Лекция № 3 и 4.

Системы линейных уравнений

п. 1. Основные понятия

Линейным уравнением называют уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, где $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n, .., b}$ – некоторые числа, а $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, ... неизвестные.

Определение 1. ***Системой линейных алгебраических уравнений*** *(СЛАУ), содержащей m уравнений с n переменными, называется система вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1)$$

где числа a_{ij} *(i=1,2,...,m; j=1,2,...,n) – коэффициенты системы, числа* b_i *– свободные члены,* x_j *– неизвестные.*

СЛАУ удобно записать в компактной ***матричной форме***: $A \cdot X = B$. Здесь A – матрица коэффициентов системы или просто ***матрица системы***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица (вектор) столбец из неизвестных x_j;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица (вектор) столбец из свободных членов b_i.

Определение 2. ***Решением системы*** *называется совокупность таких n чисел* $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$*, которые при подстановке обращают все уравнения системы в тождества.*

Всякое решение системы можно записать в виде матрицы столбца $X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$.

Определение 3. Система уравнений называется ***совместной,*** *если она имеет хотя бы одно решение, и* ***несовместной****, если она не имеет ни одного решения.*

Определение 4. *Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.*

В случае неопределенной системы каждое ее решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и, если система совместна, найти ее общее решение.

Решение системы записывают либо в виде строки $(x_1; x_2; \dots x_n)$, либо в виде матрицы столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$.

п. 2. Методы решение СЛАУ

Матричный метод (метод обратной матрицы)

Методом обратной матрицы (матричным) могут быть решены системы линейных уравнений, матрица системы которых **квадратная и невырожденная**.

В матричной форме СЛАУ может быть записана в виде *AX*=*B*.

Решая данное матричное уравнение относительно *X*, получаем: $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow EX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$ $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

Следовательно, чтобы найти матрицу неизвестных *X*, необходимо найти матрицу, обратную матрице системы, и умножить ее на матрицу столбец свободных членов.

Пример. Решить систему методом обратной матрицы: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрица столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ – матрица столбец свободных членов.

Матрица *A* – невырожденная, так как $|A| = -2 \neq 0$, следовательно, матрица *A* имеет обратную. Далее находим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$; $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$;

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$; $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13$;

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$

Составляем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$

Находим решение системы по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5\cdot 5 + 5\cdot 6 + 3\cdot(-3) \\ 1\cdot 5 + (-1)\cdot 6 + (-1)\cdot(-3) \\ 11\cdot 5 + (-13)\cdot 6 + (-7)\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку: $\begin{cases} 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 1 = 5 - \text{верно} \\ 2\cdot 2 - (-1) + 1 = 6 - \text{верно} \\ 2 + 5\cdot(-1) = -3 - \text{верно} \end{cases}$.

Ответ: (2; -1; 1) (или $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$).

Решение СЛАУ по формулам Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы

Теорема Крамера. *Если определитель Δ системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение. Это решение может быть найдено по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \ldots,\quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_k - определитель, получающийся из Δ заменой k-го столбца свободными членами системы:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk-1} & b_k & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

В предыдущем пункте была получена формула $X = A^{-1} \cdot B$

Заменим матрицы, содержащиеся в уравнении соответствующими выражениями, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \dots$
$\dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ *(k=1, 2, ...n)* где Δ – определитель матрицы системы; Δ_k - определитель, полученный из определителя системы заменой *k* - го столбца столбцом свободных членов носят название **формул Крамера.**

Если определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Если определитель $\Delta = 0$ и все определители Δ_j тоже равны 0, то система имеет бесконечное множество решений.

Если определитель $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_j отличен от нуля, то система несовместна.

Формулы Крамера применяют для решения систем, матрицы которых являются квадратными и невырожденными.

Пример. Решить систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$.

Решение. Применим формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14.$$

Значит, $x_1 = \dfrac{7}{7} = 1, \quad x_2 = \dfrac{14}{7} = 2.$

Решение СЛАУ методом Гаусса

Рассмотренные выше методы решения СЛАУ не являются универсальными, т.к. применимы для решения только тех систем, матрицы которых квадратные и невырожденные. Кроме того, если матрица системы имеет порядок выше третьего решение сопряжено с вычислительными трудностями.

Метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных, является одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения СЛАУ.

Рассмотрим некоторые дополнительные математические утверждения и понятия.

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

получающаяся из матрицы A системы добавлением столбца из свободных членов, называется расширенной матрицей системы.

<u>Определение 1.</u> *Под элементарными преобразованиями системы линейных уравнений* понимаются следующие операции:

1) умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число;
3) перемена местами двух уравнений в системе.

Делая элементарное преобразование в системе, мы получаем новую систему. Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствует аналогичное преобразование над строками расширенной матрицы этой системы, и наоборот, каждому элементарному преобразованию над строками расширенной матрицы соответствует некоторое элементарное преобразование в системе. Следовательно, получается, что элементарные преобразования системы обратимы.

Определение 2. *Две системы линейных уравнений от одних и тех же неизвестных называются равносильными, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот (или если обе системы несовместны).*

Теорема 1. *При элементарных преобразованиях система переходит в равносильную систему.*

При помощи элементарных преобразований можно значительно упростить заданное решение. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений состоит в том, что при помощи элементарных преобразований система приводится к такому виду, чтобы ее матрица коэффициентов была трапециевидной или близкой к трапециевидной. После того, как матрица системы приведена к трапециевидной форме, уже не представляет труда решить вопрос о совместности системы, определить число решений и найти сами решения. Вопрос о совместности системы решают с помощью теоремы Кронекера-Капелли

Теорема 2 (Кронекера-Капелли). *Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$.

Теорема 3 (о числе решений (СЛАУ). *Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности. Тогда, если $rang\,A = n$, то система имеет единственное решение. Если $rang\,A < n$, то система имеет бесконечно много решений.*

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на 2 этапа.

1). На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, включающий следующие действия:

- путем элементарных преобразований над строками расширенную матрицу системы приводят к ступенчатой форме;
- находят ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы и, если они равны, т.е. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$, делают вывод о совместности системы, если не равны ее несовместности системы;
- для совместной системы сравнивают найденный ранг с числом неизвестных. Если $rang\,A = n$, то система имеет единственное решение. Если $rang\,A < n$, то система имеет бесконечно много решений.

2) На втором этапе метода Гаусса для случая совместной СЛАУ осуществляется так называемый обратный ход. Используя полученную в результате преобразований ступенчатую матрицу, записывают соответствующую ей систему уравнений, которую так же называют ступенчатой. При этом, возможны два случая:

- ступенчатая матрица является треугольной ($rang\,A = n$). Тогда система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \ldots, x_1)$.
- в случае, когда $rang\,A < n$, $n-r$ переменным придают произвольные значения. Эти переменные называют *свободными.* Оставшиеся r переменных, называемые *базисными* выражают единственным образом через свободные.

Замечания.

1) В качестве свободных переменных, как правило, можно выбрать не один набор переменных.
2) Из частного решения СЛАУ можно получить сколько угодно частных решений, придавая свободным переменным произвольные числовые значения.

3) Модификацией метода Гаусса является метод *Жордана-Гаусса* – метод полного исключения неизвестных.

Пример 1. Решить СЛАУ методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -3\cdot I \\ -2\cdot I \\ -I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ +4\cdot III \\ -III \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \div(-3) \\ \div(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ -2\cdot III \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Полученная матрица является ступенчатой, значит, преобразования прямого хода Гаусса завершены. Исследуем систему на совместность по теореме Кронекера-Капелли.. Так как $r(A) = r(B)$ система совместна, кроме того $rang\, A = n$, следовательно, решение единственное. Запишем систему, соответствующую полученной расширенной матрице.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ \qquad\qquad x_3 + 9x_4 = 9 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases}$$

Решения системы находим последовательно, начиная с последнего. Получаем:

$x_4 = 1$; $x_3 = 9 - 9x_4 = 9 - 9 = 0$; $x_2 = -5 - x_3 + 4x_4 = -5 - 0 + 4 = -1$;

$$x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 + 1 - 0 - 3 = -1$$

Ответ: (-1; -1; 0; 1).

Пример 2. Решить СЛАУ методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}.$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \\ -7\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \quad \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -5 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II} \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы и равен 2, то СЛАУ совместна (теорема Кронекера-Капелли), а так как количество неизвестных больше ранга, то система имеет бесконечное множество решений.

От полученной ступенчатой матрицы снова переходим к системе:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения выражаем x_2: $x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4$. Переменные, оказавшиеся в правой части (x_3, x_4), считаем свободными и находим из первого уравнения выражение через свободные переменные для x_1: $x_1 = x_2 + 5x_3 + 2 = \left(-3 - 13x_3 + 5x_4\right) + 5x_3 + 2 = -1 - 8x_3 + 5x_4$.

Ответ: ($x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4$; $x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4$; x_3; x_4), где $x_3, x_4 \in R$ – общее решение системы.

Придавая свободным неизвестным различные числовые значения, можно получить частные решения данной системы. Например, если $x_3 = 1, x_4 = 0$, то $x_1 = -1 - 8 + 0 = -9, x_2 = -3 - 13 + 0 = -16$. Таким образом, частное решение (-9; -16; 1; 0).

Отметим достоинства метода Гаусса:

- во-первых, с его помощью можно решить системы, в которых количество уравнений не совпадает с количеством неизвестных;
- во-вторых, метод применим для решения систем, имеющих вырожденную матрицу системы;
- в-третьих, метод Гаусса не требует дополнительного исследования системы на совместность по теореме Кронекера-Капелли, т.к. оно проводится параллельно в ходе применения самого метода.

п. 3 Системы линейных однородных уравнений

Линейное уравнение вида
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$
называется однородным, если в нем свободный член b равен нулю. Система уравнений называется ***однородной (СЛОУ),*** если все ее свободные члены равны нулю. Произвольная однородная система линейных уравнений имеет вид
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Однородная система всегда совместна, т.к. она имеет следующее очевидное решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0 .$$

Это решение называется *нулевым или тривиальным*. Всякое другое решение (если оно есть), у которого значение хотя бы одного неизвестного отлично от нуля, называется ненулевым или нетривиальным.

Совместность системы следует из теоремы Кронекера-Капелли.

Теорема 1. *Для того, чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных, т.е.* $\operatorname{rang} A < n$.

Доказательство.

❑ **Необходимость.**

Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \leqslant n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \neq 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Достаточность.

Пусть $r < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит, она имеет бесчисленное множество решений, т. е. имеет и ненулевые решения. ■

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Свойства однородных СЛУ

1) СЛОУ всегда совместна, т.к. имеет по крайней мере, нулевое решение.
2) Для существования ненулевых решений ранг матрицы системы должен быть меньше числа неизвестных.
3) Если Х и У – решения системы (2), то и всякая линейная комбинация этих решений $kX + lY, k, l \in R$ так же является решением системы (2).

Решения $\boldsymbol{E_1, E_2, \ldots, E_r}$ называют *линейно независимыми*, если линейная комбинация этих решений $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2, + \cdots + \lambda_r E_r = 0$, где 0 – нулевая матрица столбец, только при условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Совокупность линейно независимых решений $E_1, E_2, \ldots, E_r$ системы (2) называется ***фундаментальной (ФСР)***, если общее решение системы является линейной комбинацией решений $E_1, E_2, \ldots, E_r$.

Теорема 2. *Если ранг матрицы СЛОУ меньше числа переменных* $\operatorname{rang} A < n$, *то :*

1) *существует совокупность линейно независимых решений системы;*
2) *число линейно независимых решений равно* $n - r$;

3) *любое решение системы можно представить в виде совокупности этих линейно независимых решений.*

<u>Следствия.</u>

1) *Для нахождения множества решений СЛОУ достаточно найти какую-нибудь фундаментальную систему решений (ФСР) и составить ее линейную комбинацию.*
2) *Любая СДОУ, имеющая ненулевые решения, обладает ФСР.*

Алгоритм построения ФСР однородных СЛУ

1) Привести СЛОУ (2) к ступенчатому виду.
2) Придать свободным неизвестным $\boldsymbol{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n}$, например, следующие значения $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, после чего найти значения базисных неизвестных $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_r = \alpha_r$.

Полученное решение обозначим $E_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 1, 0, \ldots 0)$.

3) Аналогичным образом найдем другие решения $E_2, \ldots, E_r$, придавая свободным переменным соответственно значения $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+2=} \ldots = x_n = 0$ и т.д. $x_{r+1} = x_{r+2} = x_{r+n-1} = 0, x_n = 1$. Получим решения $E_1 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 1, \ldots 0)$, $\ldots, E_n = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, 0, 0, \ldots 1)$.

Рассмотренный выше метод нахождения ФСР называют методом «бегущей единицы».

С помощью найденной ФСР можно записать общее решение системы

$$X = c_1E_1 + c_2E_2 + \cdots + c_rE_r, \qquad c_1, c_{2,}, \ldots, c_r \epsilon R$$

Замечание. С ступенчатому виду приводят матрицу системы без столбца свободных членов, т.к. он нулевой и в процессе преобразований не меняется.

Пример. Найти ФСР однородной СЛО и записать общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3I \\ -4I \\ -3I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной ступенчатой матрицы равен двум, следовательно, будет два базисных решения и два свободных. Число решений, составляющих ФСР рано рангу, т.е будет равно двум. Запишем систему равносильную исходной, выберем свободные неизвестные и выразим через них базисные.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2(-6x_3 + 5x_4) - 4x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

Найдем ФСР. Применим рассмотренный выше метод «бегущей единицы». Оформим решение в виде таблицы.

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

В строках получили два частных решения, которые образуют ФСР.

Ответ: общее решение можно записать в виде $X = c_1E_1 + c_2E_2$, где $E_1 = (8;\ -6; 1; 0)$, E_2=(-7; 5; 0; 1) и $c_1, c_{2,} \epsilon R$.

Теорема 3. *Общее решение СЛУ равна сумме общего решения соответствующей ей СОЛУ и некоторого частного решения исходной системы.*

$$X = X_{\text{общ.}} + \text{X}_{\text{част.}}$$

Пример. Найти общее решение СЛОУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

Решение. Приводим расширенную матрицу СЛОУ к ступенчатому виду (решение примера 2 п.2).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot\text{I} \\ -3\cdot\text{I} \\ -7\cdot\text{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -5 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\text{II} \\ -2\cdot\text{II} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Записываем общее решение СЛОУ.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4 \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

Находим частное решение, например, если $x_3 = 1, x_4 = 0$, то $x_1 = -1 - 8 + 0 = -9, x_2 = -3 - 13 + 0 = -16$.

Таким образом, $\text{X}_{\text{част.}} = (-9;\ -16; 1; 0)$.

Находим общее решение соответствующей СЛОУ. Так как при решении СЛОУ преобразуют только матрицу системы, то воспользуемся уже выполненными выше преобразованиями расширенной матрицы и сразу запишем равносильную СЛОУ систему, заменив свободные члены нулями.

$$\begin{cases} \text{x}_1 = -8\text{x}_3 + 5\text{x}_4 \\ \text{x}_2 = -13\text{x}_3 + 5\text{x}_4 \end{cases}$$

Находи ФСР методом «бегущей единицы».

x_1	x_2	x_3	x_4
-8	5	1	0
5	-8	0	1

Получаем: $\text{X}_{\text{общ.}} = c_1E_1 + c_2E_2$, где $E_1 = (-8;\ 5; 1; 0)$, E_2=(5; -8; 0; 1) и $c_1, c_{2,} \epsilon R$.

Ответ: $X = X_{\text{общ.}} + \text{X}_{\text{част.}}$, где $\text{X}_{\text{общ.}} = c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (-8;\ 5; 1; 0)$, E_2=(5; -8; 0; 1) , $c_1, c_{2,} \epsilon R$ и $\text{X}_{\text{част.}} = (-9;\ -16; 1; 0)$.

Литература:

1) Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 1, параграф 4.
2) Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 2 п. 2.1 - 2.5