Теория функций комплексного переменного

Лекция № 1

п. 1. Комплексные числа. Формы записи

Основные понятия. Формы записи. Геометрическая интерпретация

Выражение вида $a+bi$, где a и b − упорядоченная пара вещественных чисел, называется **комплексным числом** $z=a+bi$ или $z=(a,b)$.

Число $i=(0,1)$ называется **мнимой единицей**: $i^2=-1$.

Числа a и b называются соответственно действительной $a=\operatorname{Re} z$ и мнимой частью $b=\operatorname{Im} z$. Число вида $(a,0)$ отождествляется с действительным числом a. Число $(0,b)$ называется чисто мнимым.

Число $a-bi$ называется **сопряженным** числу $a+bi$ и обозначается $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Комплексные числа $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ **равны**, если $a=c$ и $b=d$.

Запись числа $z=a+bi$ называется **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Комплексное число $z=a+bi$ можно изображать точкой на комплексной плоскости с прямоугольными координатами (a,b) или радиус-вектором этой точки. Ось абсцисс этой плоскости называется **действительной** осью, ось ординат – **мнимой** осью. Например, число $z=2+i$ изображается точкой (2, 1) на плоскости (Х, У) (см. рис. 1). Следуя геометрической интерпретации, можно увидеть, что комплексные числа не сравниваются.

Суммой (разностью) двух комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется комплексное число: $z_1 \pm z_2 = (a \pm c, b \pm d)$.

Произведением двух комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется комплексное число: $z_1 \cdot z_2 = (ab-cd, ad+cb)$.

Частным от деления двух комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется комплексное число: $\dfrac{z_1}{z_2}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.

Полярные координаты $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ точки (a,b) (см. рис. 2) называются соответственно **модулем** и **аргументом** комплексного числа z и обозначаются $r=|z|$, $\varphi=Arg\ z$.

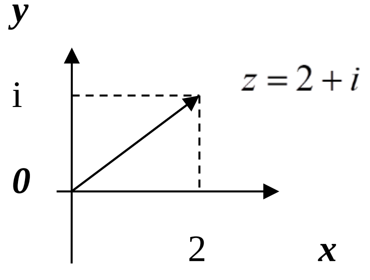


Рис. 1

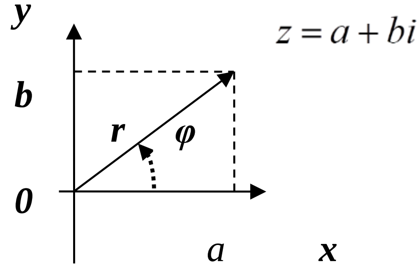


Рис. 2

Замечание. На практике при выполнении умножения комплексных чисел раскрывают скобки, как при умножении многочленов, заменяют $i^2=-1$ и приводят подобные: $(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=(a_1 a_2-b_1 b_2)+(a_1 b_2+a_2 b_1)i$.

При выполнении деления умножают числитель и знаменатель дроби на число сопряженное знаменателю и далее преобразуют и числитель и знаменатель:

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

Используя связь декартовых и полярных координат для $a=r\cos\varphi$ и $b=r\sin\varphi$, получают **тригонометрическую форму** записи любого, отличного от нуля, комплексного числа: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. (1)

Формулы для обратного соотношения:

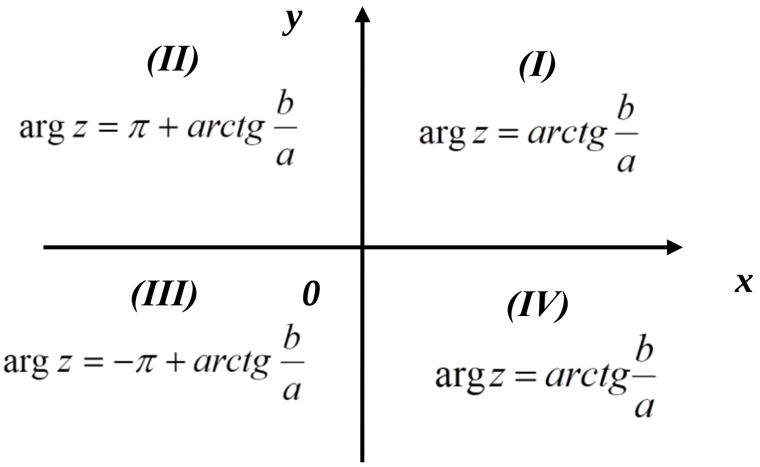
$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad tg\ Arg\ z=tg\varphi=\frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Величина $Arg\ z$ многозначна (это следует из неоднозначности задания величины угла φ для данной точки) и определена с точностью до целого числа, кратного 2π:

$$Arg\ z=\arg z+2k\pi, \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

где $\arg z$ − это главное значение аргумента, лежащее в интервале $(-\pi;\pi]$, т.е. $-\pi<\arg z\le\pi$. Следовательно, для главного значения аргумента будут справедливы следующие соотношения по координатным четвертям (см. рис. 3).

В дальнейшем под аргументом φ комплексного числа следует понимать $\arg z$ − главное значение аргумента.



(3)

Рис. 3

Синус и косинус аргумента, учитывая местоположение точки z, можно также найти по формулам:

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

С помощью **формулы Эйлера**

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (4)$$

можно перейти к **показательной форме** тригонометрического числа:

$$z=r\cdot e^{i\varphi}. \qquad (5)$$

Для выполнения действий над комплексными числами $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записанными в **тригонометрической форме** используются следующие формулы.

Умножение: $(r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.(6)

Деление: $$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_1(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (7)$$

Возведение в n-ю степень (для целой степени n комплексного числа)**:**

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (8)$$

При $r = 1$ получается **формула Муавра**:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (9)$$

Извлечение корня для **целой положительной** степени **n** комплексного числа (не равного нулю) осуществляется по формуле

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad k = \overline{0, n-1}, \quad k \in N. \qquad (10)$$

При этом имеется n различных значений корня. Соответствующие им точки лежат на одной окружности $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и делят ее на n равных частей. Аргументы двух последовательных чисел отличаются на $\frac{2\pi}{n}$.

п. 2. Множества и области на комплексной плоскости.

Окрестностью точки z_0 называется множество точек *z*, удаленных от заданной точки z_0 на расстояние, меньшее, чем заданное число ε. Окрестность обозначается $O_\varepsilon(z_0)$.

Геометрическая интерпретация - круг с центром в точке z_0 и радиусом ε, где ε - любое положительное число: $|z - z_0| < \varepsilon$.

Проколотой окрестностью точки z_0 называется множество точек *z*, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ или $O_\varepsilon(z_0) \backslash z_0$.

Точка z_0 называется **внутренней точкой** множества *M*, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью, т.е. если $z_0 \in M$ и $\exists \varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(z_0) \subset M$.

Множество называется **открытым**, если все его точки внутренние.

Точка z_0 называется **граничной точкой** множества *M*, если в любой ее окрестности есть точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие *M*.

Совокупность всех граничных точек множества называется его **границей.**

Множество вместе со своей границей называется **замкнутым.**

Область *D* называется **ограниченной**, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса *R*. В противном случае область *D* называется **неограниченной**.

Направление обхода границы называется **положительным**, если область, ограниченная контуром, при обходе расположена слева.

Открытое множество называется **связным**, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству. Связное открытое множество называется **областью**.

Например, связное множество (рис. 4 а, б).

Рис. 4

Замкнутой областью называется область с присоединенной границей.

Область D называется **односвязной,** если ее граница состоит из одной замкнутой самонепересекающейся линии, и **многосвязной,** если граница области состоит из нескольких замкнутых непересекающихся и несамопересекающихся линий (точек, дуг). Например, область А (на рис. 5) является односвязной ($n=1$), а область В является семисвязной (по числу линий $n=7$).

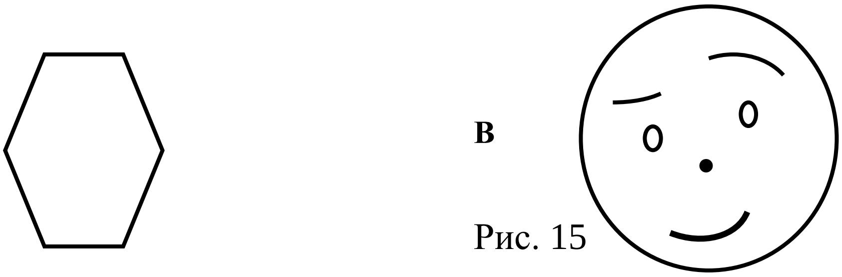


Рис. 15

Для окрестности точки z_0 (или $|z-z_0|<\varepsilon$) $n=1$; для проколотой окрестности точки z_0 ($0<|z-z_0|<\varepsilon$) $n=2$.

п. 3. Определение функции комплексного переменного

Пусть даны два множества комплексных чисел D и G. На множестве D можно **задать функцию** $f(z)$, если каждой точке z этого множества D поставить в соответствие комплексное число w множества G (рис. 6).

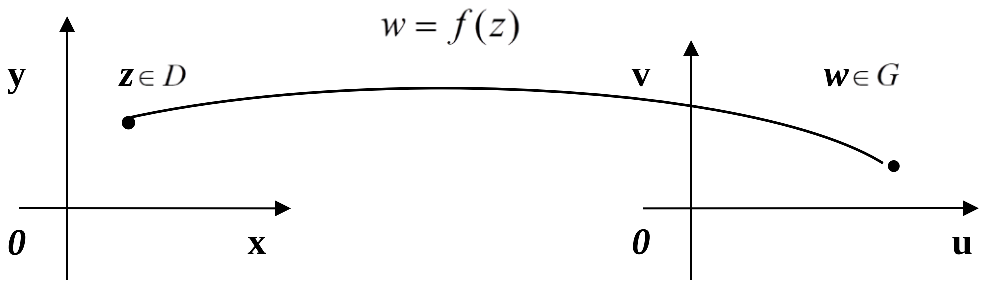


Рис. 6

Функция $w=f(z)$ каждой точке $z\in D$ комплексной плоскости (x, y) ставит в соответствие некоторую точку $w\in G$ плоскости (u,v). Точку w называют **образом** точки z, а точку z − **прообразом** точки w при отображении $w=f(z)$.

Комплексное число z можно представить в алгебраической форме $z=x+iy$, а комплексное число $w=f(z)$ можно рассматривать как $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где пара функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ есть функции переменных x и y. Функцию $u(x,y)$ называют **действительной**, а $v(x,y)$ − **мнимой** частью $f(z)$.

$$u(x,y)=\operatorname{Re} z \quad , \qquad v(x,y)=\operatorname{Im} z .$$

Множество D называется **областью определения** функции w. Область определения D функции w может быть открытой или замкнутой.

Область D называется **ограниченной,** если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R. В противном случае область D называется **неограниченной**.

Если каждому значению $z \in D$ соответствует одно значение w, то функция называется **однозначной**, в противном случае − **многозначной**.

Пример. Выделить действительную и мнимую часть данной функции $f(z) = \overline{iz} + 2z^2$.

Решение. Выполняют преобразования:

$$f(z) = \overline{i(x+iy)} + 2(x+iy)^2 = \overline{-y+ix} + 2(x^2 - y^2 + i2xy) =$$

$$= -y - ix + 2x^2 - 2y^2 + i4xy = (2x^2 - 2y^2 - y) + i(4xy - x)$$

Получают: $\operatorname{Re} f(z) = 2x^2 - 2y^2 - y .Imf(z) = 4xy - x.$

п. 4. Элементарные функции комплексного переменного

Линейная функция: $w = az + b,\ a, b \in C, \quad a \neq 0$.

Показательная функция: $w = e^Z$,

$$e^Z = e^{X+IY} = e^X(\cos y + i \sin y). \tag{11}$$

Значение функции: $e^Z \in C$, ($e^Z \neq 0$). Из определения следует, что показательная функция является однозначной.

Положив в этом равенстве $y = 0$, устанавливаем, что для действительных значений $z = x$ показательная функция e^z совпадает с показательной функцией действительного переменного: $e^z = e^x$.

Показательная функция $w = e^Z$ обладает следующими свойствами:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) =$$

$$= e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

Следствия: $\dfrac{e^{Z_1}}{e^{Z_2}} = e^{Z_1 - Z_2}$, $(e^Z)^n = e^{Zn}$, где z_1 и z_2 − любые комплексные числа.

Учитывая, что $|e^z| = e^x$, а $e^x \neq 0$, утверждаем, что показательная функция e^z нигде в нуль не обращается, т. е. $e^z \neq 0$.

Из определения следует

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to -\infty \\ (x \to -\infty)}} e^z = 0, \qquad \lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to +\infty \\ (x \to +\infty)}} e^z = \infty,$$

выражение e^z при $z \to \infty$ не имеет смысла.

Показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она является ***периодической*** с мнимым основным периодом $2\pi i$.

❑ Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

т. е. $e^{z+2\pi i} = e^z$. Отметим, что e^z не всегда больше нуля. Например, $e^{\pi i} = -1 < 0$. ■

Логарифмическая функция: $w = Ln\, z$.

Эта функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется ***логарифмом числа*** $z \neq 0$, если $e^w = z$, обозначается $w = \operatorname{Ln} z$. Так как значения показательной функции $e^w = z$ всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определена на всей плоскости z, кроме точки $z = 0$ (стало быть, имеет смысл и выражение $\operatorname{Ln}(-2)$).

Положив $z = r \cdot e^{i\varphi}, w = u + iv$, получим, согласно определению логарифмической функции, $e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi}$, или $e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}$. Отсюда имеем:

$$e^u = r,\ v = \varphi + 2k\pi,\ \text{т. е. } u = \ln r,\ v = \varphi + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Заменим u и v найденными выражениями, получим формулу:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad z \neq 0,\ k \in z. \qquad (12)$$

Из формулы (12) следует многозначность логарифмической функции. Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется **главным значением логарифма** и обозначается как $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$ и $\ln z = \ln|z|$, т. е. главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$ обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \qquad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z + 2\pi k i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

❑ Докажем, например, первое свойство:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$
$$= (\ln|z_1| + i\operatorname{Arg} z_1) + (\ln|z_2| + i\operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2. \quad ■$$

Пример. Вычислить Ln(-1).

Решение. Применим формулу (12) . Находим $|z| = |-1| = 1$, $Argz = Arg(-1) = \pi + 2\pi k, k \in Z$. Получаем Ln(-1)$= ln1 + i(\pi + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k), k \in Z$. Главное значение это $ln1 = i\pi$.

Общая показательная функция: $w=a^{z}$.

Определяется следующим образом: $a^{z}=e^{zLna}$ (13), для любого комплексного числа a

$(a\neq 0,\ a\neq 1)$.

Так как при вычислении используют Lna, то функция является многозначной.

Главное значение этой функции $a^{z}=e^{z\ln a}$.

Степенная функция: $w=z^{n}$

Если n — натуральное число, то степенная функция определяется равенством $w=z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Функция $w=z^n$ — однозначная. Если $n=\frac{1}{q}$ $(q\in\mathbb{N})$, то в этом случае

$$w=z^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{z}=\sqrt[q]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{q}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{q}\right),$$

где $k=0,1,2,\ldots,q-1$.

Здесь функция $w=z^{\frac{1}{q}}$ есть многозначная (q-значная) функция. Однозначную ветвь этой функции можно получить, придав k определенное значение, например $k=0$.

Если $n=\frac{p}{q}$, где $p,q\in\mathbb{N}$, то степенная функция определяется равенством

$$w=z^{\frac{p}{q}}=(z^{\frac{1}{q}})^p=\sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\frac{p(\arg z+2k\pi)}{q}+i\sin\frac{p(\arg z+2k\pi)}{q}\right).$$

Функция $w=z^{\frac{p}{q}}$ — многозначная.

Степенная функция $w=z^a$ с произвольным комплексным показателем $a=\alpha+i\beta$ определяется равенством

$$z^{a}=e^{aLnz} \qquad (14)$$

Функция $w=z^a$ определена для всех $z\neq 0$, является многозначной функцией. Так, $i^i=e^{i\,\mathrm{Ln}\,i}=e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$, где $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ При $k=0$ имеем: $i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Основные тригонометрические функции.

1. Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ выражаются через показательную функцию:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \qquad (15)$$

При действительных z эти определения приводят к тригонометрическим функциям действительного переменного. Так, при $z=x$ $(y=0)$

$$\sin z=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{1}{2i}\big(\cos x+i\sin x-(\cos x-i\sin x)\big)=\frac{1}{2i}2i\sin x=\sin x.$$

Тригонометрические функции обладают следующими свойствами:

а) $\cos(z+2\pi)=\cos z$, $\sin(z+2\pi)=\sin z$;

б) $\sin z$ – нечетная функция, $\cos z$ – четная функция.

2. Функции *tg z* и *ctg z* определяются равенствами:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}. \tag{16}$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного справедливы все известные формулы тригонометрии.

Докажем основное тригонометрическое тождество.

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=$$

$$=\frac{-e^{2iz}+2-e^{-2iz}+e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Отметим, что тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной плоскости z неограничены:

$$\lim_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty}\sin z=\infty, \qquad \lim_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty}\cos z=\infty.$$

Так, например, $\cos i=\dfrac{e+e^{-1}}{2}\approx 1{,}54>1$, $\cos 3i>10$.

Гиперболические функции *sh z, ch z, th z, cth z* определяются равенствами:

$$chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}; \qquad shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2};$$

$$thz=\frac{shz}{chz}; \qquad cthz=\frac{chz}{shz}. \tag{17}$$

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные к функциям $\sin z$, $\cos z$, *tg z*, *ctg z* соответственно. Так, если $z=\cos w$, то w называют арккосинусом числа z и обозначают $w=\operatorname{Arccos} z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию по формулам:

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}); \qquad \operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1});$$

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}; \qquad \operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}. \tag{18}$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы: $\arcsin z$, $\arccos z$, *arctg z*, *arcctg z*. Они называются **главными значениями.**

Покажем, как получается формула для функции $w=Arcsinz$. Так как это функция обратная к $\sin z$, получаем равенство $z=sinw$. Применим формулу (15), получим:

$$z=\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},$$

преобразуем это равенство, умножив его на $2i$ и перенеся все в одну часть, получаем:

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Вводим замену $t = e^{iw}$, $t^2 - 2izt - 1 = 0$. Решаем уравнение и выполняем обратную замену:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{(iz)^2 + 1}, \text{ т. е. } e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$\text{Тогда } iw = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \text{ или } w = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Умножаем на i числитель и знаменатель дроби, окончательно имеем формулу

$$w = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Обратные гиперболические функции $Arsh\, z$, $Arch\, z$, $Arth\, z$, $Arcth$ выражаются через логарифмическую функцию по формулам:

$$Arsh\ z = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \qquad Arch\ z = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$Arth\ z = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), z \neq \pm 1, \qquad Arcth = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right). \tag{19}$$

Логарифмическая, общая показательная, общая степенная, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции являются бесконечными, многозначными функциями в силу бесконечной значности логарифма и двузначности комплексного корня, например $\sqrt{z^2 - 1}$ в формулах (18) и (19)

Пример. Вычислить $Arc\sin 2$.

Решение. По формуле (18) при $z = 2$ записывают:

$$Arc\sin 2 = -i \cdot Ln(2i \pm \sqrt{1-4}) = -i \cdot Ln((2 \pm \sqrt{3})i).$$

Так как $\left|2 \pm \sqrt{3}\right| = 2 \pm \sqrt{3}$, $\arg(2 \pm \sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$, то в итоге получают

$$Arc\sin 2 = -i \cdot Ln((2 \pm \sqrt{3})i) = -i\left(\ln\left|2 \pm \sqrt{3}\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= (4k+1)\frac{\pi}{2} - i\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in z.$$