. Предположим, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$.

Тогда можно написать явную форму зависимости y от x:

$$y = y[t(x)].$$

Она является сложной функцией и естественно поставить вопрос о ее производной y'_x.

Согласно правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Следовательно,

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом, окончательно получаем формулу

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

❍ Решение: Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \frac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x = \frac{2}{3t}$. ●

В этом *можно* убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x.

Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y = \frac{2}{3t}$.

В математическом анализе для решения задач часто бывает необходимо параметрическое задание окружности. Рассмотрим его. Если окружность задана каноническим уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, то ее параметрическое уравнение будет следующим: $\begin{cases} x = x_0 + Rcost, \\ y = y_0 + Rsint \end{cases}$ $t \in [\![0; 2\pi]\!]$.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то система принимает более простой вид: $\begin{cases} x = Rcost, \\ y = Rsint \end{cases}$ $t \in [\![0; 2\pi]\!]$.

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ от функции $y = f(x)$ также является функцией от x и называется ***производной первого порядка***.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается y'' или $f''(x)$. Таким образом, $y'' = (y')'$ и т.д.

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные функции, порядок которых выше первого называют производными высших порядков.

Пример. Найти производную *n-го* порядка функции $y = e^{2x}$.

$y' = \left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$;

$y'' = \left(2e^{2x}\right)' = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}$;

$y''' = \left(4e^{2x}\right)' = 8e^{2x} = 2^3 e^{2x}$;

$\ldots$

$y^{(n)} = 2^n e^{2x}$.

Замечание. Не для всякой функции можно получить общую формулу производной *n-го* порядка,