Aproksymacja profilu wysokościowego

Michał Wrzosek, 184608

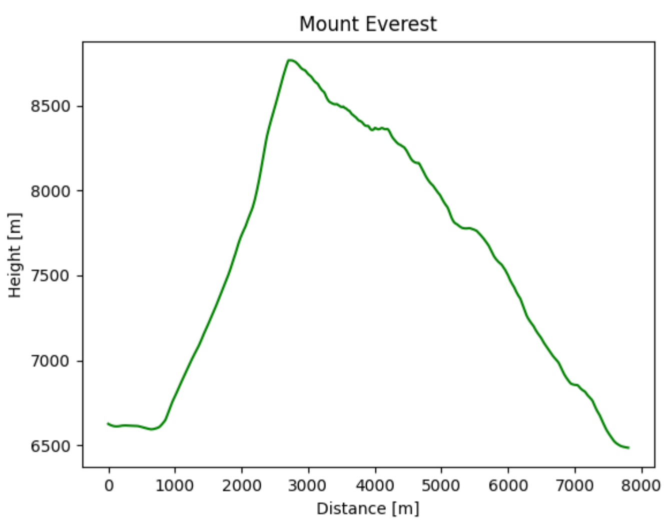
1 Wprowadzenie

1.1 Opis

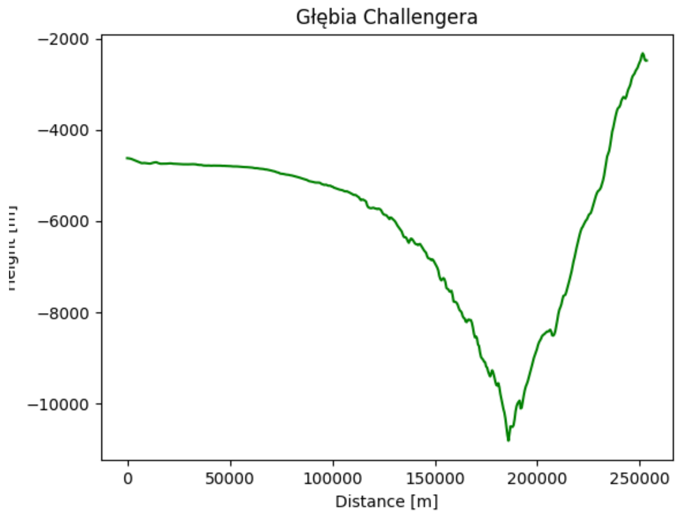
Projekt polegał na implementacji metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metody wykorzystującej funkcje sklejane trzeciego stopnia. Wyniki weryfikowane były w oparciu o dane rzeczywiste wybranych map wysokościowych. Projekt został zrealizowany w języku `Python`. Do prezentacji wykresów posłużyła biblioteka `matplotlib`.

1.2 Wybór danych testowych

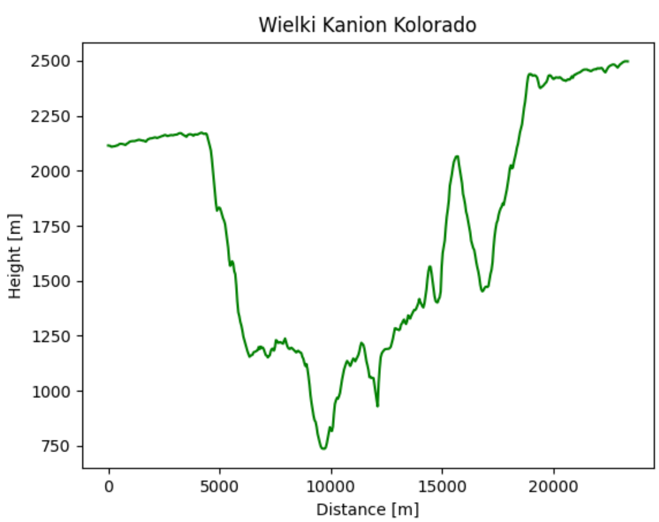
- Mount Everest - jedno wyraźne wzniesienie.



- Głębia Challengera - trasa częściowo płaska, jedno wyraźne zagłębienie.



- Wielki Kanion Kolorado - zróżnicowana trasa, wiele nieregularnych uskoków.



2 Metody interpolacji

2.1 Interpolacja Lagrange'a

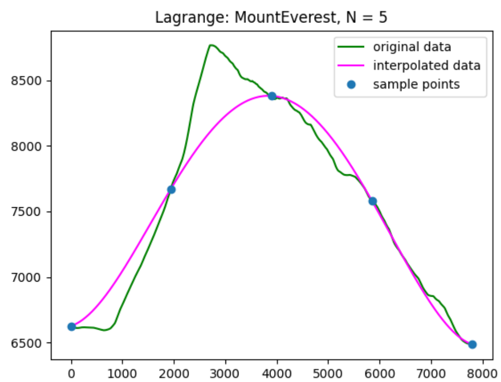
Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a optymalizuje interpolację wielomianową znajdując lepszą bazę funkcji do interpolacji. Charakteryzuje się stabilnością, mało skomplikowaną implementacją oraz niedużą złożonością pamięciową. Funkcja jest aproksymowana wielomianem n-tego stopnia zaczynając od $n + 1$ punktów. Wbrew oczekiwaniom zwiększenie liczby punktów nie jest ekwiwalentne ze zwiększeniem dokładności przybliżenia. Globalność metody Lagrange'a skutkuje jej podatnością na efekt Rungego czyli oscylacje na krawędziach, które zostaną zaprezentowane w dalszej części. Kod metody wygląda następująco:

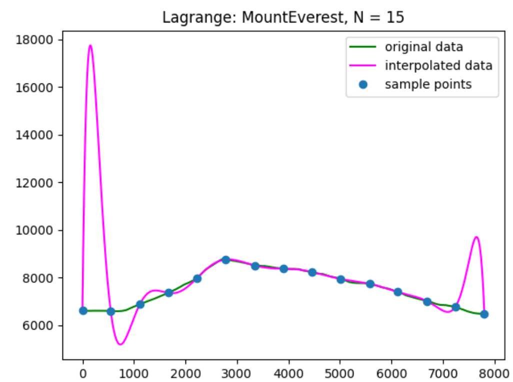
```
# Załadowanie danych oraz wyznaczenie węzłów
data_points = load_data(path)
x_cords, y_cords = zip(*data_points)
samples = make_intervals(data_points, SAMPLE_COUNT)

# Funkcja interpolująca
def lagrange(points, x_points):
    results = list()
    for x in x_points:
        y_p = 0
        for i, (x_i, y_i) in enumerate(points):
            p = 1
            for j, (x_j, y_j) in enumerate(points):
                if i != j:
                    p *= (x - x_j) / (x_i - x_j)
            y_p += p * y_i
        results.append(y_p)
    return results
```

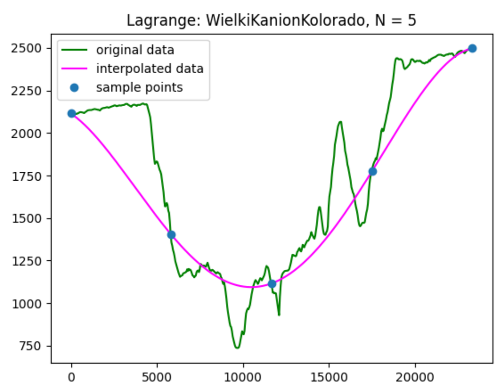
Prezentacja rezultatów na wykresach:

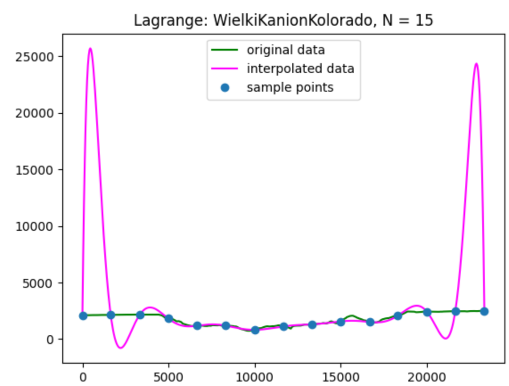
- Mount Everest



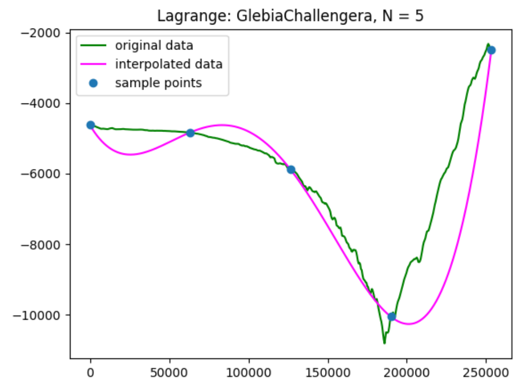


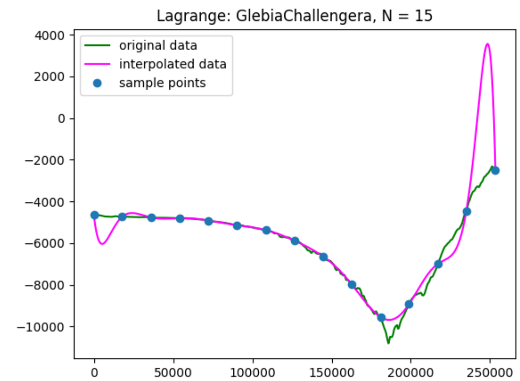
- Wielki Kanion Kolorado





- Głębia Challengera





Funkcja jest poprawnie interpolowana w środku przedziału. Na krańcach wykresów obserwujemy oscylacje, których skala rośnie wraz ze wzrostem ilości węzłów. Dalsze zwiększanie ich liczby jedynie nasiliłoby ten efekt.

2.2 Metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia

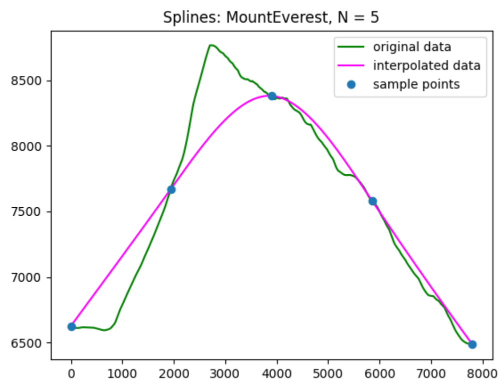
Problem globalności można rozwiązać stosując interpolacje lokalną. Zamiast dopasowywać jeden wielomian do wszystkich punktów lepiej dobrać kilka wielomianów niskiego stopnia do mniejszych podzbiorów. Z uwagi na niesatysfakcjonujące wyniki stosowania funkcji sklejanych pierwszego bądź drugiego stopnia korzystamy z wielomianów trzeciego stopnia. W i-tym podprzedziale wielomian ma postać:

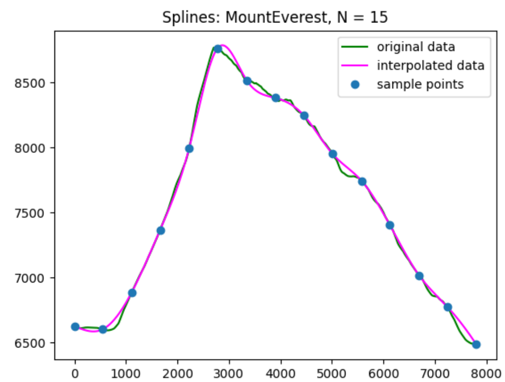
$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Należy utworzyć układ równań, który następnie rozwiązujemy metodą faktoryzacji LU. Kluczowe jest zastosowanie pivotingu w celu uniknięcia błędów spowodowanych potencjalnym występowaniem zer na głównej przekątnej macierzy.

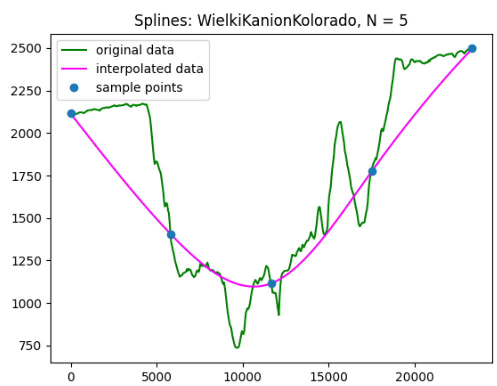
Wyniki prezentują się następująco:

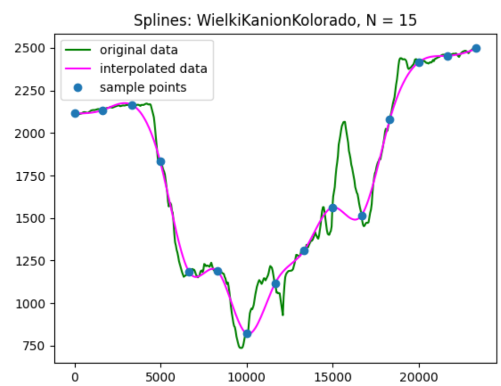
- Mount Everest



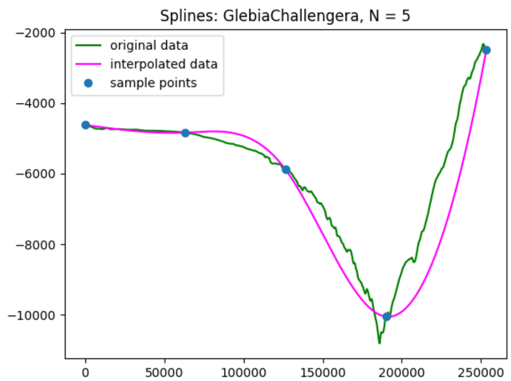


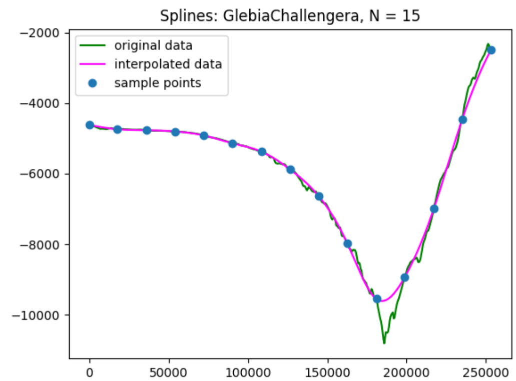
- Wielki Kanion Kolorado





- Głębia Challengera





3 Wnioski

Metoda interpolacji Lagrange'a pomimo szybkości wykonania generuje oscylacje na krańcach przedziału. Zjawisko to nazywa się efektem Rungego. Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów. Aby uniknąć tego efektu, można by na przykład zwiększyć upakowanie węzłów na końcach interpolowanego przedziału. Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi znacząco dokładniej przybliża profil wysokościowy. Jej precyzja wzrasta wraz ze wzrostem ilości węzłów. Wadą tej metody jest większe zapotrzebowanie pamięciowe oraz czasowe związane z koniecznością rozwiązania równania macierzowego. Dla badanych danych obciążenie to było aczkolwiek nieodczuwalne. Innym aspektem wpływającym na skuteczność aproksymacji jest ukształtowanie terenu. Obydwa algorytmy osiągają lepsze wyniki dla jednorodnych, płaskich odcinków oraz tracą precyzję w obecności gwałtownych zmian wysokości.