ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВПО «ВятГУ»)

Факультет автоматики и вычислительной техники

Кафедра «Электронные вычислительные машины»

Ростовцев В.С.

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ПРАКТИКУМ

Киров, 2015

УДК 516.816(07)

Р785

Рекомендовано к изданию методическим советом

Факультета автоматики и вычислительной техники

ФГБОУ ВПО «ВятГУ»

Допущено редакционно-издательской комиссией методического совета ФГБОУ ВПО «ВятГУ» в качестве практикума для студентов направления 230100.62 «Информатика и вычислительная техника» всех профилей подготовки.

Рецензент:

Доцент кафедры АТ ФГБОУ ВПО «ВятГУ»,

Кандидат технических наук В.И. Семеновых

Ростовцев В.С.

Р785

Теория принятия решений**:** практикум. - Киров: ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2015. -105 с.

Практикум по дисциплине «Теория принятия решений» предназначен для студентов 3 курса очного отделения подготовки бакалавров по направлению 230100.62 «Информатика и вычислительная техника» при подготовке практических и самостоятельных.

Технический редактор Е.В. Кайгородцева

© ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РАСЧЁТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УВЕРЕННОСТИ ДЕРЕВА ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Цель практического занятия: выработать навыки по расчёту коэффициентов уверенности согласно теории приближённых рассуждений.

1.1. Пример расчёта коэффициентов уверенности для логического дерева

Если в примере истинность посылки определена с уверенностью 0,8, а импликация выполняется в большинстве случаев, но не всегда (например, с коэффициентом определенности 0,9), тогда коэффициент определенности заключения вычисляется следующим образом:

ct (заключение) = 0,8 · 0,9 = 0,72.

Логические комбинации посылок в одном правиле. Основной вычислительный прием, который можно использовать для нахождения коэффициента определенности заключения, сводится к следующему:

ct (заключение) = ct (посылка) · ct (импликация).

Прежде всего нужно суметь оценить коэффициенты определенности посылок. Посылкой считаются все логические выражения в правиле между словами «ЕСЛИ» и «ТО». Исключение составляет простая импликация, в которой выражение состоит из атомарных посылок, каждая из которых имеет свой коэффициент определенности.

Посылки могут быть связаны между собой логическими операциями, например ЕСЛИ (e1 ИЛИ (e2 И e3)), ТО (c) или

ЕСЛИ (e1 И e2 И ((НЕ e3) ИЛИ e4)), ТО (c).

Очевидно, требуется некоторый способ оценки коэффициентов определенности этих сложных форм в понятиях их отдельных компонент. Подход заключается в том, чтобы отбросить все сложные выражения и считать все правила простыми. Есть несколько тривиальных процедур для сведения коэффициентов определенности простых логических комбинаций в одно число.

Простой логической комбинацией является конъюнкция (И) между двумя элементарными свидетельствами. Импликация выглядит так:

ЕСЛИ (e1 И e2), ТО (c)

Коэффициент определенности посылки равен коэффициенту определенности наименее надежной из посылок, т.е.

ct (e1 И e2) = min [ct (e1), ct (e2)].

Другой простой формой является правило, в котором используется дизъюнкция (ИЛИ), связывающая две части свидетельств:

ЕСЛИ (e1 ИЛИ e2), ТО (c).

Общее правило комбинирования, по которому вычисляется коэффициент определенности посылки, заключается в том, что коэффициент определенности дизъюнкции равен коэффициенту определенности ее сильнейшей части

ct (e1 ИЛИ e2) = max [ct (e1), ct (e2)].

Поддержка одного заключения множеством правил. Например, используются два правила и оба они поддерживают одно и то же заключение.

Правило 1: ЕСЛИ (e1), ТО (c) ct (заключение) = 0,9;

Правило 2: ЕСЛИ (e2), ТО (c) ct (заключение) = 0,8.

Допустим, обе посылки верны, тогда можно вычислить вероятность заключения для каждого правила по отдельности.

Несколько правил, используемых последовательно. Механизм дополнения - это другой способ вычисления коэффициента определенности заключения, поддерживаемого несколькими правилами импликации. Он используется в том случае, когда сведения о разрешенных к применению правилах поступают последовательно, а не одновременно. Например, если система задает пользователю вопросы, то использование новых правил будет происходить по очереди.

Например, известно, что заключение поддерживается двумя правилами со следующими коэффициентами определенности.

Правило 1: ЕСЛИ (e1), ТО (c) ct (заключение)= ct1.

Правило 2: ЕСЛИ (e2), ТО (c) ct (заключение)= ct2.

При применении двух правил совокупный коэффициент определенности ctotal = ct1 + ct2 - ct1 · ct2.

Теперь предположим, что появилось третье правило, поддерживающее то же заключение.

Правило 3: ЕСЛИ (e3), ТО (c) ct (заключение) = ct3.

Если все, что получено из предыдущего рассмотрения, входит в переменную ctotal и считается, что ct3 может войти в рассуждения на общих основаниях, то можно использовать стратегию дополнения для формирования измененной оценки коэффициента определенности заключения:

cnewtotal = ct3 + ctotal - ct3 · ctotal.

Перемножив все компоненты этой формулы, получается следующий результат:

cnewtotal = ct3 + (ct1 + ct2 - ct1 · ct2) - ct3 · (ct1 + ct2 - ct1 · ct2) =

= ct1 + ct2 + ct3 - ct1 · ct2 - ct1 · ct3 - ct2 · ct3 + ct1 · ct2 · ct3.

Очевидно, что это в точности тот же вывод, который был сделан ранее, комбинируя свидетельства, полученные одновременно.

Данный вывод, если его обобщить, имеет два важных приложения:

– при использовании механизма дополнения порядок поступления правил, поддерживающих заключение, не имеет значения;

– можно объединять коэффициенты определенности из поддерживающих импликаций последовательно по мере их поступления или сохранять информацию, а затем использовать ее всю сразу - результат от этого не меняется.

Практически сеть рассуждений меняется, как только поступают новые сведения. Поэтому сохранять нужно лишь совокупный коэффициент определенности для каждого заключения, что обеспечивает наиболее экономный способ поддержки информационного обеспечения ЭС.

1.2. Биполярные схемы для коэффициентов определенности

Необходимо сделать следующее: если оба коэффициента определенности положительны:

ctotal = ct1 + ct2 - ct1 · ct2,

если оба коэффициента определенности отрицательны:

ctotal = ct1 + ct2 + ct1 · ct2.

Когда отрицателен только один из коэффициентов, то

$$\text{ctotal} = \frac{\text{ct1} + \text{ct2}}{1 - \min\left[|\text{ct1}|,\ |\text{ct2}|\right]},$$

где $|ct1|$, $|ct2|$ - модули коэффициентов уверенности отдельных правил.

В том случае, если один коэффициент определенности равен 1, а другой минус 1, то ctotal = 0.

Когда два правила с небольшими коэффициентами определенности поддерживают одно заключение, коэффициент определенности заключения возрастает. Если же знаки не совпадают, то результат определяется «сильнейшим» коэффициентом, но влияние его несколько ослабляется.

Применение биполярных коэффициентов определенности может привести к нереальным результатам, если правила сформулированы неточно. Работая с одним правилом вывода, следует не забывать, что всегда используется соотношение ct (заключение) = ct (посылка) · ct (импликация).

Все правила попадают в одну из этих двух очень важных категорий. Правила первой категории будем называть *обратимыми*. Одной из характеристик такого правила является его применимость к любому значению коэффициента определенности, которое может быть связано с посылкой. Правила второй категории считаются *необратимыми*. Эти правила «работают» только при положительных значениях посылки. Если же ее значение отрицательно, правило применять нельзя (оно не имеет здравого смысла). В этом случае необратимое правило с отрицательным коэффициентом уверенности отбрасывается.

Коэффициент определенности на рис.1.1 при вершине c1 может быть вычислен следующим образом: ct (заключение c1) = 0.8 · 0.9 = 0.72.

Это простая необратимая импликация, но, поскольку коэффициент определенности посылки позитивен, правило можно применять.

Для вычисления коэффициента определенности заключения c2 задействованы два правила и оба используются без ограничений, так как они обратимы. Правило слева даст оценку коэффициента определенности для вершины графа c2 ct (заключение c2) = 0.9 · 0.9 = 0.81. Правило справа даст вторую оценку для вершины графа c2 ct (заключение c2) = – 0.3 · 0.7 = – 0.21.

Здесь приведены два поддерживающих правила, дающих оценку коэффициента определенности с противоположными знаками, поэтому для окончательного ответа применяется формула (3.3):

ct (заключение c2) = $\frac{0.81+(-0.21)}{1-0.21} = 0.74$.

Для c3 имеется два правила. Правило, связанное с левым поддеревом, не применяется, так как оно необратимо и коэффициент определенности посылки отрицателен. Правило, связанное с правым поддеревом, есть простая импликация. Она необратима и содержит отрицательную посылку. Что нужно сделать? Правило утверждает:

ЕСЛИ (НЕ e5), ТО (c3) ct(импликация) = 0,5 (nrev).

Коэффициент определенности e5 равен минус 0,3. Так как он негативен, то коэффициент определенности посылки в правиле равен 0,3. Коэффициент определенности всего предложения, поддерживающего посылку, использует процедуру, предназначенную для простой импликации: ct (заключение c3) = 0,3· 0,5=0,15.

Импликация, поддерживающая c4, включает конъюнкцию (связку И) посылок. Коэффициент определенности посылки определяется следующим образом: ct (свидетельства) =min (0,15; 0,74)= 0,15.

Поскольку правило обратимо, можно использовать посылку в любом интервале определенности. Используя этот результат, вычисляется коэффициент определенности для c4: ct (заключение c4) =0,15 · 0,9=0,13.

Теперь пройден путь вверх по дереву до того места, где можно судить об узле верхнего уровня. Здесь задействовано одно правило, в котором посылки разделены с помощью связки ИЛИ, поэтому ct (свидетельства) =max (0,72;

0,13)=0,72. Правило необратимо, но коэффициент определенности посылки позитивен и поэтому вычисление возможно.

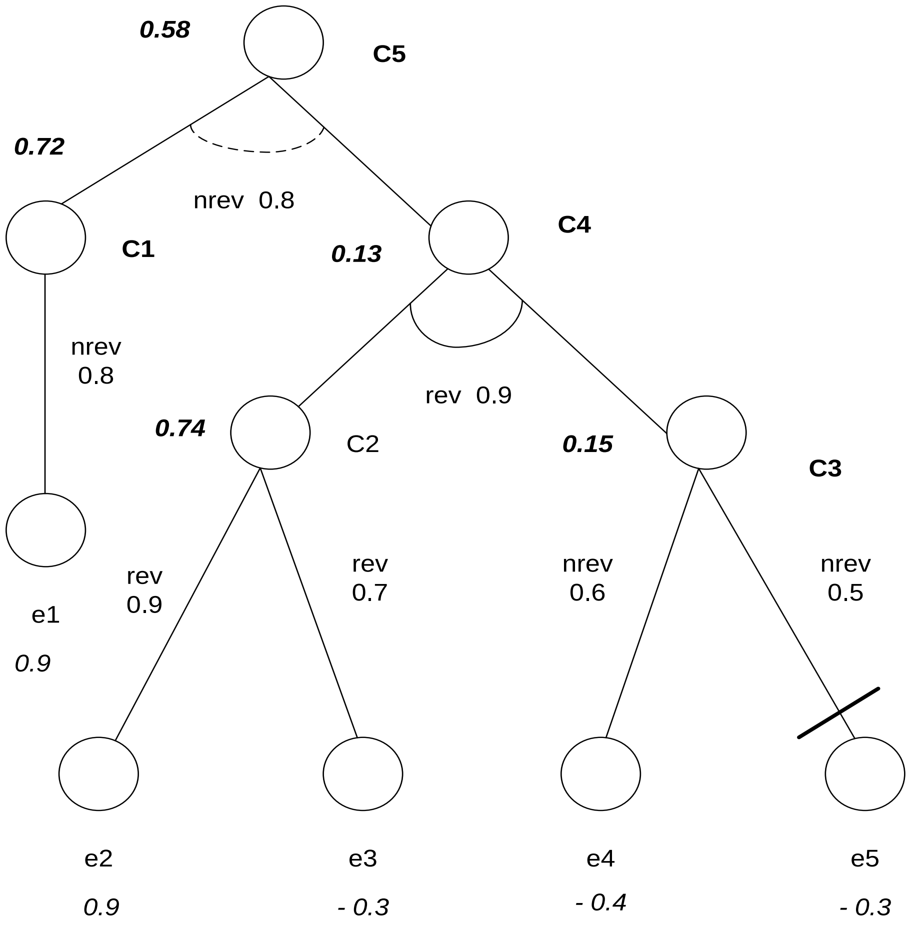


Рис. 1.1. Пример сети логического вывода

Последнее звено в цепочке рассуждений (коэффициент определенности для узла высшего уровня) вычисляется по формуле

ct (заключение c4) = 0,72 · 0,8 = 0,58.

Полученную сеть логического вывода можно использовать для механизма объяснения выбора конкретного заключения [4,5].

1.3. Пример многоступенчатых рассуждений по заданным продукционным правилам

Многоступенчатые рассуждения. До сих пор окончательное заключение отделялось от посылки одним шагом рассуждений. Более типичной является другая ситуация - сеть, в которой окончательные рассуждения отдельны от базы посылок большим числом промежуточных шагов. Такие рассуждения называются многоступенчатыми.

Можно привести следующий пример многоступенчатых рассуждений на базе правил диагностики заболевания. Число в правой части каждого правила указывает коэффициент определенности для конкретной импликации.

Если у вас грипп и вы находитесь в уязвимом возрасте, то

вызовите врача ct (импликация) = 0,9

Если у вас острый фарингит, то

вызовите врача ct (импликация) = 1,0

Если у вас простуда, то

ложитесь в постель и примите аспирин ct (импликация) = 0,4

Если у вас грипп и вы не находитесь в уязвимом возрасте, то

ложитесь в постель и примите аспирин ct (импликация) = 0,4

Если у вас лихорадка и болят мышцы, то

это грипп ct (импликация) = 0,7

Если у вас насморк, мышечные боли и нет лихорадки, то

это простуда ct (импликация) = 0,7

Если у вас в горле нарывы и есть лихорадка, то

это острый фарингит ct (импликация) = 0,8

Если вам меньше 8 или больше 60 лет, то

вы находитесь в уязвимом возрасте ct (импликация) = 0,7

Такая сеть логического вывода строится, чтобы придать правилам конкретную форму (рис. 1.2).

Сеть показывает возможности многоступенчатых рассуждении в задаче в более удобном виде, чем просто список утверждений. Здесь сделана попытка представить явным образом все шаги рассуждений для некоторой гипотетической ситуации, когда пациент имеет какое-то заболевание, родственное гриппу, и хочет получить рекомендации.

В правилах, составляющих сеть вывода, могут быть и позитивные, и негативные утверждения. В рассмотренном выше примере встретились две фразы: «есть лихорадка» и «нет лихорадки».

Поскольку здесь речь идет об одном и том же, эти фразы удобно зафиксировать в одном узле сети вывода. Для правила, где фраза появляется в негативной форме, связь отмечается перечеркивающей полосой, проходящей через узел, отображающий лихорадку. Там, где она появляется в позитивной форме, связь имеет обычный вид.

Биполярные схемы позволяют получить коэффициент определенности негативной формы путем смены знака на противоположный.

При изображении связки «И» используется сплошная дуга (например, для вершин с1, с2, с4), а при изображении связки «ИЛИ» -штриховая дуга (например, для вершины с3). Связка «НЕ» изображается короткой чертой на выбранной дуге (например, е3-с1).

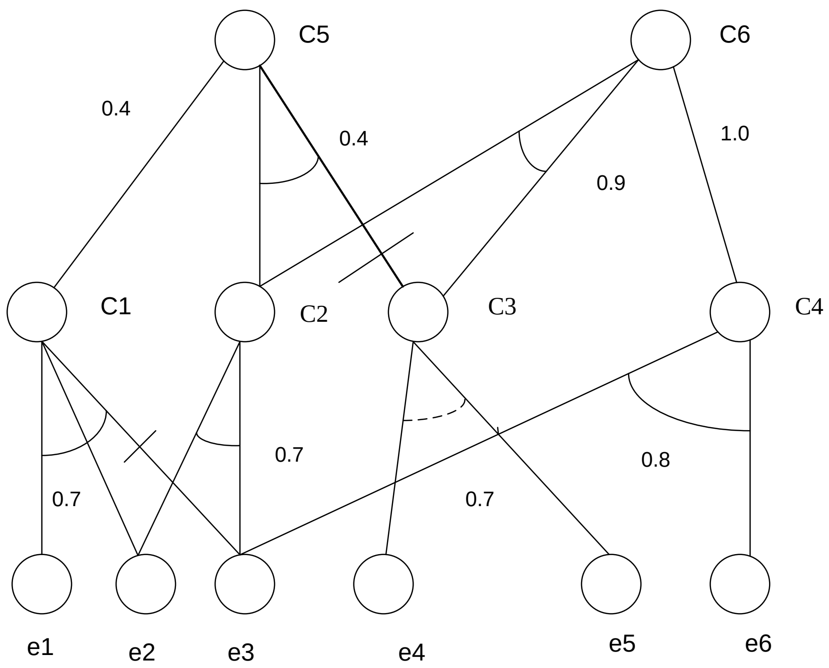
Пример, иллюстрирующий распространение коэффициентов определенности в сети, приведен на рис. 1.2. Коэффициент определенности отмечен справа от каждого узла. Отдельные первоначальные посылки, расположенные в нижней части дерева, показывают коэффициенты определенностей, которые были получены при задании необходимых вопросов и при получении данных из внешнего мира. В исходном состоянии все внутренние узлы имеют коэффициенты определенности, равные нулю, так как рассуждения пока не проводились.

Под каждым внутренним узлом стоит число, отражающее коэффициент определенности импликации, поддерживающей конкретный узел. Рядом с коэффициентом определенности импликации записывается признак rev (*для обратимых правил*) или признак nrev (*для необратимых правил*), что обозначает, будет импликация использоваться как обратимое или как необратимое правило.

Обратимое правило можно применять всегда, а необратимое нужно удалить из сети, если коэффициент определенности посылки для этого правила становится отрицательным.

Иногда правило включает отрицание некоторой посылки или заключения. На диаграммах сети вывода определенности всегда показаны для посылок или заключения до применения отрицания.

Следует начать с основания и идти вверх по дереву, чтобы оценить, что же произошло. В сети содержатся импликации разных типов: простые, И, ИЛИ, импликации с отрицаниями, а также обратимые и необратимые.



e1 - насморк; е2 - мышечные боли; е3 - лихорадка; е4 - возраст менее 8 лет; е5 - возраст более 60 лет; е6 - нарывы в горле; с1 - простуда;

с2 - грипп; с3 - уязвимый возраст; с4 - острый фарингит; с5 - лечь в постель и принять аспирин; с6 - вызвать врача

Рис. 1.2. Медицинские правила в виде сети логического вывода

1.4. Пример вычисления коэффициентов для правил в оболочке ANIES

Вычисление коэффициентов уверенности для двух правил, записанных в оболочке учебной программы ANIES.

Name1

IF Тип грузовой AND Тип_двигателя бензиновый

THEN Авто Man [0,7]

ELSE IF Проходимость бездорожье

THEN Авто Toyota_Landcrusier [0,8]

ELSE IF Производитель Россия

THEN Авто Газель [0,7]

ELSE Авто Toyota_corolla [0,9]

END

Name2

IF Количество_мест_автомобиле 2

THEN Авто Газель   [0,8]

ELSE

END

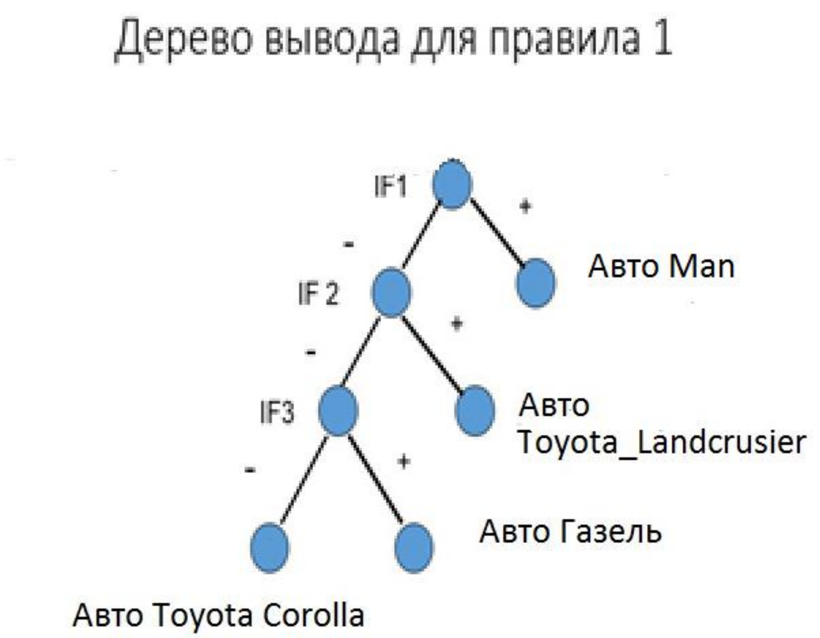


Рис. 1.3. Иллюстрация дерева логического вывода

При вводе положительных коэффициентов (Тип грузовой 0,6 и Тип_двигателя бензиновый 0,8) с первого IF (IF1) программа ANIES активирует ветку THEN и выбирается авто Man (рис.1.3), а при вводе хотя бы одного отрицательного коэффициента (Тип грузовой минус 0,6 и Тип_двигателя бензиновый 0,8) активируется ветка ELSE и управление передается на второй IF (IF2). При вводе коэффициентов уверенности (Тип грузовой 0,6 и Тип_двигателя бензиновый 0,8) выбирается ветка THEN и авто Man с коэффициентом уверенности 0,42.

При вводе коэффициентов уверенности фактов (Тип грузовой минус 0,6 и Тип_двигателя бензиновый 0,8) активируется ветка ELSE и управление передается на второй IF (IF2). При вводе коэффициента уверенности Бездорожье (0,8) со второго IF (IF2) программа ANIES активирует ветку THEN и выбирается авто Toyota_Landcrusier с коэффициентом уверенности 0,48. При вводе отрицательных коэффициентов активируется ветка ELSE и управление передается на третий IF (IF3). Пусть введены коэффициенты уверенности факта Тип грузовой минус 0,6 и Тип_двигателя бензиновый 0,8, а факт Проходимость бездорожье имеет коэффициент 0,7. В этом варианте выбирается авто Toyota_Landcrusier с коэффициентом уверенности 0,48. Минимальное значение из введенного множества фактов {0.6; 0.8; 0.7} умножается на коэффициент 0,8.

При вводе коэффициентов (Тип грузовой минус 0,6; Тип_двигателя бензиновый 0,8; Бездорожье минус 0,7; Страна Россия 0,8) с третьего IF (IF3) программа ANIES активирует ветку THEN и выбирается авто Газель с коэффициентом уверенности 0,42. При вводе отрицательного коэффициента (Страна Россия минус 0,8) активируется ветка ELSE и выбирается авто Toyota_corolla с коэффициентом 0,54.

Name2

Согласно *Name2* Посылка Количество_мест 2 имеет коэффициент 0,7.

В результате второе правило выберет Авто Газель с коэффициентом

К2=0,7*0,8=0,56

Теперь вычисляется интегральный коэффициент от двух сработавших правил. Пусть коэффициент уверенности первого правила Авто Газель равен К1=0,42. Оба правила имеют положительные коэффициенты уверенности

К1=0,42 и К2=0,56. Следовательно, итоговое значение от двух правил определяется по формуле К = К1+К2-К1*К2. После подстановки К1=0,42 и К2=0,56 получается К =0,42+0,56-0,42*0,56=0,7756.

1.5. Практические упражнения

Выполнить расчет коэффициентов уверенности для заключений С1 и С2 дерева логического вывода, приведенных на рисунке 1.4, 1.5 и в таблицах 1.4 и 1.5. Привести формулы расчета и комментарий. Обратить внимание на обратимые и необратимые правила.

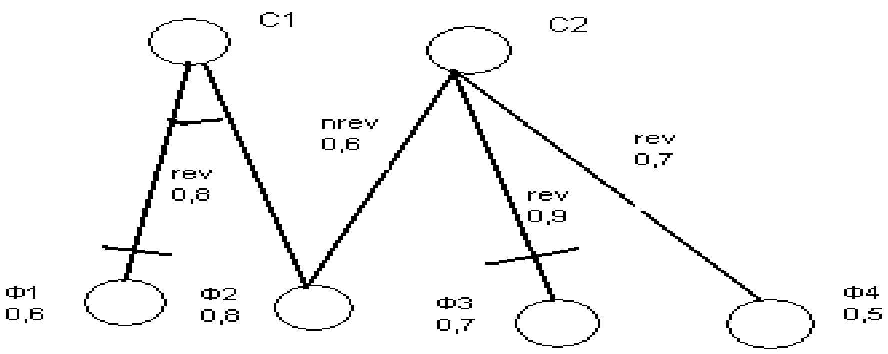


Рисунок 1.4

Таблица 1.4

Вариант	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4
1	0,6	0,8	0,7	0,5
2	0,8	-0,6	-0,5	-0,8
3	-0,5	-0,7	-0,8	-0,9
4	-0,8	0,5	0,9	0,4

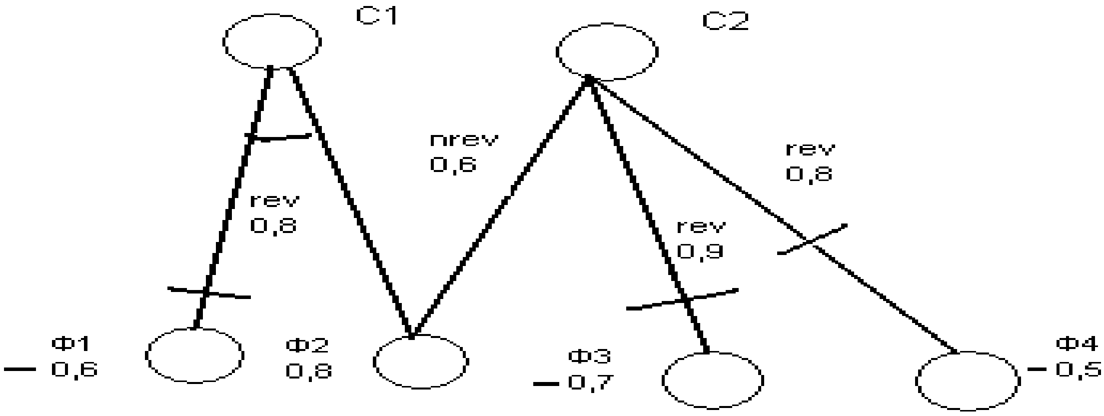


Рисунок 1.5

Таблица 1.5

Вариант	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4
1	-0,8	0,5	0,9	0,4
2	0,8	-0,7	-0,6	-0,7
3	-0,3	0,6	0,8	-0,9
4	0,5	0,7	0,7	-0,5

Контрольные вопросы

1. В каких ситуациях возникает неопределенность про формировании продукционных правил?
2. Почему отказались от теории вероятностей в пользу теории приближенных рассуждений?
3. Формулы для подсчета коэффициента уверенности в простой импликации, для связки «И», «ИЛИ», «НЕ».
4. Формулы для подсчета коэффициента уверенности для нескольких правил в поддержку одного заключения.
5. Привести понятие обратимого и необратимого правила.
6. Порядок подсчета коэффициента уверенности в правилах инструментальной системы ANIES.
7. Порядок подсчета коэффициента уверенности в правилах

   Если НЕ е1 И е2, То С [0.8].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ, ОТНОСЯЩИХСЯ К МНОЖЕСТВУ ЭДЖВОРТА-ПАРЕТО

Цель практического занятия: выработать навыки по определению решений на множестве Эджворта-Парето

2.1. Пример определения множества Эджворта-Парето

Варианты выбора альтернатив представлены в таблице 2.1. При оценке альтернатив использованы два критерия: стоимость и привлекательность.

Введем следующее определение. Назовем альтернативу **А** доминирующей по отношению к альтернативе **В**, если по всем критериям оценки альтернативы **А** не хуже, чем альтернативы **В**, а хотя бы по одному критерию оценка **А** лучше. При этом альтернатива **В** называется доминируемой альтернативой.

Таблица 2.1

Оценки альтернативных вариантов туров

Альтернатива	Критерий	
	Стоимость	Привлекательность,
1.Океанские	Небольшая	Малая
2.Скандинавия	Высокая	Большая
3.Египет	Небольшая	Большая

Предположим, что по какой-то причине поездка в Египет оказалась невозможной (например, из-за участившихся нападений на туристов). Туры в Скандинавию и на Океанские острова не находятся в отношении доминирования. По одному из критериев лучше альтернатива 2, по другому — альтернатива 1.

Введем следующее определение: альтернативы относятся к множеству Эджворта–Парето (Э–П), если каждая из них превосходит любую другую по какому-то из критериев.

Множество Эджворта-Парето названо так по именам ученых, впервые обративших внимание на альтернативы, не уступающие друг другу по критериальным оценкам, т. е. на альтернативы, не находящиеся в отношении доминирования. Альтернативы, принадлежащие множеству Э–П, принято называть несравнимыми. Их действительно невозможно сравнить непосредственно на основе критериальных оценок. Но если решение должно быть принято (например, супруги должны из многих туров выбрать один), то сравнение альтернатив, принадлежащих множеству Э–П, возможно на основе дополнительной информации.

Нетрудно убедиться, что множество Э–П включает в себя наиболее «контрастные» альтернативы, сложные для сравнения. Если стоит задача выбора одной лучшей альтернативы, то она обязательно принадлежит множеству Э–П. Поэтому во многих методах принятия решений очень важен этап выделения множества Э–П из всего множества заданных альтернатив.

Один из возможных способов решения этой задачи состоит в попарном сравнении альтернатив и исключении доминируемых альтернатив. Задача выделения множества Э–П обычно рассматривается как предварительная. За ней следует наиболее существенный этап принятия решений.

Рассмотрим второй пример. Имеются три альтернативных варианта создания информационных систем (ИС) с различными характеристиками стоимости и надежности, приведёнными в таблице 2.2. Буквами «В» и «С» обозначаются параметры сравнения «высокий», «средний».

К множеству Эджворта-Парето относятся те альтернативы, которые не доминируют по какому-либо критерию, т.е. они являются несравнимыми.

ИС3 доминирует над ИС1 по критерию стоимости. ИС2 и ИС3 не доминируют друг над другом и относятся к множеству Эджворта – Парето.

Поиск оптимального варианта из множества Эджворта – Парето невозможен без дополнительной информации. Например, при ограничении бюджета на стоимость разработки ИС можно выбрать один вариант.

Таблица 2.2

Оценки альтернатив создания информационных систем

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ИС1	В	С
ИС2	В	В
ИС3	С	С

К множеству Эджворта–Парето относятся те альтернативы, которые не доминируют по какому-либо критерию, т.е. они являются несравнимыми.

ИС3 доминирует над ИС1 по критерию стоимости. ИС2 и ИС3 не доминируют друг над другом и относятся к множеству Эджворта – Парето.

Поиск оптимального варианта из множества Эджворта – Парето невозможен без дополнительной информации. Например, при ограничении бюджета на стоимость разработки ИС можно выбрать один вариант.

2.2. Практические упражнения

Задача 1. Какие альтернативы (ЭВМ), из приведенных в табл.2.3, относятся к множеству Эджворта–Парето. Обоснуйте выбор альтернатив множества Эджворта–Парето.

Таблица 2.3

Оценки альтернатив создания ЭВМ

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ЭВМ1	Средняя	Высокая
ЭВМ2	Средняя	Средняя
ЭВМ3	Низкая	Средняя

Ответ: если требуется выбрать наилучшую альтернативу, то необходимо искать доминирующие альтернативы. ЭВМ3 доминирует над ЭВМ2 и ЭВМ1 доминирует над ЭВМ2. К множестве Э–П относятся ЭВМ1 и ЭВМ3. Это несравнимые альтернативы. Для окончательного выбора необходима дополнительная информация.

Задача 2. Какие альтернативы (ЭВМ), из приведенных ниже относятся к множеству Эджворта-Парето и почему (табл.2.4)?

Таблица 2.4

Оценки альтернатив создания ЭВМ

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ЭВМ1	Средняя	Высокая
ЭВМ2	Низкая	Высокая
ЭВМ3	Низкая	Средняя

Задача 3. Какие альтернативы (ЭВМ), из приведенных ниже относятся к множеству Эджворта-Парето и почему (табл.2.5)?

Таблица 2.5

Оценки альтернатив создания ЭВМ

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ЭВМ1	Средняя	Высокая
ЭВМ2	Низкая	Высокая
ЭВМ3	Низкая	Средняя

Контрольные вопросы

1. Определение доминируемой альтернативы. Привести пример.
2. Определение доминирующей альтернативы. Привести пример.
3. Определение альтернатив, которые относятся к множеству Эджворта–Парето. Привести пример.
4. Каким образом выбрать альтернативу, относящуюся к множеству Эджворта–Парето.
5. Могут ли три альтернативы относиться к множеству Эджворта–Парето.

3. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ С ВАЗАМИ

Цель практического занятия: выработать навыки построения и «сворачивания» дерева решений.

Теория полезности экспериментально исследовалась в так называемых задачах с вазами (или урнами). Ваза — это непрозрачный сосуд, в котором находится определенное (известное лишь организатору эксперимента) количество шаров различного цвета. Задачи с вазами типичны для группы наиболее простых задач принятия решений — задач статистического типа. Для решения этих задач надо знать элементарные начала теории вероятностей. Человек делает выбор в этих задачах, основываясь на расчетах. Варианты действий выражены в наиболее простом виде.

3.1 Пример решения задачи с вазами без учета шаров

Типовая задача для испытуемого может быть представлена следующим образом. Перед испытуемым ставится ваза, которая может быть вазой 1-го или 2-го типа. Дается следующая информация: сколько имеется у экспериментатора ваз 1-го и 2-го типов; сколько черных и красных шаров в вазах 1-го и 2-го типов, какие выигрыши ожидают испытуемого, если он угадает, какого типа ваза; какие проигрыши ожидают его, если он ошибется. После получения такой информации испытуемый должен сделать выбор: назвать, к какому типу принадлежит поставленная перед ним ваза.

Пусть, например, экспериментатор случайным образом выбирает вазу для испытуемого из множества, содержащего 700 ваз 1-го типа и 300 ваз 2-го типа. Пусть в вазе 1-го типа содержится 6 красных шаров и 4 черных. В вазе 2-го типа содержится 3 красных и 7 черных шаров. Если перед испытуемым находится ваза 1-го типа, и он угадает это, то получит выигрыш 350 условных единиц (у. е.), если не угадает, его проигрыш составит 50 у. е. Если перед ним ваза 2-го типа и он это угадает, то получит выигрыш 500 у. е., если не угадает, его проигрыш составит 100 у. е. Испытуемый может предпринять одно из следующих действий:

d1 — сказать, что ваза 1-го типа;

d2 — сказать, что ваза 2-го типа.

Условия задачи можно представить в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Представление задачи с вазами

Тип вазы	Вероятность выбора вазы данного типа	Выигрыш при действии	
		d1	d2
1	0,7	350	-100
2	0,3	-50	500

Что же делать человеку? Теория полезности отвечает: оценить среднюю (ожидаемую) полезность каждого из действий и выбрать действие с максимальной ожидаемой полезностью. В соответствии с этой рекомендацией можно определить среднее значение выигрыша для каждого из действий:

U(d1)= 0,7 * 350 - 0,3 * 50=230 у.е.;

U(d2)= 0,3 * 500 - 0,7 * 100=80 у.е.

Следовательно, разумный человек выберет действие d1, а не действие d2.

Из этого примера следует общий рецепт действий для рационального человека: определить исходы, помножить их на соответствующие вероятности, получить ожидаемую полезность и выбрать действие с наибольшей полезностью.

Задачи с вазами помогут нам познакомиться с построением деревьев решений и принятием решений с их помощью.

Преподаватель дает задание студентам отобразить решение задачи по теории полезности с помощью дерева решений.

При наличии затруднений в выполнении задания, преподаватель указывает студентам на соответствующие материалы, изложенные в лекции, а при их отсутствии у студентов, или возникновении проблемных вопросов, в ходе дискуссии со студентами, учит их анализировать процессы управления и делать выводы, подводя их к самостоятельному определению работ, выполняемых в целях организации управления.

После выполнения задания всеми студентами, преподаватель показывает на экране (на доске) или излагает правильное решение задачи и выявленные ошибки.

Приведенная таблица 3.1 может быть представлена в виде дерева решений (рис.3.1). На этом дереве квадратик означает место, где решение принимает человек, а светлый кружок — место, где все решает случай. На ветвях дерева написаны уже знакомые нам значения вероятностей, а справа у конечных ветвей — значения исходов (результаты).

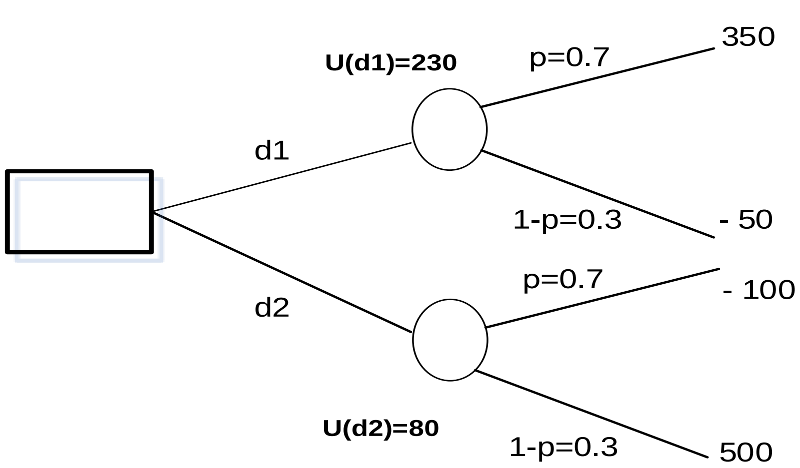


Рис.3.1. Иллюстрация дерева решений

Для чего нужно дерево решений? Мы можем использовать его для представления своих возможных действий и для нахождения последовательности правильных решений, ведущих к максимальной ожидаемой полезности.

3.2 Пример решения задачи с вазами с учетом шаров

В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Формулировка задачи с вазами. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А –55 штук, а ваз типа Б – 45. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 300$, а если не угадали –платите штраф 170 $. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 200$, а если не угадали – платите штраф 120 $.

Решение: В соответствии с теорией полезности определить среднее значение выигрыша каждого из действий.

U(А)=0,55 * 300+ 0,45* (–170)= 165-76,5=88,5 $

U(Б)= 0,45*200+0,55*(–120)=90- 66=24 $

Следовательно, разумный человек должен выбрать вазу типа А.

3.3. Построение и «сворачивание» дерева решений

Предоставим лицу, принимающему решение (ЛПР), который выбирает между действиями **d1** и **d2**, дополнительные возможности. Пусть он может до своего ответа вытащить за определенную плату один шар из вазы, причем после вытаскивания шар кладется обратно в вазу. Плата за вытаскивание одного шара 100 у.е.

Дерево решений с двумя его основными ветвями представлено на рисунке 2.2. Вот теперь вопрос о том, какое решение следует принимать, стал сложнее: необходимо решить, стоит ли вытаскивать шар и какой ответ дать после вытаскивания красного или черного шара. При принятии этих решений нам окажет существенную помощь известный в теории вероятностей (и в теории статистических решений) способ подсчета изменения вероятностей событий после получения дополнительной информации.

Пример решения задачи. Провести «сворачивание дерева решений», приведенного на рисунке 3.2. ЛПР должен выбрать одно из решений: d1 – выбрать вазу 1-го типа; d2 - выбрать вазу 2-го типа. Вытаскивать шар или нет?

Ваз 1-го типа - 60, а ваз 2-го типа - 40. В вазе 1-го типа 2 красных и 3 черных шара. В вазе 2-го типа 3 красных и 2 черных шара. Чтобы определить, какая ваза перед ЛПР, ему предлагается вытащить из вазы шар и снова положить его обратно за плату 100 у.е.

Решение

Вероятность вытащить красный шар из вазы 1-го типа Рк (В1)=0,4.

Вероятность вытащить красный шар из вазы 2-го типа Рк (В2)=0,6.

Вероятность вытащить красный шар из вазы 1-го типа с учетом количества ваз Рк (В1)=2/5 ×0,6=0,24.

Вероятность вытащить черный шар из вазы 1-го типа с учетом количества ваз Рч (В1) =3/5 ×0,6=0,36.

Вероятность вытащить красный шар из вазы 2-го типа Рк (В2) =3/5 × 0,4=0,24.

Вероятность вытащить черный шар из вазы 2-го типа $Рч (В2) = 2/5 \times 0,4 = 0,16$.

Вероятность вытащить красный шар из ваз $Рк = 0,24+0,24 = 0,48$.

Вероятность вытащить черный шар из ваз $Рч = 0,52$.

Вероятность того, что это ваза 1-го типа $Р(В1) = 60/100 = 0,6$.

Вероятность того, что это ваза 2-го типа $Р(В2) = 40/100 = 0,4$.

Вероятность того, что это ваза 1-го типа после вытаскивания красного шара $Р(В1/к)$.

Вероятность того, что это ваза 1-го типа после вытаскивания черного шара $Р(В1/ч)$.

Вероятность того, что это ваза 2-го типа после вытаскивания красного шара $Р(В2/к)$.

Вероятность того, что это ваза 2-го типа после вытаскивания черного шара $Р(В2/ч)$.

По формуле Байеса находятся вероятности $Р(В1/к)$, $Р(В1/ч)$, $(В2/к)$, $Р(В2/к)$. $Р(В1/к) = [Рк (В1) \times Р(В1)] / [Рк (В1) \times Р(В1)+ Рк (В2) \times Р(В2)]$

$Р(В1/к) = 0,4\times0,6 / [0,4\times0,6 + 0,6 \times0,4] = 0,24/(0,24+0,24) = 0,5$ $Р(В1/ч) = 0,5$ $Р(В2/к) = [Рк (В2) \times Р(В2)] / [Рк (В2) \times Р(В2)+ Рк (В1) \times Р(В1)]$ $Р(В2/к) = [0,6\times0,4] / [0,6\times0,4 + 0,4 \times0,6] = 0,24/(0,24+0,24) = 0,5$ $Р(В2/ч) = 0,5$

$Р(В1/ч) = Рч (В1) \times Р(В1)/[Рч (В1) \times Р(В1)+ Рч (В2) \times Р(В2)]$

$Р(В1/ч) = 0,6\times0,6 / [0,6\times0,6 + 0,4 \times0,4] = 0,36/(0,36+0,16) = 0,69$

$Р(В1/ч) = 0,69$ $Р(В2/ч) = 0,31$

По дереву решений идти от конечных веток к его корню. Там, где есть случайность (кружок), найти среднее значение функции полезности.

Там, где квадратик (этап принятия решения), выбрать ветку с наибольшей ожидаемой полезностью, а другую отсечь двумя черточками.

Так как полезность верхней ветки выше (100 больше 34,6), то шар вытаскивать нецелесообразно и ЛПР должен выбрать вазу 2-го типа.

Теперь мы имеем всю информацию, необходимую для принятия решений. На рисунке 3.2 показаны две основные ветви дерева решений, причем верхняя ветка повторяет дерево решений на рисунке 4.1. Квадратик 1 слева соответствует первому решению — вытаскивать шар или нет. В случае отказа от вытаскивания шара используется верхняя основная ветвь. Решению вытаскивать шар соответствует нижняя ветвь, начинающаяся со случайного события (кружок). В квадратиках 2, 3, 4 принимаются решения о выборе одной из двух стратегий: d1 или d2. Далее все решает элемент случайности (кружки). Над кружками и прямоугольниками записываются рассчитанные значения полезности. 96=0.6*200 –0.4*60. 100=0.4*400–0.6*100 .

Ветка d2 выгоднее, так как её функция полезности 100 выше 96.

Есть три простых правила выбора оптимальной (по критерию максимума ожидаемой полезности) последовательности решений на основе дерева решений:

- двигаться от конечных ветвей дерева к его корню;
- там, где есть случайность (кружок), вычисляется среднее значение полезности;
- там, где есть этап принятия решений (квадратик), выбирается ветвь с наибольшей ожидаемой полезностью, а другая отсекается двумя черточками. Этот процесс называется «сворачиванием» дерева решений.

На этом рисунке над кружками указаны средние значения полезности, двумя черточками отсечены ветви с меньшим значением ожидаемой полезности. Наилучший вариант действий: шар не вытаскивать и выбирать действие d1. Этот вариант соответствует самому верхнему пути дерева решений на рис.3.4. Такая процедура нахождения оптимального пути на деревьях решений получила название «сворачивания» дерева решений.

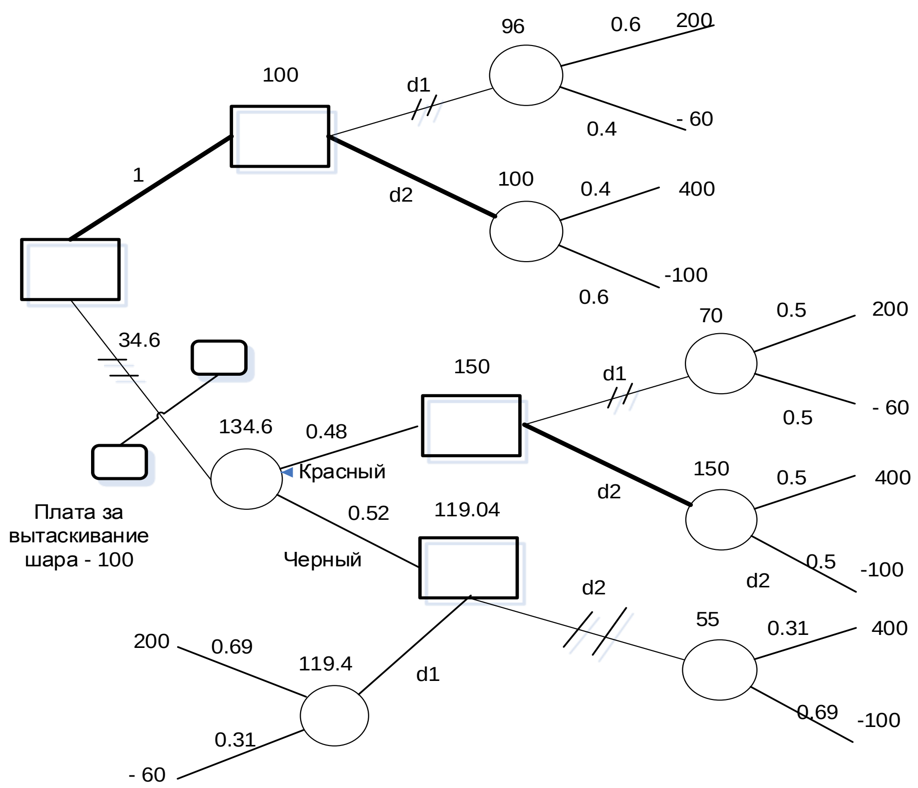


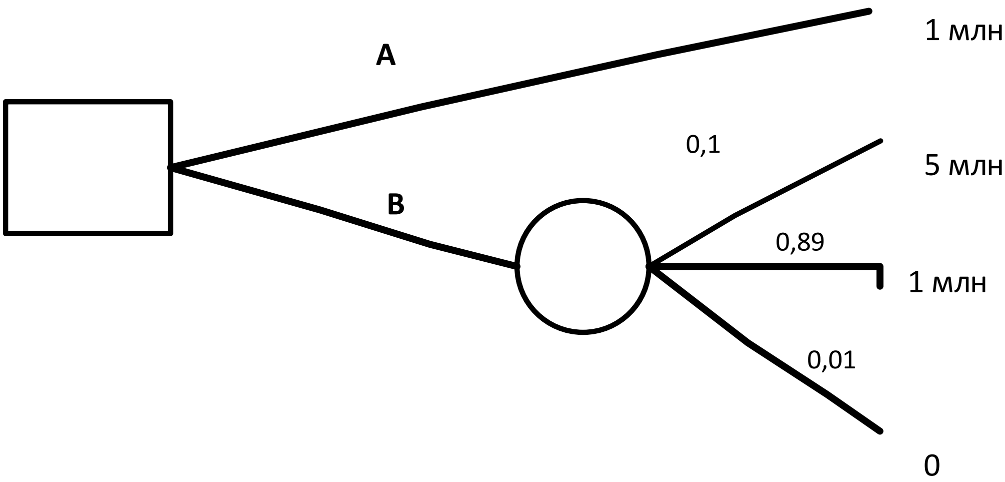
Рис. 3.2. Дерево решений

Деревья решений при заданных числовых значениях вероятностей и исходов позволяют осуществить выбор той стратегии (последовательности действий), при которой достигается наибольший выигрыш, т.е. достигается максимум функции полезности ЛПР.

3.4. Парадокс Алле и нерациональное поведение людей

Демонстрация на примерах парадокса Алле и нерационального поведение людей. Пример парадокса Алле (предложенный французским ученым М. Алле), представленный двумя лотереями на рис.3.3.

<u>Лотерея 1</u>



<u>Лотерея 2</u>

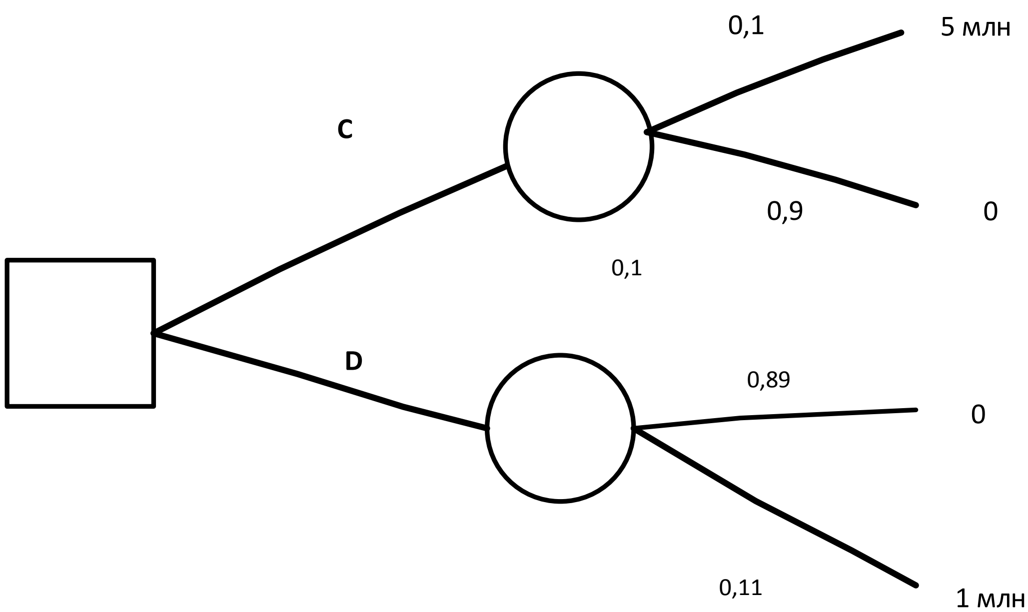


Рис. 3.3

Обозначим: U(5 млн)=1; U(l млн)=U U(0)=0. В левой лотерее есть выбор между действиями А (получить 1 млн) и В (согласиться на лотерею). Подавляющее большинство людей предпочитает А. Из этого следует U>0,1 ⊗ 1+0,89 ⊗ U или U>10/11.

В правой лотерее есть выбор между действиями С и D (две лотереи). Подавляющее большинство людей предпочитает действие С (почти та же вероятность проиграть, но выигрыш больше). Тогда 1 ⊗ 0,1>0,11 ⊗ U, т. е. U<10/11. Совершая такой выбор, люди действуют не в соответствии с функцией полезности.

Приведем еще один пример. Рассмотрим две лотереи, показанные на рисунке 3.4. Легко убедиться в том, что средняя цена лотерей одинакова. Но это не означает, что людям безразлично, какую из них выбрать. Подчеркнем, что свобода выбора остается за ЛПР. Предъявление различным группам людей пар лотерей показало, что люди предпочитают правую лотерею, где при той же средней цене риск проигрыша исключен.

Как же можно объяснить такое поведение людей? Может быть, стоит усомниться в существовании функции полезности? Этот вопрос становится еще более существенным для задач принятия решений, в которых нет информации для объективного подсчета вероятностей. В таких задачах (а их гораздо больше, чем формальных задач с вазами) только эксперты могут дать значения вероятностей. Ясно, что эти значения субъективны. Потребовалось формальное обоснование теории полезности с субъективными вероятностями — теории субъективной ожидаемой полезности [4]. Она также построена аксиоматически.

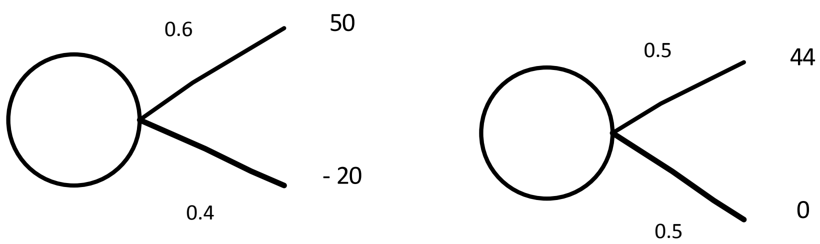


Рис.3.4

Но и после построения этой теории остаются те же вопросы о причинах парадоксального поведения людей в задачах принятия решений, где в качестве метода выбора использовались деревья решений и максимизация субъективной ожидаемой полезности.

3.5. Практические упражнения

Задача 1. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А – 60 штук, а ваз типа Б – 40. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 200 у.е., а если не угадали –платите штраф 70 у.е. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 100 у.е., а если не угадали – платите штраф 20 у.е.

Задача 2. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А –200 штук, а ваз типа Б – 400. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 500 у.е., а если не угадали –платите штраф 270 у.е. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 600 у.е., а если не угадали – платите штраф 320 у.е.

Задача 3. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А – 60 штук, а ваз типа Б –40. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 200 у.е., а если не угадали –платите штраф 70 у.е. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 100 у.е., а если не угадали – платите штраф 80 у.е.

Задача 4. Как нужно изменить поощрения и наказания по угадыванию типа вазы, чтобы ЛПР выбрал нижнюю ветку в предыдущей задаче на рис. 3.2.

Задача 5. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Формулировка задачи с вазами. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А –60 штук, а ваз типа Б –40. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 200$, а если не угадали –платите штраф 70 $. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 100$, а если не угадали – платите штраф 20 $.

Задача 6. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Формулировка задачи с вазами. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А –200 штук, а ваз типа Б –400. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 500$, а если не угадали –платите штраф 270 $. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 600$, а если не угадали – платите штраф 320 $.

Задача 7. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Формулировка задачи с вазами. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А –60 штук, а ваз типа Б –40. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 200$, а если не угадали –платите штраф 70 $. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 100$, а если не угадали – платите штраф 80 $.

Задача 8. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d1 или d2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Формулировка задачи с вазами. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А –200 штук, а ваз типа Б –400. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 500$, а если не угадали –платите штраф 270 $. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 600$, а если не угадали – платите штраф 320 $.

4. ТЕОРИЯ ИГР В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

Цель практического занятия: выработать навыки решения задач по теории игр.

4.1. Верхняя и нижняя цена игры. Седловая точка

Рассмотрим пример, заимствованный из книги Е.С. Вентцель «Элементы теории игр». В нашем распоряжении имеется три вида вооружения A1, A2, A3; у противника три вида самолетов B1, B2, B3.

Известно, что при применении вооружения A1 самолеты B1, B2, B3 поражаются с вероятностями 0,9; 0,4; 0,2; при применении вооружения A2 самолеты B1, B2, B3 поражаются с вероятностями 0,3; 0,6; 0,8; при применении вооружения A3 самолеты B1, B2, B3 поражаются с вероятностями 0,5; 0,7; 0,2. Требуется сформулировать конфликтную ситуацию в терминах теории игр.

Решение. Конфликтную ситуацию можно рассматривать как игру 3×3 с двумя личными ходами и одним случайным. Личный ход противника – выбор типа самолета. Наш личный ход – выбор типа вооружения. Случайный ход – применение вооружения. Этот ход может закончится поражением или не поражением самолета. Нашими стратегиями являются три варианта применения типов вооружения. Стратегиями противника – три варианта применения типов самолета. Наш выигрыш равен единице, если самолет поражен, и нулю в противном случае. Среднее значение выигрыша при каждой заданной паре стратегий есть вероятность поражения самолета данным вооружением. Платежная матрица представлена в таблице 4.1.

Решить игру – значит найти для каждого игрока наилучшие стратегии, которые обеспечат ему наибольший выигрыш или наименьший проигрыш.

Пусть требуется найти оптимальную стратегию для игрока А. Проанализируем последовательно каждую из его стратегий, начиная с A1.

Если игрок А выбрал стратегию Aj, то он должен рассчитывать на то, что игрок В ответит на нее той из своих стратегий, для которой его (игрока А) выигрыш aji будет минимален. Выберем это значение выигрыша, т.е. минимальное из чисел aji в j-й строке:

$$a_j = \min_i a_{ji}.$$

Избегая всякого риска, игрок А должен выбрать из стратегий Aj, для которой значение aj является максимальным:

$$A = \max_j a_j,$$

$$a = \max_j \min_i a_{ji}.$$

Выражение «а» определяет нижнюю цену игры (максиминный выигрыш) и тот гарантированный минимум, который получит игрок А, придерживаясь наиболее осторожной из своих стратегий. Для нашего примера (см. табл.4.1) вначале находятся минимальные значения в каждой строке (0,2; 0,3; 0,2), а затем среди них максимальное значение а=0,3. Это и есть нижняя цена игры. Стратегия, соответствующая нижней цене игры, называется максиминной стратегией.

Таблица 4.1

Платежная матрица

	B1	B2	B3
A1	0,9	0,4	0,2
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,5	0,7	0,2

Игрок В заинтересован в том, чтобы свести выигрыш игрока А к минимуму. Следовательно, он должен проанализировать каждую из своих стратегий с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии:

$$b_i = \max a_{ji},$$

j

$$b = \min_{i} b_i,$$

$$b = \min_{i} \max_{j} a_{ji}.$$

Выражение «b» определяет верхнюю цену игры (минимаксный выигрыш). Для нашего примера (см. табл.4.1) вначале находятся максимальные значения в каждом столбце (0,9; 0,7; 0,8), а затем среди них минимальное значение а=0,7. Это и есть верхняя цена игры. Стратегия, соответствующая верхней цене игры, называется минимаксной стратегией.

Анализируя платежную матрицу, можно сделать вывод о неустойчивости минимаксных стратегий. Это означает, что если игрок А применит свою наиболее осторожную стратегию А2, а игрок В – стратегию В2, то средний выигрыш равен 0,6 (см. табл.4.1). Как только игроку В становится известно, что игрок А применяет стратегию А2, он может ответить на нее стратегией В1, уменьшив выигрыш игрока А с 0,6 до 0,3.

Следовательно, выигрыш при использовании минимаксных стратегий является неустойчивым, поскольку зависит от сведений о стратегии антагонистической стороны.

Существуют игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Для таких игр нижняя цена игры равна верхней и это общее значение называется *чистой ценой игры.* Элемент матрицы, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, называется *седловой точкой матрицы.* Игра, платежная матрица которой имеет седловую точку, называется игрой с седловой точкой.

Для игр с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих из конфликтующих сторон. Если один из игроков будет придерживаться своей оптимальной стратегии, а другой отклоняться от нее, то он может только проиграть.

4.2. Решение игр в смешанных стратегиях

Для игр, не имеющих седловой точки, можно применять не одну чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий с целью гарантировать себе средний выигрыш, больший «a».

Смешанной стратегией называется набор вероятностей применения чистых стратегий. Рассмотрим игру 2 × 2. Пусть игра задана матрицей, приведенной в табл.4.2.

Таблица 4.2

	B1	B2
A1	a11	a12
A2	a21	a22

Оптимальные смешанные стратегии игроков А и В определяются вероятностями P= (p1, p2) и Q= (q1, q2). Цена игры определяется следующими неравенствами:

$a\ 11 \times p\ 11 + a\ 21 \times\ p2 >= R$

$a\ 12 \times p\ 11 + a\ 22 \times\ p2 >= R$

$p1>=0;\ p2>=0;\ p1+p2=1$

$a\ 11 \times q\ 1 + a\ 12 \times\ q2 <= R$

$a\ 21 \times q\ 1 + a\ 22 \times\ q2 <= R$

$q1>=0;\ q2>=0;\ q1+q2=1$

Вероятности p1, p2, q1, q2 определяются путем решения системы неравенств:

$p1= |a\ 22 – a\ 21| / [|a\ 12- a11| + |a22 –a21|]$

$p2= |a\ 12 – a\ 11| / [|a\ 12- a11| + |a22 –a21|]$

$p2=1-p1$

$q1 = |a\ 22 - a\ 12| / |a\ 11 + a22 - a12 - a21|$

$q2=1-q1$

Матрица игры приведена в табл.4.3.

Таблица 4.3

Стратегии	B1	B2
A1	2	3
A2	7	1

Решить игру – значит найти p1, p2, q1, q2, R, удовлетворяющие соотношениям:

$2 \times p1 + 7 \times p2 = R$

$3 \times p1 + p2 = R$ $\qquad\qquad p2=1-p1$

$-5 \times p1+7=R$

$2 \times p1+1=R$ $\qquad\qquad p1= 6/7 \quad p2=1/7 \quad R=19/7$

$2 * q1+3 * q2=R$

$7 \times q1+q2=R$ $\qquad\qquad q2=1- q1$

$- q1+3 \quad =R$

$6 \times q1+1=R$ $\qquad\qquad q1=2/7 \quad q2=5/7 \quad R=19/7$

Графический метод решения игры приведен на рис.4.1. При p1=0 получаем точку (0; 7), а при p1=1 получаем точку (1; 2). Соединяем отмеченные точки прямой линией. Анализируя второе уравнение, получаем точки (0; 1) и (1; 3). Строим вторую линию. Точка пересечения этих прямых соответствует решению системы уравнений.

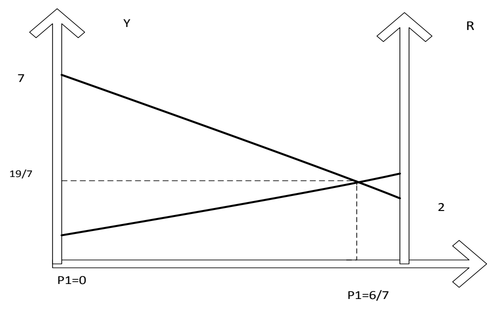


Рис.4.1

4.3. Графоаналитический способ решения игры

Задача 1. Игра, задана платёжной матрицей. Первый игрок имеет стратегии A1, A2. Второй игрок имеет стратегии B1, B2, B3. Цифрами 1 и 2 обозначены игроки.

q1 q2 q3

$$
\begin{array}{cc}
 & 2 \\
 & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
1 \; \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{p1} \\ \text{p2} \end{array}
\end{array}
$$

На плоскости R 0 p1 введём систему координат и на оси 0 p1 отложим отрезок единичной длины A_1, A_2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 (p1, 1 –p1). В частности, точке A_1 (0;0) отвечает стратегия A_1, точке A_2 (1;0) стратегия A_2 и т.д.

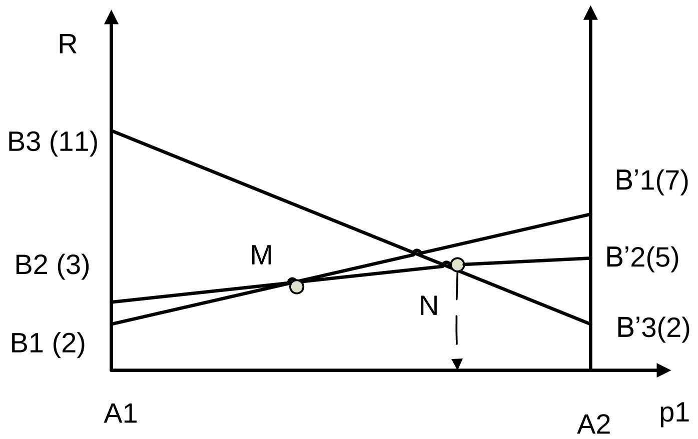


Рис.4.2. Иллюстрация графического метода решения задачи

В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков (рис.4.2). На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью $0R$) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии A_1, а на втором при стратегии A_2. Если игрок 1 применит стратегию A_1, то выиграет при стратегии B_1 игрока 2 – значение 2, при стратегии B_2 – значение 3, а при стратегии B_3 – значение 11. Числам 2, 3, 11 на оси $0R$ соответствуют точки B_1, B_2 и B_3.

Если же игрок 1 применит стратегию A_2, то его выигрыш при стратегии B_1 равен 7, при B_2 5, а при B_3 – 2. Эти числа определяют точки B'_1, B_2', B_3' на перпендикуляре, восстановленном в точке A_2. Соединяя между собой точки B_1 и B'_1, B_2 и B_2', B_3 и B_3' получим три прямые, расстояние до которых от оси (0 p1) определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка B_1 B'_1 до оси 0p1 определяет средний выигрыш R_1 при любом сочетании стратегий A_1 A_2 (с частотами p1 и 1–p1) и стратегией B_1 игрока 2. Это расстояние равно

$2p1 + 6(1 - p2) = R1$

Рассмотрите трапецию A_1 B_1 B' A_2.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной B_1 M N B_3' определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке N.

Следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия P* = (p1, 1–p1), а её ордината равна цене игры R0. Координаты точки находим как точку пересечения прямых B_2 B'_2 и B_3 B'_3.

Соответствующие два уравнения имеют вид

$3*p1+5*(1-p1) = R$

$11*p1+2*(1-p1) = R$

p1=3/11: p2=8/11: R=49/11

Следовательно, P = (3/11; 8/11), при цене игры R = $\frac{49}{11}$.

Таким образом, мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы (B1 не входит в оптимальную смешанную стратегию)

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти из системы

3*q2+11*q3=R 5*q2+2*q3=R

q2=9/11: q3=2/11 R=49/11

и, следовательно, Q = (0; $\frac{9}{11}$; $\frac{2}{11}$). (Из рисунка видно, что стратегия B_1 не войдёт в оптимальную стратегию.

Пример 2. Используя графоаналитический метод решить игру в смешанных стратегиях, заданную матрицей.

	B1	B2	B3
A1	2	4	6
A2	5	2	-1

Решение.

1. Составим три уравнения (рис.4.3) и сделаем замену p2=1–p1.

2*p1+5p2=R –3p1 +5=R

4*p1+2*p2=R 2*p1+2=R

6*p1–p2=R 5 *p1+1=R

2. Стратегия B3B’3 проходит выше, проигрыш игрока B больше. Поэтому эту стратегию отбрасываем. Она входит в решение задачи с вероятностью q3=0.

3. Решая уравнения B1-B’1и B2-B’2 находим p1=3/5 p2=2/5 R=16/5

4. Решая игру 2*2 находим вероятности q1=2/5 q2=3/5.

	B1	B2
A1	2	4
A2	5	2

2q1+4*q2=R –2*q1 +4=R R=16/5

5*q1+2*q2=R q2=1–q1 3*q1+2=R

q1=2/5 q2=3/5

Ответ: P(3/5;2/5) Q=(2/5; 3/5; 0) R=16/5

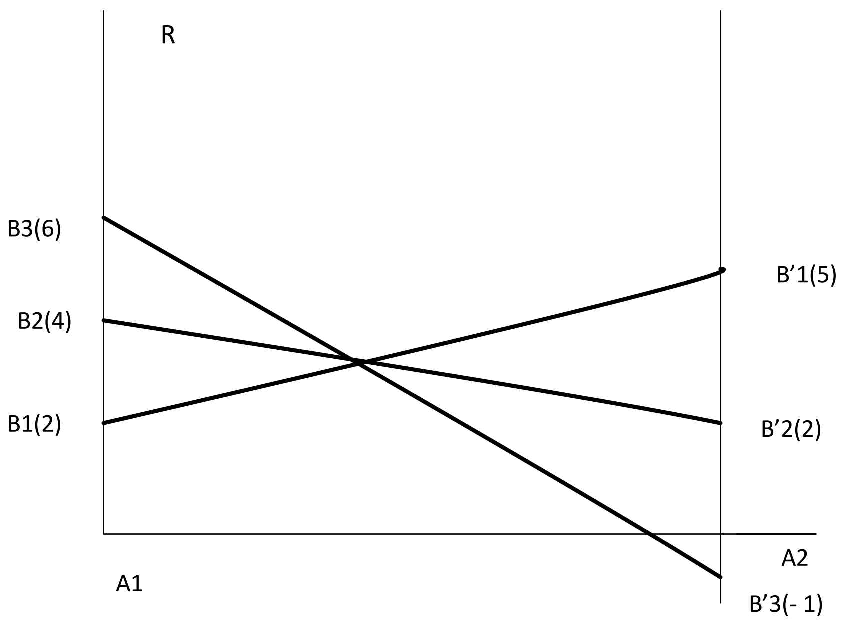


Рис.4.3.

4.4. Решение игры с полицейскими и вором

В магазине имеются 2 зоны А и В. В зоне А большая толпа покупателей, а в зоне В - меньше. Администрация имеет 2 полицейских в штатском, и видеокамеру в месте Т для наблюдения за зонами А и В.

Полицейские имеют 6 стратегий поведения: ТТ, АВ, АА, ВВ, ТА, ТВ, которые обозначим как p1, p2, …, p6. В нашей привычной терминологии это игрок А, а вор – это игрок В.

Вор имеет 2 стратегии красть в зоне А (В1) или красть в зоне В (В2). Полицейские ищут такие смешанные стратегии А1, А2, …, А6, чтобы обеспечить задержание вора с вероятностью R независимо от поведения воров. Вор ищет такие стратегии (В1, В2), чтобы вероятность его задержания не превышала R. Задана матрица игры в таблице 4.4.

Решение

В графическом методе решения задачи строятся прямые, соответствующие стратегиям полицейских.

Решение.

1. В соответствие с табл. 4.4 составим неравенства для каждой стратегии А1-А6 и построим графики (рис. 4.3).

B1 B2

A1 0,51*q1+0,75*q2 ≤ R

A2 0.64*q1+ 0,36*q2 ≤ R

A3 0.19*q1+0.91*q2 ≤ R

A4 0.58*q1+0.60*q2 ≤ R

A5 0.37*q1+0.85*q2 ≤ R

A6   0,46*q1+0,76*q2 ≤ R

Таблица 4.4

Стратегии игроков

Стратегия полицейских	Характеристика стратегии полицейских	Стратегия B1 (зона A)	Стратегия B2 (зона B)
A1	TT	0,51	0,75
A2	AA	0,64	0,36
A3	BB	0,19	0,91
A4	TA	0,58	0,60
A5	TB	0,37	0,85
A6	AB	0,46	0,76

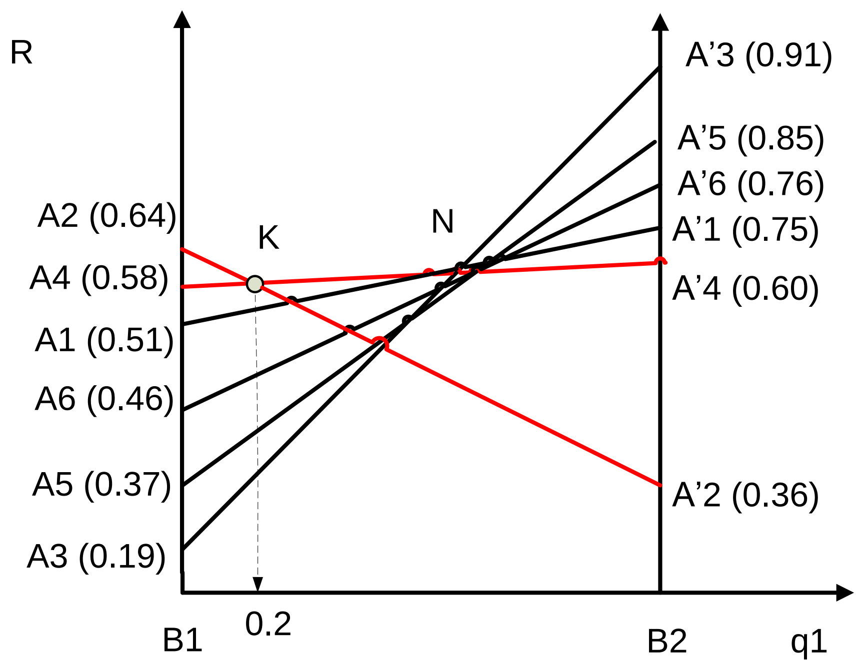


Рис.4.3

Ломаная A2 K N A′3 соответствует верхней границе выигрыша полицейских, а ордината точки К цене игры (рис.4.3). В точке «К» полицейские имеют гарантированный выигрыш, равный 0,584 при q1=0.2.

Ответ:

P= (0; 1/15; 0; 14/15; 0;0); p2=1/15 (стратегия AA) и p4=14/15 (стратегия TA). Q= (0.8; 0.2) q1=0.8; q2=0.2; R= 0.584

4.5. Игры n × 2 и 2 × m

Пусть имеется игра порядка n × m, где n обозначает число стратегий первого игрока (A); m – число стратегий второго игрока (B).

Если каждый элемент матрицы одной строки (столбца) больше соответствующего элемента другой строки (столбца) или равен ему, то говорят, что первая стратегия доминирует над второй.

Пример игры задан матрицей 3 × 3, приведенной в таблице 4.5.

Таблица 4.5

	B1	B2	B3	B4
A1	0	2	3	–1
A2	–3	3	4	9
A3	2	4	4	8

В этой игре стратегия A3 доминирует над A1. Эта стратегия (A3) лучше, поэтому ее оставляют в матрице, удаляя доминируемую альтернативу (A1).

Стратегия B2 доминирует над B1; B3 над B2; B2 над B1. Здесь доминирующие стратегии (B2 и B3) хуже, и их следует удалить.

Знание соотношения доминирования позволяет в ряде случаев свести игры $2 \times m$ и $n \times 2$ к играм 2×2 [4].

4.6. Принятие решений в условиях риска

Использование критерия ожидаемого значения обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть *X*– случайная величина с математическим ожиданием *MX* и дисперсией *DX*. Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – значения случайной величины (с.в.) *X*, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{DX}{n}$. Таким образом, при $n \to \infty$

$$\frac{DX}{n} \to 0 \text{ и } \bar{x} \to MX.$$

Другими словами при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемого значения справедливо только в случае, когда одно и то же решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Пример 1. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае, если ремонт будет производиться слишком часто, затраты на обслуживание будут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени t. В этом и состоит элемент ”риска”.

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение T, при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и на проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

Пусть p_t вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент t, а n_t случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C_1 затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C_2 затраты на профилактический ремонт одной машины.

Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если ПЭВМ работают в течение большого периода времени. При этом ожидаемые затраты на один интервал составят

$$ОЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

где $M(n_t)$ – математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент t. Так как n_t имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p_t), то $M(n_t) = np_t$. Таким образом,

$$ОЗ = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}.$$

Необходимые условия оптимальности T^* имеют вид

$$ОЗ\ (T^*-1) \geq ОЗ\ (T^*),$$

$$ОЗ\ (T^*+1) \geq ОЗ\ (T^*).$$

Следовательно, начиная с малого значения T, вычисляют $ОЗ(T)$, пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Пусть C_1 = 100; C_2 = 10; n = 50. Значения p_t приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	ОЗ(Т)
1	0.05	0	$\frac{50\ (100\cdot 0+10)}{1}=500$
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366.7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

$T^{*}\to$ 3, $ОЗ\ (T^{*})\to$ 366.7

Следовательно, профилактический ремонт необходимо делать через T^{*}=3 интервала времени, так как этому интервалу соответствуют минимальные ожидаемые затраты 366.7.

4.7. Критерий ожидаемое значение дисперсия

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций.

Если x – случайная величина с дисперсией DX, то среднее арифметическое имеет дисперсию DX/n, где n – число слагаемых в $\bar{x}$. Следовательно, если DX уменьшается, и вероятность того, что близко к МХ, увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Пример 2. Применим критерий “ожидаемое значение дисперсия” для примера 1. Для этого необходимо найти дисперсию затрат за один интервал времени, т.е. дисперсию

$$ЗT = \frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}.$$

Так как n_t, $t = \overline{1, T-1}$ – случайная величина, то $з_T$ также случайная величина. Параметр n_t имеет биномиальное распределение с $M(n_t) = np_t$ и

$D(n_t) = np_t(1-p_t)$. Следовательно,

$$D(з_T) = D\left(\frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\right) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D\left(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\right) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left\{\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right\},$$

где $C_2 n = const$.

Из примера 1 следует, что

$M(з_T) = M(з(T))$.

Следовательно, искомым критерием будет минимум выражения

$M(з(T)) + к\, D(з_T)$.

Константу к” можно рассматривать как уровень несклонности к риску, так как константа «*к*» определяет степень возможности” дисперсии Д$(з_T)$ по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от М$(з(T))$, то он может выбрать “*к*” много больше единицы. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При *к* =1 получаем задачу

$$M(З(T)) + D(З(T)) = n\left\{\left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C^2}{T}\right\}$$

По данным примера 1 можно составить таблицу 4.7. Из таблицы видно, что профилактический ремонт необходимо делать в течение каждого интервала T^*=1.

Таблица 4.7

T	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$M(з(T))+D(З(T))$
1	0.05	0.0025	0	0	500.00
2	0.07	0.0049	0.05	0.0025	6312.50
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	6622.22
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	6731.25
5	0.18	0.0324	0.35	0.0343	6764.00

4.8. Принятие решений в условиях неопределённости

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям, а столбцы возможным состояниям системы.

Пусть, например, из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должно иметь изделие из данного материала.

Варианты решения:

E_1 – выбор размеров из соображений максимальной долговечности;

E_m – выбор размеров из соображений минимальной долговечности;

E_i – промежуточные решения.

Условия требующие рассмотрения:

F_1 – условия, обеспечивающие максимальной долговечность;

F_n – условия, обеспечивающие минимум долговечности;

F_i – промежуточные условия.

Под результатом матрицы решений $e_{ij} = e(E_i ; F_j)$ здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту E_i и условиям F_j и характеризующую прибыль, полезность или надёжность. Обычно мы будем называть такой результат полезностью решения. Чтобы прийти к однозначному и по возможности наивыгоднейшему варианту решению необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом матрица решений $\| e_{ij} \|$ сводится к одному столбцу.

Таким образом, каждому варианту E_i приписывается некоторый результат e_{ir}, характеризующий, последствия этого решения.

4.9. Минимаксный критерий

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом.

Матрица решений дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов e_{ir} каждой строки. Необходимо выбрать те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения e_{ir} этого столбца.

Выбранные варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется.

Применение ММ-критерия бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

– о возможности появления внешних состояний F_j ничего не известно;
– приходится считаться с появлением различных внешних состояний F_j;
– решение реализуется только один раз;
– необходимо исключить какой бы то ни было риск.
–

4.10. Критерий Байеса – Лапласа

Обозначим через q_i вероятность появления внешнего состояния F_j. Соответствующее правило выбора можно интерпретировать следующим образом.

Матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется ещё одним столбцом, содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты, в строках которых стоит наибольшее значение* e_{ir} *этого столбца.*

При этом предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

– значение вероятности появления состояния F_j известны и не зависят от времени;

– решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;

– для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

Таким образом, критерий Байеса-Лапласа (BL–критерий) более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

4.11. Критерий Сэвиджа

$$a_{ij} := \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

$$e_{ir} := \max_i a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$$

Величину a_{ij} можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии F_j вместо варианта E_i выбирать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант.

Величину a_{ij} можно интерпретировать и как потери (штрафы), возникающие в состоянии F_j при замене оптимального для него варианта на вариант E_i. В последнем случае eir представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям F_j , $j = \overline{1, n}$) потери в случае выбора варианта E_i.

Соответствующее критерию Сэвиджа правило выбора трактуется так:

Каждый элемент матрицы решений $\left\| e_{ij} \right\|$ *вычитается из наибольшего результата max* e_{ij} *соответствующего столбца.*

Разности a_{ij} *образуют матрицу остатков* $\left\| e_{ij} \right\|$. *Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей* e_{ir}. *Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.*

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию.

4.12. Пример и выводы

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям, становится ясно, что вследствие их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же, если вирус не будет вовремя обнаружен, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

E_1– полная проверка;

E_2– минимальная проверка;

E_3– отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

F_1– вирус отсутствует;

F_2– вирус есть, но он не успел повредить информацию;

F_3– есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации, приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8

	F_1	F_2	F_3	ММ-критерий		Критерий B-L	
				$e_{ir} = \min\limits_j e_i$	$\max\limits_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
E_1	–20.0	–22.0	–25.0	–25.0	$\underline{\underline{-25.0}}$	–22.33	
E_2	–14.0	–23.0	–31.0	–31.0		–22.67	
E_3	0	–24.0	–40.0	–40.0		–21.33	$\underline{\underline{-21.33}}$

Согласно ММ–критерию, следует проводить полную проверку. По критерию Байеса-Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны: $P(F_j) = q_j = 0.33$, рекомендуется отказаться от проверки.

В соответствии с критерием Сэвиджа матрица остатков для этого примера приведена в таблице 4.9.

Таблица 4.9

	F_1	F_2	F_3	Критерий Сэвиджа	
				$e_{ir} = \min\limits_j a$	$\min\limits_j e_{ir}$
E_1	+20.0	0	0	+20.0	
E_2	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	$\underline{\underline{+14.0}}$
E_3	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать, поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин невелико, лучше пользоваться критериями минимакса или Севиджа.

4.13. Производные критерии

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, Гурвиц предположил оценочную функцию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма:

$$\max_i e_{ir} = \{C \min_j e_{ij} + (1-C) \max_j e_{ij}\},$$

где C– весовой множитель.

Правило выбора согласно критерию Гурвица формируется следующим образом.

Матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется столбцом, содержащим среднее взвешенное наименьшего и наибольшего результатов для каждой строки. Выбираются только те варианты, в строках которых стоят наибольшие элементы* e_{ir} *этого столбца.*

При C=1 критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При C = 0 он превращается в критерий «азартного игрока» eir = $\max_i \max_j e_{ij}$, т.е. мы становимся на точку зрения азартного игрока, делающего ставку на то, что «выпадет» выгоднейший случай.

В технических приложениях сложно выбрать весовой параметр C, так как трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще используют параметр С, равный 0,5.

Критерий Гурвица применяется в следующих случаях:

– о значениях вероятностей появления состояния F_j ничего не известно;
– с появлением состояния F_j необходимо считаться;
– реализуется только малое количество решений;
– допускается некоторый риск.

4.14. Метод, основанный на равновесии по Нэшу

Равновесие Нэша (англ. Nash equilibrium) названо в честь Джона Форбса Нэша — так в теории игр называется тип решений игры двух и более игроков, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив своё решение в одностороннем порядке, когда другие участники не меняют решения. Такая совокупность стратегий выбранных участниками и их выигрыши называются равновесием Нэша [1].

Допустим, (S, f) - игра n лиц в нормальной форме, где S - набор чистых стратегий, а f - набор выигрышей. Когда каждый игрок $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ выбирает стратегию в профиле стратегий X={x1,x2,…,xn} , игрок i получает выигрыш fi(x). Заметьте, что выигрыш зависит от всего профиля стратегий: не только от стратегии, выбранной самим игроком i, но и от чужих стратегий. Профиль стратегий $x^* \in S$ является равновесием по Нэшу, если изменение своей стратегии не выгодно ни одному игроку, то есть для любого i

$$f_i(x^*) \geq f_i(x_i, x^*_{-i}).$$

Игра может иметь равновесие Нэша в чистых стратегиях или в смешанных (то есть при выборе чистой стратегии стохастически с фиксированной частотой). Нэш доказал, что если разрешить смешанные стратегии, тогда в каждой игре n игроков будет хотя бы одно равновесие Нэша.

Иллюстрация: дилемма заключённого. Два заключённых подозреваются как сообщники в совершении некоторого преступления. Они помещены в разные камеры и не имеют никакой возможности обмениваться информацией. Каждому по отдельности предлагается сознаться С) к определенному сроку, но можно и молчать (М). Если один сознался, другой молчит, то сознавшегося освобождают, а молчун получает максимальный срок (9 лет). Если сознаются оба, то обоим срок снижается до 6 лет. Если оба молчат, то вину по основному преступлению доказать невозможно, и они получат по 1 году за незаконное владение оружием.

Равновесие по Нэшу есть точка $m^H=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ такая, что для всех $i=1,2,\ldots,n$ достигается оптимум

$$h_i(m^H)=\max_{m_i} h_i(m).$$

Точка m^H определяется из решения системы уравнений

$$\frac{\partial h_i(m)}{\partial m_i}=0, \quad i=1,2,\ldots,n$$

Рассмотрим игру 2×2, не имеющую седловой точки:

$$A=\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Пусть игрок А использует стратегию A_1 с вероятностью x, а стратегию A_2 - с вероятностью $1–x$.

Пусть игрок В использует стратегию B_1 с вероятностью y, а стратегию B_2 – с вероятностью $1-y$.

$$A=\begin{array}{cc} y & 1-y \\ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} \\ x \\ 1-x \end{array}.$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока А будет определяться следующим образом

$$h_a(x,y) = (x \quad 1-x)A\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $h_b(x,y) = -h_a(x,y)$.

Точка Нэша (x^H ,y^H) определяется из уравнений [6]

$$\frac{\partial h_a(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_b(x,y)}{\partial y} = 0$$

Зная точку Нэша (x^H, yH), можно легко определить оптимальные стратегии $x^{*T} = (x^H \quad 1-x^H)$; $y^{*T} = (y^H \quad 1-y^H)$ и цену игры ν.

Пример. Найти решение игры 2×2 с использованием понятия равновесия по Нэшу:

$$\grave{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Определим по формуле математическое ожидание выигрыша игрока А:

$h_a(x,y) = (x \quad 1-x)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$ xy+5(1–x)y+3(1–y)x+2(1–x)(1–y)= –5xy+3y+x+2.

Определим точку Нэша:

$$\frac{\partial h_a(x,y)}{\partial x} = -5y + 1 = 0; y^H = \frac{1}{5};$$

$$\frac{\partial h_b(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial h_a(x,y)}{\partial y} = 5x - 3 = 0; x^H = \frac{3}{5},$$

(x^H, y^H) – координаты точки по Нэшу.

Таким образом, оптимальные стратегии в данной игре следующие:

$$x^{*T} = (x^H \quad 1-x^H) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \;;\; y^{*T} = (y^H \quad 1-y^H) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Цена игры в точке Нэша:

$$\nu = x^{*T} Ay^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{13}{5}.$$

Ответ: $x^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$; $y^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$; $\nu = \frac{13}{5}$.

Как можно заметить, решение совпадает с результатами, полученными аналитическим методом.

4.15. Практические упражнения

Задача 1. Определите нижнюю цену игры, представленной матрицей. Ответ введите в виде значения элемента матрицы.

	B1	B2	B3
A1	0,4	0,4	0,2
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,5	0,7	0,2

Ответ: 0,3

Задача 2. Определите верхнюю цену игры, представленной матрицей.

	B1	B2	B3
A1	0,4	0,4	0,2
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,5	0,7	0,2

Ответ: 0,5

Задача 3. Определить есть ли в матрице седловая точка.

	B1	B2	B3
A1	0,2	0,4	0,5
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,4	0,7	0,6

Ответ: а31

Задача 4. Определить есть ли в матрице седловая точка.

	B1	B2	B3
A1	0,3	0,4	0,5
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,5	0,7	0,6

Задача 5. Решить игру 2 × 3, заданную матрицей, используя графо-аналитический метод. Указать доминирующие стратегии и упростить игру.

	B1	B2	B3
A1	2	4	1
A2	5	1	4

Задача 6. Решить игру 3 × 3, заданную матрицей, используя графо-аналитический метод. Указать доминирующие стратегии и упростить игру.

	B1	B2	B3
A1	7	3	5
A2	4	5	6
A3	2	7	4

Задача 7. Выбрать рациональный вариант профилактики ЭВМ. Затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации для игры, представленной матрицей.

	F1	F2	F3
E1	–23	–21	–26
E2	–12	–20	–24
E3	–5	–21	–45

Задача 8. Используя графоаналитический метод решить игру в смешанных стратегиях, заданную матрицей.

	B1	B2
A1	2	4
A2	5	3

Задача 9. Используя графоаналитический метод решить игру в смешанных стратегиях, заданную матрицей.

	B1	B2
A1	9	4
A2	5	2

Задача 10. Используя графоаналитический метод решить игру в смешанных стратегиях, заданную матрицей.

	B1	B2
A1	3	4
A2	5	2

Задача 11. Используя графоаналитический метод решить игру в смешанных стратегиях, заданную матрицей.

	B1	B2
A1	8	3
A2	5	6

Задача 12. Найти решение игры 2×2 с использованием метода равновесия по Нэшу.

$$\grave{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Что такое игра, стратегия, ход, платежная матрица, «седловая точка»?
2. Классификация игр.
3. В чем суть методы решения игры в смешанных стратегиях?
4. Вычисление верхней цены игры.
5. Вычисление нижней цены игры.
6. Понятие доминирующей и доминируемой стратегии.
7. Какие стратегии можно удалить для упрощения платежной матрицы?
8. Критерии минимаксный, Байеса –Лапласа, Сэвиджа.
9. Равновесие по Нэшу.

5. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Цель практического занятия: выработать навыки по применению Марковских цепей в принятии решений.

5.1. Дерево логических возможностей

Конечный стохастический процесс с функциями исходов f1,f2,…,fn называется *Марковской цепью*, если исходное состояние f_0 фиксировано.

Марковская цепь характеризуется тем, что вероятности перехода P i j, задающие вероятность перехода системы из состояния Si в состояние Sj, определяется для всех упорядоченных пар состояний. Кроме того, должно быть задано исходное состояние, в котором, по предположению, находится наша система в начальный момент времени.

На основании этих данных можно построить для любого (конечного) числа шагов Марковской цепи дерево логических возможностей и вероятностную меру на нём.

Пример. В регионе никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь или снег. Если сегодня снег (или дождь), то с вероятностью ½ погода не изменится. Если все же она изменяется, то в половине случаев снег заменяется дождем или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода. Допустим исходное состояние – в регионе ясная погода. Буквами Д, Я, С обозначаются условно дождь, ясный день, снег. Условия задачи удобно представить в виде квадратной матрицы.

$$\begin{array}{c|ccc|} & Д & Я & С \\ \hline Д & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ Я & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ С & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Числа в первой строке матрицы представляют собой вероятности различной погоды после дождя. Числа во второй строке – вероятности различной погоды после ясного дня, а в третьей строке – после снега. Воспользовавшись этой матрицей можно построить дерево логических возможностей для погоды, например на три последовательных дня, и определить вероятностную меру на нем.

Построенное дерево представлено на рисунке 5.1. Это дерево позволяет сделать прогноз о возможности дождя в каждый из трех последующих дней: P[f1=Д]=1/2, P[f2=Д]=3/8, P[f3=Д]=13/32.

Расчет производится следующим образом. На втором ярусе (второй день) имеется два исхода Д с вероятностными мерами 1/2×1/2=1/4 и ½*1/4=1/8. Их сумма дает 3/8. На третьем ярусе (третий день) имеется шесть исходов Д с вероятностными мерами 1/2×1/2×1/2=1/8, 1/2×1/4×1/2=1/16, 1/2×1/4×1/4=1/32, 1/2×1/4×1/2=1/16, 1/2×1/4×1/2=1/16, 1/2×1/2×1/4=1/16. Их сумма дает 13/32.

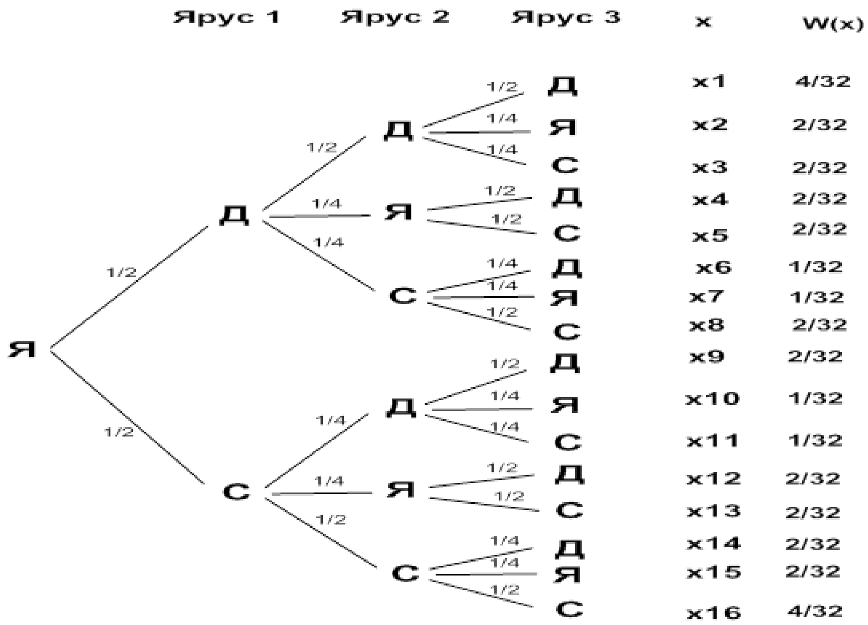


Рис.5.1.Дерево логических возможностей

5.2. Диаграммы переходов

Выдается задание построить диаграммы переходов и выполнить расчёт вероятности различных состояний через три шага для случая, когда процесс начинается из фиксированного состояния.

Исходом каждого эксперимента служит один исход из конечного множества возможных исходов a1, a2, …, an, причем в каждом эксперименте вероятность исхода aj либо вовсе не зависит от исходов предшествующих экспериментов, либо зависит от исхода эксперимента, непосредственно предшествующего данному исходу. Эта зависимость задается величиной Pij, представляющей вероятность исхода aj при условии, что предшествующий эксперимент имел исход ai. Исходы a1, a2, …, an называются состояниями, а числа Pij – вероятностями перехода. Вероятности перехода можно представить двумя различными способами: матрицей и диаграммой перехода. Для Марковской цепи с состояниями a1, a2,…, an такая матрица перехода системы P имеет вид, приведенный на рис.5.2.

	a_1	a_2	…	a_n
a_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
an	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Рис.5.2

Пример матрицы вероятностей перехода, и диаграммы перехода приведен на рис.5.3 и 5.4 соответственно. Стрелки, идущие от каждого состояния, указывают состояния, в которое система может переходить в рассматриваемом процессе.

P =

	a1	a2	a3
a1	0	1	0
a2	0	½	½
a3	1/3	0	2/3

Рис.5.3.

В матрице P сумма элементов каждой строки равна единице. Это должно быть справедливо для любой матрицы вероятностей перехода.

Основной вопрос при изучении Марковских цепей состоит в следующем. Пусть процесс начинается из состояния i. *Какова вероятность того, что через n шагов он перейдет в состояние j? Обозначим эту вероятность* $P_{ij}^{(n)}$. *Здесь параметр n обозначает не степень числа P, а количество шагов*. Более того, нас интересует эта вероятность для всех возможных начальных состояний i и всех возможных конечных состояний j.

Это удобно представить в виде матрицы. Для Марковской цепи с тремя состояниями матрицу перехода можно представить в виде диаграммы переходов, представленной на рис.5.4.

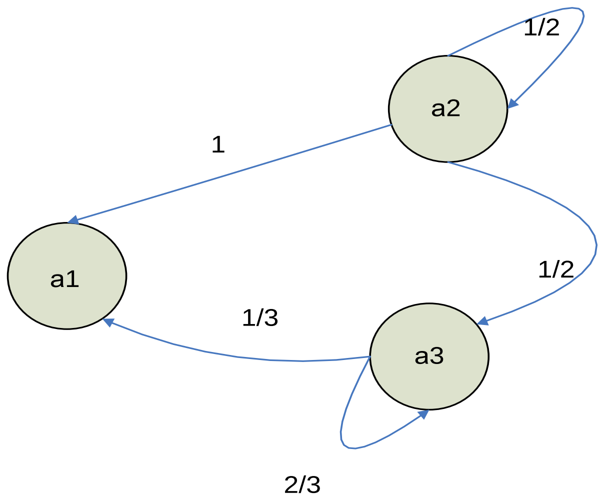


Рисунок 5.4 – Диаграмма перехода

5.3. Матричный способ вычисления вероятностей переходов системы через заданное число шагов

$P^{(n)} =$

$P_{11}^{(n)}$	$P_{12}^{(n)}$	$P_{13}^{(n)}$
$\mathbf{P_{21}^{(n)}}$	$P_{22}^{(n)}$	$P_{23}^{(n)}$
$P_{31}^{(n)}$	$P_{32}^{(n)}$	$P_{33}^{(n)}$

Решение. Вначале строится дерево логических возможностей и производится поиск вероятностной меры (см. рис.5.5).

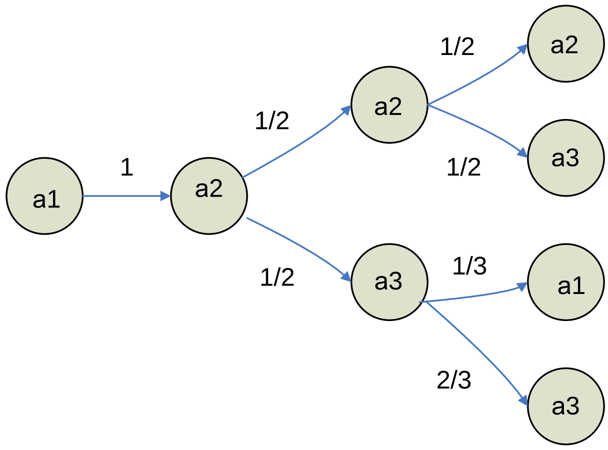


Рисунок 5.5

Например, вероятность $P_{13}^{(3)}$ есть сумма всех весов, приписанных введенной вероятностной мерой тем путям дерева, которые оканчиваются состоянием a_3: $P_{13}^{(3)} = 1\times1/2\times1/2 + 1\times1/2\times2/3 = 7/12$; $P_{12}^{(3)} = 1\times1/2\times1/2 = 1/4$;

$P_{11}^{(3)} = 1\times1/2\times1/3 = 1/6$. Для того, чтобы найти вероятности $P_{21}^{(3)}$, $P_{22}^{(3)}$, $P_{23}^{(3)}$ из состояния a2, необходимо построить аналогичное дерево с исходным состоянием a2. Аналогично определяются $P_{31}^{(3)}$, $P_{32}^{(3)}$, $P_{33}^{(3)}$. Результаты можно записать в виде матрицы

$P^{(3)} =$

	a1	a2	a3
a1	1/6	1/4	7/12
a2	7/36	7/24	37/72
a3	4/27	7/18	25/54

Сумма элементов каждой строки по-прежнему равна единице. Это соответствует тому факту, что из какого бы состояния ни начинать, через три шага мы обязательно достигаем либо первого состояния, либо второго, либо третьего. Все элементы матрицы являются положительными числами.

Матрицу $P^{(3)}$ можно получить и другим способом. Вероятности удовлетворяют следующим условиям:

$P_1^{(n)} = P_1^{(n-1)} \times p11 + P_2^{(n-1)} \times p21 + P_3^{(n-1)} \times p31$,

$P_2^{(n)} = P_1^{(n-1)} \times p12 + P_2^{(n-1)} \times p22 + P_3^{(n-1)} \times p32$,

$P_3^{(n)} = P_1^{(n-1)} \times p13 + P_2^{(n-1)} \times p23 + P_3^{(n-1)} \times p33$.

Это условие можно записать в виде произведения вектора на матрицу:

$P^{(n)} = P^{(n-1)} \times P$.

Используя матрицу P, представленную на рис.5.3, сначала находится матрица $P^{(2)}$, а затем $P^{(3)}$. Для этого необходимо перемножить матрицы P. $P^{(2)} = P \times P$. Например, для нахождения второй строки матрицы

$P^{(2)}$ необходимо последовательно перемножить вторую строку матрицы P соответственно на первый, второй и третий столбцы этой матрицы.

$$P^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}$$

$P_{21}^{(2)} = 0 \times 0 + 1/2 \times 0 + 1/2 \times 1/3 = 1/6$

$P_{22}^{(2)} = 0 \times 1 + 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 0 = 1/4$

$P_{23}^{(2)} = 0 \times 0 + 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 2/3 = 7/12$

$P^{(2)} =$

	a1	a2	a3
a1	0	½	½
a2	1/6	¼	7/12
a3	2/9	1/3	4/9

Решение задачи вычисления вероятности наступления события после двух и трех шагов с помощью матрицы переходов.

5.4. Практические упражнения

Задача 1. Составить диаграммы состояний для Марковских цепей, вероятности перехода которых заданы следующими матрицами переходов Р1 и Р2 (рис.5.6).

Р1=

	a1	**a2**	**a3**
a1	½	½	0
a2	0	1	0
a3	½	0	1/2

Р2=

	a1	**a2**	**a3**
a1	1/3	1/3	1/3
a2	1/3	1/3	1/3
a3	1/3	1/3	1/2

Рис.5.6

Задача 2. Найти матрицу перехода через 2 шага $P^{(2)}$ для Марковской цепи, заданной матрицей вероятностей перехода

$$P \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \qquad \text{Ответ: } P^{(2)} = \begin{vmatrix} 5/12 & 7/12 \\ 7/18 & 11/18 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Найти матрицу перехода через 2 шага $P^{(2)}$ для Марковской цепи, заданной матрицей вероятностей перехода

$$P = \begin{matrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{matrix}$$

$$\text{Ответ: } P^{(2)} = \begin{matrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{matrix}$$

Задача 4. Построить диаграммы состояний для Марковских цепей, вероятности перехода которых заданы матрицей

$$P = \begin{matrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{matrix}$$

Задача 5. Найти матрицы $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$ для Марковской цепи, заданной матрицей P двумя методами: с помощью дерева логических возможностей и матриц.

$$P = \begin{matrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{matrix}$$

Задача 6. Найти матрицы $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$ для Марковской цепи, заданной матрицей P двумя методами: с помощью дерева логических возможностей и матриц.

$$P = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{matrix}$$

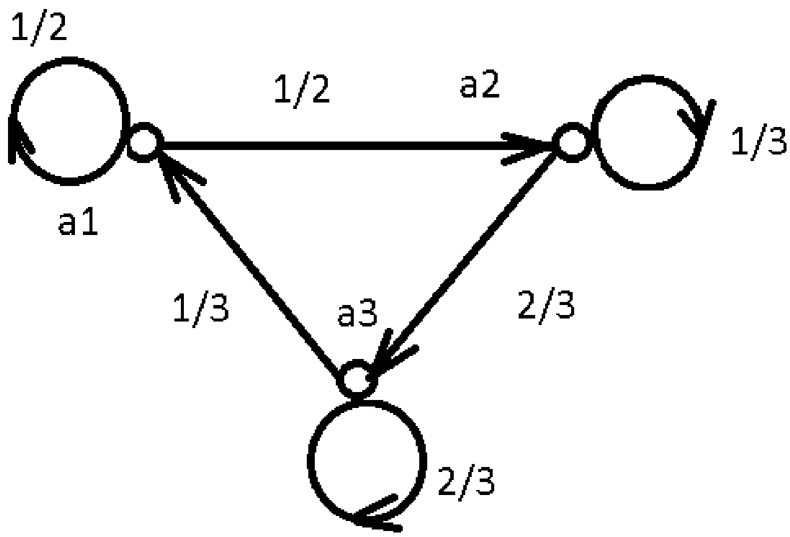
Задача 7. Построить диаграммы состояний для Марковских цепей, вероятности перехода которых заданы матрицей

$$P = \begin{matrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{matrix}$$

Задача 8. Найти матрицы $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$ для Марковской цепи, заданной матрицей P двумя методами: с помощью дерева логических возможностей и матриц.

$$P = \begin{matrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Задача 9. Составить матрицу вероятностей перехода, для приведенной диаграммы состояний.



Контрольные вопросы

1. Что такое Марковский процесс?
2. Дерево логических возможностей.
3. Диаграмма переходов.
4. Вычисление вероятности события через несколько шагов.

6. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Цель практического занятия: выработать навыки по разработке и использованию динамических моделей на базе сетей Петри в процессе принятия решений.

6.1. Описание сети Петри аналитическим и графическим способами

Преподаватель предлагает построить динамическую модель на базе сетей Петри. Выполнить запуск переходов в сети Петри и определить свойства данной сети.

Пример задания сети Петри в аналитическом виде представлен ниже.

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$

$I\ (t_1) = p_1$

$I\ (t_2) = p_3$

$I\ (t_3) = p_2, p_3$

$I\ (t_4) = p_4, p_5, p_5, p_5$

$I\ (t_5) = p_2$

$O\ (t_1) = p_2, p_3$

$O\ (t_2) = p_3, p_5, p_5$

$O\ (t_3) = p_4, p_5$

$O\ (t_4) = p_4$

$O\ (t_5) = p_6$

M (P) = {3 1 2 2 4 0}

Эта же сеть Петри, представленная в графическом виде, приведена на рисунке 6.1. Граф сети Петри обладает двумя типами узлов. Кружок является позицией, а планка – переходом. Ориентированные дуги (стрелки) соединяют позиции и переходы, при этом некоторые дуги направлены от позиций к переходам, а другие – от переходов к позициям. Дуга, направленная от позиции P_i к переходу $t_{j,}$ определяет позицию, которая является входом для перехода. Кратные входы в переход обозначаются перечёркиванием наклонной чертой соответствующей дуги и указанием количества этих дуг.

Маркировка M есть присвоение фишек (точек внутри позиций) позициям сети. Фишка изображается точкой в кружке, которая представляет позицию сети Петри. Количество и положение фишек при выполнении сетей Петри могут изменяться. Они используются для определения выполнения сети Петри.

Маркировка M сети Петри есть функция, отображающая множество позиций в множество неотрицательных целых чисел N.

M: P →N.

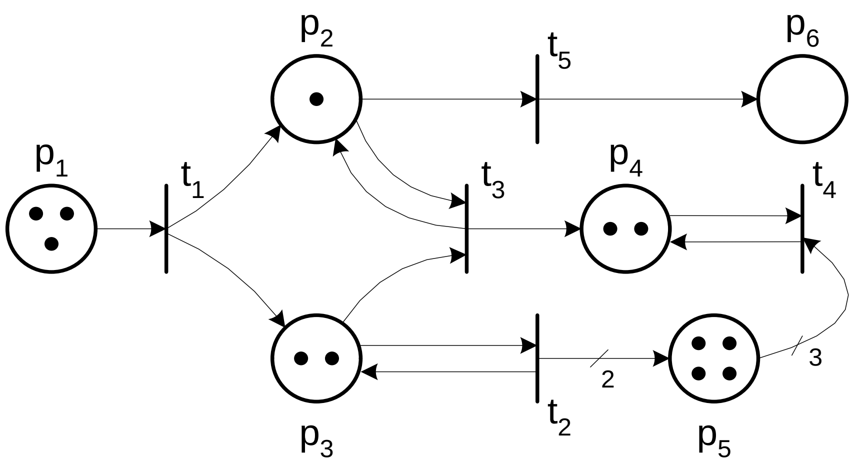


Рис.6.1. Графическая модель сети Петри

Преподаватель демонстрирует студентам запуск переходов сети Петри и полученные маркировки.

6.2. Определение свойств сети Петри

Оценить свойства безопасности, достижимости, покрываемости, обратимое состояние, базовое состояние, устойчивости сети Петри, представленной на рис.6.1.

Построение дерева достижимости

Преподаватель выдаёт задание и предлагает построить дерево достижимости. Пример задания представлен на рис.6.2, а дерево достижимости – на рис.6.3.

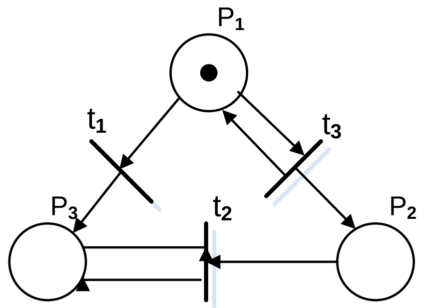


Рис.6.2

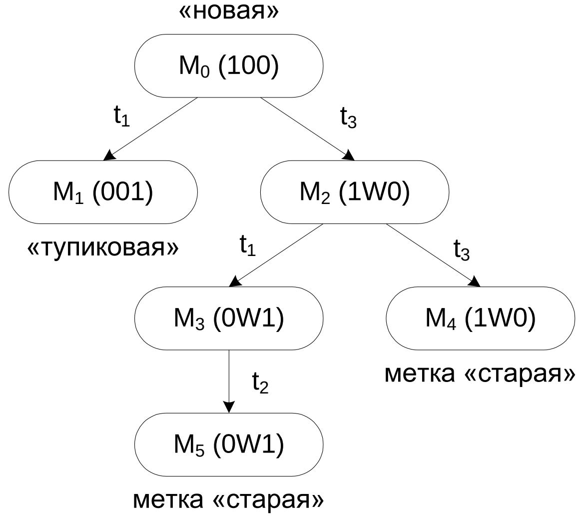


Рис.6.3

6.3. Практические упражнения

Задача 1. Представить сеть Петри в графическом виде. Описание сети Петри в аналитическом виде представлено ниже.

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$

$I(t_1) = p_1$

$I(t_2) = p_3$

$I(t_3) = p_2, p_3$

$I(t_4) = p_4, p_5, p_5, p_5$

$I(t_5) = p_2$

$O(t_1) = p_2, p_3$

$O(t_2) = p_3, p_5, p_5$

$O(t_3) = p_4, p_5$

$O(t_4) = p_4$

$O(t_5) = p_6$

$M(P) = \{3\ 1\ 2\ 2\ 4\ 0\}$

Задача 2. Какой будет маркировка сети Петри, представленной на рисунке 6.4, после запуска переходов t1, t2, t3, t4, t5.

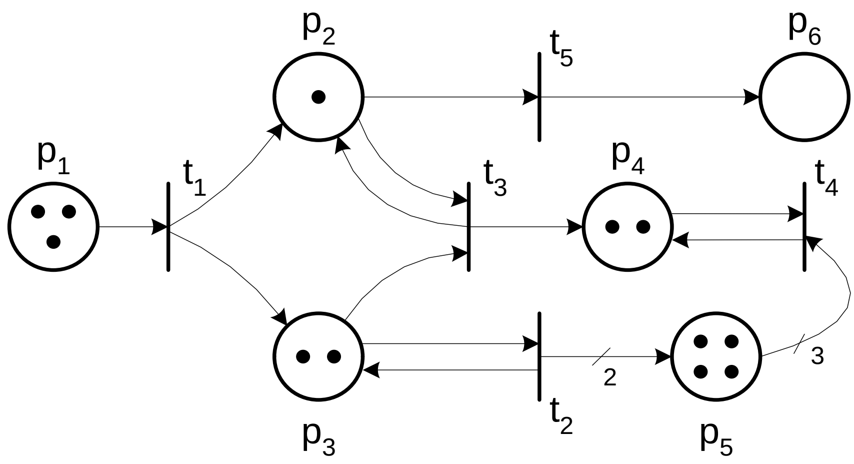


Рис.6.4

Задача 3. Определить активность переходов сети Петри, представленной на рис.6.5.

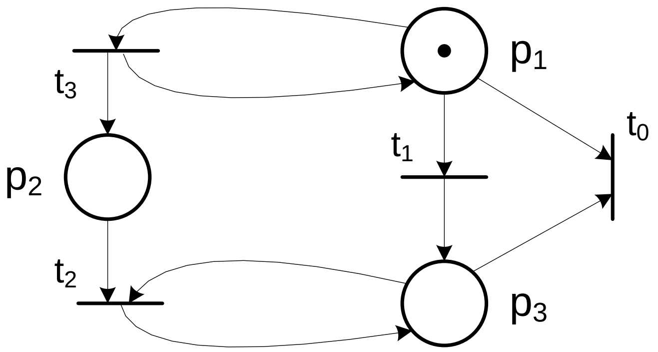


Рис.6.5

Задача 4. Сохраняется ли суммарное число фишек в сети Петри после запуска одного, двух переходов?

Задача 5. Построить граф сети Петри по формальному описанию. P={p1,p2,p3,p4,p5} T={t1,t2,t3,t4} I(t1)=p1 I(t2)=p2, p4, p4 I(t3)=p3, p3, p2 I(t4)=p5, p5 O(t1)=p1, p2, p5, p5 O(t2)=p3,p3 O(t3)= p4,p4,p4 O(t4)=p4, p4, p4 M(p1, p2, p3, p4, p5)=21220.

Задача 6. Описать последовательный запуск переходов t1,t2,t3,t4 и перемещения фишек для графа сети Петри в предыдущем вопросе (ответ: M(t4)=20260).

Задача 7. Разработать граф сети Петри по формальному описанию. P={p1,p2,p3,p4,p5} T={t1,t2,t3,t4} I(t1)=p1 I(t2)=p2,p4,p4 I(t3)=p3,p3 I(t4)=p5,p5,p5 O(t1)=p2,p2,p5,p5,p5 O(t2)=p3,p3,p3,p3 O(t3)= p4,p4,p4 O(t4)=p4,p4,p4 M(p1,p2,p3,p4,p5)=23330.

Задача 8. Разработать граф сети Петри по формальному описанию. P={p1,p2,p3,p4,p5} T={t1,t2,t3,t4} I(t1)=p1 I(t2)=p2,p4,p4 I(t3)=p3,p3 I(t4)=p5,p5,p5 O(t1)=p2,p2,p5,p5,p5 O(t2)=p3 O(t3)= p4,p4,p4 O(t4)=p4,p4,p4 M(p1,p2,p3,p4,p5)=13330. Какая будет маркировка после запуска перехода t2? (ответ: M(t2)=12410).

Задача 9. Построить 3-х ярусное дерево достижимости для графа сети Петри, представленной формальным описанием: P={p1,p2,p3,p4,p5} T={t1,t2,t3,t4} I(t1)=p1 I(t2)=p2,p4,p4 I(t3)=p3,p3,p2 I(t4)=p5,p5,p5 O(t1)=p1,p5,p5 O(t2)=p3,p3 O(t3)= p4,p4,p4 O(t4)=p4,p4,p4 M(p1,p2,p3,p4,p5)=21220.

Задача 10. В каком случае может быть запущен переход t3 на графе сети Петри, представленном на рис.6.6.

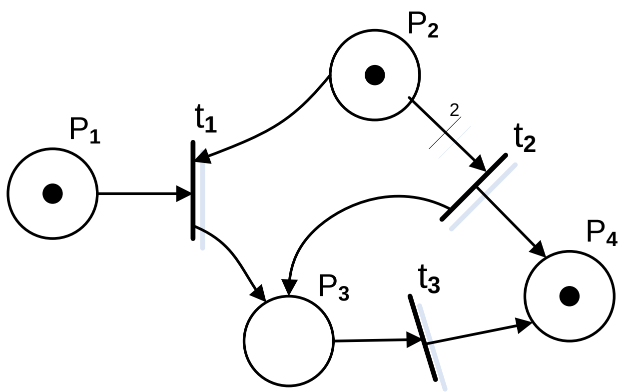


Рис.6.6

Контрольные вопросы

1. Статические и динамические модели для принятия решений.
2. Аппарат сетей Петри для построения динамических моделей.
3. Примеры использования сетей Петри.
4. Свойства сетей Петри.
5. Алгебраические методы анализа сетей Петри.
6. Разновидности сетей Петри при построении динамических моделей.
7. Стохастические сети Петри.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Целью практической работы является освоение методов решения задач с помощью генетических алгоритмов.

7.1. Решение задачи поиска экстремума функции

Пример поиска максимума одномерной функции. Пусть имеется набор натуральных чисел от 1 до 31 и функция, определенная на этом наборе чисел, f(x)=x. Требуется найти максимальное значение функции. Задача тривиальна и не требует применения столь изощренных методов поиска, но ее решение необходимо для иллюстрации функционирования генетического алгоритма.

В качестве кода будем использовать двоичное представление аргументов функции. Это положение представляет собой фенотип нашего алгоритма. Сам код будет представлять собой двоичную строку из 5 бит. Это генотип алгоритма. Целевой функцией будет непосредственно сама рассматриваемая функция, аргументом которой является число, чье двоичное представление использует алгоритм.

Задаются некоторые характеристики генетического алгоритма. Пусть размер популяции 4, вероятность мутации 0,001, сам процесс мутации заключается в инверсии одного из битов строки, выбираемого случайно по равномерному закону. Оператор скрещивания и отбора аналогичны описанным выше. Поскольку задача простейшая, будем считать, что алгоритм не использует элитные стратегии.

Пусть на основе равномерного распределения создана исходная популяция из четырех особей, представленная в таблице 7.1

Таблица 7.1

Номер строки	Код генотипа	Значение целевой функции	Вероятность участия в размножении
1	01011	11	11/43
2	10010	18	18/43
3	00010	2	2/43
4	01100	12	12/43
		Сумма 43	

Предположим, что оператор отбора выбрал для производства потомков две пары строк (1, 2) и (2, 4). Работа оператора скрещивания проиллюстрирована в таблице 7.2.

При этом в каждой паре разбиение на подстроки происходит независимо. Точка разбиения выбирается случайным образом и показана звездочкой.

Пропорциональный простейший отбор (рулетка) выбирает n особей после n запусков. Колесо рулетки содержит по одному сектору для каждого гена популяции. Размер сектора пропорционален вероятности участия.

Пусть оператор мутации, несмотря на низкую вероятность, срабатывает для младшего бита потомка в строке 3 и данный код изменил свое значение с 10000 на 10001.

Таким образом, популяция за счет порожденных потомков расширилась до восьми особей, представленных в таблице 7.3.

Таблица 7.2

№ строки	Родители	Потомки	Значение целевой функции для потомков
1	0*1011	00010	2
2	1*0010	11011	27
3	100*10	10000	16
4	011*00	01110	14

Таблица 7.3

№ строки	Код	Значение целевой функции
Исходная популяция		
1	01011	11
2	10010	18
3	00010	2
4	01100	12
Порожденные потомки		
5	00010	2
6	11011	27
7	10001	17
8	01110	14

Оператор редукции далее сокращает популяцию до исходного числа особей, исключив из нее особи с минимальным значением целевой функции. Будут исключены строки 1, 3, 4, 5, и популяция первого поколения примет вид, представленный в таблице 7.4

Таблица 7.4

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в процессе размножения
1	10010	18	18/ 76
2	11011	27	27/ 76
3	10001	17	17/ 76
4	01110	14	14/ 76

На этом шаг работы генетического алгоритма закончится. Очевидно, что даже за эту одну итерацию качество популяции значительно возросло. Если в исходной популяции среднее значение целевой функции было 10, 75, а ее минимальное значение составляло 2, то в популяции первого поколения среднее значение увеличилось до 19, а минимальное значение составило 14. Лучшее же решение увеличилось с 18 до 27 при оптимальном решении 31.

Таким образом, данный пример наглядно иллюстрирует процесс улучшения как популяции в целом, так и поиск наилучшего решения в результате работы генетического алгоритма.

7.2. *Решение задачи коммивояжера с помощью генетического алгоритма*

Задача коммивояжера является классической оптимизационной задачей. Суть ее заключается в следующем. Дано множество из n городов и матрица расстояний между ними или стоимостей переезда (в зависимости от интерпретации). Цель коммивояжера – объехать все эти города по кратчайшему пути или с наименьшими затратами на поездку. Причем в каждом городе он должен побывать один раз и свой путь закончить в том же городе, откуда начал. Для решения предлагается следующая задача: имеется пять городов, стоимость переезда между которыми представлена матрицей (таблица 7.5).

Таблица 7.5

	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
Г 1	0	4	6	2	9
Г 2	4	0	3	2	9
Г 3	6	3	0	5	9
Г 4	2	2	5	0	8
Г 5	9	9	9	8	0

Исходная популяция представлена в таблице 7.6.

Пусть для скрещивания были выбраны следующие пары: (1,3) и (2,4). В результате были получены потомки, представленные в таблице 7.7.

Таблица 7.6

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в размножении
1	12345	29	32/122 (0,26)
2	21435	29	32/122
3	54312	32	29/122 (0,23)
4	43125	32	29/122

Таблица 7.7

№ строки	Родители	Потомки	Значение целевой функции для потомков
1 (1)	1 | 23 | 45	5 | 43 | 12	32
2 (3)	5 | 43 | 12	1 | 23 | 54	28
3 (2)	2 | 143 | 5	4 | 312 | 5 мутация 13254	32
4 (4)	4 | 312 | 5	2 | 143 | 5	29

Пусть для потомка (12345) сработал оператор мутации, и обменялись местами числа 2 и 3. В данном случае строка (12345) изменилась и приняла значение (13254). Популяция первого поколения после отсечения «худших» особей в результате работы оператора редукции приняла вид, представленный в таблице 7.8.

Таблица 7.8

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в процессе размножения
1	12345	29	28/111 29/115
2	21435	29	28/111 28/115
3	13254	28	29/111 29/115
4	21435	29	28/111 28/115

Пусть для получения второго поколения были выбраны следующие пары строк: (1, 4) и (2, 3). В результате были получены потомки, показанные в таблице 7.9.

Таблица 7.9

<table>
<tr><th>№ строки</th><th>Родители</th><th>Потомки</th><th>Значение целевой функции для потомков</th></tr>
<tr><td>1</td><td>| 123 | 45</td><td>| 214 | 35</td><td>29</td></tr>
<tr><td>2</td><td>| 214 | 35</td><td>| 123 | 45</td><td>29</td></tr>
<tr><td>3</td><td>| 21 | 435</td><td>| 13 | 452</td><td>32</td></tr>
<tr><td>4</td><td>| 13 | 254</td><td>| 21 | 354</td><td>29</td></tr>
</table>

Популяции второго поколения после отсечения худших особей приняла вид, показанный в таблице 7.10.

Таблица 7.10

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в процессе размножения
1 (1)	12345	28	29/114
2 (2)	21435	29	28/114
3 (3)	13254	28	29/114
4 (н)	21354	29	28/114

Таким образом, после двух итераций значение целевой функции для лучшего решения изменилось с 29 на 28, среднее значение изменилось с 30,5 до 28,75, а общее качество с 122 до 114. Наблюдается улучшение качества популяции.

7.3. Практические упражнения

Задача 1. Провести поиск минимума одномерной функции $f(x)=x^2–16x +5$ с помощью генетических алгоритмов в интервале [0, 30]. Описать 2 популяции. Генотип алгоритма представляет собой строку из 5 бит. Размер популяции - 4. Например, строка 01010 соответствует числу $x=10$, а $f(x)= –55$. Использовать одноточечный кроссинговер. Мутация заключается в инверсии одного из битов строки, выбираемого случайно. Элитизм необходимо использовать.

Задача 2. Провести поиск максимума одномерной функции $f(x)= –2x^2 +12$ на интервале от $0 <x< 20$ с помощью генетических алгоритмов. Описать 2 популяции. Генотип алгоритма представляет собой строку из 5 бит. Например, строка 01011 соответствует числу $x=11$, а $f(x)= –351$. Использовать одноточечный кроссинговер. Мутация заключается в инверсии одного из битов строки, выбираемого случайно. Элитизм использовать.

Задача 3. Провести поиск максимума одномерной функции $f(x)= –4x^2 +16$ на интервале от $0 <x< 20$ с помощью генетических алгоритмов. Описать 2 популяции. Генотип алгоритма представляет собой строку из 5 бит. Например, строка 01010 соответствует числу $x=10$, а $f(x)= –384$. Использовать одноточечный кроссинговер. Мутация заключается в инверсии одного из битов строки, выбираемого случайно. Элитизм использовать.

Задача 4. Провести поиск максимума одномерной функции $f(x)= –4x^2 +18$ на интервале от $0 <x< 20$ с помощью генетических алгоритмов. Описать 2 популяции. Генотип алгоритма представляет собой строку из 5 бит. Например, строка 01010 соответствует числу $x=10$, а $f(x)= –382$. Использовать одноточечный кроссинговер. Мутация заключается в инверсии одного из битов строки, выбираемого случайно. Элитизм использовать.

Задача 5. Решить задачу коммивояжера с использованием генетических алгоритмов. Коммивояжер должен объехать все города и вернуться в тот же город, откуда выехал первый раз, потратив при этом минимум средств. Затраты на поездки представлены матрицей. Использовать изощренный кроссинговер. Элитизм не использовать.

	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
Г 1	0	4	3	2	5
Г 2	4	0	3	2	5
Г 3	4	3	0	5	6
Г 4	2	2	5	0	4
Г 5	5	3	7	4	0

Задача 6. Решить задачу коммивояжера с использованием генетических алгоритмов. Коммивояжер должен объехать все города и вернуться в тот же город, откуда выехал первый раз, потратив при этом минимум средств. Затраты на поездки представлены матрицей. Использовать изощренный кроссинговер. Элитизм использовать.

	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
Г 1	0	3	3	2	5
Г 2	3	0	3	2	5
Г 3	4	3	0	5	4
Г 4	2	2	5	0	3
Г 5	4	3	5	3	0

Контрольные вопросы

1. Преимущества генетических алгоритмов.
2. Основные термины генетических алгоритмов.
3. Этапы выполнения генетического алгоритма.
4. Применение стратегии элитизма в генетических алгоритмах.
5. Принцип работы оператора селекции (отбора).
6. Принцип работы операторов скрещивания.
7. Принцип работы операторов мутации.
8. Преимущества различных операторов мутацию
9. Принцип работы оператора редукции.
10. Результат работы генетического алгоритма.
11. Что даёт применение кода Грея.

8. КОЛЛЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Цель практического занятия: выработать навыки по решению задач в группах (жюри, совещание, собрание акционеров и т.п.)

8.1.Парадокс Кондорсе

В основной части занятия формулируется задача определения кандидата в следующем виде.

Пусть на голосование поставлены три кандидата: A, B и C, и голоса распределились, как в таблице 8.1. Определить какому кандидату отдать предпочтение по методу Кондорсе.

Таблиц а 8.1

Распределение голосов

Число голосующих	Предпочтения
23	A → B → C
17	B → C → A
2	B → A → C
10	C → A → B
8	C → B → A

Сравниваются предпочтения по отношению к парам кандидатов. Берем A и C: тогда A предпочитают 23+2=25; C по сравнению с A предпочитают: 17+10+8=35. Следовательно, C предпочтительнее A (C→A) по воле большинства.

Сравнивая попарно аналогичным образом A и B, B и C, получаем: B→ C (42 против 18), C→A (35 против 25) и A→ B (33 против 27). Следовательно, мы пришли к противоречию, к не транзитивному отношению A→B→C→A .

Столкнувшись с этим парадоксом, Кондорсе выбрал «наименьшее зло», а именно то мнение, которое поддерживается большинством голосов (избранным следует считать кандидата A).

8.2.Правило большинства голосов

Изменим несколько результаты голосования, чтобы избежать парадокса Кондорсе. Предположим, что голоса распределились так, как показано в таблице 8.2. Нетрудно подсчитать, что при этих новых результатах голосования, в соответствии с принципом Кондорсе, избранным будет кандидат C, который при попарном сравнении побеждает двух других кандидатов.

Таблица 8.2

Распределение голосов (правило большинства)

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \rightarrow C \rightarrow B$
17	$B \rightarrow C \rightarrow A$
2	$C \rightarrow B \rightarrow A$
10	$C \rightarrow A \rightarrow B$

Однако если мы используем другой принцип выбора: *большинство голосующих,* которые назвали данного кандидата лучшим, то победителем оказывается кандидат А. Но при этом кандидат А не набрал абсолютного большинства голосов. Мы видим, что способ определения победителя при демократической системе голосования (один человек — один голос) зависит от процедуры голосования.

8.3. Метод Борда

Определить какому кандидату отдать предпочтение по методу Борда.

Согласно этому методу, результаты голосования выражаются в виде числа баллов, набранных каждым из кандидатов. Пусть число кандидатов равно п. Тогда за первое место присуждается п баллов, за второе — п-1, за последнее — один балл.

Применим метод Борда к приведенному выше примеру (таблица 8.2). Подсчитаем число баллов для каждого из кандидатов:

A: 23*3 + 17*1 + 2*1 + 10*2 = 108;

B: 23*1 + 17*3 + 2*2 + 10*1 = 88;

C: 23*2 + 19*2 + 16*2 + 2*3 = 122.

В соответствии с методом Борда мы должны объявить победителем кандидата С.

Однако с методом Борда, как и с принципом Кондорсе, возникают проблемы. Предположим, что результаты голосования в выборном органе представлены в таблице 8.3. Подсчитав баллы в соответствии с методом Борда, получим: А — 124, В — 103, С — 137. В соответствии с методом Борда победителем следует объявить кандидата С. Однако в данном случае явным победителем является кандидат А, набравший абсолютное большинство голосов: 31 из 60.

Таблица 8.3

Распределение голосов по методу Борда

Число голосующих	Предпочтения
31	$A \rightarrow C \rightarrow B$
12	$B \rightarrow C \rightarrow A$
17	$C \rightarrow B \rightarrow A$
2	$C \rightarrow A \rightarrow B$

Приведенные примеры позволяют понять, что парадоксы при голосовании не возникают лишь в случае, когда победитель определяется по принципу абсолютного большинства голосов. Однако такой случай нетипичен для большинства выборов в демократических странах. Обычно число кандидатов больше, чем два, и редки случаи, когда кто-то из них сразу же получает поддержку абсолютного большинства избирателей.

Интересно, что парадоксы голосования сохраняются и при введении двух туров и условии, что во второй тур выходят два кандидата, набравшие большинство голосов. Обратимся к таблице 8.1, составленной Кондорсе. В соответствии с предпочтениями во второй, тур выходят А (23 голоса) и В (19 голосов), после чего побеждает А. Однако при небольшом усилении первоначальной позиции А: предпочтения двух избирателей (3-я строка) выглядят как А → В → С, во второй тур выходят А (25 голосов) и С (20 голосов), после чего побеждает С. Ясно, что такой результат голосования противоречит здравому смыслу.

8.4. Практические упражнения

Задача 1. Какой кандидат выиграет А, Б, С по методу Кондорсе и по методу Борда для заданного распределения голосов?

Число голосующих	Предпочтение
34	А → Б → С
23	А→ С → Б
26	С → Б → А
2	Б→С → А
13	С → А → Б

Задача 2. Какой кандидат выиграет А, Б, С по методу Кондорсе и по методу Борда для заданного распределения голосов?

Число голосующих	Предпочтение
24	А → Б → С
23	А→ С → Б
26	С → Б → А
6	Б→С → А
12	С → А → Б

Задача 3. Какой кандидат выиграет А, Б, С по методу Кондорсе и по методу Борда для заданного распределения голосов?

Число голосующих	Предпочтение
24	А → Б → С
23	А→ С → Б
26	С → Б → А
20	Б→С → А
16	С → А → Б

Задача 4. Какой кандидат выиграет А, Б, С по методу Кондорсе и по методу Борда для заданного распределения голосов?

Число голосующих	Предпочтение
24	А → Б → С
25	А→ С → Б
26	С → Б → А
25	Б→С → А
12	С → А → Б

Контрольные вопросы

1. Достоинства и недостатки группы принимающей решение (ГПР).
2. Метод Кондорсе и его недостатки.
3. Метод большинства голосующих и его недостатки.
4. Метод Борда и его недостатки.
5. Что такое теорема невозможности.

9. МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Цель практического занятия: выработать умение построения сетевых графиков для принятия обоснованных решений.

9.1. Построение сетевых графиков

Преподаватель демонстрирует роль графиков в принятии решений и их представление в виде сетевого графика и в виде Гантт-карты (см. рис.9.1 и 9.2).

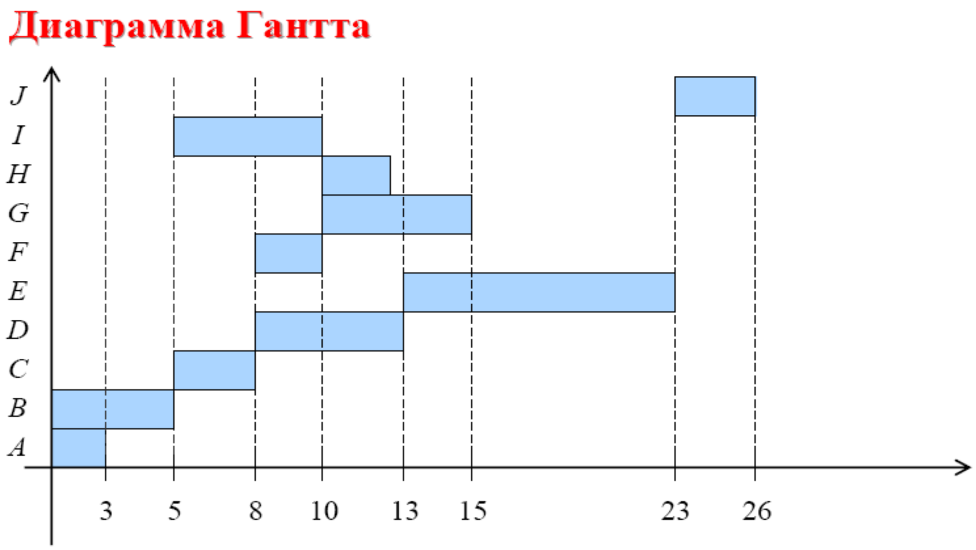


Рис.9.1

На практике приходится сталкиваться с задачами планирования разных работ, процесс выполнения которых нельзя отразить в формульных зависимостях. Например, строительство крупного объекта, разработка сложного радиоэлектронного комплекса и т.п.

Фрагмент сетевого графика работ

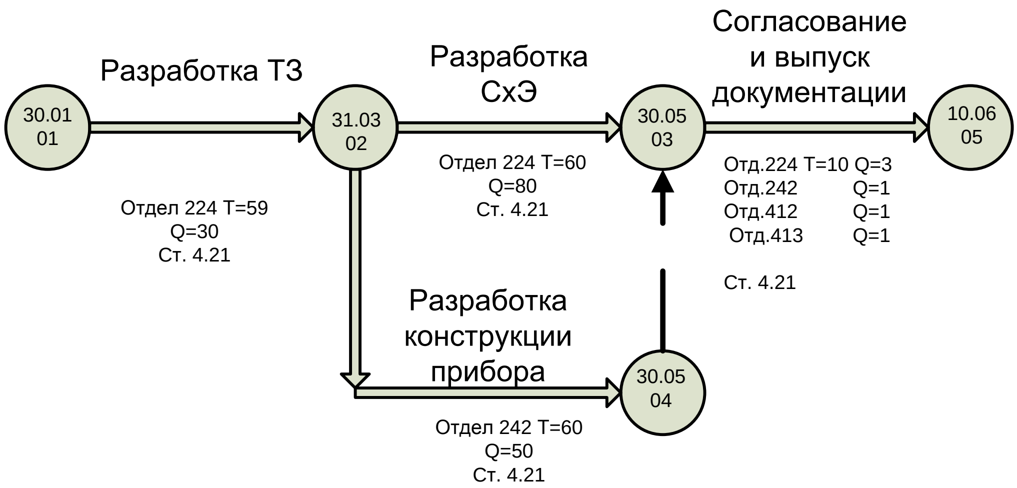


Рис.9.2. Фрагмент сетевого графика

Характерная особенность таких проектов – взаимная обусловленность проводимых работ, выраженная в требовании соблюдать определенный порядок выполнения работ. Следовательно, подготовка решений при разработке проектов должна проводиться с учетом многих факторов, отражающих ограниченность сырьевых, денежных, энергетических ресурсов и ограниченного времени, отводимого на предполагаемые работы. Одним из методов, широко применяемых в исследовании проблем, является метод сетевого планирования.

Метод сетевого планирования позволяет решать, как прямые, так и обратные задачи исследования операций. Первые связаны с оценкой последствий выбора определенного решения, вторые - с поиском наилучших решений.

9.2. Критический путь на графе

Последовательными называются работы, лежащие на некотором пути графа. Параллельные работы не могут составить путь и изображаются несколькими дугами, соединяющие вершины, например: события 03 и 04.

Связи между событиями, изображенные пунктирными линиями, еще называют фиктивными работами.

В любом ССГ (рис.9.2) имеется начальное событие (01) и конечное событие (05).

Каждая работа представляет собой процесс, связанный с затратами труда, материальных ресурсов и времени. Трудоемкость обозначается буквой Q, а продолжительность работы буквой Т. Стадия разработки определяются в соответствии со стандартом.

Путь, имеющий в ССГ наибольшую продолжительность, называется критическим, а работы находящиеся на нем – критическими.

Особенность критических работ определяется необходимостью их четкого выполнения. Срыв таких работ приводит к срыву плана.

9.3. Практические упражнения

Задача 1.Составить сводный сетевой график выполнения курсового проекта. Начало –15.09.2015, защита проекта –15.12.2015. Выделить параллельные работы и найти на графике критический путь.

Задача 2.Составить сводный сетевой график выполнения дипломного проекта. Начало –15.02.2015, защита проекта –15.06.2015. Выделить параллельные работы и найти на графике критический путь.

Контрольные вопросы

1. Для чего требуются сетевые графики?
2. Способ составления сводного сетевого графика.
3. Как найти на графике критический путь?
4. Как оптимизировать сетевой график и как изменится в этом случае критический путь?

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов А.В. Системный анализ. Учеб. для вузов/А.В. Антонов.-2-е изд.,стер.-М.: Высш. шк.,2006.-454 с.
2. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. -416с.
3. Ростовцев В.С. Теория принятия решений: учебное пособие./В.С Ростовцев – Киров: Изд-во ВятГУ, 2009.- 128с.) (Э 3048)
4. Ростовцев В.С. Принципы построения экспертных систем: учебное пособие:.- 2-е изд., перераб. и доп. - Киров: Изд-во ВятГУ, 2007.-156 с. (Допущено учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети») (Решение УМО № 16-07/145 от 27.06.2007г.)
5. Ростовцев В.С. Принципы построения экспертных систем: учебное пособие для самостоятельной работы. - 2-е изд., перераб. и доп. - /Ростовцев В.С.; Вятский государственный университет.- Киров: О-Краткое, 2008.-104 с.
6. Ростовцев В.С. Лабораторный практикум. Теория принятия решений: методические указания к лабораторным и сам, работам, 3 курс, ВятГУ, ФАВТ, каф. ЭВМ. Киров.-2009-31с. (Э-2939)