МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и информационных систем

Факультет автоматики и вычислительной техники

Кафедра электронных вычислительных машин

В. С. РОСТОВЦЕВ

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Киров

2020

УДК 519.83(07)

Р785

Рекомендовано к изданию кафедрой электронных вычислительных машин факультета автоматики и вычислительной техники ВятГУ

Допущено редакционно-издательской комиссией методического совета ВятГУ в качестве учебного пособия для студентов направлений 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.03 «Прикладная информатика» всех профилей подготовки

Рецензенты:

к. т. н., доцент,

и. о. зав. кафедрой систем автоматического управления ВятГУ

Ю. В. Ланских;

доктор физико-математических наук

А. В. Шатров

Ростовцев, В. С.

Р785 Теория игр : учебное пособие / В. С. Ростовцев. – Киров : ВятГУ, 2020. – 120 с.

В учебном пособии рассмотрены статические игры с полной информацией, равновесие Джона Нэша, биматричные игры с примером её решения, коалиционные игры, пример решения коалиционной игры, позиционные игры с графическим представлением игры, позиционные игры с неполной информацией, дифференциальные игры, бесконечные антагонистические игры, риски и их оценка в теории игр.

УДК 519.83(07)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии изложены основные понятия и результаты теории игр. Теория игр – это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т. е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах. Теорию математических моделей принятия оптимальных решений принято называть исследованием операций, поэтому теорию игр следует рассматривать как прикладную математическую теорию – составную часть исследования операций.

Теория игр находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких, как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т. д.

Матричные игры могут служить математическими моделями многих простейших конфликтных ситуаций из области экономики, В частности, теория игр применяется в вопросах борьбы фирм за рынки, в явлениях олигополии, в планировании рекламных компаний, при формировании цен на конкурентных рынках, в обменных и торговых операциях, в биржевой игре, в анализе коалиционного поведения и т.д. С позиций теории игр можно рассматривать вопросы централизации и децентрализации управления производством, оптимальное планирование по нескольким показателям, планирование в условиях неопределенности, порождаемой, например, техническим прогрессом, преодоление ведомственных противоречий и другие вопросы.

Несмотря на наличие богатой монографической и специальной литературы по теории игр, учебных пособий, посвященных этому разделу математики, сравнительно немного и в них рассматриваются в основном отдельные разделы теории игр. Настоящее учебное пособие восполняет этот пробел. В нем отражено большинство современных направлений теории игр. Пособие методически построено так, что понятие модели конфликта (игры) развивается от простой (матричные игры) до наиболее сложной (дифференциальные игры).

Большинство учебных программ вузов предполагает чтение отдельных разделов или специальных курсов по теории игр. Данное учебное пособие построено таким образом, чтобы каждая глава могла служить основой такого курса.

Во всех главах содержатся многочисленные примеры, иллюстрирующие основные положения теории. Некоторые из них представляют самостоятельный интерес. В конце каждой главы приведены упражнения для индивидуальной работы, расположенные в порядке изложения материала и возрастания сложности. В ряде случаев они существенно дополняют содержание главы. Систематическое выполнение этих упражнений является важной формой изучения теории игр.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В ТЕОРИИ ИГР

1.1. Основные понятия и определения

В процессе целенаправленной человеческой деятельности возникают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (участников, групп, сторон) либо прямо противоположны (антагонистичны), либо, не будучи непримиримыми, все же не совпадают. Простейшими и наиболее наглядными примерами таких ситуаций являются спортивные игры, арбитражные споры, военные учения (маневры), борьба между блоками избирателей за своих кандидатов, в международных отношениях – отстаивание интересов своего государства и т. п. Здесь каждый из участников сознательно стремится добиться наилучшего результата за счет другого участника. Подобного рода ситуации встречаются и в различных сферах производственной деятельности.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других, можно разбить на два типа: интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. В этих случаях может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит больший выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются конфликтными.

Для указанных ситуаций характерно, что эффективность решений, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, существенно зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, так как и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенности. Так, при определении объема выпуска продукции на одном предприятии нельзя не учитывать размеров выпуска аналогичной продукции на других предприятиях. В реальных условиях нередко возникают ситуации, в которых антагонизм отсутствует, но существуют противоположные тенденции. Например, для нормального функционирования производства, с одной стороны, необходимо наличие запасов разнообразных ресурсов, но с другой – стремление к чрезвычайному увеличению этих запасов вызывает дополнительные затраты по их содержанию и хранению. В приведенных примерах конфликтные ситуации возникают в результате сознательной деятельности людей. Однако на практике встречаются неопределенности, которые порождаются не сознательным противодействием другой стороны, а недостаточной информированностью об условиях проведения планируемой операции.

Раздел математики, изучающий конфликтные ситуации на основе их математических моделей, называется теорией игр. Таким образом, теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т. е. таких действий, которые обеспечивали бы ему наилучший результат. Игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике. Здесь выигрышем могут быть эффективность использования дефицитных ресурсов, производственных фондов, величина прибыли, себестоимость и т. д.

Необходимо подчеркнуть, что методы и рекомендации теории игр разрабатываются применительно к таким специфическим конфликтным ситуациям, которые обладают свойством многократной повторяемости. Если конфликтная ситуация реализуется однократно или ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Чтобы проанализировать конфликтную ситуацию по ее математической модели, ситуацию необходимо упростить, учтя лишь важнейшие факторы, существенно влияющие на ход конфликта.

Игрой называется упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам.

Игра – это совокупность правил, определяющих возможные действия (чистые стратегии) участников игры. Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший исход. Исход игры – это значение некоторой функции, называемой функцией выигрыша (платежной функцией), которая может задаваться либо аналитически выражением, либо таблично. В дальнейшем будем рассматривать только такие игры, в которых выигрыш выражается количественно: стоимостью, баллами и т. д.

Величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком.

Стратегией игрока называется совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. При выборе этой стратегии считается, что противник делает все, чтобы помешать игроку добиться своей цели.

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

Основное предположение, исходя из которого находят оптимальные стратегии, состоит в том, что противник по меньшей мере так же разумен, как и сам игрок, и делает все для того, чтобы добиться своей цели.

Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

Всякая игра состоит из отдельных партий.

Партией называется каждый вариант реализации игры определенным образом.

В свою очередь, в партии игроки совершают конкретные ходы.

Ходом называется выбор и реализация игроком одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление.

Ходы бывают личные и случайные. При личном ходе игрок самостоятельно и осознанно выбирает и реализует один из возможных вариантов действий (чистую стратегию).

Случайным ходом называется выбор из ряда возможных альтернатив, осуществляемый некоторой незаинтересованной средой (природой).

Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов. Например, в шахматах каждый ход является личным. При случайном ходе выбор чистой стратегии производится с использованием какого-либо механизма случайного выбора, например, с применением таблицы случайных чисел.

1.2. История исследований по теории игр

Оптимальные решения или стратегии в математическом моделировании предлагались ещё в XVIII в. Задачи производства и ценообразования в условиях олигополии, которые стали позже хрестоматийными примерами теории игр, рассматривались в XIX веке А. Курнои Ж. Бертраном. В начале XX века Э. Ласкер, Э. Цермело, Э. Борель выдвигают идею математической теории конфликта интересов.

Математическая теория игр берёт своё начало из неоклассической экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге (1944 года) Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (англ.Theory of Games and Economic Behavior).

Эта область математики нашла некоторое отражение в общественной культуре. В 1998 году американская писательница и журналистка Сильвия Назар издала книгу[3]о судьбе Джона Нэша, нобелевского лауреата по экономике и учёного в области теории игр; а в 2001 по мотивам книги был снят фильм «Игры разума». Некоторые американские телевизионные шоу, например, «Friend or Foe», «Alias» или «NUMB3RS», периодически ссылаются на теорию в своих эпизодах.

В 1949 году Дж. Нэш пишет диссертацию по теории игр, через 45 лет он получает Нобелевскую премию по экономике. Дж. Нэш после окончания Политехнического института Карнеги с двумя дипломами – бакалавра и магистра – поступил в Принстонский университет, где посещал лекции Джона фон Неймана. В своих трудах Дж. Нэш разработал принципы «управленческой динамики».

Первые концепции теории игр анализировали антагонистические игры, когда есть проигравшие и выигравшие за их счет игроки. Нэш разрабатывает методы анализа, в которых все участники или выигрывают, или терпят поражение. Эти ситуации получили названия «равновесие по Нэшу», или «некооперативное равновесие», в ситуации стороны используют оптимальную стратегию, что и приводит к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение ухудшит их положение. Эти работы Дж. Нэша сделали серьёзный вклад в развитие теории игр, были пересмотрены математические инструменты экономического моделирования. Дж. Нэш показывает, что классический подход к конкуренции А. Смита, когда каждый сам за себя, неоптимален. Более оптимальны стратегии, когда каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других.

Хотя теория игр первоначально и рассматривала экономические модели, вплоть до 1950-х она оставалась формальной теорией в рамках математики. Но уже с 1950-х гг. начинаются попытки применить методы теории игр не только в экономике, но в биологии, кибернетике, технике, антропологии. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьёзно заинтересовались военные, которые увидели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений.

В 1960–1970 гг. интерес к теории игр угасает, несмотря на значительные математические результаты, полученные к тому времени. С середины 1980-х гг. начинается активное практическое использование теории игр, особенно в экономике и менеджменте. За последние 20 – 30 лет значение теории игр и интерес значительно растет, некоторые направления современной экономической теории невозможно изложить без применения теории игр.

Большим вкладом в применение теории игр стала работа Томаса Шеллинга, нобелевского лауреата по экономике 2005 г. «Стратегия конфликта». Т. Шеллинг рассматривает различные «стратегии» поведения участников конфликта. Эти стратегии совпадают с тактиками управления конфликтами и принципами анализа конфликтов в конфликтологии (это психологическая дисциплина) и в управлении конфликтами в организации (теория менеджмента). В психологии и других науках используют слово «игра» в других смыслах, нежели чем в математике. Некоторые психологи и математики скептически относятся к использованию этого термина в других смыслах, сложившихся ранее. Культурологическое понятие игры было дано в работе Йохана Хёйзинга Homo Ludens (статьи по истории культуры), автор говорит об использовании игр в правосудии, культуре, этике.. говорит о том, что игра старше самого человека, так как животные тоже играют. Понятие игры встречается в концепции Эрика Бёрна «Игры, в которые играют люди, люди, которые играют в игры». Это сугубо психологические игры, основанные натрансакционном анализе. Понятие игры у Й.Хёзинга отличается от интерпретации игры в теории конфликтов и математической теории игр. Игры также используются для обучения в бизнес-кейсах.

Математическая теория игр сейчас бурно развивается, рассматриваются динамические игры. Однако, математический аппарат теории игр – затратен. Его применяют для оправданных задач: политика, экономика монополий и распределения рыночной власти и т. п. Ряд известных ученых стали Нобелевскими лауреатами по экономикеза вклад в развитие теории игр, которая описывает социально-экономические процессы. Дж. Нэш, благодаря своим исследованиям в теории игр, стал одним из ведущих специалистов в области ведения «холодной войны», что подтверждает масштабность задач, которыми занимается теория игр.

Нобелевскими лауреатами по экономикеза достижения в области теории игр и экономической теории стали:Роберт Ауманн, Райнхард Зелтен, Джон Нэш, Джон Харсаньи, Уильям Викри, Джеймс Миррлис, Томас Шеллинг, Джордж Акерлоф, Майкл Спенс, Джозеф Стиглиц, Леонид Гурвиц, Эрик Мэскин, Роджер Майерсон.

1.3. Классификация игр

Конфликтные ситуации, встречающиеся в практике, порождают различные виды игр. Классифицировать игры можно по разным признакам (рис. 1.1).

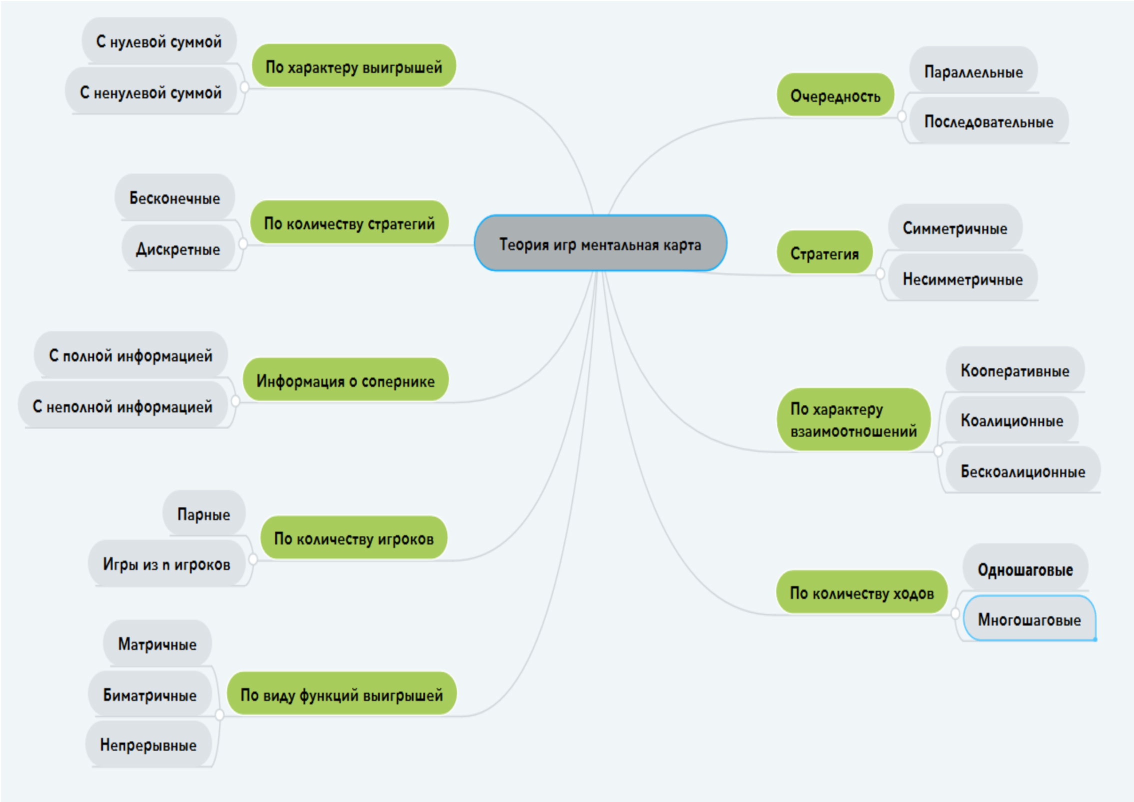

Рис.1.1. Ментальная карта по теории игр

Различают, например, игры по количеству игроков. В игре может участвовать любое конечное число игроков.

Если в игре игроки объединяются в две группы, преследующие противоположные цели, то такая игра называется игрой двух лиц (парная игра).

В зависимости от количества стратегий в игре они делятся на конечные или бесконечные. В зависимости от взаимоотношений участников различают игры бескоалиционные (участники не имеют права заключать соглашения), или некооперативные, и коалиционные, или кооперативные. По характеру выигрышей игры делятся на игры с нулевой суммой и ненулевой суммой.

Игрой с нулевой суммой называется игра, в которой общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяется в ходе игры, в связи с чем сумма выигрышей равна нулю (проигрыш принимается как отрицательный выигрыш).

В играх с ненулевой суммой сумма выигрышей отлична от нуля. Например, при проведении лотереи часть взноса участников идет организатору лотереи.

Матричной игрой (при двух участниках) называется игра, в которой выигрыши первого игрока (проигрыши второго игрока) задаются матрицей.

В биматричных играх выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей. Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока сосредоточены в матрице данного игрока.

Другие типы таких игр различаются видом аналитического выражения платежной функции. По количеству ходов игры делятся на одноходовые (выигрыш распределяется после одного хода каждого игрока) и многоходовые (выигрыш распределяется после нескольких ходов). Многоходовые игры в свою очередь делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные и др. В зависимости от объема имеющейся информации различают игры с полной и неполной информацией.

В реальных конфликтных ситуациях каждый из игроков сознательно стремится найти наилучшее для себя поведение, имея общее представление о множестве допустимых для партнера ответных действий, но не ведая о том, какое же конкретное решение будет выбрано им в данный момент. В этом проявляется в равной мере неопределенность ситуации для каждого из партнеров.

Игры, в которых участники стремятся добиться для себя наилучшего результата, сознательно выбирая допустимые правилами игры способы действий, называются стратегическими.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от их стратегий.

Однако в экономической практике нередко приходится формализовать (моделировать) ситуации, придавая им игровую схему, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют играми с природой, понимая под термином "природа" всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку (его называют иногда статистиком, а соответствующую игру – статистической) приходится принимать решение. Например, выбор агрономической службой сельскохозяйственного предприятия участков для посева той или иной культуры в надежде получить в предстоящем году наилучший урожай; определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса; формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды и т. п. Здесь в качестве второго игрока выступает: в первом примере – в буквальном смысле природа; во втором – уровень спроса; в третьем – размеры ожидаемой прибыли.

В играх с природой степень неопределенности для сознательного игрока (статистика) возрастает: если в стратегических играх каждый из участников постоянно ожидает наихудшего для себя ответного действия партнера, то в статистических играх "природа", будучи индифферентной в отношении выигрыша инстанцией, может предпринимать и такие ответные действия (будем говорить: реализовывать такие состояния), которые ей совершенно невыгодны, а выгодны сознательному игроку (статистику).

В параллельных играх игроки ходят одновременно, или, по крайней мере, они не осведомлены о выборе других до тех пор, пока все не сделают свой ход. В последовательных, или динамических, играх участники могут делать ходы в заранее установленном либо случайном порядке, но при этом они получают некоторую информацию о предшествующих действиях других. Эта информация может быть даже не совсем полной, например, игрок может узнать, что его противник из десяти своих стратегий точно не выбрал пятую, ничего не узнав о других.

Различия в представлении параллельных и последовательных игр рассматривались выше. Первые обычно представляют в нормальной форме, а вторые – в экстенсивной.

Важное подмножество последовательных игр составляют игры с полной информацией. В такой игре участники знают все ходы, сделанные до текущего момента, равно как и возможные стратегии противников, что позволяет им в некоторой степени предсказать последующее развитие игры. Полная информация не доступна в параллельных играх, так как в них неизвестны текущие ходы противников. Большинство изучаемых в математике игр – с неполной информацией. Например, вся «соль» Дилеммы заключённого или Сравнения монеток заключается в их неполноте.

В то же время есть интересные примеры игр с полной информацией: «Ультиматум», «Многоножка». Сюда же относятся шахматы, шашки, го, манкала и другие.

Часто понятие полной информации путают с похожим – совершенной информации. Для последнего достаточно лишь знание всех доступных противникам стратегий, знание всех их ходов необязательно.

Игры в реальном мире или изучаемые в экономике игры, как правило, длятся конечное число ходов. Математика не так ограничена, и в частности, в теории множеств рассматриваются игры, способные продолжаться бесконечно долго. Причём победитель и его выигрыш не определены до окончания всех ходов.

Задача, которая обычно ставится в этом случае, состоит не в поиске оптимального решения, а в поиске хотя бы выигрышной стратегии. Используя аксиому выбора, можно доказать, что иногда даже для игр с полной информацией и двумя исходами – «выиграл» или «проиграл» – ни один из игроков не имеет такой стратегии. Существование выигрышных стратегий для некоторых особенным образом сконструированных игр имеет важную роль в дескриптивной теории множеств.

Большинство изучаемых игр дискретны: в них конечное число игроков, ходов, событий, исходов и т. п. Однако эти составляющие могут быть расширены на множество вещественных чисел.

Игры, включающие такие элементы, часто называются дифференциальными. Они связаны с какой-то вещественной шкалой (обычно – шкалой времени), хотя происходящие в них события могут быть дискретными по природе. Дифференциальные игры также рассматриваются в теории оптимизации, находят своё применение в технике и технологиях, физике.

Метаигры – это такие игры, результатом которых является набор правил для другой игры (называемой целевой или игрой-объектом).

Цель метаигр – увеличить полезность выдаваемого набора правил.

Стохастическая игра в теории игр–повторяющаяся игра со случайными переходами состояний, разыгрываемая одним и более игроками.

Стохастические игры были изобретены Л. Шеплив начале 1950-х годов. Наиболее полным их описанием является сборник статей под редакцией А.Ноймана и С. Сорина. Более элементарная книга Дж. Филар и К. Вриз содержит общее изложение теории Марковских процессов принятия решений и стохастических игр двух лиц.

Ими был использован термин конкурентные Марковские процессы принятия решений (англ.Competitive MDPs) для обозначения стохастических игр одного и двух лиц.

Игра разыгрывается в течение ряда этапов. В начале каждого этапа игра находится в некотором состоянии. Игроки выбирают свои действия и получают выигрыши, зависящие от текущего состояния и действий. После этого система переходит случайным образом в другое состояние, распределение вероятности переходов зависит от предшествующего состояния и действий игроков. Эта процедура повторяется в течение конечного или бесконечного числа шагов. Общий выигрыш игроков часто определяется как дисконтированная сумма выигрышей на каждом этапе или нижний предел средних выигрышей за конечное число шагов.

При конечном числе игроков, конечных множествах действий и состояний игра с конечным числом повторений всегда имеет равновесие Нэша. Это справедливо также для игр с бесконечным числом повторений, если выигрыши участников представляют собой дисконтированную сумму.

Н. Вайель показал, что все стохастические игры двух лиц с конечными множествами состояний и действий имеют приближенные равновесия Нэша, если функции выигрыша представляют собой нижний предел средних значений выигрыша за конечное число шагов. Вопрос о существовании таких равновесий в играх с большим количеством участников остается открытым.

Стохастические игры находят применение в экономике и эволюционной биологии. Они представляют собой обобщение повторяющихся игр, которые соответствуют ситуации, когда имеется только одно состояние.

Кооперативные игры изучают поведение группы игроков, максимизирующий общий выигрыш.

Игра называется кооперативной, или коалиционной, если игроки могут объединяться в группы, взяв на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия. Этим она отличается от некооперативных игр, в которых каждый обязан играть за себя. Развлекательные игры редко являются кооперативными, однако такие механизмы нередки в повседневной жизни.

Часто предполагают, что кооперативные игры отличаются именно возможностью общения игроков друг с другом. В общем случае это неверно. Существуют игры, где коммуникация разрешена, но игроки преследуют личные цели, и наоборот.

Из двух типов игр, некооперативные описывают ситуации в мельчайших деталях и выдают более точные результаты. Кооперативные рассматривают процесс игры в целом. Попытки объединить два подхода дали немалые результаты. Так называемая программа Нэша уже нашла решения некоторых кооперативных игр как ситуации равновесия некооперативных игр.

Эта теория была популярной до 1970 года. Здесь возможен обмен информацией между участниками игры и формирование коалиций. В некооперативных играх исходным пунктом в анализе является индивидуальный участник, причем обмен информацией между участниками и формирование коалиций запрещены. Игра может быть представлена либо в стратегической (матричной), либо в развернутой форме.

Некооперативная игра – термин теории игр. Некооперативной игрой называется математическая модель взаимодействия нескольких сторон (игроков), в процессе которого они не могут формировать коалиции и координировать свои действия.

Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются матричными.

Бескоалиционные игры являются играми более общей природы.

Бескоалиционность понимается в том смысле, что группам игроков («коалициям») не приписывается ни каких-либо интересов, за исключением тех, которые вытекают из интересов отдельных игроков. Целью каждого игрока в такой игре является только получение по возможности наибольшего индивидуального результата.

Естественным расширением матричной игры двух игроков с нулевой суммой является позиционная игра, в которой может принимать участие более двух (конечное число) игроков, каждый из них может последовательно делать конечное число ходов, некоторые ходы могут быть случайными, а сведения о них могут меняться от хода к ходу. Такие игры могут быть формализованы, определенным образам преобразованы в игру, эквивалентную некоторой матричной игре двух игроков с нулевой суммой.

Дифференциальные игры раздел математической теории управления, в котором возможности игроков описываются дифференциальными уравнениями.

Симметричная игра. Игра будет симметричной тогда, когда соответствующие стратегии у игроков будут равны, то есть иметь одинаковые платежи. Иначе говоря, если игроки могут поменяться местами и при этом их выигрыши за одни и те же ходы не изменятся. Многие изучаемые игры для двух игроков – симметричные. В частности, таковыми являются: «Дилемма заключённого», «Охота на оленя», «Ястребы и голуби». В качестве несимметричных игр можно привести «Ультиматум» или «Диктатор».

	А	Б
А	1, 2	0, 0
Б	0, 0	1, 2

Рис. 1.2

Несимметричная игра. В примере ниже игра на первый взгляд может показаться симметричной из-за похожих стратегий, но это не так – ведь выигрыш второго игрока при профилях стратегий (А, А) и (Б, Б) будет больше, чем у первого (рис.1.2).

1.4. Матричные игры

Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются матричными.

При постановке игровых задач должны быть определены следующие условия:

– стороны, принимающие решения;
– множество всех возможных действий(стратегий);
– выигрыши сторон для каждой ситуации.

Если цели двух сторон являются прямо противоположными, то для них можно установить следующее правило: одна из сторон будет заинтересована в увеличении своего выигрыша, а другая – в его уменьшении.

Если у одного игрока имеется n стратегий (A1, A2, …,An), а у другого m стратегий (B1,B2,…,Bm) и игра состоит только из личных ходов, выбор пары AjBi единственным образом определяет исход игры aji. Если известны значения aji для каждой пары стратегий, то можно составить платежную матрицу.

Рассмотрим пример, заимствованный из книги Е.С. Вентцель «Элементы теории игр». В нашем распоряжении имеется три вида вооружения A1, A2, A3; у противника три вида самолетов B1, B2, B3.

Известно, что при применении вооружения A1 самолеты B1, B2, B3 поражаются с вероятностями 0,9; 0,4; 0,2; при применении вооружения A2 самолеты B1, B2, B3 поражаются с вероятностями 0,3; 0,6; 0,8; при применении вооружения A3 самолеты B1, B2, B3 поражаются с вероятностями 0,5; 0,7; 0,2. Требуется сформулировать конфликтную ситуацию в терминах теории игр.

Решение. Конфликтную ситуацию можно рассматривать как игру 3×3 с двумя личными ходами и одним случайным. Личный ход противника – выбор типа самолета. Наш личный ход – выбор типа вооружения. Случайный ход – применение вооружения. Этот ход может закончится поражением или не поражением самолета. Нашими стратегиями являются три варианта применения типов вооружения. Стратегиями противника – три варианта применения типов самолета. Наш выигрыш равен единице, если самолет поражен, и нулю в противном случае. Среднее значение выигрыша при каждой заданной паре стратегий есть вероятность поражения самолета данным вооружением. Платежная матрица представлена на рис. 1.3.

Решить игру – значит найти для каждого игрока наилучшие стратегии, которые обеспечат ему наибольший выигрыш или наименьший проигрыш.

	B1	B2	B3
A1	0,9	0,4	0,2
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,5	0,7	0,2

Рис. 1.3

Пусть требуется найти оптимальную стратегию для игрока А. Проанализируем последовательно каждую из его стратегий, начиная с А1.

Если игрок А выбрал стратегию Aj, то он должен рассчитывать на то, что игрок В ответит на нее той из своих стратегий, для которой его (игрока А) выигрыш aji будет минимален. Выберем это значение выигрыша, т.е. минимальное из чисел в j-й строке:

$$aj = \min_i aji.$$

Избегая всякого риска, игрок А должен выбрать из стратегий Aj, для которой значение aj является максимальным:

$$A = \max_j aj,$$

$$a = \max_j \min_i aji.$$

Выражение «a» определяет нижнюю цену игры (максиминный выигрыш) и тот гарантированный минимум, который получит игрок А, придерживаясь наиболее осторожной из своих стратегий. Для нашего примера (см. таблицу 6.1) вначале находятся минимальные значения в каждой строке (0,2; 0,3; 0,2), а затем среди них максимальное значение a = 0,3. Это и есть нижняя цена игры. Стратегия, соответствующая нижней цене игры, называется максиминной стратегией.

Игрок B заинтересован в том, чтобы свести выигрыш игрока A к минимуму. Следовательно, он должен проанализировать каждую из своих стратегий с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии:

$$bi = \max_{j} aji,$$

$$b = \min_{i} bi,$$

$$b = \min_{i} \max_{j} aji.$$

Выражение «b» определяет верхнюю цену игры (минимаксный выигрыш). Для нашего примера (см. рис.1.3) вначале находятся максимальные значения в каждом столбце (0,9; 0,7; 0,8), а затем среди них минимальное значение a = 0,7. Это и есть верхняя цена игры. Стратегия, соответствующая верхней цене игры, называется минимаксной стратегией.

Анализируя платежную матрицу, можно сделать вывод о неустойчивости минимаксных стратегий. Это означает, что если игрок A применит свою наиболее осторожную стратегию A2, а игрок B – стратегию B2, то средний выигрыш равен 0,6 (см. таблицу 6.1). Как только игроку B становится известно, что игрок A применяет стратегию A2, он может ответить на нее стратегией B1, уменьшив выигрыш игрока A с 0,6 до 0,3.

Следовательно, выигрыш при использовании минимаксных стратегий является неустойчивым, поскольку зависит от сведений о стратегии антагонистической стороны.

Существуют игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Для таких игр нижняя цена игры равна верхней и это общее значение называется чистой ценой игры. Элемент матрицы, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, называется седловой точкой матрицы. Игра, платежная матрица которой имеет седловую точку, называется игрой с седловой точкой. Рассмотрим пример (рис.1.4).

	B1	B2	B3	ai
A1	0,9	0,4	0,3	0.3
A2	0,6	0,6	0,1	0.6
A3	0,5	0,4	0,2	0.2
bj	0.9	0.6	0.3	

Рис. 1.4

Значение элемента платежной матрицы минимальное в своей строке и одновременно максимальное в своем столбце называется седловой точкой матрицы, которая определяет исход игры.

Для игр с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих из конфликтующих сторон. Если один из игроков будет придерживаться своей оптимальной стратегии, а другой отклоняться от нее, то он может только проиграть.

1.5. Сокращение размерности игровой задачи

Рассмотрим пример с платежной матрицей, приведенной на рис.1.5. Первый игрок имеет пять стратегий A1,A2,A3, A4, A5. Второй игрок имеет три стратегии B1,B2,B3.

Если первый игрок A применит свою стратегию, например, A2, то игрок B должен ответить своей стратегией B1. Стратегия B1 приносит минимальный проигрыш в 4 единицы среди стратегий B1, B2, B3.

Платежная матрица составляется с учетом выигрыша первого игрока A. Из рис. 1.5 видно, что стратегия A5 доминирует над стратегиями A1, A3, которые не могут быть решением игры по определению. Стратегия A2 доминирует над стратегией A4 которая тоже не может быть решением игры.

	B1	B2	B3	
A1	5	2	4	A1
A2	4	8	9	A2
A3	6	3	5	A3
A4	1	5	3	A4
A5	7	3	6	A5

Рис. 1.5. Пример платежной матрицы

Эти стратегии A1,A2,A4 можно удалить из платежной матрицы (рис. 1.6).

	B1	B2	B3	
A2	4	8	9	A2
A5	7	3	6	A5

Рис. 1.6. Пример платежной матрицы после первого упрощения

Из рис. 1.2 следует, что стратегия второго игрока В3, приносит игроку В больший проигрыш, чем стратегии В1, В2. Здесь можно удалить доминирующую стратегию В3 (рис.1.7).

	B1	B2	
A2	4	8	A2
A5	7	3	A5

Рис. 1.7. Пример платежной матрицы после второго упрощения

В результате упрощения платежная матрица 5 × 3 сокращена до размера 2 × 2.

Если каждый элемент матрицы одной строки (столбца) больше соответствующего элемента другой строки (столбца) или равен ему, то говорят, что первая стратегия доминирует над второй. Сформулируем правила сокращения размерности платежной матрицы.

Для игрока А из платежной матрицы удаляются доминируемые стратегии.

Для игрока В из платежной матрицы удаляются доминирующие стратегии.

Знание соотношения доминирования позволяет в ряде случаев свести игры $2 \times m$ и $n \times 2$ к играм размерностью 2×2.

1.6. Решение игр в смешанных стратегиях

1.6.1. Определение игры в смешанных стратегиях

В тех случаях, когда равновесная ситуация не может быть найдена, решение в чистых стратегиях отсутствует. Тогда каждая из сторон может использовать свои стратегии с вероятностью.

Задача состоит в том, чтобы определить эти вероятности таким образом, чтобы они обеспечивали максимально гарантированный выигрыш при учете действий противоположной стороны.

Для игр, не имеющих седловой точки, можно применять не одну чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий с целью гарантировать себе средний выигрыш, больший «а».

Смешанной стратегией называется набор вероятностей применения чистых стратегий.

В условиях смешанных стратегий каждая обычная ситуация (в чистых стратегиях) {Ai,Bj}является частным случаем и реализуется с вероятностями xi,yj. В ситуации {Ai,Bj} игрок А получает выигрыш aij.

Таким образом, математическое ожидание выигрыша игрока А в условиях смешанных стратегий будет

$$ha(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} aij*xi*yj$$

Оптимальные смешанные стратегии (x*,y*) находятся при выполнении условия

$$ha(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} aijxij*j \le$$

$$ha(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} aijxi*yj* \le$$

$$ha(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} aijxi*yj$$

Рассмотрим игру 2×2. Пусть игра задана матрицей, приведенной на рис. 1.8.

	B1	B2
A1	a11	a12
A2	a21	a22

Рис.1.8

Оптимальные смешанные стратегии игроков А и В определяются вероятностями $P = (p1,p2)$ и $Q = (q1,q2)$. Цена игры определяется следующими неравенствами:

$a11 \times p11 + a21 \times p2 \geq R$

$a12 \times p11 + a22 \times p2 \geq R$

$p1 > = 0;\ p2 > = 0;\ p1+p2 = 1$

$a11 \times q1 + a12 \times q2 \leq R$

$a21 \times q1 + a22 \times q2 \leq R$

$q1 > = 0;\ q2 > = 0;\ q1+q2 = 1$

Вероятности p1, p2, q1, q2 определяются путем решения системы неравенств:

$p1 = |a22 - a21| \ / \ [|a12 - a11| + |a22 - a21|]$

$p2 = |a12 - a11| \ / \ [|a12 - a11| + |a22 - a21|]$

$p2 = 1 - p1$

$q1 = |a22 - a12| \ / \ |a11 + a22 - a12 - a21|$

$q2 = 1 - q1$

Матрица игры приведена на рис.1.9.

	B1	B2
A1	2	3
A2	7	1

Рис. 1.9

Решить игру – значит найти p1,p2,q1,q2,R, удовлетворяющие соотношениям:

$$2 \times p1 + 7 \times p2 = R \qquad (1.1)$$

$3 \times p1 + p2 = R \qquad p2 = 1 - p1$

$$-5 \times p1 + 7 = R \qquad (1.2)$$

$2 \times p1 + 1 = R \qquad p1 = 6/7 \;\; p2 = 1/7 \;\; R = 19/7$

$$2 * q1 + 3 * q2 = R \qquad (1.3)$$

$7 \times q1 + q2 = R \qquad q2 = 1 - q1$

$$-q1 + 3 = R \qquad (1.4)$$

$6 \times q1 + 1 = R \qquad q1 = 2/7 \;\; q2 = 5/7 \;\; R = 19/7$

Графический метод решения игры приведен на рис.1.10. Из уравнения 1.2 при p1 = 0 получаем точку (0; 7), а при p1 = 1 получаем точку (1; 2). Соединяем отмеченные точки прямой линией.

Анализируя второе уравнение, получаем точки (0; 1) и (1; 3). Строим вторую линию. Точка пересечения этих прямых соответствует решению системы уравнений.

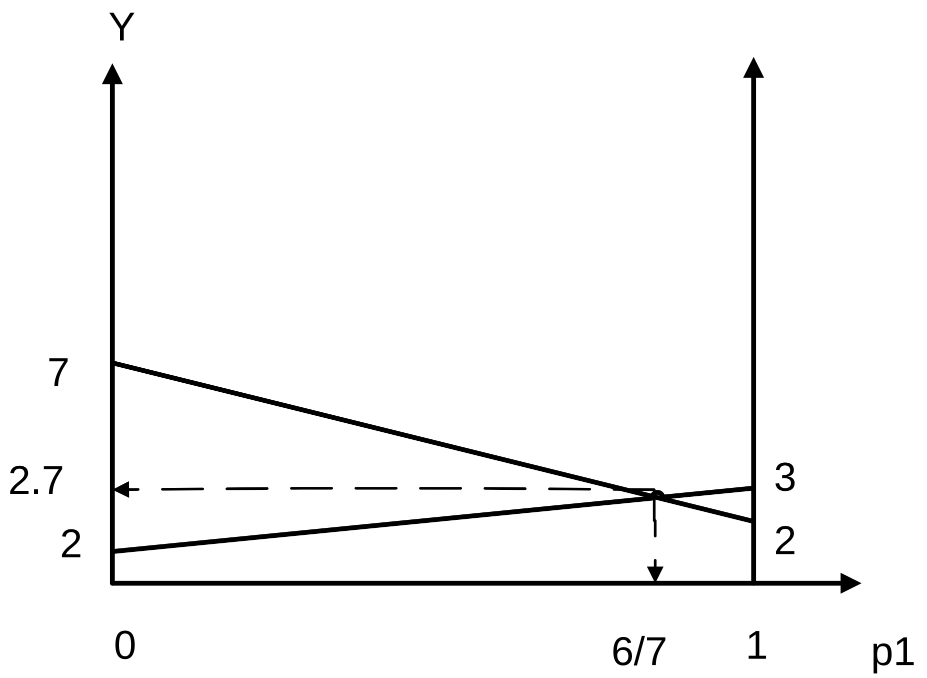

Рис. 1.10. Иллюстрация графического метода решения игры

1.6.2. Игры n × 2 и 2 × m

Пусть имеется игра порядка n×m, где n обозначает число стратегий первого игрока (А); m – число стратегий второго игрока (В).

Если каждый элемент матрицы одной строки (столбца) больше соответствующего элемента другой строки (столбца) или равен ему, то говорят, что первая стратегия доминирует над второй.

Пример игры задан матрицей 3×3, приведенной на рис.1.11.

	B1	B2	B3	B4
A1	0	2	3	-1
A2	-3	3	4	9
A3	2	4	4	8

Рис . 1.11

В этой игре стратегия А3 доминирует над А1. Эта стратегия (А3) лучше, поэтому ее оставляют в матрице, удаляя доминируемую (А1).

Стратегия В2 доминирует над В1; В3 над В2; В2 над В1. Здесь доминирующие стратегии (В2 и В3) хуже, и их следует удалить.

Знание соотношения доминирования позволяет в ряде случаев свести игры $2 \times m$ и $n \times 2$ к играм 2×2 [1].

1.6.3. Графический метод решения игр 2 x n

Пример 1. Игра, задана платёжной матрицей (рис. 1.12). Первый игрок имеет стратегии А1, А2. Второй игрок имеет стратегии В1, В2, В3.

q1 q2 q3

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \\ & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}$$

$$1 \quad \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{P1} \\ \mathbf{P2} \end{array}$$

Рис.1.12

На плоскости R 0 p1 введём систему координат и на оси 0 p1 отложим отрезок единичной длины A1, A2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 (p1, 1 – p1). В частности, точке A1 (0;0) отвечает стратегия A1, точке A2 (1;0) – стратегия A2 и т.д.

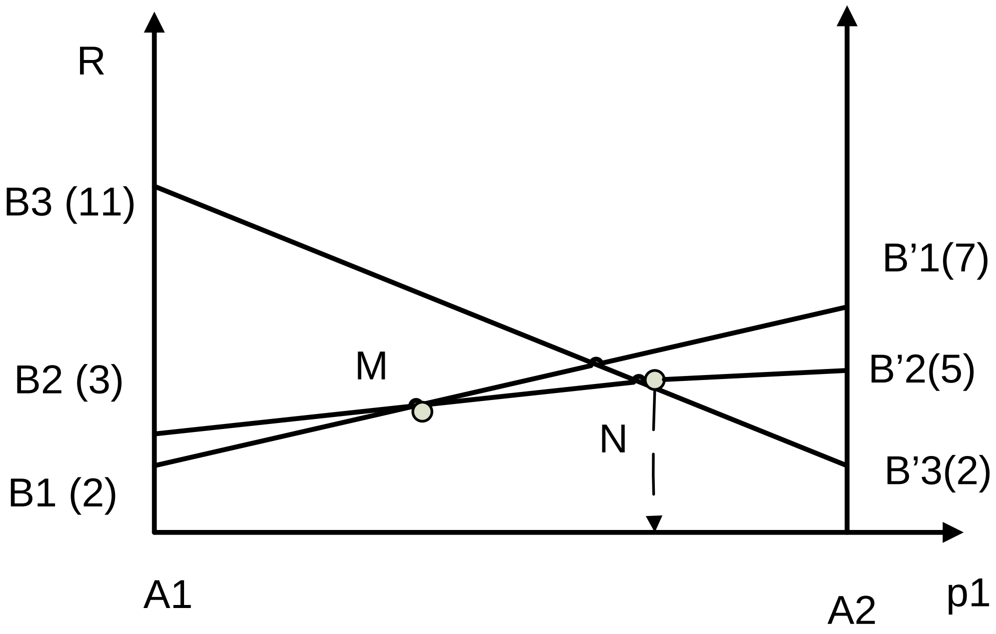

Рис. 1.13. Иллюстрация решения игры 2 x n

В точках A1 и A2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков (рис.1.13). На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью 0R) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии A1, а на втором при стратегии A2. Если игрок 1 применит стратегию A1, то выиграет при стратегии B1 игрока 2 – 2, при стратегии B2 – 3, а при стратегии B3 – 11. Числам 2, 3, 11 на оси 0R соответствуют точки B1, B2 и B3.

Если же игрок 1 применит стратегию A2, то его выигрыш при стратегии B1 равен 7, при B2 – 5, а при B3 – 2. Эти числа определяют точки B′1, B2′, B3′ на перпендикуляре, восстановленном в точке A2. Соединяя между собой точки B1 и B′1, B2 и B2′, B3 и B3′ получим три прямые, расстояние до которых от оси (0 p1) определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка B1 B′1 до оси 0p1 определяет средний выигрыш R1 при любом сочетании стратегий A1 A2 (с частотами p1 и 1 – p1) и стратегией B1 игрока 2. Это расстояние равно

2p1 + 6(1 – p2) = R1

(Вспомните планиметрию и рассмотрите трапецию A1 B1 B′ A2 1

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломанной B1 M N B3′ определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке N.

Следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия P* = (p1, 1 – p1), а её ордината равна цене игры R0. Координаты точки N находим как точку пересечения прямых B2 B′2 и B3 B′3.

Соответствующие два уравнения имеют вид

3*p1+5*(1 – p1) = R

11*p1+2*(1 – p1) = R

p1 = 3/11:   p2 = 8/11:   R = 49/11

Следовательно, P = (3/11; 8/11), при цене игры R = $\frac{49}{11}$.

Таким образом мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы (B1 не входит в оптимальную смешанную стратегию)

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти из системы

3*q2+11*q3 = R

5*q2+2*q3 = R

q2 = 9/11: q3 = 2/11 R = 49/11

и, следовательно, Q = (0; $\frac{9}{11}$; $\frac{2}{11}$). (Из рисунка видно, что стратегия B1 не войдёт в оптимальную стратегию.

1.6.4. Графический метод решения игр m x 2

Пример 1. Игра, задана платёжной матрицей. Первый игрок имеет стратегии A1, A2, A3,A4. Второй игрок имеет стратегии B1,B2.

Найти решение игры, заданной матрицей.

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис.1.14

Решение. Матрица имеет размерность 2 х 4. Строятся прямые, соответствующие стратегиям игрока 1. Ломанная A1 K A′4 соответствует верхней границе выигрыша игрока 1, а отрезок N K –цене игры (рис.1.15).

Седловой точки нет. Доминирование отсутствует

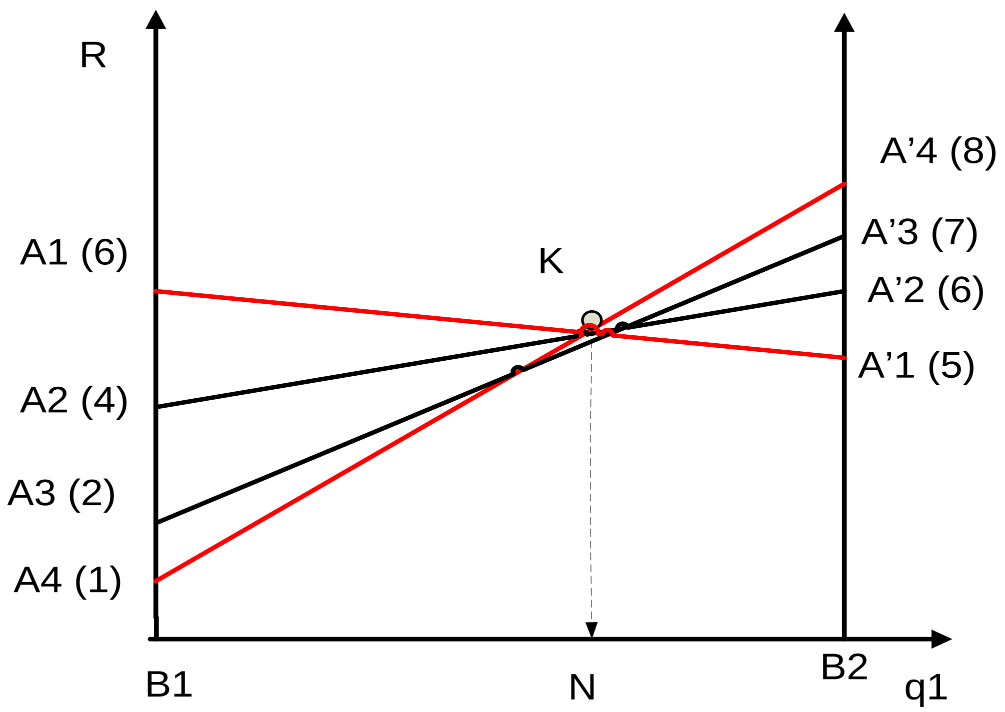

Рис. 1.15. Иллюстрация решения игры m x 2

Решение игры таково

$$Q = (\frac{3}{8}; \frac{5}{8}); \quad P = (\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}); \quad R = \frac{43}{8}.$$

Пример 2. В магазине имеются 2 зоны А и В. В зоне А большая толпа покупателей, а в зоне В – меньше. Администрация имеет 2 полицейских в штатском, и видеокамеру в месте Т для наблюдения за зонами А и В.

Полицейские имеют 6 стратегий поведения: ТТ, АВ, АА, ВВ, ТА, ТВ, которые обозначим как p1, p2, …,p6. В нашей привычной терминологии это игрок А, а вор – это игрок В (табл. 1.1).

Вор имеет 2 стратегии красть в зоне А (В1) или красть в зоне В (В2). Полицейские ищут такие смешанные стратегии А1, А2, …,А6, чтобы обеспечить задержание вора с вероятностью R независимо от поведения воров. Вор ищет такие стратегии (В1, В2), чтобы вероятность его задержания не превышала R. Задана матрица игры

Таблица 1.1

Стратегии полицейских и вора

Стратегия полицейских	Характеристика стратегии полицейских	Стратегия В1 (зона А)	Стратегия В2 (зона В)
А1	ТТ	0,51	0,75
А2	АА	0,64	0,36
А3	ВВ	0,19	0,91
А4	ТА	0,58	0,60
А5	ТВ	0,37	0,85
А6	АВ	0,46	0,76

Решение. В графическом методе решения задачи строятся прямые, соответствующие стратегиям полицейских (рис. 1.16).

B1 B2

A1 $0{,}51*q1+0{,}75*q2 \le R$

A2 $0.64*q1+ 0{,}36*q2 \le R$

A3 $0.19*q1+0.91*q2 \le R$

A4 $0.58*q1+0.60*q2 \le R$

A5 $0.37*q1+0.85*q2 \le R$

A6 $0{,}46*q1+0{,}76*q2 \le R$

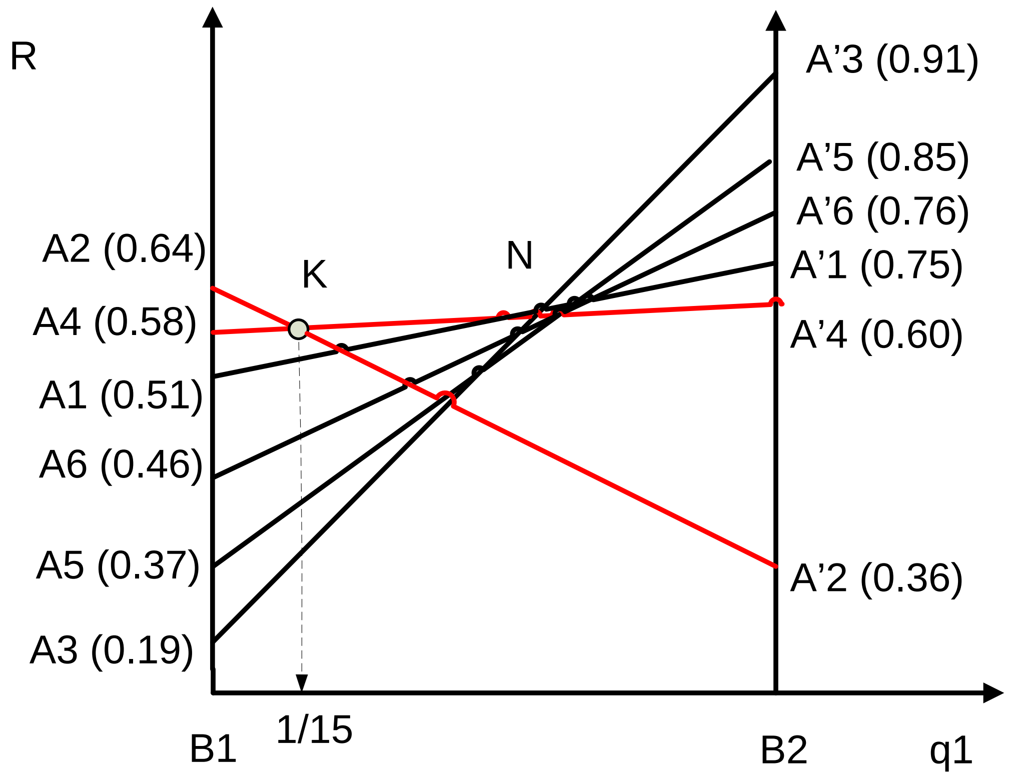

Рис. 1.16. Иллюстрация решения игры полицейских и вора

Ломаная линия A2 K N A′3 соответствует верхней границе выигрыша полицейских, а ордината точки K – цене игры (рис.1.16). В точке К полицейские имеют гарантированный выигрыш, равный 1/15.

Ответ:

P = (0; 1/15; 0; 14/15; 0;0) x2 = 1/15 (стратегия АА) и x4 = 14/15 (стратегия ТА)

Q = (0.8; 0.2) R = 0.584

1.6.5. Графическая интерпретация игры 2×2

Для игры 2×2 можно привести удобную и наглядную геометрическую интерпретацию. Имеется игра 2×2 с платежной матрицей

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} B1 & B2 \\ a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A1 \\ A2 \end{array}.$$

Решение в чистых стратегиях отсутствует. Допустим игрок А выбрал стратегию *(x1,x2),* а игрок В – свою чистую стратегию Bi. В этом случае выигрыш игрока А определяется по формуле математического ожидания [1].

V_{Bi} = a1i x1 + a2i x2 = a1i+(a2i-a1i) x2, i = 1,2,

x1+x2 = 1.

Каждому I, согласно V_{Bi}, соответствует прямая линия в прямоугольной системе координат. Приведем эти прямые на плоскости.

В системе координат X0Y на оси абсцисс отложим отрезок A1A2 единичной длины. Левый конец отрезка (точка с абсциссой x = 0) соответствует стратегии A1, а правый конец (x = 1) – стратегии A2. Все промежуточные точки S_A – смешанные стратегии игрока А, причем вероятность x1 стратегии A1 находится как как расстояние от точки S_A до правого конца отрезка (точки A2), а вероятность x2 стратегии A2 – как как расстояние от точки S_A до левого конца отрезка (точки A1).

Через точки A1 и A2 проведем два перпендикуляра к оси абсцисс: ось I, и ось II. На оси I будем отладывать выигрыш при стратегии A1, а на оси II – выигрыш при стратегии A2.

Пусть противник применяет стратегию B1, тогда

V_{B1} = a11 x1 + (a21-a11) x2. При A1 выигрыш равен a11, а при A2 выигрыш равен a21. Отложим эти точки на оси I и оси II и обозначим их B1, что соответствует одноименной стратегии игрока В. Проведем прямую B1B1 и будем условно называть «стратегией В1». Очевидно, средний выигрыш игрока А, соответствующий смешанной стратегии S_A = (x1,x2) и равен координате точки М, которая лежит на отрезке В1В1 и соответствует точке S_A на оси абцисс, делящий отрезок А1А2 в соотношении x2 : x1.

Аналогичным образом строим стратегию В2. Геометрическая иллюстрация игры 2×2 представлена на рис.1.17.

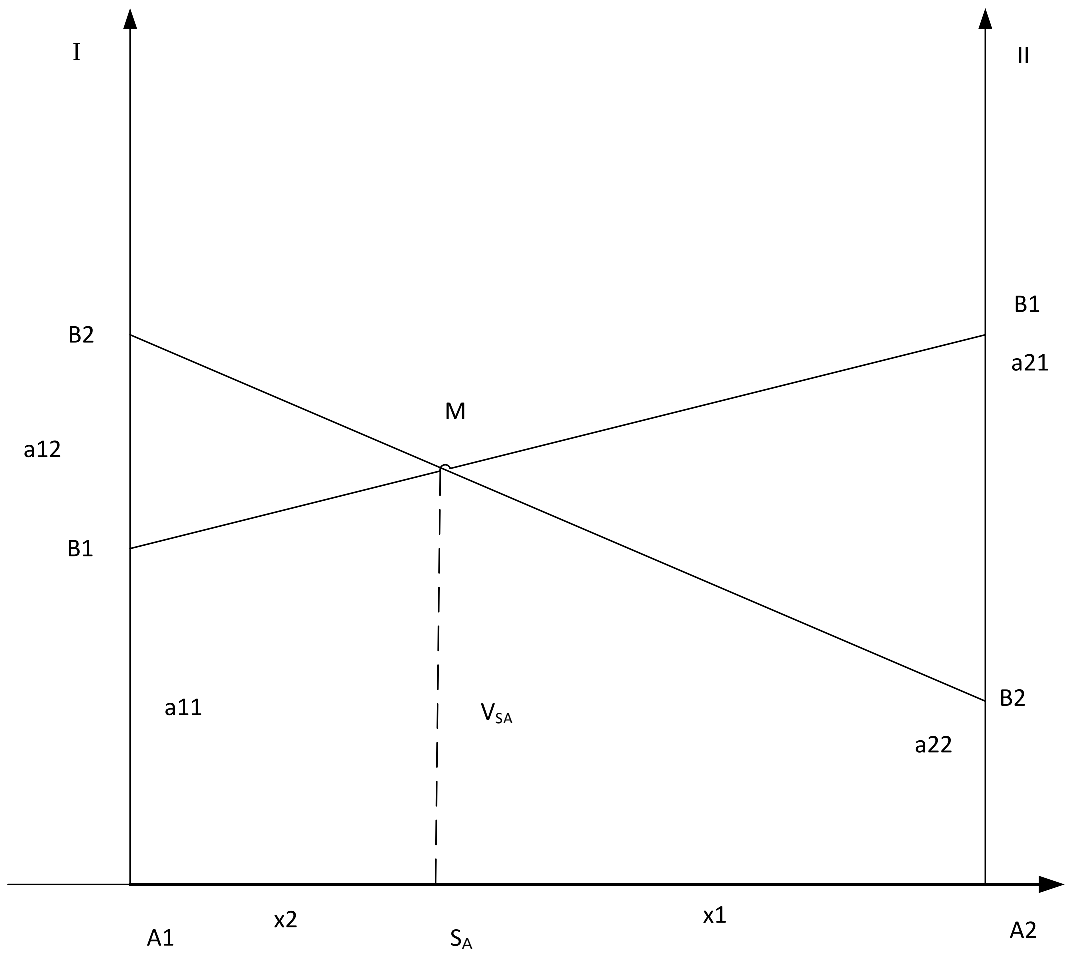

Рис. 1.17. Геометрическая иллюстрация игры 2×2

Необходимо найти оптимальную стратегию S_A , то есть такую стратегию, согласно принципу максимина, минимальный выигрыш игрока А (при наихудшем поведении игрока В) обращался в максимум. Поскольку цель игрока В – минимизировать выигрыш игрока А за счет выбора своих стратегий. Построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях В1, В2 (ломаная линия В1МВ2). На этой границе будет лежать минимальный выигрыш игрока А. Поскольку цель игрока А – максимизировать свой выигрыш за счет выбора вероятностей x2 : x1, ищется верхняя точка границы B1MB2. В точке М выигрыш достигает максимального значения. Ордината точки М – цена игры V,ее абциссса равна x2, а расстояние до правого конца участка –x1. Таким образом, отрезки x2 и x1 являются оптимальными вероятностями смешанной стратегии игрока А.

1.7. Приближенные методы решения игр

При исследовании игровых ситуаций часто нет необходимости в точном решении игры. Для этих целей может быть применен численный метод итераций.

Идея метода сводится к следующему. Мысленно игру проигрывают много раз и вычисляют математическое ожидание обоих выигрышей стратегов, и их среднее арифметическое принимают за цену игры.

К недостаткам итерационного алгоритма можно отнести сравнительно медленную сходимость.

Пример. Решить игру методом Брауна (метод итераций), выполнив три итерации. Игра задана платёжной матрицей, приведённой на рис.1.18.

	B1	B2	B3
A1	8	2	4
A2	4	5	6
A3	1	7	3

Рис. 1.18

n – номер исследуемой пары ходов;

I – номер выбранной стратегии игрока А;

B1 – выигрыш накопленный за первые n игр игроком B при стратегии B1;

B2 – выигрыш накопленный за первые n игр игроком B при стратегии B2;

B3 – выигрыш накопленный за первые n игр игроком B при стратегии B3;

j – номер стратегии, выбранной противником;

A1 – накопленный выигрыш за n игр при стратегии A1;

A2 – накопленный выигрыш за n игр при стратегии A2;

A3 – накопленный выигрыш за n игр при стратегии A3;

Rmin – минимальный средний выигрыш, который равен минимальному накопленному выигрышу, деленному на число игр;

Rmax – максимальный средний выигрыш;

Rср = (Rmin + Rmax)/2.

На второй итерации минимальный накопленный выигрыш равен 7 (подчёркивание снизу в таблице 1.7), а максимальный накопленный выигрыш равен 12. Разделив на число игр получаются следующие значения: Rmin = 7/2 = 3,5; Rmax = 12/2 = 6; Rср = (3,5+6)/2 = 4,75.

Этот метод даёт возможность найти приближённое значение оптимальных смешанных стратегий обоих игроков. Для этого надо подсчитать частоту применения каждой чистой стратегии (i, j) и принять её за приближенное значение вероятности использования этой чистой стратегии в оптимальной смешанной стратегии соответствующего игрока (табл.1.2).

Таблица 1.2

n	i	B1	B2	B3	j	A1	A2	A3	Rmin	Rmax	Rср
1	3	1	7	3	1	8	4	1	1	8	4,5
2	1	9	9	7	3	12	10	4	3,5	6	4,75
3	1	17	11	11	2	14	15	11	3,67	5,0	4,33
4	2	21	16	17	2	16	20	18	4,0	5,0	4,5
5	2	25	21	23	2	18	25	25	4,2	5,0	4,6

При увеличении числа n все три величины Rср, Rmin, Rmax будут приближаться к цене игры, причём Rср наиболее быстро.

1.8. Методы линейного программирования для решения задач по теории игр

Для решения задач по теории игр можно использовать двойственный симплекс-метод.

Рассмотрим пример платёжной матрицы, приведенный на рис.1.19.

	B1	B2	B3
A1	2	–3	4
A2	–3	4	5
A3	4	–5	6

Рис. 1.19. Пример платёжной матрицы

Выполним преобразование платёжной матрицы (рис.1.20), чтобы исключить отрицательные числа (+M = 5).

Для игрока A имеем

X1+X2+X3 → min

При ограничениях

$7 * x1 + 2 * x2 + 9 * x3 \geq 1$

$2 * x1 + 9 * x2 + 0 * x3 \geq 1$

$9 * x1 + 0 * x2 + 11 * x3 \geq 1$

$x1, x2, x3 \geq 0$

	B1	B2	B3
A1	7	2	9
A2	2	9	0
A3	9	0	11

Рис. 1.20. Преобразованная платёжная матрица

Для игрока B имеем

Y1+Y2+Y3 → max

При ограничениях

$7 * y1 + 2 * y2 + 9 * y3 \leq 1$

$2 * y1 + 9 * y2 + 0 * y3 \leq 1$

$9 * y1 + 0 * y2 + 11 * y3 \leq 1$

$y1, y2, y3 \geq 0$

При решении вводятся 3 дополнительные переменные для перехода в ограничениях от неравенств к равенствам

X1 = 1/20; x2 = 1/10; x3 = 1/20; Lmin = 1/5

Чтобы определить вероятности использования стратегий A1, A2, A3 требуется элементы умножить на введённое число M = 5

P1 = 1/4; p2 = 1/2; p3 = 1/4; Цена игры или средний выигрыш R = (1/Lmin) – M = 5-5 = 0

Для игрока B получаем

Аналогично получаем вероятности Q

q1 = 0,25; q2 = 0,50; q3 = 0,25;

R = 0

Ответ: оптимальные смешанные стратегии

Для игрока A (P1 = 1/4; p2 = 1/2; p3 = 1/4)

Для игрока B (q1 = 0,25; q2 = 0,50; q3 = 0,25)

R = 0

Контрольные вопросы и упражнения

Определите нижнюю и верхнюю цену игры для заданной матрицы. Ответ введите в виде значения элемента матрицы. Имеется ли в матрице седловая точка?

	B1	B2	B3
A1	0,2	0,4	0,5
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,4	0,7	0,6

	B1	B2	B3
A1	0,4	0,4	0,2
A2	0,3	0,6	0,8
A3	0,5	0,7	0,2

1. Какие стратегии можно удалить в каждой из матрицы? Привести пояснения какие стратегии удаляются и почему.

	B1	B2	B3
A1	6	2	3
A2	–3	3	4
A3	2	4	4
A4	3	4	5

2. Используя графический и аналитический методы решить игру в смешанных стратегиях, заданную матрицей. Сформулировать ответ.

	B1	B2	B3
A1	2	4	6
A2	5	2	–1
A3	2	3	5

3. Описать доминирующие и доминируемые стратегии игрока A и игрока B, приведенные в платежной матрице. Какие стратегии и почему можно удалить с целью упрощения. Имеется ли в игре седловая точка? При использовании смешанных стратегий с какими вероятностями входят удаляемые стратегии.

	B1	B2	B3
A1	3	4	4
A2	2	3	1
A3	2	1	6

4. Используя графический и аналитический методы решить игру в смешанных стратегиях, заданную матрицей. Сформулировать ответ.

	B1	B2	B3
A1	4	5	2
A2	3	1	6
A3	2	3	1

5. Описать доминирующие и доминируемые стратегии игрока A и игрока B, приведенные в платежной матрице. Какие стратегии и почему можно удалить с целью упрощения. Имеется ли в игре седловая точка? При использовании смешанных стратегий с какими вероятностями входят удаляемые стратегии

	B1	B2	B3
A1	3	5	5
A2	2	3	2
A3	3	3	6

6. Решить игру в смешанных стратегиях

	B1	B2	B3
A1	4	5	1
A2	5	4	6

7. Решить игру в смешанных стратегиях

	B1	B2	B3	B4
A1	4	2	3	4
A2	1	3	2	4

2. СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

2.1. Определения игр ы с полной информацией

Игра с полной информацией (англ. game of perfect information – буквально «игра с совершенной информацией»), также игра с совершенной информацией, – теоретико-игровой термин, обозначающий игру, в которой игрокам известны функция полезности, правила игры, а также ходы других игроков. Под играми с полной информацией понимают игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков.

Примеры игр с полной информацией – шахматы и нарды; с неполной информацией – аукцион и покер.

Не вполне строго, но практически можно считать, что игра является игрой с полной информацией, если:

игроки воздействуют на игровую ситуацию дискретными действиями – ходами, порядок ходов определён правилами и не зависит от таких параметров, как скорость реакции игроков (то есть очередной ход делает тот, кто должен его сделать по правилам, а не тот, кто первым догадался или успел его сделать); в любой момент игры все игроки имеют полную информацию о состоянии игры, то есть о позиции и всех возможных ходах любого из игроков.

Под статической игрой понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения не зная, какие именно решения принимают другие. Обычно в этом случае говорят, что участники принимают решения одновременно, хотя сама по себе одновременность принятия решений в данном случае не важна.

Если ни в каких аспектах игры (правилах, возможности или очерёдности ходов, определении момента завершения игры или результата) не участвует элемент случайности, такая игра будет ещё и детерминированной.

Для любой детерминированной игры с полной информацией, теоретически, можно просчитать всё дерево возможных ходов игроков и определить последовательность ходов, которая гарантированно приведёт по крайней мере одного из них к выигрышу или ничьей, то есть всегда может быть построен алгоритм выигрыша или сведения игры вничью по крайней мере для одной из сторон.

К играм с полной информацией относится большинство детерминированных настольных игр (например, шахматы, шашки, го, рэндзю, сянци, сёги, крестики-нолики, реверси, манкала, точки). Для большинства из них, однако, алгоритм выигрыша или гарантированной ничьей неизвестен: хотя теоретически он существует и может быть найден, на практике дерево вариантов слишком велико, чтобы его можно было построить и проанализировать за приемлемое время.

К недетерминированным играм с полной информацией относится, например, нарды. Не являются играми с полной информацией такие игры, как маджонг, кригшпиль, большинство карточных игр.

2.2. Равновесие Нэша

Равновесие Нэша (Nash equilibrium) – это такая ситуация, при которой ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш, в одностороннем порядке меняя свое решение. Другими словами, равновесие Нэша – это положение, при котором стратегия обеих игроков является наилучшей реакцией на действия своего оппонента.

Равнове́сие Нэ́ша – концепция решения, одно из ключевых понятий теории игр. Так называется набор стратегий в игре для двух и более игроков, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив свою стратегию, если другие участники своих стратегий не меняют.

Джон Нэш доказал существование такого равновесия в смешанных стратегиях в любой конечной игре.

Рис. 2.1. Фотография Нэша

Равновесие Нэша в чистых стратегиях для стратегической игры – это такой профиль стратегий, что для всякого агента выполняется следующее условие:

Если в игре каждый из противников применяет только одну и ту же стратегию, то про саму игру в этом случае говорят, что она происходит в чистых стратегиях, а используемые игроком A и игроком B пара стратегий называются чистыми стратегиями.

Определение. В антогонистической игре пара стратегий (Ai, Bj) называется равновесной или устойчивой, если ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда игроки A и B располагают сведениями о действиях друг друга и достигнутых результатах. Если допустить, что хотя бы одна из сторон не знает о поведении противника, то идея равновесия нарушается, и игра ведется бессистемно.

В нормальной, или стратегической, форме игра описывается платёжной матрицей. Каждая сторона (точнее, измерение) матрицы – это игрок, строки определяют стратегии первого игрока, а столбцы – второго. На пересечении двух стратегий можно увидеть выигрыши, которые получат игроки. В примере (рис.2.2) справа, если игрок 1 выбирает первую стратегию, а второй игрок – тоже первую стратегию, то на пересечении мы видим (−1, −1), это значит, что в результате хода оба игрока потеряли по одному очку.

Представление игры в нормальной форме может быть использовано для нахождения доминируемых стратегий.

Рассмотрим пример с дилеммой заключённого. Два заключённых подозреваются как сообщники в совершении некоторого преступления. Они помещены в разные камеры и не имеют никакой возможности обмениваться информацией. Каждому по отдельности предлагается сознаться С) к определенному сроку, но можно и молчать (М).

В матрице (рис. 2.2) на первом месте платёж 1-го игрока; на 2-ом месте- платёж 2-го игрока).

Если один сознался, другой молчит, то сознавшегося освобождают, а молчун получает максимальный срок (9 лет).

Если сознаются оба, то обоим срок снижается до 6 лет. Учитывая, что они помещены в разные камеры и не имеют никакой возможности обмениваться информацией, то первый игрок предполагает возможность получить 9 лет тюрьмы, если второй игрок сознается и его выпустят (– 9, 0). Поэтому первый игрок решает сознаться и поучить 6 лет тюрьмы вместо 9 лет, если промолчит. Также думает и второй игрок (–6, –6).

	М	С
М	–1, –1	–9, 0
С	0, –9	–6, –6

Рис. 2.2

Если оба молчат, то вину по основному преступлению доказать невозможно, и они получат по 1 году за незаконное владение оружием.

В дилемме заключенного у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия. Сознаться лучше, чем молчать, что бы ни делал другой игрок.

$0 > -1; \quad -6 > -9$

Казалось бы исход игры с выбором стратегий очевиден (С, С). Это и есть равновесие Нэша, хотя вектор (–1; –1) превосходит (–6,–6).

Проблема противоречия индивидуального и коллективного выбора состоит в том, что каждый может навязать выгодное для себя равновесие.

Парето-оптимальные решения обладают тем свойством, что улучшать значения целевой функции одного игрока можно только за счёт других игроков.

Устойчивость приобретает важное значение. Другой принцип принятия решений, связан с понятием устойчивости. При выборе устойчивого решения говорят, что достигнута ситуация равновесия.

Неустойчивость какой-либо ситуации проявляется в том, что в случае её возникновения ей грозит распад, обусловленный возможностями одного из игроков путём изменения только своей стратегии улучшить свое положение за счёт других. На этом основании возник принцип устойчивости Нэша (американский математик Джон Нэш).

Он гласит, что выбор рациональной стратегии должен производиться среди множества точек равновесия. Равновесные решения называются оптимальными по Нэшу. В дилемме заключённого равновесию Нэша соответствует стратегия (С, С).

Смысл равновесия Нэша в том, что ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии в одиночку.

Рассмотрим другой пример. В отрасли имеются две фирмы № 1 и № 2. Каждая из фирм может установить два уровня цен: «высокие» и «низкие». Если обе фирмы выберут высокие цены, то каждая будет иметь прибыль по

3 млн. Если обе выберут низкие, то каждая получит по 2 млн. Однако, если одна выберет высокие, а другая низкие, то вторая получит 4 млн, а первая только 1. Наиболее выигрышный в сумме вариант – одновременный выбор высоких цен (сумма = 6 млн). Однако это состояние нестабильно из-за возмож-

ности относительного выигрыша, которая открывается перед фирмой, отступившей от этой стратегии. Поэтому обе компании с наибольшей вероятностью выберут низкие цены. Хотя этот вариант и не дает максимального суммарного выигрыша (сумма 4 млн.), он исключает относительный выигрыш конкурента, который тот мог бы получить за счет отступления от взаимно-оптимальной стратегии. Такая ситуация и называется «равновесием по Нэшу.

2.3. Метод, основанный на понятии равновесия по Нэшу

Определение. Равновесие по Нэшу есть точка mН = (mН1, mН2,…, mНn) такая, что для всех i = 1,n, достигается оптимальное значение

hi(mН) = max hi(m)

Точка mН определяется из решения системы уравнений

$\frac{\partial \text{ hi(m)}}{\partial m_i}$ = 0, i = 1,…,n

Рассмотрим игру 2$\times$ 2, не имеющую седловой точки.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} B1 & B2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A1 \\ A2 \end{array} \end{array}.$$

Пусть игрок А использует стратегию А1 с вероятностью x, а стратегию А2 – с вероятностью 1 – x.

Пусть игрок В использует стратегию В1 с вероятностью y, а стратегию В2 – с вероятностью 1 – y.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \text{y} & 1-\text{y} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{x} \\ 1-\text{x} \end{array} \end{array}$$

В результате математическое ожидание выигрыша игрока А будет определятся выражением:

$$\text{ha(x,y)} = (\text{x } 1\text{-x})*A*\frac{y}{1-y} \qquad (2.1)$$

При этом hb(x,y) = –(ha(x,y).

Точка Нэша находится из уравнений

$\frac{\partial\ ha(x,y)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\ hb(x,y)}{\partial y} = 0$.

Рассмотрим пример нахождения точки Нэша. Найти решение игры 2×2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. По формуле (2.1) находится математическое ожидание игрока А.

$ha(x,y) = (x\ 1-x) * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} * \frac{y}{1-y} = xy+5(1-x)y+3(1-y)x+2(1-x)(1-y) =$

$= -5xy+3y+x+2$.

Находим точки Нэша (xH, yH):

$$\frac{\partial\ ha(x,y)}{\partial x} = -5y+1 = 0; \quad yH = \frac{1}{5};$$

$$\frac{\partial\ hb(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial\ ha(x,y)}{\partial y} = 5x-3 = 0; \quad xH = \frac{3}{5}.$$

Оптимальные стратегии для рассмотренного примера:

$x^* = (xH\ 1-xH) = (\frac{3}{5}\ \frac{2}{5})$, $y^* = (yH\ \ 1-yH) = (\frac{1}{5}\ \frac{4}{5})$.

Цена игры в точке Н определяется по формуле

$R = x^*\ A\ y^* = (\frac{3}{5}\ \frac{2}{5}) * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{13}{5}$.

Ответ: $x^* = (\frac{1}{5}\ \frac{4}{5})$; $y^* = (\frac{1}{5}\ \frac{4}{5})$; $R = \frac{13}{5}$.

2.4. Нахождение равновесия Нэша

(Строго) доминирующая стратегия, если она существует, (строго) доминирует любую другую стратегию данного игрока. (Строго) доминируемая стратегия – это такая стратегия игрока, которую (строго) доминирует некоторая другая стратегия данного игрока.

В «Дилемме заключенного» у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия – сознаться лучше, чем молчать.

Определение. Равновесием в (строго) доминирующих стратегиях называется профиль (строго) доминирующих стратегий, если такие стратегии существуют для каждого игрока. Очевидным путем использования доминирования является последовательное удаление строго доминируемых стратегий (СДС).

Утверждение 1. Пусть в игре в нормальной форме последовательное исключение строго доминирующих стратегий (СДС) приводит к единственному профилю стратегий s*, тогда s* является единственным равновесием Нэша (РН) в данной игре.

Утверждение 2. Пусть в игре в нормальной форме профиль стратегий s* является РН. Тогда стратегии si* не могут быть отброшены при последовательном исключении СДС.

Определение. Равновесием в (строго) доминирующих стратегиях называется профиль (строго) доминирующих стратегий, если такие стратегии существуют для каждого игрока.

Пример последовательного исключения строго доминируемых стратегий (рис.2.3–2.6). Очевидным путем использования доминирования является последовательное удаление строго доминируемых стратегий (СДС). Например, в игре с матрицей у игроков нет доминирующих стратегий, однако у 2-го игрока стратегия П является доминируемой по сравнению с С. После отбрасывания П появляется доминируемая стратегия Н, которую также следует отбросить. Далее 2-й игрок отбрасывает доминируемую стратегию Л. Остается пара стратегий игроков (В,С), которая является исходом этой игры (рис.2.6).

	Л	С	П
В	1,0	1,2	0,1
Н	0,3	0,1	2,0

Рис. 2.3

	Л	С
В	1,0	1,2
Н	0,3	0,1

Рис. 2.4

	Л	С
В	1,0	1,2

Рис.2.5

	С
В	1,2

Рис. 2.6

Пример последовательного исключения стратегий при нестрогом доминировании (рис. 2.7), которые не дают результата. Здесь стратегия M доминирует над стратегий U и доминируемая стратегия исключается. Затем исключается стратегия L, над которой доминирует стратегия R (рис.2.8).

	L	R
U	1,1	0,0
M	1,1	2,1
D	0,0	2,1

Рис. 2.7

	R
M	2,1
D	2,1

Рис. 2.8

Если вначале исключить стратегию D, а затем стратегию R, то получатся матрица, приведенная на рис. 2.9.

	L
U	1,1
M	1,1

Рис. 2.9

Этот пример игры демонстрирует, что последовательное исключение СДС не дает результата.

Контрольные вопросы и упражнения

Найти равновесие по Нэшу в задаче «Семейный спор».

Молодые супруги хотят вместе провести вечер. Муж (игрок 1) хочет пойти на бокс, а жена (игрок 2) хочет послушать оперу. Муж, вообще говоря, готов и оперу послушать, но бокс любит больше.

Жена могла бы пойти на бокс, но предпочитает оперу. По каким – то причинам (например, испортилась мобильная связь) они должны ехать к месту встречи без предварительной договоренности. Если они не встретятся, то это будет огорчением для обоих. Нормальная форма имеет вид (рис. 2.10)

	Б	О
Б	2,1	0,0
О	0,0	1,2

Рис. 2.10. Нормальная форма задачи молодых супругов

1. Имеется ли равновесие Нэша в задаче «Недоросль», представленной ниже.

	Митрофанушка учится	Митрофанушка не учится
Родители помогают	(3; 2)	(–1; 3)
Родители не помогают	(–1; 1)	(0; 0)

3. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

3.1. Основные определения биматричных игр

Биматричной называется конечная бескоалиционная игра двух лиц.

Биматричная игра описывается матрицами выигрышей конфликтующих сторон. Пусть игрок А имеет m стратегий, а у игрока В – n стратегий. Выигрыши игроков задаются матрицами:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B1\ldots & & Bn \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ am1 & \cdots & amn \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A1 \\ Am \end{array} \end{array};$$

$$B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B1\ldots & & Bn \end{array} & \\ \begin{pmatrix} b11 & \cdots & b1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ bm1 & \cdots & bmn \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A1 \\ Am \end{array} \end{array}.$$

Здесь А– платежная матрица игрока А, В – платежная матрица игрока В.

Размерности матриц А и В строго совпадают. Пусть, к примеру, игрок А применяет свою стратегию А1, а игрок В – стратегию Bn. Тогда выигрыши игроков в данной ситуации будут соответствовать значению, которое находится на пересечении первой строки (А1) и n-го столбца: выигрыш игрока А составит a1n, а игрока В– b1n. Отрицательное значение в платежной матрице означают величину проигрыша игрока в данной ситуации.

Рассмотрим пример «Студент–Преподаватель».

Студент (игрок А) готовится к зачету, который будет принимать Преподаватель (игрок В). У студента две стратегии – подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться к сдаче зачета (–). У преподавателя тоже две стратегии – поставить зачет (+), и не поставить зачет (–). Составим модель биматричной игры.

Решение. Рассмотрим отдельно выигрыш студента и преподавателя.

Выигрыш студента

	(+)	(–)
(+)	Оценка заслужена	Очень обидно
(–)	Удалось обмануть	Оценка заслужена

Выигрыш преподавателя

	(+)	(–)
(+)	Все нормально	Был неправ
(–)	Дал себя обмануть	Опять придет

Количественно это, к примеру, можно выразить следующим образом:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} + & - \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{matrix} + & - \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \end{array}$$

Будем считать полный набор вероятностей применения игроком А своих чистых стратегий xT = (x1,x2,…,xm) смешанной стратегии игрока А; соответственно yT = (y1,y2,…,yn) – смешанная стратегия игрока В.

Смешанной стратегии игроков должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} xi = 1; xi \geq 0,\ i = 1, \dots, m \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} yj = 1; yj \geq 0,\ j = 1, \dots, n \tag{3.2}$$

С помощью смешанных стратегий находятся средние выигрыши НА, НВ игроков А и В.

$$НА = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T\ A\ y; \tag{3.3}$$

$$НВ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = x^T\ B\ y. \tag{3.4}$$

Всегда ли в биматричной игре существует равновесная ситуация (т.е. такая ситуация, отклонение от которой любого из игроков может лишь привести к уменьшению его выигрыша при условии, что второй игрок сохраняет свой выбор)? Ответ на этот вопрос дает теорема Нэша.

Теорема Нэша (основная теорема биматричных игр). Каждая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия, возможно, в смешанных стратегиях.

Условие равновесия для биматричной игры представляет собой парк смешанных стратегий(x*, y*), которые удовлетворяют неравенствам:

$$\mathrm{A y}^* \le \left(\mathrm{x}^* \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \mathrm{y}^*\right)(1) m \times 1 = H_A (1) m \times 1; \tag{3.3}$$

$$\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \mathrm{x}^* \le \left(\mathrm{x}^* \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \mathrm{y}^*\right)(1) n \times 1 = H_B (1) n \times 1, \tag{3.4}$$

где $(1)m \times 1, (1)n \times 1$ – векторы размерности $(m \times 1)$, $(n \times 1)$ соответсвенно, состоящин из одних единиц.

Для нахождения ситуации равновесия необходимо решить систему неравенств (3.1), (3.2) и найти x^{T} = (x1, x2,…,xm), y^{T} = (y1,y2,…,yn) с учетом нормирования (3.1, 3.2).

3.2. Доминирование в биматричной игре

В любой игре надо подумать о сокращении размерности задачи. Для этого требуется удалить невыгодные стратегии, применяя отношение доминирования.

Можно выделить следующие критерии, позволяющие сократить размерность задачи в биматричной игре.

Заданы матрицы выигрышей A и B. Применить отношение доминирования, если:

– игрок A хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока B;

– игрок B хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока A;

– каждый игрок хочет максимизировать свой выигрыш;

– каждый игрок хочет минимизировать выигрыш противника.

Заданы матрицы проигрышей игроков A и B. Применить отношение доминирования, если:

– игрок А хочет минимизировать свой проигрыш и максимизировать проигрыш игрока В;

– игрок В хочет минимизировать свой проигрыш и максимизировать проигрыш игрока А;

– каждый игрок хочет минимизировать свой проигрыш;

– каждый игрок хочет максимизировать проигрыш противника.

3.3. Первый алгоритм упрощения задачи

Рассмотрим первый алгоритм упрощения задачи: игрок А хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока В.

Определяем с какой матрицей будем работать. Так как хотим максимизировать выигрыш игрока А, выбирается для сокращения матрица, которая содержит выигрыши, т.е. матрицу А.

Активной (действующей) при использовании данного критерия является сторона А и управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются по строкам. Сравнивать будем элементы соответствующих строк.

Так как игрок А хочет максимизировать свой выигрыш, т.е. свои стратегии, которые содержат меньший выигрыш, он применять не будет. Поэтому из матрицы А удаляются доминируемые строки согласно условию: если $aik \leq ajk$ для $k = 1,\ldots,n$, стратегия Ai не используется и соответствующая строка удаляется из матрицы А.

В виду того, что игрок А отказался от своей стратегии Ai, соответствующая строка удаляется и из матрицы В, независимо от ее элементов.

Теперь посмотрим второй критерий задачи, сторона А хочет минимизировать выигрыш игрока В.

Выбирается матрица В, которая содержит выигрыши игрока В.

Активной (действующей) при использовании данного критерия является сторона А и управлять она может только своими стратегиями, сравнивать между собой будет элементы соответствующих строк.

Так как игрок А хочет минимизировать выигрыш игрока В, т.е. те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, он применять не будет. Поэтому из матрицы В удаляются доминирующие строки согласно условию: если bik ≥ bjk для k = 1,…,n, стратегия Ai не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы В.

В виду того, что игрок А отказался от своей стратегии Ai, соответствующая строка удаляется и из матрицы А, независимо от ее элементов.

Пример 1.Рассмотрим пример для данной задачи. Выигрыши сторон А и В заданы матрицами (рис.3.1):

$$A = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 2 & 6 & 3 & A1 \\ 7 & 1 & 4 & A2 \\ 1 & 5 & 6 & A3 \\ 8 & 1 & 6 & A4 \end{array} \qquad B = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 3 & 1 & 2 & A1 \\ 2 & 5 & 1 & A2 \\ 4 & 1 & 3 & A3 \\ 6 & 2 & 1 & A4 \end{array}$$

Рис. 3.1. Иллюстрация примера биматричной игры

Требуется редуцировать размерность задачи за счет исключения заведомо невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что игрок А хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока В.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи – игрок А хочет максимизировать свой выигрыш.

По этому критерию из матрицы А удаляются доминируемые строки. Сравнивая стратегии А2 и А4 удаляется вторая строка. Автоматически удаляется вторая строка и из матрицы В (рис.3.2):

$$A = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 2 & 6 & 3 & A1 \\ 1 & 5 & 6 & A3 \\ 8 & 1 & 6 & A4 \end{array}; \qquad B = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 3 & 1 & 2 & A1 \\ 4 & 1 & 3 & A3 \\ 6 & 2 & 1 & A4 \end{array}$$

Рис. 3.2. Иллюстрация примера после редукции

Рассмотрим второй критерий задачи – игрок А хочет минимизировать выигрыш игрока В, по которому из матрицы В удаляются доминирующие строки. Стратегия А3 доминирует над стратегией А1, является доминирующей и удаляется из матрицы В (рис.3.3). Соответственно удаляется строка А3 в матрице А.

$$A = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 2 & 6 & 3 & A1 \\ 8 & 1 & 6 & A4 \end{array};\qquad B = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 3 & 1 & 2 & A1 \\ 6 & 2 & 1 & A4 \end{array}.$$

Рис. 3.3. Иллюстрация примера после второй редукции

3.4. Второй алгоритм упрощения задачи

Рассмотрим второй алгоритм упрощения задачи – каждый игрок хочет минимизировать выигрыш противника. Первый случай: игрок А хочет минимизировать выигрыш игрока В.

Поскольку рассматриваем выигрыш игрока В, выбирается матрица В.

Активной (действующей) при использовании данного критерия является сторона А и управлять она может только своими стратегиями, сравнивать между собой будет элементы соответствующих строк.

Так как игрок А хочет минимизировать выигрыш игрока В, т.е. те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, он применять не будет. Поэтому из матрицы В удаляются доминирующие строки согласно условию: если $bik \geq bjk$ для $k = 1,\ldots,n$, стратегия Аi не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы В.

В виду того, что игрок А отказался от своей стратегии Аi, соответствующая строка удаляется и из матрицы А, независимо от ее элементов.

В виду того, что игрок А отказался от своей стратегии Аi, соответствующая строка удаляется и из матрицы А, независимо от ее элементов.

Теперь рассмотрим второй случай этого критерия – игрок В хочет минимизировать выигрыш игрока А.

Так как речь идет о выигрыше игрока А выбирается матрица А.

Активной (действующей) при использовании данного критерия является сторона В и управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются по столбцам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем по столбцам.

Так как игрок В хочет минимизировать выигрыш игрока А, т.е. свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, он применять не будет. Поэтому из матрицы А удаляются доминирующие столбцы согласно условию: если $aik \geq ajk$ для $k = 1,\ldots,m$, стратегия Bk не используется и соответствующий ей столбец удаляется из матрицы А.

В виду того, что игрок В отказался от своей стратегии Bk, соответствующий столбец удаляется и из матрицы В, независимо от ее элементов.

Пример 2. Рассмотрим пример по этой задаче. Заданы матрицы выигрышей А и В (рис. 3.4).

$$A = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 5 & 6 & 3 & A1 \\ 7 & 1 & 4 & A2 \\ 1 & 5 & 6 & A3 \end{array}; \qquad B = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 3 & 1 & 2 & A1 \\ 2 & 5 & 1 & A2 \\ 4 & 1 & 3 & A3 \end{array}.$$

Рис. 3.4. Иллюстрация примера биматричной игры

Требуется сократить размерность задачи за счет исключения невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что каждая из сторон хочет минимизировать выигрыш противника.

Решение. Рассмотрим первый случай – игрок А хочет минимизировать выигрыш игрока В.

По этому критерию из матрицы В удаляются доминирующие строки. Доминирующие строки в матрице В это А3, которая доминирует над строкой А1. В матрице В удаляется строка А3. Автоматически удаляется строка А3 в матрице А (рис.3.5).

$$A = \begin{array}{ccc|c} B1 & B2 & B3 & \\ 5 & 6 & 3 & A1 \\ 7 & 1 & 4 & A2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{ccc|c} B1 & B2 & B3 & \\ 3 & 1 & 2 & A1 \\ 2 & 5 & 1 & A2 \end{array}$$

Рис. 3.5. Иллюстрация биматричной игры после упрощения

Сейчас рассмотрим второй случай – сторона В хочет минимизировать выигрыш игрока А. По этому критерию из матрицы А удаляются доминирующие столбцы. Столбец В1 доминирует над столбцом В3 и удаляется из матрицы А, соответственно, в матрице В удаляется первый столбец. После применения отношения доминирования матрицы выигрышей принимают вид, представленный на рис. 3.6.

$$A = \begin{array}{cc|c} B2 & B3 & \\ 6 & 3 & A1 \\ 1 & 4 & A2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc|c} B2 & B3 & \\ 1 & 2 & A1 \\ 5 & 1 & A2 \end{array}$$

Рис.3.6. Иллюстрация биматричной игры после второго упрощения

3.5. Третий алгоритм упрощения задачи

Задача состоит в том, чтобы, по желанию игрока А, обеспечить максимум проигрыша игрока В. Это первый критерий задачи.

Поскольку рассматриваем проигрыш игрока В, выбирается матрица В.

Активной (действующей) при использовании данного критерия является сторона А и управлять она может только своими стратегиями,

Проигрыши при которых располагаются по строкам. Следовательно, сравнивать между собой будет элементы соответствующих строк.

Так как игрок А хочет максимизировать проигрыш игрока В, т.е. те свои стратегии, которые содержат меньший проигрыш для противника, он применять не будет. Поэтому из матрицы В удаляются доминируемые строки согласно условию: если $b_{ik} \le b_{jk}$ для $k = 1,\dots,n$, стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы В.

В виду того, что игрок А отказался от своей стратегии Ai, соответствующая строка удаляется и из матрицы А, независимо от ее элементов.

Сейчас рассмотрим второй критерий задачи – игрок В хочет максимизировать проигрыш стороне А.

Так как речь идет о проигрыше игрока А выбирается для сокращения та матрица, которая содержит данные проигрыши, т.е. матрица А.

Активной (действующей) при использовании данного критерия является сторона В и управлять она может только своими стратегиями, проигрыши при которых располагаются по столбцам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих столбцов.

Так как игрок В хочет максимизировать проигрыш игрока А, т.е. свои стратегии, которые содержат меньший проигрыш для противника, он применять не будет. Поэтому из матрицы А удаляются доминируемые столбцы согласно условию: если $a_{ik} \geq a_{jk}$ для $k = 1,\ldots,m$, стратегия Bk не используется и соответствующий ей столбец удаляется из матрицы А.

В виду того, что игрок В отказался от своей стратегии Bk, соответствующий столбец удаляется и из матрицы В, независимо от ее элементов.

Поскольку алгоритм определения оптимальных стратегий предполагает наличие матрицы выигрышей, переходим к матрицам выигрышей, полагая, что проигрыш противника есть наш выигрыш. Другими словами, меняем матрицы местами.

Пример 3. Демонстрируем упрощение этой задачи. Пусть заданы матрицы проигрышей игроков А и В, приведенные на рис.3.6.

$$A = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 5 & 6 & 3 & A1 \\ 7 & 1 & 4 & A2 \\ 1 & 5 & 6 & A3 \end{array} \qquad B = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 3 & 1 & 2 & A1 \\ 2 & 5 & 1 & A2 \\ 4 & 1 & 3 & A3 \end{array}$$

Рис. 3.6. Иллюстрация примера биматричной игры

Требуется сократить размерность задачи за счет исключения невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что каждая из сторон хочет максимизировать проигрыш противника.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи – сторона А хочет максимизировать проигрыш стороны В. По этому критерию из матрицы В удаляются доминируемые стратегии. Сравнивая проигрыши при стратегиях А1 и А3, удаляется первая строка. Автоматически из матрицы А удаляется первая строка. В результате, после применения первого критерия матрицы проигрышей имеют вид, приведенный на рис.3.7.

$$A = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 7 & 1 & 4 & A2 \\ 1 & 5 & 6 & A3 \end{array} \qquad B = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 2 & 5 & 1 & A2 \\ 4 & 1 & 3 & A3 \end{array}$$

Рис. 3.7. Иллюстрация применения первого критерия

Второй критерий –сторона В хочет максимизировать проигрыш игрока А. По данному критерию из матрицы А удаляются доминируемые столбцы. Здесь стратегия В3 доминирует над стратегией В2 и удаляется доминируемый столбец В2 (рис. 3.8). Соответственно из матрицы В удаляется также второй столбец.

$$A = \begin{array}{ccc} B1 & B3 & \\ 7 & 4 & A2 \\ 1 & 6 & A3 \end{array} \qquad B = \begin{array}{ccc} B1 & B3 & \\ 2 & 1 & A2 \\ 4 & 3 & A3 \end{array}$$

Рис. 3.8. Иллюстрация применения первого критерия

Далее переходим к матрицам выигрыша: матрицей А становится матрица В, а матрицей В становится матрица А (рис. 3.9).

$$A = \begin{array}{ccc} B1 & B3 & \\ 2 & 1 & A2 \\ 4 & 63 & A3 \end{array} \qquad B = \begin{array}{ccc} B1 & B3 & \\ 7 & 4 & A2 \\ 1 & 6 & A3 \end{array}$$

Рис.3.9. Иллюстрация применения второго критерия

3.8. Графический способ решения биматричных игр 2×2

Пусть каждый игрок имеет по две стратегии (рис.3.10).

$$A = \begin{matrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{matrix}; \qquad B = \begin{matrix} b11 & b12 \\ b211 & b22 \end{matrix}.$$

Рис.3.10. Иллюстрация применения двух стратегий

Смешанные стратегии иг роков в игре 2×2 имеют вид:

$x^T = (x1 - x)$, $y^T = (y1 - y)$, $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$.

Средние выигрыши игроков вычисляются так:

$$HA = x^T Ay = (x1 - x)\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (a11 - a12 - a21 + a22)xy +$$
$$+ (a12 - a22)x + (a21 - a22)y + a22; \quad (3.5)$$

$$HB = x^T By = (x1 - x)\begin{pmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (b11 - b12 - b21 + b22)xy +$$
$$+ (b12 - b22)x + (b21 - b22)y + b22. \quad (3.6)$$

Сделав замену переменных:

$$\begin{cases} a11 - a12 - a21 + a22 = a1 \\ a22 - a12 = a2 \end{cases} \quad (3.7)$$

получаем

$$\begin{cases} a1(1-x)y - a2(1-x) \le 0 \\ a1xy - a2x \ge 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Таким образом, множество всех приемлемых стратегий для игрока A удовлетворяет условиям (3.5) и (3.6). Чтобы найти x рассмотрим три случая:

– если $x = 0$, условие (3.6) справедливо для всех y, а условие (3.5) принимает вид

$$a1y - a2 \le 0; \quad (3.9)$$

– если x = 1, условие (3.5) выполняется для всех y, а условие (3.6) принимает вид

$$a1y - a2 \geq 0; \tag{3.10}$$

– если 0 < x < 1, разделим правую и левую часть неравенства (3.5) на (1 – x), а правую и левую часть неравенства (3.6) на x, в результате получим

$$\begin{cases} a1y - a2 \leq 0 \\ a1y - a2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \ a1y - a2 = 0 \tag{3.11}$$

Таким образом, множество решений системы, содержащей условия (3.7) и (3.8) состоит из следующих ситуаций:

(0, y), если $a1y - a2 \leq 0$; $0 < y < 1$;

(x, y), если $a1y - a2 = 0$; $0 \leq y \leq 1$, $0 < x < 1$;

(1, y), если $a1y - a2 \geq 0$; $0 \leq y \leq 1$.

Если a1 = a2 = 0, решением будет весь единичный квадрат x $\in [0,1], y \in [0,1]$ так как условия (3.9)–(3.11) удовлетворяются при всех значениях x,;

Если a1 = 0, a2 ≠ 0, то выполняется либо условие (3.9), либо (3.10), и решением является или x = 0, или x = 1.

Если a1 > 0, то получаем следующие выражения:

Из соотношения (3.7), следует x = 0, $y \leq \frac{a2}{a1} = \alpha$;

Из соотношения (3.8), следует x = 1, $y \geq \alpha$;

Из соотношения (3.9), следует $0 < x < 1$, $y = \alpha$;

Если a1 < 0, то получаем следующие выражения:

Из соотношения (3.7), следует x = 0, $y \geq \frac{a2}{a1} = \alpha$;

Из соотношения (3.8), следует x = 1, $y \leq \alpha$;

Из соотношения (3.9), следует $0 < x < 1$, $y = \alpha$;

Графическая интерпретация множества решений игрока А представлена на рис.3.11 при a1> 0, и на рис. 3.12 – при a1< 0.

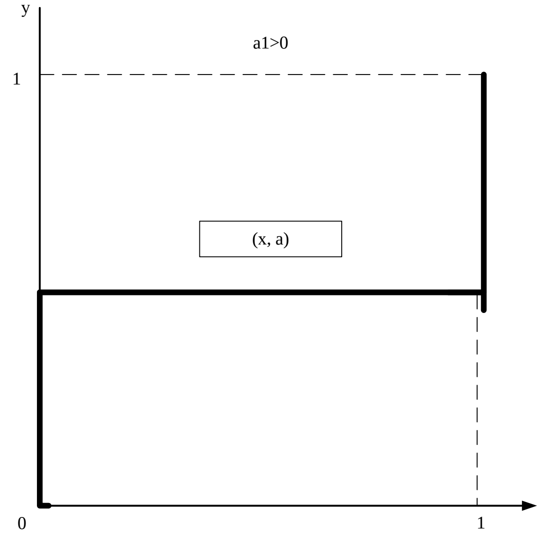

Рис. 3.10

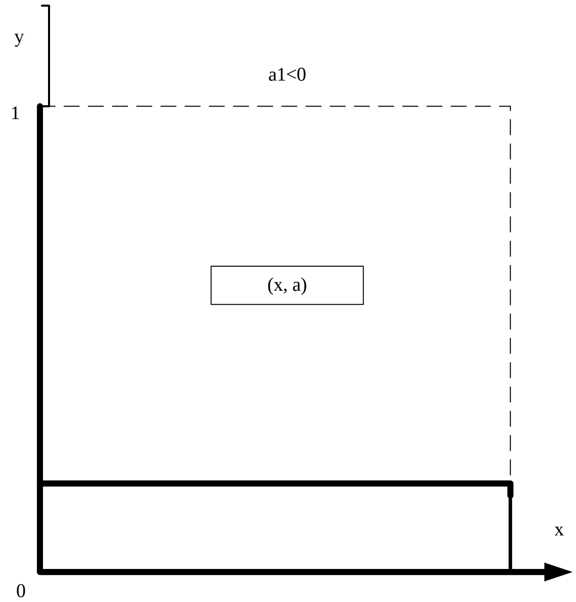

Рис. 3.11

Для игрока В выражения будут аналогичные.

(x, 0), если b1y – b2 $\leq 0;\ 0 \leq x \leq 1$

(x, y), если b1y – b2 $= 0;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y < 1;$

(x, 1), если b1y – b2 $\geq 0;\ 0 \leq x \leq 1$.

Если b1 = b2 = 0, решением будет весь единичный квадрат x $\in [0,1], y \in [0,1]$, так как условия (3.7)–(3.9) удовлетворяются при всех значениях x,y

Если b1 = 0, b2 ≠ 0, то выполняется либо условие (3.9), либо (3.10), и решением является или y = 0, или y = 1.

Если b1> 0, то получаем следующие выражения:

Из соотношения (3.9), следует y = 0, x $\leq \frac{b2}{b1} = \beta;$

Из соотношения (3.10), следует y = 1, x$\geq \beta;$

Из соотношения (3.11), следует $0 < y < 1$, x$= \beta;$

Если b1 < 0, то получаем следующие выражения:

Из соотношения (3.9), следует y = 0, x$\geq \beta$;

Из соотношения (3.10), следует y = 1, x$\leq \beta$;

Из соотношения (3.11), следует 0$< y < 1$, x$= \beta$.

Решением биматричной игры является пересечение всех ситуаций игрока А и игрока В, т.е. те значения х,у, которые являются общими для этих множеств.

Средние выигрыши определяются по формулам (3.5), (3.6) при найденных значениях х,у.

3.9. Пример решения биматричной игры

Пример. Игрок А имеет две стратегии: строить объект 1 или строить объект 2. Игрок В имеет два предложения принять предложение о строительстве объекта или отказать. Свои стратегии игроки применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно матрицам (рис. 3.12):

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.12. Матрицы выигрышей игроков А и В

Пусть игрок А это Министерство, а игрок В – городские власти. Например, если игроки применяют свои первые стратегии, министерство разрешает строить объект 1, а городские власти разрешают его постройку, тогда город получает выигрыш 5 млн. у.е., а министерство теряет 10 млн. у.е. и т.п.

Решение. Определим множество решений игрока А, для чего найдем значение α.

a1 = a11 – a12 – a21+a22 = – 10 – 2 – 1 – 1 = –14<0;

a2 = a22 – a12 = –1–2 = –3;

$\alpha = \frac{a2}{a1} = \frac{-3}{-14} = \frac{3}{14}$.

Так как a1 < 0, то множество решений игрока А имеет вид:

(0,y) при $\frac{3}{14} \le y \le 1$;

(x, $\frac{3}{14}$) при $0 \le x \le 1$;

(1,y) при $0 \le y \le \frac{3}{14}$.

Определим множество решений игрока В, для чего найдем значение β.

b1 = b11 – b12 – b21 + b22 = 5 + 2 + 1 + 1 = 9 >0;

b2 = d22 – b21 = 1 + 1 = 2;

$\beta = \frac{b2}{b1} = \frac{2}{9}$.

Так как b1 > 0, то множество решений игрока В имеет вид:

(x,0) при $0 \le x \le \frac{2}{9}$;

($\frac{2}{9}, y$) при $0 \le y \le 1$;

(x,1) при $\frac{2}{9} \le y \le 1$.

Пересечение этих множеств – это точка с координатами (x = $\frac{2}{9}$; y = $\frac{3}{14}$), которые определяют оптимальные стратегии игроков А и В.

$x^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$; $y^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{11}{14} \end{pmatrix}$.

Средние выигрыши игроков следующие:

$$HA = x^TAy = (x \ \ 1\text{-}x)\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{11}{14} \end{pmatrix} = -\frac{4}{7};$$

$$HB = x^TBy = (x \ \ 1\text{-}x)\begin{pmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{11}{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{3};$$

Ответ: $x^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$; $y^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{11}{14} \end{pmatrix}$; HA $= -\frac{4}{7}$; HB $= \frac{1}{3}$.

Контрольные вопросы и упражнения

Выполнить упрощение биматричной игры, заданной матрицами А и В.

$$A = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 2 & 6 & 3 & A1 \\ 6 & 1 & 5 & A2 \\ 1 & 5 & 6 & A3 \\ 8 & 1 & 6 & A4 \end{array}; \qquad B = \begin{array}{cccc} B1 & B2 & B3 & \\ 3 & 1 & 3 & A1 \\ 2 & 5 & 1 & A2 \\ 4 & 2 & 3 & A3 \\ 5 & 2 & 1 & A4 \end{array}$$

Найти решение биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x^{*T} = (0{,}75 \;\; 0{,}25)$; $y^{*T} = (0{,}17 \;\; 0{,}83)$; НА = 3,5; НВ = 4,25

Найти решение биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x^{*T} = (0{,}33 \; 0{,}67)$; $y^{*T} = (0{,}714 \;\; 0{,}286)$;

НА = 5,14; НВ = 5,76

4. КОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

4.1. Понятие коалиционной игры

В экономике отдельные субъекты редко действуют поодиночке. Чаще всего они объединяются в союзы, коллективы, кооперации для достижения своих целей. Интуиция и практика показывают, что коллективные действия могут существенно увеличивать эффективность их участников. Коллективные действия можно разделить на три ступени взаимодействия:

– обмен информацией;

– совместный выбор стратегий участников (договор о совместных действиях);

– объединение ресурсов и последующий выбор совместных действий на основе объединенных ресурсов.

Кооперативные игры [ooperative games] – класс игр с ненулевой суммой, в которых игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом, вправе вступать в коалиции. Однако термины "кооперативные игры" и "коалиционные игры" не совпадают, поскольку кооперативные игры может и не содержать коалиций. В дальнейшем будем рассматривать только коалиционные игры.

Математические модели конфликтов, участники которых могут предпринимать коллективные действия, изучаются в теории коалиционных игр.

Коалиционной игрой называется игра с не противоположными интересами, в которой игроки могут обсуждать перед игрой свои стратегии, договариваться о совместных действиях, заключать союзы (коалиции) для объединения ресурсов.

Коалиция представляет собой добровольное объединение участников игры, согласившихся осуществлять совместные действия (совместные стратегии). Объединение игроков в коалицию означает их сотрудничество, согласие по поводу выбора общего, т.е. кооперативного решения. Общее решение всех участников коалиции определяет стратегию коалиции. Возможны случаи, когда участники игры объединяются в коалицию только для осуществления коалиционной стратегии, а после этого коалиция распадается.

Коалиционная структура. Подходы в коалиционных играх. Естественное расширение потребностей практики в военных, биотехнических, экономических, социальных и других предметных областях требует развития методов исследования взаимодействия в многообъектных многокритериальных системах (ММС) на основе коалиционных подходов.

Общее решение всех участников коалиции определяет стратегию коалиции. Возможны случаи, когда участники игры объединяются в коалицию только для осуществления коалиционной стратегии, а после этого коалиция распадается.

С математической точки зрения, коалиция представляет собой некоторое подмножество участников игры. Обозначим I = {i} (i = 1,2,…,n) множество игроков, произвольную коалицию будем обозначать K. Общее число всех возможных коалиций, т.е. всех подмножеств множества I, включая пустое подмножество, равно $2^K = \sum_{m=1}^{n} C_n^m$, где C_n^m – число сочетаний m по n. Число сочетаний C_n^m является количеством всех всевозможных коалиций на множестве из n игроков, в каждую из которых входят m участников.

Формальное описание полностью определенной коалиционной игры можно задать с помощью следующих параметров:

Множество участников $\{g\}$ = G, g $\in G$.

Множество всех коалиций K = $\{K\},$ где отдельная коалиция k $\in K$ является подмножеством множества G, т.е. K $\in G$, включая пустое множество игроков. K – коалиционное разбиение множества игроков.

Для каждой коалиции $\forall k \in$ K должно быть определено множество (набор) стратегий XK = {xK}

Множество исходов игры S = ∏XK, где исход s $\in$ S определяется выбором коалициями своих стратегий xK.

Для каждого исхода игры s $\in$ S и каждой коалиции K определён общий выигрыш коалиции HK(s).

$\forall k \in$ K определена схема дележа выигрыша коалиции HK(s) между участниками коалиции при каждом исходе x

$$HK(s) = \sum hi(s), \qquad (4.1)$$

где hi(s) – выигрыш игрока i из коалиции K.

Исход коалиционной игры при заданных стратегических возможностях всех игроков определяется, во-первых, разбиением множества игроков на коалиции, (т.е. коалиционным разбиением K множества I), во-вторых, множествами возможных стратегий каждой из коалиций, в-третьих, стратегиями, которые коалиции выбирают из своих наборов стратегий.

Игровые возможности каждой отдельной коалиции K могут быть определены с помощью ее характеристической функции vK, равной гарантированному математическому ожиданию выигрыша данной коалиции при применении смешанной стратегии, составленной из стратегий XK = {xK}.

Смысл характеристической функции поясним на следующем примере.

4.2. Пример решения коалиционной игры

Пример «Война за ресурс». Три королевства борются за владение нефтяным месторождением. Если они договорятся о долевой эксплуатации, то их суммарный доход составит 111 единиц. Если два королевства объединятся для войны против третьего, то с учетом издержек на ведение войны суммарный доход уменьшится. Пусть каждая из двух образовавшихся коалиций имеет две стратегии – оборонительную и наступательную. Для коалиционного разбиения {1-е и 2-е} против {3-го} доходы сторон в зависимости от исходов игры приведены в табл.4.1.

Для коалиционного разбиения {1-е и 3-е} против {2-го} доходы сторон в зависимости от исходов игры приведены в табл.4.2. Для коалиционного разбиения {2-е и 3-е} против {1-го} доходы сторон в зависимости от исходов игры приведены в табл.4.3. Если каждое королевство будет воевать против двух других, то в результате 1-е получит доход 30 единиц, 2-е и 3-е получат по 15 единиц. Найдем характеристические функции каждой из коалиций.

Таблица 4.1

Коалиция из 1 и 2 государства против третьего

	Оборона	Наступление
Оборона	90; 10	50; 50
Наступление	50; 50	90; 10

Таблица 4.2

Коалиция из 1 и 3 государства против второго

	Оборона	Наступление
Оборона	80; 20	50; 50
Наступление	50; 50	80; 20

Таблица 4.3

Коалиция из 2 и 3 государства против первого

	Оборона	Наступление
Оборона	60; 40	50; 50
Наступление	50; 50	60; 40

Решение. Рассмотрим игру, заданную табл.4.1. Легко обнаружить, что в игре нет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях и найти равновесные смешанные стратегии каждого их игроков $x^* = \{1/2;1/2\}$, $y^* = \{1/2;1/2\}$. При этих стратегиях все исходы равновозможны, следовательно, гарантированное ожидание выигрыша коалиции {1-е и 2-е}, т.е. характеристическая функция v{1-е и 2-е} = (90+50+50+90)/4 = 70. Характеристическая функция коалиции, состоящей из одного игрока (3-е королевство) v{3-е} = (10+50+50+10)/4 = 30.

Аналогично, из табл.4.2 находим характеристические функции

v{1-е и 3-е} = (80+50+50+80)/4 = 65, v{2-е} = (20+50+50+20)/4 = 35.

Из табл.4.3 находим характеристические функции

v{2-е и 3-е} = (60+50+50+60)/4 = 55, v{1-е} = (40+50+50+40)/4 = 45.

Война всех против всех будет невыгодна каждой из рассмотренных коалиций, т.к. в ней соответствующие характеристические функции принимают меньшие значения. Наконец, при договоре о долевой эксплуатации месторождения, коалиционное разбиение имеет вид

K = {1-е и 2-е и 3-е} UΩ, характеристическая функция коалиции {1-е и 2-е и 3-е} равна 111.

По отношению к коалиционной игре большое значение имеют следующие вопросы:

При каких условиях данный игрок вступает в ту или иную коалицию?

Как следует производить делёж общего выигрыша между членами одной коалиции?

Насколько устойчивы различные коалиции, и что влияет на их устойчивость?

Каким условиям должен соответствовать механизм принятия решений в отдельной коалиции?

В рассмотренном выше примере легко найти ответы на первые два вопроса. 1-е королевство, действуя в одиночку против двух других, получает гарантированное математическое ожидание дохода, равное 45, 2-е – 35, 3-е – 30. Если королевства являются рациональными игроками, то они будут вступать в коалиции только в тех случаях, когда их доли в дележе будут не меньше значений 45, 35 и 30 соответственно. Коалиции из двух игроков не могут обеспечить такие значения: v {1-е и 2-е} = 70 < 45+35 и т.д.

Единственным разумным коалиционным решением будет объединение всех трех в одну коалицию. Дележ 111 единиц между членами коалиции должен обеспечивать участникам доли, не меньшие тех, которые они получили бы, действуя в одиночку, т.е. v {1-е и 2-е и 3-е} = 45+35+30+1 = 111, оставшаяся 1 может служить предметом торга.

Для общего случая коалиционной игры ответы на эти вопросы не так очевидны и требуют введения дополнительных понятий.

Однако ограниченный объем учебного пособия не позволяет дать представление о более сложных разделах современной теории игр, таких, как множественные коалиционные игры, дифференциальные игры и др.

Основная проблема заключается в недостаточном обмене информацией между участниками игры и недостаточно гибких приемах формирования коалиций либо по заранее предписанным правилам, либо в начальный момент коалиционную структуру задают на весь период игры.

4.3. Характеристика и методы решения коалиционных игр

Коалиционные игры получаются в тех случаях, когда, в игре n игроков разрешается образовывать определённые коалиции. Обозначим через N множество всех игроков, N = {1, 2, ..., n}, а через K любое его подмножество. Пусть игроки из K договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно числу сочетаний из n по r, то есть C_n^r, а число всевозможных коалиций равно:

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2n - 1. \tag{4.2}$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом n. Образовав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков.

Образовав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков.

Функция υ, ставящая в соответствие каждой коалиции K наибольший, уверенно получаемый его выигрыш ϑ (K), называется характеристической функцией игры.

Характеристическая функция ϑ называется простой, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция ϑ простая, то коалиции K, для которых ϑ (K) = 1, называются выигрывающими, а коалиции K, для которых $\upsilon(K) = 0$, называются проигрывающими.

Если в простой характеристической функции выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию R, то характеристическая функция, обозначаемая в этом случае через R, называется простейшей.

Содержательно простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Более сложным является пример оценки результатов голосования в Совете безопасности ООН, где выигрывающими коалициями являются все коалиции, состоящие из всех пяти постоянных членов Совета плюс ещё хотя бы один непостоянный член, и только они.

Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое «ядро», голосующее с соблюдением правила «вето», а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Обозначим через υG характеристическую функцию бескоалиционной игры. Эта функция обладает следующими свойствами:

– персональность

$\vartheta G(\varnothing) = 0$, т.е. коалиция, не содержащая ни одного игрока, ничего не выигрывает;

– супераддитивность

$\vartheta G(K \cup L) \geq \vartheta G(K) + \vartheta G(L)$, если $K, L \subset N$, $K \cap L \neq \varnothing$,

т.е. общий выигрыш коалиции не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции;

– дополнительность

$$\vartheta G(K) + \vartheta (N \backslash K) = \vartheta (N) \quad (4.3)$$

т. е. для бескоалиционной игры с постоянной суммой сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков.

Распределение выигрышей (делёж) игроков должно удовлетворять следующим естественным условиям: если обозначить через xi выигрыш i-го игрока, то, во-первых, должно удовлетворяться условие индивидуальной рациональности

$$xi \geq \vartheta (i), \text{ для } i \in N \quad (4.4)$$

т. е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции); во-вторых, должно удовлетворяться условие коллективной рациональности

$$\sum_{i=1}^{N} xi = \vartheta (N) \quad (4.5)$$

т. е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем ϑ(N), то игрокам незачем вступать в коалицию; если же потребовать, чтобы сумма выигрышей была больше, чем ϑ(N), то это значит, что игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть).

Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое ядро, голосующее с соблюдением правила вето, а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Таким образом, вектор x = (x1, ..., xn), удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется дележём в условиях характеристической функции.

Система $\{N, \vartheta\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям (2) и (3) в условиях характеристической функции, называется классической кооперативной игрой.

Из этих определений непосредственно вытекает следующая

Теорема. Чтобы вектор x = (x1, ..., xn) был дележём в классической кооперативной игре $\{N, \vartheta\}$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$xi = \vartheta(i) - \alpha i, \ (i \in N),$$

$$\alpha_i \geq 0 \ (i \in N),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha i = \vartheta(N) - \sum_{i=1}^{N} \vartheta i \tag{4.6}$$

причём:

супераддитивность бесколиционный эквивалентность кооперативный

i 0 (iN)

$$\sum_{i=1}^{N} ai = (N)$$

$$\sum_{i \in N} \upsilon(i)$$

В бескоалиционных играх исход формируется в результате действий тех самых игроков, которые в этой ситуации получают свои выигрыши. Исходом в кооперативной игре является делёж, возникающий не как следствие действия игроков, а как результат их соглашений. Поэтому в кооперативных играх сравниваются не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи, и сравнение это носит более сложный характер.

Кооперативные игры считаются существенными, если для любых коалиций K и L выполняется неравенство:

$$(K) + (L) < (KL), \tag{4.7}$$

т.е. в условии супераддитивности выполняется строгое неравенство. Если же в условии супераддитивности выполняется равенство:

$$(K) + (L) = (KL), \tag{4.8}$$

т.е. выполняется свойство аддитивности, то такие игры называются несущественными.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Понятие кооперативной (коалиционной) игры.
2. Понятие коалиции и коалиционной структуры.
3. Существенные и несущественные кооперативные игры.
4. Понятие дележа в кооперативной игре.
5. Понятие характеристической функции.
6. Простая характеристическая функция.
7. Нахождение характеристической функции на примере.
8. Основная проблема коалиционных игр.

5. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

5.1. Основные понятия позиционных игр

Во многих практически важных конфликтных ситуациях стороны-участницы, располагая той или иной информацией о прошлом развитии конфликта, совершают свой выбор не раз и навсегда, а последовательно во времени, шаг за шагом. Тем самым, они используют стратегии, отражающие как динамику конфликта, так и степень собственной информированности о фактически складывающейся обстановке в развитии этого конфликта.

Одним из таких классов игр являются позиционные игры, которые описывают конфликты, динамика которых оказывает влияние на поведение участников.

Естественным расширением матричной игры двух игроков с нулевой суммой является позиционная игра, в которой может принимать участие более двух (конечное число) игроков, каждый из них может последовательно делать конечное число ходов, некоторые ходы могут быть случайными, а сведения о них могут меняться от хода к ходу. Такие игры могут быть формализованы, определенным образам преобразованы в игру, эквивалентную некоторой матричной игре двух игроков с нулевой суммой.

Позиционная игра – это бескоалиционная игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений игроками в условиях, меняющейся во времени, и в условиях неполной информации.

Процесс сведения позиционной игры к матричной называется нормализацией, а полученная матричная игра – игрой в нормальной форме.

Принцип позиционной игры включает последовательные переходы от одного состояния к другому, которые производятся игроками исходя из возможных стратегий и правилами игры, либо случайным образом (случайный ход). Примерами позиционных игр могут быть крестики-нолики, шашки, шахматы, карточные игры, домино и т.п.

Состояния игры принято называть узлами или позициями (отсюда и название – позиционные игры), а возможные выборы в каждой позиции – альтернативами. Окончательные позиции называются вершинами.

Характерной особенностью позиционной игры является возможность представления множества позиций в виде древовидного упорядоченного множества, которое называется деревом игры. Итак, множество позиций можно представить в виде древовидного упорядоченного множества, которое называется деревом игры (рис. 5.1).

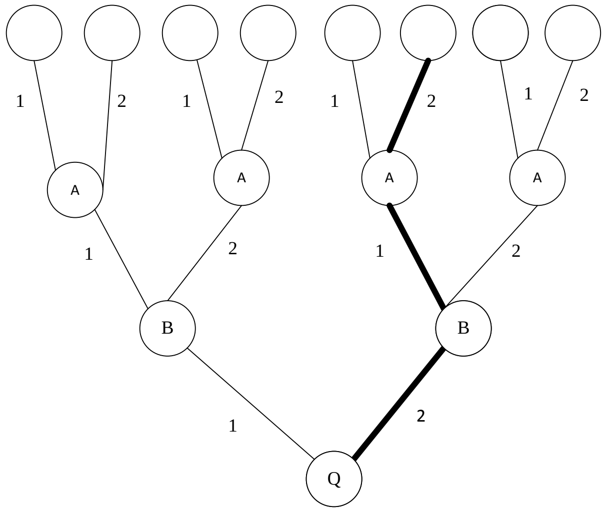

Рис. 5.1. Дерево игры

Например, в позиционной игре, представленной на рис.5.1 своим деревом, первый ход производится случайно (символ Q). Символы Q, A или B в кружке указывают, кто из игроков (Q, A или B) делает очередной ход в данной позиции.

Если говорить более подробно, то деревом позиционной игры называется плоская фигура, состоящая из узлов и конечного числа направленных вверх прямолинейных отрезков, соединяющих эти узлы; каждый узел обозначается цифрой (или другим символом), соответствующей номеру игрока, делающего ход, и изображает ход этого игрока, поэтому каждому ходу соответствует набор узлов, расположенных на одном определенном уровне. На самом низшем уровне имеется только один узел – основание дерева (начальная вершина), каждый узел соединяется только с одним узлом на низшем уровне, каждый прямолинейный отрезок означает выбор, сделанный игроком на данном ходе, и обозначается номером, соответствующим сделанному выбору.

Если в игре используется ход, осуществляемый не игроком, а случайным механизмом (иногда его называют «природой»), то обычно узлу, соответствующему данному ходу, присваивается номер 0 (нуль).

Окончательными вершинами дерева (окончательными позициями) являются окончания прямолинейных отрезков, исходящих из узлов последнего уровня.

Ветвью дерева называется ломаная линия, состоящая из прямолинейных отрезков дерева, которая начинается в самом нижнем узле (начальная вершина) и идет вверх последовательно через соответствующие узлы до окончательной вершины дерева.

5.2. Графическое изображение партии позиционной игры

Пользуясь графическим описанием игры в виде дерева игры, можно заметить, что процесс игры состоит в переходе от начальной позиции (начальная вершина) к окончательной позиции (окончательная вершина), через непосредственно следующие одна за другой промежуточные позиции.

Каждая окончательная вершина определяет единственную цепь (последовательность идущих друг за другие звенья), связывающую начальную вершину с данной (окончательной вершиной) (рис.5.2). Такая цепь (то есть ветвь дерева) называется партией. На рис.5.2 одна из партий выделена жирными линиями. Число различных партий равно числу окончательных вершин (позиций). В каждой окончательной позиции задан числовой выигрыш игрока А.

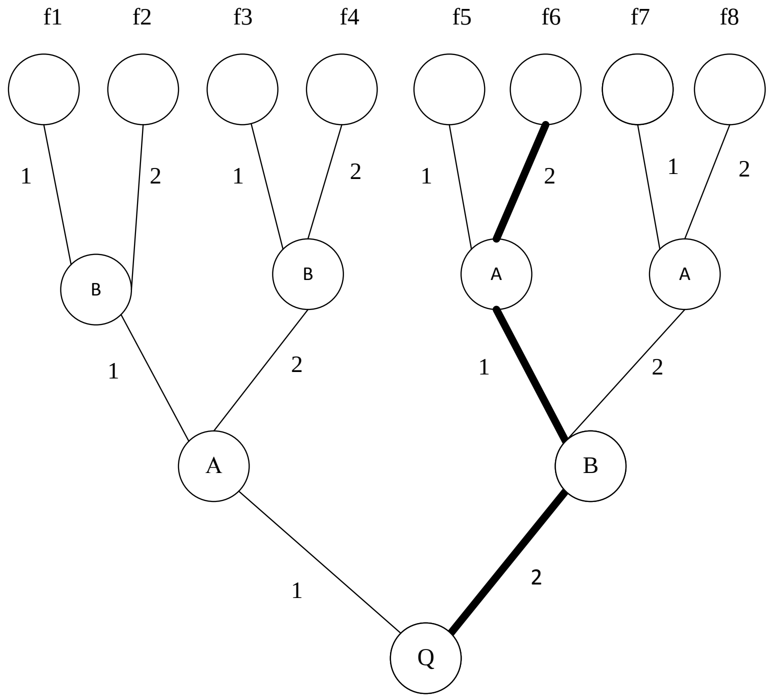

Рис.5.2. Дерево игры

Используя понятие ветви дерева игры, можно сказать, что каждая ветвь дерева игры изображает партию игры.

Например, в шахматах функция выигрышей игрока A (белых) определяется так:

– (+1) на выигрываемых партиях,

– 0 на ничейных партиях,

– (-1) на проигрываемых партиях.

Функция выигрышей игрока B (черных) отличается от функции выигрышей игрока A (белых) только знаком.

Позиционная игра может быть представлена графически в виде дерева, которое дает наглядное представление об игре. С другой стороны, графическое представление игры, выполненное с соблюдением правил его построения, дает основание для формального представления позиционной игры, и можно рассматривать теоретически не сами позиционные игры, а их графическое представление в виде дерева.

Различают позиционные игры с полной информацией и позиционные игры с неполной информацией.

В позиционных играх с полной информацией (пример – шашки, шахматы) каждый игрок при своем ходе знает ту позицию дереза игры, в которой он находится.

В позиционных играх с неполной информацией (пример – домино) игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции дерева игры он фактически находится. Этому игроку известно лишь некоторое множество позиций, включающее в себя его фактическую позицию. Такое множество позиций называется информационным множеством.

Позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству, объединяются пунктирными линиями. В каждое информационное множество входят только неразличимые для игрока узлы, т. е. только те узлы, для каждой пары из которых соответствующий игрок не может точно указать, в какой точке дерева он находится, делая этот ход.

Составляя информационные множества, следует помнить следующее:

В одно информационное множество могут входить только узлы, относящиеся к одному игроку;

Любая линия игры (ветвь дерева, отображающая партию игры) не должна пересекать одно и то же информационное множество больше одного раза.

Условие 2 можно сформулировать еще так: в одно информационное множество не должно входить больше одного узла каждой ветви, отображающей партию игры.

5.3. Нормализация позиционной игры

Игра в позиционной форме предусматривает принятие решений в каждой позиции игры. Однако каждая сторона может заблаговременно составить свой план ведения игры, предусматривающий, какое решение должно быть выбрано на каждом ходе (если развитие игры приведет в позицию, соответствующую этому ходу). Принятие такого плана сводит многократные выборы решений в ходе игры к единственному выбору, то есть к выбору плана, определяющего решения во всех позициях данной стороны.

Будем называть такие планы стратегиями сторон в позиционной игре.

Стратегия игрока в конечной позиционной игре есть функция, определенная на всех информационных множествах этого игрока (на дереве игры). Заранее определенную последовательность ходов игрока, выбранную им в зависимости от информации о ходах другого игрока и ходах игрока О (природы), будем называть чистой стратегией этого игрока.

В случае, если в игре нет случайных ходов (игрок О в игре не участвует), выбор игроками чистых стратегий однозначно определяет исход игры – приводит к окончательной позиции, где игрок А и получает свой выигрыш.

Это позволяет сводить позиционную игру к матричной игре.

Процесс сведения позиционной игры к матричной игре называется нормализацией позиционной игры.

Рассмотрим пример игры, состоящий из двух ходов, которые последовательно выполняют игроки А и В. Начинает игрок А и выбирает одну из двух возможных альтернатив – число x, равное 1 (первая альтернатива), либо число 2 (вторая альтернатива). На ход игрока А игрок В отвечает своим ходом. Выбирая одну из возможных альтернатив – число y, равное 1 (первая альтернатива), либо число 2 (вторая альтернатива). В результате игрок А получает выигрыш или вынужден платить штраф.

Пример 1 – нормализация двухходовой игры с полной информацией.

1-й ход. Игрок А и выбирает число x из множества двух чисел $\{1,2\}$.

2-й ход. Игрок В и выбирает число y из множества двух чисел $\{1,2\}$, зная какое число x выбрал игрок А.

Задана функция W(x,y) выплат игроку А за счет игрока В:

$W(1,1) = 1,$ $\qquad$ $W(2,1) = -2,$

$W(1,2) = -1,$ $\qquad$ $W(2,1) = 2.$

Дерево игры представлено на рис. 5.3.

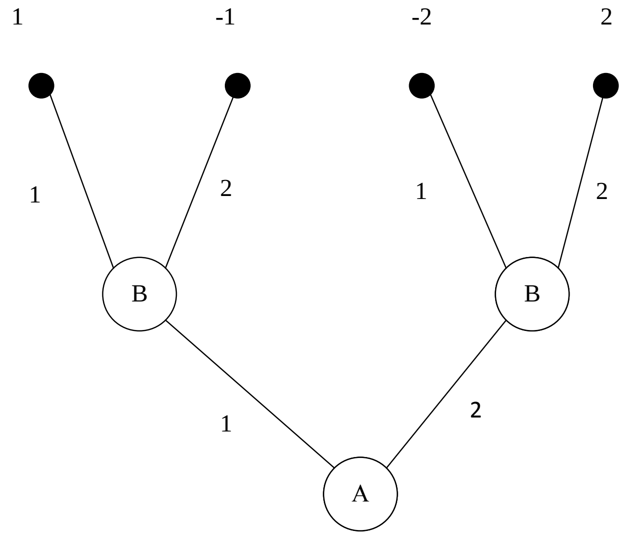

Рис. 5.3

Рассмотрим стратегии игроков.

Игрок А имеет две чистых стратегии:

А1 – выбрать x = 1, А2 – выбрать x = 2.Стратеги игрока В можно описать парой [y1,y2].

Здесь y1(y1$\in \{1,2\}$) – альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что игрок А выбрал первую альтернативу, x1 = 1, а y2(y2$\in \{1,2\}$) – альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что игрок А выбрал вторую альтернативу, x = 2.

Например, выбор игроком В стратегии [2,1] означает, что если на первом ходе игрок А выбрал x = 1, то игрок В на своем ходе должен выбрать y = 2. Если на первом ходе игрок А выбрал x = 2, то игрок В на своем ходе должен выбрать y = 1. У игрока В четыре чистые стратегии:

В1 – [1,1] («y = 1 при любом выборе x»);

В2 – [1,2] («y = x при любом выборе x»);

В3 – [2,1] («y $\neq$ x при любом выборе x»);

В4 – [2,2] («y = 2 при любом выборе x»).

Рассмотрим выигрыши игрока А в зависимости от применяемых стратегий.

Например, игрок А выбрал стратегию А1 – (1), а игрок В – стратегию В2 – [1,2]. Тогда при x = 1, из стратегии [1,2] следует, что y = 1.

Отсюда

W(x,y) = W(1,1) = 1.

Результаты записываются обычно в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

		B1	B2	B3	B4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A1	x = 1	W(1,1)	W(1,1)	W(1,2)	W(1,2)
A2	x = 2	W(2,1)	W(2,2)	W(2,1)	W(2,2)

или в виде матрицы. Где строки соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица имеет седловую точку. Оптимальные стратегии игроков: A1 – (1) и B3 – [2,1]. Игрок A на первом ходе выбирает стратегию x = 1, а игрок B на втором ходе выбирает y = 2. Цена игры $\vartheta = -1$.

5.4. Позиционные игры с полной информацией

Позиционная игра называется игрой с полной информацией, если в каждой позиции любой ее партии игрок, выполняющий ход, знает, какие альтернативы были выбраны на предыдущих ходах. Примерами позиционных игр с полной информацией являются крестики-нолики, шашки, шахматы.

Особенностью таких позиционных игр с полной информацией является то, что соответствующая матрица выигрышей всегда имеет седловую точку, то есть существуют оптимальные чистые стратегии (равновесная ситуация).

Это означает, что в шахматах (крестиках-ноликах, шашках) уже в начальной позиции либо имеется способ выигрыша за белых, либо способ выигрыша за черных, либо каждая из сторон способна форсировать ничью.

Однако доказательство существования равновесной ситуации неконструктивно и не дает эффективных приемов фактического нахождения решения игры. Такие способы в шахматах не найдены до сих пор.

В игре крестики-нолики стратегий немного, и она разработана до самого конца, то есть существуют оптимальные чистые стратегии, ведущие игроков к ничьей.

Пример о «выкладывании монет на сто». Два игрока поочередно кладут монеты одинаковых размеров на стол, всякий раз выбирая произвольное доступное место для монеты. Перекрывание монет не допускается. Тот из игроков, кто положит монету, не оставляющую места для новых монет, выигрывает.

В переговорах участвуют две стороны A и B. В слегка идеализированном варианте это может выглядеть, например, так. Сначала сторона A высказывает одно из нескольких предложений, способных заинтересовать сторону B. Затем сторона B, ознакомившись с предложением стороны A, высказывает одно из нескольких встречных предложений, способных, по ее мнению, заинтересовать сторону A. В свою очередь, сторона A, ознакомившись с реакцией стороны B на сделанные предложения, высказывает ей новое предложение, внеся одну из нескольких возможных корректировок в свое первоначальное предложение с учетом мнения стороны B и т. д. Если предмет переговоров сложен, то подобный обмен ходов может затянуться. Однако любые переговоры непременно заканчиваются. И там, на финише, ждет функция выигрышей.

Попробуем смоделировать короткий переговорный процесс при помощи трехходовой позиционной игры. Предположим, что переговоры заканчиваются через три хода, на каждом из которых соответствующая сторона имеет возможность выбора из двух альтернатив, и опишем соответствующую позиционную игру.

1-й ход делает сторона A: она выбирает одно из двух возможных предложений – число x из множества двух чисел {1,2}.

2-й ход делает сторона B: она выбирает число y из множества двух чисел {1,2}, зная число x, предложенное стороной A.

3-й ход делает сторона A: она выбирает число z из множества двух чисел {1,2}, зная о предложении стороны B на 2-м ходе и помня собственное предложение на 1-м ходе.

После этого сторона A либо получает вознаграждение (например, в виде кредита от стороны B), либо выплачивает стороне B штраф. Все эти возможности описываются функцией выигрышей W (x, y, z), заданной следующей таблицей (рис. 5.4).

W (1,1,1) = a;

W (1,1,2) = b;

W (1,2,1) = c;

W (1,2,2) = d;

W (2,1,1) = e;

W (2,1,2) = f;

W (2,2,1) = g;

W (2,2,2) = h.

Рассмотренная позиционная игра является игрой с полной информацией.

Графическое представление этой игры показано на рис.5.5. Сделаем необходимые пояснения к данному рисунку. Поскольку первый ход делает первый игрок (сторона A), то самый нижний узел соответствует ходу первого игрока (сторона A) и обозначен буквой A. Из этого узла исходят два отрезка (ветви), соответствующие выбору 1 или 2, которые обозначены соответственно цифрами 1 и 2. Второй ход делает второй игрок (сторона B), поэтому узлы второго уровня обозначены буквой B. Поскольку второму игроку известен выбор первого игрока на первом ходе, то второй игрок (сторона B), делая свой ход, знает, в каком месте дерева (на какой ветви дерева) находится. Если первый игрок (сторона A), на первом ходе выбрал число 1, то второй игрок (сторона B) находится на левой ветви дерева, если же первый игрок (сторона A) на первом ходе выбрал число 2, второй (сторона B) находится на правой ветви дерева. Таким образом, левый узел с буквой B образует отдельное информационное множество. Аналогично и правый узел с буквой B также образует информационное множество. Поскольку третий ход делает первый игрок (сторона А), то третий уровень узлов обозначен буквой А. Первый игрок, делая третий ход, помнит о своем выборе на первом ходе, и поэтому он знает, на какой ветви дерева находится второй игрок, делая второй ход. Далее, так как первому игроку известен выбор второго игрока, то он точно знает, в каком месте дерева сам находится, делая выбор на третьем ходе. Поэтому каждый узел третьего уровня образует отдельное информационное множество. Каждая партия игры представляется на дереве в виде отдельной ветви, которая идет от самого нижнего узла через один узел каждого уровня и заканчивается одной верхней точкой. Всего может быть восемь возможных партий (по количеству самых верхних точек). Любая партия игры характеризуется точкой, координата которой соответствует выбору определенного игрока.

Всего может быть 8 точек: (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2). Каждой точке соответствует выигрыш первого игрока согласно функции W (x, y, z). Так как часто над каждой верхней точкой проставляют выигрыш первого игрока в соответствующей партии, то для рассматриваемой игры получим рис. 5.4.

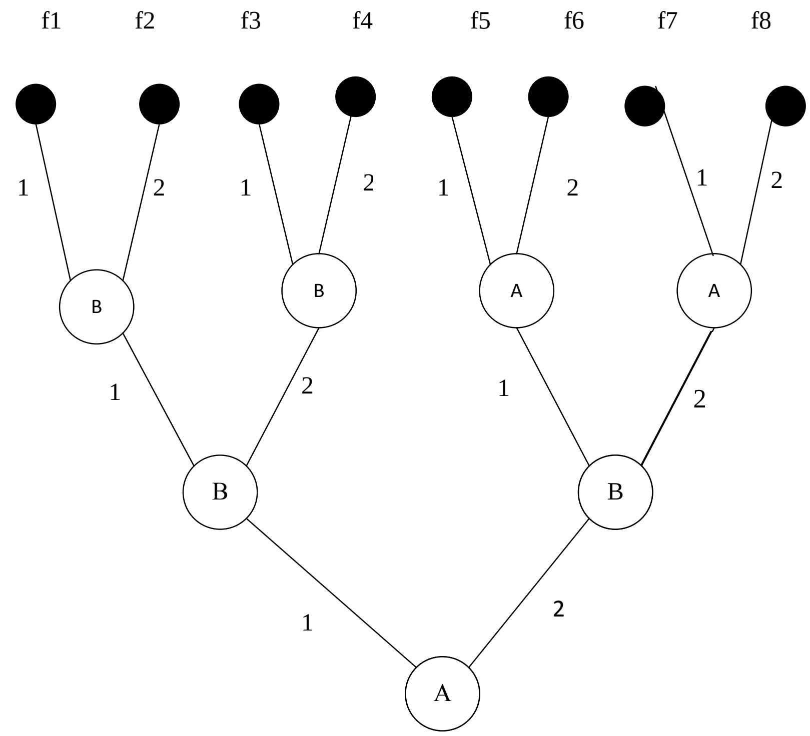

Рис. 5.4

Для нормализации этой позиционной игры сначала опишем возможные стратегии игрока B. Поскольку игроку B выбор игрока A на 1-м ходе известен, то у игрока B те же четыре стратегии, что и в примере 1:

Таким образом, у игрока B четыре чистых стратегии:

B1 – [1,1] («y = 1 при любом выборе x»);

B2 – [1,2] («y = x при любом выборе «x»);

B3 – [2,1] («y ≠ x при любом выборе «x»);

B4 – [2,2] («y = 2 при любом выборе «x»).

Другими словами, у второго игрока столько стратегий, сколько имеется способов отображения множества {1, 2} в себя.

С описанием возможных стратегий игрока A дело обстоит немного посложнее – их восемь. Стратегия для первого игрока должна учитывать результаты сделанных ранее выборов. При каждом выборе на первом ходе может быть два выбора на втором ходе, т. е. уже имеется четыре варианта, а при каждом из этих вариантов может быть сделано два выбора, т. е. всего 8 возможных стратегий. Обозначим через (i, [i1, i2]) стратегию первого игрока. Число i (i = 1,2) означает выбор первым игроком на первом ходе; i1 (i1 = 1,2) – выбор первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число 1; i2 (i2 = 1,2) – выбор первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число 2.

Таким образом, чистая стратегия игрока A в данной игре описывается упорядоченной тройкой (i, [i1, i2]).

A1: (1, [1,1]); A2: (1, [1,2]); A3: (1, [2,1]); A4: (1, [2,2]);

A5: (2, [1,1]); A6: (2, [1,2]); A7: (2, [2,1]); A8: (2, [2,2]).

Например, стратегия A3: (1, [2, 1]) означает следующую стратегию первого игрока: на первом ходе он выбирает число 1 (первая цифра в скобках), а на третьем ходе он выбирает число 2, стоящее на втором месте в скобках, если второй игрок на втором ходе выбрал число 1; если же второй игрок на втором ходе выбрал число 2, то первый игрок на третьем ходе должен выбрать число 1, стоящее на третьем месте в скобках. Выигрыши первого игрока определяются так. Пусть, например, первый игрок применяет стратегию А3: (1, [2, 1]), а второй – первую стратегию В1: [1,1]. Тогда из стратегии А3: (1, [2, 1]) следует, что x = 1, далее, второй игрок, невзирая на x, выбирает y = 1, а из стратегии А3: (1,[2, 1]) следует, что первый игрок выдаст z = 2. Получим выигрыш W (x, y, z) = W (1, 1, 2) = b.

Аналогично рассчитываются остальные выигрыши. Теперь приведем матрицу выигрышей первого игрока (игрок А) в зависимости от применяемых стратегий (табл.5.1), где столбцы соответствуют стратегиям второго игрока (игрок В), а строки – стратегиям первого игрока (игрок А). Другими словами, составляем матрицу выигрышей первого игрока (игрок А) в матричной игре двух игроков с нулевой суммой (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Таблица выигрышей

ИГРОК В ИГРОК А	В1: [1,1]	В2: [1,2]	В3: [2,1]	В4: [2, 2]
А1: (1,[1,1])	W(1,1,1)	W(1,1,1)	W(1,2,1)	W(1,2,1)
А2: (1,[1,2])	W(1,1,1)	W(1,1,1)	W(1,2,2)	W(1,2,2)
А3: (1,[2,1])	W(1,1,2)	W(1,1,2)	W(1,2,1)	W(1,2,1)
А4: (1,[2,2])	W(1,1,2)	W(1,1,2)	W(1,2,2)	W(1,2,2)
А5: (2,[1,1])	W(2,1,1)	W(2,2,1)	W(2,1,1)	W(2,2,1)
А6: (2,[1,2])	W(2,1,1)	W(2,2,2)	W(2,1,1)	W(2,2,2)
А7: (2,[2,1])	W(2,1,2)	W(2,2,1)	W(2,1,2)	W(2,2,1)
А8: (2,[2,2])	W(2,1,2)	W(2,2,2)	W(2,1,2)	W(2,2,2)

Вследствие того, что рассматриваемая позиционная игра является игрой с полной информацией, полученная матрица имеет седловую точку при любой функции выигрышей.

Таблица 5.3

a	a	c	c
a	a	d	d
b	b	c	c
b	b	d	d
e	g	e	g
e	h	e	h
f	g	f	g
f	h	f	h

В этом не трудно убедиться, задавая произвольно значения параметров a, b, c, d, e, f, g, h.

Пусть, например, функция W (x, y, z) задана следующим образом:

W (1,1,1) = –2; W (1,1,2) = –1; W (1,2,1) = 3; W (1,2,2) = –4;

W (2,1,1) = 5; W (2,1,2) = 1;

W (2,2,1) = 2; W (2,2,2) = 6.

Тогда получим следующую матрицу выигрышей игрока A (табл.5.4).

Таблица 5.4

–2	–2	3	3
–2	–2	–4	–4
–1	–1	3	3
–1	–1	–4	–4
5	2	5	2
5 (*)	6	5 (*)	6
1	2	1	2
1	6	1	6

Исследуя эту игру обычными способами, приходим к решению: имеется две седловые точки, отмеченные звездочкой в платежной матрице игрока А. Оптимальная стратегия первого игрока А6: (2, [1, 2]) состоит в выборе числа $x = 2$ на первом ходе и числа z – на третьем ходе, равного числу y, выбранного вторым игроком на втором ходе. У второго игрока имеется две оптимальные стратегии: первая и третья. То есть выбирать число $y = 1$, невзирая на x, или выбирать число y, отличное от x: $y \neq x$. Цена игры равна 5.

Рассмотрим некоторую интерпретацию этой игры. Например, имеются две страны, которые хотят установить между собой деловые связи. Они должны решить вопрос о строительстве завода. Первая страна может построить завод для второй страны. Эту ситуацию упрощенно представим в виде следующей позиционной игры.

Ход 1. Первая страна (первый игрок А) делает выбор из двух альтернатив: 1-я – предложить второй стране построить завод для производства автомобилей, 2-я – построить завод для переработки сельскохозяйственной продукции.

Ход 2. Вторая страна (второй игрок В), зная, какую альтернативу выбрала первая страна на первом ходу, делает выбор из двух альтернатив: 1-я – строить завод по производству автомобилей и предложить это первой стране, 2-я – строить завод по переработке сельскохозяйственной продукции и предложить это первой стране.

Ход 3. Первая страна, зная выбор второй страны на втором ходу и помня свой выбор на первом ходу, делает выбор из двух альтернатив: 1-я–согласиться с предложением второй страны, 2-я – не согласиться с ним. После того, как сделаны все три хода, первая страна получает сумму W (x, y, z), где x выбор 1 или 2 на первом ходу, y – выбор 1 или 2 на втором ходу, z – выбор 1 или 2 на третьем ходу. Функция W (x, y, z) совпадает с функцией, определенной в игре примера 3.

При увеличении числа ходов стратегии в позиционной игре с полной информацией строятся по аналогичной схеме.

В рассмотренных примерах основное внимание было уделено описанию процесса нормализации позиционной игры – построению дерева игры и информационных множеств, выработке стратегий игроков и вычислению элементов платежной матрицы. Следующий естественный шаг – отыскание цены игры и оптимальных стратегий игроков – проводится методами, о которых рассказывалось в лекции 2, посвященной антагонистическим играм.

Мы достаточно подробно остановились на позиционных играх двух лиц, где были явно выражены интересы одного из игроков (игрока А). Следует, однако, иметь в виду, что в одних случаях интересы игрока В могут быть полностью противоположными интересам игрока А, в то время как в других вполне может оказаться, что то, что хорошо для одного игрока, не обязательно плохо для другого.

Игры с идеальной памятью являются интересным обобщением игр с полной информацией.

Игрой с идеальной памятью называется игра, в которой каждый из игроков всегда помнит все, что он делал или знал во время каждого из своих ходов. Например, всякая игра двух игроков, в которой могут играть лишь два человека (а не команда), способные помнить всю информацию о выборах в любом ходе, является игрой с идеальной памятью.

Используя понятие информационного множества, игру с идеальной памятью можно определить более точно.

Позиционная игра – это игра с идеальной памятью, если для нее выполняются следующие условия.

1.Пусть X и Y – любые два хода, выполняемые одним игроком и такие, что в некоторой партии игры ход X предшествует ходу Y;

U и V – информационные множества, содержащие соответственно X и Y;

Каждая точка информационного множества U дает k альтернатив;

Ui (i = 1, 2, ..., k) – множество всех узлов дерева (ходов), которые можно достигнуть, выбрав i-ю альтернативу в некоторой точке множества U, тогда для любого i имеет место соотношение: информационное множество V содержится во множестве Ui.

5.5. Позиционные игры с неполной информацией

Более сложные для исследования являются игры с неполной информацией (например, домино). В позиционных играх с неполной информацией игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции дерева игры он фактически находится.

Такое множество позиций называют информационным множеством, которое используется для описания неопределенности, в условиях которой игрок выполняет очередной ход. Множества, на которые разбиты неразличимые для данного игрока узлы во множестве очередности, называются информационными множествами. Позиции, принадлежащие одному информационному множеству i-го игрока, для него неразличимы и объединяются пунктирными линиями.

Выполняя очередной ход, игрок знает только, что он находится в одной из позиций данного информационного множества (но не знает в какой). Для того чтобы выбрать свою стратегию, игрок должен делать дополнительные предположения о действиях других игроков и использовать соответствующий этой информационной гипотезе принцип оптимальности, например, принцип наилучшего гарантированного результата. Позиционную игру с неполной информацией также можно записать в виде игры в нормальной форме, но эта игра может не иметь ситуации равновесия в чистых стратегиях.

Рассмотрим пример о контроле качества товара. Рассмотрим сначала случай, когда осуществляется продажа без гарантии. Перерабатывающее предприятие (игрок 1) покупает сырье у поставщика («покупка») или использует собственное («отказ»). Поставщик (игрок 2) может применять хороший контроль качества или плохой. Перерабатывающее предприятие не знает уровень контроля поставщика и проводит собственный контроль на одном из трех уровней: хороший (Х), средний (С), плохой (П). Выигрыши игроков заданы на рис. 5.5. Информационное множество игрока 1 при выборе второго хода состоит из двух вершин. Рассмотрим подыгру 1, подграф которой имеет начальную вершину, соответствующей ходу игрока 2 (если игрок 1 выбрал покупку).

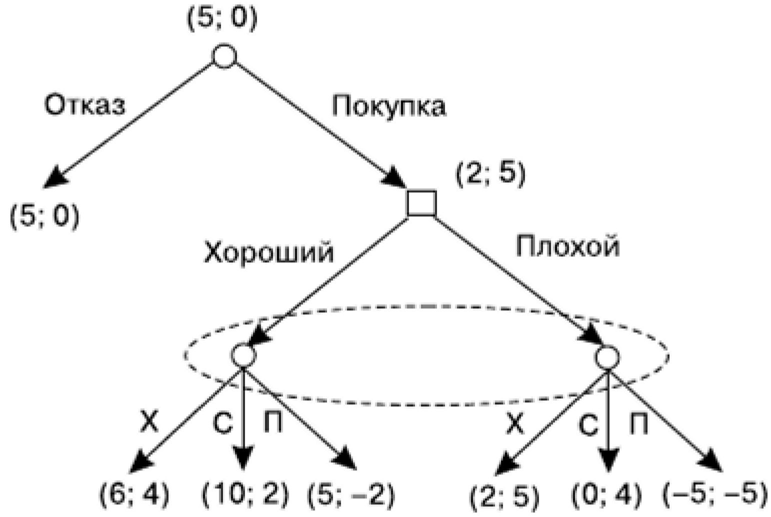

Рис. 5.5. Игра «контроль качества товара (продажа без гарантии)»

Матрица этой подыгры имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Х} \\ \text{С} \\ \text{П} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Хороший} & \text{Плохой} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6; 4 & 2; 5 \\ 10; 2 & 0; 4 \\ 5; -2 & -5; -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ситуация (Х, Плохой) с выигрышами (2; 5) является равновесием по Нэшу и сложным равновесием. Совершенным равновесием в исходной игре является ситуация с выигрышем (5; 0), оптимальные стратегии игроков и 0 = (Отказ, Х; Плохой). Решение не является Парето-оптимальным.

Изменим условие задачи и рассмотрим ситуацию, когда осуществляется продажа с гарантией. Пусть поставщик платит получателю товара штраф 3 д. е. в случае плохого качества. Выигрыши в конечных позициях и равновесие изменятся (рис. 5.6).

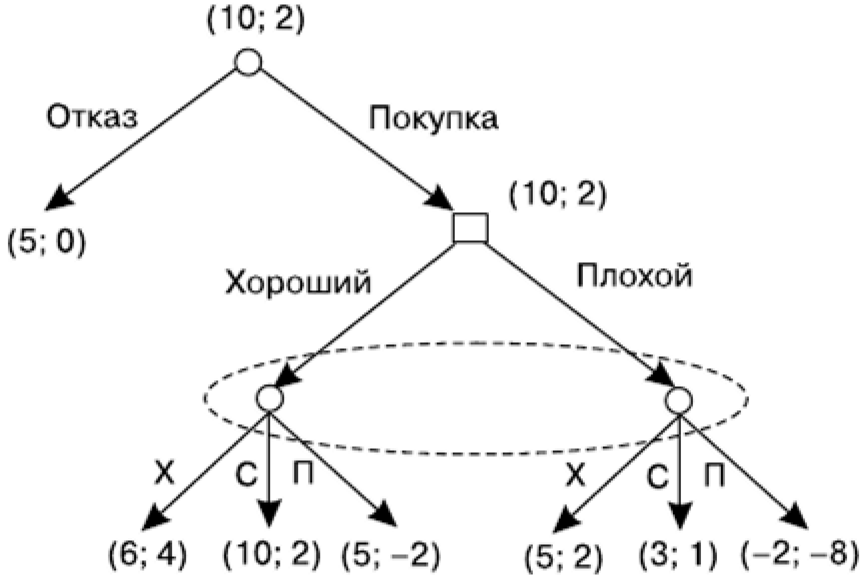

Рис. 5.6. Игра «контроль качества товара (продажа с гарантией)»

Матрица подыгры 1 имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ Х \\ С \\ П \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Хороший} & \text{Плохой} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6; 4 & 5; 2 \\ 10; 2 & 3; 1 \\ 5; -2 & -2; -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Равновесие по Нэшу (и сложное равновесие) в подыгре 1 – ситуация (С, Хороший) с выигрышем (10; 2), является совершенным равновесием в исходной игре (эти платежи представлены на рис. 5.6 у хода игрока 2). Оптимальные стратегии (Покупка, С; Хороший) (введение гарантии в интересах обоих игроков).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Понятие позиционной игры.
2. Что такое матричная игра в нормальной форме?
3. Привести пример дерева игры.
4. Графическое изображение партии позиционной игры.
5. Позиционные игры с полной информацией.
6. Понятие игры с идеальной памятью.
7. Позиционные игры с неполной информацией.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

6.1. История и классификация дифференциальных игр

Дифференциальные игры (ДИ)–раздел математической теории управления, в котором изучается управление объектом в конфликтных ситуациях. Для выбора своего управления каждый игрок может использовать лишь текущую информацию о поведении игроков. Различают дифференциальные игры двух игроков и многих игроков.

Дифференциальные игры – это игры, в которых в отличие от других(например, матричных) игр стратегии выбираются по ходу игры и выигрыш каждого участника зависит от траекторий управления, принятых всеми участниками игры. Число ходов и вместе с ними стратегий может быть бесконечно много.

Для задач военного назначения дифференциальные игры описываются дифференциальными уравнениями или применяются стохастические многошаговые антагонистические игры.

Во время второй мировой войны исследование операций применялось в процессе планирования боевых действий специалистами США. Ими изучались разные факторы, определяющие эффективность бомбометания. Были выработаны стратегии, повысившие в четыре раза эффективность бомбометания. Выработка маршрутов патрулирования самолетов союзников и расписания полетов обеспечило минимальную вероятность остаться незамеченными корабли и подводные лодки противника1.

Классификация дифференциальных игр может строиться по разным основаниям: по числу игроков (задача управления может рассматриваться как особая дифференциальная игра с одним участником), по характеру платежных функций: игры с нулевой и с не нулевой суммой (в зависимости от того, равна или не равна нулю общая сумма выигрышей всех игроков); возможно также разделение на стохастические и детерминированные, дискретные и непрерывные игры.

---

[1] Покорная О. Ю. Дифференциальные игры в военных конфликтах // Молодой ученый. — 2013. — №10. — С. 10-13. — URL https://moluch.ru/archive/57/7944/ (дата обращения: 02.04.2020).

6.2. Основные сведения из теории дифференциальных игр

Само название «дифференциальные игры» предполагает, что в качестве основного подхода к задачам теории игр используются такие средства классического анализа, как дифференциальные уравнения. Однако мы предпочитаем представлять себе нашу теорию как такую, которая исследует игры, где противники принимают длинный ряд последовательных–дискретных или непрерывных–решений, которые так логически связаны друг с другом, что эта связь может послужить основой наглядной и поддающейся счету модели.

Типичными примерами дифференциальных игр являются сражения, воздушные бои, футбол, преследование судна торпедой. Если один из игроков выключается из игры, мы получаем обычную задачу максимизации.

Решения игроков всегда заключаются в выборе некоторых величин, называемых управлениями. Они в свою очередь определяют собой значения других величин–фазовых координат. Последние обладают свойством, что знание их значений в любой момент времени полностью определяет течение игры. В процессе игры фазовые координаты меняются.

По окончании партии становится известной численная величина, называемая платой. Целью одного игрока является ее максимизация, а другого – минимизация. Наилучшее значение платы, ее минимакс, будет называться ценой игры. Она равна плате при оптимальном действии обоих игроков. Если один из них станет действовать не оптимально, то его противник получит возможность достичь платы, более выгодной для него, чем цена.

Множество P будем называть множеством стратегий игрока I, а множество E-множеством стратегий игрока II. Элементы множеств P и E будем обозначать соответственно через u(.) и v(.). На декартовом произведении $P \times E$ задана вещественная функция K.

Любую траекторию x(t) (y(t)), соответствующую некоторой ситуации $\{x,y;u,v\}$,будем называть траекторией игрока P (игрока E).

6.3. Стратегии в дифференциальной игре

Существует несколько разных подходов к определению понятия стратегии в дифференциальной игре. Стратегия должна характеризовать поведение игрока во всех информационных состояниях, в которых он может оказаться в процессе игры.

Синтезирующие стратегии в игре с предписанной продолжительностью T информационное состояние каждого игрока определяется фазовыми векторами состояний x(t),y(t) в текущий момент t и временем t, прошедшим с момента начала игры. Поэтому рассматриваем стратегию игрока P(E) как вектор-функцию u(x,y,t) (v(x,y,t)) со значениями в множестве управлений U(V). Стратегии такого типа будем называть синтезирующими.

Программные стратегии. Если управления представляют функции, зависящие от времени: u = u(t),v = v(t),то их называют программными управлениями, а стратегии такого вида программными.

Позиционные стратегии. В случае полной информации стратегию игрока P(E) стали бы рассматривать как вектор-функцию u (x,y,t)(v(x,y,t)),т.е. отождествлять стратегии игроков с синтезирующими управлениями. Стратегии такого типа будем называть позиционными.

Кусочно- программные стратегии. В дифференциальной игре, игрокам которой предоставляется возможность неоднозначного выбора управлений в каждом информационном состоянии, в качестве стратегий выбираем кусочно-программные стратегии. Кусочно-программная стратегия u(.)игрока P состоит из пары {σ, α},где σ–некотороеразбиение0≤t≤t≤…≤t≤…отрезка времени[0,∞)точками t, не имеющими конечных точек сгущения; α–отображение, ставящее в соответствие каждой точке t и фазовым состояниям x(t),y(t) некоторое измеримое программное управление u(t) при t[t,t). Аналогично кусочно-программная стратегия v(.) игрока E состоит из пары{τ,β},где τ–некоторое разбиение 0≤t≤t≤…≤t≤…отрезка времени[0,∞)точками t, не имеющими конечных точек сгущения; β– отображение, ставящее в соответствие каждой точке t и позициям x(t),y(t) некоторое измеримое программное управление v(t) при t[t,t).

Стратегия параллельного сближения. Пусть точка E в момент времени t имеет скорость v(t) = {v1(t),v2(t)},||v(t)||$\leq \beta < \alpha.$ Как будет двигаться точка E дальше неизвестно. Наиболее вероятным является продолжение игроком E движения со скоростью v(t) = {v1(t),v2(t)}.Для каждого такого движения существует единственное управление игрока P, которое обеспечивает ему встречу с точкой E за минимальное время.

Параллельным сближением(П-стратегией) называется способ преследования точкой P точки E. Управление игрока P гарантирует ему самое короткое время до точки встречи. П-стратегию можно определить, как вектор-функцию

$$(x1,y1,x2,y2,\nu) = \{1(x1,y1,x2,y2,\nu1,\nu2),2(x1,y1,x2,y2,\nu1,\nu2\}, \qquad (6.3)$$

Ставящую в соответствие каждой паре точек P = {x1,y1},E = {x2,y2} и управлению $\nu = \{\nu1,\nu2\}$управление точки P, гарантирующее быстродействие в точку B.

Пусть E начинает движение из начала координат и использует управление $\nu = \{\nu1,\nu2\}$.Выбирается система координат таким образом, чтобы точка P в начальный момент времени находилась в точке z1(0) = $\{0,\alpha\}$.

При использовании П-стратегии отрезок[z1(t), z2(t)]остается параллельным отрезку [z1(0), z2(0)],то проекции скоростей игроков P и E на ось x равны между собой(u1 = $\nu1$), а величина скорости игрока P при параллельном сближении равнаα. Это позволяет привести решение задачи к системе дифференциальных уравнений.

6.4. Дифференциальные игры с неполной информацией

Игры преследования с задержкой информации у игрока. Игры преследования с не полной информацией являются непосредственным обобщением игр преследования с полной информацией. Наиболее простым случаем неполной информации является так ой, при котором игрок P узнает фазовое состояние игрока E с запаздыванием d>0, а игрок E имеет полную информацию.

Пусть задано некоторое число $d > 0$, называемое задержкой информации. При 0td игрок P в каждый момент времени t знает свое состояние x(t), время t и состояние игрока E в начальный момент yо. При dt T игрок P в каждый момент t знает свое состояние x(t), время t и состояние y(t – d) игрока E в момент t – d. Игрок E в каждый момент времени t знает свое состояние y(t), состояние противника x(t) и время t. Его выигрыш равен ρ(x(T), y(T)). Игра антагонистическая. Обозначим ее через Γ(x0,y0,t).

Кусочно-программные чистые стратегии.

Под кусочно-программной чистой стратегией v игрока E будем понимать пару {τ,β}, где τ–разбиение отрезка времени [0,T] конечным числом точек 0 = t1<…<ts = Tиβ – отображение, которое каждому состоянию x(tk), y(tk), tk ставит в соответствие отрезок измеримого программного управления v(t) игрока E при t[tk,tk+1). Под кусочно-программной чистой стратегией u игрока P будем понимать пару{σ,α},где σ–произвольное разбиение отрезка времени [0,T] конечным числом точек 0 = t1'<…<tk' = T и α–отображение, которое каждому состоянию x(tk'), y(tk'd), tk' при tk '>d ставит в соответствие отрезок измеримого программного управления u(t) игрока P при t[tk',tk+1'). При tk'd отображение α каждому состоянию x(tk'), y0, tk' ставит в соответствие отрезок измеримого управления u(t) игрока P при t[tk',tk+1').

Контрольные вопросы и упражнения

1. Понятие дифференциальной игры
2. Классификация дифференциальных игр
3. Стратегии в дифференциальной игре
4. Игры преследования с задержкой информации у игрока

7. БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

7.1. Понятие бесконечных антагонистических игр

Бесконечные антагонистические игры (как и все антагонистические игры) задаются путем указания пространств A и B стратегий двух игроков и функций выигрыша H на произведении A x B.

Для *бесконечных антагонистических игр* даже существование смешанных экстремумов (1.2), вообще говоря, не обязательно имеет место.

Для *бесконечных антагонистических игр* введение аналогичных смешанных стратегий также окажется достаточно плодотворным, хотя, как можно показать, существуют бесконечные антагонистические игры, не имеющие ситуаций равновесия (и даже ситуаций е-равновесия при достаточно малом е 0) даже в смешанных стратегиях.

Под *бесконечной антагонистической игрой* мы будем понимать такую антагонистическую игру, в которой хотя бы один игрок имеет бесконечное множество стратегий.

Пусть в *бесконечной антагонистической игре* функция выигрышей M (x, y) непрерывная для x е [0; 1], y E [0; 1] и M (x y) – Л / (y, x тогда цена игры равна нулю и любая оптимальная стратегия одного игрока будет также оптимальной стратегией другого игрока.

Решение *бесконечной антагонистической игры* в общем случае может существовать в смешанном расширении. Однако введение смешанного расширения не составляет тривиальную задачу: вероятностные меры задаются на алгебрах подмножеств множества элементарных событий, которые содержат счетное число подмножеств вместе с любыми их объединениями. Отсюда непосредственно следует выход на сепарабельность множеств X и Y. Далее, F (x y] как функция, заданная на X x У, должна быть вещественной измеримой, так как в противном случае невозможно будет гарантировать существование решения рассматриваемой игры как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

Задача. Доказать, что для *бесконечной антагонистической игры*, имеющей решение, ни одна строго доминируемая стратегия игрока не входит в спектр его оптимальной стратегии.

Таким образом, для реализации в *бесконечной антагонистической игре принципа максимина* необходимо, как и в случае конечной (матричной) игры, некоторое расширение стратегических возможностей игроков.

В связи со смешанными стратегиями в *бесконечных антагонистических играх* можно сформулировать и доказать утверждения, аналогичные тем, которые в связи со смешанными стратегиями в матричных играх.

Никаких общих методов для точного нахождения решений *бесконечных антагонистических игр*, и в том числе непрерывных игр на единичном квадрате, пока не найдено. Известны только отдельные индивидуальные приемы, годные лишь для тех или иных сравнительно узких классов игр. Один из таких классов составляют антагонистические игры с выпуклыми функциями выигрыша. Они представляют также известный при кладной интерес. Далее мы рассмотрим несколько примеров таких выпуклых игр.

Для бесконечных антагонистических игр введение аналогичных смешанных стратегий также окажется достаточно плодотворным, хотя, как можно показать, существуют *бесконечные антагонистические игры*, не имеющие ситуаций равновесия (и даже ситуаций е-равновесия при достаточно малом е 0) даже в смешанных стратегиях.

Максиминный принцип поведения игроков не зависит от мощности множеств стратегий игроков. Поэтому переход от матричных игр к *бесконечным антагонистическим играм* никаких концептуальных, чисто теоретико-игровых трудностей не вызывает.

Мы видим, что в статье фон Неймана содержится большинство фундаментальных идей современной теории стратегических игр, и историю теории игр следует начинать именно с нее. Единственным исключением является уже упоминавшаяся работа Билля, содержащая упрощенное доказательство теоремы о минимаксе и полученное на основе исследования игр типа покера распространение ее на случай игр с бесконечными множествами стратегий. В частности, в ней доказывается, что всякая *бесконечная антагонистическая игра*, в которой множество стратегий каждого игрока является единичным сегментом (такие игры теперь принято называть играми на единичном квадрате), а функция выигрыша непрерывна, имеет значение в смешанных стратегиях.

8. РИСКИ И ТЕОРИЯ ИГР

8.1. Принятие решений в условиях риска

8.1.1. Критерий ожидаемого значения

Использование критерия ожидаемого значения обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть X – случайная величина с математическим ожиданием MX и дисперсией DX. Если x1,x2,...,xn – значения случайной величины (с.в.) X, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{DX}{n}$. Таким образом, при $n \to \infty$ $\frac{DX}{n} \to 0$ и $\overline{x} \to$ MX.

Другими словами при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемого значения справедливо только в случае, когда одно и то же решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Пример 1. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае, если ремонт будет производиться слишком часто, затраты на обслуживание будут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени t. В этом и состоит элемент «риска».

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение T, при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и на проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

Пусть pt – вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент t, а nt – случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C1 – затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C2 – затраты на профилактический ремонт одной машины.

Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если ПЭВМ работают в течение большого периода времени. При этом ожидаемые затраты на один интервал составят

$$ОЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

где M(nt) – математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент t. Так как nt имеет биномиальное распределение с параметрами (n, pt), то M(nt) = npt . Таким образом,

$$ОЗ = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}.$$

Необходимые условия оптимальности T* имеют вид

ОЗ (T*-1) ≥ ОЗ (T*),

ОЗ (T*+1) ≥ ОЗ (T*).

Следовательно, начиная с малого значения T, вычисляют ОЗ(T), пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Пусть C1 = 100; C2 = 10; n = 50. Значения pt приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

T	pt	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	ОЗ(T)
1	0.05	0	$\frac{50\ (100\cdot 0+10)}{1}=500$
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366.7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

T*$\rightarrow$ 3 ,   ОЗ(T*) $\rightarrow$ 366.7

Следовательно, профилактический ремонт необходимо делать через T* = 3 интервала времени, так как этому интервалу соответствуют минимальные ожидаемые затраты 366.7.

8.2. Критерий «ожидаемое значение – дисперсия»

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций.

Если x – случайная величина с дисперсией DX, то среднее арифметическое $\bar{x}$ имеет дисперсию DX/n, где n – число слагаемых в $\bar{x}$. Следовательно, если DX уменьшается, и вероятность того, что $\bar{x}$ близко к MX, увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Пример 2. Применим критерий «ожидаемое значение – дисперсия» для примера 1. Для этого необходимо найти дисперсию затрат за один интервал времени, т.е. дисперсию

$$зT = \frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}.$$

Так как nt, t = $\overline{1, T-1}$ – случайная величина, то зT также случайная величина. Параметр nt имеет биномиальное распределение с M(nt) = npt и D(nt) = npt(1–pt).

Следовательно,

$$D(зT) = D\left(\frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\right) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D\left(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\right) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left\{\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right\},$$

где C2n = const.

Из примера 1 следует, что

M(зT) = M(з(T)).

Следовательно, искомым критерием будет минимум выражения

M(з(T)) + к D(зT).

Константу «к» можно рассматривать как уровень несклонности к риску, так как константа «к» определяет «степень возможности» дисперсии Д(зT) по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от M(з(T)), то он может выбрать «к» много больше единицы. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При к = 1 получаем задачу

$$M(З(T)) + D(З(T)) = n\left\{\left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C^2}{T}\right\}$$

По данным примера 1 можно составить таблицу 8.2.

Таблица 8.2

T	pt	pt2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	M(з(T))+D(З(T))
1	0.05	0.0025	0	0	500.00
2	0.07	0.0049	0.05	0.0025	6312.50
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	6622.22
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	6731.25
5	0.18	0.0324	0.35	0.0343	6764.00

Из таблицы видно, что профилактический ремонт необходимо делать в течение каждого интервала T* = 1.

8.3. Принятие решений в условиях неопределённости

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям, а столбцы возможным состояниям системы.

Пусть, например, из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должно иметь изделие из данного материала.

Варианты решения таковы:

E1 – выбор размеров из соображений максимальной долговечности;

Em– выбор размеров из соображений минимальной долговечности;

Ei – промежуточные решения.

Условия требующие рассмотрения таковы:

F1 – условия, обеспечивающие максимальной долговечность;

Fn – условия, обеспечивающие минимум долговечности;

Fi – промежуточные условия.

Под результатом решения eij = e(Ei ; Fj) здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту Ei и условиям Fj и характеризующую прибыль, полезность или надёжность. Обычно мы будем называть такой результат полезностью решения. Тогда семейство (матрица) решений $\|e_{ij}\|$ имеет вид, приведенный на рисунке 6.5.

	1	2	..	n
1	11	12	..	1n
2	21	22	..	2n
		....		
..	....			
m	m 1	m 2	..	m n

Рис. 8.1

Чтобы прийти к однозначному и по возможности выгоднейшему варианту решению необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом матрица решений $\|e_{ij}\|$ сводится к одному столбцу.

Таким образом, каждому варианту Ei приписывается некоторый результат eir, характеризующий, последствия этого решения.

8.3.1. Минимаксный критерий

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:

матрица решений дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов eir каждой строки. Необходимо выбрать те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения eir этого столбца.

Выбранные варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется.

Применение ММ-критерия бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

– о возможности появления внешних состояний Fj ничего не известно;
– приходится считаться с появлением различных внешних состояний Fj;
– решение реализуется только один раз;
– необходимо исключить какой бы то ни было риск.

8.3.2. Критерий Байеса – Лапласа

Обозначим через qi вероятность появления внешнего состояния Fj.

Соответствующее правило выбора можно интерпретировать следующим образом: матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется ещё одним столбцом, содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты, в строках которых стоит наибольшее значение eir этого столбца.

При этом предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

– вероятности появления состояния Fj известны и не зависят от времени;
– решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;
– для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

Таким образом, критерий Байеса-Лапласа (B-L-критерий) более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

8.3.3. Критерий Сэвиджа

$$a_{ij} := \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

$$e_{ir} := \max_i a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$$

Величину aij можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии Fj вместо варианта Ei выбирать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Величину aij можно интерпретировать и как потери (штрафы), возникающие в состоянии Fj при замене оптимального для него варианта на вариант Ei. В последнем случае eir представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям Fj , j $= \overline{1, n}$) потери в случае выбора варианта Ei.

Соответствующее критерию Сэвиджа правило выбора трактуется так: каждый элемент матрицы решений $\| e_{ij} \|$ вычитается из наибольшего результата max eij соответствующего столбца.

Разности aij образуют матрицу остатков $\| e_{ij} \|$. Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей eir. Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию.

8.3.4. Пример и выводы

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям, становится ясно, что вследствие их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов лицо, принимающее решение (ЛПР) выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же, если вирус не будет вовремя обнаружен, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

E1 – полная проверка;

E2 – минимальная проверка;

E3 – отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

F1 – вирус отсутствует;

F2 – вирус есть, но он не успел повредить информацию;

F3 – есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации, приведены в таблице 8.3.

Таблица 8.3

	F1	F2	F3	ММ-критерий		критерий B-L	
				$eir = \min_j eij$	$\max_i eir$	$eir = \sum_j e_{ij}$	$\max_i eir$
E1	–20.0	–22.0	–25.0	–25.0	–25.0	–22.33	
E2	–14.0	–23.0	–31.0	–31.0		–22.67	
E3	0	–24.0	–40.0	–40.0		–21.33	–21.33

Согласно ММ-критерию, следует проводить полную проверку. По критерию Байеса-Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны: P(Fj) = qj = 0.33, рекомендуется отказаться от проверки.

В соответствии с критерием Сэвиджа матрица остатков для этого примера приведена в таблице 8.4.

Таблица 8.4

	F1	F2	F3	Критерий Сэвиджа	
				$eir = \min_j aij$	$\min_j eir$
E1	+20.0	0	0	+20.0	
E2	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	+14.0
E3	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать, поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин невелико, лучше пользоваться критериями минимакса или Севиджа.

8.4. Производные критерии

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, Гурвиц предположил оценочную функцию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма:

$$\max_i eir = \{C \min_j eij + (1- C) \max_j eij \},$$

где C – весовой множитель.

Правило выбора согласно критерию Гурвица, формируется следующим образом: матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется столбцом, содержащим среднее взвешенное наименьшего и наибольшего результатов для каждой строки. Выбираются только те варианты, в строках которых стоят наибольшие элементы eir этого столбца.

При C = 1 критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При C = 0 он превращается в критерий «азартного игрока» $\max_i eir = \max_i \max_j eij$, т.е. мы становимся на точку зрения азартного игрока, делающего ставку на то, что «выпадет» выгоднейший случай.

В технических приложениях сложно выбрать весовой параметр C, так как трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще используют параметр C, равный 0,5.

Критерий Гурвица применяется в следующих случаях:

– о вероятностях появления состояния Fj ничего не известно;

– с появлением состояния Fj необходимо считаться;

– реализуется только малое количество решений;

– допускается некоторый риск.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Выбрать рациональный вариант профилактики ЭВМ. Затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации, приведены ниже.

	F1	F2	F3
E1	–23	–21	–26
E2	–12	–20	–24
E3	–5	–21	–45

2. Принятие решений в условиях риска. Критерий ожидаемого значения.

3. Принятие решений в условиях неопределённости. Минимаксный критерий. Критерий Байеса – Лапласа.

4. Критерий Сэвиджа.

5. Производные критерии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колобашкина, Л. В. Основы теории игр : учеб. пособие / Л. В. Колобашкина. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 162 с. – (Математика). – ISBN 978-5-9963-0334-2. – Текст : непосредственный.

2.Кумарина, Г. Ф. Теория и методика игры : учеб. и практикум для СПО / Г. Ф. Кумарина, О. А. Степанова, М. Э. Вайнер, Н. Я. Чутко. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2020. – 265 с. – (Профессиональное образование). – URL: https://urait.ru/bcode/451578 (дата обращения: 20.04.2020). - Режим доступа: Образовательная платформа Юрайт. – ISBN 978-5-534-07213-6. – Текст : электронный.

3.Алехин, В. В. Теория игр в экономике: лекции и примеры : учеб. пособие / В. В. Алехин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2018. – 153 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274522/ (дата обращения: 24.03.2020). – Режим доступа: ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – ISBN 978-5-4475-3995-5. – Текст : электронный.

4. Шелехова, Л. В. Теория игр в экономике : учеб. пособие / Л. В. Шелехова. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. – 119 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274522/ (дата обращения: 24.03.2020). – Режим доступа: ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – ISBN 978-5-4475-3995-5. – Текст : электронный.

5. Салмина, Н. Ю. Теория игр : учеб. пособие / Н. Ю. Салмина. – Томск : ТУСУР, 2015. – 107 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=480902/ (дата обращения: 24.03.2020). – Режим доступа: ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – Текст : электронный.

6. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2010. – 430 с. – (Основы наук). – ISBN 978-5-9916-0235-8. – Текст : непосредственный.

7. Лемешко, Б. Ю. Теория игр и исследование операций / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : НГТУ, 2013. – 167 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228871/ (дата обращения: 24.03.2020). – Режим доступа: ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – ISBN 978-5-7782-2198-7. – Текст : электронный.

8. Шелехова, Л. В. Теория игр в экономике : учеб. пособие / Л. В. Шелехова. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. – 119 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274522/ (дата обращения: 24.03.2020). – Режим доступа: ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – ISBN 978-5-4475-3995-5. – Текст : электронный.

9. Гадельшина, Г. А. Введение в теорию игр : учеб. пособие / Г. А. Гадельшина. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2014. – 112 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428702/ (дата обращения: 24.03.2020). – Режим доступа: ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – ISBN 978-5-7882-1709-3. – Текст : электронный.

10. Вайсборд, Э. М. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения / Э. М. Вайсборд, В. И. Жуковский. – Москва : Советское радио, 1980. – 304 с. – Текст : непосредственный.

11. Мочалов, И. А. Нечеткие задачи исследования дифференциальных игр / И. А. Мочалов, М. С. Хрисат. – Текст : электронный // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 8-2. – С. 74-76. – URL: https://expeducation.ru/ru/article/view?id=5885 (дата обращения: 07.07.2020).

Учебное издание

Ростовцев Владимир Сергеевич

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Авторская редакция
Тех. редактор М. Н. Котельников

Подписано в печать 13.08.2020. Печать цифровая. Бумага для офисной техники.
Усл. печ. л. 7,13. Тираж 5 экз. Заказ № 6303.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вятский государственный университет».

610000, г. Киров, ул. Московская, 36, тел.: (8332) 74-25-63, http://vyatsu.ru